

Nicolae CHIRA

Roxana BÂLC

Alexandru CĂTĂRIG

Aliz MÁTHÉ

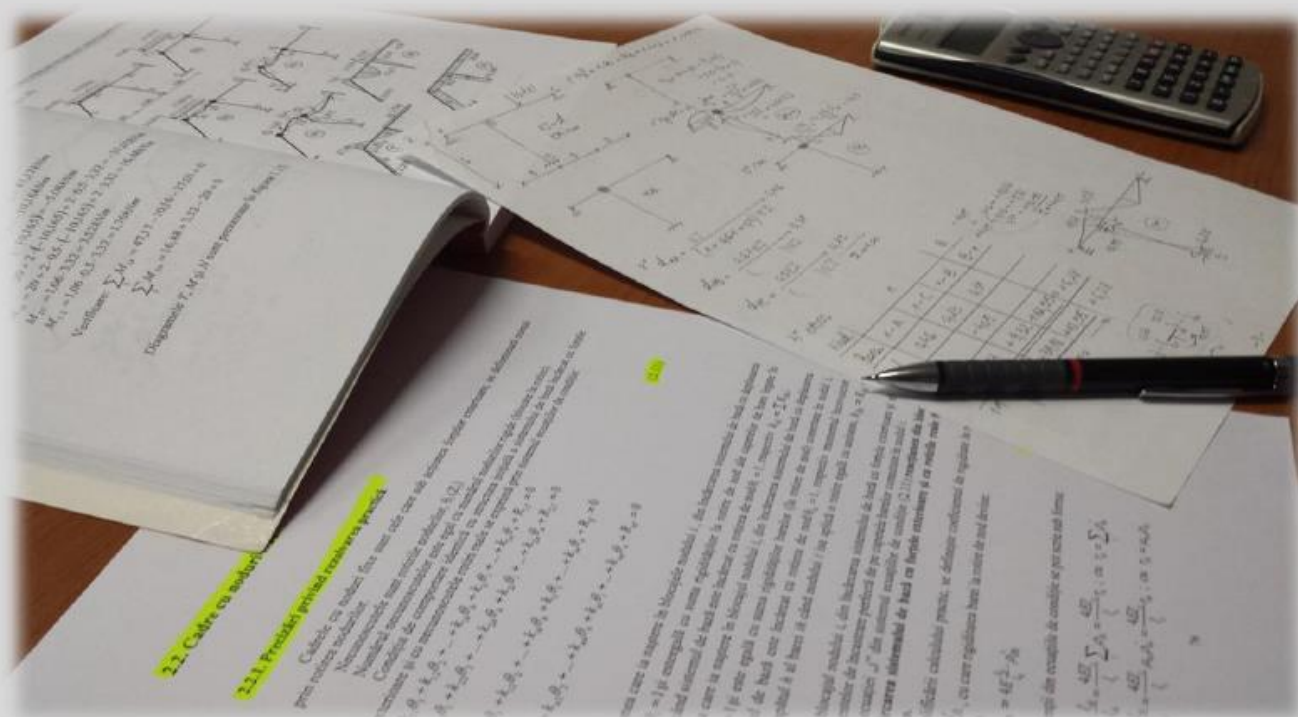
Cristian MOJOLIC

Ioana MUREȘAN

# STATICA CONSTRUCȚIILOR

## STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

- Îndrumător pentru lucrări -



U.T. PRESS  
Cluj-Napoca, 2014  
ISBN 978-606-737-028-7



Editura U.T.PRESS  
Str.Observatorului nr. 34  
C.P.42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca  
Tel.:0264-401.999 / Fax: 0264 - 430.408  
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro  
www.utcluj.ro/editura

Director: Prof.dr.ing. Daniela Manea  
Consilier editorial: Ing. Călin D. Câmpean

Copyright © 2014 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

**ISBN 978-606-737-028-7**

## CUPRINS:

<b>1. METODA GENERALĂ A FORTELOR.....</b>	<b>4</b>
<b>1.1. Principiul metodei .....</b>	<b>4</b>
1.1.1. Etapele metodei.....	4
1.1.2. Precizări teoretice .....	9
<b>1.2. Cadre static nedeterminate.....</b>	<b>9</b>
1.2.1. Particularități ale calculului practic.....	9
1.2.2. Exemple de calcul .....	10
1.2.3. Structuri simetrice.....	26
<b>1.3. Grinzi continue.....</b>	<b>32</b>
1.3.1. Noțiuni teoretice de bază .....	32
1.3.2. Exemplu de calcul.....	35
<b>1.4. Probleme propuse .....</b>	<b>36</b>
<b>2. METODA GENERALĂ A DEPLASĂRILOR .....</b>	<b>67</b>
<b>2.1. Principiile generale ale metodei .....</b>	<b>67</b>
2.1.1. Etapele metodei .....	69
2.1.2. Precizări teoretice .....	70
<b>2.2. Cadre cu noduri fixe .....</b>	<b>76</b>
2.2.1. Precizări privind rezolvarea practică .....	76
2.2.2. Exemple de calcul.....	79
<b>2.3. Cadre cu noduri deplasabile .....</b>	<b>83</b>
2.3.1. Precizări privind calculul practic .....	83
2.3.2. Exemple de calcul.....	86
<b>2.4. Probleme propuse .....</b>	<b>92</b>
<b>ANEXA A- Raspunsuri probleme propuse.....</b>	<b>124</b>

## 1. Metoda generală a forțelor

### 1.1. Principiul metodei

Rezolvarea **structurilor static nedeterminate** (determinarea eforturilor și a deplasărilor) impune respectarea concomitentă a condițiilor de **echilibru static** și **continuitate** a deformatelor. Echilibrul pe forma deformată presupune calculul geometric neliniar.

**Metoda generală a forțelor** abordează structurile din punct de vedere al **nedeterminării statice**.

**Ideea** care stă la baza acestei metode este de a transforma **structura nedeterminată static** într-o **structură static determinată** căreia i se impune o **comportare identică cu cea a structurii inițiale**. Acest lucru presupune eliminarea unor legături (interioare sau exterioare) și înlocuirea acestora cu **forțele de legătură** corespunzătoare (reacțiuni sau eforturi), care devin **necunoscute ale problemei**.

Calculul se conduce pe structura static determinată (sau pe orice structură a cărei rezolvare este cunoscută), numită **sistem de bază (S.B.)**, pentru care se pot determina cu ușurință atât eforturile (diagramele de eforturi), cât și deplasările punctuale. Acestea i se impune ca, sub acțiunea încărcărilor exterioare și a necunoscutelor, să se comporte identic cu structura inițială. În acest sens, se scriu ecuații de deplasări nule după direcția fiecărei necunoscute, obținându-se astfel, sistemul ecuațiilor de condiție.

#### 1.1.1. Etapele metodei

##### 1. Stabilirea gradului de nedeterminare statică al structurii.

Gradul de nedeterminare statică,  $n_s > 0$ , al unei structuri se poate stabili prin mai multe metode:

- Prin aplicarea formulei:  $n_s = r + l - 3c$ , în care  
 $r$  – numărul de legături simple cu terenul,  
 $l$  – numărul de legături simple dintre corpuri,  
 $c$  – numărul corpurilor care compun structura.
- Prin eliminarea succesivă de legături simple până la obținerea unei structuri static determinate. Numărul legăturilor suprimate reprezintă gradul de nedeterminare statică al structurii.
- Prin aplicarea procedurii conturilor închise, conform căruia  $n_s = 3 * (nr. contururi \text{ închise}) - (nr. legături simple \text{ lipsă})$ , cu precizarea că un contur închis (alcătuit numai din bare sau din bare și teren între care există doar legături de încastrare) este de trei ori static nedeterminat.

*!Atenție la numărarea conturilor închise! Fiecare contur închis trebuie să conțină cel puțin o bară care nu este conținută în alt contur!*

##### 2. Alegerea sistemului de bază

Se suprimă un număr de legături (exterioare sau interioare) egal cu gradul de nedeterminare statică al structurii, iar pe direcția legăturilor înlăturate se introduc forțele de legătură corespunzătoare, care vor constitui necunoscutele problemei. În urma acestei operațiuni se obține o structură static determinată, acționată de încărcările exterioare direct aplicate (forțe, cedări de reazeme, variații de temperatură) și de necunoscutele-forțe introduse pe direcția legăturilor suprimate, numită **sistem de bază**.

Sistemul de bază, rezultat în urma eliminării unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică al structurii, trebuie să fie corect din punct de vedere al asigurării invariabilității geometrice și fixării față de teren, adică să nu prezinte zone de mecanism sau sistem critic.

În vederea reducerii volumului de calcul (prin anularea unor coeficienți secundari, sau obținerea unor relații de calcul mai simple), la alegerea sistemului de bază se au în vedere următoarele aspecte:

- diagrama de moment încovoietor din forțe exterioare pe sistemul de bază să se extindă pe cât mai puține bare,
- pe barele structurii diagramele de moment din forțele exterioare să rezulte de forme geometrice cu arie cunoscută (parabolă, triunghi, dreptunghi),
- Se recomandă alegerea de necunoscute momente încovoietoare, pentru că, în urma rezolvării sistemului de ecuații, acestea sunt chiar eforturile finale din secțiunile respective.

### 3. Trasarea diagramelor de moment pe sistemul de bază

Sistemul de bază, astfel obținut, se încarcă succesiv cu forțele exterioare și cu fiecare necunoscută egală cu unitatea și se trasează diagramele de moment încovoietor aferente:  $M_f$ , respectiv  $m_i, (i = \overline{1, n_s})$ .

### 4. Scrierea și rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție

Se scrie condiția ca sistemul de bază încărcat cu forțele exterioare date și cu necunoscutele-forțe să se comporte identic cu structura inițială (nedeterminată static). Condiția de continuitate a deformatelor structurii se exprimă prin impunerea de deplasări nule\* pe direcția legăturilor suprimate (în realitate deplasarea este blocată de legătura respectivă). Rezultă astfel, un sistem de  $n$  ecuații ( $n=n_s$ ) cu  $n$  necunoscute (o ecuație pentru fiecare legătură suprimată).

Sistemul ecuațiilor de condiție, pentru încărcările exterioare aplicate structurii, are formele:

- Cazul încărcării cu forțe exterioare

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{if} = 0 \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nf} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Toți coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au semnificația de deplasări ale punctelor de aplicație ale necunoscutelor:

- $\delta_{ii}$  este deplasarea punctului de aplicație al necunoscutei  $X_i$  pe direcția acesteia, din încărcarea sistemului de bază cu  $X_i = 1$ ,
- $\delta_{ij}$  este deplasarea punctului de aplicație al necunoscutei  $X_i$  pe direcția acesteia, din încărcarea sistemului de bază cu  $X_j = 1$ ,
- $\Delta_{if}$  este deplasarea punctului de aplicație al necunoscutei  $X_i$  pe direcția acesteia, din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare direct aplicate.

Expresiile acestor deplasări punctuale sunt:

Coeficienții necunoscutelor nu depind de tipul încărcării, și se calculează cu formulele:

$$\delta_{ii} = \int \frac{m_{x_i}^2}{EI} dx + \int \frac{n_{x_i}^2}{EA} dx + \int k \frac{t_{x_i}^2}{GA} dx \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{m_{x_i} m_{x_j}}{EI} dx + \int \frac{n_{x_i} n_{x_j}}{EA} dx + \int k \frac{t_{x_i} t_{x_j}}{GA} dx \quad (3)$$

$$\Delta_{if} = \int \frac{M_{x_f} m_{x_i}}{EI} dx + \int \frac{N_{x_f} n_{x_i}}{EA} dx + \int k \frac{T_{x_f} t_{x_i}}{GA} dx \quad (4)$$

unde:

$m_{x_i}, n_{x_i}, t_{x_i}$  sunt eforturile din secțiunea curentă, pe sistemul de bază încărcat cu  $X_i = 1$ ,

$m_{x_j}, n_{x_j}, t_{x_j}$  sunt eforturile din secțiunea curentă, pe sistemul de bază încărcat cu  $X_j = 1$ ,

$M_{x_f}, N_{x_f}, T_{x_f}$  sunt eforturile din secțiunea curentă, pe sistemul de bază încărcat cu forțele exterioare date.

- Cazul încărcării cu variații de temperatură

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{it} = 0 \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta_{it} = \int \alpha^t \frac{\Delta t \cdot m_{x_i}}{h} dx + \int \alpha^t m_{x_i} dx \quad (6)$$

unde:

$\alpha^t$  este coeficientul de dilatare termică a materialului,

$\Delta t$  este variația de temperatură pe înălțimea secțiunii transversale dintre fețele secțiunii, față de temperatura de montaj (de execuție).

$h$  este dimensiunea secțiunii transversale a barei după direcția în care se manifestă gradientul de temperatură,

$t$  este variația temperaturii în axa barei față de temperatura de montaj.

- Cazul încărcării cu cedări de reazeme

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1r} = 0 \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ir} = 0 \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nr} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\Delta_{ir} = - \sum r_{ik} \Delta_k^r \quad (8)$$

unde:

$r_{ik}$  este reacțiunea care se dezvoltă, pe direcția cedării de reazem  $k$  din încărcarea sistemului de bază cu  $X_i = 1$

$\Delta_k^r$  este cedarea de reazem după direcția  $k$ .

Această etapă are ca finalitate obținerea soluțiilor sistemului ecuațiilor de condiție, respectiv valorile necunoscutele pentru care sunt îndeplinite condițiile de echilibru static și de continuitate a deformatei structurii.

#### Observații

Termenul de deplasare definește o deplasare generalizată care poate fi rotire sau translație.

Termenul de forță se referă la o forță generalizată care poate fi moment încovoietor sau forță.

#### 4.1. Verificarea coeficienților și a termenilor liberi

a) Verificarea coeficienților din ecuațiile de condiție se realizează parcurgând următoarele etape:

Se calculează suma coeficienților (principali și secundari) determinați.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \quad (9)$$

Se încarcă sistemul de bază concomitent cu toate necunoscutele  $X_i = 1, i=1, n$  și se trasează diagrama de moment încovoietor corespunzătoare,  $m_s$ .

Se calculează

$$\delta_{ss} = \int \frac{m_{xs}^2}{EI} dx \quad (10)$$

Dacă este satisfăcută relația

$$\delta_{ss} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \quad (11)$$

Coefficienții sunt corect calculați.

b) Verificarea termenilor liberi din ecuațiile de condiție

Se calculează suma termenilor liberi

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{if} \quad (12)$$

Se calculează

$$\Delta_{sf} = \int \frac{M_{Xf} m_{xs}}{EI} ds \quad (13)$$

Se verifică dacă este îndeplinită egalitatea

$$\Delta_{sf} = \sum_{i=1}^n \Delta_{if} \quad (14)$$

## 5. Trasarea digramelor finale de eforturi pe structură

### a) Trasarea diagramei finale de moment pe structură

Momentele încovoietoare la capetele barelor structurii nedeterminate static se calculează considerând efectele cumulate, pe sistemul de bază, ale încărcărilor exterioare date și ale necunoscutelor determinate în etapa precedentă, astfel:

- Cazul încărcării cu forțe exterioare

$$M^{JK} = M_f^{JK} + \sum_{i=1}^n (m_i^{JK} \cdot X_i) \quad (15)$$

- Cazul încărcării doar cu variații de temperatură și/sau cedări de reazeme:

$$M^{JK} = \sum_{i=1}^n (m_i^{JK} \cdot X_i) \quad (16)$$

unde:

- $M^{JK}$  este valoarea momentului încovoietor la capătul J al barei JK pe structura reală (static nedeterminată).
- $M_f^{JK}$  este valoarea momentului încovoietor la capătul J al barei JK, pe sistemul de bază obținut în urma încărcării acestuia cu forțele exterioare date (valoarea aferentă din diagrama  $M_f$ ).

- $m_i^{JK}$  este valoarea momentului încovoietor la capătul J al barei JK, pe sistemul de bază, obținut în urma încărcării acestuia cu necunoscuta  $X_i = 1$  (valoarea aferentă din diagrama  $m_i$ ).

Pentru determinarea celorlalte eforturi (T și N), pe structura reală, se pot aplica relații similare celei utilizate la calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor (relațiile (15) sau (16), în funcție de tipul încărcării exterioare), ceea ce impune trasarea diagramelor de eforturi din încărcarea cu forțe exterioare ( $T_f, N_f$ ), respectiv cu fiecare necunoscută egală cu unitatea ( $t_i, n_i$ ):

$$T^{JK} = T_f^{JK} + \sum_{i=1}^n (t_i^{JK} \cdot X_i) \quad (17)$$

$$N^{JK} = N_f^{JK} + \sum_{i=1}^n (n_i^{JK} \cdot X_i) \quad (18)$$

O altă metodă pentru trasarea diagramelor de eforturi T și N are la bază echilibrul fiecărei părți din structură sub acțiunea forțelor exterioare direct aplicate și a părților înlăturate (eforturile în secțiunile care delimitează corpul: capetele barei, respectiv fețele nodului).

#### b) Trasarea diagramei de forță tăietoare pe structura reală

Fiecare bară se desprinde din structură și se consideră simplu rezemată și încărcată cu forțele exterioare direct aplicate și cu momentele încovoietoare de la capetele ei, calculate cu formula (15).

Din această încărcare se trasează diagrama de forță tăietoare pe fiecare bară a structurii.

Se transcriu pe structură diagramele de forță tăietoare trasate pe bare, rezultând, astfel, diagrama finală a acestui efort.

#### c) Trasarea diagramei de efort axial pe structura reală

Se izolează fiecare nod al structurii și se încarcă cu forțele direct aplicate și cu forțele tăietoare evidențiate prin îndepărtarea barelor.

Se scrie echilibrul nodului exprimat prin două ecuații de proiecții după două direcții din plan.

### 6. Verificarea diagramelor de eforturi

Condiția de echilibru static: se verifică echilibrul nodurilor și al barelor.

Condiția de continuitate: se verifică dacă deplasările în anumite secțiuni pe structura static nedeterminată corespund situației reale.

$$\Delta_i = \int \frac{M_x m_{x_i}^0}{EI} dx \quad (19)$$

unde:

$M_x$  este momentul încovoietor în secțiunea curentă pe structura reală,  $m_{x_i}^0$  este momentul încovoietor în secțiunea curentă pe sistemul de bază încărcat cu forța unitate introdusă pe direcția deplasării calculate.

*Pentru calculul deplasărilor, sistemul de bază se alege cât mai convenabil (nu este necesar să fie același sistem de bază utilizat pentru rezolvarea problemei).*

*Pentru etapa de verificare se recomandă să se verifice deplasările în secțiuni diferite de cele utilizate în calculul structurii.*

d) Verificarea momentelor finale de la capetele barelor cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual nul.



### 1.1.2. Precizări teoretice

- Necunoscutele în Metoda Forțelor sunt forțe care evidențiază efectul legăturilor suprimate asupra structurii în secțiunile modificate.
- Legăturile cu terenul exercită asupra secțiunilor în care sunt aplicate două acțiuni:
  - conferă o libertate de deplasare concretizată prin posibilități de deplasare după anumite direcții în plan, proprietate cunoscută sub denumirea de grad de libertate al secțiunii de rezemare,
  - dezvoltă forțe reactive asupra secțiunii de rezemare, pe direcția deplasărilor împiedicate (respectiv a gradelor de libertate blocate), denumite generic reacțiuni.

Suprimarea unei legături cu terenul este asociată cu introducerea unei forțe pe direcția acesteia. Valoarea forței de legătura (necunoscuta problemei) rezultă din impunerea condiției de deplasare nulă pe direcția legăturii înlăturate.

Suprimarea unei legături în structură (legătură interioară) produce deplasarea relativă a fețelor secțiunii abordate. Refacerea continuității în aceste secțiuni se poate realiza, pe structura static determinată obținută în urma efectuării acestei operațiuni, prin aplicarea unor perechi de eforturi de valoare necunoscută pe direcția legăturii suprimate și impunerea condiției de deplasare relativă nulă pe direcția legăturii suprimate.

- \*Există situații în care deplasarea pe direcția necunoscutelor este diferită de zero și are o valoare cunoscută sau care se poate determina prin calcul:
  - cazul cedărilor de rezeme;
  - cazul structurilor cu tiranți, la care rezolvarea se face prin eliminarea tiranților.
- Orice ecuație „i” din sistemul ecuațiilor de condiție exprimă faptul că deplasarea pe direcția necunoscutei  $X_i$  este egală cu zero (sau are o valoare cunoscută). Fiecare coeficient și termenul liber din ecuația „i” va avea primul indice „i”.

## 1.2. Cadre static nedeterminate

### 1.2.1. Particularități ale calculului practic

Aplicarea Metodei Forțelor la calculul structurilor alcătuite din bare drepte sollicitate predominant la încovoire (cadre, grinzi) permite efectuarea unor simplificări în ceea ce privește calculul coeficienților și a termenilor liberi. Astfel, în relațiile (2), (3), (4), ponderea momentului încovoiator în determinarea deplasărilor punctuale este mult mai mare comparativ cu efectul celorlalte eforturi, acestea din urmă neinfluențând practic comportarea stucturii.

În aceste situații, coeficienții și termenii liberi se calculează cu relațiile:

$$\delta_{ii} = \int \frac{m_{x_i}^2}{EI} dx \quad (20)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{m_{x_i} m_{x_j}}{EI} dx \quad (21)$$

$$\Delta_{if} = \int \frac{M_{x_f} m_{x_i}}{EI} dx \quad (22)$$

În plus, întrucât diagramele de moment încovoiator pe sistemul de bază încărcat cu necunoscutele  $X_i = 1$  rezultă cel mult liniare, pentru calculul integralelor se poate utiliza regula lui Veresceaghin.

## 1.2.2. Exemple de calcul

### Aplicația 1 (Fig. 1.1)

Structura este o dată nedeterminată static.

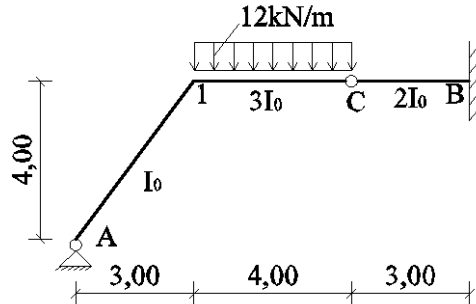


Fig. 1.1

Se studiază structura și se trasează calitativ diagrama de moment încovoietor din forțele exterioare pe mai multe sisteme de bază posibile. Se constată că:

- Suprimarea unei legături cu terenul în reazemul A determină obținerea de diagrame de moment încovoietor pe toate barele structurii. Se testează efectul înlăturării altor legături.
- Eliminarea unei legături cu terenul în capătul B implică obținerea unei bare cu moment încovoietor nul (bara C-B, neîncărcată, devine dublu articulată). La capetele 1 ale barelor 1-C și 1-A valoarea momentului încovoietor va fi diferită de zero, iar pe bara 1-C variația momentului va fi parabolică, dar de arie necunoscută (necesită descompunere în arii elementare).
- Suprimarea legăturii interioare din nodul 1 produce moment nul pe bara A-1 (bară dublu articulată și neîncărcată) și obținerea de diagrame de moment de forme elementare pe barele 1-C și C-B, respectiv parabolă simetrică cu tangenta orizontală și triunghi.

Din analiza acestor aspecte, se dovedește a fi avantajoasă alegerea sistemului de bază din figura 1.2.

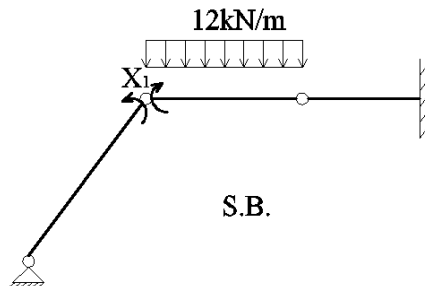


Fig. 1.2

Pe sistemul de bază ales, se trasează diagramele de moment încovoietor din forțele exterioare date,  $M_f$ , și din necunoscuta  $X_1 = 1, m_1$ . Schemele de transmitere a încărcărilor și diagramele pe S.B. sunt date în figura 1.3.

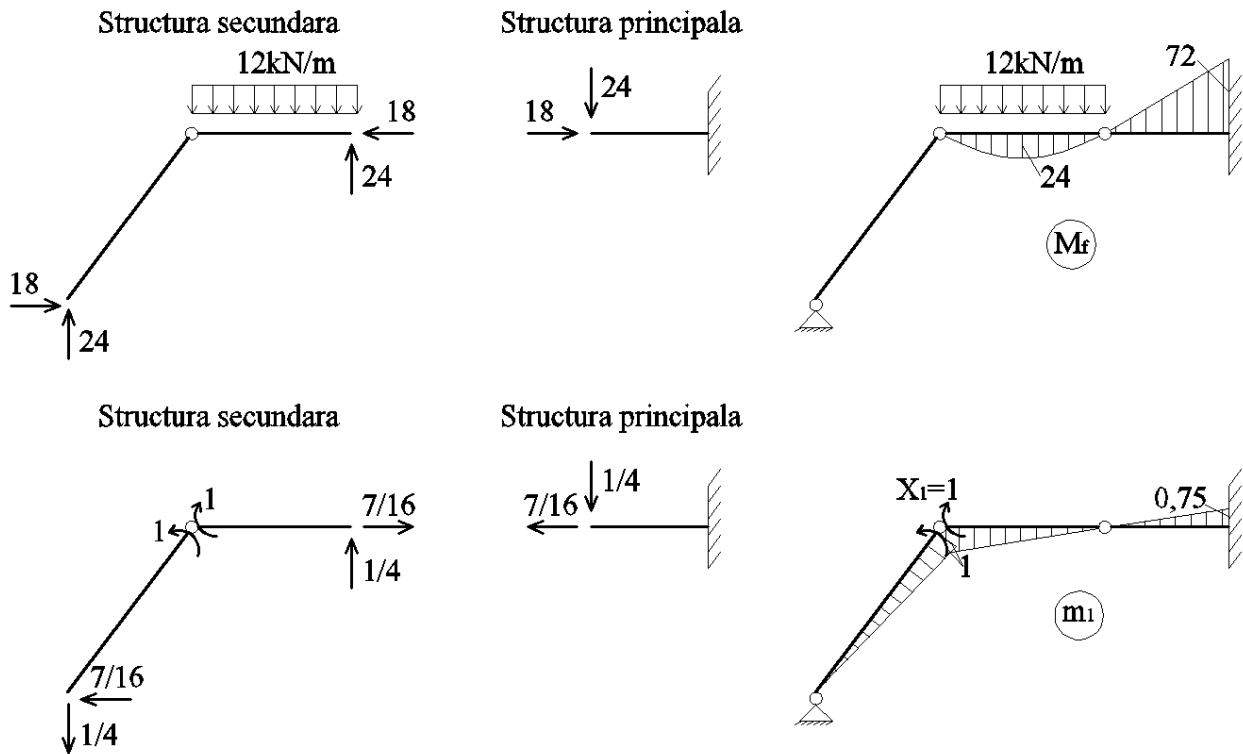


Fig. 1.3

Se impune sistemului de bază acționat de forțele exterioare date și de necunoscuta  $X_1$ , condiția de comportare identică cu structura inițială (static nedeterminată). Altfel spus, se scrie condiția ca rotirea relativă a capetelor de bare concurente în nodul 1 să fie egală cu zero (valoarea reală pe structura dată), condiție exprimată prin ecuația  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0$ .

Se calculează coeficientul necunoscutei și termenul liber prin integrarea diagramelor aferente de moment cu regula lui Veresceaghin.

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0$$

$$EI_0\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 = 2,39$$

$$EI_0\Delta_{1f} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 = 37,67$$

Rezultă  $X_1 = -15,76kNm$

Momentele încovoiitoare finale de la capetele barelor rezultă:

$$M_{A1} = 0$$

$$M_{1A} = M_{A1} = 0 + 1 \cdot (-15,76) = -15,76kNm$$

$$M_{C1} = M_{CB} = 0$$

$$M_{BC} = -72 - 0,75 \cdot (-15,76) = -60,18kNm$$

Pe barele A-1 și C-B momentul încovoiitor variază liniar (bare neîncărcate cu forțe exterioare).

Pe bara 1-C, încărcată cu forța uniform distribuită, momentul încovoiator variază după o parabolă de ordinul II. Modul de variație al momentului încovoiator pe bare astfel solicitate depinde de variația forței tăietoare pe acest interval. Din acest motiv, în astfel de situații, se procedează în modul următor:

- se desprind barele din structură,
- se consideră simplu rezemate la capete,
- se încarcă cu forțele exterioare direct aplicate pe ele și cu momentele încovoiatoare de la capete,
- se trasează diagramele de forță tăietoare și de moment încovoiator pe fiecare bară.

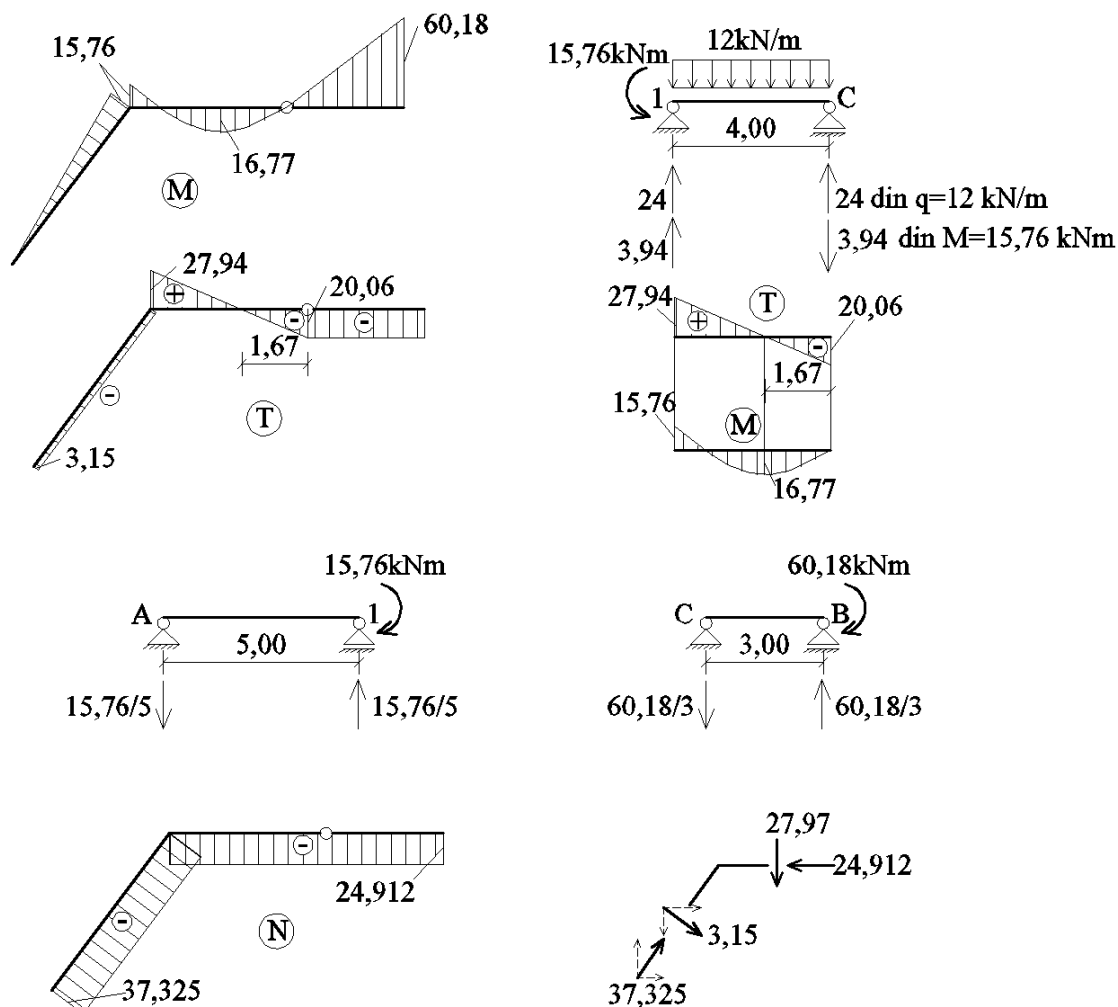


Fig. 1.4

Diagrama de forță tăietoare pe structură (Fig.1.4) se trasează considerând echilibrul fiecărei bare sub acțiunea forțelor direct aplicate și a părților înlăturate (momentele încovoiatoare cunoscute de la capetele barelor), așa cum s-a procedat la trasarea diagramei T și M pentru bara 1-C.

*Observație: Barele neîncărcate desprinse din structură sunt acționate numai de momentele încovoiatoare de pe capete. Momentul de pe capătul barei este anulat de un cuplu de forțe care reprezintă forțele tăietoare de la capetele barelor din această încărcare. Valoarea forței tăietoare va fi  $T_{ij} = \frac{M}{l}$ ,  $l$  fiind lungimea barei.*

*Semnul forței tăietoare se stabilește în funcție de sensul de rotire (+ dacă rotește în sens orar).*

Trasarea diagramei de efort axial pe structură se realizează pe baza echilibrului nodurilor (Fig. 1.4).

Echilibrul nodului 1 (singurul nod rigid al structurii):

$$\cos\alpha = 0,6; \quad \sin\alpha = 0,8$$

$$\sum F_y = 0; \quad 27,97 + 3,15 \cdot 0,6 + N_{1-A} \cdot 0,8 = 0; \quad N_{1-A} = -37,325kN$$

$$\sum F_x = 0; \quad N_{1-C} + 3,15 \cdot 0,8 + 37,32 \cdot 0,6 = 0; \quad N_{1-C} = -24,912kN$$

### Aplicația 2 (Fig. 1.5)

Structura este o dată static nedeterminată. Suprimarea unei legături cu terenul din reazemele A sau B determină obținerea de diagrame de moment încovoietor din forțele exterioare pe toate barele sistemului de bază. Se optează pentru alegerea sistemului de bază ca în figura 1.5. Diagramele  $M_f$  și  $m_1$  sunt trasate în aceeași figură alături de schemele aferente de transmitere a încărcărilor.

Ecuția de condiție

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0$$

$$EI_0\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1\right) + 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 11,33$$

$$EI_0\Delta_{1f} = -30 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right) - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1\right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,5 + 0,5\right) = -350$$

$$X_1 = \frac{350}{11,33} = 30,89kNm$$

Momentele încovoietoare finale de la capetele barelor sunt:

$$M_A = 90 - 2 \cdot 30,89 = 28,22kNm$$

$$M_{1a} = -30kNm$$

$$M_{1c} = -1 \cdot 30,89 = -30,89kNm$$

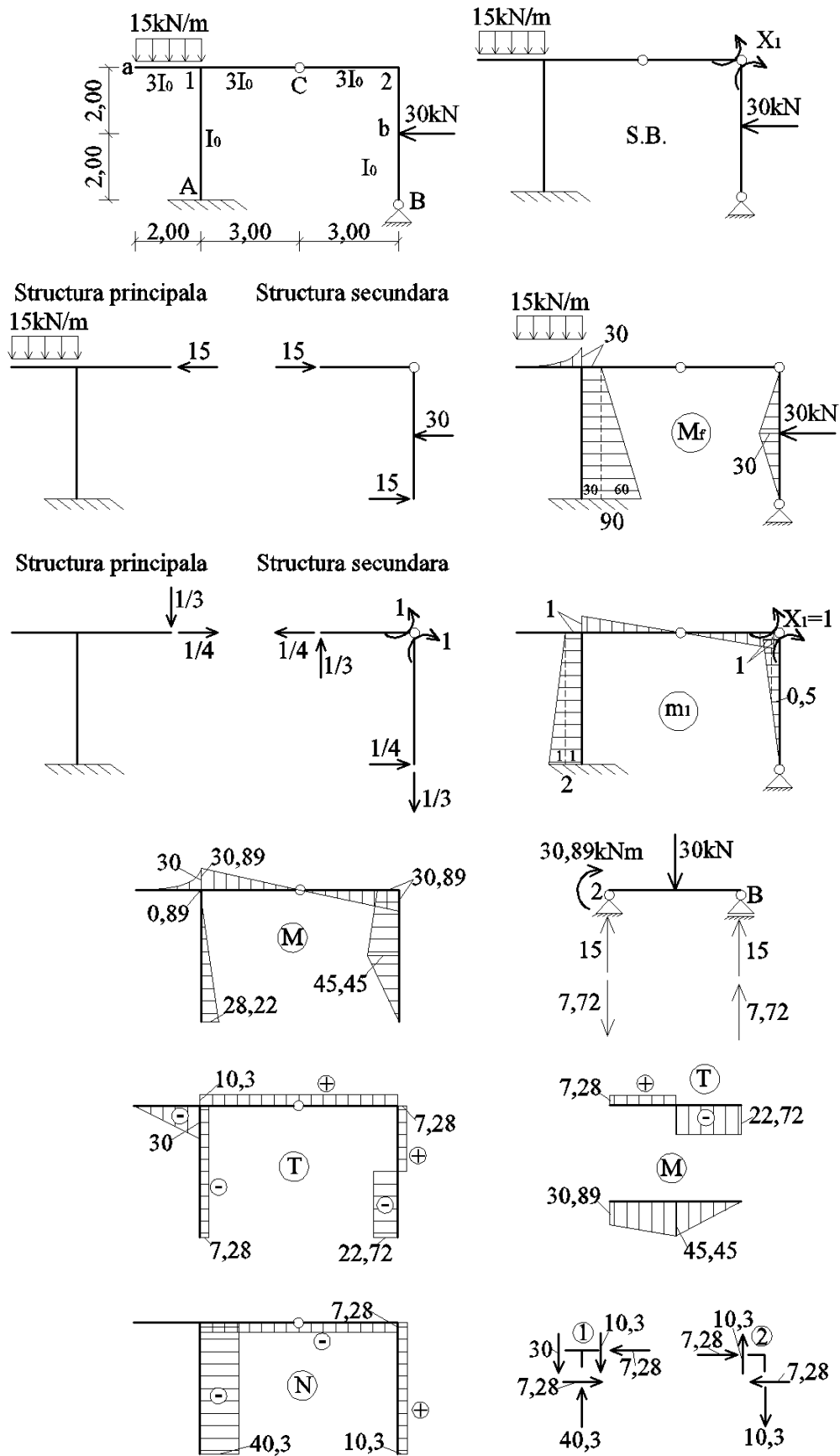


Fig. 1.5

$$M_5 = 1 \cdot 30,89 = 30,89 \text{ kNm}$$

$$M_b = 30 + 0,5 \cdot 30,89 = 45,45 \text{ kNm}$$

Diagramele de forță tăietoare și de efort axial rezultă prin echilibrul barelor, respectiv al nodurilor (Fig.1.5).

Echilibrul nodului 1:

$$\sum F_x = 0; \quad N_{1-2} + 7,28 = 0; \quad N_{1-2} = -7,28 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_{1-A} + 30 + 10,3 = 0; \quad N_{A-1} = -40,3 \text{ kN}$$

Echilibrul nodului 2:

$$\sum F_x = 0; \quad 7,28 - 7,28 = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad 10,3 - N_{2-B} = 0; \quad N_{2-B} = 10,3 \text{ kN}$$

### Aplicația 3 (Fig.1.6, 1.7 și Fig. 1.8)

Structura este de doua ori static nedeterminată. Sistemul de bază s-a ales ca în figura 1.6. Diagramele de moment încovoietor pe sistemul de bază și schemele aferente de transmitere a încărcărilor sunt trasate în figura 1.7.

*Observație: suprimarea legăturii orizontale din reazemul B, în locul legăturii interioare din nodul 2, produce aceeași diagramă  $M_f$ .*

Se scriu condițiile de rotații relative nule pe direcția perechilor de momente  $X_1$ , respectiv  $X_2$

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

și se calculează coeficienții necunoscutelor și termenii liberi din ecuațiile de condiție:

$$EI_0\delta_{11} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4,67$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = -1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -1,67$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 3,33$$

$$EI_0\Delta_{1f} = 30 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 67,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 405$$

$$EI_0\Delta_{2f} = -\left(30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 67,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -175$$

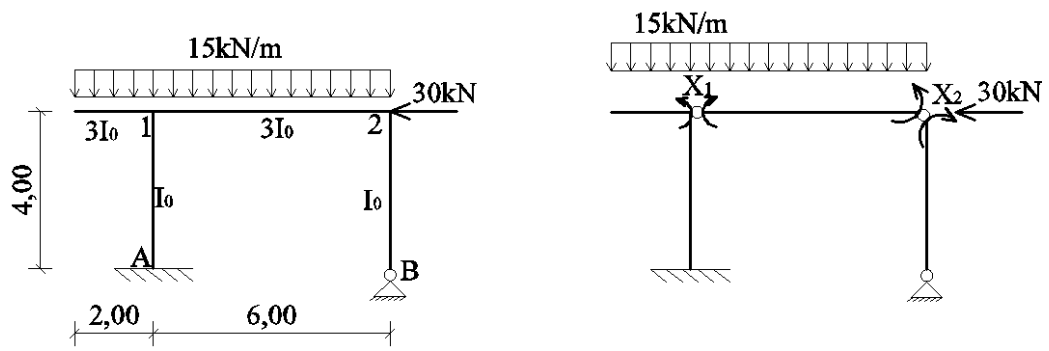


Fig. 1.6

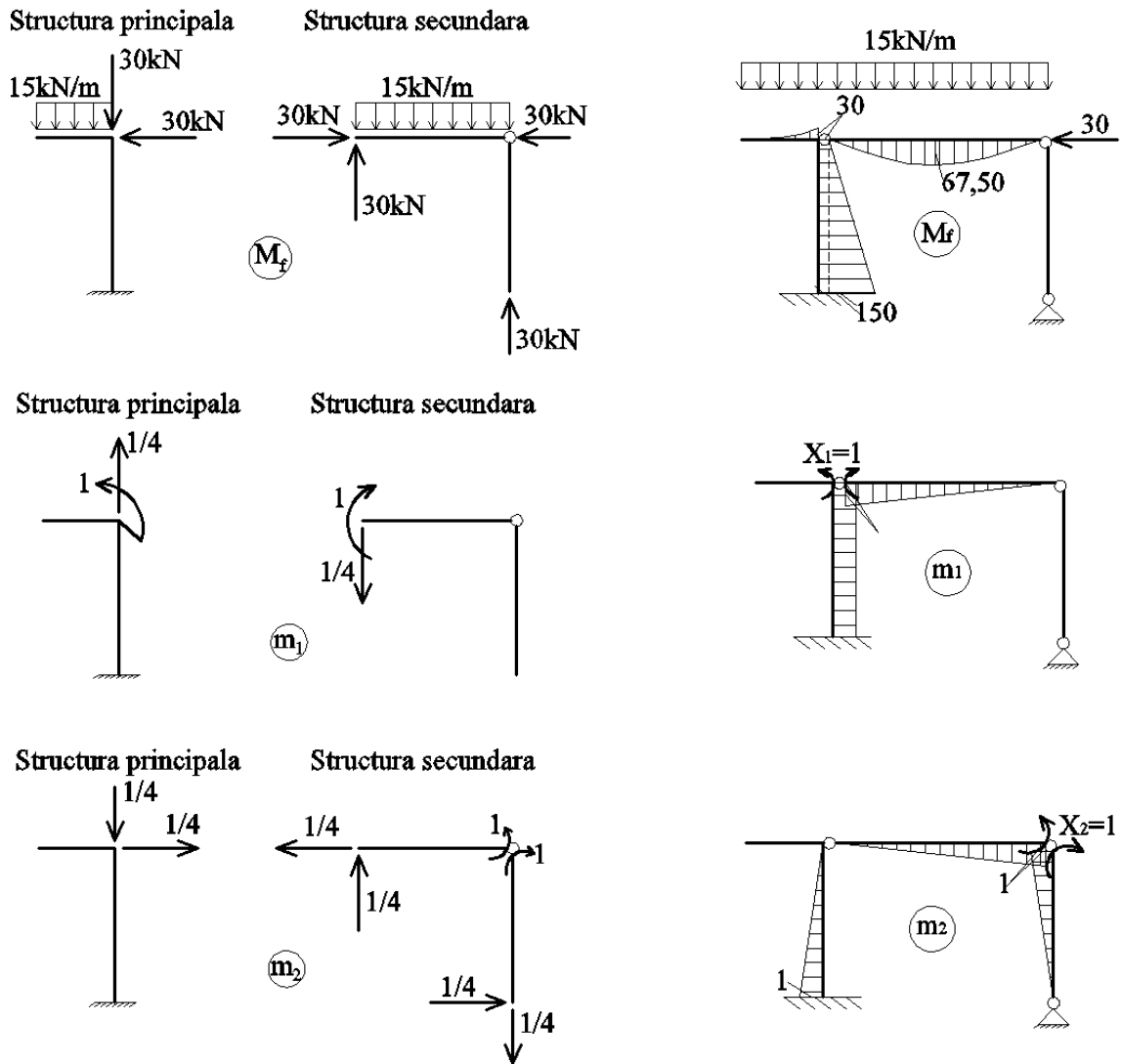


Fig. 1.7



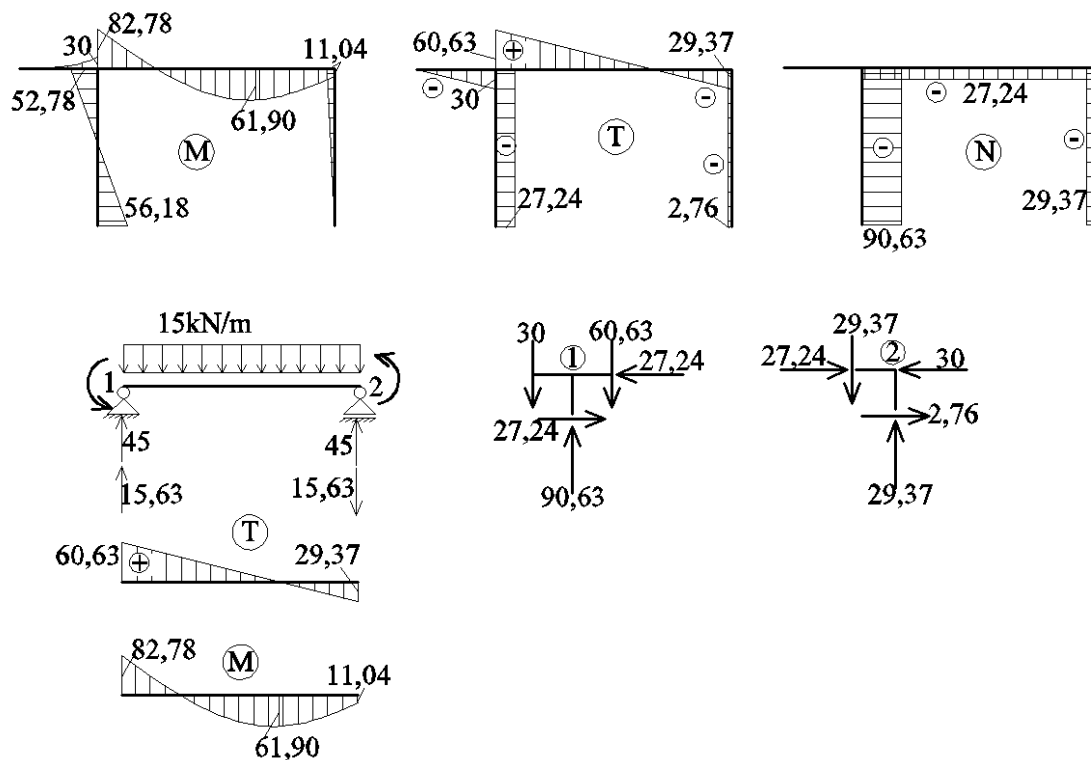


Fig. 1.8

Se determină necunoscutele sistemului ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} 4,67X_1 - 1,67X_2 + 405 = 0 \\ -1,67X_1 + 3,33X_2 - 175 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -82,78 \text{ kNm};$$

$$X_2 = 11,04 \text{ kNm}$$

Momentele încovoietoare de la capetele barelor au valorile:

$$M_{A1} = 150 + 1 \cdot (-82,78) - 1 \cdot 11,04 = 56,18 \text{ kNm}$$

$$M_{1A} = M_{12} = 30 + 1 \cdot (-82,78) = -52,78 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 1 \cdot 11,04 = 11,04 \text{ kNm}$$

$$M_{1C} = -30 = -30 \text{ kNm}$$

Diagramele de moment încovoietor, forță tăietoare și efort axial sunt trasate în figura 1.8.

#### Aplicația 4 (Fig.1.9)

Structura este de două ori nedeterminată static. Se adoptă sistemul de bază din figura 1.9 (cadru cu trei articulații). Diagramele de moment încovoietor pe sistemul de bază sunt trasate în aceeași figură. Sistemul ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

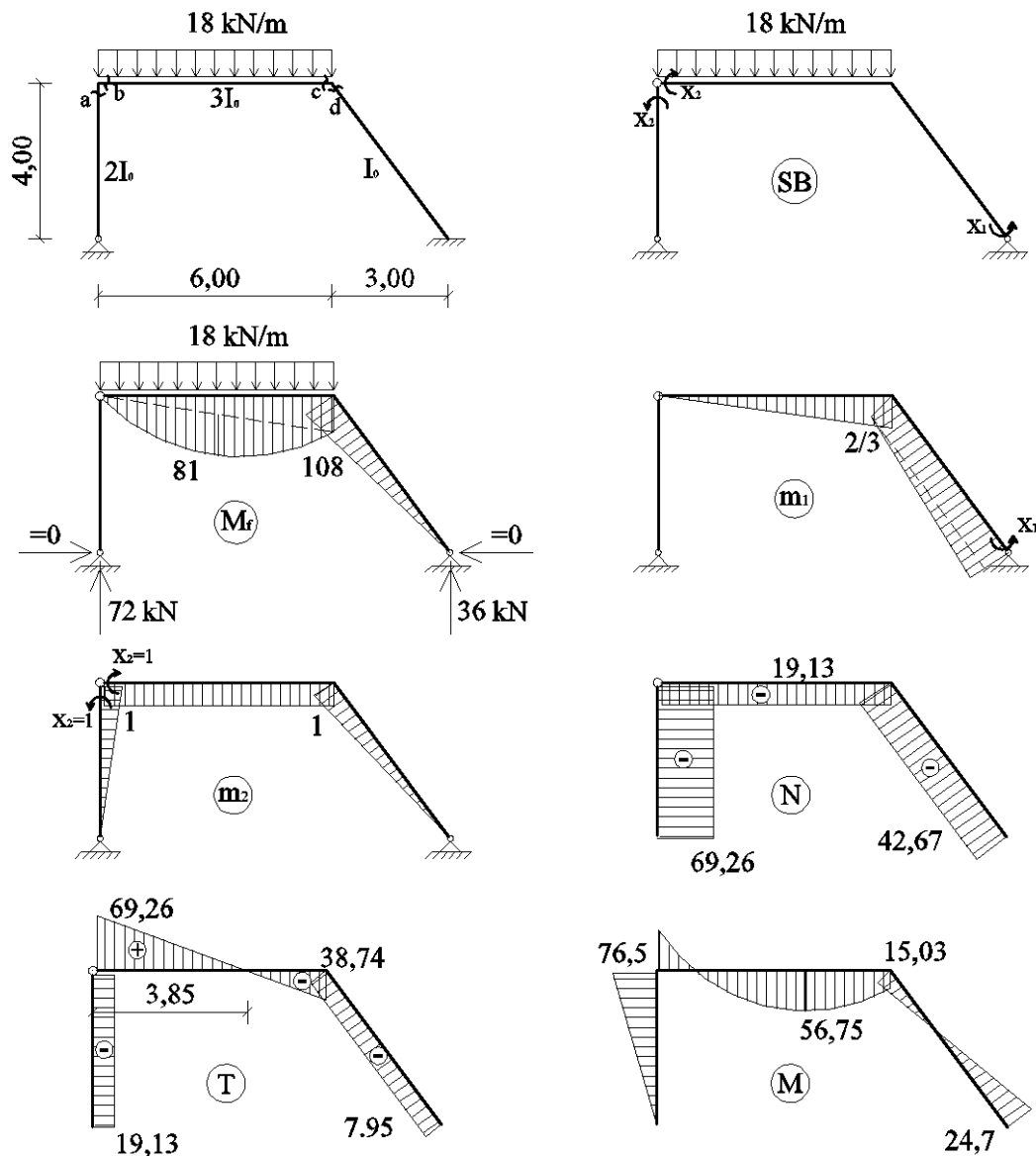


Fig. 1.9

Calculul coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi:

$$EI_0\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot 5 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = 3,815$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2,611$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4,333$$

$$EI_0\Delta_{1f} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 81 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 294$$

$$EI_0\Delta_{2f} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 81 \cdot 6 \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 396$$

$$\begin{cases} 3,815X_1 + 2,611X_2 + 294 = 0 \\ 2,611X_1 + 4,333X_2 + 396 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -24,7kNm;$$

$$X_2 = -76,5kNm$$

Diagramele finale de eforturi sunt trasate în figura 1.9.

### Aplicația 5 (Fig. 1.10)

Structura este din beton armat și are în alcătuire un tirant metalic.

Caracteristicile de rigiditate sunt:

$EI_0=41600kNm^2$  - pentru secțiunea din beton

$E_tA_t=131900kN$  - pentru tirantul metalic.

Structura are gradul de nedeterminare statică egal cu doi. Sistemul de bază se alege prin suprimarea legăturii aferente momentului încovoietor din încastrarea A și secționarea tirantului.

*Efectul tirantului asupra comportării structurilor static nedeterminate este de a limita deplasarea relativă a secțiunilor între care este montat, introducând totodată un grad de nedeterminare statică în plus structurii.*

*Observație: Secționând tirantul, deplasarea pe direcția necunoscută aferentă acestuia este egală cu zero, dar în calculul coeficientului  $\delta_{22}$  intervine efectul efortului de întindere din tirant. Ceilalți coeficienți și termenii liberi se calculează după procedura detaliată în aplicațiile prezentate anterior.*

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi:

$$EI_0\delta_{11} = \frac{0,5 \cdot 5}{2} \left( 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + 0,5 \cdot 5 \cdot 0,75 + \frac{0,5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 3,333$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = \frac{3 \cdot 5}{2} \left( 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 7,5$$

$$EI_0\delta_{22} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{EI_0}{E_tA_t} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 32,52$$

$$EI_0\Delta_{1f} = -\frac{200 \cdot 5}{2} \cdot \left( 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) - \frac{200 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = -500$$

$$EI_0\Delta_{2f} = -\frac{200 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = -2000$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} 3,333X_1 + 7,5X_2 - 500 = 0 \\ 7,5X_1 + 32,52X_2 - 2000 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -24,24 \text{ kNm};$$

$$X_2 = 55,91 \text{ kNm}$$

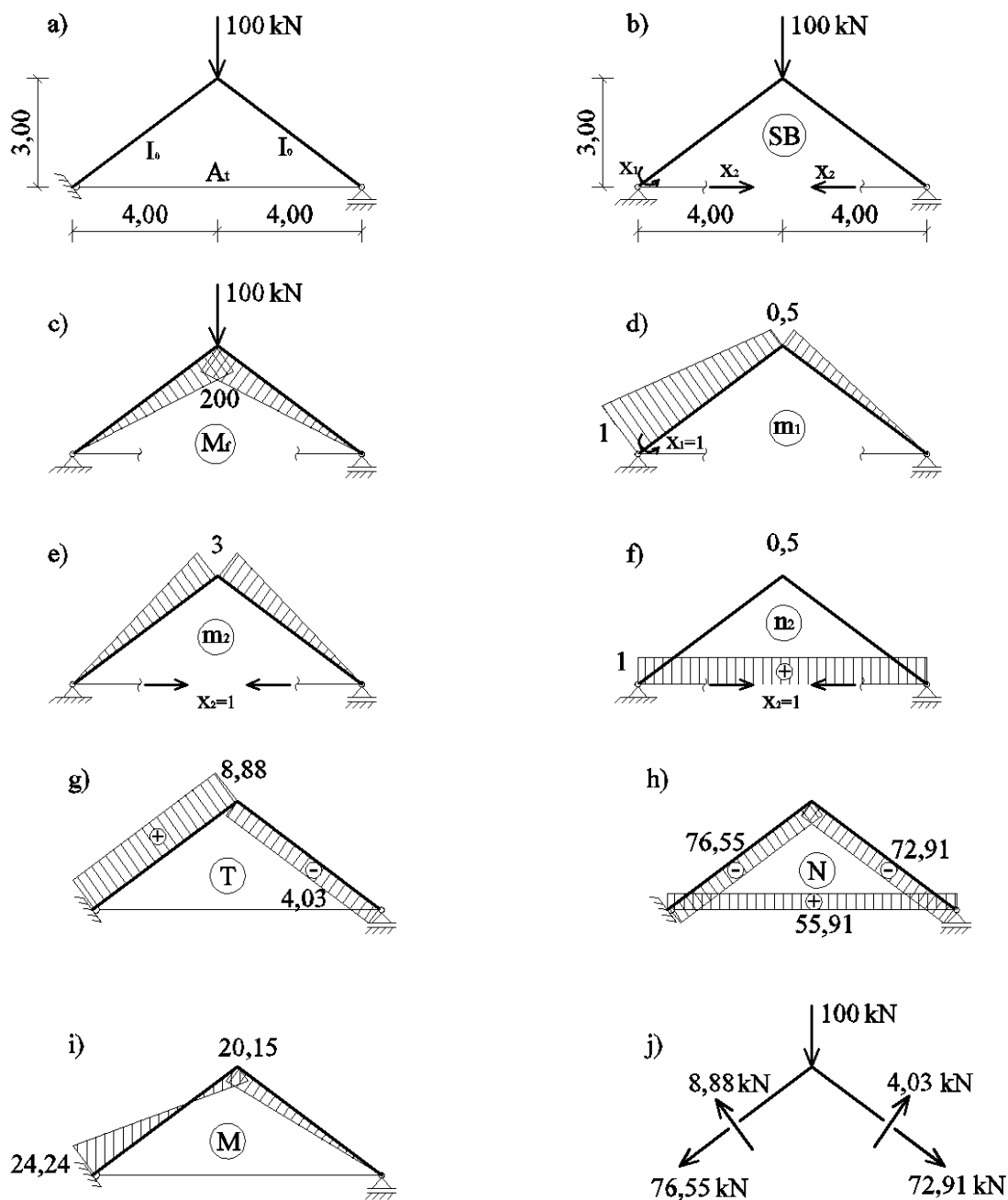


Fig. 1.10

Calculul momentelor încovoietoare de la capetele barelor:

$$M_{A1} = -1 \cdot 24,24 = 24,24 \text{ kNm}$$

$$M_{1A} = M_{1B} = 200 + 24,24 \cdot (-0,5) + 55,91 \cdot (-3) = -20,15 \text{ kNm}$$

Diagramele finale T și M sunt prezentate în figura 1.10.

Determinarea diagramei N (Fig.1.10) se face exprimând echilibrul forțelor care acționează pe nodul 1:

$$\begin{cases} (-N_{1A} + N_{1B}) \cos \alpha + (-8,88 + 4,03) \sin \alpha = 0 \\ -100 + (-8,88 + 4,03) \cos \alpha - (N_{1A} + N_{1B}) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8$$

$$\begin{cases} -N_{1A} + N_{1B} = 3,637 \\ N_{1A} + N_{1B} = -149,46 \end{cases} \quad N_{1A} = -72,91 \text{ kN}; N_{1B} = -76,55 \text{ kN}$$

### Aplicația 6 (Fig. 1.11)

Structura din figura 1.11 este sollicitată simultan la acțiunea forțelor exterioare, cedări de reazeme și variații de temperatură. Constantele de material sunt:

coeficientul de dilatare termică:  $\alpha' = 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ ,

modulul de elasticitate:  $E = 200000 \text{ daN/cm}^2$ .

În secțiunea de încastrare A s-a produs o tasare pe verticală a reazemului, asociată cu o rotire a secțiunii barei în acest punct, încărcări detaliate în figura 1.11.

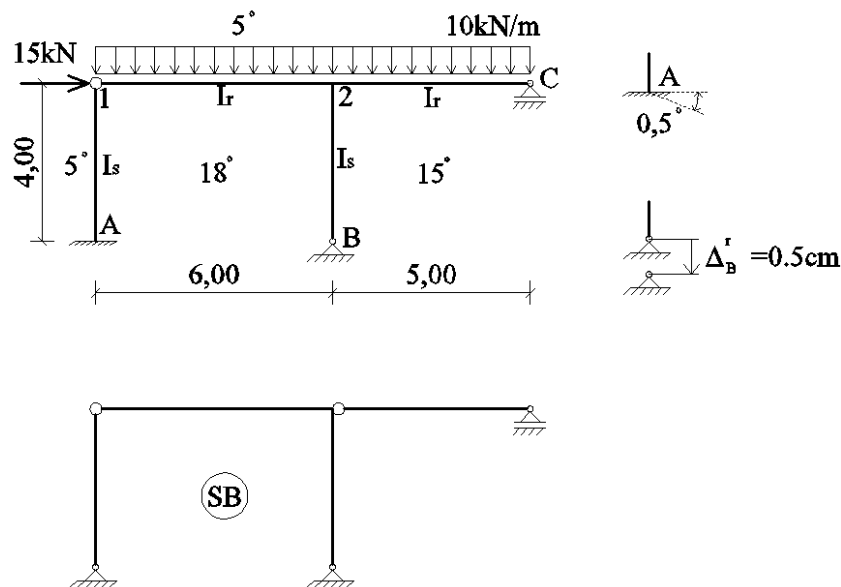


Fig.1.11

Cadrul este de două ori nedeterminat static. Sistemul de bază s-a ales prin suprimarea legăturilor corespunzătoare momentelor încovoietoare din încastrarea A și de la capătul 2 al barei 2-C. Elementele cadrului au secțiuni dreptunghiulară și sunt diferite pentru grinzi și stâlpi. Se calculează momentele de inerție ale celor două tipuri de secțiuni și se alege ca moment de inerție de referință (notat cu  $I_0$ ) cel cu valoarea cea mai mică (momentul de inerție al stâlpului).

Pentru stâlpi (30x40)

$$I_s = I_0 = \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 160000 \text{ cm}^4$$

Pentru rigle (30x50)

$$I_r = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 312500 \text{ cm}^4 = 1,953 I_0$$

$$EI_0 = 2 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^5 \text{ daNcm}^2 = 32000 \text{ kNm}^2$$

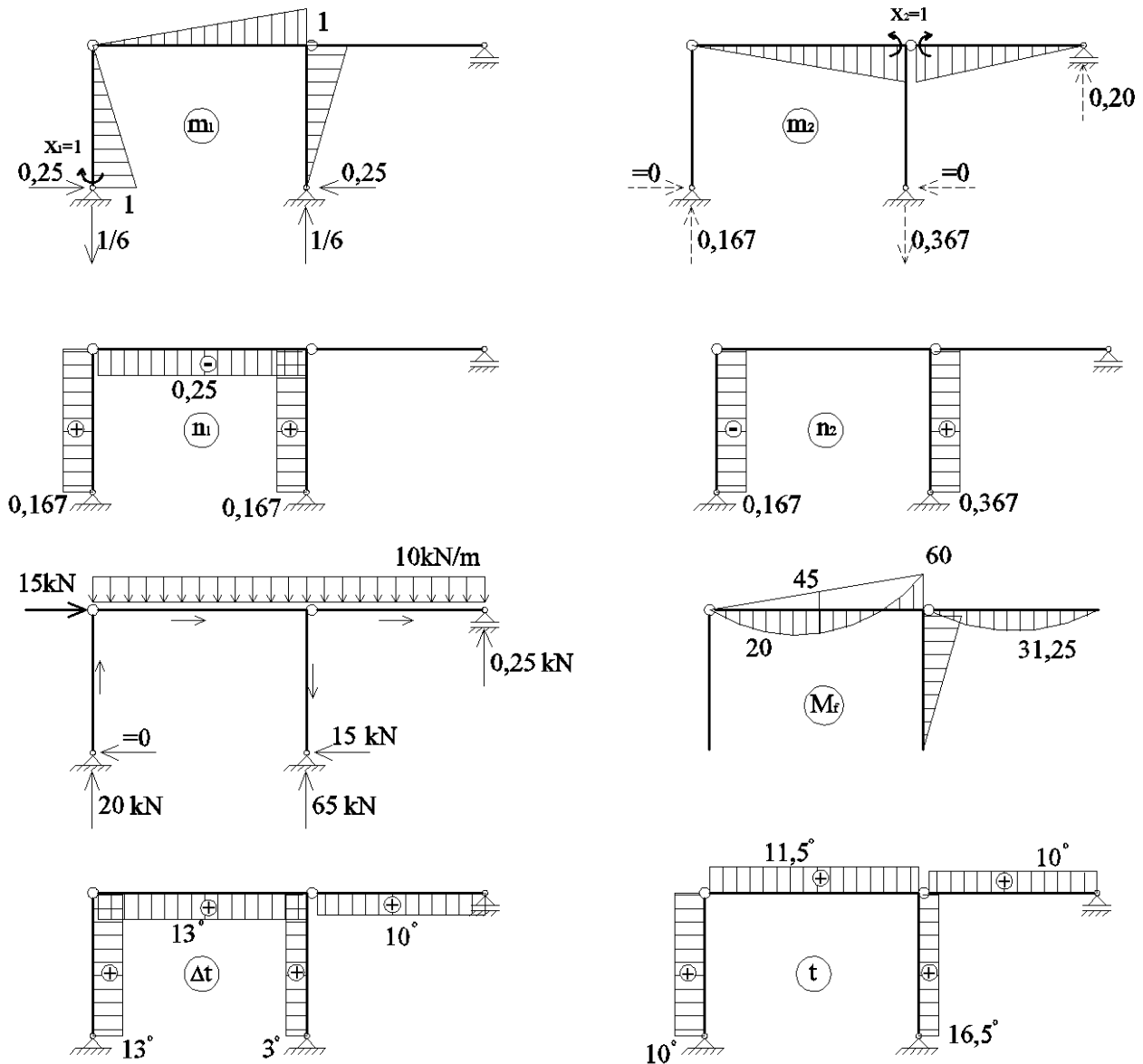


Fig.1.12

Sistemul ecuațiilor de condiție se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} + \Delta_{1t} + \Delta_{1r} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} + \Delta_{2t} + \Delta_{2r} = 0 \end{cases}$$

iar rezolvarea acestuia conduce la determinarea eforturilor finale produse de acțiunea concomitentă a celor trei încărcări.

O altă variantă de calcul constă în determinarea răspunsului structurii aferent fiecărei încărcări și apoi suprapunerea acestora în diagrama finală de moment încovoietor. Se optează pentru a doua metodă, întrucât aceasta permite compararea efectelor celor trei tipuri de încărcări.

Conform acestei metode, vor rezulta trei sisteme de ecuații cu trei seturi distincte de necunoscute. Coeficienții necunoscutelor din ecuațiile de condiție sunt independenți de tipul încărcării, prin urmare vor avea aceleași valori în cele trei sisteme de ecuații scrise pe același sistem de bază.

Se calculează coeficienții ecuațiilor de condiție (independenți de tipul încărcării), prin integrare conform figurii 1.12.

$$EI_0\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{1,953} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 3,691$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = -\frac{1}{1,953} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -1,024$$

$$EI_0\delta_{21} = \frac{1}{1,953} \left( \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = 1,877$$

Se calculează termenii liberi pentru fiecare tip de încărcare. Se rezolvă sistemul ecuațiilor de condiție, separat pentru fiecare caz de încărcare și se determină diagramele aferente de eforturi.

### Cazul încărcării cu forțe exterioare

Sistemul ecuațiilor de condiție, în acest caz se scrie sub forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

iar termenii liberi se calculează prin integrarea diagramei  $M_f$  cu  $m_1$  ( $\Delta_{1f}$ ) și cu  $m_2$  ( $\Delta_{2f}$ ).

$$EI_0\Delta_{1f} = \frac{1}{1,953} \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 95,36$$

$$EI_0\Delta_{2f} = \frac{1}{1,953} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 31,25 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \right) = 11,31$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații rezultă valorile necunoscutelor:

$$X_{1f} = -32,41kNm, \quad X_{2f} = -23,70kNm$$

Momentele încovoietoare la capetele barelor din încărcarea cu forțe se calculează cu formula:

$$M^{JK} = M_f^{JK} + m_1^{JK} \cdot X_1 + m_2^{JK} \cdot X_2$$

aplicată pentru fiecare capăt de bară al structurii.

$$M_A = 1 \cdot (-32,41) = -32,41kNm$$

$$M_{21} = -60 - 1 \cdot (-32,41) + 1 \cdot (-23,7) = -51,29kNm$$

$$M_{2B} = -60 - 1 \cdot (-32,41) = -27,59kNm$$

$$M_{2c} = 1 \cdot (-23,7) = -23,7kNm$$

Diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 1.13.

Diagrama de forță tăietoare (fig. 1.13) se trasează scriind echilibrul fiecărei bare desprinse din structura sub acțiunea forțelor exterioare direct aplicate pe aceasta și a forțelor de legătură (momentele încovoietoare de la capetele barei).

Diagrama de efort axial (fig. 1.13) rezultă scriind echilibrul fiecărui nod rigid izolat din structura sub acțiunea forțelor direct aplicate pe acesta și a forțelor de legătură (forțele tăietoare de la capetele barelor secționate).

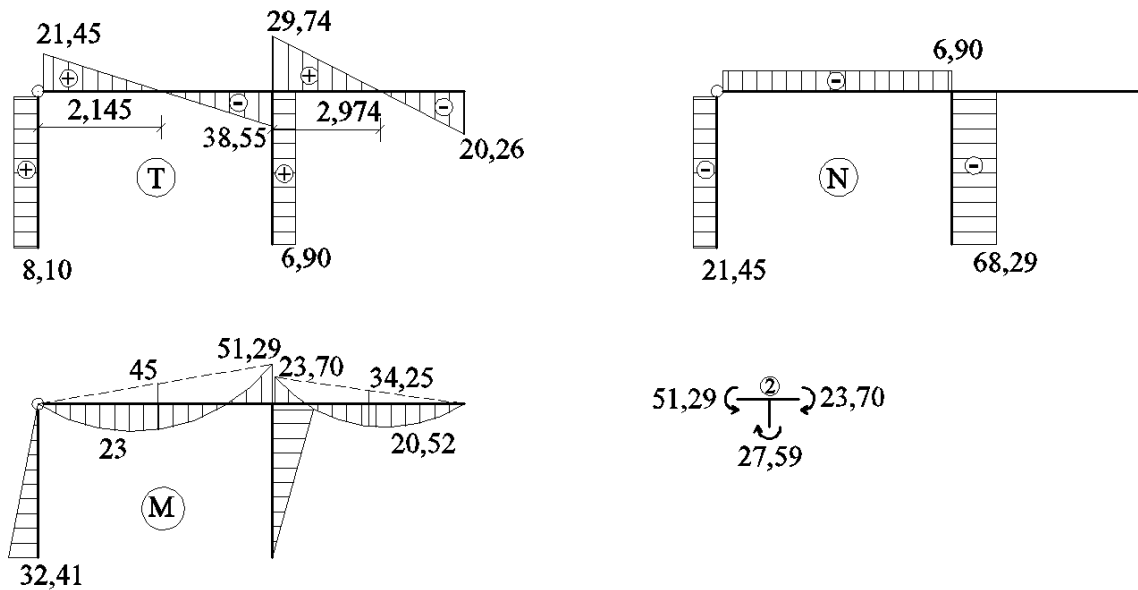


Fig.1.13

### Cazul încărcării cu variație de temperatură

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases}$$

$$EI_0\Delta_{1t} = \alpha' EI_0 \left( \frac{1}{0,4} \cdot 13 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{0,4} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{0,5} \cdot 13 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 11,5 \cdot 4 \cdot 0,167 - 4 \cdot 0,167 - 11,5 \cdot 6 \cdot 0,25 \right) = -15,55$$

$$EI_0\Delta_{2t} = \alpha' EI_0 \left( \frac{1}{0,5} \cdot 13 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{0,5} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - 11,5 \cdot 4 \cdot 0,167 + 16,5 \cdot 4 \cdot 0,367 \right) = 46,25$$

$$X_{1t} = -3,09kNm, \quad X_{2t} = -26,32kNm$$

Momentele încovoietoare la capetele barelor din încărcarea cu variații de temperatură se calculează cu formula:



$$M^{JK} = m_1^{JK} \cdot X_1 + m_2^{JK} \cdot X_2$$

aplicată pentru fiecare capăt de bară al structurii

$$M_A = 1 \cdot (-3,09) = -3,09 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -1 \cdot (-3,09) + 1 \cdot (-26,32) = -23,23 \text{ kNm}$$

$$M_{2B} = -1 \cdot (-3,09) = -3,09 \text{ kNm}$$

$$M_{2c} = 1 \cdot (-26,32) = -26,32 \text{ kNm}$$

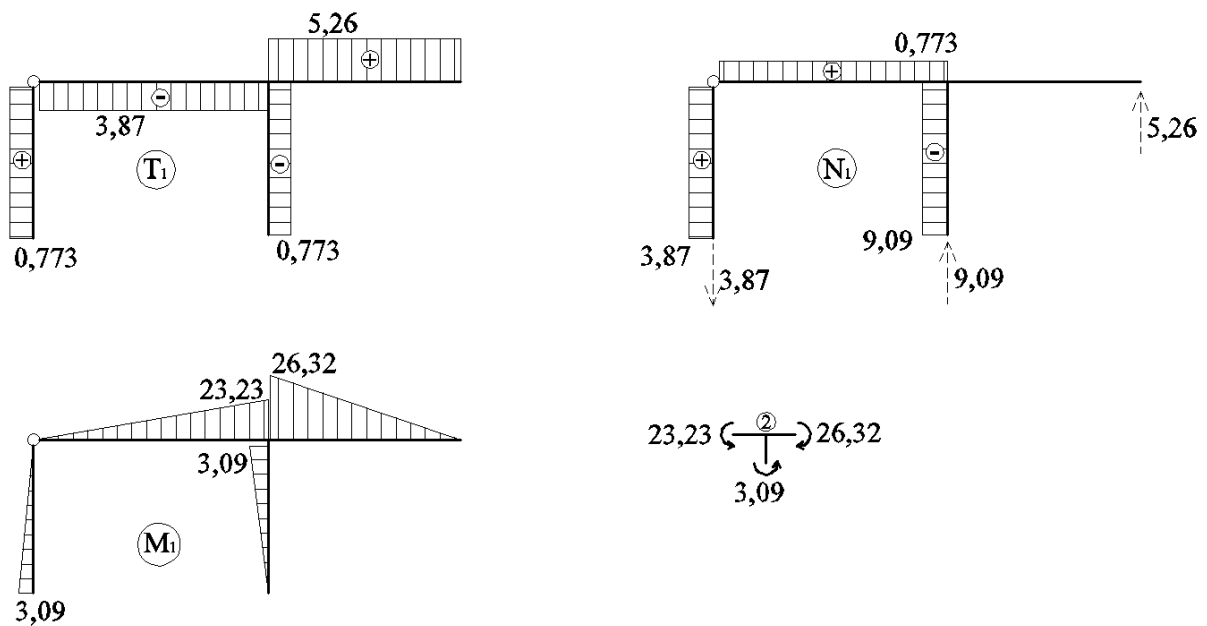


Fig.1.14

### Cazul încărcării cu cedări de reazeme

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1r} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2r} = 0 \end{cases}$$

Calculul termenilor liberi

$$EI_0\Delta_{1r} = -EI_0 \cdot (1 \cdot 0,5 \cdot 0,0174444 - 0,167 \cdot 0,005) = -252,4$$

$$EI_0\Delta_{2r} = -EI_0 \cdot 0,367 \cdot 0,005 = -58,7$$

$$X_{1r} = 90,83 \text{ kNm}, \quad X_{2r} = 80,80 \text{ kNm}$$

Momentele încovoietoare la capetele barelor din încărcarea cu cedări de reazeme sunt:

$$M_A = 90,83 = 90,83 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -1 \cdot 90,83 + 1 \cdot 80,8 = -10,03 \text{ kNm}$$

$$M_{2B} = -1 \cdot 90,83 = -90,83 \text{ kNm}$$

$$M_{2c} = 1 \cdot 80,8 = 80,8 \text{ kNm}$$

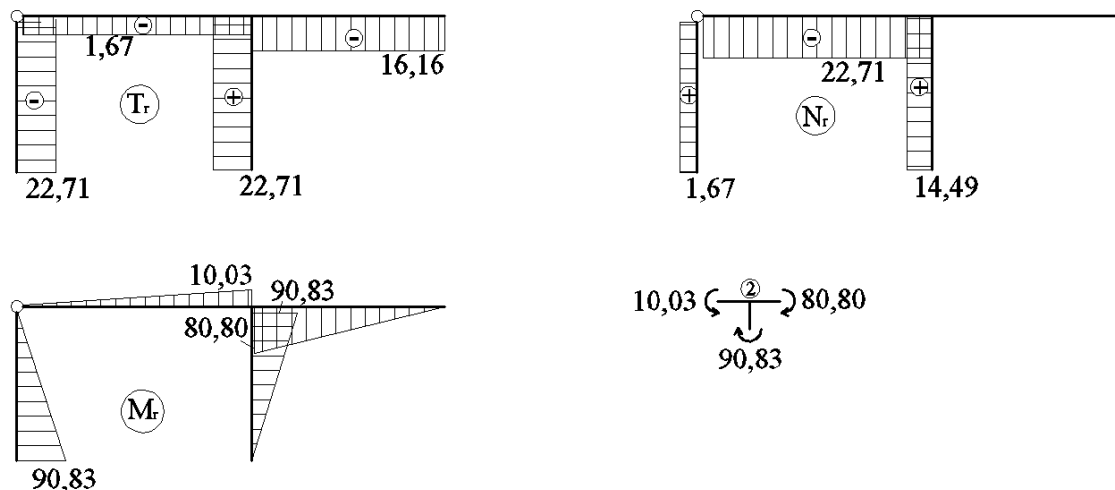


Fig.1.15

### Observație

Se observă că din încărcarea cu cedări de reazeme de valori foarte mici (nesesizabile cu ochiul liber) în raport cu dimensiunile structurii, se obțin valori ale momentelor încovoietoare de același ordin de mărime cu cele din încărcarea cu forțe exterioare. Aceste efecte ale cedărilor de reazeme nu pot fi anticipate întotdeauna în faza de proiectare.

### 1.2.3. Structuri simetrice

Particularitatea de simetrie a structurilor se poate utiliza la simplificarea sistemului ecuațiilor de condiție prin anularea unor coeficienți secundari.

**Rezultatul integrării unei diagrame simetrice cu o diagramă antisimetrică (sau invers) este zero.** Utilizarea în calcul a acestei constatări impune îndeplinirea următoarelor condiții:

- sistemul de bază să se aleagă simetric,
- necunoscutele să reprezinte încărcări simetrice și antisimetrice.

Astfel, la alegerea necunoscutelor sistemului de bază trebuie să se aibă în vedere următoarele aspecte:

- în general, în cazul cadrelor cu deschidere centrală se recomandă secționarea barei în dreptul axei de simetrie, prin această operațiune rezultând perechi de necunoscute simetrice și antisimetrice;
- orice încărcare poate fi descompusă într-o încărcare simetrică și una antisimetrică.

### Concluzii:

- Când încărcarea este **simetrică**, necunoscutele antisimetrice sunt nule  $\Rightarrow$  se scrie doar sistemul de ecuații care conține **necunoscutele simetrice**.
- Când încărcarea este **antisimetrică**, necunoscutele simetrice sunt nule  $\Rightarrow$  se scrie doar sistemul de ecuații care conține **necunoscutele antisimetrice**.

### Aplicația 7 (Fig.1.16)

Structura simetrică dată este de 4 ori nedeterminată static. Sistemul de bază se alege simetric, iar rezolvarea se face folosind grupări de necunoscute (simetrice și antisimetrice), după cum se vede în figura 1.16. Încărcarea exterioară dată se descompune într-o componentă simetrică și o componentă antisimetrică.

În aceste condiții avem:

- Sistemul necunoscutelor simetrice

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților și a termenilor liberi

$$EI_0\delta_{11} = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 \right] = 57,167$$

$$EI_0\delta_{12} = -2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right] = -4,083$$

$$EI_0\delta_{22} = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = 2,333$$

$$EI_0\Delta_{1f} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 55,125 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 = -450,188$$

$$EI_0\Delta_{2f} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 55,125 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 128,625$$

Rezolvarea sistemului necunoscutelor simetrice

$$\begin{cases} 57,167X_1 + -4,083X_2 - 450,188 = 0 \\ -4,083X_1 + 2,333X_2 + 128,625 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 4,5kNm \\ X_2 = -47,26kNm \end{cases}$$

- Sistemul necunoscutelor antisimetrice

$$\begin{cases} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3f} = 0 \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4f} = 0 \end{cases}$$

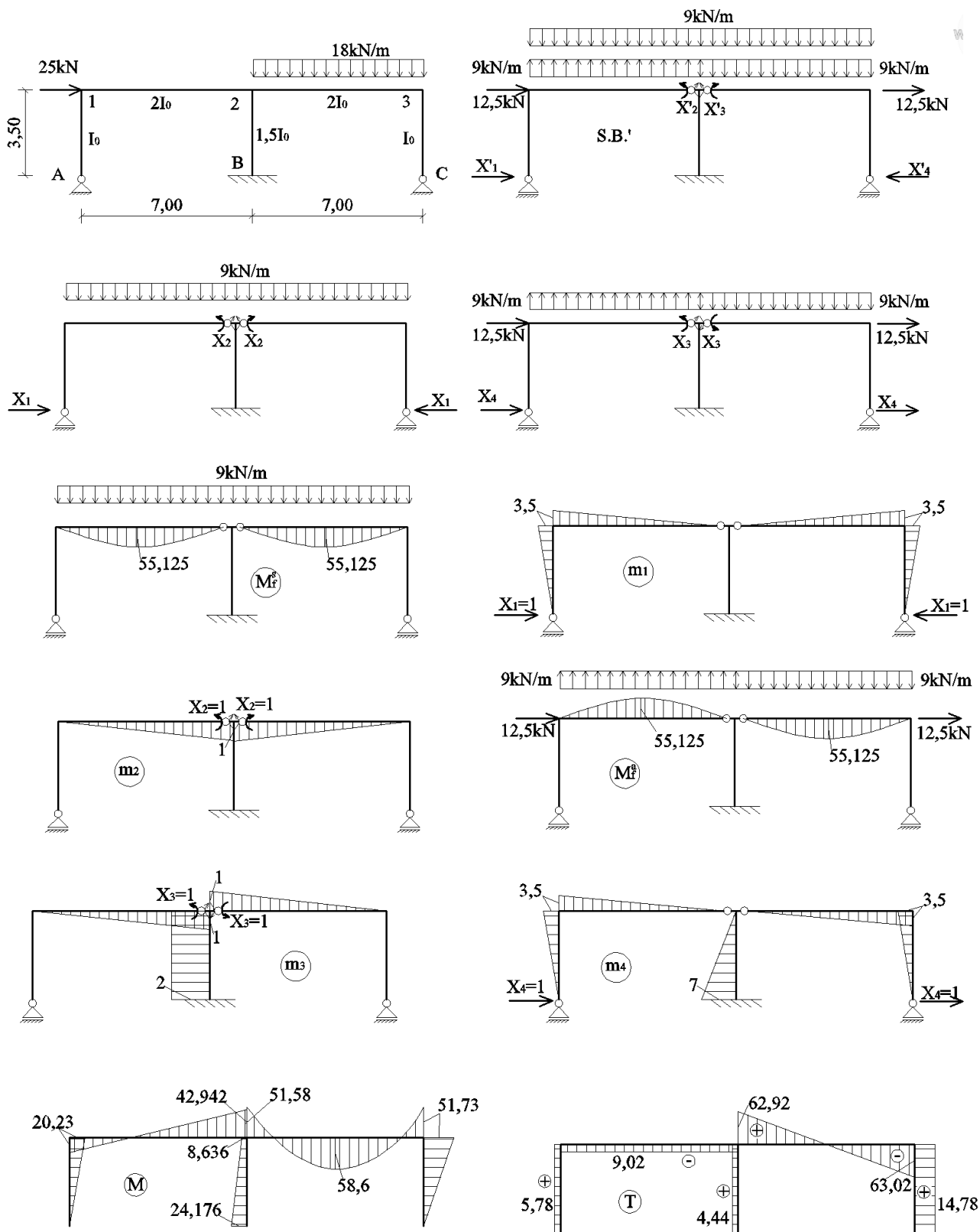


Fig. 1.16

Calculul coeficienților și a termenilor liberi

$$EI_0 \delta_{33} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{1,5} \cdot 2 \cdot 3,5 \cdot 2 = 11,67$$

$$EI_0\delta_{34} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,5 + \frac{1}{1,5} \cdot 2 \cdot 3,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 = 12,25$$

$$EI_0\delta_{44} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 = 95,28$$

$$EI_0\Delta_{3f} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 55,125 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 87,5 \cdot 3,5 \cdot 2 = 75,54$$

$$EI_0\Delta_{2f} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 55,125 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,5 + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 87,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 = 926,58$$

Rezolvarea sistemului necunoscutelor antisimetrice

$$\begin{cases} 11,67X_3 + 12,25X_4 + 75,54 = 0 \\ 12,25X_3 + 95,28X_4 + 926,58 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 4,318kNm \\ X_2 = -10,28kNm \end{cases}$$

Momentele încovoietoare de la capetele barelor au valorile:

$$M_{1A} = M_{12} = -3,5 \cdot 4,5 - 3,5 \cdot (-10,28) = 20,23kNm$$

$$M_{21} = 1 \cdot (-47,26) + 1 \cdot 4,318 = -42,942kNm$$

$$M_{23} = 1 \cdot (-47,26) - 1 \cdot 4,318 = -51,58kNm$$

$$M_{2B} = 2 \cdot 4,318 = 8,636kNm$$

$$M_{B2} = 87,5 + 2 \cdot 4,318 + 7 \cdot (-10,28) = 24,176kNm$$

$$M_{32} = M_{3C} = -3,5 \cdot 4,5 + 3,5 \cdot (-10,28) = -51,73kNm$$

Diagramele de eforturi  $T, M$  și  $N$  sunt trasate în figura 1.16.

### Aplicația 7 (Fig.1.17)

Structura este simetrică și are gradul de nedeterminare statică egal cu 5. Sistemul de bază se alege simetric, prin secționarea structurii în dreptul axei de simetrie și eliminarea reazemelor simple din C și D, rezultând astfel perechile de necunoscute simetrice  $X_1, X_2, X_3$  și perechile de necunoscute antisimetrice  $X_4, X_5$ . Încărcarea fiind simetrică, necunoscutele antisimetrice sunt nule.

Sistemul ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} = 0 \end{cases}$$

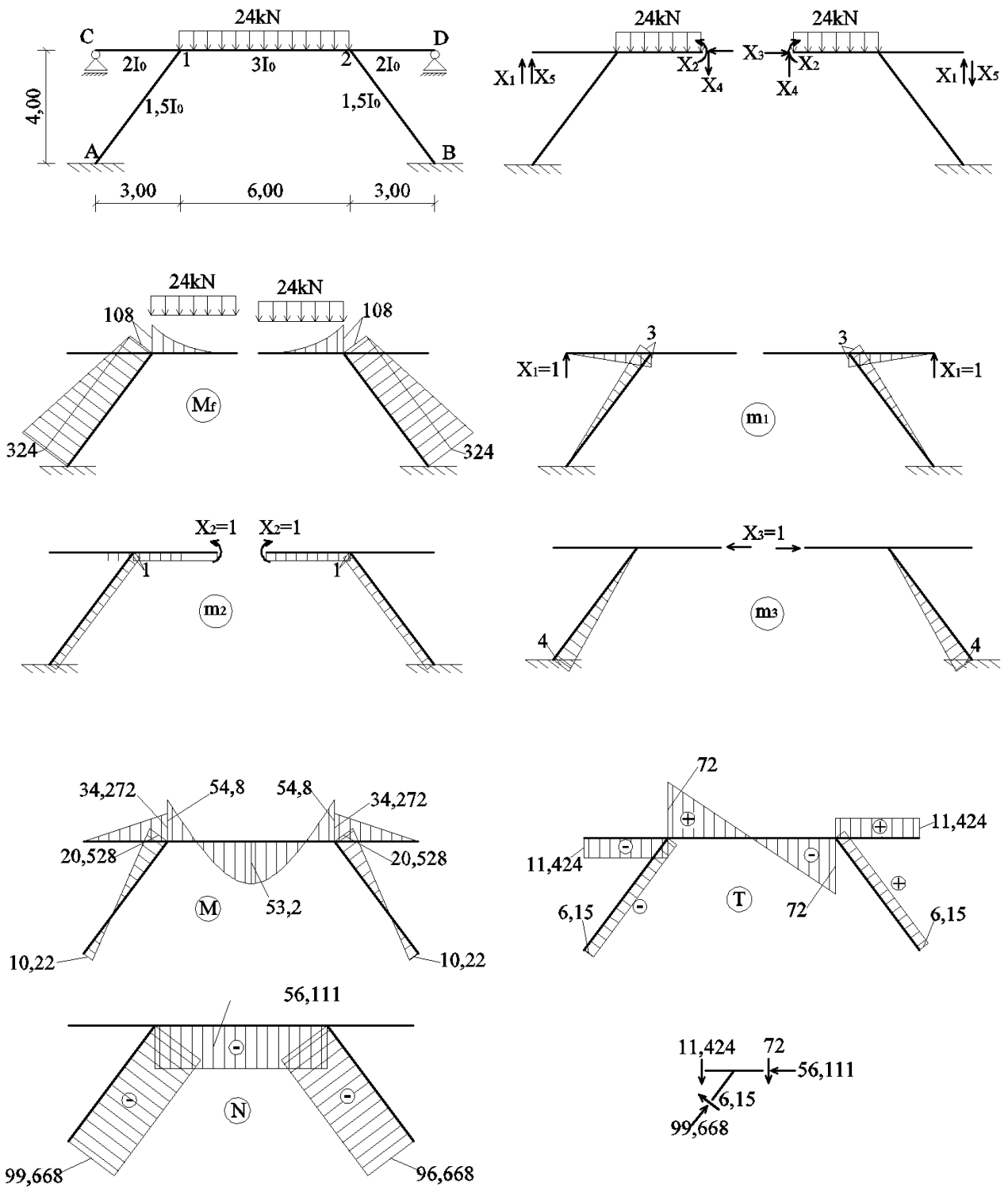


Fig. 1.17

Se calculează coeficienții necunoscutelor din ecuațiile de condiție și termenii liberi:

$$EI_0 \delta_{11} = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = 29$$

$$EI_0 \delta_{12} = -2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \right) = -10$$

$$EI_0\delta_{22} = 2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) = 8,667$$

$$EI_0\delta_{13} = -2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = -13,333$$

$$EI_0\delta_{33} = 2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = 35,556$$

$$EI_0\delta_{23} = 2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 13,333$$

$$EI_0\Delta_{1f} = 2 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 216 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + 108 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = 1800$$

$$EI_0\Delta_{2f} = -2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 216 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{1,5} \cdot 108 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 3 \cdot 1 \right) = -1512$$

$$EI_0\Delta_{3f} = -2 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 216 \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + 108 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = -3360$$

$$\begin{cases} 29X_1 - 10X_2 - 13,333X_3 + 1800 = 0 \\ -10X_1 + 8,667X_2 + 13,333X_3 - 1512 = 0 \\ -13,333X_1 + 13,333X_2 + 35,556X_3 - 3360 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -11,424kNm \\ X_2 = 53,2kNm \\ X_3 = 70,255kNm \end{cases}$$

Momentele încovoietoare de la capetele barelor sunt:

$$M_A = -324 + 1 \cdot 53,2 + 4 \cdot 70,255 = 10,22kNm$$

$$M_{1A} = -108 - 3 \cdot (-11,424) + 1 \cdot 53,2 = -20,528kNm$$

$$M_{12} = -108 + 1 \cdot 53,2 = -54,8kNm$$

$$M_{1C} = 3 \cdot (-11,424) = -34,272kNm$$

Diagramele finale de eforturi se prezintă în figura 1.17.

### 1.3. Grinzi continue

#### 1.3.1. Noțiuni teoretice de bază

Grinzile continue sunt grinzi drepte dispuse pe mai multe reazeme dintre care unul este fix (articulație sau încastrare), iar celelalte sunt mobile (reazeme simple). Datorită acestei rezemări, variația lungimii pe direcția axei barei nu este împiedicată, în consecință, **efortul axial nu reprezintă o nedeterminare statică** a acestor structuri.

Gradul de nedeterminare statică al grinzilor continue este egal cu numărul reazemelor intermediare ale acestora. Dacă grinda este încastrată la un capăt, gradul de nedeterminare statică este egal cu numărul reazemelor simple. Dacă grinda este încastrată la ambele capete, una dintre cele două încastrări trebuie să permită deplasarea în lungul axei barei.

Rezolvarea acestei categorii de structuri se poate realiza relativ simplu, prin aplicarea unei ecuații derivată din metoda forțelor, numită **ecuația celor trei momente**. Această ecuație s-a determinat cu metoda forțelor, prin considerarea unui sistem de bază particular, rezultat prin suprimarea legăturilor aferente momentelor încovoietoare de pe reazemele intermediare.

Necunoscutele problemei sunt **momentele de pe reazemele intermediare** ale grinzii. Sistemul de bază astfel obținut reprezintă o succesiune de grinzi simplu rezemate a cărui comportare are următoarea particularitate care stă la baza stabilirii ecuației celor trei momente:

**Diagramele de moment încovoiător produse din încărcarea sistemului de bază cu necunoscutele (perechi de momente)  $X_i=1$ , se întind doar pe deschiderile adiacente reazemului pe care acționează.**

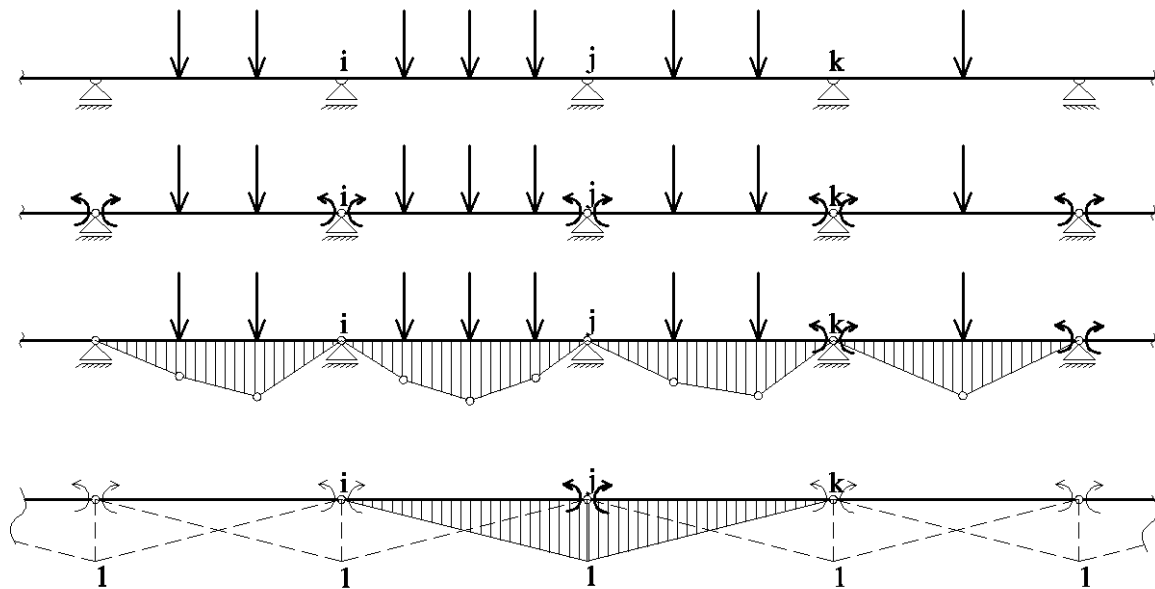
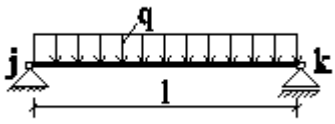
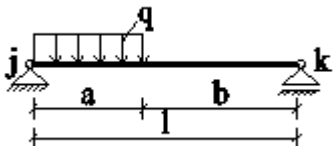
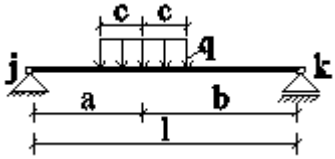
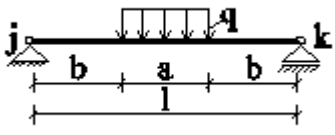
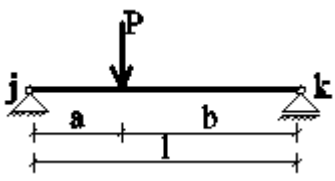
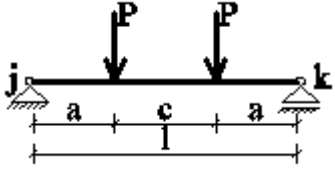
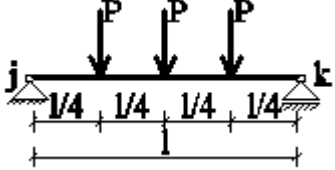
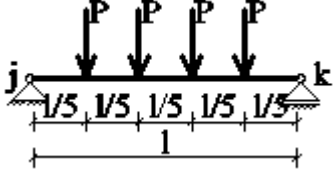
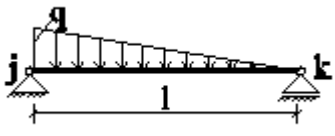
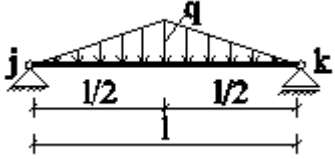
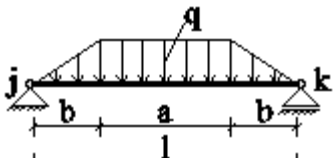
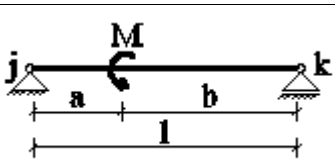


Fig. 1.18



1		$m_j = m_k = \frac{ql^2}{4}$
2		$m_j = \frac{qa^2}{4l^2}(l+b)^2$ $m_k = \frac{qa^2}{4l^2}(2l^2 - a^2)$
3		$m_j = \frac{2qcb}{l^2}(l^2 - b^2 - c^2)$ $m_k = \frac{2qca}{l^2}(l^2 - a^2 - c^2)$
4		$m_j = m_k = \frac{qa}{8l}(3l^2 - a^2)$
5		$m_j = \frac{Pab}{l^2}(l+b)$ $m_k = \frac{Pab}{l^2}(l+a)$ <i>Pentru a = b, m<sub>j</sub> = m<sub>k</sub> = <math>\frac{3Pl}{8}</math></i>
6		$m_j = m_k = \frac{3Pa}{l}(l-a)$ <i>Pentru a = c, m<sub>j</sub> = m<sub>k</sub> = <math>\frac{2Pl}{3}</math></i>
7		$m_j = m_k = \frac{15Pl}{16}$
8		$m_j = m_k = \frac{6Pl}{5}$
9		$m_j = \frac{2ql^2}{15}$ $m_k = \frac{7ql^2}{60}$

10		$m_j = m_k = \frac{5ql^2}{32}$
11		$m_j = m_k = \frac{ql(l+a)}{32} \left( 5 - \frac{a^2}{l^2} \right)$
12		$m_j = \left( \frac{3b^2}{l^2} - 1 \right) M$ $m_k = \left( \frac{3a^2}{l^2} - 1 \right) M$

Astfel, considerând grinda continuă, cu secțiune constantă pe deschideri (Fig. 1.18), ecuația celor trei momente aplicată reazemului  $j$ , situat între  $i$  și  $k$ , se scrie sub forma:

$$\theta_{ji}M_i + \theta_{jj}M_j + \theta_{jk}M_k + \theta_{jf} = 0 \quad (23)$$

sau

$$l_{ij}^t M_i + 2(l_{ij}^t + l_{jk}^t)M_j + l_{jk}^t M_k + l_{ij}^t m_{st}^j + l_{jk}^t m_{dr}^j = 0 \quad (24)$$

unde:

$l_{ij}^t = l_{ij} \frac{I_c}{I_{ij}}$  definește lungimea transformată a barei  $ij$ ,  $m_j$  se numește factor de încărcare, iar valoarea lui se stabilește din tabele în funcție de tipul încărcării (Tabelul 1).

Răspunsul barelor la acțiunile exterioare depinde de rigiditatea relativă a acestora. Lungimea transformată a barelor definește o valoare echivalentă a lungimilor acestora, corespunzătoare aceluiași moment de inerție al barelor,  $I_c$ .

Ecuația (23) exprimă condiția de rotire relativă nulă impusă capetelor de bare conectate în dreptul reazemului  $j$ .

Cazuri particulare:

- Grindă cu o consolă încărcată (la stânga reazemului  $k$ ):

$$l_{ij}^t M_i + 2(l_{ij}^t + l_{jk}^t)M_j + l_{jk}^t M_k + l_{ij}^t (m_{st}^j - M_c) + l_{jk}^t m_{dr}^j = 0 \quad (25)$$

$M_c$  este momentul încovoietor generat de încărcarea de pe consolă, pe reazemul  $k$ .

- Grindă cu o extremitatea  $j$  încastrată perfect:

$$2M_j + M_k + m^j = 0 \quad (26)$$

### 1.3.2. Exemplu de calcul

#### Aplicația 8 (Fig. 1.19)

Se aplică ecuația celor trei momente, reazemelor 2 și 3.

1-2-3:

$$2(l_{12}^t + l_{23}^t)M_2 + l_{23}^t M_3 + l_{12}^t m_{st}^2 + l_{23}^t m_{dr}^2 = 0$$

2-3-4

$$l_{23}^t M_2 + 2(l_{23}^t + l_{34}^t)M_3 + l_{34}^t M_4 + l_{23}^t m_{st}^3 = 0$$

$$I_c = I_0$$

$$l_{12}^t = \frac{I_0}{I_0} 6 = 6m$$

$$l_{23}^t = \frac{I_0}{2I_0} 9 = 4,5m$$

$$l_{34}^t = \frac{I_0}{I_0} 7 = 7m$$

Factorii de încărcare, preluați din tabelul 1, sunt:

$$m_{st}^2 = \frac{3 \times 22 \times 6}{8} = 49,5kNm$$

$$m_{dr}^2 = m_{st}^3 = \frac{12 \times 9^2}{8} = 243kNm$$

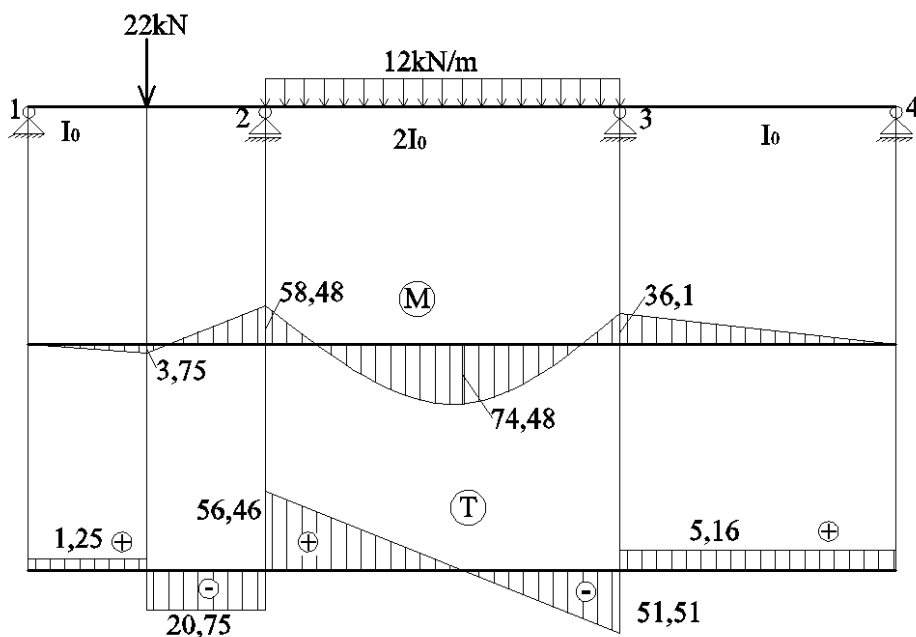


Fig. 1.19

Sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} 21M_2 + 4,5M_3 + 1390,5 = 0 \\ 4,5M_2 + 23M_3 + 1093,5 = 0 \end{cases}$$

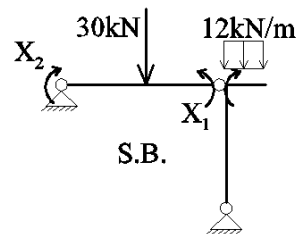
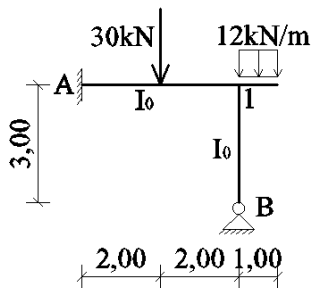
$$M_2 = -58,48 \text{ kNm}$$

$$M_3 = -36,10 \text{ kNm}$$

Diagramele de moment încovoielor sunt prezentate în figura 1.19.

## 1.4. Probleme propuse

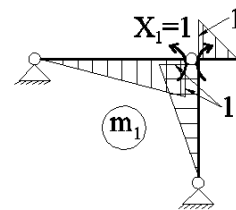
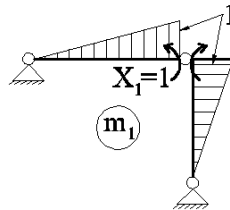
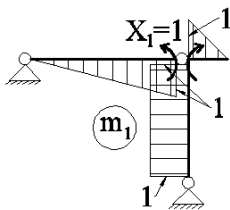
1.4.11. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_1$  corectă?



a)

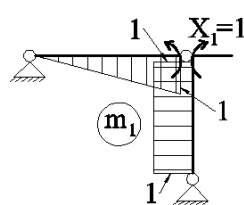
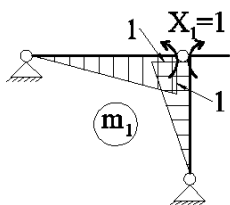
b)

c)

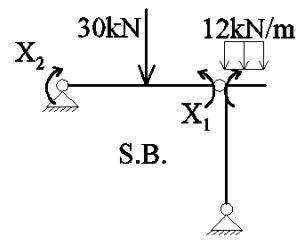
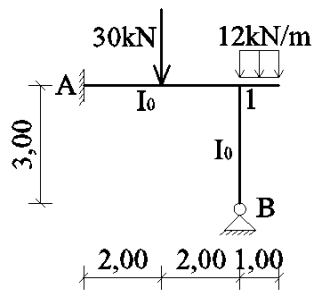


d)

e)



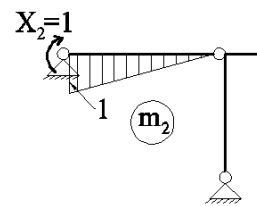
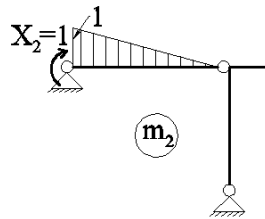
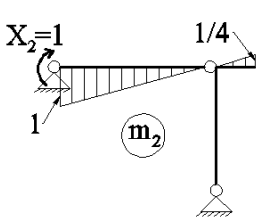
1.4.12. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_2$  corectă?



a)

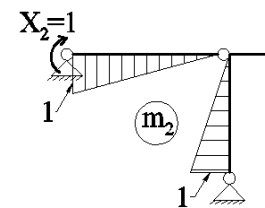
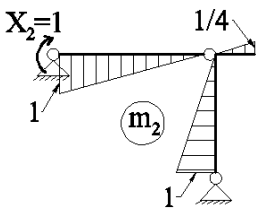
b)

c)

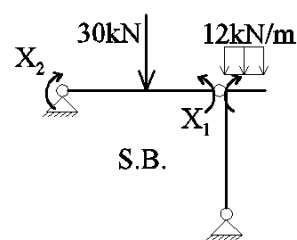
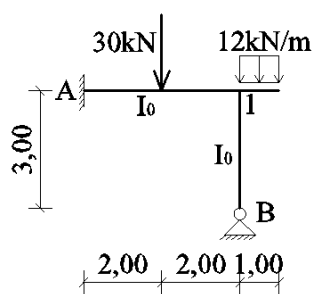


d)

e)



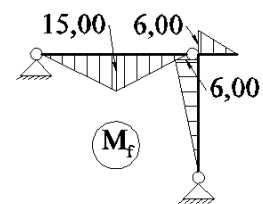
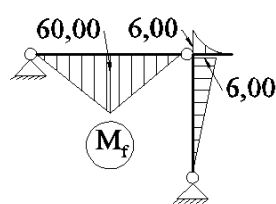
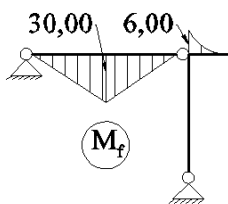
1.4.13. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $M_f$  corectă?



a)

b)

c)

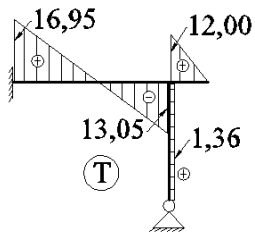


d)

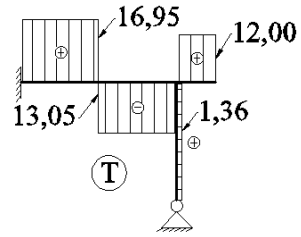
e)



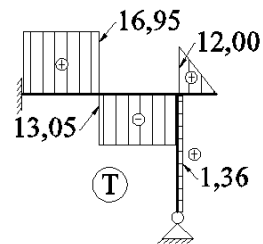
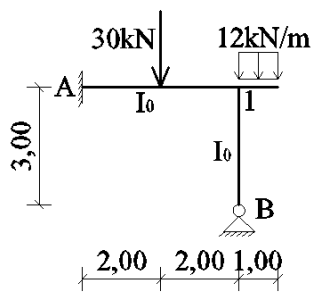
d)



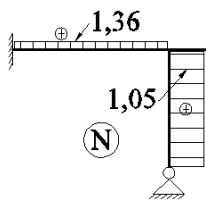
e)



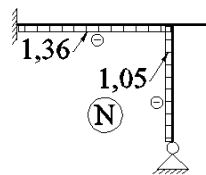
1.4.16. Pentru structura din figură, cu diagrama de forță tăietoare T trasată alături, care este diagrama de efort axial N?



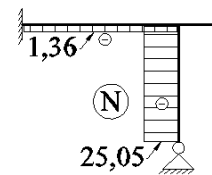
a)



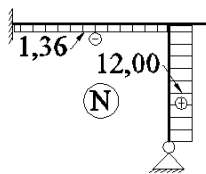
b)



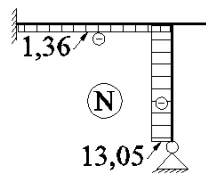
c)



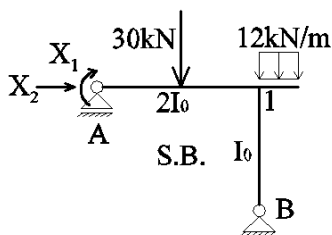
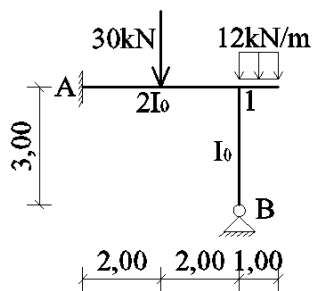
d)



e)



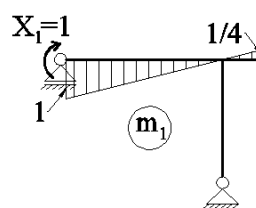
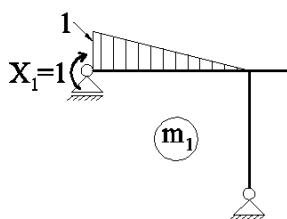
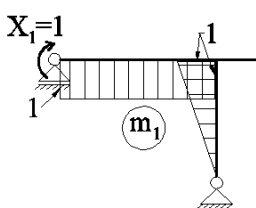
1.4.17. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_1$  corectă?



a)

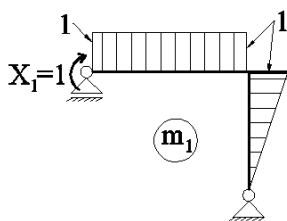
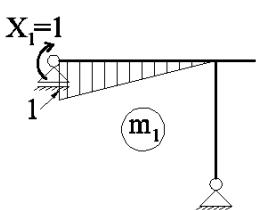
b)

c)

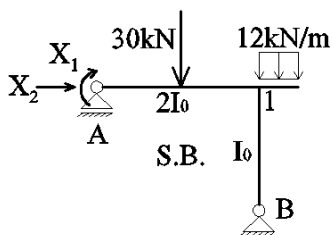
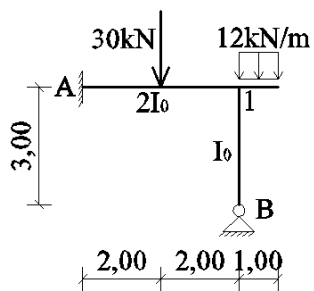


d)

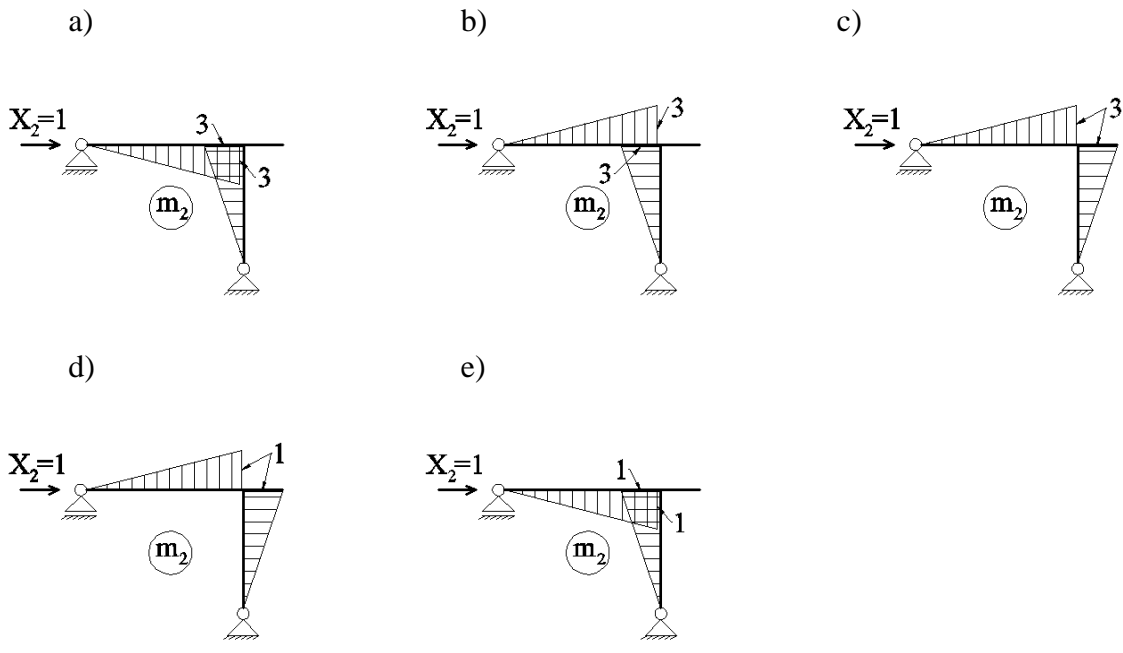
e)



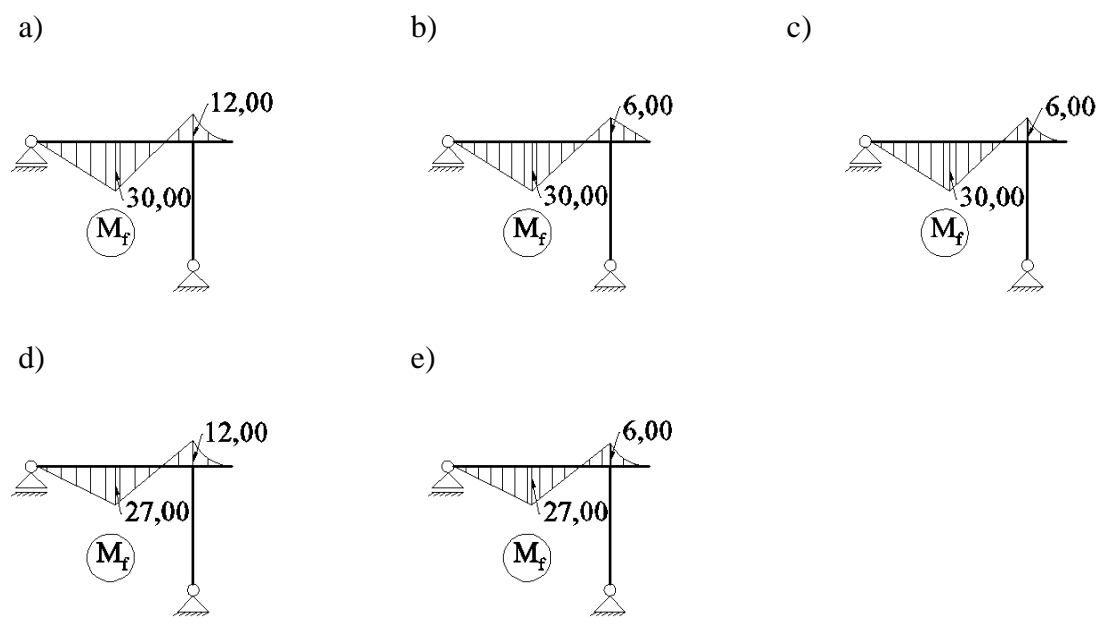
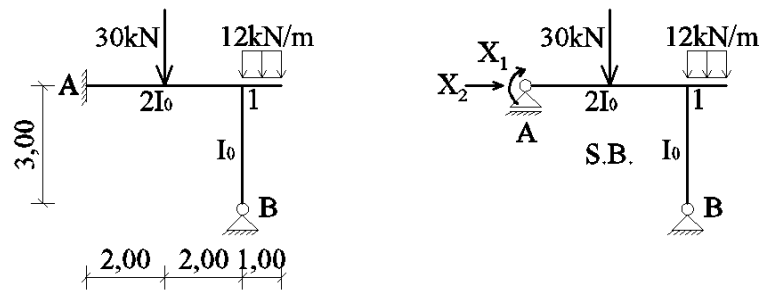
1.4.18. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_2$  corectă?



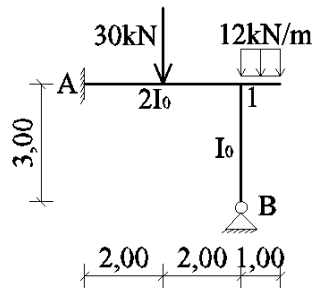




1.4.19. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $M_f$  corectă?

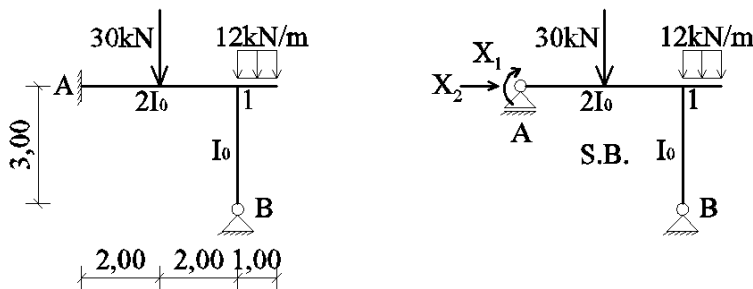


1.4.20. Care este gradul de nedeterminare statică al structurii din figură?



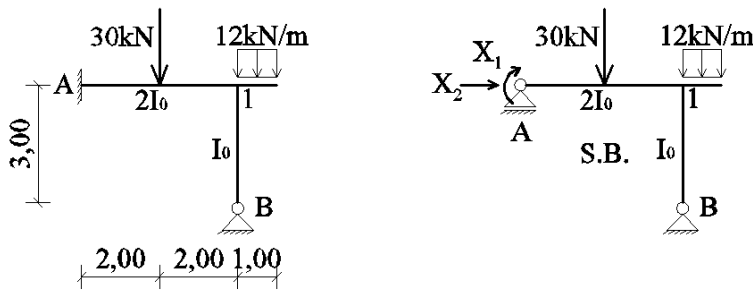
- a) 1      b) 2      c) 3      d) 0      e) 4

1.4.21. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\delta_{11}$ ?



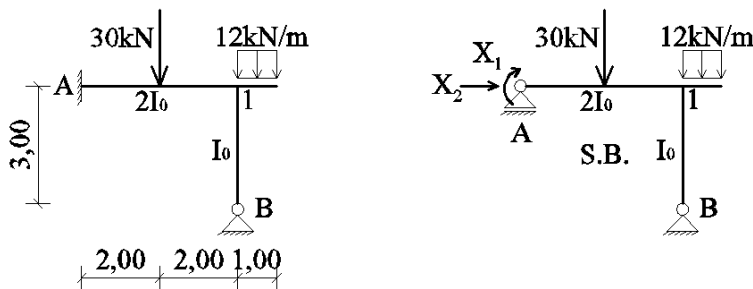
- a)  $0,650/EI_0$     b)  $0,334/EI_0$     c)  $1,334/EI_0$     d)  $0,667/EI_0$     e)  $1,234/EI_0$

1.4.22. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\delta_{12}$ ?



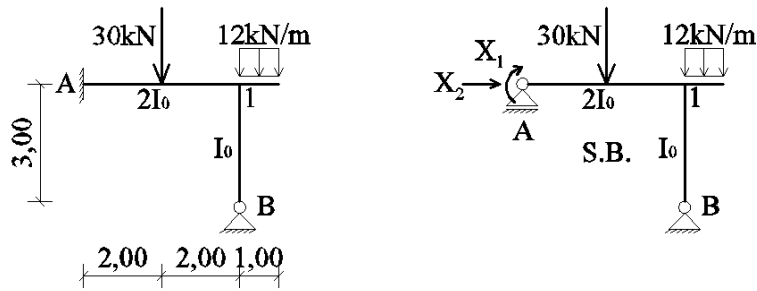
- a)  $-1,0/EI_0$     b)  $-2,0/EI_0$     c)  $2,0/EI_0$     d)  $1,5/EI_0$     e)  $0,5/EI_0$

1.4.23. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\Delta_{1f}$ ?



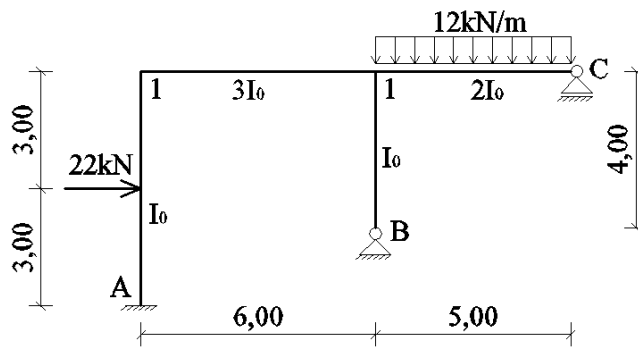
- a)  $-9,5/EI_0$     b)  $13,5/EI_0$     c)  $13,0/EI_0$     d)  $7,5/EI_0$     e)  $-7,5/EI_0$

1.4.24. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\Delta_{2f}$ ?



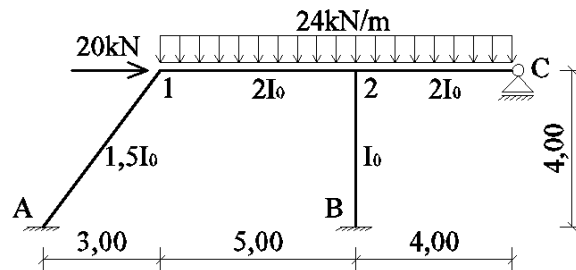
- a)  $-25,6/EI_0$    b)  $52,5/EI_0$    c)  $-42,0/EI_0$    d)  $18,5/EI_0$    e)  $-33,0/EI_0$

1.4.25. Care este gradul de nedeterminare statică al structurii din figură?



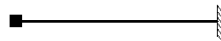
- a) 2   b) 1   c) 3   d) 0   e) 4

1.4.26. Care este gradul de nedeterminare statică al structurii din figură?



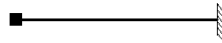
- a) 0   b) 2   c) 3   d) 4   e) 1

1.4.27. Pentru bara din figură, care este expresia rigidității la rotire de nod?



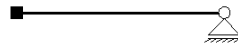
- a)  $\frac{4EI}{l}$    b)  $\frac{4EI}{l^2}$    c)  $\frac{3EI}{l}$    d)  $\frac{EI}{l}$    e)  $\frac{3EI}{l^2}$

1.4.28. Pentru bara din figură, care este expresia rigidității la rotire de bară?



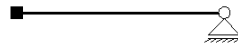
- a)  $\frac{6EI}{l^2}$     b)  $\frac{3EI}{l}$     c)  $\frac{4EI}{l}$     d)  $\frac{6EI}{l}$     e)  $\frac{3EI}{l^2}$

1.4.29. Pentru bara din figură, care este expresia rigidității la rotire de nod?



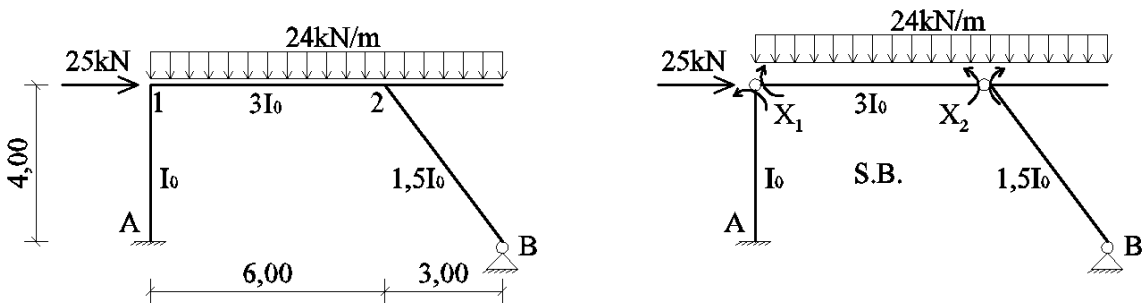
- a)  $\frac{6EI}{l^2}$     b)  $\frac{3EI}{l^2}$     c)  $\frac{4EI}{l}$     d)  $\frac{6EI}{l}$     e)  $\frac{3EI}{l}$

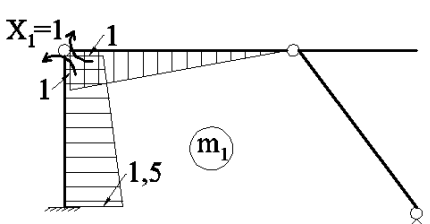
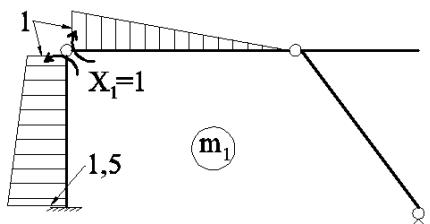
1.4.30. Pentru bara din figură, care este expresia rigidității la rotire de bară?

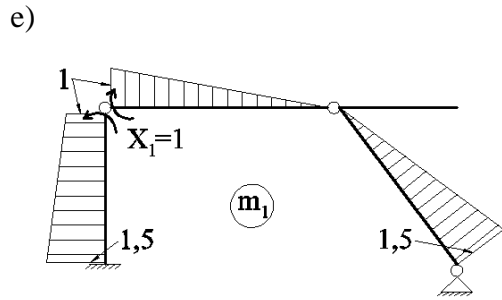
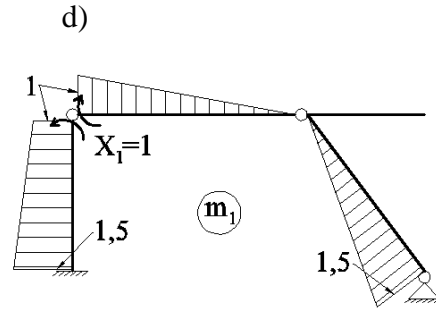
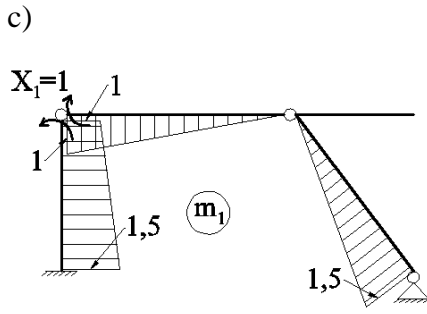


- a)  $\frac{6EI}{l^2}$     b)  $\frac{6EI}{l}$     c)  $\frac{3EI}{l^2}$     d)  $\frac{3EI}{l}$     e)  $\frac{4EI}{l}$

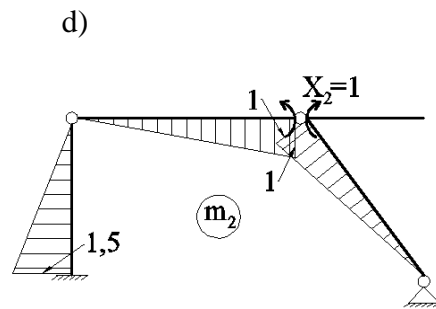
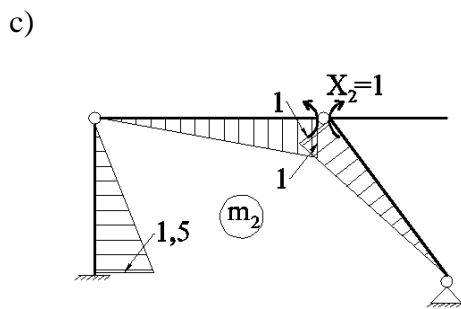
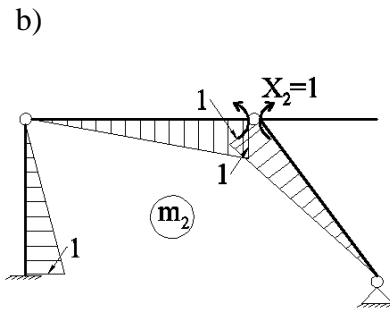
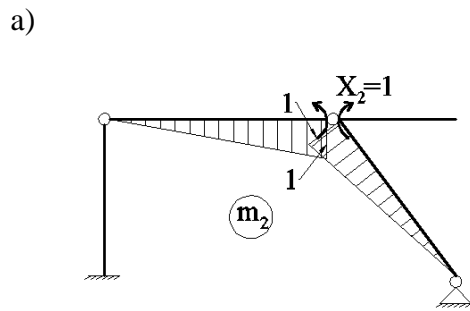
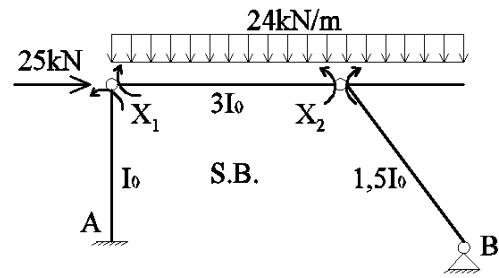
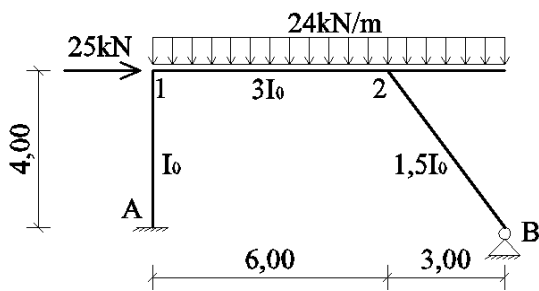
1.4.31. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_1$  corectă?



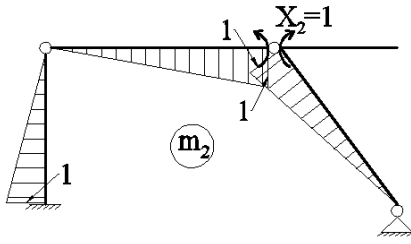
- a)     b) 



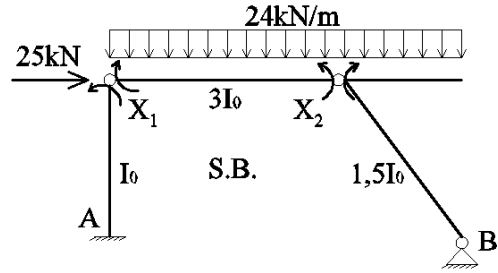
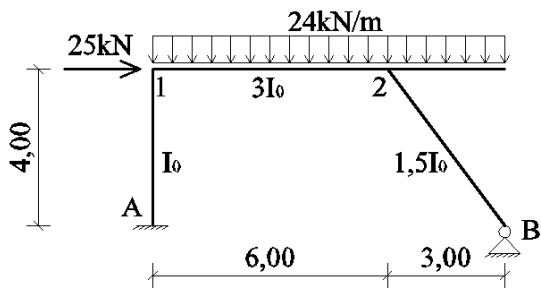
1.4.32. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_2$  corectă?



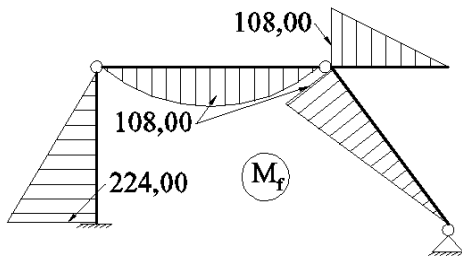
e)



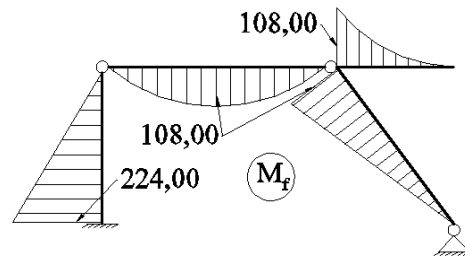
1.4.33. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $M_f$  corectă?



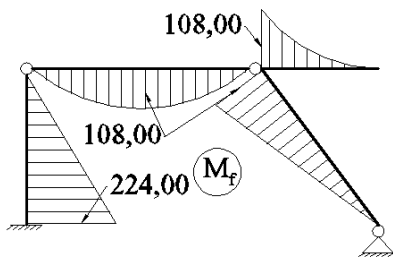
a)



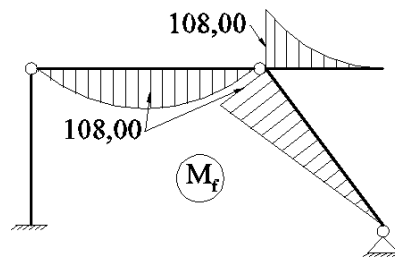
b)



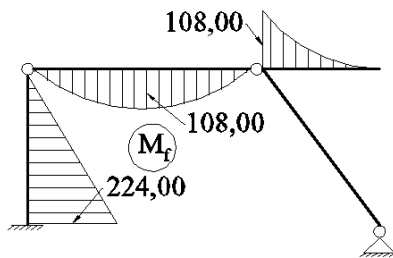
c)



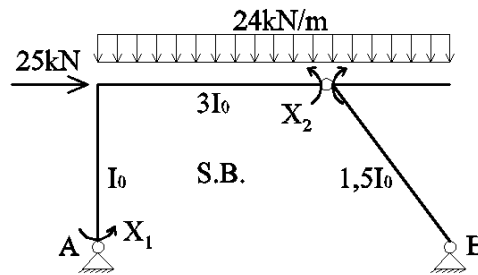
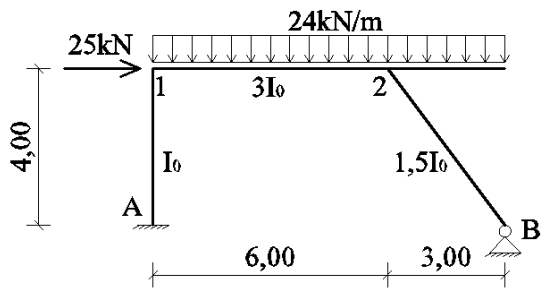
d)



e)

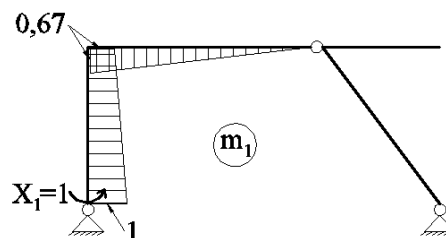
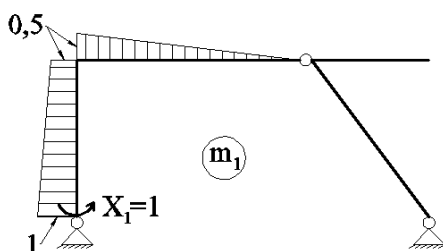


1.4.34. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_1$  corectă?



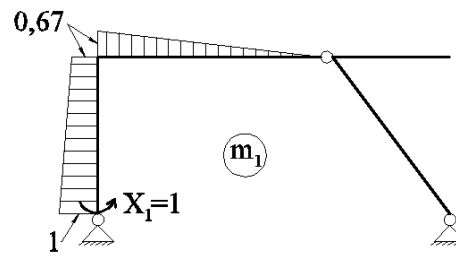
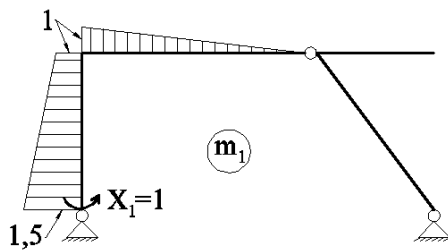
a)

b)

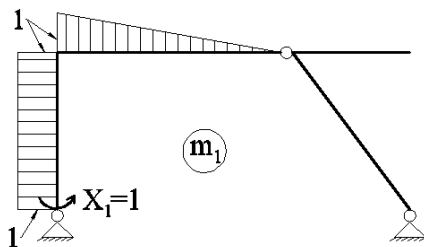


c)

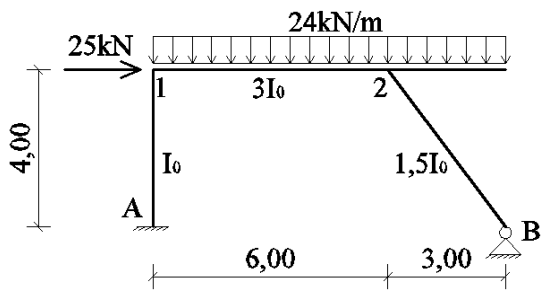
d)



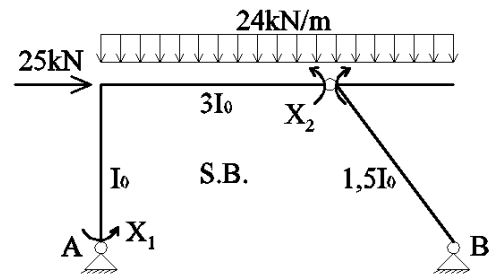
e)



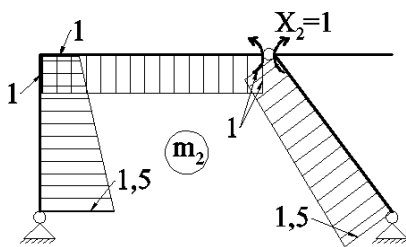
1.4.35. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $m_2$  corectă?



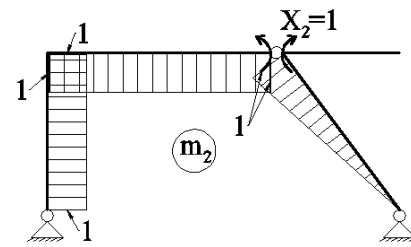
a)



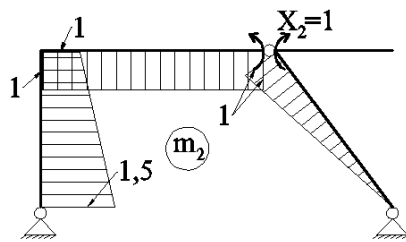
b)



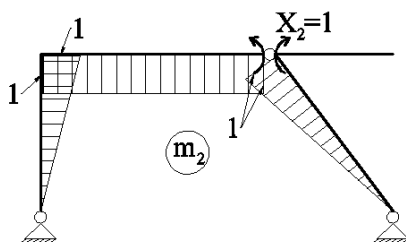
c)



d)

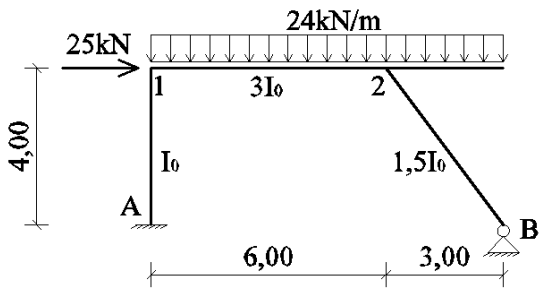


e)

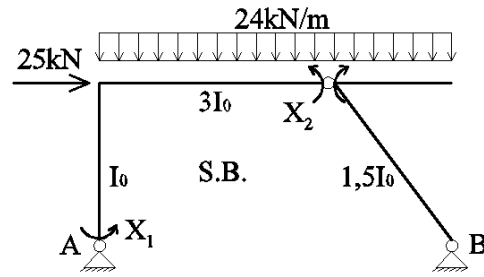




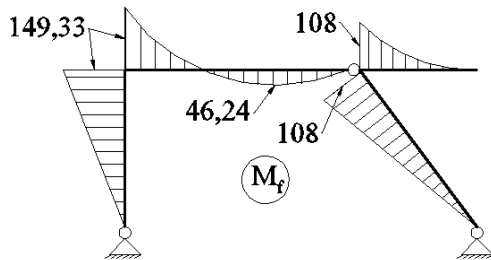
1.4.36. Pentru structura din figură și sistemul de bază alăturat, care este diagrama  $M_f$  corectă?



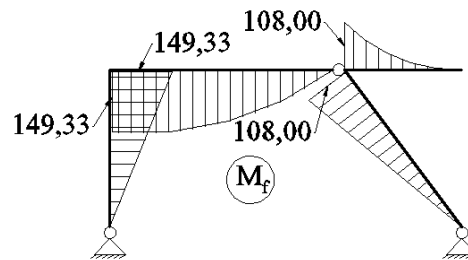
a)



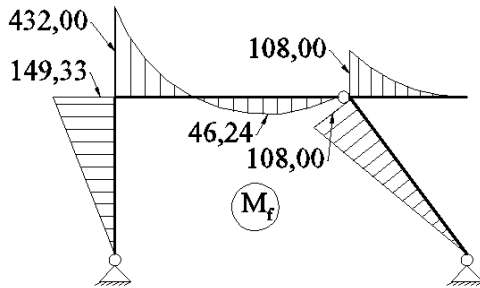
b)



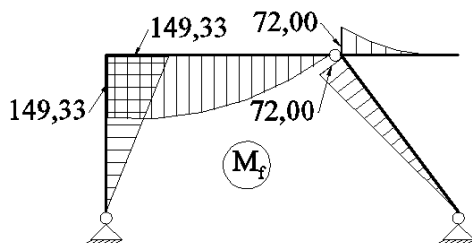
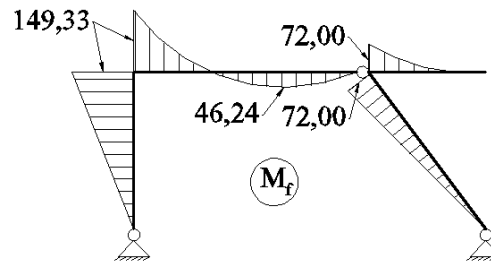
c)



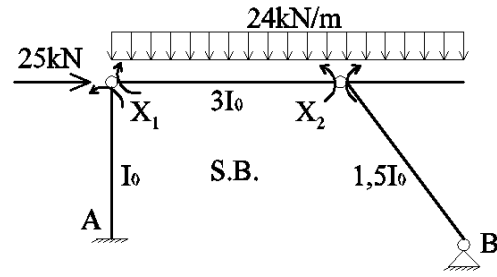
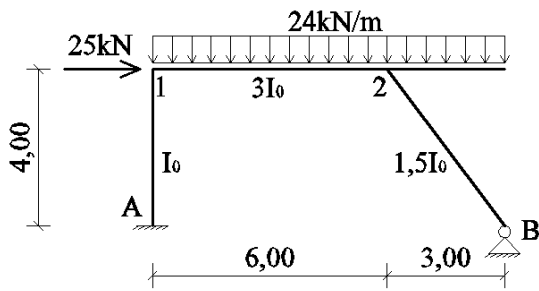
d)



e)

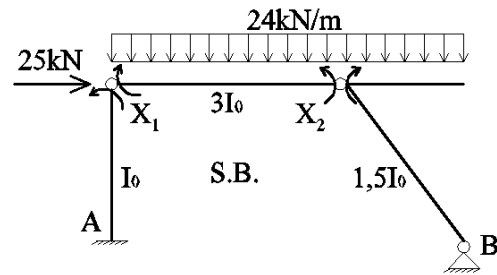
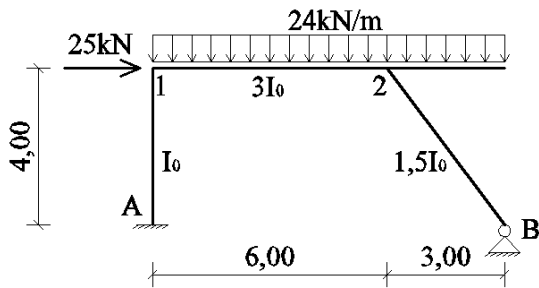


1.4.37. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\delta_{11}$ ?



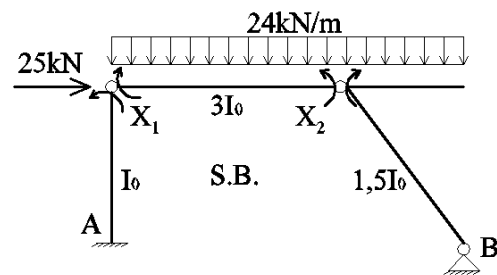
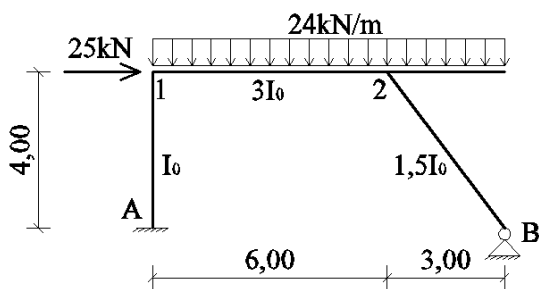
- a)  $8,33/EI_0$    b)  $7,00/EI_0$    c)  $7,33/EI_0$    d)  $5,66/EI_0$    e)  $6,87/EI_0$

1.4.38. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\delta_{12}$ ?



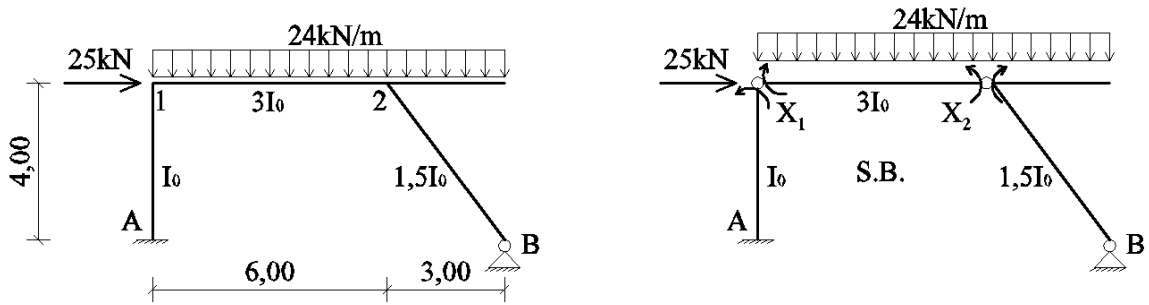
- a)  $4,33/EI_0$    b)  $-3,33/EI_0$    c)  $-3,67/EI_0$    d)  $-3,86/EI_0$    e)  $4,50/EI_0$

1.4.39. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\Delta_{1f}$ ?



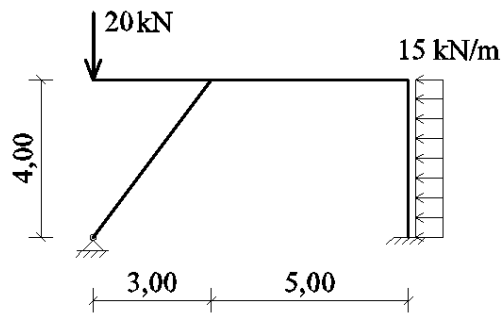
- a)  $594,33/EI_0$    b)  $421,33/EI_0$    c)  $813,33/EI_0$    d)  $450,33/EI_0$    e)  $669,33/EI_0$

1.4.40. Pentru structura și sistemul de bază din figură, care este valoarea coeficientului  $\Delta_{2f}$ ?



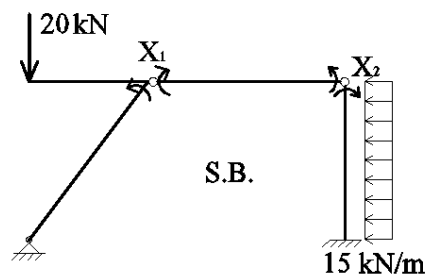
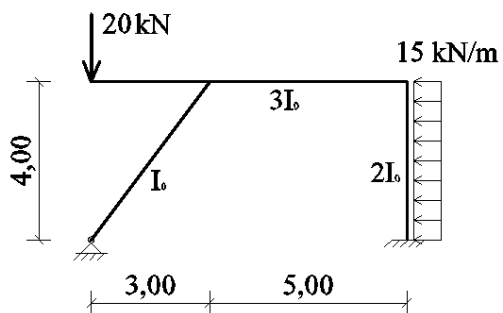
- a)  $640/EI_0$     b)  $-52/EI_0$     c)  $-256/EI_0$     d)  $-48/EI_0$     e)  $248/EI_0$

1.4.41. Pentru structura din figură, care din următoarele enunțuri este adevărat?

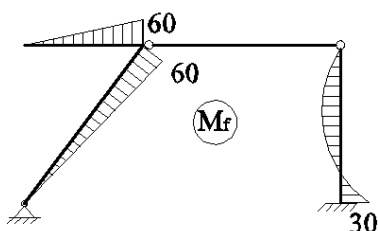


- a) Cadrul este static determinat.  
 b) Cadrul are gradul de nedeterminare statică egal cu 2.  
 c) Structura este o data static nedeterminată.  
 d) Cadrul este cu noduri fixe.  
 e) Gradul de nedeterminare statică al structurii este egal cu trei.

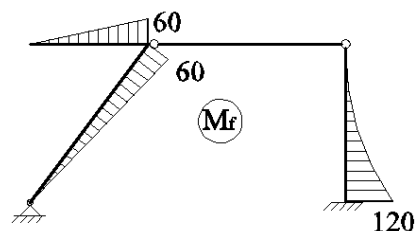
1.4.42. Pentru cadrul din figura de mai jos și sistemul de bază dat, să se determine care este diagrama de momente  $M_f$  corectă.



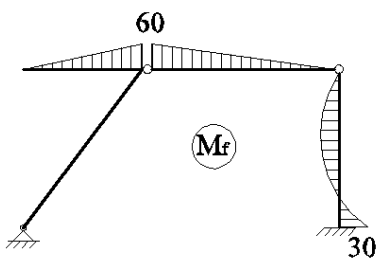
a)



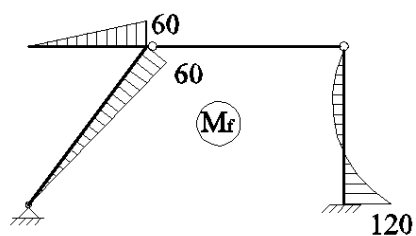
b)



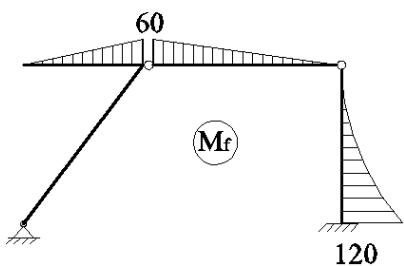
c)



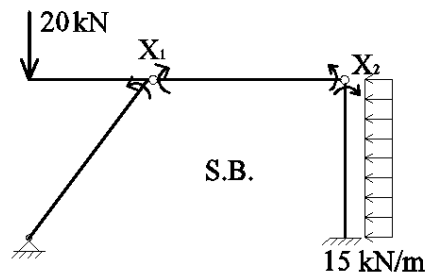
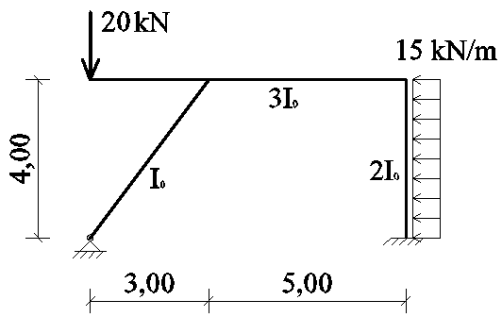
d)



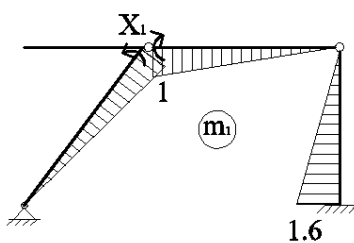
e)



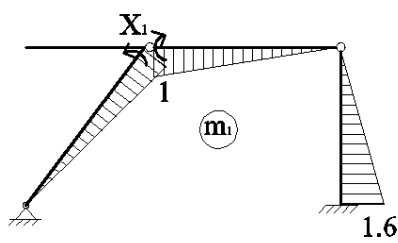
1.4.43. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_1=1$ ?



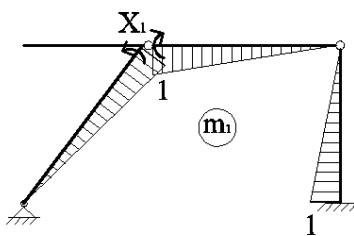
a)



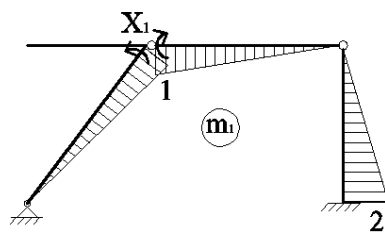
b)



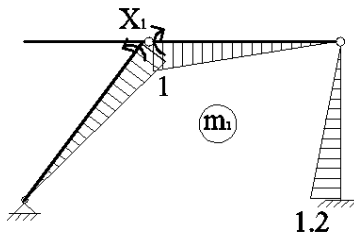
c)



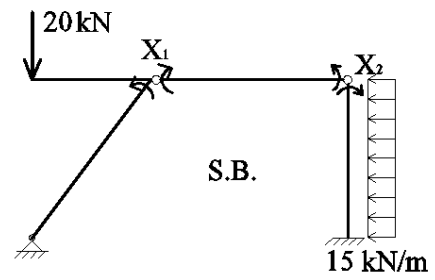
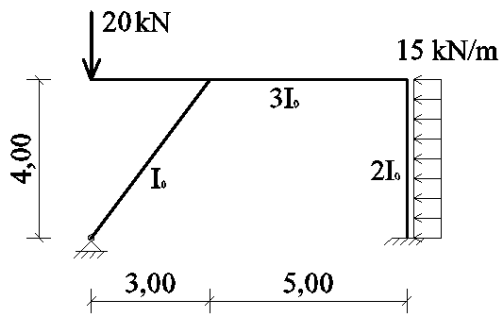
d)



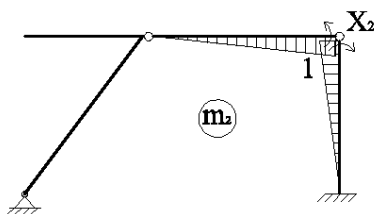
e)



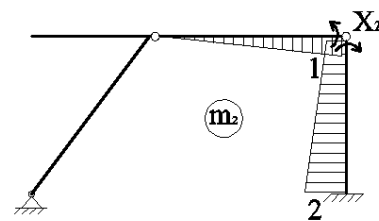
1.4.44. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_2=1$ ?



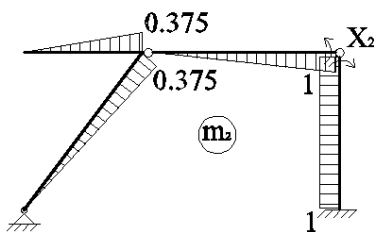
a)



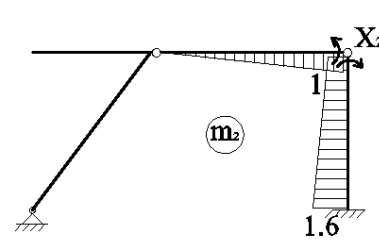
b)



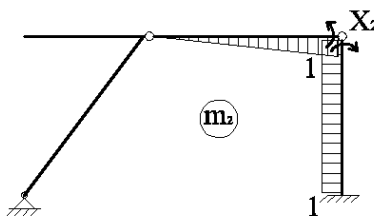
c)



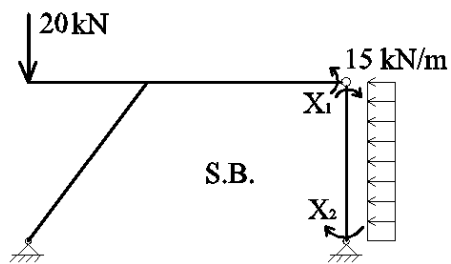
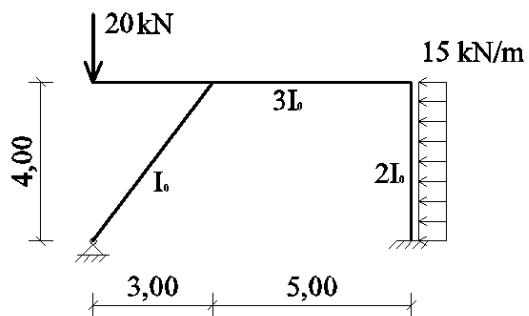
d)



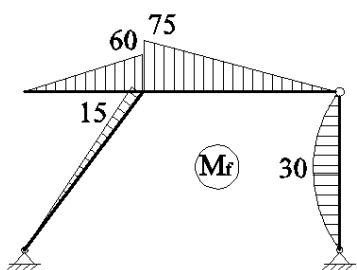
e)



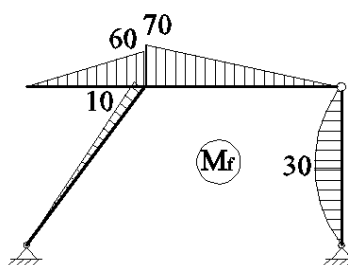
1.4.45. Pentru cadrul din figura de mai jos și sistemul de bază dat, să se determine care este diagrama de momente  $M_f$  corectă.



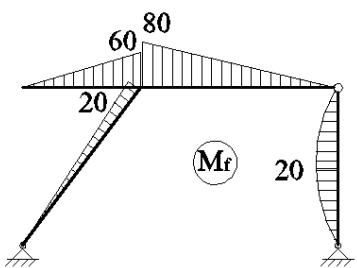
a)



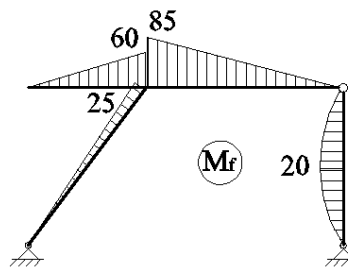
b)



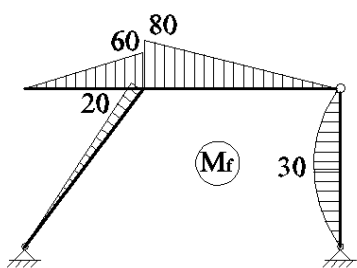
c)



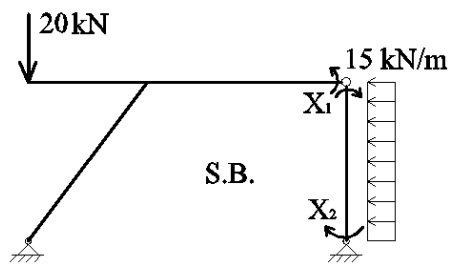
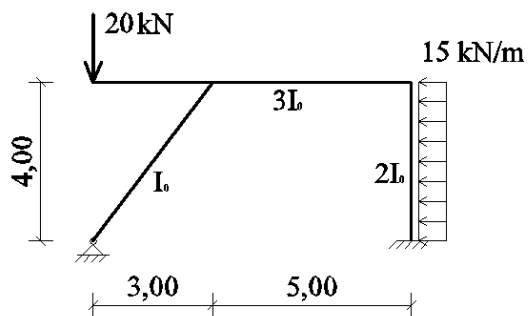
d)



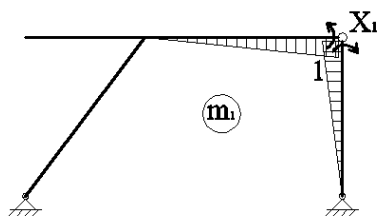
e)



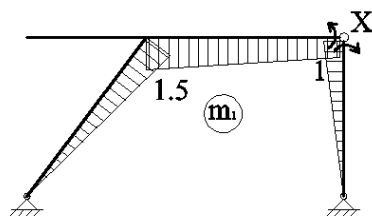
1.4.46. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_1=1$ ?



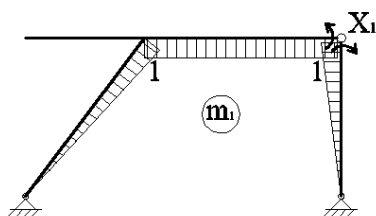
a)



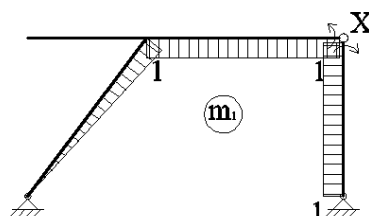
b)



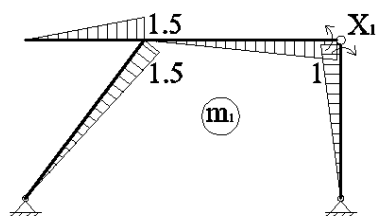
c)



d)

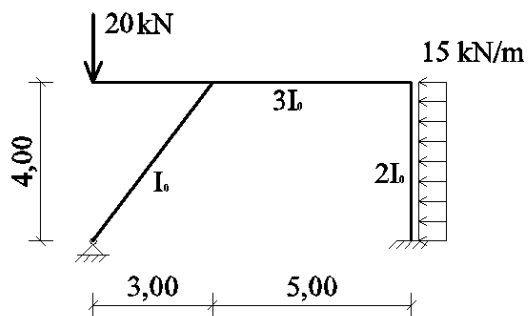


e)

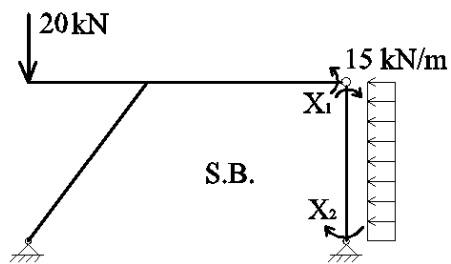




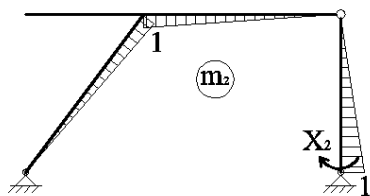
1.4.47. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_2=1$ ?



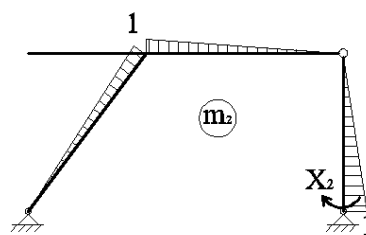
a)



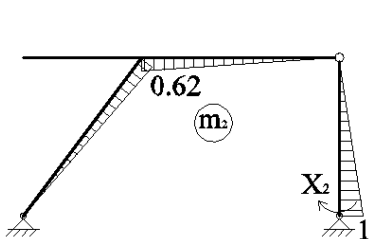
b)



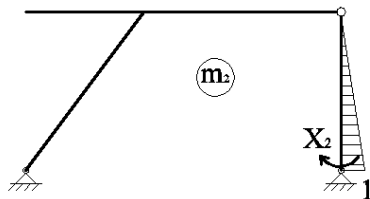
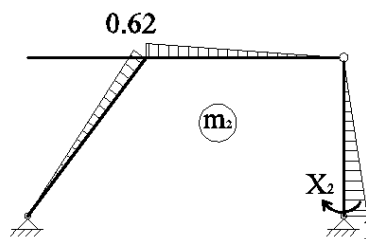
c)



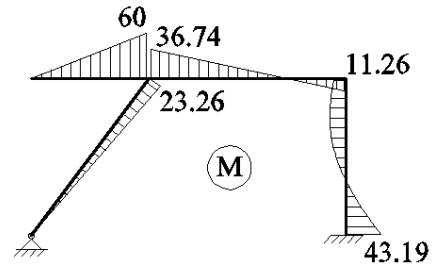
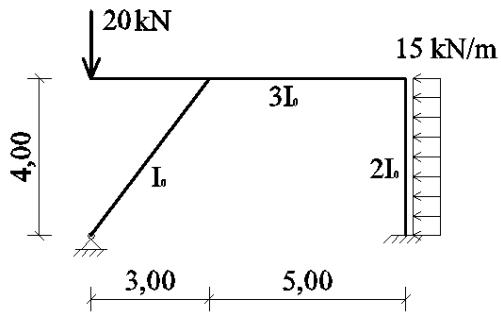
d)



e)

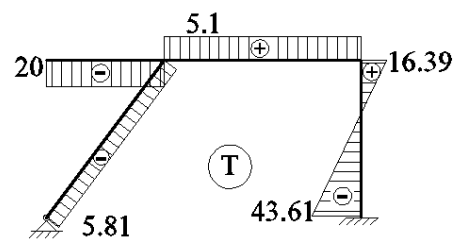
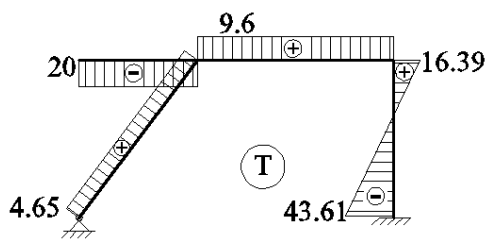


1.4.48. Pentru structura din figură și diagrama finală de moment încovoietor, care este diagrama corectă de forță tăietoare?



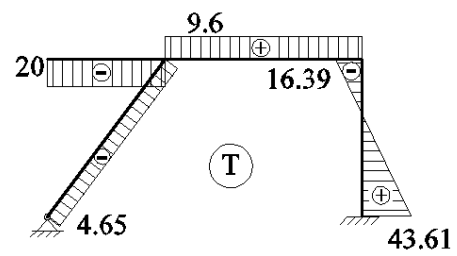
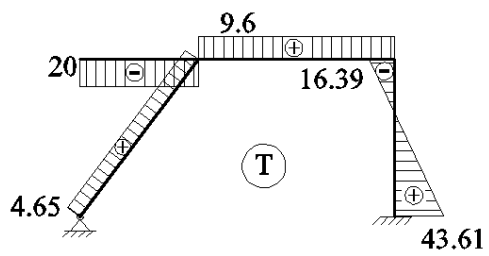
a)

b)

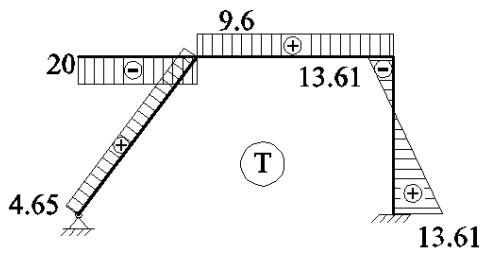


c)

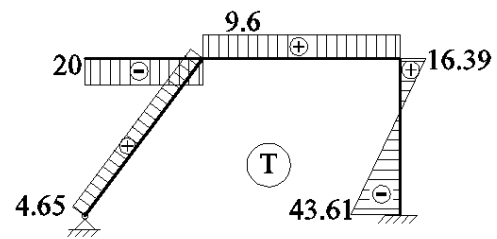
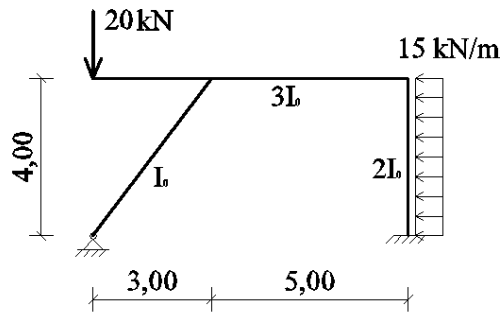
d)



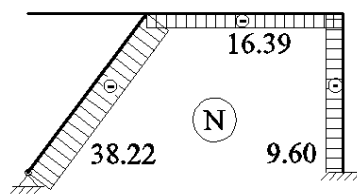
e)



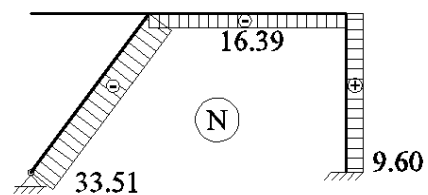
1.4.49. Pentru structura din figură și diagrama finală de forță tăietoare, care este diagramă corectă de efort axial?



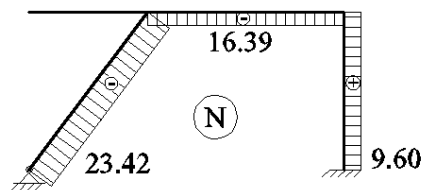
a)



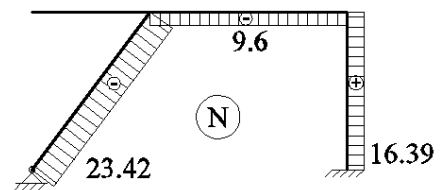
b)



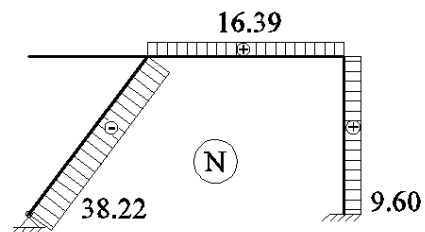
c)



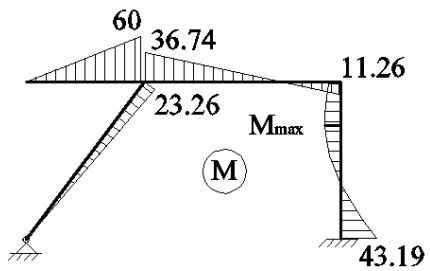
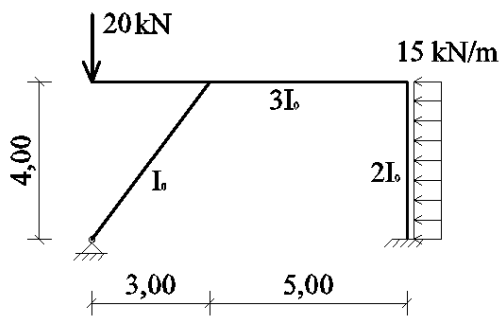
d)



e)

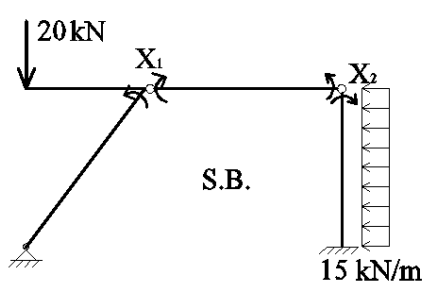
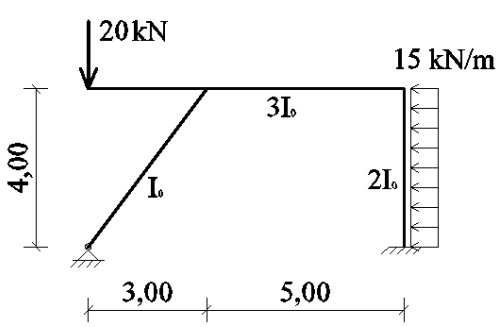


1.4.50. Pentru structura din figură, cu diagrama de moment încovoiator trasată alăturat, care este valoarea corectă a momentului încovoiator  $M_{max}$ ?



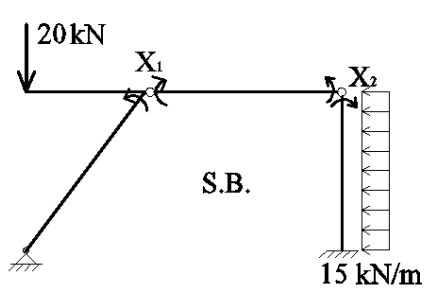
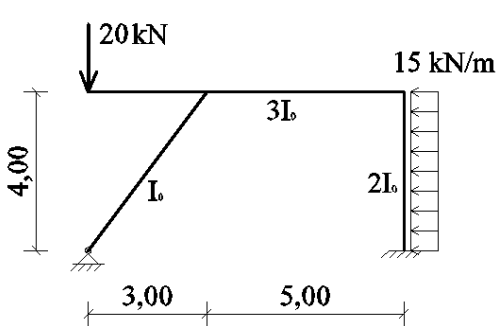
- a) 11,26 kNm      b) 15,21 kNm      c) 22,35 kNm      d) 20,21 kNm      e) 13,61 kNm

1.4.51. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\delta_{11}$  din sistemul de ecuații de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



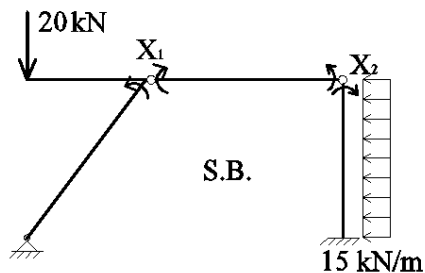
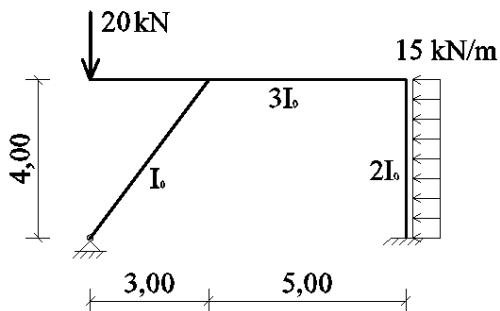
- a)  $6,71/EI_0$       b)  $4,32/EI_0$       c)  $8,42/EI_0$       d)  $5,04/EI_0$       e)  $3,93/EI_0$

1.4.52. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\delta_{12}$  din sistemul de ecuații de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



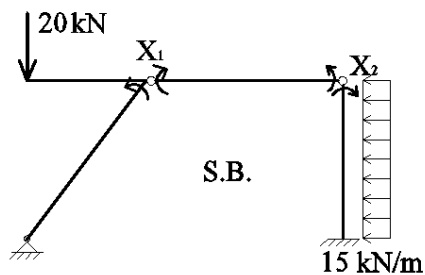
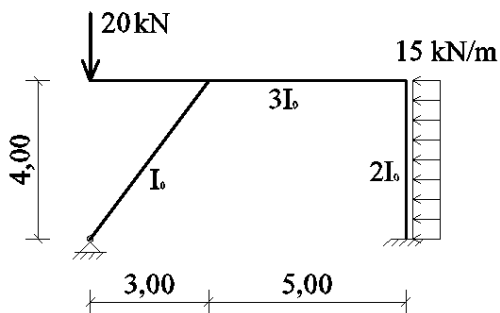
- a)  $-5,35/EI_0$       b)  $-4,22/EI_0$       c)  $-1,96/EI_0$       d)  $-4,22/EI_0$       e)  $-1,68/EI_0$

1.4.53. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\delta_{22}$  din sistemul de ecuații de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



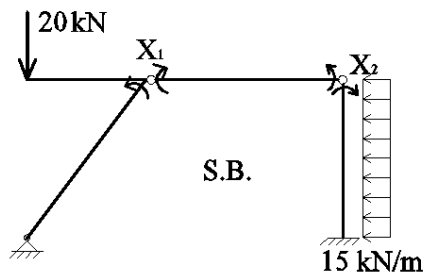
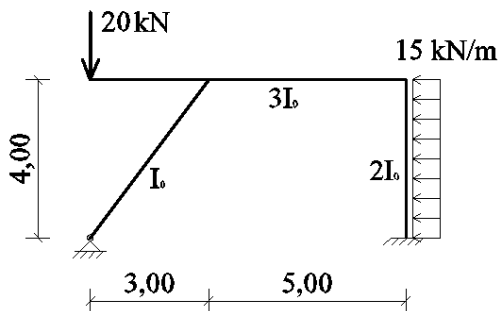
- a)  $2,80/EI_0$       b)  $4,32/EI_0$       c)  $6,87/EI_0$       d)  $4,00/EI_0$       e)  $1,76/EI_0$

1.4.54. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\Delta_{1f}$  din sistemul de ecuații de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



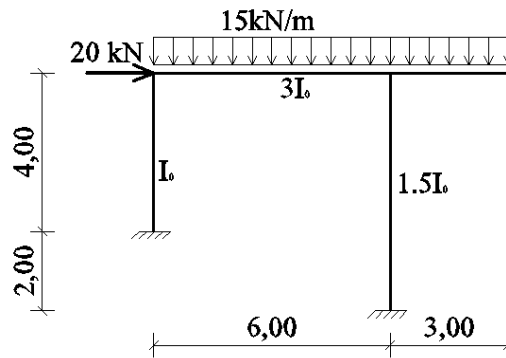
- a)  $248/EI_0$       b)  $196/EI_0$       c)  $330/EI_0$       d)  $132/EI_0$       e)  $292/EI_0$

1.4.55. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\Delta_{2f}$  din sistemul de ecuații de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



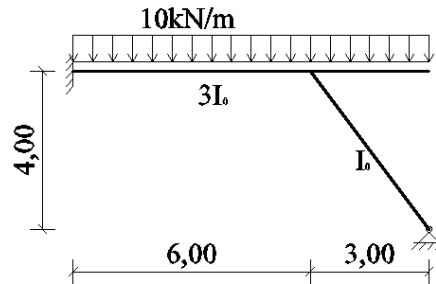
- a)  $-210/EI_0$       b)  $-52/EI_0$       c)  $-116/EI_0$       d)  $-92/EI_0$       e)  $-232/EI_0$

1.4.56. Să se stabilească gradul de nedeterminare statică al structurii din figura următoare:



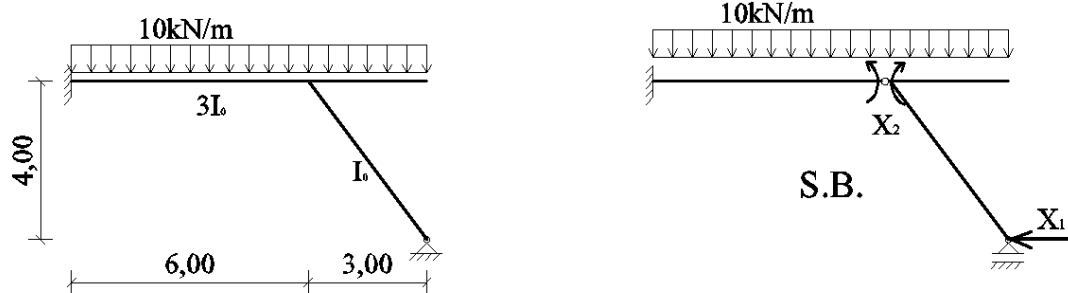
- a) 3      b) 1      c) 2      d) 4      e) 0

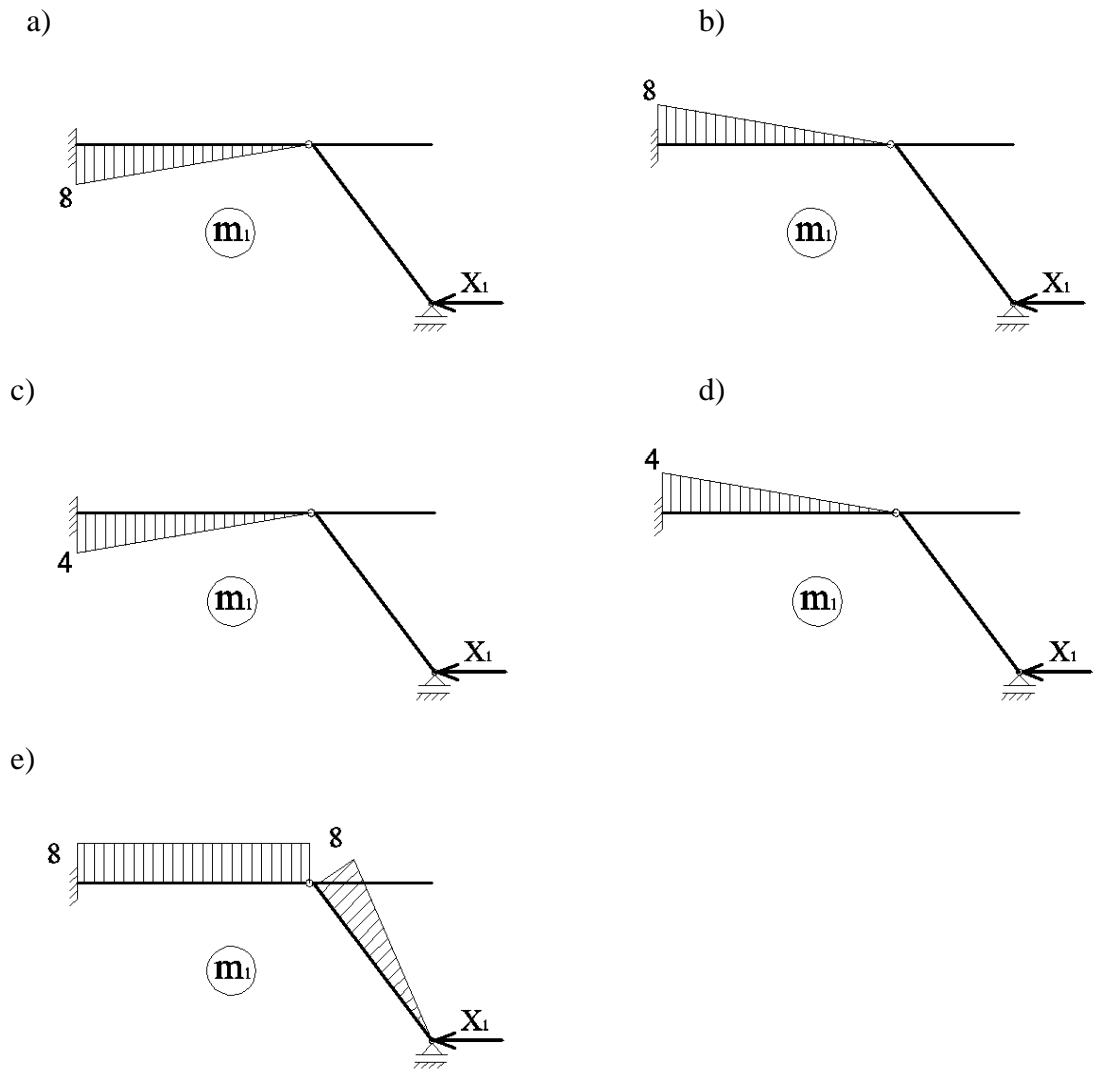
1.4.57. Să se stabilească gradul de nedeterminare statică al structurii din figura următoare:



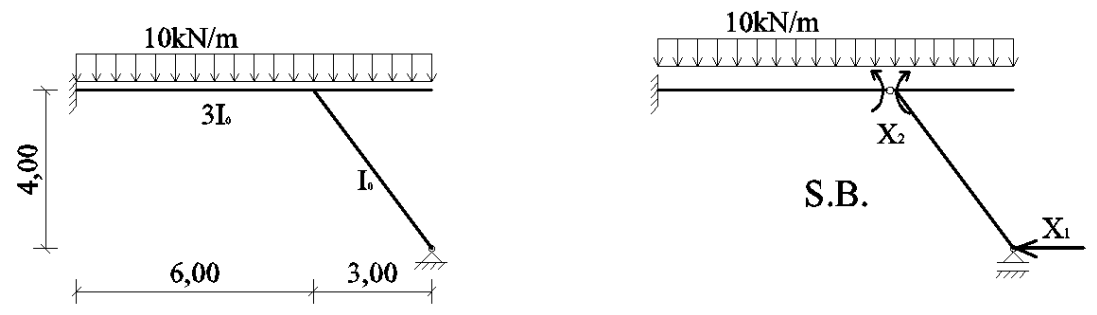
- a) 4      b) 1      c) 3      d) 2      e) 0

1.4.58. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_1=1$ ?

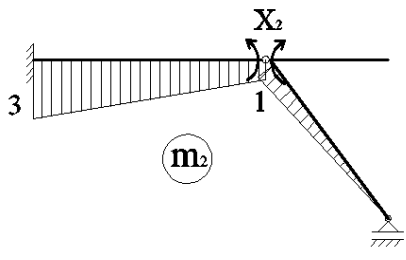




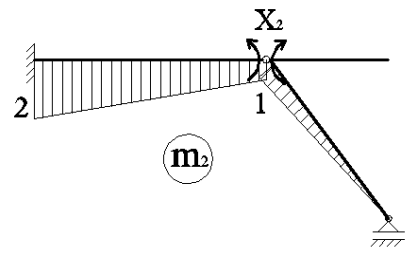
1.4.59. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază alăturat, rezultată din încărcarea acestuia cu necunoscuta  $X_2=1$ ?



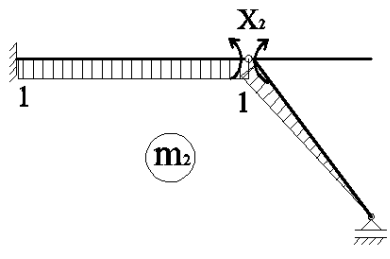
a)



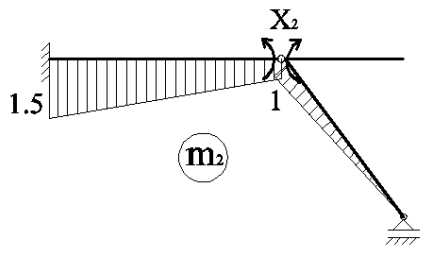
b)



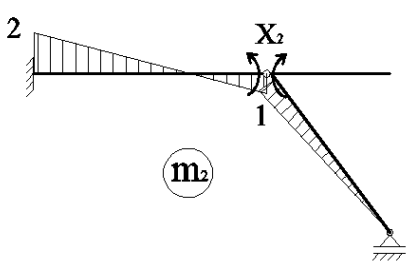
c)



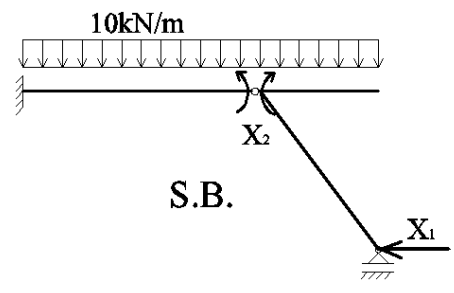
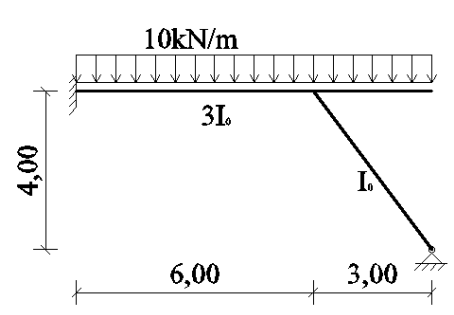
d)



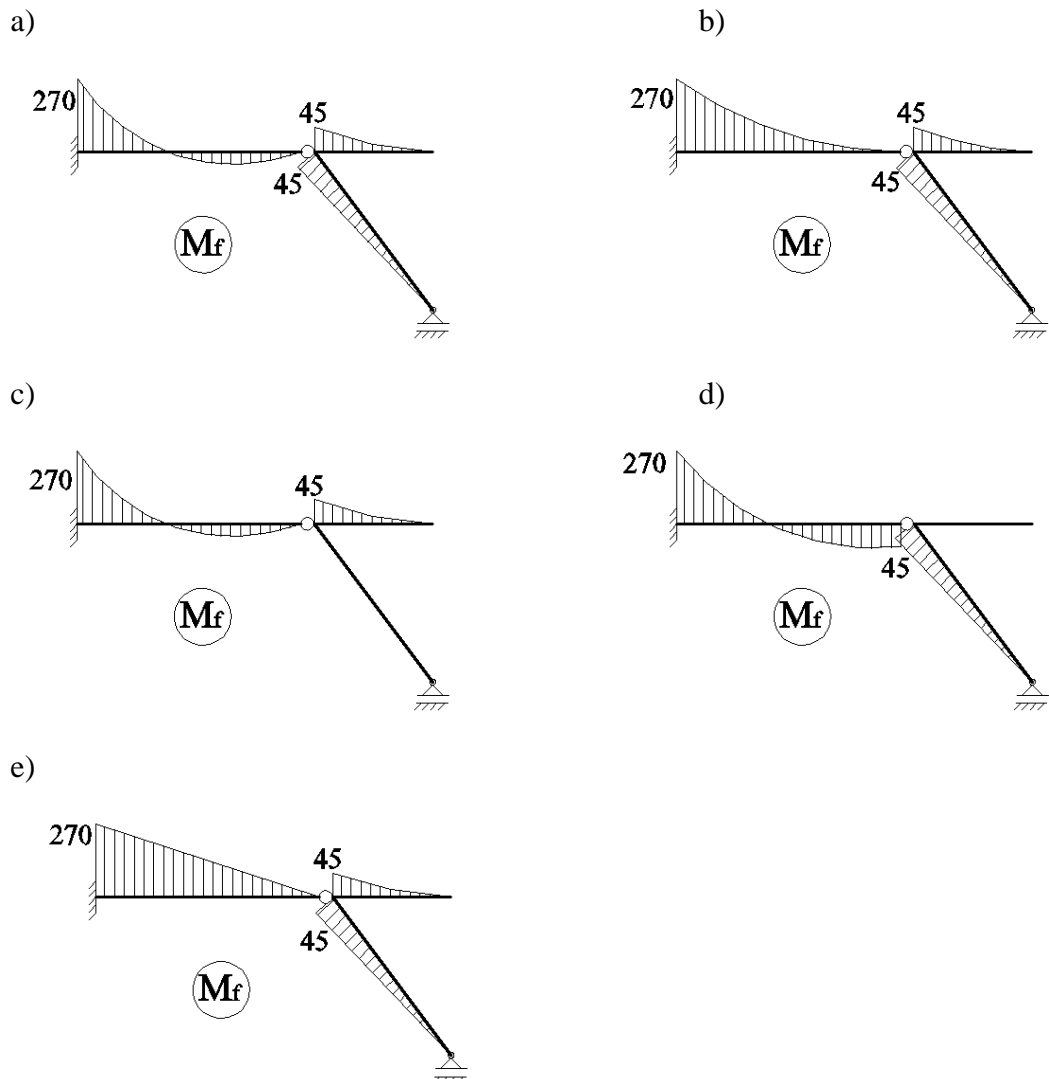
e)



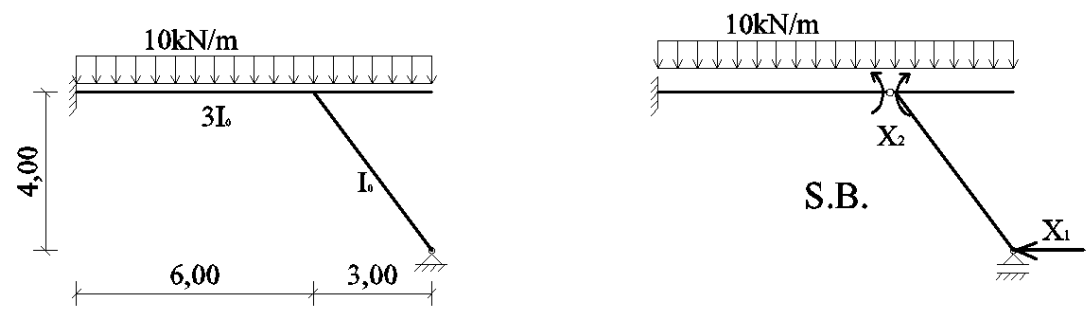
1.4.60. Pentru cadrul din figura de mai jos și sistemul de bază dat, să se determine care este diagrama de momente  $M_f$  corectă?





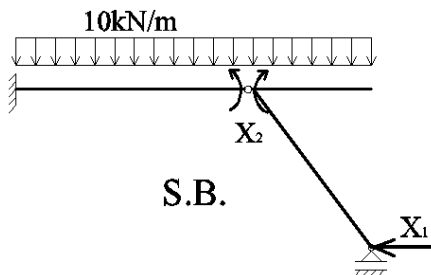
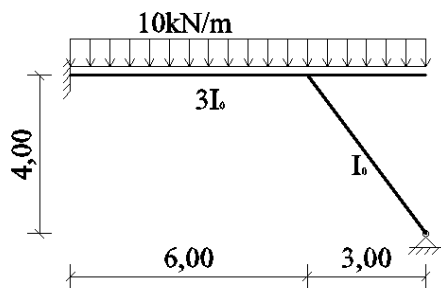


1.4.61. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\delta_{11}$  din sistemul ecuațiilor de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



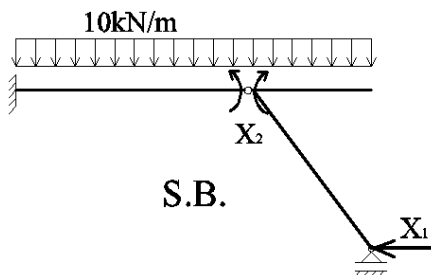
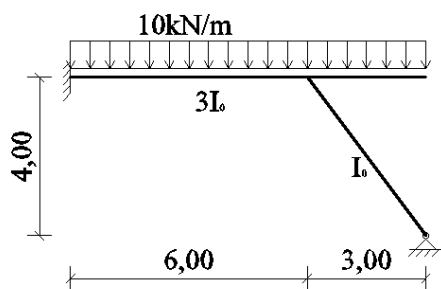
- a)  $32,18/EI_0$       b)  $42,67/EI_0$       c)  $18,63/EI_0$       d)  $128,00/EI_0$       e)  $21,33/EI_0$

1.4.62. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\delta_{12}$  din sistemul ecuațiilor de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



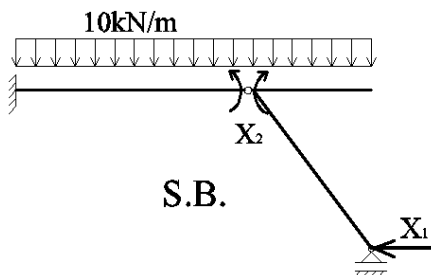
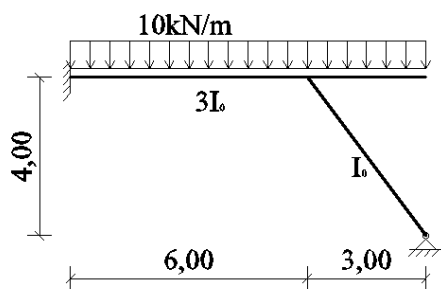
- a)  $25,47/EI_0$       b)  $32,18/EI_0$       c)  $18,67/EI_0$       d)  $13,33/EI_0$       e)  $56,00/EI_0$

1.4.64. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\Delta_{1f}$  din sistemul ecuațiilor de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



- a)  $-1352,65/EI_0$       b)  $-904,33/EI_0$       c)  $-1200,00/EI_0$       d)  $-785,00/EI_0$       e)  $-1080,00/EI_0$

1.4.65. Pentru cadrul din figura de mai jos, să se determine valoarea corectă a coeficientului  $\Delta_{2f}$  din sistemul ecuațiilor de condiție, având dat sistemul de bază alăturat.



- a)  $-1065/EI_0$       b)  $-215/EI_0$       c)  $-469/EI_0$       d)  $-375/EI_0$       e)  $-435/EI_0$

## 2. Metoda generală a deplasărilor

### 2.1. Principiile generale ale metodei

**Metoda generală a deplasărilor** abordează structurile din punct de vedere al nedeterminării geometrice și este specifică rezolvării structurilor de tip **cadru**.

**Ipooteza simplificatoare** acceptată în analiza acestor structuri este aceea că în urma deformării structurii **lungimile barelor nu se modifică**.

**Cadrele** sunt structuri alcătuite din bare conectate în noduri rigide sau rigide și articulate, la care **solicitarea dominantă este încovoierea**.

Un **nod rigid** are **trei grade de libertate**: o rotire și două translații după două direcții diferite din plan.

Un **nod articulat** are **două grade de libertate**: translații după două direcții distincte din plan.

Deplasările unui nod rigid, rotire și translație, sunt comune tuturor capetelor de bare care se întâlnesc în acel nod. Rezultă că **poziția deformată a structurii** este determinată de **deplasările nodurilor**, motiv pentru care, în metoda deplasărilor acestea sunt alese ca **parametri independenți**.

Din punctul de vedere al **posibilităților de deplasare ale nodurilor**, având la bază ipoteza invariabilității lungimilor barelor, cadrele se clasifică în:

- **cadre cu noduri fixe**
- **cadre cu noduri deplasabile**.

*Termenii fix și deplasabil se referă numai la posibilitățile de translație ale nodurilor.*

**Cadrele cu noduri fixe** sunt cele care se deformează numai prin **rotiri de noduri** (Fig.2.1,a).

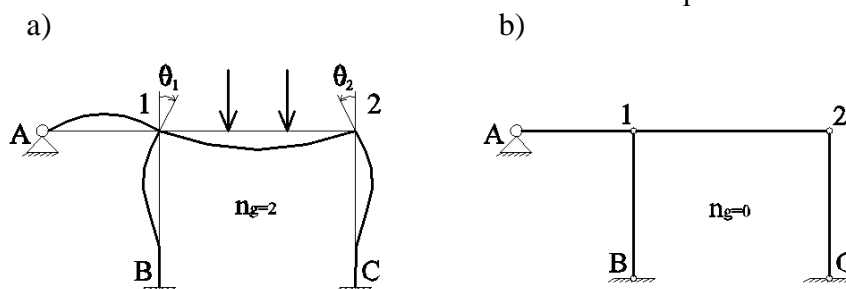


Fig. 2.1

#### Identificarea cadrelor cu noduri fixe:

- Dacă prin introducerea de **articulații** în toate **nodurile rigide** ale structurii și în **încăstrări** se obține o **structură articulată static determinată**, cadrul inițial este cu **noduri fixe**.
- Vizual, se poate aprecia: dacă fiecare nod al structurii este legat de două puncte fixe (legături cu terenul sau noduri fixe), cadrul este cu noduri fixe.

**Numărul parametrilor care definesc poziția deformată a unui cadru cu noduri fixe este egal cu numărul nodurilor rigide.**

*Din numărul total de noduri se exclud nodurile articulate.*

**Cadrele cu noduri deplasabile** sunt acele cadre care se deformează atât prin **rotiri de noduri**, cât și prin **translații de noduri** (Fig.2.2,a).

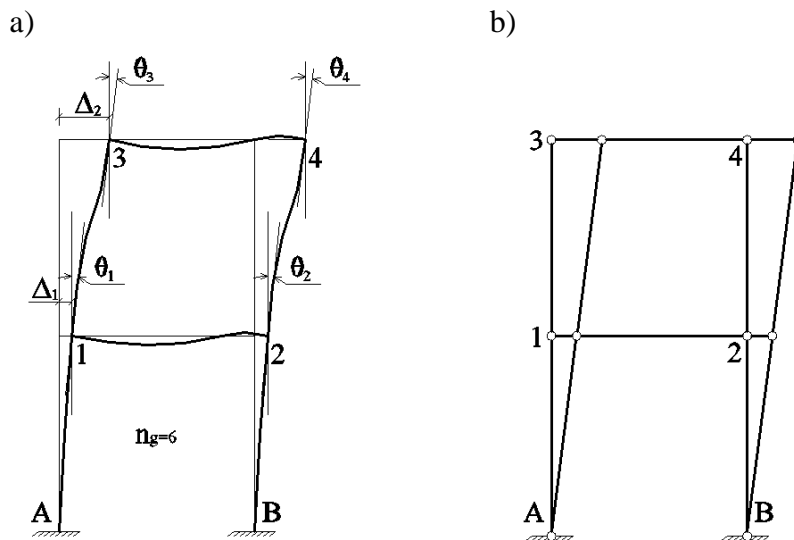


Fig.2.2

#### Identificarea cadrelor cu noduri deplasabile:

- Dacă prin introducerea de **articulații** în toate **nodurile rigide** ale structurii și în **încăstrări** se obține un **mecanism** (cu un anumit număr de grade de libertate cinematică), cadrul inițial este cu **noduri deplasabile**.
- Numărul gradelor de libertate cinematică ale mecanismului obținut definește numărul gradelor de libertate elastică ale structurii.

Numărul parametrilor independenți care definesc poziția deformată a unui cadru cu noduri deplasabile este egal cu numărul nodurilor rigide, la care se adaugă numărul gradelor de libertate elastică ale structurii (egal cu numărul gradelor de libertate cinematică ale schemei articulate).

Precizări privind stabilirea numărului gradelor de libertate elastică ale unui cadru:

- în cazul cadrului cu tiranți (Fig.2.3, a), tirantul nu împiedică deplasarea relativă a nodurilor pe care le unește, doar o limitează, deci nu influențează numărul gradelor de libertate elastică ale structurii;
- cadrele care au o bară curbă au un grad de libertate în plus față de același cadru cu grinda dreaptă, (Fig.2.3,b).

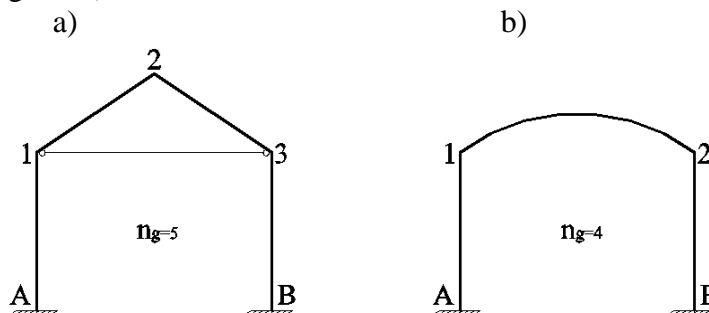


Fig.2.3

**Necunoscutele deplasări** sunt:

- pentru cadrele cu noduri fixe - rotirile nodurilor rigide;
- pentru cadrele cu noduri deplasabile - rotirile nodurilor rigide și parametrii care definesc deplasările corespunzătoare gradelor de libertate elastică.

În metoda deplasărilor, **sistemul de bază** este o structură **geometric determinată**, la care toate **deplasările nodurilor sunt nule**.

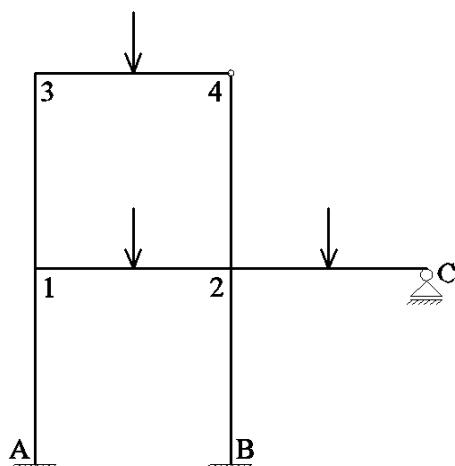
Blocarea nodurilor se realizează prin introducerea unor legături *fictive*, dispuse astfel încât să împiedice atât rotirile cât și translațiile nodurilor structurii:

- legătura care **împiedică rotirea unui nod** se numește **blocaj de nod** și în ea se dezvoltă o **reacțiune-moment**;
- legătura care **împiedică deplasarea după direcția unui grad de libertate** se numește **blocaj de grad de libertate** și în ea se dezvoltă o **reacțiune-forță**.

Prin blocarea nodurilor (la rotire și translație) structura devine un ansamblu de bare dublu încastrate și/sau încastrate la un capăt și rezemate oarecum la celălalt, care lucrează independent. Aceste bare sunt static nedeterminate, dar ele pot fi rezolvate cu ușurință prin metoda forțelor.

Sistemul de bază, cu rezolvarea cunoscută, se încarcă cu forțele exterioare date și cu necunoscutele, notate cu  $Z_i$  (Fig.2.4) și se impune condiția ca el să se comporte identic cu structura dată.

a)



b)

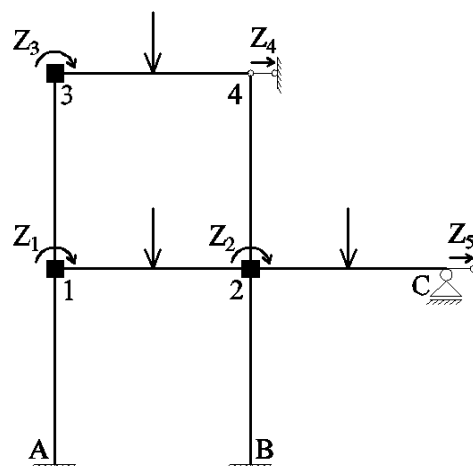


Fig.2.4

Întrucât condiția de continuitate a deformatelor structurii a fost impusă la alcătuirea sistemului de bază, comportarea identică a celor două structuri se obține prin impunerea condiției de **echilibru static**. Astfel, se pune condiția ca **reacțiunile din blocajele nodurilor sistemului de bază să fie egale cu zero**.

Obiectivul metodei deplasărilor îl constituie determinarea momentelor încovoietoare de la capetele barelor (numite momente încovoietoare de capăt), care odată cunoscute permit determinarea diagramelor de eforturi.

**Convenția de semn** utilizată în metoda deplasărilor este: se consideră **pozitive** rotirile și momentele încovoietoare de capăt care au **sens orar**.

### 2.1.1. Etapele metodei

1. Stabilirea gradului de nedeterminare geometrică al structurii.

- se introduc articulații în toate nodurile structurii și se calculează

$$n = r + l - 3c$$

- dacă  $n=0$  cadrul este cu noduri fixe (C.N.F.);

- dacă  $n < 0$  cadrul este cu noduri deplasabile (C.N.D.).  
 Gradul de nedeterminare geometrică al structurii va fi

$$n_g = n_r + n_e \quad (2.1)$$

unde:

- $n_r$  este numărul nodurilor rigide,
  - $n_e = 3c - (r + l)$  este numărul gradelor de libertate elastică ale structurii, egal cu numărul gradelor de libertate cinematică ale structurii articulate asociată cadrului.
2. Se stabilește sistemul de bază (unic pentru o structură dată) prin blocarea tuturor posibilităților de deplasare ale nodurilor și se pun în evidență necunoscutele deplasări ale nodurilor (rotiri pentru C.N.F., respectiv rotiri și translații de noduri pentru C.N.D.).
  3. Se determină caracteristicile de rigiditate ale barelor la rotire de nod și la translație de nod (sau rotire de bară).
  4. Se încarcă succesiv sistemul de bază cu forțele exterioare date și cu necunoscutele egale cu unitatea și se trasează deformatiunile barelor și diagramele de moment încovoietor pentru fiecare caz de încărcare.
  5. Se alcătuieste sistemul ecuațiilor de condiție prin scrierea ecuațiilor de echilibru static la rotire și translație pentru fiecare nod și se determină necunoscutele-deplasări ale nodurilor.
  6. Se determină momentele încovoietoare la capetele barelor cu relația de mai jos și se trasează diagramele de eforturi pe același principiu ca în metoda forțelor.

$$M^{JK} + M_f^{JK} + \sum_{i=1}^n (m_i^{JK} \cdot Z_i)$$

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare se scrie echilibrul barelor sub acțiunea forțelor exterioare și al momentelor încovoietoare determinate la capetele lor.

Pentru trasarea diagramei de efort axial se scrie echilibrul nodurilor sub acțiunea forțelor direct aplicate și al părților înlăturate prin izolarea nodului, respectiv forțele tăietoare și eforturile axiale.

7. Verificarea diagramei finale de moment încovoietor:

- se verifică echilibrul fiecărui nod

$$\sum_i M_{ih} = 0$$

- utilizând diagrama finală de moment încovoietor și schema cinematică a structurii articulate, se aplică principiul lucrului mecanic virtual nul.

### 2.1.2. Precizări teoretice

În metoda deplasărilor necunoscutele sunt rotiri și translații de noduri. Pentru orice cadru cu noduri deplasabile, translația unui nod se poate exprima în funcție de rotirea unei bare. Astfel, considerând cadrul din figura 2.5, translația  $\Delta_1$  se exprimă în funcție de rotirea  $\psi_{A1}$  (a barei A-1) prin relația  $\Delta_1 = h_{A1} \psi_{A1}$ .

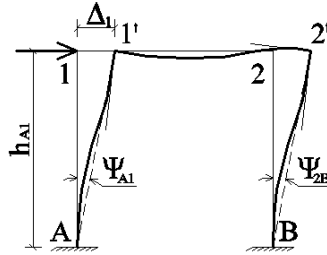


Fig. 2.5

Rezultă că necunoscutele-translații de noduri pot fi înlocuite prin necunoscute-rotiri de bare, astfel că toate necunoscutele sunt rotiri.

Se lucrează cu *rotiri* și cu *momente de capăt*.

Adoptarea noii convenții de semn impune câteva precizări cu privire la perechea de momente încovoietoare care apare pe fețele unei secțiuni. În vechea convenție cele două momente încovoietoare, reprezentând efectul de continuitate dintr-o secțiune, au același semn. În noua convenție ele au semne contrare (Fig.2.6). Deci, pentru un moment de capăt, se disting: moment aplicat pe bară și moment aplicat pe nod. Datorită convenției adoptate, trebuie să se stabilească de la început cu care dintre ele se va lucra. Se convine să se opereze cu *momentele aplicate pe bare*.

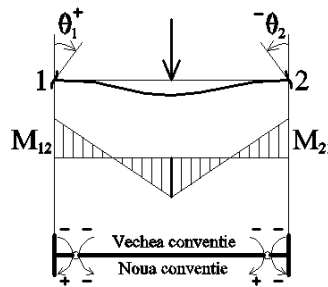


Fig. 2.6

Blocarea nodurilor de cadru la rotire și translație produce o separare a barelor. Astfel, din punct de vedere al rezemării, se disting două tipuri de bare, dublu încastrate și încastrate la un capăt și rezemate oarecum la celălalt. Situațiile tip de încărcare pentru bara dreaptă sunt cele indicate în figura 2.7.

Din încărcarea cu forțe (Fig.2.7,a), la extremitățile barei iau naștere momentele de încastrare perfectă  $M_{hi}$  și  $M_{ih}$ . Dacă bara este articulată la capătul  $i$ ,  $M_{hi} = 0$ .

Impunând nodului  $h$  o rotire  $\theta_h$  (Fig.2.7,b), bara se deformează și la cele două extremități se dezvoltă momentele încovoietoare  $M_{hi}$  și  $M_{ih}$ , care pe baza ipotezei proporționalității se pot exprima astfel:

$$M_{hi} = K_{hi}\theta_h \text{ și } M_{ih} = M_{hi}\mu_{hi} = K_{hi}\mu_{hi}\theta_h \quad (2.2)$$

unde:

- $K_{hi}$  este **rigiditatea barei la rotire de nod ( $h$ )** și reprezintă **momentul încovoietor care ia naștere la extremitatea  $h$ , când acolo se produce o rotire egală cu unitatea,**
- $\mu_{hi}$  se numește **factor de transmitere** al momentului încovoietor de capăt (de la  $h$  la  $i$ ).

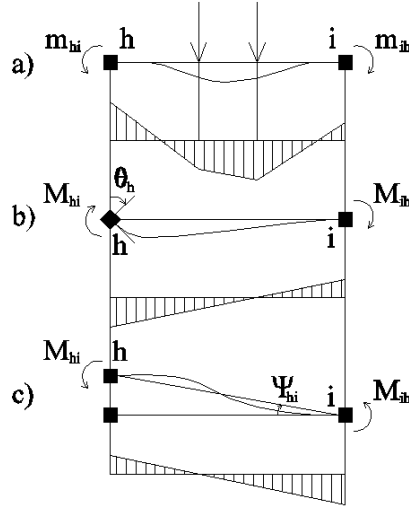


Fig. 2.7

Pentru unele simplificări, se poate introduce notația

$$K_{hi} = 4E\rho_{hi} \quad (2.3)$$

în care  $\rho_{hi}$  poartă numele de *coeficient de rigiditate la rotire de nod (h)*.

Cu această notație relațiile (2.2) se scriu:

$$M_{hi} = 4E\rho_{hi}\theta_h \text{ și } M_{ih} = 4E\rho_{hi}\mu_{hi}\theta_h \quad (2.4)$$

Se impune nodului  $h$  o deplasare  $\Delta$  astfel încât bara se rotește cu  $\psi_{hi}$ , și rezultă momentele încovoietoare de capăt:

$$M_{hi} = -\bar{K}_{hi}\psi_{hi} \text{ și } M_{ih} = -\bar{K}_{ih}\psi_{hi} \quad (2.5)$$

unde  $\bar{K}_{ih}$  și  $\bar{K}_{hi}$  poartă numele de **rigidități la rotire de bară** (pentru capătul  $h$ , respectiv  $i$ ) și reprezintă **momentele care iau naștere la cele două capete ale barei, când acestea i se aplică o rotire egală cu unitatea**.

Dacă se notează:

$$\bar{K}_{hi} = 4E\bar{\rho}_{hi} \text{ și } \bar{K}_{ih} = 4E\bar{\rho}_{ih} \quad (2.6)$$

unde  $\bar{\rho}_{hi}$  și  $\bar{\rho}_{ih}$  poartă numele de *coeficienți de rigiditate la rotire de bară* (pentru capătul  $h$ , respectiv  $i$ ), rezultă:

$$M_{hi} = -4E\bar{\rho}_{hi}\psi_{hi} \text{ și } M_{ih} = -4E\bar{\rho}_{ih}\psi_{hi} \quad (2.7)$$

Elementele stabilite permit scrierea expresiilor generale ale momentelor încovoietoare de capăt la bara încărcată simultan cu forțe, rotiri de noduri și rotire de bară, astfel:

- bara  $h-i$  unește două noduri:

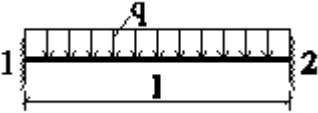
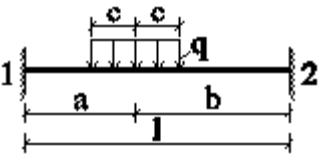
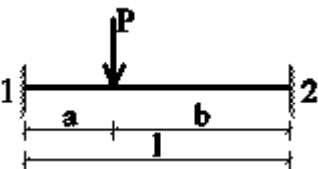
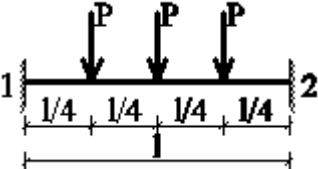
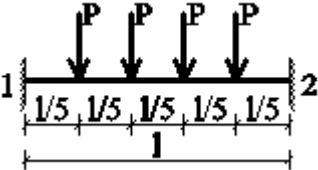
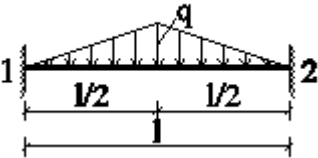
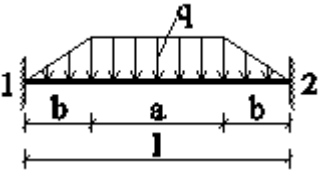
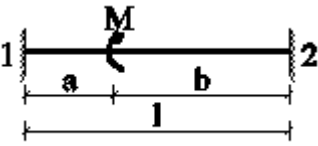
$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + 4E(\rho_{hi}\theta_h + \rho_{ih}\mu_{ih}\theta_i - \bar{\rho}_{hi}\psi_{hi}) \\ M_{ih} &= M_{ih} + 4E(\rho_{hi}\mu_{hi}\theta_h + \rho_{ih}\theta_i - \bar{\rho}_{ih}\psi_{hi}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- bara  $h-i$  unește un nod cu o încastrare perfectă ( $i$ ):

$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + 4E(\rho_{hi}\theta_h - \bar{\rho}_{hi}\psi_{hi}) \\ M_{ih} &= M_{ih} + 4E(\rho_{hi}\mu_{hi}\theta_h - \bar{\rho}_{ih}\psi_{hi}) \end{aligned} \quad (2.9)$$


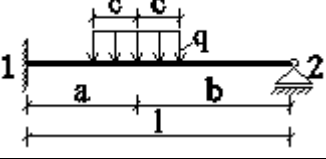
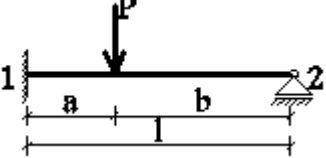
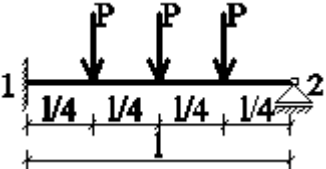
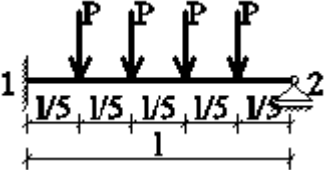
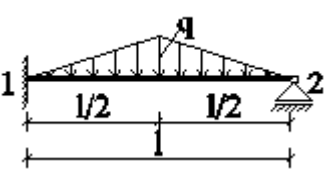
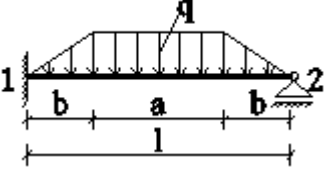
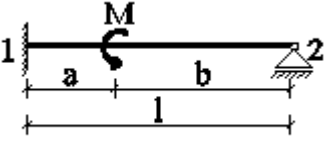


Grinda dublu încastrată ( $I = \text{const.}$ )

	Încărcare	Momente în încastrări
1		$M_1 = M_2 = -\frac{ql^2}{12}$
2		$M_1 = -\frac{2qc}{3l^2} [(ab - c^2)(2b - a) + abl]$ $M_2 = -\frac{2qc}{3l^2} [(ab - c^2)(2a - b) + abl]$
3		$M_1 = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}$ <i>Pentru <math>a = b</math>, <math>M_1 = M_2 = -\frac{Pl}{8}</math></i>
4		$M_1 = M_2 = -\frac{5Pl}{16}$
5		$M_1 = M_2 = -\frac{2Pl}{5}$
6		$M_1 = M_2 = -\frac{5ql^2}{96}$
7		$M_1 = M_2 = -\frac{ql(l+a)}{96} \left( 5 - \frac{a^2}{l^2} \right)$
8		$M_1 = \frac{b(2a-b)}{l^2} M$ $M_2 = -\frac{b(2b-a)}{l^2} M$

Tabelul 2.2.

Grinda cu o încastrare perfectă și un reazem simplu ( $I = \text{const.}$ )

	Încărcare	Momente în încastrări
1		$M_1 = -\frac{ql^2}{8}$
2		$M_1 = -\frac{qbc}{l^2}(l^2 - b^2 - c^2)$
3		$M_1 = -\frac{Pab}{2l^2}(l + b)$ Pentru $a = b, M_1 = -\frac{3Pl}{16}$
4		$M_1 = -\frac{15Pl}{32}$
5		$M_1 = -\frac{3Pl}{5}$
6		$M_1 = -\frac{5ql^2}{64}$
7		$M_1 = -\frac{ql(l+a)}{964}\left(5 - \frac{a^2}{l^2}\right)$
8		$M_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3b^2}{l^2} - 1\right)M$

- bara  $h-i$  unește un nod cu un reazem articulat ( $i$ )


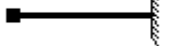

$$M_{hi} = M_{hi} + 4E(\rho_{hi}\theta_h - \bar{\rho}_{hi}\psi_{hi}) \quad (2.10)$$

În tabelele 2.1 (bara dublu încastrată) și 2.2 (bara cu o încastrare și un reazem simplu) sunt date expresiile momentelor încovoietoare de încastrare perfectă pentru cazurile uzuale de încărcări, atunci când bara este cu secțiune constantă.

Pentru calculul coeficienților de rigiditate și a factorilor de transmitere, bara se încarcă cu rotirile de nod  $\theta_h$  și  $\theta_i$ , precum și cu rotirea de bară  $\psi_{hi}$ . Toate aceste rotiri se consideră pozitive.

Expresiile sunt date în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3

	Tipul barei		Bară cu I constant
1		$K_{ij}$	$\frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}$
		$\rho_{hi}$	$\frac{I_{hi}}{l_{hi}}$
		$\mu_{hi}$	$\frac{1}{2}$
		$\rho_{ih}$	$\frac{I_{hi}}{l_{hi}}$
		$\mu_{ih}$	$\frac{1}{2}$
		$\bar{\rho}_{hi}$	$\frac{3 I_{hi}}{2 l_{hi}}$
		$\bar{\rho}_{ih}$	$\frac{3 I_{hi}}{2 l_{hi}}$
2		$K_{ij}$	$\frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}$
		$\rho_{hi}$	$\frac{I_{hi}}{l_{hi}}$
		$\mu_{hi}$	$\frac{1}{2}$
		$\bar{\rho}_{hi}$	$\frac{3 I_{hi}}{2 l_{hi}}$
		$\bar{\rho}_{ih}$	$\frac{3 I_{hi}}{2 l_{hi}}$
3		$K_{ij}$	$\frac{3EI_{ij}}{l_{ij}}$
		$\rho_{hi}$	$\frac{3 I_{hi}}{4 l_{hi}}$
		$\mu_{hi}$	0
		$\bar{\rho}_{hi}$	$\frac{3 I_{hi}}{4 l_{hi}}$

## 2.2. Cadre cu noduri fixe

### 2.2.1. Precizări privind rezolvarea practică

Cadrele cu noduri fixe sunt cele care sub acțiunea forțelor exterioare, se deformează numai prin rotirea nodurilor.

Necunoscutele sunt rotirile nodurilor,  $\theta_i$  ( $Z_i$ ).

Numărul necunoscutelor este egal cu numărul nodurilor rigide (blocate la rotire).

Condiția de comportare identică cu structura inițială a sistemului de bază încărcat cu forțele exterioare și cu necunoscutele rotiri reale se exprimă prin sistemul ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + \dots + k_{1h}\theta_h + k_{1i}\theta_i + \dots + k_{1n}\theta_n + R_{1f} = 0 \\ k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + \dots + k_{2h}\theta_h + k_{2i}\theta_i + \dots + k_{2n}\theta_n + R_{2f} = 0 \\ \dots \\ k_{i1}\theta_1 + k_{i2}\theta_2 + \dots + k_{ih}\theta_h + k_{ii}\theta_i + \dots + k_{in}\theta_n + R_{if} = 0 \\ \dots \\ k_{n1}\theta_1 + k_{n2}\theta_2 + \dots + k_{nh}\theta_h + k_{ni}\theta_i + \dots + k_{nn}\theta_n + R_{nf} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

unde:

$k_{ii}$  - reacțiunea care ia naștere în blocajele nodului  $i$ , din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică  $\theta_i = 1$  și este egală cu suma rigidităților la rotire de nod ale capetelor de bare legate în nodul  $i$ , când sistemul de bază este încărcat cu rotirea de nod  $\theta_i = 1$ , respectiv  $k_{ii} = \sum K_{ih}$ ;

$k_{ih}$  - reacțiunea care ia naștere în blocajul nodului  $i$ , din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică  $\theta_h = 1$  și este egală cu suma rigidităților barelor (la rotire de nod) conectate în nodul  $i$ , când sistemul de bază este încărcat cu rotirea de nod  $\theta_h = 1$ , respectiv momentul încovoietor transmis în capătul  $h$  al barei  $ih$  când nodului  $i$  i se aplică o rotire egală cu unitatea,  $k_{ih} = K_{ih}\mu_{ih}$ ;

$R_{if}$  - reacțiunea din blocajul nodului  $i$ , din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare și este egală cu suma momentelor de încastrare perfectă de pe capetele barelor conectate în nodul  $i$ .

Semnificația ecuației „i” din sistemul ecuațiilor de condiție (2.11): **reacțiunea din blocajul nodului „i” din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare și cu rotirile reale  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  este egală cu zero.**

În vederea simplificării calculului practic, se definește coeficientul de rigiditate la rotire de nod corectat  $\rho'_{ih} = \frac{l_c}{I_c} \alpha_{ih} \frac{I_{ih}}{l_{ih}}$ , cu care rigiditatea barei la rotire de nod devine:

$$K_{ih} = 4E\rho_{ih} = 4E \frac{l_c}{l_c} \cdot \rho'_{ih} \quad (2.12)$$

În acest mod, coeficienții din ecuațiile de condiție se pot scrie sub forma:

$$k_{ii} = 4E \sum_i \rho_{ih} = \frac{4EI_c}{l_c} \sum_i \frac{l_c}{I_c} \alpha_{ih} \frac{I_{ih}}{l_{ih}} = \frac{4EI_c}{l_c} \sum_i \rho'_{ih} = \frac{4EI_c}{l_c} r_{ii}; \text{ cu } r_{ii} = \sum_i \rho'_{ih} \quad (2.13)$$

$$k_{ih} = 4E\mu_{hi}\rho_{hi} = \frac{4EI_c}{l_c} \mu_{hi} \frac{l_c}{I_c} \alpha_{hi} \frac{I_{hi}}{l_{hi}} = \frac{4EI_c}{l_c} \mu_{hi}\rho'_{hi} = \frac{4EI_c}{l_c} r_{ih}; \text{ cu } r_{ih} = \mu_{hi}\rho'_{hi} \quad (2.14)$$

Coeficientul de rigiditate la rotire de nod corectat este adimensional, dar are o valoare proporțională cu rigiditatea barei.

Raportul  $\frac{l_c}{I_c}$  este un raport convenabil ales, astfel încât să rezulte pentru coeficienții  $\rho_{ih}$  valori cât mai simple.

Cu aceste notații ecuația „i” devine

$$\frac{4EI_c}{l_c} (r_{i1}\theta_1 + r_{i2}\theta_2 + \dots + r_{ih}\theta_h + r_{ii}\theta_i + \dots + r_{in}\theta_n) + R_{if} = 0 \quad (2.15)$$

Dacă se face substituția  $Z_i = \frac{4EI_c}{l_c} \theta_i \Big|_{i=1,n}$ , numită rotire corectată, se obține sistemul ecuațiilor de condiție cu necunoscute rotiri corectate. Se observă că rotirea corectată are unități de măsură corespunzătoare unui moment încovoietor.

Cu aceste notații, sistemul ecuațiilor de condiție se scrie sub forma:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1h}Z_h + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1f} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2h}Z_h + r_{2i}Z_i + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2f} = 0 \\ \cdot \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ih}Z_h + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + R_{if} = 0 \\ \cdot \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nh}Z_h + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nf} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

în care:

$r_{ii}$  - reacțiunea corectată care ia naștere în blocajele nodului „i”, din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică  $Z_i = 1$ . Unitatea de măsură (moment) este adusă de necunoscuta  $Z_i$ , cu care acesta este multiplicat;

$r_{ih}$  - reacțiunea corectată care ia naștere în blocajele nodului „i”, din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică  $Z_h = 1$ . Unitatea de măsură (moment) este adusă de necunoscuta  $Z_h$ , cu care acesta este multiplicat.

Coeficienții  $r_{ii}$ , numiți *coeficienți principali*, sunt întotdeauna diferiți de zero.

Coeficienții  $r_{ih}, (i \neq h)$ , numiți *coeficienți secundari*, sunt diferiți de zero numai atunci când cei doi indici identifică o bară. Mai mult, în baza reciprocității reacțiunilor unitare,  $r_{ih} = r_{hi}$ . Rezultă că matricea coeficienților necunoscutelor este *simetrică* și pozitiv definită și conține mulți coeficienți secundari nuli, ceea ce simplifică mult rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție.

După obținerea valorilor rotirilor nodurilor,  $Z_i(\theta_i)$ , se trece la determinarea momentelor încovoietoare de la capetele barelor, folosind relațiile (2.8), (2.9) și (2.10), în care  $\psi_{hi} = 0$ , astfel:

- bara  $h-i$  unește două noduri

$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + 4E(\rho_{hi}\theta_h + \rho_{ih}\mu_{ih}\theta_i) \\ M_{ih} &= M_{ih} + 4E(\rho_{hi}\mu_{hi}\theta_h + \rho_{ih}\theta_i) \end{aligned} \quad (2.17)$$

- bara  $h-i$  unește un nod cu o încastrare perfectă ( $i$ )

$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + 4E\rho_{hi}\theta_h \\ M_{ih} &= M_{ih} + 4E\rho_{hi}\mu_{hi}\theta_h \end{aligned} \quad (2.18)$$

- bara  $h-i$  unește un nod cu un reazem articulat ( $i$ )

$$M_{hi} = M_{hi} + 4E\rho_{hi}\theta_h \quad (2.19)$$

Alcătuirea sistemului de ecuații, folosind expresiile coeficienților necunoscutelor conform relațiilor (1.25), conduce la valori foarte mari ale acestora (datorită modulului de elasticitate  $E$ ) și implicit la valori foarte mici pentru necunoscute. De aceea în practică se obține o importantă simplificare dacă se lucrează cu mărimi corectate.

Expresiile momentelor încovoietoare de capăt sunt:

- bara  $h-i$  unește două noduri

$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + \rho_{hi}'Z_h + \rho_{ih}'\mu_{ih}Z_i \\ M_{ih} &= M_{ih} + \rho_{hi}'\mu_{hi}Z_h + \rho_{ih}'Z_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

- bara  $h-i$  unește un nod cu o încastrare perfectă ( $i$ )

$$\begin{aligned} M_{hi} &= M_{hi} + \rho_{hi}'Z_h \\ M_{ih} &= M_{ih} + \rho_{hi}'\mu_{hi}Z_h \end{aligned} \quad (2.21)$$

- bara  $h-i$  unește un nod cu un reazem articulat ( $i$ )

$$M_{hi} = M_{hi} + \rho_{hi}'Z_h \quad (2.22)$$

Calculul se încheie cu verificarea corectitudinii rezultatelor. Din cele prezentate se constată că tot timpul a fost îndeplinită condiția de continuitate. Înseamnă că verificarea eficientă este cea care folosește condiția de echilibru static. Este vorba de a verifica echilibrul fiecărui nod

$\left( \sum_i M_{ih} = 0 \right)$ , operație foarte simplă.

Observație: Dacă pe nodul  $i$ , de exemplu, acționează un moment concentrat  $M_i$ , atunci

$$R_i = -\bar{M}_i = \sum_i M_h - M_i$$

## 2.2.2. Exemple de calcul

### Aplicația 2.1. (Fig.2.8)

Cadrul are un nod fix. Se blochează nodul la rotire și se pune condiția ca reacțiunea din blocajul nodului să fie egală cu zero.

$$r_{11}Z_1 + R_{1f} = 0$$

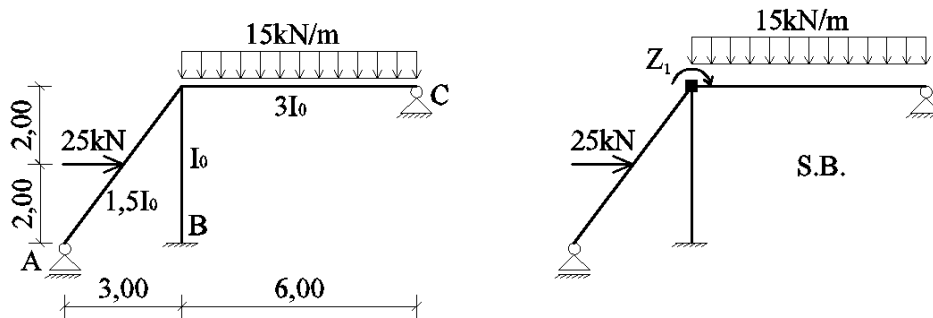


Fig.2.8

Se determină caracteristicile de rigiditate ale barelor, respectiv se calculează coeficienții de rigiditate la rotire de nod corecți pentru fiecare bară.

Bara	1-A	1-B	1-C
$\rho$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1,5I_0}{5}$	$\frac{I_0}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3I_0}{6}$
$\rho'$	4,5	5	7,5

Se calculează momentele de încastrare perfectă de la capetele barelor încărcate și se trasează diagrama momentelor de încastrare perfectă pe sistemul de bază.

$$M_{1A} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 4}{16} = 18,75 \text{ kNm}$$

$$M_{1C} = \frac{15 \cdot 6^2}{8} = -67,5 \text{ kNm}$$

Se încarcă sistemul de bază cu rotirea de nod corectată  $Z_1=1$  și se trasează deformată sistemului de bază. Momentele de la capetele barelor conectate în nod (coeficienții de rigiditate corecți ai barelor la rotire de nod) sunt marcate pe schema deformată în figura 2.9.

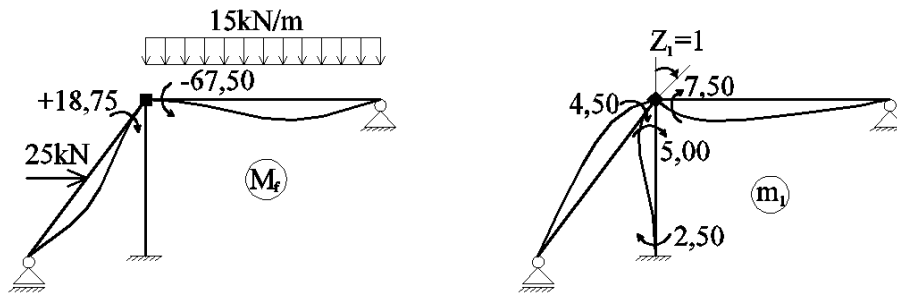


Fig.2.9

$$r_{11} = 4,50 + 5,00 + 7,50 = 17,00$$

$$R_{1f} = 18,75 - 67,50 = -48,75$$

$$Z_1 = \frac{48,75}{17} = 2,8676$$

$$M_{1A} = 18,75 + 4,50 \cdot 2,8676 = 31,65 \text{ kNm}$$

$$M_{1B} = 5 \cdot 2,8676 = 14,34 \text{ kNm}$$

$$M_{1C} = -67,50 + 7,50 \cdot 2,8676 = -45,99 \text{ kNm}$$

$$M_{B1} = 2,50 \cdot 2,8676 = 7,17 \text{ kNm}$$

Diagramele de eforturi sunt date în figura 2.10.

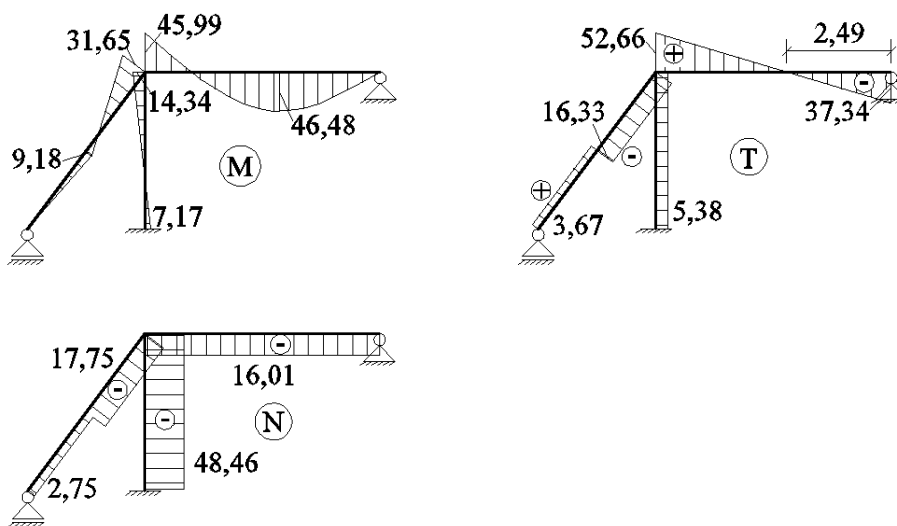


Fig.2.10



**Aplicația 2.2.** (Fig. 2.11)

Structura are două noduri fixe. Se introduc blocaje la rotire în cele două noduri și se evidențiază necunoscutele-rotiri de noduri, obținând astfel sistemul de bază al structurii (geometric determinat). Se calculează caracteristicile de rigiditate pentru fiecare bară a sistemului de bază.

$$\text{Se alege } \frac{l_c}{I_c} = \frac{12}{I_0}$$

Se calculează momentele de încastrare perfectă la capetele barelor încărcate cu forțe exterioare.

$$M_{12} = -M_{21} = -\frac{10 \cdot 6^2}{12} = -30 \text{ kNm}$$

Bara	1-A	1-2	2-B	2-C
$i$	$\frac{I_0}{5}$	$\frac{2I_0}{6}$	$\frac{I_0}{4}$	$\frac{2I_0}{4}$
$\rho$	$\frac{I_0}{5}$	$\frac{2I_0}{6}$	$\frac{I_0}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2I_0}{4}$
$\rho'$	2,4	4	3	4,5

Se încarcă sistemul de bază cu forțele exterioare date și se trasează diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază. Apoi se încarcă sistemul de bază cu fiecare necunoscută-rotire de nod, egală cu unitatea și se trasează deformatelile sistemului de bază și diagramele corespunzătoare de moment.

Se scrie sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1f} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2f} = 0 \end{cases}$$

Coefficienții necunoscutelor și termenii liberi au valorile:

$$r_{11} = 4,00 + 2,40 = 6,40$$

$$r_{12} = r_{21} = 2,00$$

$$r_{22} = 4,00 + 4,50 + 3,00 = 11,50$$

$$R_{1f} = M_{12} = -30,00$$

$$R_{2f} = M_{21} = 30,00$$

Sistemul ecuațiilor de condiție rezultă

$$\begin{cases} 6,40Z_1 + 2,00Z_2 - 30,00 = 0 \\ 2,00Z_1 + 11,50Z_2 + 30,00 = 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este

$$Z_1 = 5,82, \quad Z_2 = -3,62$$

Valorile momentelor încovoietoare la capetele barelor sunt:

$$M_{1A} = 2,40 \cdot 5,82 = 13,96 \text{ kNm}$$

$$M_{A1} = 1,20 \cdot 5,82 = 6,98 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -30,00 + 4,00 \cdot 5,82 + 2,00(-3,62) = -13,96 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 30,00 + 2,00 \cdot 5,82 + 4,00(-3,62) = 27,15 \text{ kNm}$$

$$M_{2B} = 3,00(-3,62) = -10,86 \text{ kNm}$$

$$M_{B2} = 1,50(-3,62) = -5,43 \text{ kNm}$$

$$M_{2C} = 4,50(-3,62) = -16,29 \text{ kNm}$$

Verificare:

$$\sum_1 M_{1h} = 13,96 - 13,96 = 0, \quad \sum_2 M_{2h} = 27,15 - 10,86 - 16,29 = 0$$

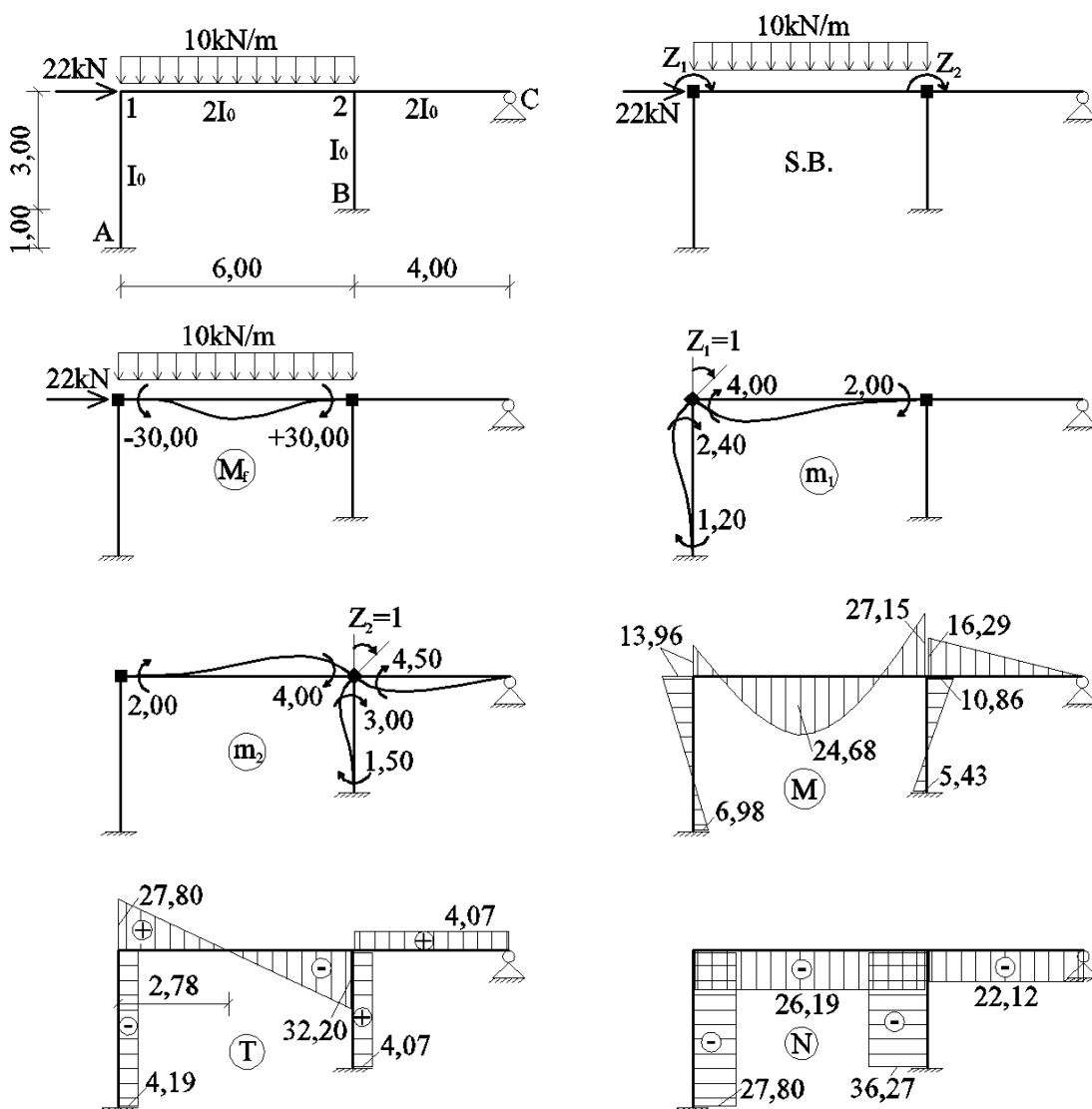


Fig.2.11

## 2.3. Cadre cu noduri deplasabile

### 2.3.1. Precizări privind calculul practic

Poziția deformată a unui cadru cu noduri deplasabile, caracterizată prin rotații și translații de noduri, este definită de un număr de parametri egal cu numărul nodurilor rigide plus numărul gradelor de libertate elastică ale structurii. Necunoscutele sunt rotațiile nodurilor și deplasările distincte după direcțiile gradelor de libertate.

Calculul se conduce pe sistemul de bază, iar pentru obținerea acestuia se folosesc cele două tipuri de blocaje definite mai înainte. În vederea simplificării calculului, se lucrează cu mărimi corectate, respectiv cu coeficienți de rigiditate corecți la rotire de nod și coeficienți de rigiditate corecți la rotire de bară.

Sistemul ecuațiilor de condiție exprimă faptul că reacțiunile corectate din legăturile fictive ale sistemului de bază, încărcat cu forțele exterioare date și cu necunoscutele  $Z_i$ , sunt egale cu zero.

Pentru cazul general, se scrie:

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + \dots + r_{1h}Z_h + r_{1i}Z_i + r_{1j}Z_j + r_{1k}Z_k + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1f} &= 0 \\
 \dots & \\
 r_{h1}Z_1 + \dots + r_{hh}Z_h + r_{hi}Z_i + r_{hj}Z_j + r_{hk}Z_k + \dots + r_{hn}Z_n + R_{hf} &= 0 \\
 r_{i1}Z_1 + \dots + r_{ih}Z_h + r_{ii}Z_i + r_{ij}Z_j + r_{ik}Z_k + \dots + r_{in}Z_n + R_{if} &= 0 \\
 r_{j1}Z_1 + \dots + r_{jh}Z_h + r_{ji}Z_i + r_{jj}Z_j + r_{jk}Z_k + \dots + r_{jn}Z_n + R_{jf} &= 0 \\
 r_{k1}Z_1 + \dots + r_{kh}Z_h + r_{ki}Z_i + r_{kj}Z_j + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kf} &= 0 \\
 \dots & \\
 r_{n1}Z_1 + \dots + r_{nh}Z_h + r_{ni}Z_i + r_{nj}Z_j + r_{nk}Z_k + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nf} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dacă  $i$  este un nod, ecuația  $R_i = 0$  arată că reacțiunea-moment din blocajul de nod este nulă. Ea este numită *ecuație de echilibru de nod* și se deosebește de cea scrisă în cazul cadrelor cu noduri fixe prin aceea că apar termeni suplimentari, rezultați din încărcarea sistemului de bază cu deplasări (translații) după direcțiile gradelor de libertate.

Pentru stabilirea elementelor necesare scrierii sistemului ecuațiilor de condiție se consideră cadrul de formă oarecare din figura 2.12,a și sistemul de bază corespunzător din figura 2.12,b. Sistemul de bază se încarcă cu forțele exterioare date și cu necunoscutele  $Z_i$  (rotații de noduri și rotații de bare) și se pune condiția ca reacțiunile din legăturile fictive introduse să fie egale cu zero. După cum s-a văzut, în cazul acestor structuri se disting ecuații de nod și ecuații de grad de libertate. În cele ce urmează se va prezenta modul concret de alcătuire al acestora (Fig.2.13).

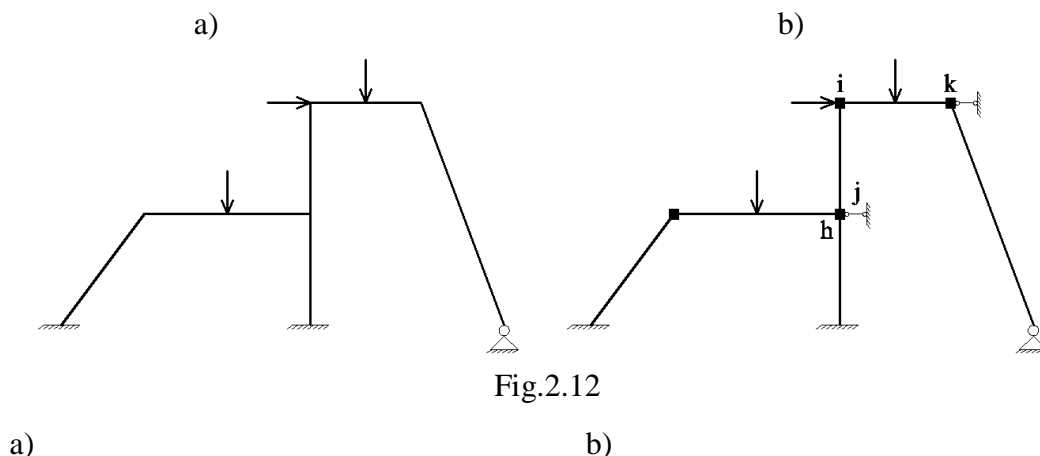


Fig.2.12

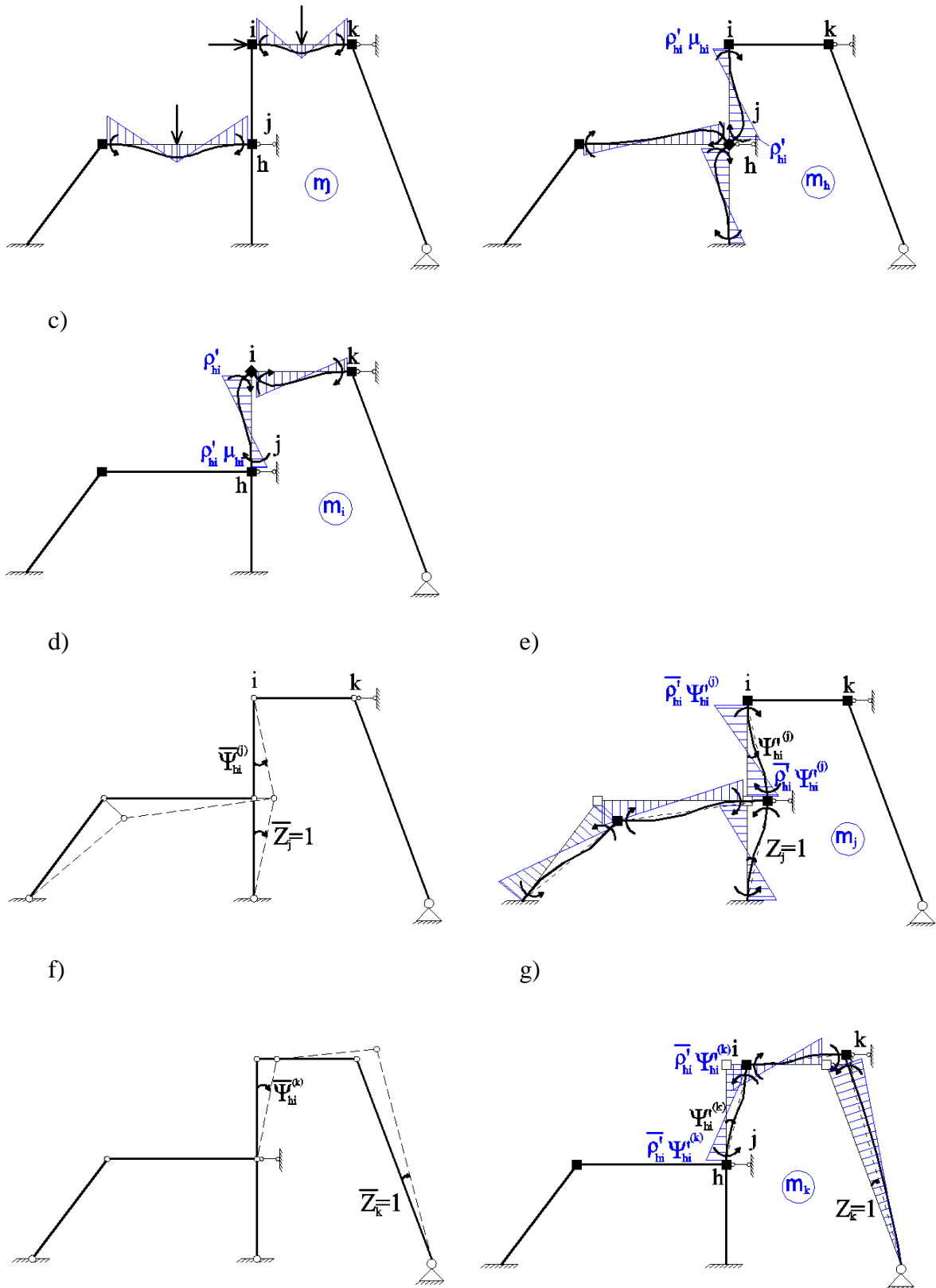


Fig. 2.13

Ecuatia deechilibru de nod. Forma generală a ecuației de condiție, scrisă pentru nodul  $i$ , este

$$r_{i1}Z_1 + \dots + r_{ih}Z_h + r_{ii}Z_i + r_{ij}Z_j + \dots + r_{in}Z_n + R_{if} = 0 \quad (2.24)$$

Coeficienții necunoscutelor și termenul liber au aceeași semnificație ca și în cazul cadrelor cu noduri fixe. Dacă  $h$  este nod și  $j$  este grad de libertate, se determină:

$$\begin{aligned}
 r_{ii} &= \sum_i \rho'_{ih} = \rho'_i \\
 r_{ih} &= \rho'_{hi} \mu_{hi} \\
 r_{ij} &= \sum_i \bar{\rho}'_{ih} \psi'_{hi}{}^{(j)} \\
 R_{jf} &= -\bar{M}_i = \sum_i M_{ih}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Ecuția de grad de libertate. Pentru scrierea ecuațiilor de grad de libertate se folosește principiul lucrului mecanic virtual. Dacă se evidențiază efectul fiecărei necunoscute și al forțelor exterioare, corespunzător gradului de libertate  $j$ , se scrie

$$r_{j1}Z_1 + \dots + r_{ji}Z_i + r_{jj}Z_j + r_{jk}Z_k + \dots + r_{jn}Z_n + R_{jf} = 0 \tag{2.26}$$

Notă: Termenii acestei ecuații au acum semnificație de *lucru mecanic*.

Calculul coeficienților necunoscutelor și al termenilor liberi se face folosind *schema cinematică* și considerând deplasările cinematice corespunzătoare fiecărui grad de libertate. Deplasările cinematice (Fig.2.13 d,f) se aleg în așa fel încât să aibă aceleași configurații ca și deplasările elastice (Fig.1.13 e,g). Acest mod de a opera prezintă următoarele avantaje:

- determinarea rotirilor barelor se face o singură dată pentru cele două deplasări, elastică și cinematică, corespunzătoare unui grad de libertate,
- numai în felul acesta se realizează verificarea reciprocității coeficienților  $r_{ij} = r_{ji}$ , în care  $i$  este nod, iar  $j$  este grad de libertate.

Analizând ecuația de grad de libertate scrisă, dacă  $i$  este nod și  $k$  este grad de libertate, vor trebui determinate expresiile următorilor termeni:  $r_{jj}$ ,  $r_{ji}$ ,  $r_{jk}$  și  $R_{jf}$ .

Semnificația acestora este următoarea:

- $r_{jj}$  reprezintă lucrul mecanic efectuat de momentele de capăt rezultate din încărcarea sistemului de bază cu rotirea de bară  $Z_j = 1$ , când este parcursă deplasarea cinematică  $\bar{Z}_j = 1$ ,
- $r_{ji}$  reprezintă lucrul mecanic efectuat de momentele de capăt rezultate din încărcarea sistemului de bază cu rotirea de nod  $Z_i = 1$ , când este parcursă deplasarea cinematică  $\bar{Z}_j = 1$ ,
- $r_{jk}$  reprezintă lucrul mecanic efectuat de momentele de capăt rezultate din încărcarea sistemului de bază cu rotirea de bară  $Z_k = 1$ , când este parcursă deplasarea cinematică  $\bar{Z}_j = 1$ ,
- $R_{jf}$  reprezintă lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare date și de momentele de încastrare perfectă datorate acestor forțe, acționând pe sistemul de bază, când este parcursă deplasarea cinematică  $\bar{Z}_j = 1$ .

Pe baza semnificației pe care o are fiecare termen și operând schimbarea de semn cerută de ecuația:  $L_M^{(j)} + L_f^{(j)} = 0$  rezultă expresiile:

$$\begin{aligned}
r_{jj} &= \sum_j (\bar{\rho}'_{hi} + \bar{\rho}'_{ih}) \psi'^{(j)}_{hi} \bar{\psi}^{(j)}_{hi} \\
r_{ji} &= -\sum_i \rho'_{ih} (1 + \mu_{ih}) \bar{\psi}^{(j)}_{hi} = -\sum_i \bar{\rho}'_{ih} \psi'^{(j)}_{hi} \\
r_{jk} &= \sum_{j,k} (\bar{\rho}'_{hi} + \bar{\rho}'_{ih}) \psi'^{(k)}_{hi} \bar{\psi}^{(j)}_{hi} \\
R_{jf} &= -L_f^{(j)} - \sum_j (M_{hi} + M_{ih}) \bar{\psi}^{(j)}_{hi}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Observație: În scopul diferențierii, rotirile de bară din schema cinematică s-au notat cu simboluri barate.

Odată alcătuit, sistemul ecuațiilor de condiție se rezolvă și se obțin valorile necunoscutelor  $Z_i$ , după care se trece la calculul momentelor încovoietoare finale ce iau naștere la capetele barelor.

$$\begin{aligned}
M_{hi} &= M_{hi} + \rho'_{hi} Z_h + \mu_{ih} \rho'_{ih} Z_i + \sum_{k=j}^n \bar{\rho}'_{hi} \Psi'^{(k)}_{hi} Z_k \\
M_{ih} &= M_{ih} + \mu_{hi} \rho'_{hi} Z_h + \rho'_{ih} Z_i + \sum_{k=j}^n \bar{\rho}'_{hi} \Psi'^{(k)}_{hi} Z_k
\end{aligned}$$

Verificarea folosind condiția de echilibru static:

- cunoscând momentele încovoietoare finale de la capetele barelor, se verifică echilibrul fiecărui nod ( $\sum_i M_{ih} = 0$ ).

- considerând schema cinematică încărcată cu forțele exterioare date și cu momentele de capăt, schemă care este în echilibru, corespunzător fiecărui grad de libertate se dau deplasări virtuale compatibile cu legăturile și se controlează dacă în fiecare caz lucrul mecanic este egal cu zero ( $L_M^{(j)} + L_f^{(j)} = 0$ ).

$L_M^{(j)}$  – lucrul mecanic efectuat de momentele de pe capetele barelor, parcurgând deplasarea cinematică pe direcția gradului de libertate j

$L_f^{(j)}$  – lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare, parcurgand deplasarea cinematică pe direcția gradului de libertate j

### 2.3.2. Exemple de calcul

#### Aplicația 2.3. (Fig.2.14)

Cadrul are un nod rigid și un grad de libertate elastică.

Bara	1-A	1-B	1-C
$\rho$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{I_0}{6}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4I_0}{5}$	$\frac{2I_0}{4}$
$\rho'$	1	4,8	4
$\bar{\rho}'$	1	4,8	6

$$M_{1C} = -M_{C1} = -\frac{9 \cdot 4^2}{12} = -12 \text{ kNm}$$

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1f} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2f} = 0 \end{cases}$$

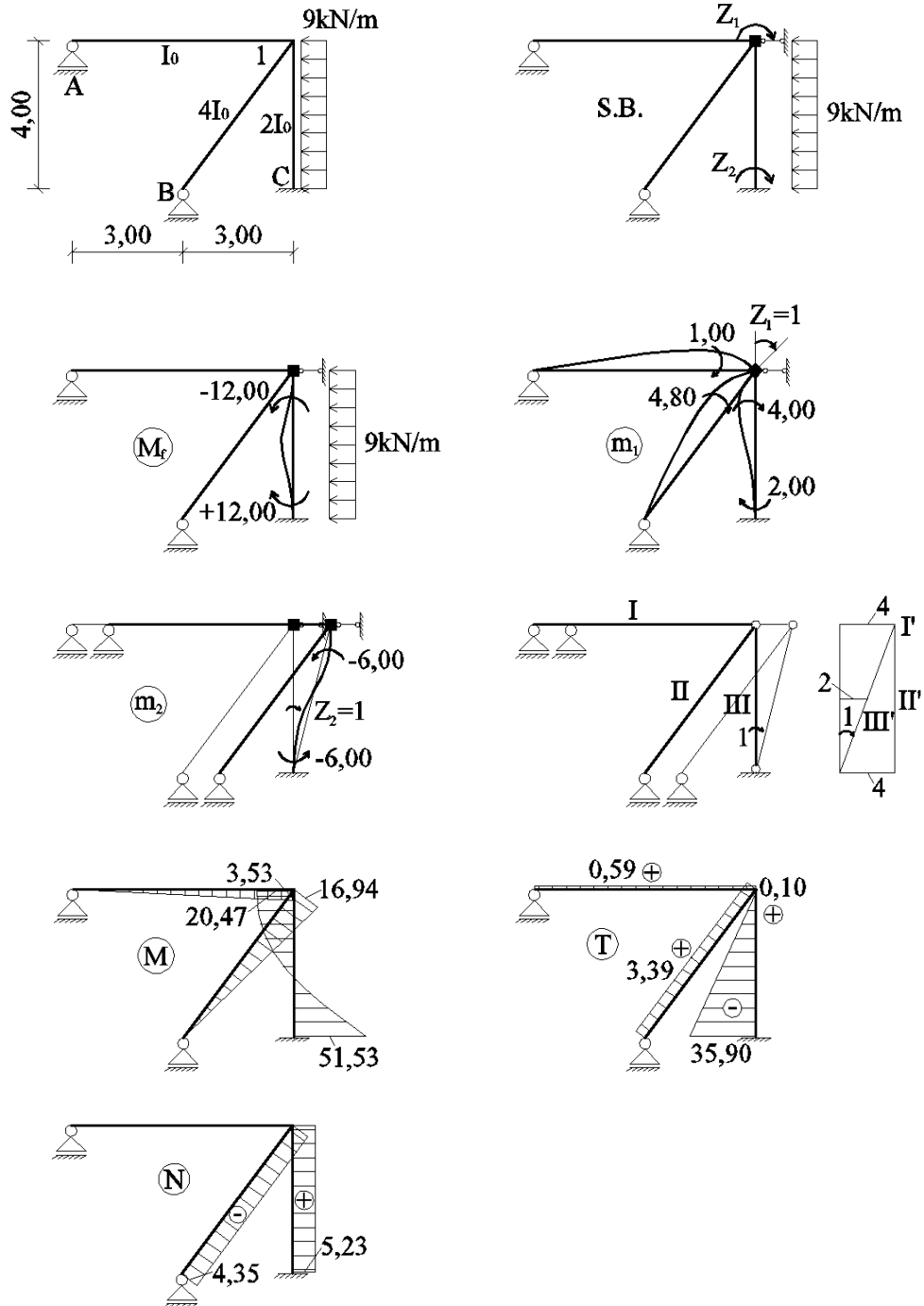


Fig.2.14

Coeficienții ecuației de nod:

$$r_{11} = 1,00 + 4,80 + 4,00 = 9,80$$

$$r_{12} = -6,00$$

$$R_{1f} = -12,00$$

Coeficienții ecuației de grad de libertate:

$$r_{21} = -(4,00 + 2,00) \cdot 1 = -6,00$$

$$r_{22} = -[(-6,00 - 6,00) \cdot 1] = 12,00$$

$$R_{2f} = -[9 \cdot 4(-2)] = 72,00$$

$$\begin{cases} 9,80Z_1 - 6,00Z_2 - 12,00 = 0 \\ -6,00Z_1 + 12,00Z_2 + 72,00 = 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = -3,5294, \quad Z_2 = -7,7647$$

$$M_{1A} = 1,00 \cdot (-3,5294) = -3,53kNm$$

$$M_{1B} = 4,80 \cdot (-3,5294) = -16,94kNm$$

$$M_{1C} = -12,00 + 4,00 \cdot (-3,5294) - 6,00 \cdot (-7,7647) = 20,47kNm$$

$$M_{C1} = 12,00 + 2 \cdot (-3,5294) - 6,00 \cdot (-7,7647) = 51,53kNm$$

Diagramele  $T$ ,  $M$  și  $N$  se prezintă în figura 2.14.

Verificarea diagramei de moment încovoietor prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual nul.

Urmărind schema cinematică a structurii articulate și diagrama finala de moment încovoietor, se scrie ecuația de lucru mecanic:

$$(20,47 + 51,53) \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

#### Aplicația 2.4. (Fig.2.15)

Cadrul are un nod rigid și un grad de libertate elastică. Se calculează, pentru fiecare bară a sistemului de bază, coeficienții de rigiditate la rotire de nod corecți și coeficienții de rigiditate la rotire de bară corecți.

Momentele de încastrare perfectă de la capetele barei încărcate

$$M_{1C} = -\frac{3 \cdot 20 \cdot 4}{16} = -15,00kNm$$

Bara	1-A	1-B	1-C
$\rho$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3I_0}{5}$	$\frac{I_0}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2I_0}{4}$
$\rho'$	3,6	2	3
$\overline{\rho'}$	3,6	3	3





$$r_{21} = -(2,00 + 1,00) \cdot 1 = -3,00$$

$$r_{22} = -[(-3,00 - 3,00) \cdot 1] = 6,00$$

$$R_{2f} = 0$$

$$\begin{cases} 8,60Z_1 - 3,00Z_2 - 15,00 = 0 \\ -3,00Z_1 + 6,00Z_2 = 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = 2,113, \quad Z_2 = 1,057$$

$$M_{1A} = 3,60 \cdot 2,113 = 7,606 \text{ kNm}$$

$$M_{1B} = 2,00 \cdot 2,113 - 3,00 \cdot 1,057 = 1,055 \text{ kNm}$$

$$M_{B1} = 1,00 \cdot 2,113 - 3,00 \cdot 1,057 = -1,058 \text{ kNm}$$

$$M_{1C} = -15,00 + 3,00 \cdot 2,113 = -8,661 \text{ kNm}$$

Diagramele  $T$ ,  $M$ ,  $N$  de eforturi sunt date în figura 2.15.

### Aplicația 2.5. (Fig.2.16)

Cadrul are un nod rigid și un grad de libertate elastică.

Momentul concentrat este aplicat în nod, nu produce momente de încastrare perfectă la capetele barelor, iar semnul lui este dat de sensul de rotire (+ în sens orar).

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1f} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2f} = 0 \end{cases}$$

Reacțiunea moment din blocajul nodului 1 este egală și de sens contrar momentului direct aplicat pe nod.

$$r_{11} = 1,00 + 1,50 = 2,50$$

$$r_{12} = -1,50$$

$$R_{1f} = -30,00$$

$$r_{21} = -(1,50 \cdot 1) = -1,50$$

$$r_{22} = -(-1,50 \cdot 1) = 1,50$$

$$R_{2f} = 0$$

$$\begin{cases} 2,50Z_1 - 1,50Z_2 - 30,00 = 0 \\ -1,50Z_1 + 1,50Z_2 = 0 \end{cases}$$

Bara	1-A	1-C
$\rho$	$\frac{I_0}{5}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2I_0}{5}$
$\rho'$	1	1,5
$\overline{\rho'}$	1,5	1,5

$$Z_1 = 30,00; Z_2 = 30,00$$

$$M_{1A} = 1 \cdot 30,00 = 30,00 \text{ kNm}$$

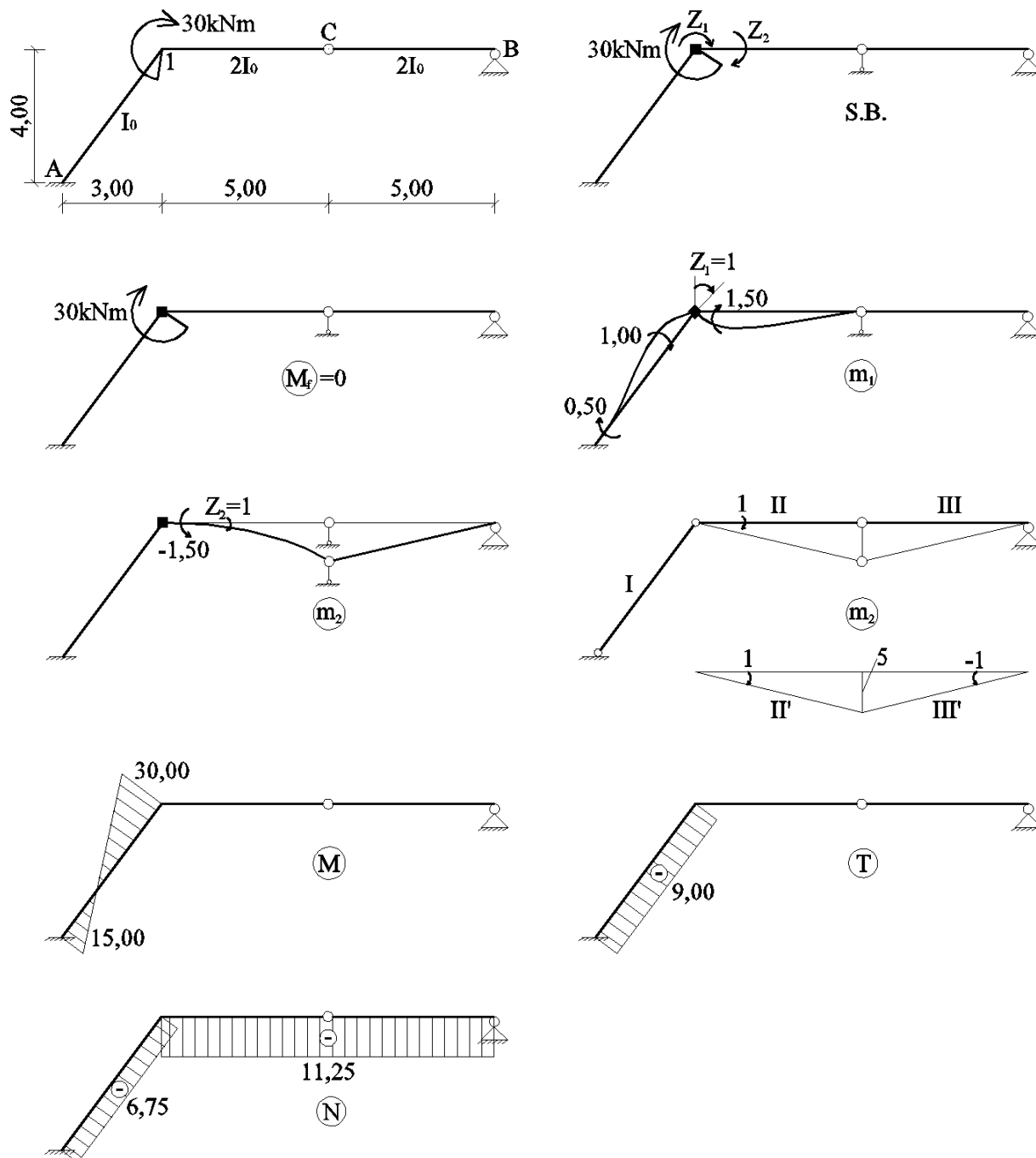


Fig.2.16

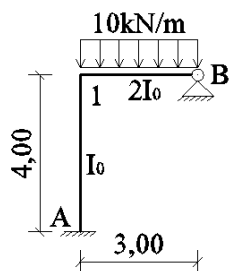
$$M_{A1} = 0,50 \cdot 30,00 = 15,00 \text{ kNm}$$

$$M_{1A} = 1,50 \cdot 30,00 - 1,50 \cdot 30,00 = 0,00 \text{ kNm}$$

Diagramele finale de eforturi se prezintă în figura 2.16.

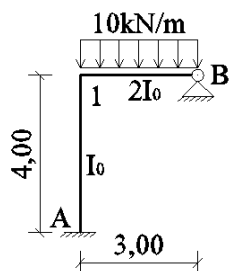
## 2.4. Probleme propuse

2.4.1. Pentru structura din figură, care dintre următoarele enunțuri este adevărat?

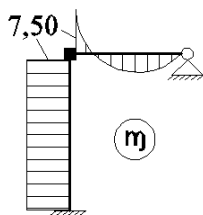


- a) structura are gradul de nedeterminare geometrică 2
- b) structura este cu noduri deplasabile
- c) structura este static determinată
- d) structura este cu noduri fixe
- e) structura are un grad de libertate elastică

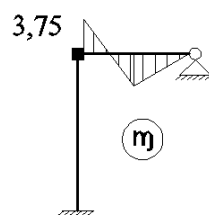
2.4.2. Pentru structura din figură, care este diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază, din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?



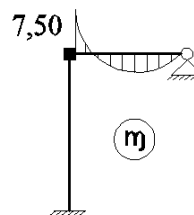
a)



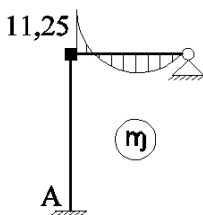
b)



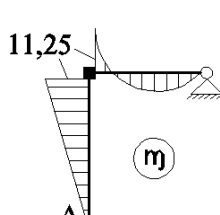
c)



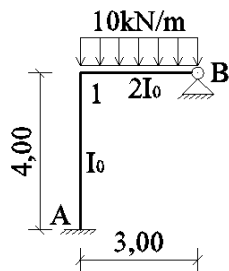
d)



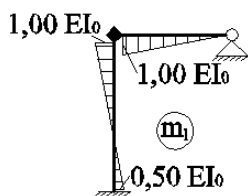
e)



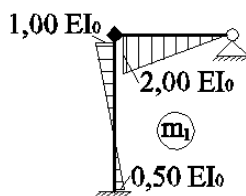
2.4.3. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment încovoietor  $m_1$  pe sistemul de bază, din încărcarea acestuia cu rotirea de nod  $\Theta_1=1$ ?



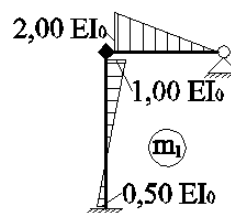
a)



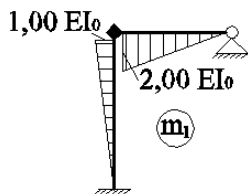
b)



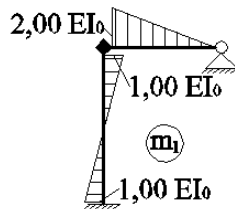
c)



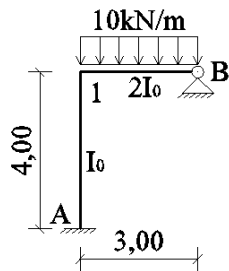
d)



e)



2.4.4. Pentru structura din figură, care este valoarea coeficientului  $k_{11}$  din ecuația de condiție?



a)  $3,50EI_0$

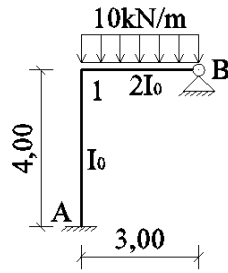
b)  $2,00EI_0$

c)  $3,00EI_0$

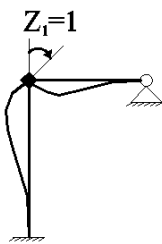
d)  $-1,00EI_0$

e)  $-2,00EI_0$

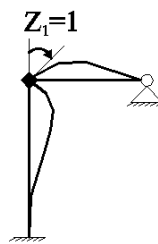
2.4.5. Pentru structura din figură, care este forma corectă a deformatei din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta  $Z_1=1$ ?



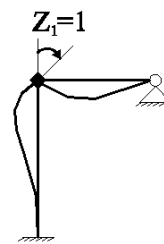
a)



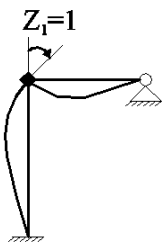
b)



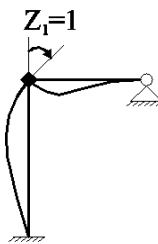
c)



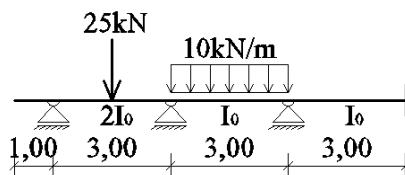
d)



e)



2.4.6. Care este gradul de nedeterminare geometrică al structurii din figură?



a) 2

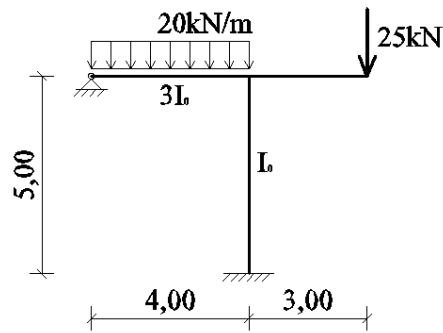
b) 3

c) 4

d) 0

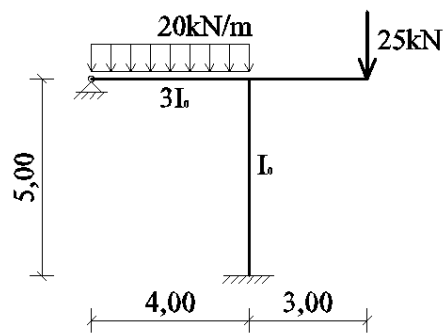
e) 1

2.4.7. Pentru structura din figură, care dintre următoarele enunțuri este adevărat?

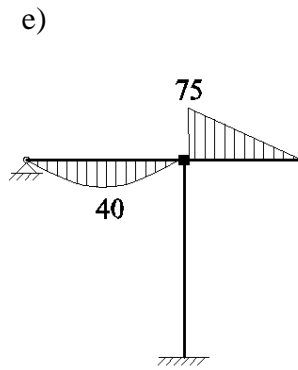
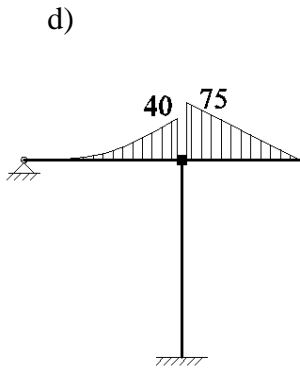


- a) structura are un grad de libertate cinematică
- b) cadrul este cu noduri deplasabile
- c) gradul de nedeterminare geometrică al structurii este 1
- d) gradul de nedeterminare geometrică al structurii este 2
- e) cadrul are un grad de libertate elastică

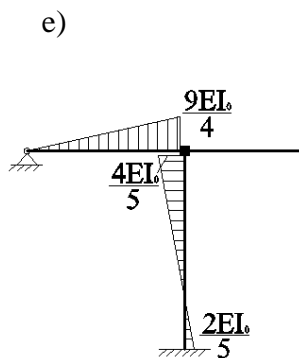
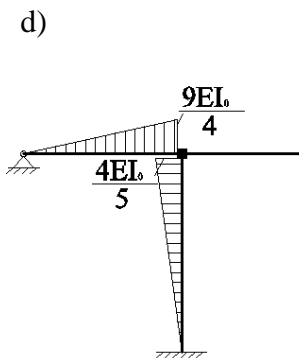
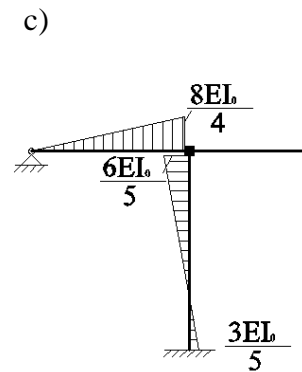
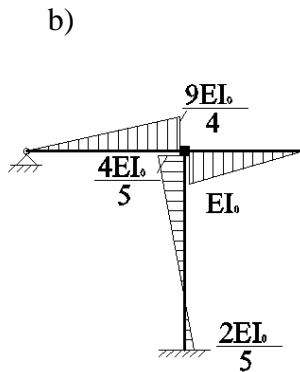
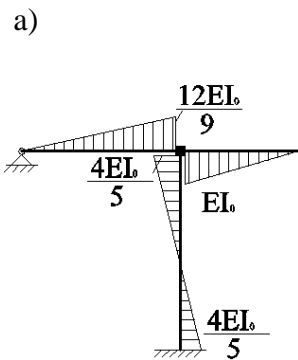
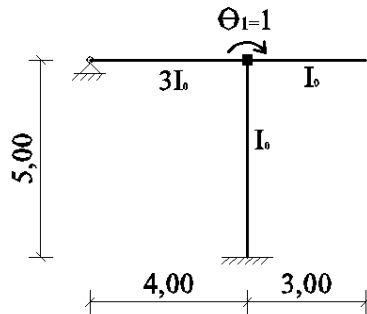
2.4.8. Care este diagrama de momente de încastrare perfectă, din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare, pentru următoarea structură?



- a)
- b)
- c)

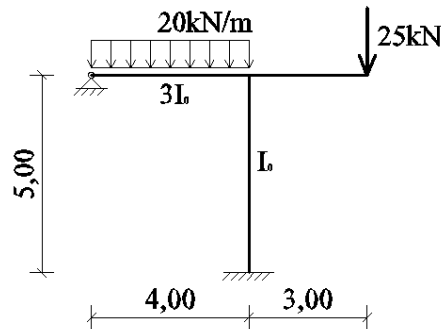


2.4.9. Care este diagrama  $m_1$  corectă, din încărcarea sistemului de bază (structura cu nodul blocat) cu deplasarea elastică  $\Theta_1=1$ , pentru următoarea structură?



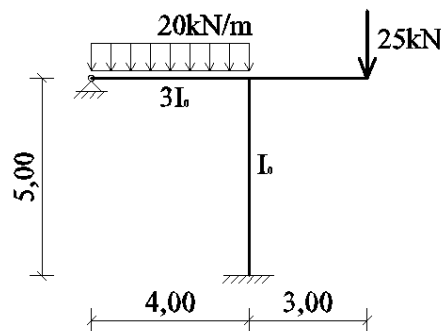


2.4.10. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului  $k_{11}$  din ecuația de condiție.



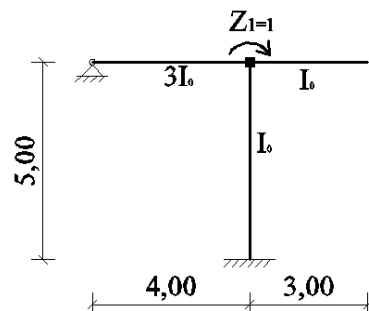
- a)  $5,25EI_0$       b)  $3,60EI_0$       c)  $4,05EI_0$       d)  $3,05EI_0$       e)  $2,80EI_0$

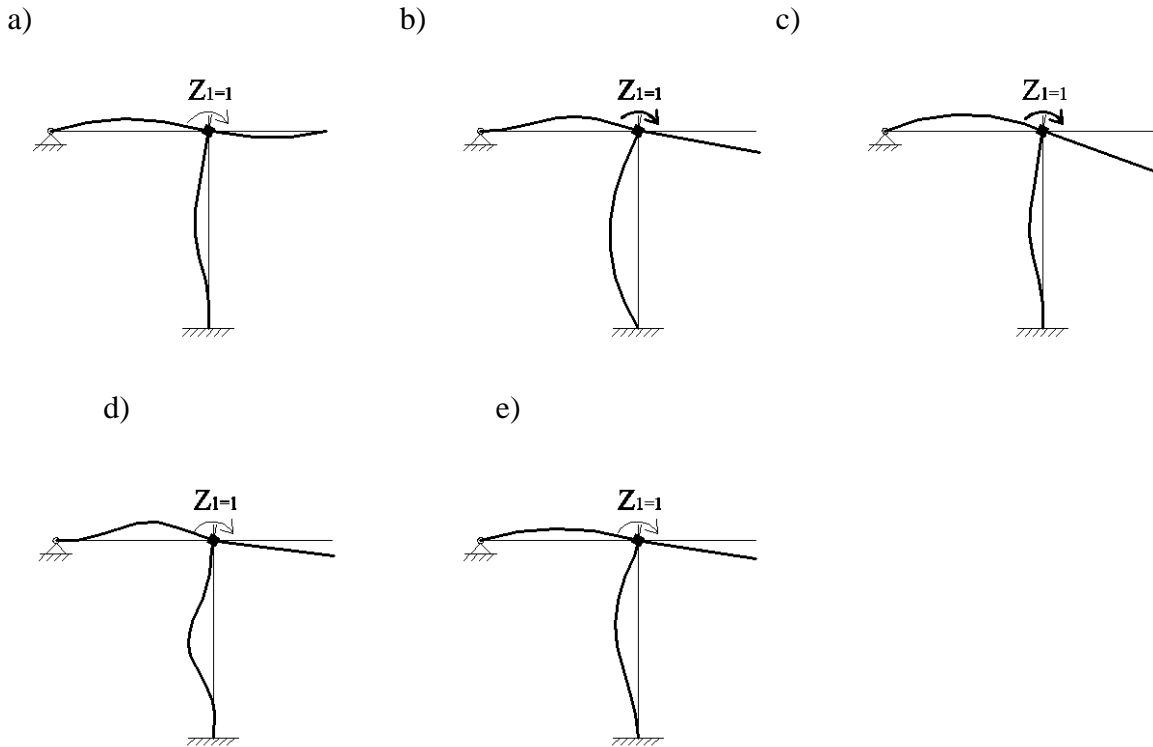
2.4.11. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului  $R_{1f}$  din ecuația de condiție.



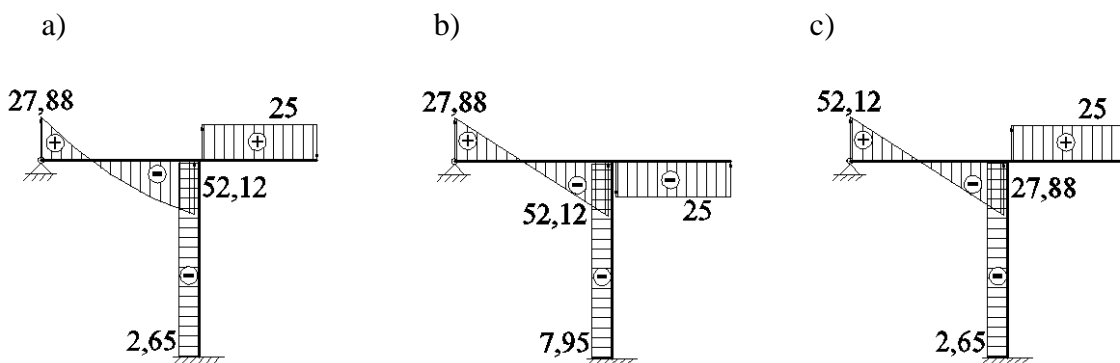
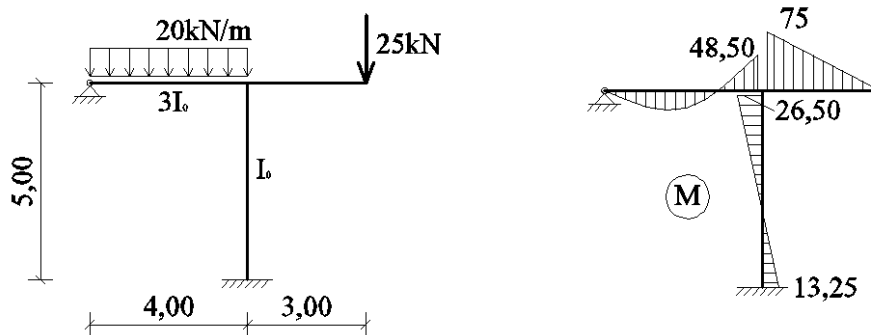
- a) 101,67 kNm      b) -35,00 kNm      c) 115,00 kNm      d) 35,00 kNm      e) -115,00 kNm

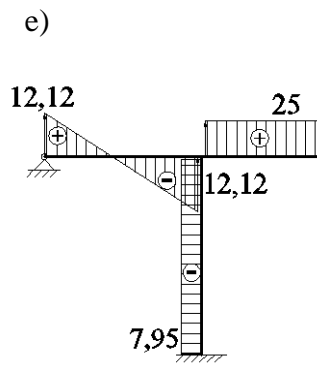
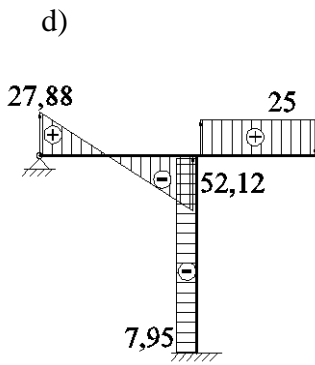
2.4.12. Care este forma corectă a deformatei din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta corectată  $Z_1=1$ , pentru structura din figura de mai jos?



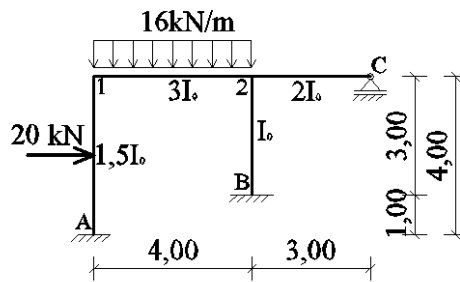


2.4.13. Pentru structura din figură și diagrama finală de moment încovoiator, care este diagrama corectă de forță tăietoare?



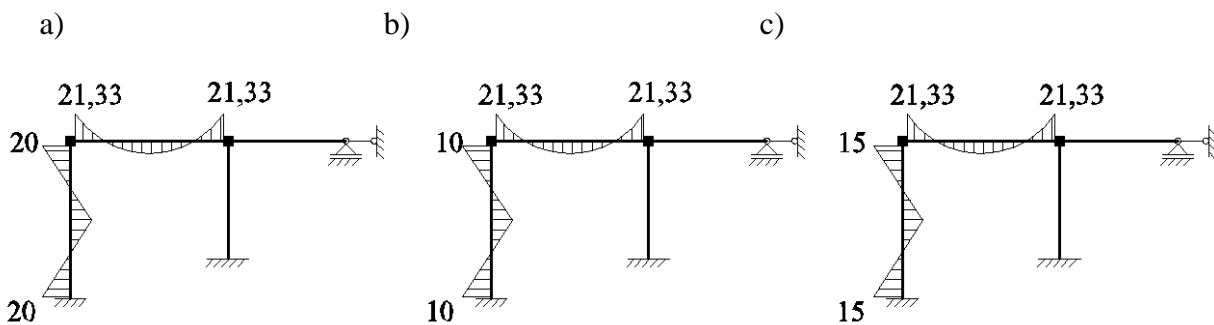
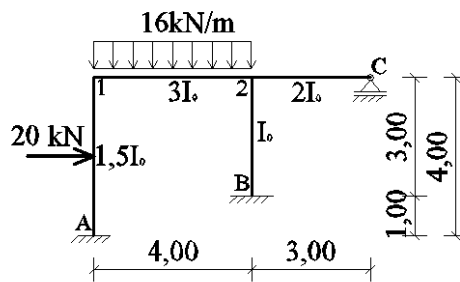


2.4.14. Care este gradul de nedeterminare geometrică al structurii din figura următoare?

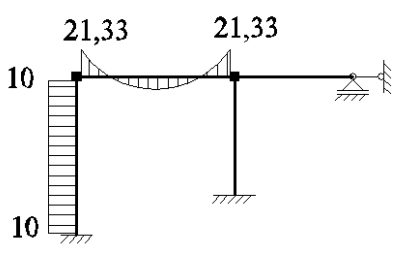


- a) 4      b) 2      c) 1      d) 0      e) 3

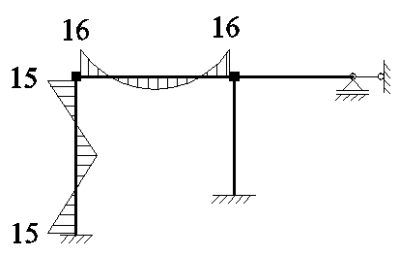
2.4.15. Pentru structura din figura de mai jos, care este diagrama corectă a momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază aferent (structura cu nodurile blocate), rezultată din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?



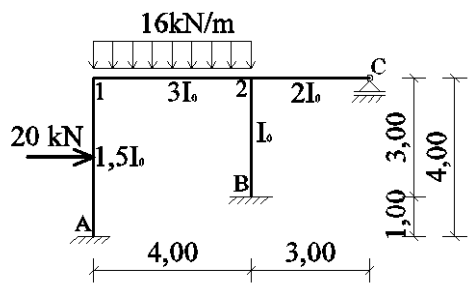
d)



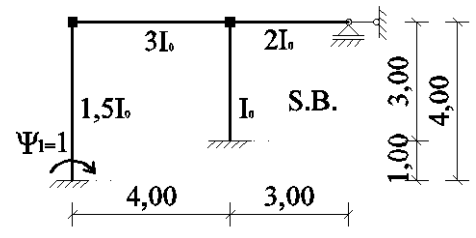
e)



2.4.16. Pentru structura din figura de mai jos, care este diagrama de moment corectă, pe sistemul de bază (structura cu nodurile blocate), rezultată din încărcarea acestuia cu deplasarea elastică  $\Psi_1=1$ ?

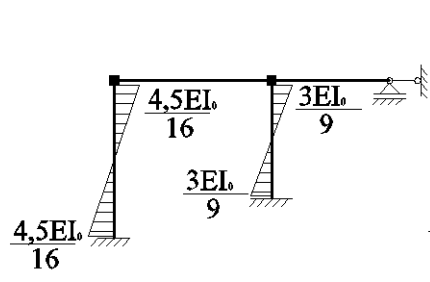


a)

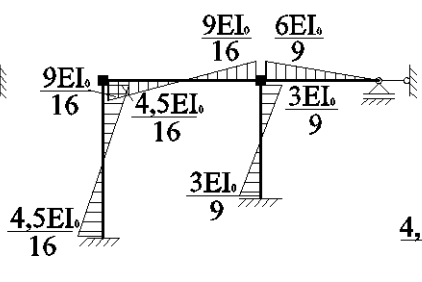


b)

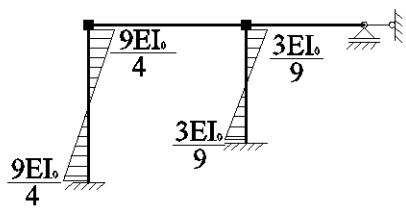
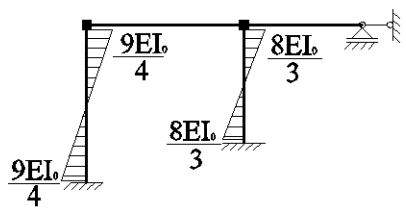
c)



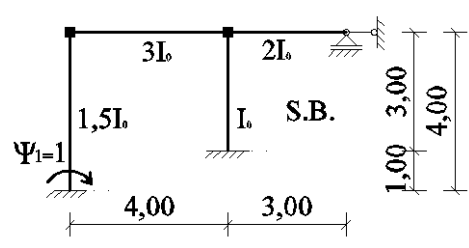
d)

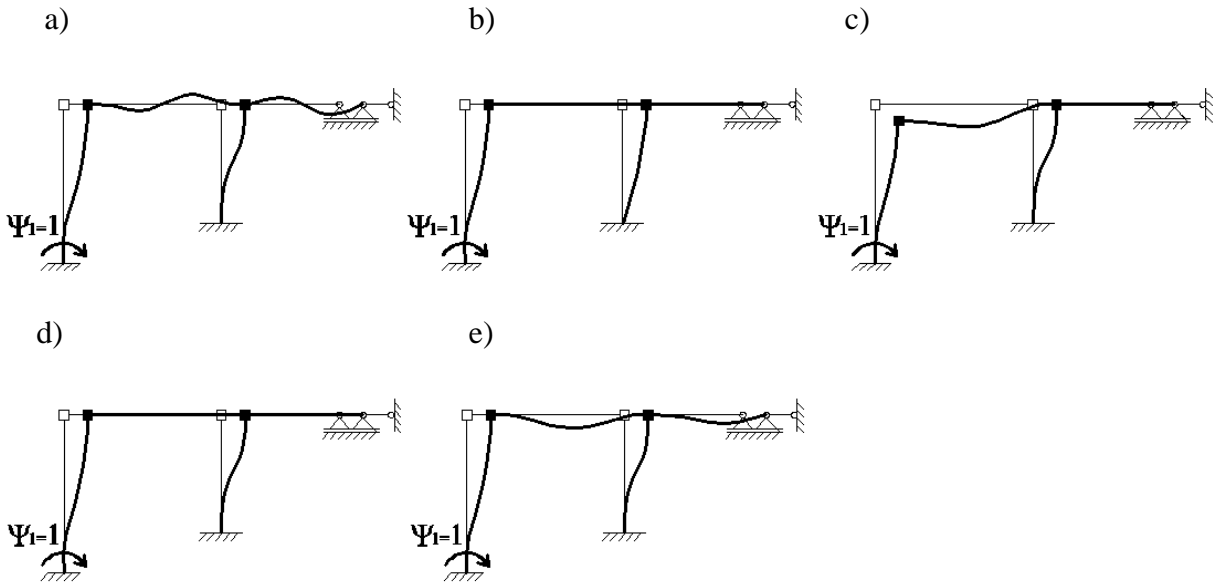


e)

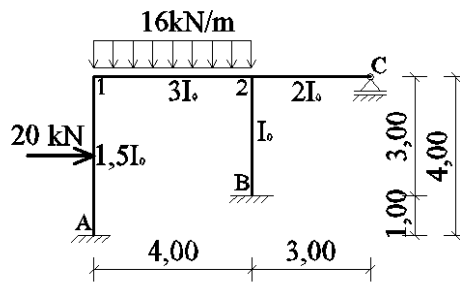


2.4.17. Pentru structura din figura de mai jos, care este forma corectă a deformatei din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică  $\Psi_1=1$ ?



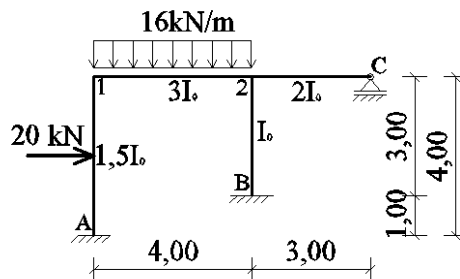


2.4.18. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului de distribuție  $d_{12}$ .



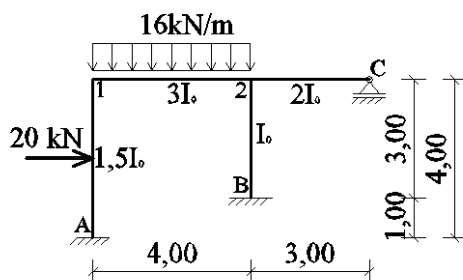
- a) 0,333      b) 0,400      c) 0,667      d) 0,600      e) 0,833

2.4.19. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului de distribuție  $d_{1A}$ .



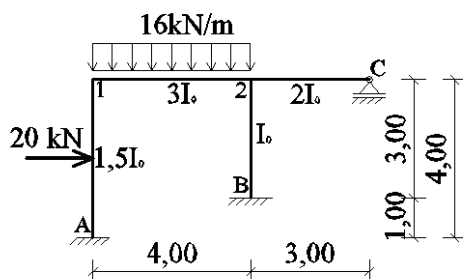
- a) 0,400      b) 0,333      c) 0,667      d) 0,300      e) 0,200

2.4.20. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului de distribuție  $d_{21}$ .



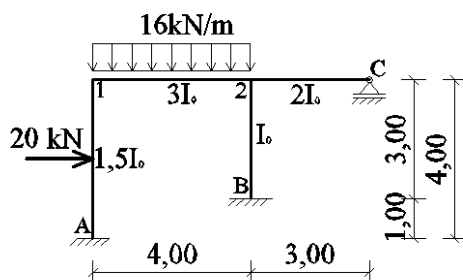
- a) 0,500                      b) 0,210                      c) 0,474                      d) 0,529                      e) 0,429

2.4.21. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului de distribuție  $d_{2B}$ .



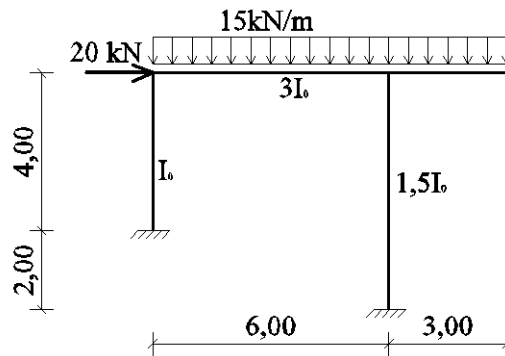
- a) 0,235                      b) 0,333                      c) 0,500                      d) 0,210                      e) 0,316

2.4.22. Pentru cadrul din figura de mai jos, se cere să se determine valoarea corectă a coeficientului de distribuție  $d_{2C}$ .



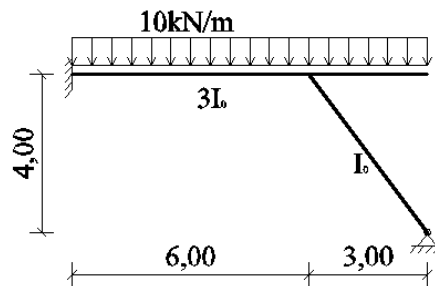
- a) 0,210                      b) 0,667                      c) 0,500                      d) 0,235                      e) 0,316

2.4.23. Pentru structura din figură, care dintre următoarele enunțuri este adevărat?



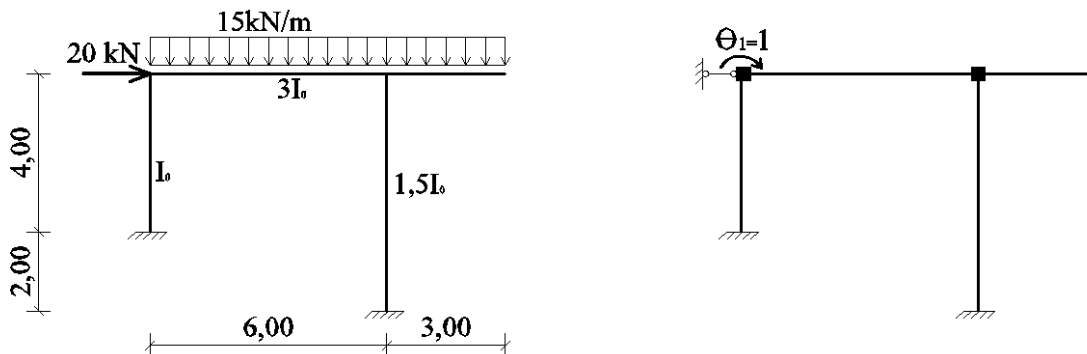
- a) Cadrul este cu noduri fixe
- b) Structura are un grad de libertate cinematică
- c) Structura are două grade de libertate elastică
- d) Gradul de nedeterminare geometrică al structurii este egal cu 3
- e) Cadrul este static determinat

2.4.24. Pentru structura din figură, care dintre următoarele enunțuri este adevărat?

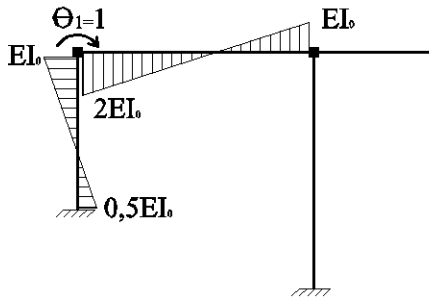


- a) Cadrul este cu noduri deplasabile
- b) Cadrul este static determinat
- c) Cadrul are un grad de libertate cinematică
- d) Cadrul are un grad de nedeterminare geometrică
- e) Cadrul are un grad de libertate elastică

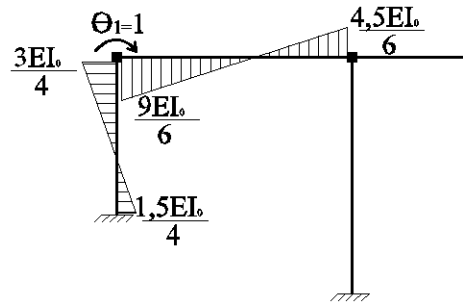
2.4.25. Pentru structura din figura de mai jos, care dintre diagramele de momente din deplasarea elastică  $\Theta_1=1$  este corectă?



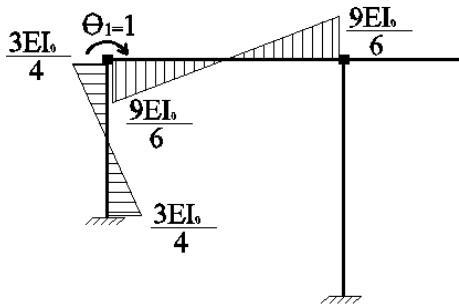
a)



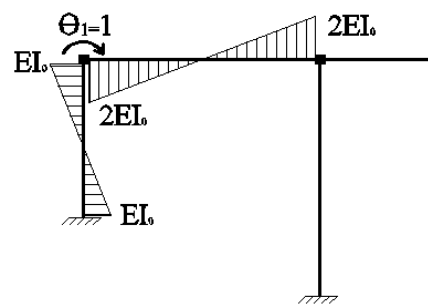
b)



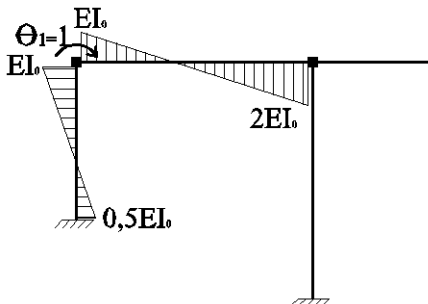
c)



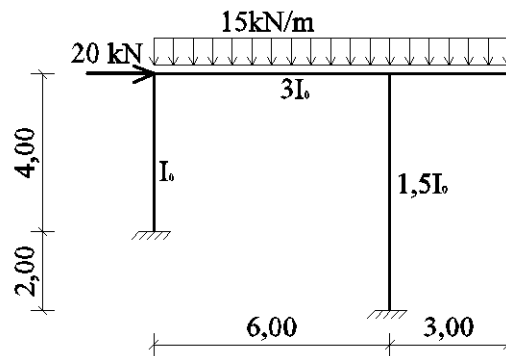
d)



e)

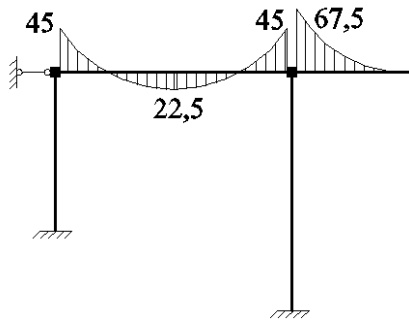


2.4.26. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment corectă rezultată din încărcarea sistemului de bază (structura cu nodurile blocate) cu forțele exterioare date?

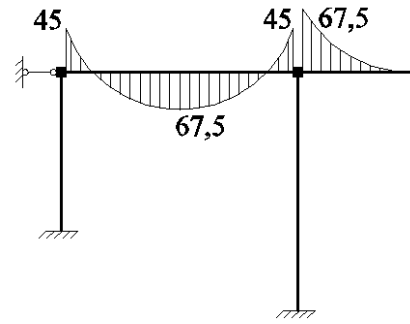




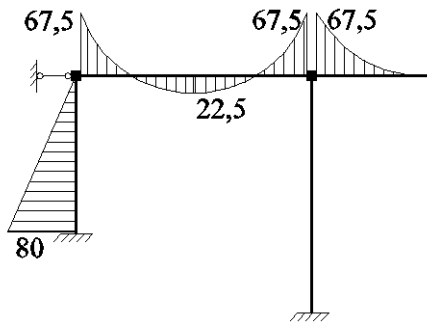
a)



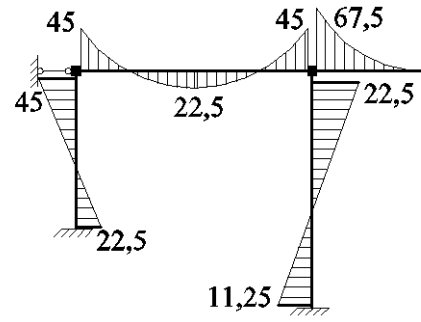
b)



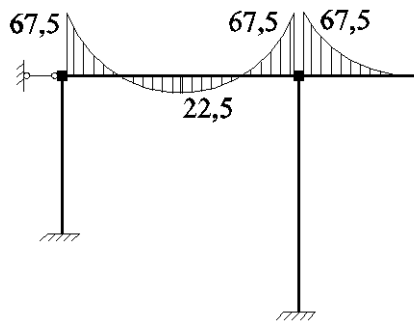
c)



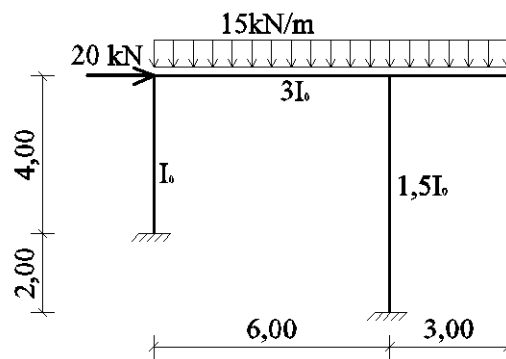
d)



e)



2.4.27. Pentru structura din figura de mai jos, care dintre valorile  $R_{1f}$  este corectă?



a) -22,50

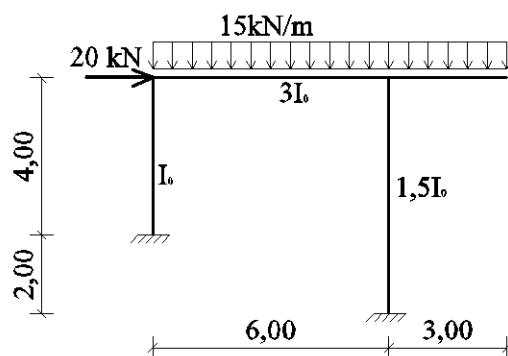
b) 45,00

c) -45,00

d) -67,50

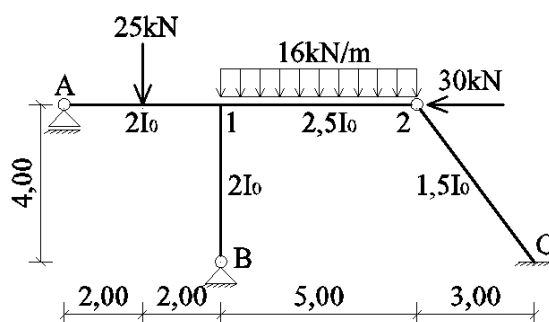
e) 67,50

2.4.28. Pentru structura din figura de mai jos, care dintre valorile  $R_{2f}$  este corectă?



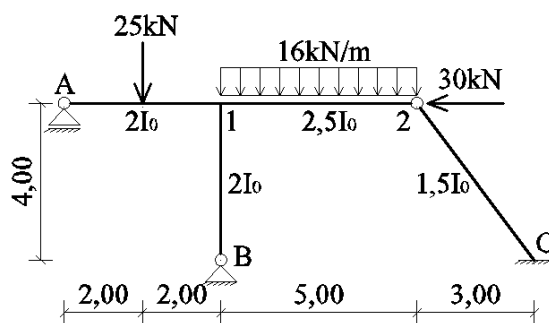
- a) 22,50      b) -15,50      c) -17,50      d) -22,50      e) 0,00

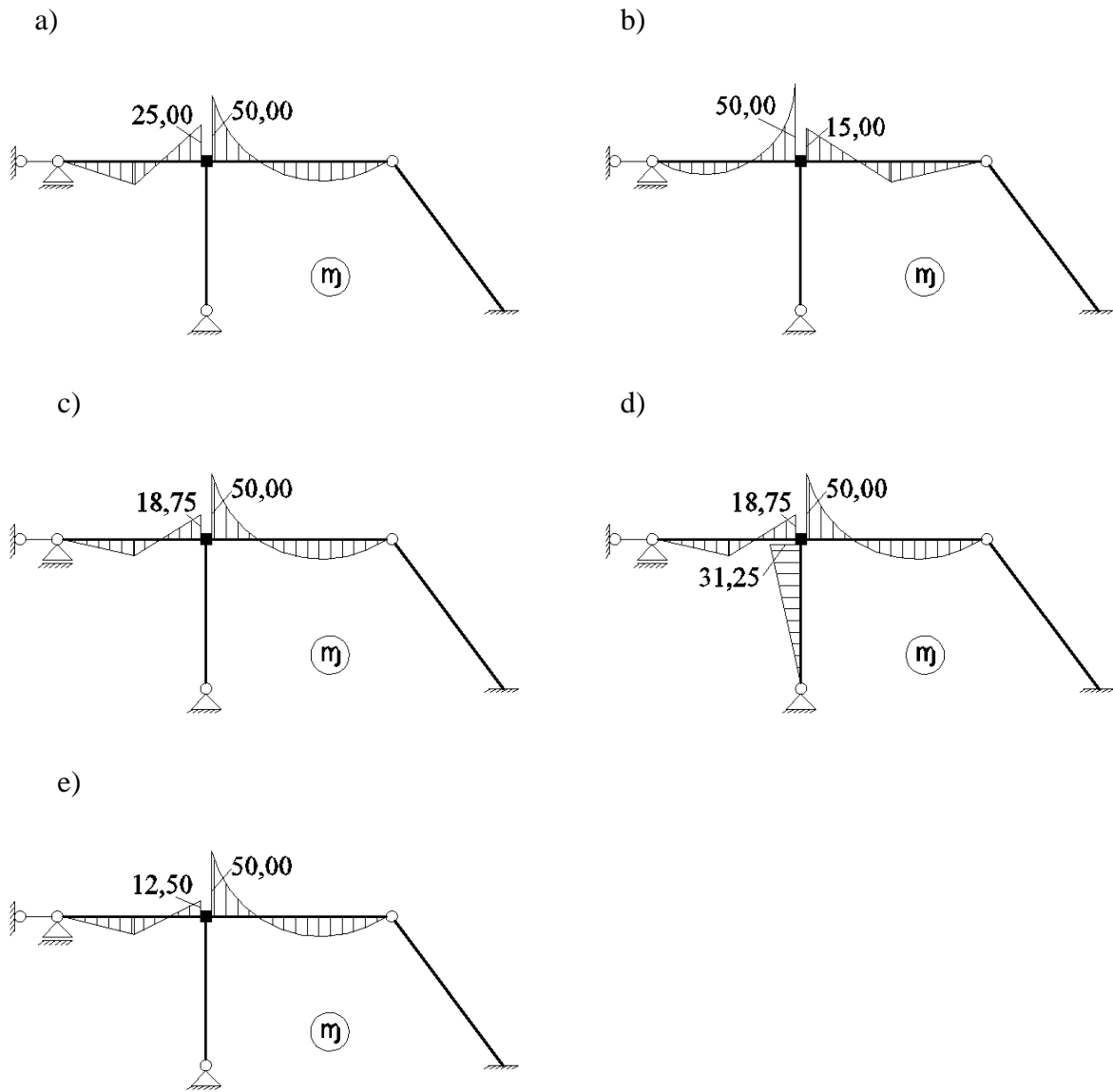
2.4.29. Care este gradul de nedeterminare geometrică al structurii din figură?



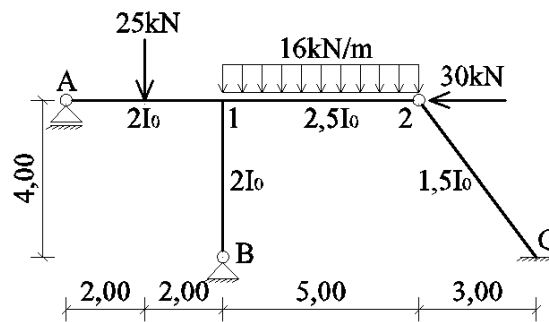
- a) 4      b) 3      c) 1      d) 2      e) 0

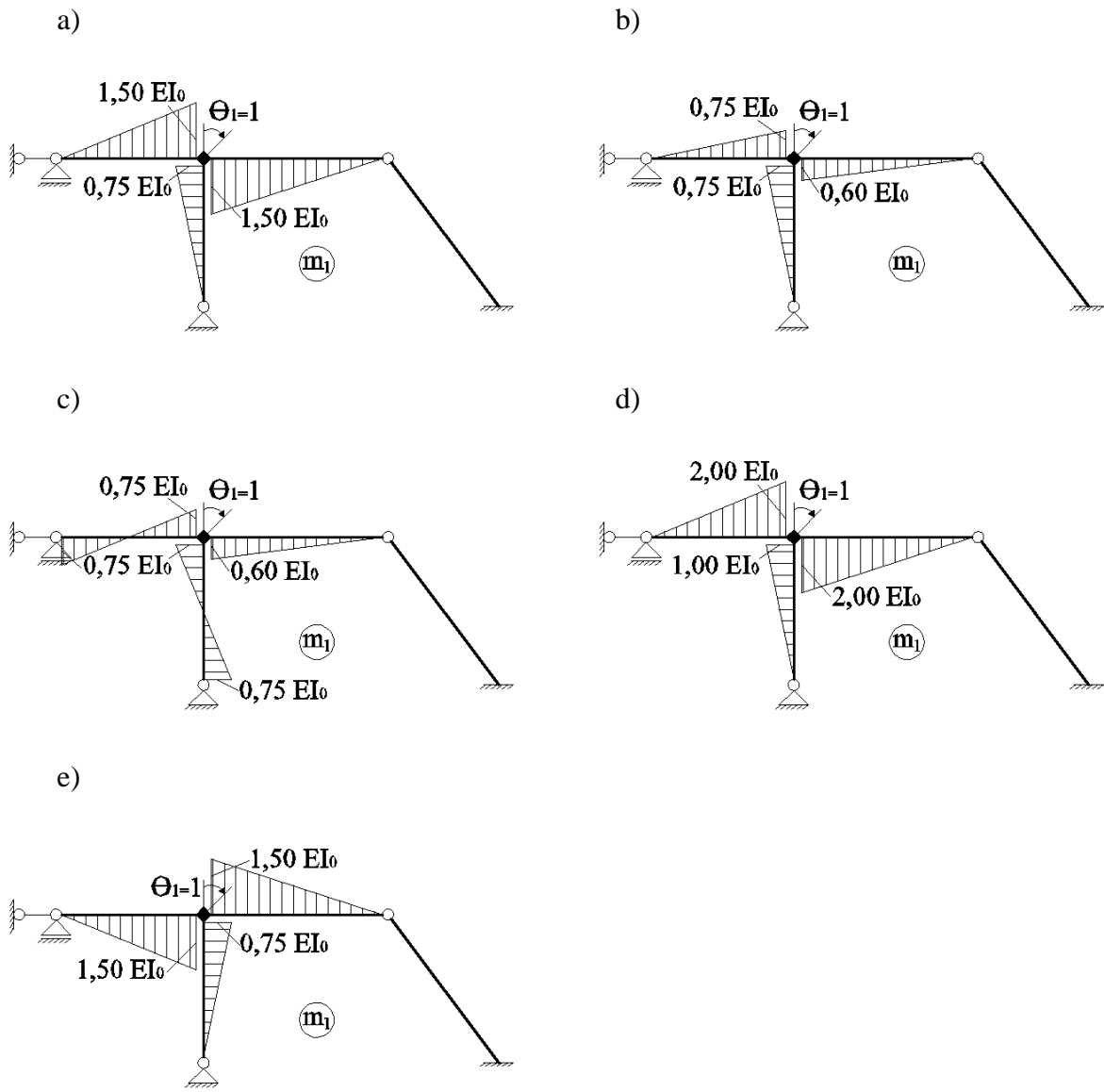
2.4.30. Pentru structura din figură, care este diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază, din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?



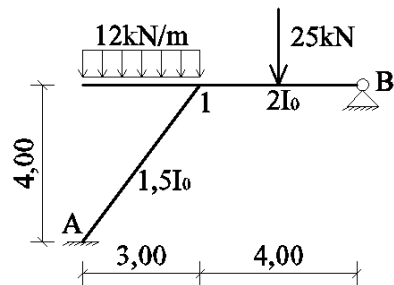


2.4.31. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment încovoietor  $m_1$  pe sistemul de bază, din încărcarea acestuia cu rotirea de nod  $\Theta_1=1$ ?



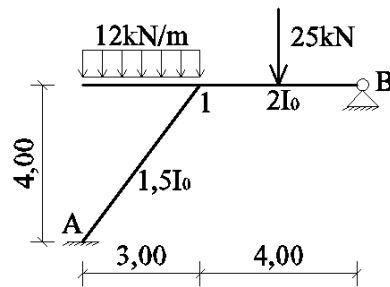


2.4.32. Care este gradul de nedeterminare geometrică al structurii din figură?

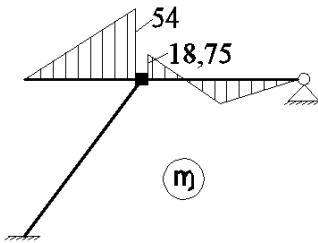


- a) 2      b) 3      c) 1      d) 4      e) 0

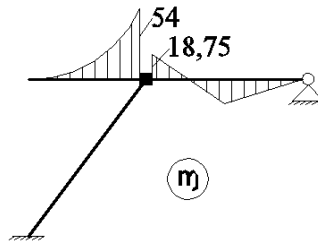
2.4.33. Pentru structura din figură, care este diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază, din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?



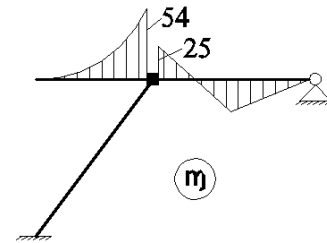
a)



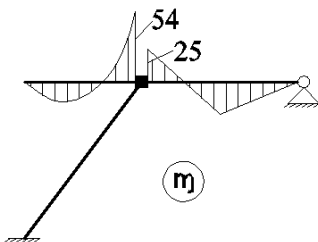
b)



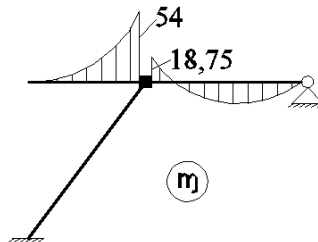
c)



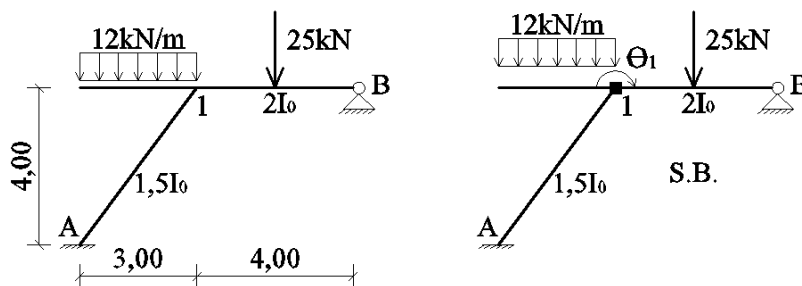
d)

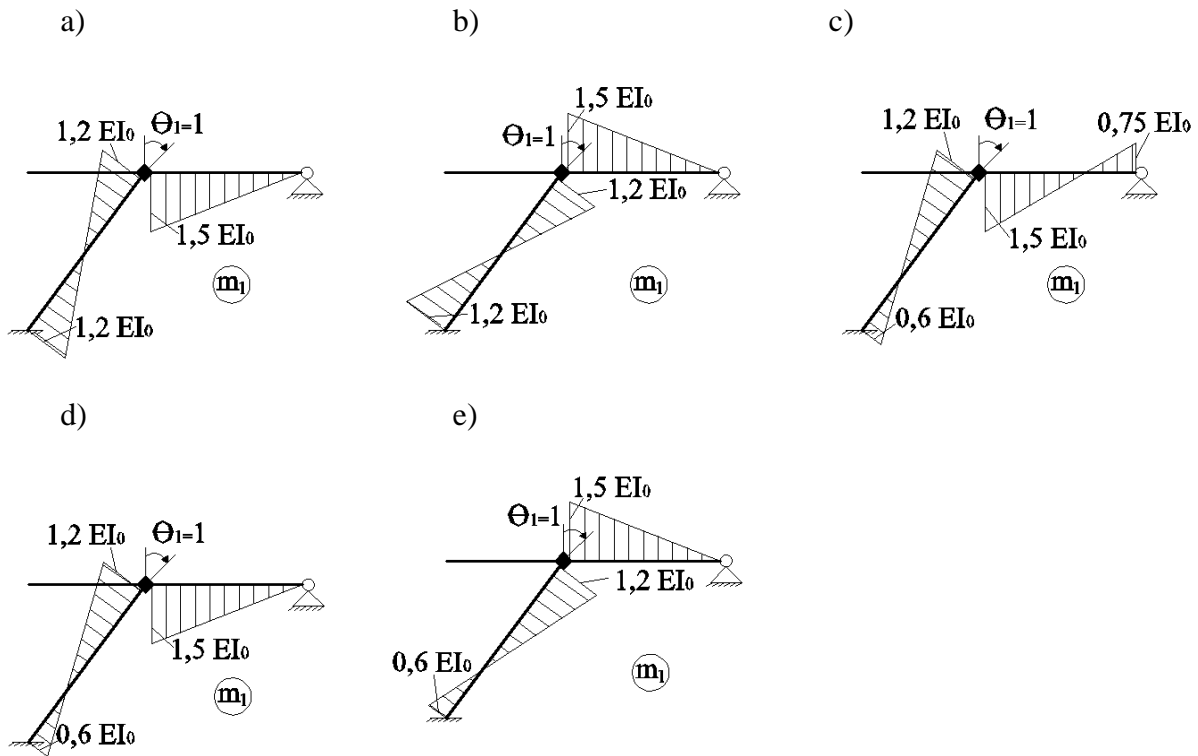


e)

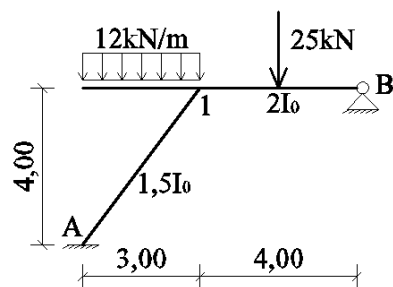


2.4.34. Pentru structura din figură, care este diagrama de moment încovoietor  $m_1$  pe sistemul de bază, din încărcarea acestuia cu rotirea de nod  $\Theta_1=1$ ?



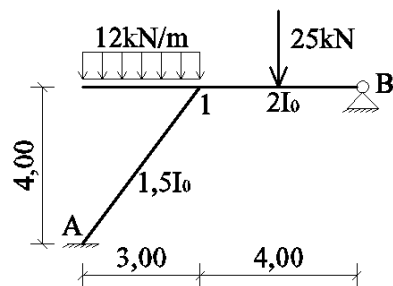


2.4.35. Pentru structura din figură, care este valoarea coeficientului  $k_{11}$  din ecuația de condiție?



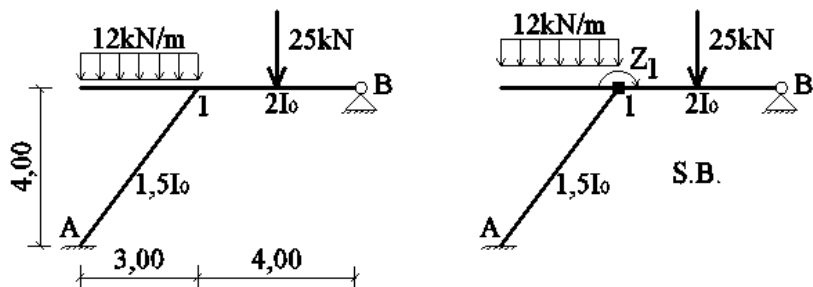
- a)  $-2,8EI_0$       b)  $-2,7EI_0$       c)  $0,3EI_0$       d)  $1,2EI_0$       e)  $2,7EI_0$

2.4.36. Pentru structura din figură, care este valoarea coeficientului  $R_{1f}$  din ecuația de condiție?



- a)  $72,75\text{kNm}$       b)  $-35,25\text{kNm}$       c)  $35,25\text{kNm}$       d)  $-25,25\text{kNm}$       e)  $48,20\text{kNm}$

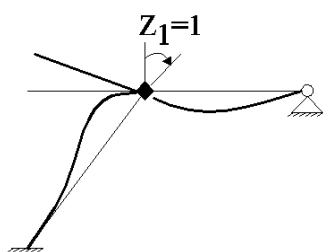
2.4.37. Pentru structura din figură, care este deformată sistemului de bază din încărcarea acestuia cu rotirea de nod corectată  $Z_1=1$ ?



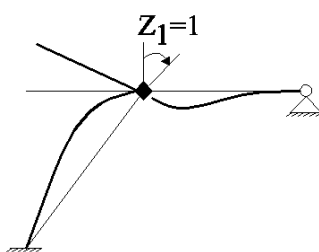
a)

b)

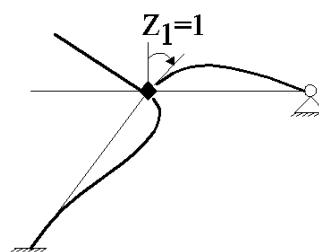
c)



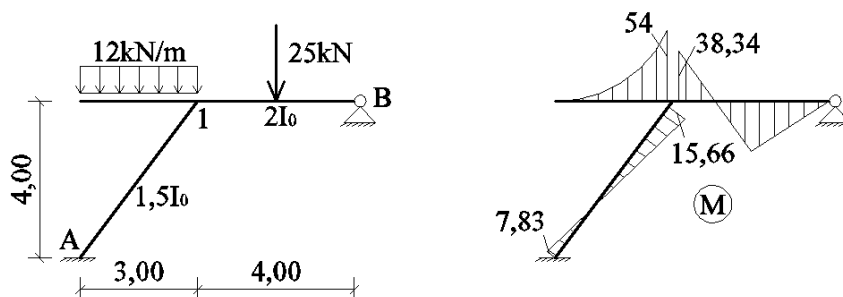
d)

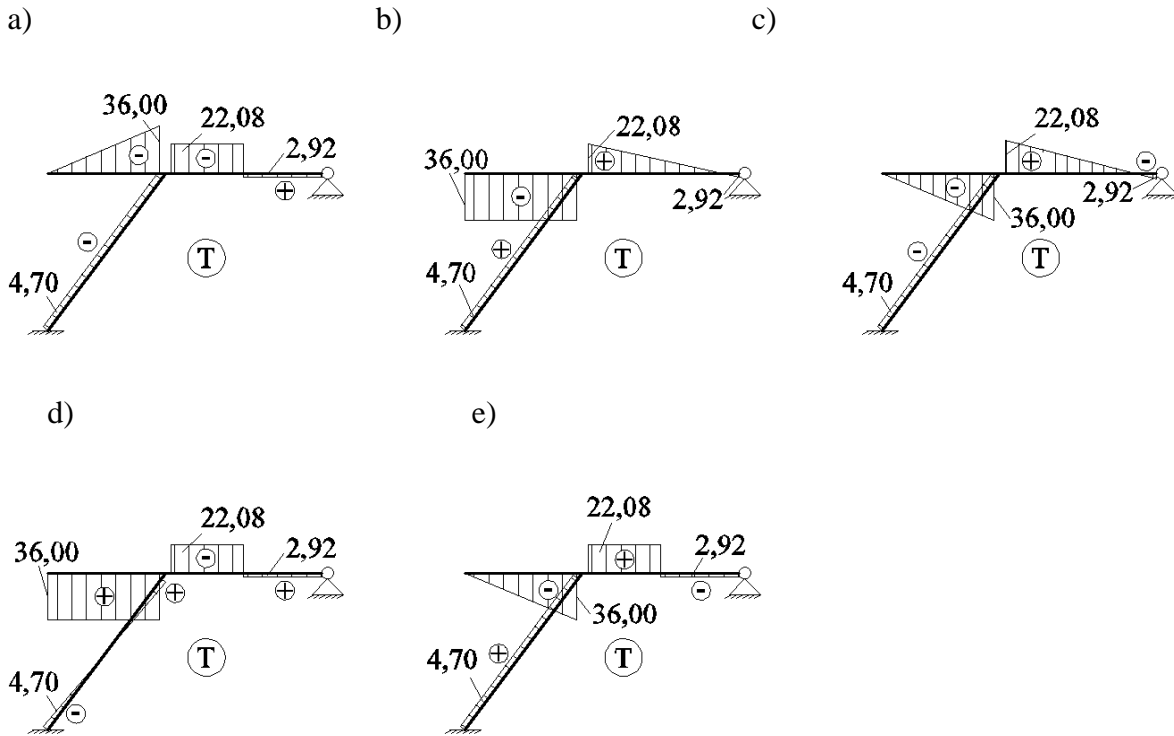


e)

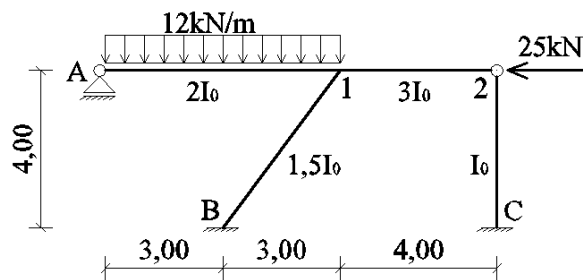


2.4.38. Pentru structura din figură și diagrama de moment încovoiator aferentă, care este diagrama de forță tăietoare  $T$ ?



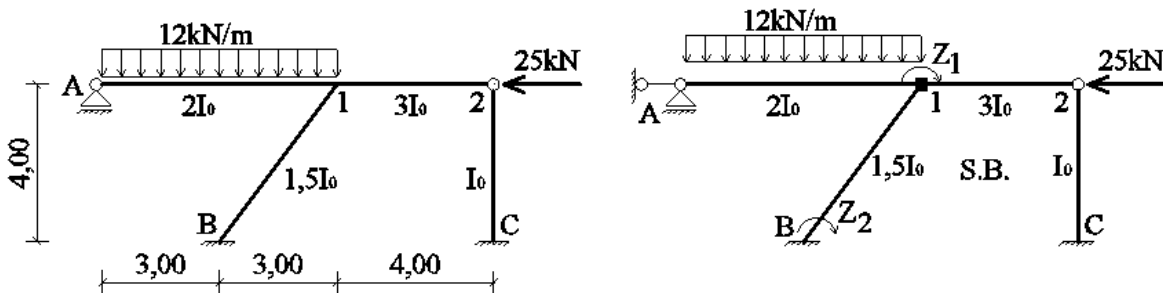


2.4.39. Care este gradul de nedeterminare geometrică al structurii din figură?



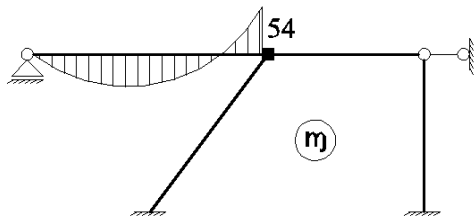
- a) 1                      b) 3                      c) 2                      d) 4                      e) 0

2.4.40. Pentru structura din figură, care este diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază, din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?

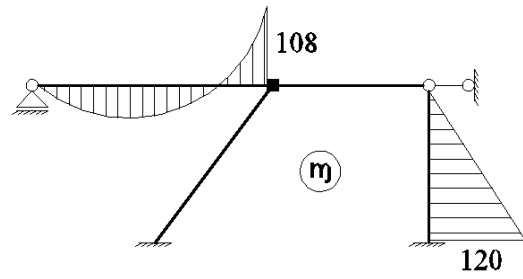




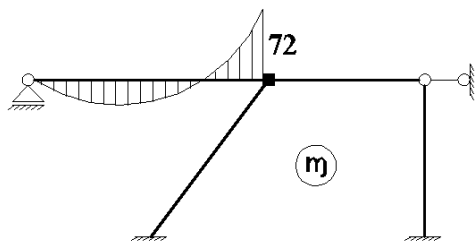
a)



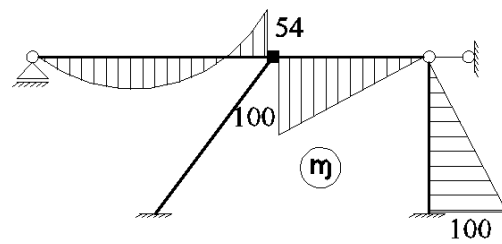
b)



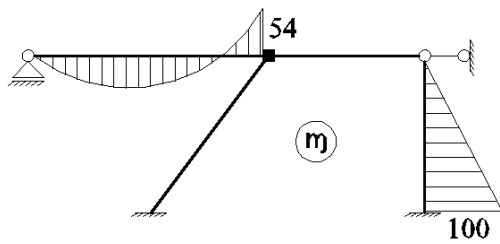
c)



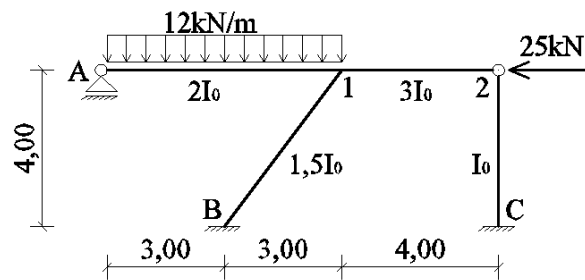
d)



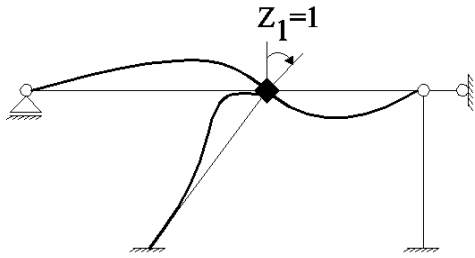
e)



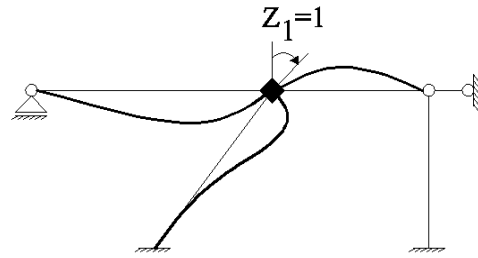
2.4.41. Pentru structura din figură, care este deforma sistemului de bază din încărcarea acestuia cu rotirea de nod corectată  $Z_1=1$ ?



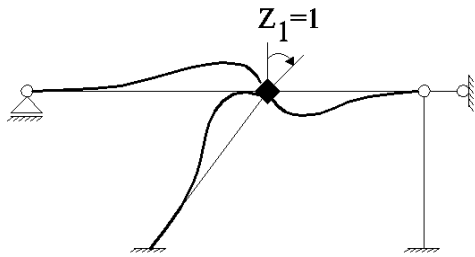
a)



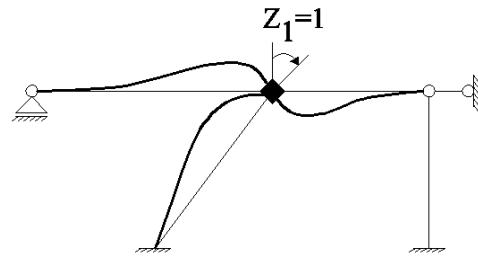
b)



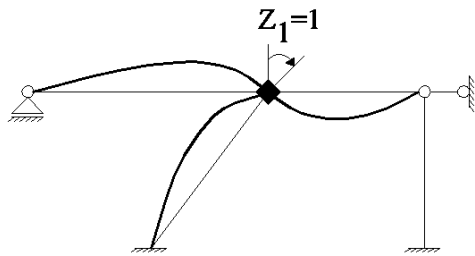
c)



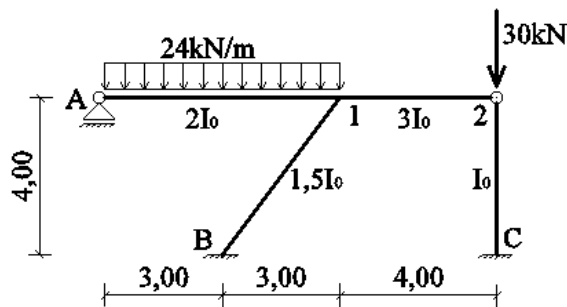
d)



e)



2.4.42. Pentru structura din figură, care este valoarea coeficientului  $k_{11}$  din sistemul de ecuații de condiție?



a)  $3,75EI_0$

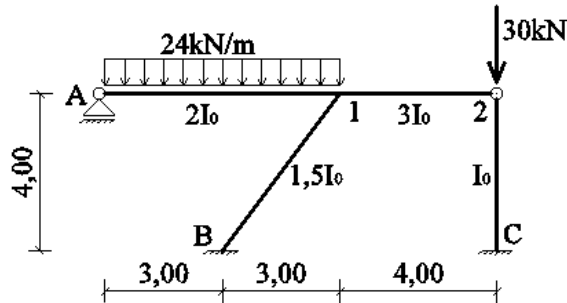
b)  $-4,45EI_0$

c)  $2,05EI_0$

d)  $4,45EI_0$

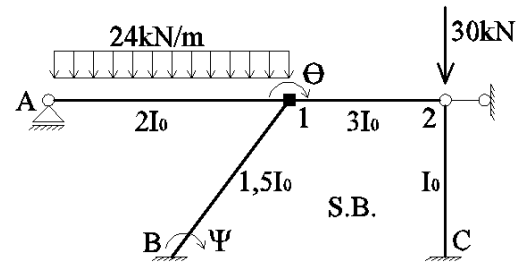
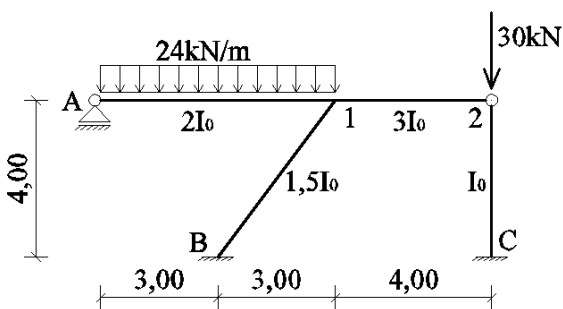
e)  $-1,25EI_0$

2.4.43. Pentru structura din figură, care este valoarea coeficientului  $k_{12}$  din sistemul de ecuații de condiție?



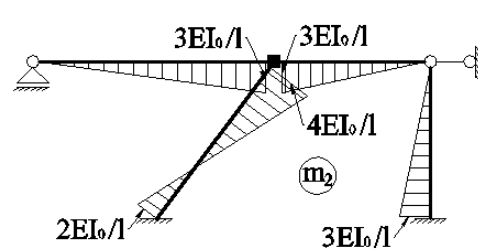
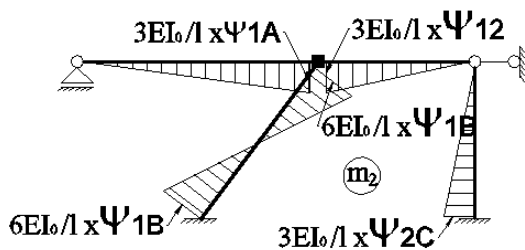
- a)  $0,64EI_0$       b)  $-0,61EI_0$       c)  $0,61EI_0$       d)  $0,48EI_0$       e)  $0,56EI_0$

2.4.44. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este diagrama corectă  $m_2$  din deplasarea elastică  $\psi_2=1$ ?

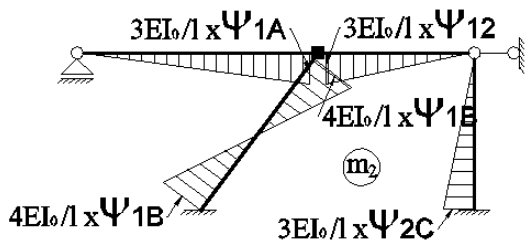


a)

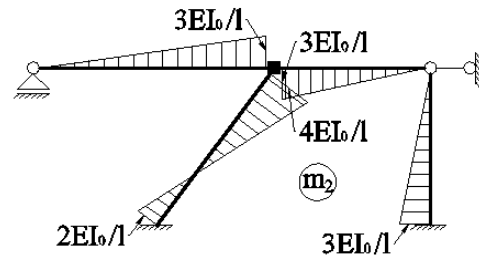
b)



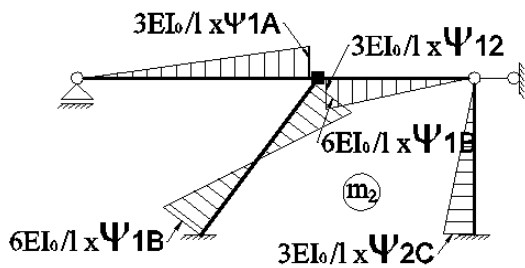
c)



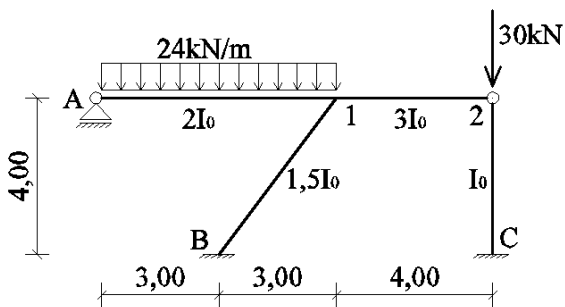
d)



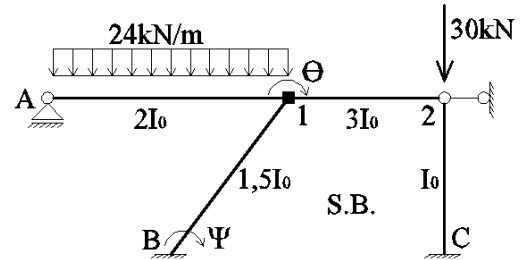
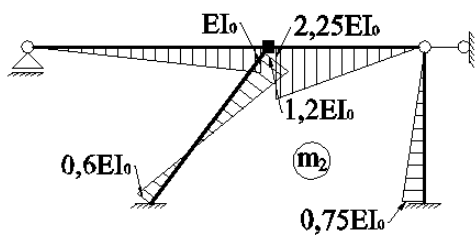
e)



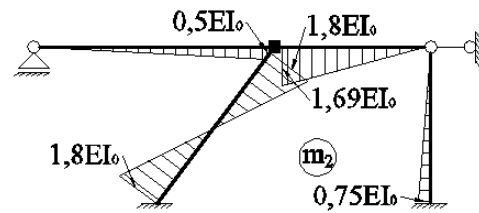
2.4.45. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este diagrama corectă  $m_2$  din încărcarea cu deplasarea elastică  $\psi_2=1$ ?



a)

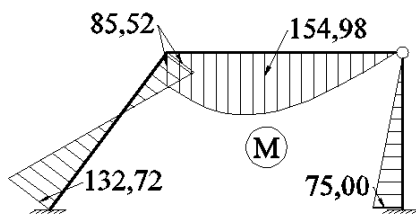


b)

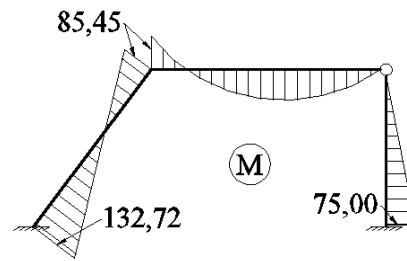




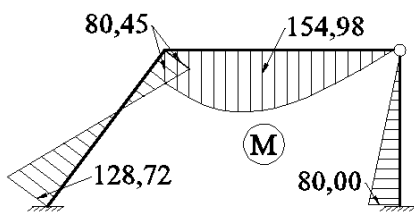
a)



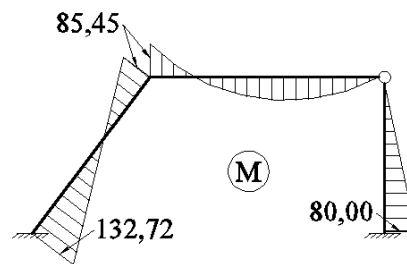
b)



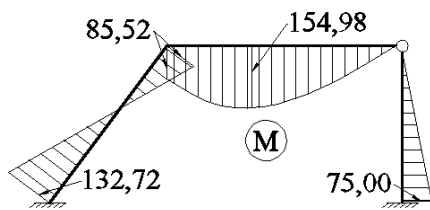
c)



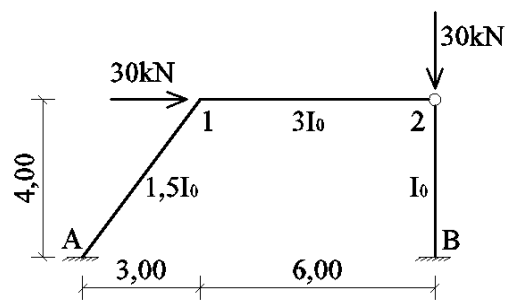
d)

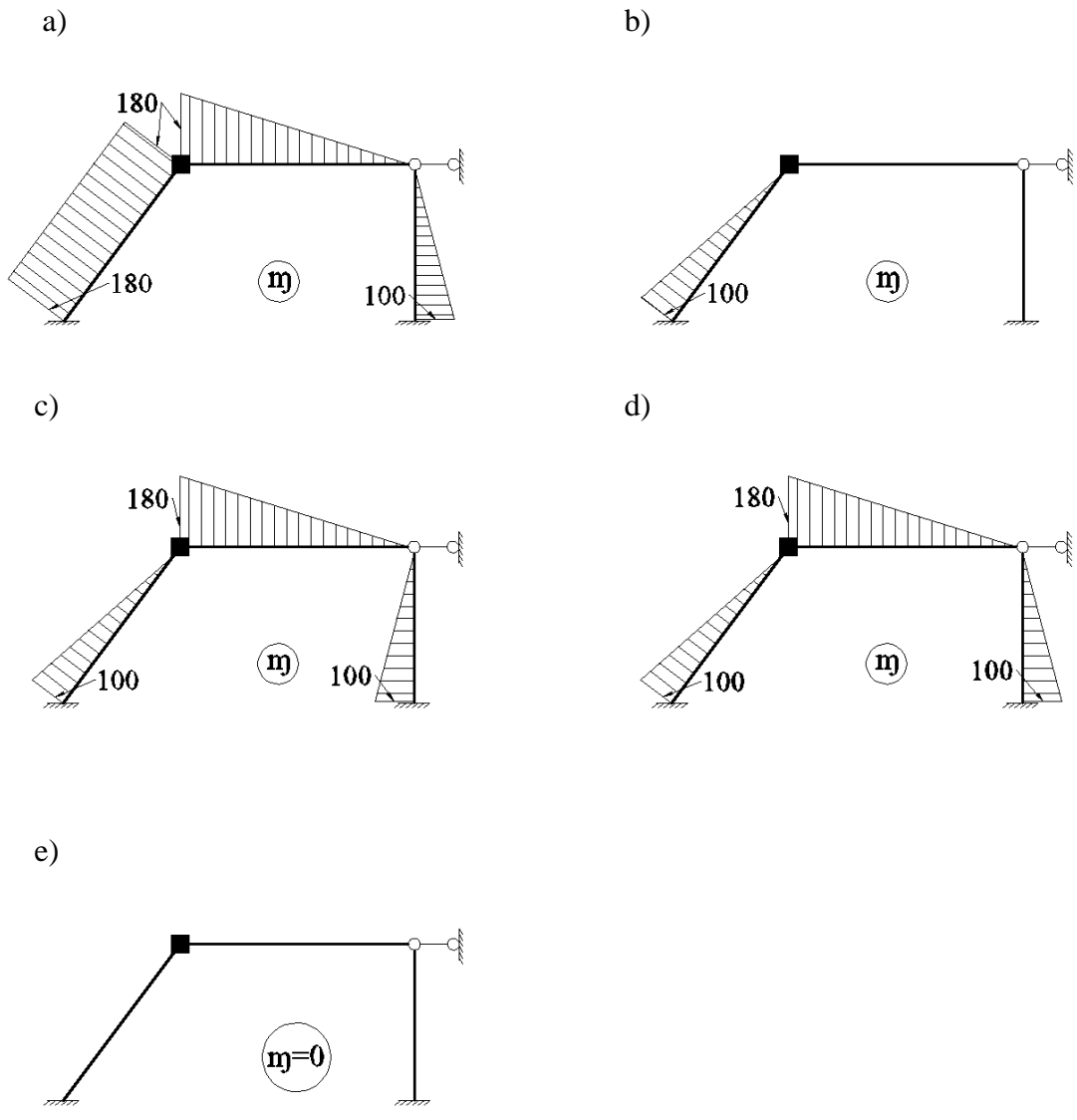


e)

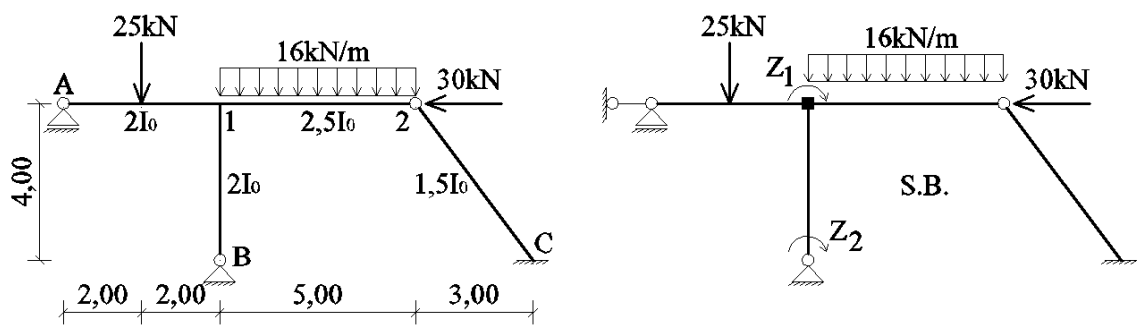


2.4.48. Pentru structura din figură, care este diagrama momentelor de încastrare perfectă pe barele sistemului de bază, din încărcarea acestuia cu forțele exterioare date?



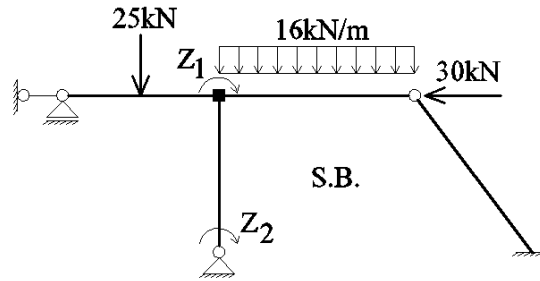
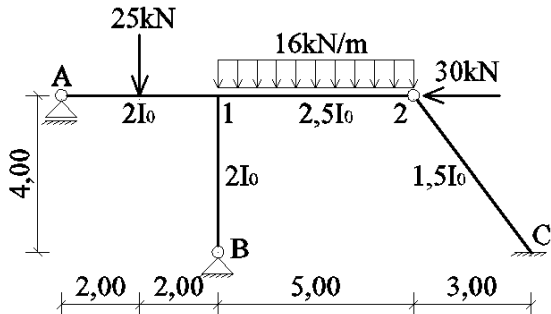


2.4.49. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este valoarea coeficientului  $k_{11}$  din sistemul de ecuații de condiție?



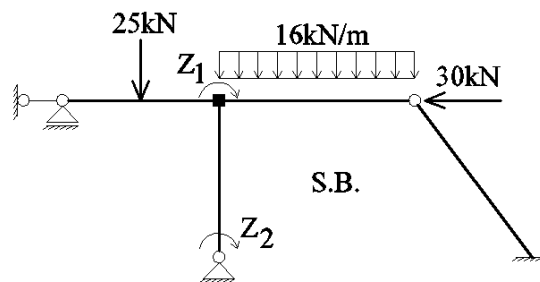
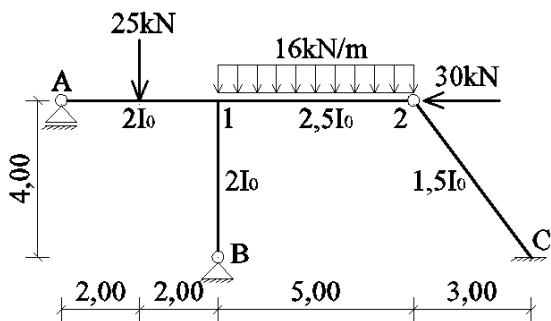
- a)  $2,10 EI_0$
- b)  $3,75 EI_0$
- c)  $5,00 EI_0$
- d)  $-5,00 EI_0$
- e)  $2,25 EI_0$

2.4.50. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este valoarea coeficientului  $k_{12}$  din sistemul de ecuații de condiție?



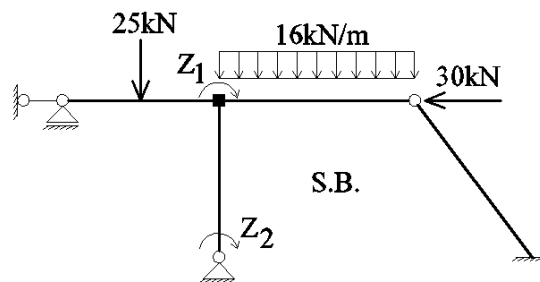
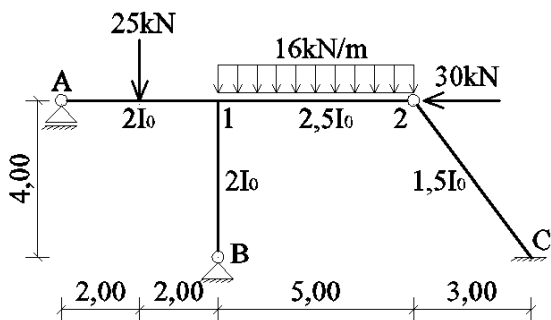
- a)  $1,65 EI_0$       b)  $3,75 EI_0$       c)  $-3,75 EI_0$       d)  $0,75 EI_0$       e)  $0,15 EI_0$

2.4.51. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este valoarea coeficientului  $k_{22}$  din sistemul de ecuații de condiție?



- a)  $-1,11 EI_0$       b)  $2,55 EI_0$       c)  $-3,75 EI_0$       d)  $2,19 EI_0$       e)  $0,15 EI_0$

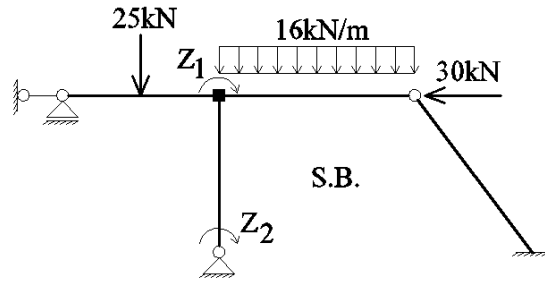
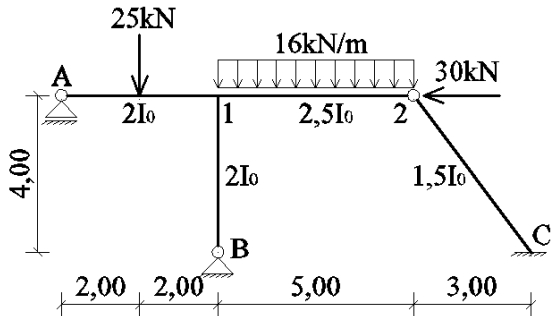
2.4.52. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este valoarea coeficientului  $R_{1f}$  din sistemul de ecuații de condiție?



- a)  $68,75 \text{ kNm}$       b)  $75,00 \text{ kNm}$       c)  $-31,25 \text{ kNm}$       d)  $-37,50 \text{ kNm}$       e)  $-14,58 \text{ kNm}$

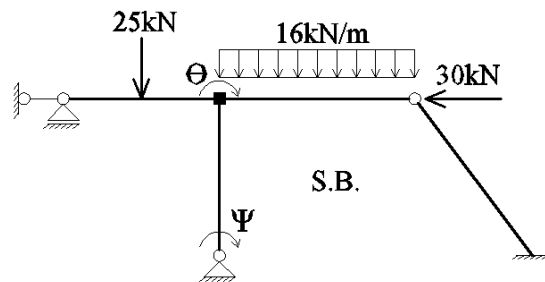
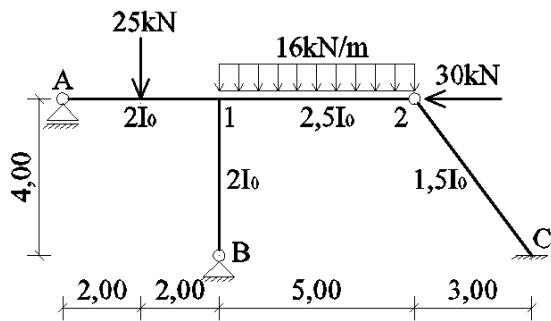


2.4.53. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este valoarea coeficientului  $R_{2f}$  din sistemul de ecuații de condiție?



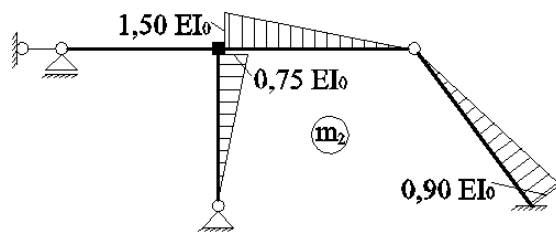
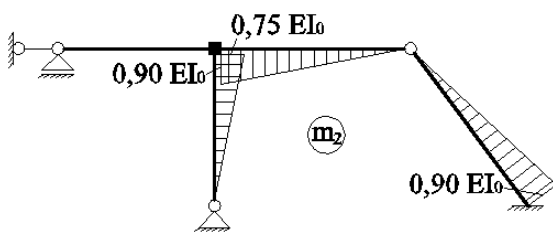
- a) 210,00 kNm      b) -20,00 kNm      c) -30,00 kNm      d) 220,00 kNm  
e) -14,58 kNm

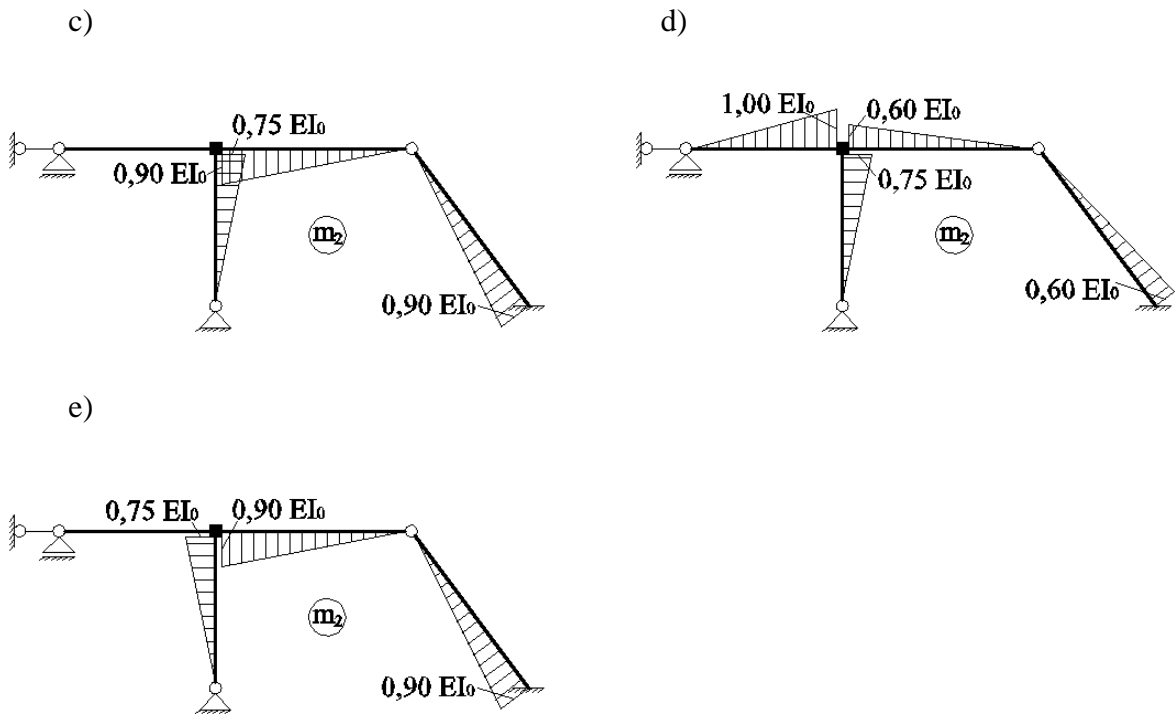
2.4.54. Pentru structura din figură, având sistemul de bază alăturat, care este diagrama corectă  $m_2$  din deplasarea elastică  $\psi_2=1$ ?



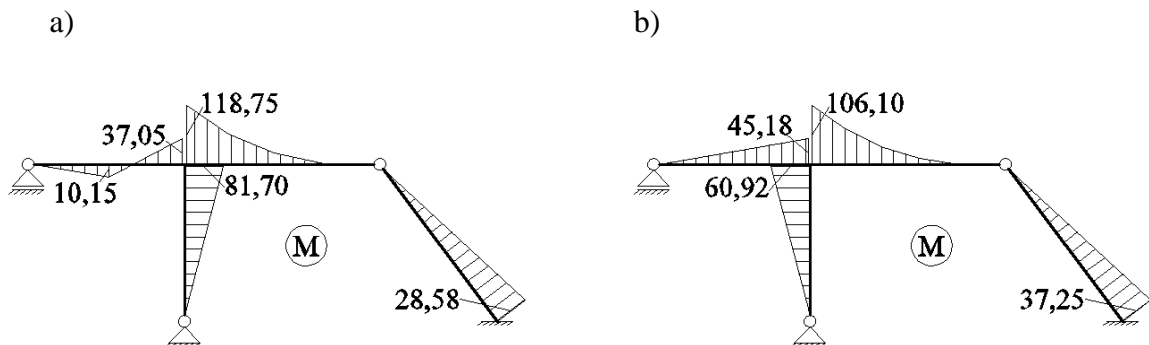
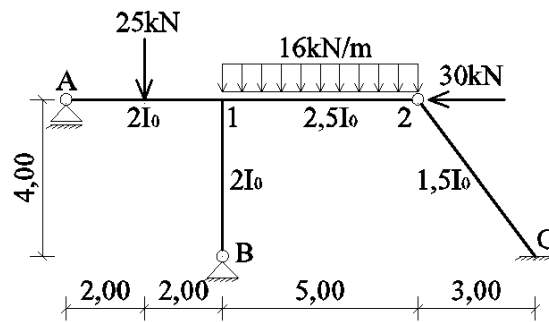
a)

b)

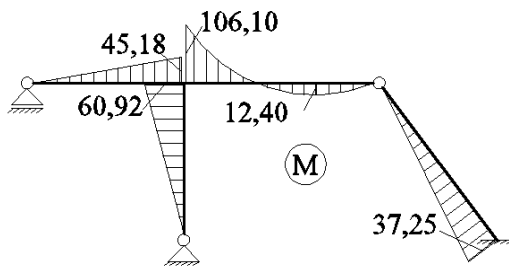




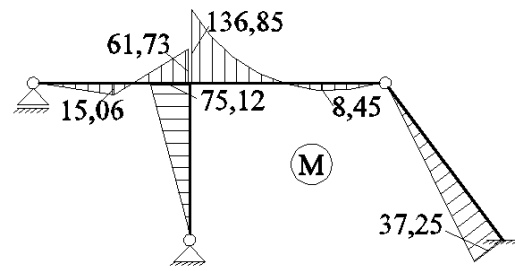
2.4.55. Pentru structura din figură, care este diagrama finală de moment încovoiator?



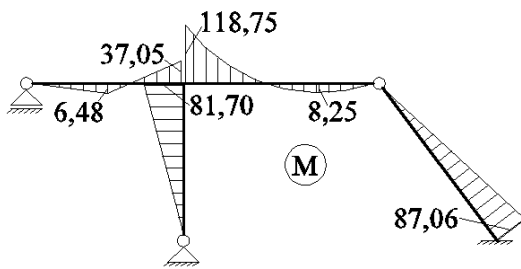
c)



d)



e)



## Anexa A - Răspunsuri probleme propuse

<u>Metoda Forțelor</u>				<u>Metoda Deplasărilor</u>			
1.4.1	a	1.4.44	d	2.4.1	a	2.4.44	a
1.4.2	b	1.4.45	a	2.4.2	d	2.4.45	b
1.4.3	d	1.4.46	c	2.4.3	b	2.4.46	e
1.4.4	e	1.4.47	c	2.4.4	c	2.4.47	a
1.4.5	a	1.4.48	a	2.4.5	c	2.4.48	e
1.4.6	c	1.4.49	b	2.4.6	b	2.4.49	b
1.4.7	a	1.4.50	d	2.4.7	c	2.4.50	e
1.4.8	c	1.4.51	e	2.4.8	b	2.4.51	d
1.4.9	a	1.4.52	c	2.4.9	e	2.4.52	c
1.4.10	b	1.4.53	d	2.4.10	d	2.4.53	a
1.4.11	d	1.4.54	b	2.4.11	b	2.4.54	c
1.4.12	c	1.4.55	c	2.4.12	c	2.4.55	e
1.4.13	e	1.4.56	a	2.4.13	d		
1.4.14	b	1.4.57	d	2.4.14	e		
1.4.15	a	1.4.58	a	2.4.15	b		
1.4.16	c	1.4.59	a	2.4.16	d		
1.4.17	d	1.4.60	b	2.4.17	d		
1.4.18	c	1.4.61	b	2.4.18	c		
1.4.19	e	1.4.62	c	2.4.19	b		
1.4.20	b	1.4.63	d	2.4.20	c		
1.4.21	d	1.4.64	e	2.4.21	d		
1.4.22	a	1.4.65	d	2.4.22	e		
1.4.23	c			2.4.23	d		
1.4.24	e			2.4.24	d		
1.4.25	c			2.4.25	a		
1.4.26	d			2.4.26	a		
1.4.27	a			2.4.27	c		
1.4.28	d			2.4.28	d		
1.4.29	e			2.4.29	d		
1.4.30	d			2.4.30	c		
1.4.31	a			2.4.31	a		
1.4.32	d			2.4.32	c		
1.4.33	c			2.4.33	b		
1.4.34	d			2.4.34	d		
1.4.35	e			2.4.35	e		
1.4.36	a			2.4.36	c		
1.4.37	b			2.4.37	a		
1.4.38	c			2.4.38	e		
1.4.39	e			2.4.39	c		
1.4.40	c			2.4.40	a		
1.4.41	b			2.4.41	a		
1.4.42	b			2.4.42	d		
1.4.43	b			2.4.43	b		

## **Bibliografie:**

- [1] CĂTĂRIG, AI., PETRINA, M., KOPENETZ, L., CHIRA, N., TRIFA, F., *Statica construcțiilor. Structuri static nedeterminate*, Vol 2, Cluj-Napoca, Editura U.T. Press, 2001
- [2] CĂTĂRIG, AI., PETRINA, M., KOPENETZ, L., PAVEL, A., CHIRA, N., BĂLAC, R., *Statica construcțiilor: structuri static nedeterminate- vol 2*, Cluj-Napoca, Editura U.T. Press, 2005
- [3] CĂTĂRIG, AI., PETRINA, M., KOPENETZ, L., PAVEL, A., CHIRA, N., BĂLAC, R., *Statica construcțiilor: structuri geometric nedeterminate-vol 3*, Cluj-Napoca, Editura U.T. Press, 2006
- [4] GHEORGHIU, A., *Statica, stabilitatea si dinamica construcțiilor*, Bucuresti, EDP, 1974