

Radu Mircea Morariu-Gligor

Nicolae Haiduc

MECANICA

Curs pentru studenți



U.T. PRESS
CLUJ-NAPOCA, 2017
ISBN 978-606-737-251-9



Editura U.T.PRESS
Str.Observatorului nr. 34
C.P.42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999 / Fax: 0264 - 430.408
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Prof.dr.ing. Iuliu Negrean
Prof.dr.ing.mat. Nicolae Ursu-Fischer

Copyright © 2017 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din
această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii
U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-251-9

Prefață

Lucrarea de față se adresează studenților din anul întâi de la specializările cu profil mecanic din cadrul Universității Tehnice din Cluj-Napoca.

Lucrarea tratează o parte din noțiunile teoretice aferente Staticii, conținând pe lângă aspectele teoretice și probleme rezolvate, utile pentru înțelegerea noțiunilor teoretice. Exemplele alese au un grad de dificultate scăzut spre mediu, fiind considerate foarte utile în înțelegerea noțiunilor teoretice.

În primul capitol, intitulat *Introducere* sunt prezentate câteva definiții, principiile mecanicii Newtoniene, diviziunile mecanicii, precum și sistemele și unitățile de măsură utilizate în lucrare.

Capitolul al doilea, prezintă noțiunile teoretice legate de calculul vectorial și operații cu vectori, în finalul capitolului fiind prezentate câteva probleme rezolvate.

Al treilea capitol intitulat *Reducerea forțelor* tratează aspectele teoretice și practice ale reducerii sistemelor de forțe. Sunt prezentate noțiunile de forță și moment al forței, cu aplicații. De asemenea, sunt prezentate aspectele teoretice și exemple privind reducerea sistemelor de forțe concurente, coplanare și paralele.

Capitolul al patrulea al lucrării prezintă noțiunile teoretice și o serie de exemple legate de calculul centrului de masă, a momentelor de inerție precum și modalitatea de aplicare a teoremelor lui Guldin – Pappus.

Următorul capitol prezintă aspecte privind statica punctului material, tipurile de forțe ce pot să acționeze asupra punctului material precum și aspecte privind echilibrul punctului material.

Capitolul al șaselea tratează noțiunile teoretice și practice ale echilibrului solidului rigid. Sunt tratate frecarea de alunecare, frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare, frecarea în articulații, frecarea firelor, precum și rigiditatea firelor. În finalul acestui articol sunt prezentate câteva probleme sugestive.

Ultimul capitol prezintă metodele de rezolvare (cu exemple) ale problemelor legate de echilibrul sistemelor de solide rigide.

Autorii

Cuprins:

I. Introducere	7
I.1. Definiții.....	7
I.2. Principiile mecanicii clasice	9
I.3. Diviziunile mecanicii.....	10
I.4. Sisteme și unități de măsură.....	10
II. Noțiuni de calcul vectorial	12
II.1. Egalitatea a doi vectori.....	14
II.2. Înmulțirea unui vector cu un scalar	15
II.3. Suma (rezultanta) a doi sau mai mulți vectori	15
II.4. Produsul scalar	16
II.5. Produsul vectorial	17
II.6. Produsul mixt al trei vectori	18
II.7. Dublul produs vectorial.....	18
II.8. Operatorul gradient	19
II.9. Operatorii Δ , d	19
II.10. Probleme rezolvate.....	19
III. Reducerea forțelor	23
III.1. Noțiunea de forță	23
III.1.1. Introducere	23
III.1.2. Caracterul vectorial al forței	24
III.2. Momentul polar al forței	25
III.2.1. Variația momentului polar la schimbarea polului	28
III.2.2. Variația momentului polar la schimbarea punctului de aplicație al forței.....	29
III.3. Momentul axial al forței.....	30
III.4. Cuplu de forțe. Momentul unui cuplu	31
III.5. Operații elementare de echivalență.....	32
III.6. Reducerea forțelor	32
III.7. Torsor minimal. Axă centrală.....	36
III.8. Reducerea unui sistem de forțe concurente.....	38
III.9. Reducerea unui sistem de forțe coplanare.....	40
III.10. Reducerea unui sistem de forțe paralele.....	43
III.11. Cazuri de reducere	46
IV. Geometria maselor	47
IV.1. Centrul de greutate și centrul maselor unui sistem de puncte materiale	47
IV.2. Teoremele lui Guldin – Pappus	51
IV.3. Momente statice. Teorema momentelor statice.....	52

IV.4. Momente de inerție. Raze de inerție.....	53
IV.5. Probleme rezolvate	54
V. Statica punctului material	65
V.1. Punct material liber și supus la legături	65
V.2. Echilibrul punctului material rezemat pe o suprafață aspră	67
V.4. Echilibrul punctului	68
VI. Statica solidului rigid	70
VI.1. Tipuri de forțe.....	70
VI.1.1. Greutatea (forța de atracție a Pământului)	70
VI.1.2. Forța de apăsare normală.....	71
VI.1.3. Forța de tensiune din fir.....	71
VI.1.4. Forța de frecare la alunecare.....	72
VI.1.5. Forța elastică	73
VI.2. Echilibrul solidului rigid liber	73
VI.3. Echilibrul solidului rigid supus la legături ideale.....	75
VI.4. Echilibrul cu frecare al solidului rigid	77
VI.4.1. Frecarea de alunecare	79
VI.4.2. Frecarea de rostogolire	83
VI.4.3. Frecarea de pivotare	88
VI.4.4. Frecarea în articulații.....	90
VI.4.5. Frecarea firelor.....	93
VI.4.6. Rigiditatea firelor	96
VI.5. Echilibrul solidului rigid	97
VII. Echilibrul sistemelor de solide rigide	100
VII.1. Teorema echilibrului părților (metoda izolării corpurilor)	100
VII.2. Teorema solidificării	102
Bibliografie:.....	104

I. Introducere

Mecanica, ca disciplină, studiază mișcarea mecanică a sistemelor de corpuri materiale. Corpurile materiale sunt considerate puncte materiale atunci când dimensiunile lor sunt mici în raport cu mediul sau solide rigide (nedeformabile) atunci când dimensiunile lor sunt comparabile cu cele ale mediului înconjurător.

În cadrul mecanicii, se studiază mișcarea corpurilor a căror viteză este mult mai mică decât viteza luminii. Mișcarea este raportată la sisteme de referință considerate inerțiale, adică în mișcare rectilinie și uniformă.

I.1. Definiții

Mecanica tehnică (teoretică) - studiază legile mișcării mecanice în scopul aplicării acestora în practică, precum și echilibrul corpurilor materiale (de diferite forme și dimensiuni), considerate nedeformabile și care se deplasează cu diferite viteze.

Mișcarea mecanică - reprezintă modificarea poziției unui corp solid în raport cu un altul, considerat ca reper de referință. Este cea mai simplă formă de mișcare a materiei, care nu are în vedere transformările interne ale corpurilor.

Sistem de referință - este un reper nedeformabil față de care se raportează pozițiile punctelor unui sistem material. În spațiul euclidian cu trei dimensiuni cel mai frecvent utilizat este sistemul de referință triortogonal drept. Definirea poziției unui corp material se realizează utilizând un anumit număr de parametri geometrici (distanțe și / sau unghiuri) care poartă numele de **coordonate**.

Gradele de libertate a unui punct material sau a unui sistem de puncte materiale reprezintă numărul de parametri geometrici independenți necesari pentru a defini poziția acestuia.

În figura 1.1 sunt ilustrați parametri în cazul celor trei sisteme de coordonate: cartezian (figura 1.1.a), cilindric (figura 1.1.b), respectiv sferic (figura 1.1.c). În sistemul de coordonate cartezian (figura 1.1.a) se aleg trei axe de coordonate: x , y , z , perpendiculare între ele. Notând cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ versorii celor trei axe, orice vector de poziție \bar{r} poate fi scris sub forma:

$$\bar{r} = r_x \cdot \bar{i} + r_y \cdot \bar{j} + r_z \cdot \bar{k} \quad (1.1)$$

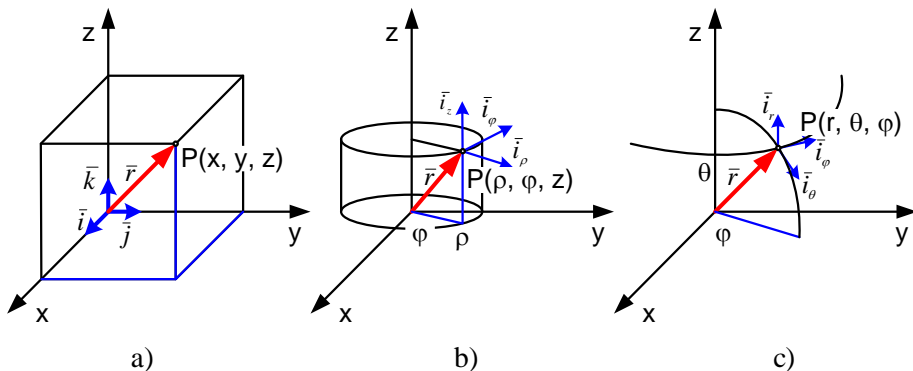


Figura 1.1. Sisteme de coordonate

În sistemul de coordonate cilindrice (figura 1.1.b), coordonatele sunt proiecția ρ a vectorului \vec{r} pe planul xOy , unghiul φ dintre axa x și proiecția vectorului \vec{r} pe planul xOy și z . Coordonatele se numesc cilindrice deoarece, păstrând raza cilindrului constantă și modificând unghiul φ (de la 0 la 360°) și z , se generează toate punctele unui cilindru.

În sistemul de coordonate sferice (figura 1.1.c), coordonatele sunt raza r , unghiul φ dintre axa x și proiecția vectorului \vec{r} pe planul xOy , respectiv unghiul θ dintre raza \vec{r} și axa z . Coordonatele se numesc sferice deoarece modificând raza de la 0 la r și modificând coordonatele θ (de la 0 la 180°), respectiv φ (de la 0 la 360°) se pot genera toate punctele unei sfere.

Între coordonatele carteziene, cilindrice și sferice sunt valabile relațiile:

$$x = \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = z = r \cos \theta; \quad (1.2)$$

Modele mecanice – reprezintă schematizări ale corpurilor, ce rețin caracteristicile lor esențiale și le fac astfel proprii calculului matematic:

- *punct material*: un punct geometric dotat cu o masă;
- *sistem discret de puncte materiale*: un ansamblu de puncte materiale care interacționează reciproc;
- *continuu material*: o regiune din spațiu din care delimitând un volum oricât de mic, care conține materie; poate fi deformabil sau nedeformabil;
- *solid rigid*: un continuu material considerat nedeformabil;
- *solid rigid omogen*: un solid rigid la care materia este uniform repartizată și care are aceleași proprietăți mecanice în tot corpul;
- *sistem de solide rigide*: un ansamblu de solide rigide ce interacționează reciproc;
- *bară*: un solid rigid unidimensional care are una din dimensiuni, lungimea, mult mai mare în raport cu celelalte două;

- *fir*: o bară perfect flexibilă și inextensibilă sub acțiunea forțelor care îl sollicită;
- *placă*: un solid rigid bidimensional care are una din dimensiuni, grosimea, mult mai mică în raport cu celelalte două.

În mecanică, **masa** este evidențiată de două proprietăți: **gravitația** (proprietatea corpurilor aflate în interacțiune mecanică, de a se atrage reciproc) și **inerția** (proprietatea unui corp de a se opune oricărei schimbări a stării sale fizice).

1.2. Principiile mecanicii clasice

Mecanica clasică se bazează pe principiile formulate de Sir Isaac Newton (1642 – 1727), figura 1.2, în lucrarea “Philosophiae naturalis principia mathematica” – în traducere “Principiile matematice ale filosofiei naturale”, apărută în 1687 (figura 1.3).

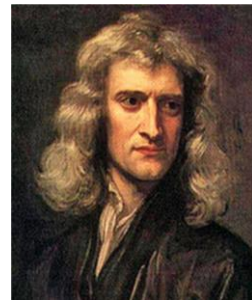


Figura 1.2.

Principiul inerției (Lex prima): “Un corp își menține starea de repaus relativ sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte corpuri sau forțe care să-i modifice această stare”.

Se definește **inerția** ca fiind capacitatea corpurilor de a-și păstra starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă. **I. Newton** introduce noțiunile de **masă** și **cantitate de mișcare**, astfel: **masa** reprezintă măsura inerției corpurilor, respectiv **cantitatea de mișcare** (impuls) reprezintă produsul dintre masa și viteza instantanee a corpurilor.

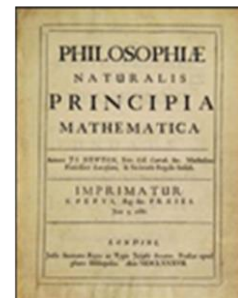


Figura 1.3.

Principiul acțiunii forței (Lex secunda): “Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia de acțiune a forței”.

Pornind de la acest enunț, Newton a stabilit legea fundamentală a mecanicii, astfel:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.3)$$

Principiul acțiunii și reacțiunii (Lex tertia): “Atunci când interacționează două corpuri, forța pe care primul corp o exercită asupra celui de-al doilea, este egală și de sens contrar cu forța pe care al doilea corp o exercită asupra primului corp”.

Principiul independenței acțiunii forțelor (superpoziției): “Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe, fiecare dintre acestea imprimă corpului o accelerație, independent de prezența celorlalte, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale:”

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i, \text{ sau } \bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (1.4)$$

1.3. Diviziunile mecanicii

Mecanica se studiază în trei părți clasice:

Statica studiază forțele ce acționează asupra unui corp sau asupra unui sistem de corpuri, facându-se abstracție de mișcare.

Cinematica studiază mișcarea corpurilor și a sistemelor de corpuri, facându-se abstracție de forțele ce acționează asupra lor.

Dinamica studiază mișcarea corpurilor și a sistemelor de corpuri sub acțiunea forțelor, luând în considerare și masele lor.

1.4. Sisteme și unități de măsură

Mărimile fizice sunt reprezentate printr-un scalar, urmat de unitatea de măsură a mărimii fizice.

În cadrul Sistemului Internațional de Unități de Măsură (S.I.) sunt definite șase unități fundamentale de măsură, astfel: **metrul [m]** pentru lungime, **kilogramul [Kg]** pentru masă, **secunda [s]** pentru timp, **amperul [A]** pentru intensitatea curentului electric, **gradul Kelvin [K]** pentru temperatura termodinamică, **candela [cd]** pentru intensitatea luminoasă.

Pentru studiul mecanicii, se utilizează trei unități de măsură fundamentale: metrul [m], kilogramul [Kg] și secunda [s].

Cu ajutorul unităților de măsură fundamentale, se pot defini unități de măsură derivate, care sunt exprimate prin relații matematice simple în funcție de unitățile fundamentale, ținând cont de relația de definiție a mărimii respective. Relația prin care se deduce unitatea derivată se numește ecuație de dimensiuni și are forma:

$$[D] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (1.5)$$

unde: D reprezintă unitatea de măsură derivată; L, M, T reprezintă mărimile fizice fundamentale (L – lungime, M – masă, T – timp); α , β , γ reprezintă

numere raționale a căror valoare se deduce din relația de definiție a unității derivate.

În tabelul 1.1 sunt prezentate câteva din unitățile de măsură derivate:

Tabelul 1.1. Unități de măsură derivate [1, pag. 10]

Mărime	Simbol	Relația de definiție	Ecuția de dimensiuni (S.I.)	Unitatea de măsură (S.I.)	Denumirea unității de măsură (S.I.)
Viteză	v	$v = \Delta l / \Delta t$	LT^{-1}	m/s	metru pe secundă
Accelerație	a	$a = \Delta v / \Delta t$	LT^{-2}	m/s^2	metru pe secundă la pătrat
Unghi plan	α, β, θ	-	-	rad	radian
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \Delta \theta / \Delta t$	T^{-1}	rad / s	radian pe secundă
Accelerație unghiulară	ε	$\varepsilon = \Delta \omega / \Delta t$	T^{-2}	rad / s^2	radian pe secundă
Forță	F	$F = ma$	LMT^{-2}	N	Newton
Lucru mecanic	L	$L = Fl \cos \alpha$	L^2MT^{-2}	J	Joule
Putere	N	$N = \Delta L / \Delta t$	L^2MT^{-3}	W	Watt
Impuls	H	$H = mv$	LMT^{-1}	Kgm/s	Kilogram metru pe secundă
Energie cinetică	E	$E = mv^2 / 2$	L^2MT^{-2}	J	Joule
Densitate	ρ	$\rho = m / V$	$L^{-3}M$	Kg / m^3	Kg / metru cub
Presiune	p	$p = F / A$	$L^{-1}MT^{-2}$	$N / m^2 = Pa$	Pascal
Momentul forței	M_O	$M_O = Fl \sin \alpha$	L^2MT^{-2}	Nm	Newton metru
Moment cinetic	K_O	$K_O = mvls \sin \alpha$	L^2MT^{-1}	Kgm^2 / s	Kilogram metru pătrat pe secundă
Moment de inerție mecanic	J	$J = \sum_i m_i l_i^2$	L^2M	Kgm^2	Kilogram metru pătrat

În tabelul 1.2 sunt prezentați multipli și submultipli unităților de măsură:

Tabelul 1.2. Multipli și submultipli unităților de măsură

Multipli	Prefix	deca	hecto	kilo	mega	giga	tera	peta	exa	zetta	yotta
	Simbol	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
	Factor	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Submultipli	Prefix	deci	centi	mili	micro	nano	pico	femto	atto	zepto	yocto
	Simbol	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
	Factor	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

II. Noțiuni de calcul vectorial

Mecanica operează cu următoarele tipuri de mărimi:

- *mărimi scalare* – care sunt complet determinate prin valoarea lor numerică (un număr pozitiv sau negativ) urmată de unitatea de măsură.

Exemple de mărimi scalare: masa, volumul, timpul, puterea, etc.

- *mărimi vectoriale* – care sunt complet determinate prin valoare numerică, direcție, sens și punct de aplicație;

Exemple de mărimi vectoriale: impulsul, forța, momentul cinetic, etc.

Vectorii reprezintă entități matematice, caracterizate prin *mărime, direcție, sens și punct de aplicație*.

Se definește **direcția** dreptei d , mulțimea formată din dreapta d și toate dreptele paralele cu d . Direcția unui segment $[AB]$, $A \neq B$ este dată de direcția dreptei AB . Segmentul $[AB]$ poate fi parcurs de la A la B (un sens de parcurgere) sau de la B la A (al doilea sens de parcurgere).

Un segment de dreaptă $[AB]$ se numește **segment orientat** sau **vector legat** și se notează \overline{AB} , A fiind originea, iar B este extremitatea. Dreapta determinată de punctele A și B se numește dreapta suport.

Vectorul \overline{AA} se numește **vector nul**.

Se definește **lungimea** sau **norma** vectorului \overline{AB} numărul real și pozitiv care reprezintă distanța $d(A,B)$ dintre punctele A și B și se simbolizează astfel: $\|\overline{AB}\|$.

Un vector liber \vec{u} , de normă 1 se numește **versor**.

Doi vectori se numesc **ortogonali** dacă direcțiile lor sunt perpendiculare.

În funcție de punctul de aplicație al vectorului, se deosebesc:

- *vectori liberi* (figura 2.1.a): a căror punct de aplicație poate fi plasat oriunde în spațiu și care sunt caracterizați prin trei parametri scalari independenți – proiecțiile vectorului pe axele sistemului de coordonate;

- *vectori alunecători* (figura 2.1.b): a căror punct de aplicație este situat pe o dreaptă din spațiu, fiind caracterizați prin cinci parametri scalari independenți – proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate, respectiv coordonatele punctului de intersecție al dreptei suport cu planul Oxy;

- *vectori legați* (figura 2.1.c): a căror punct de aplicație este fix în spațiu și care sunt caracterizați prin șase parametri scalari independenți – proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate și coordonatele punctului de aplicație;

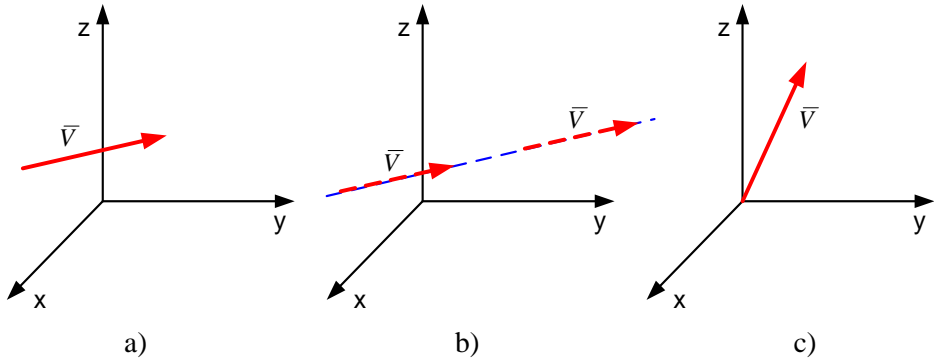


Figura 2.1. Tipuri de vectori

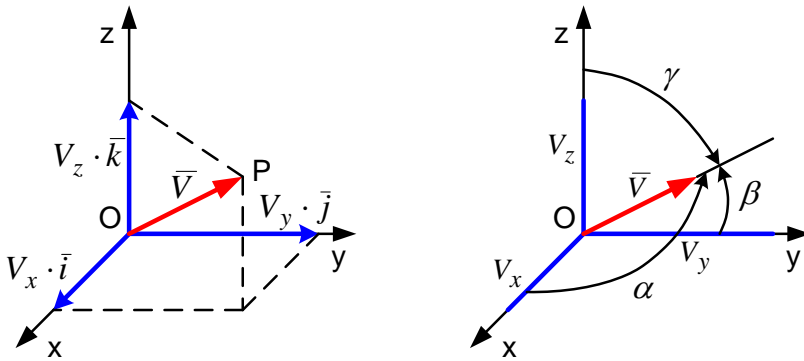


Figura 2.2. Reprezentarea vectorului \vec{V}

Se consideră un sistem cartezian de axe Oxyz (figura 2.2), cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ și un vector \vec{V} , având proiecțiile V_x, V_y, V_z pe cele trei axe.

Expresia analitică a vectorului este:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k} \quad (2.1)$$

Modulul vectorului este:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (2.2)$$

Cosinșii directori care definesc unghiurile dintre vectorul \vec{V} și direcțiile celor trei axe sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V}, \vec{i}) &= \frac{V_x}{V} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, & \cos(\vec{V}, \vec{j}) &= \frac{V_y}{V} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, \\ \cos(\vec{V}, \vec{k}) &= \frac{V_z}{V} = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i})^2 + \cos(\vec{V}, \vec{j})^2 + \cos(\vec{V}, \vec{k})^2 = 1 \quad (2.4)$$

Versorul vectorului \vec{V} este un vector cu modulul 1 (unu), de aceeași direcție și sens cu vectorul \vec{V} , expresia fiind:

$$\text{vers } \vec{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{V_x}{V} \cdot \vec{i} + \frac{V_y}{V} \cdot \vec{j} + \frac{V_z}{V} \cdot \vec{k} \quad (2.5)$$

În cazul în care vectorul este poziționat într-un plan, proiecțiile acestuia pe cele două direcții se determină cu ajutorul relațiilor (2.6) – figura 2.3.

$$\begin{aligned} V_x &= V \cdot \cos(\alpha) \\ V_y &= V \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2.6)$$

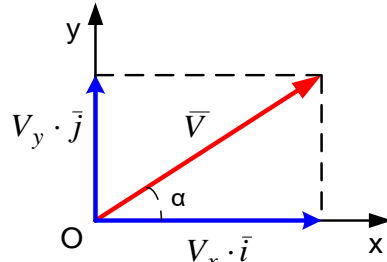


Figura 2.3

Dacă un vector este definit prin extremitățile sale, care sunt punctele $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$, expresia analitică a vectorului este:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \quad (2.7)$$

Versorul vectorului \overline{AB} fiind dat de relația:

$$\text{vers } \overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \quad (2.8)$$

Sub formă matriceală, vectorul \vec{V} se scrie astfel:

$$\vec{V} = \{V_x, V_y, V_z\}^T$$

II.1. Egalitatea a doi vectori

Doi vectori \vec{V}_1 și \vec{V}_2 care descriu mărimi fizice similare, se consideră egali când au aceeași mărime, direcție și sens (figura 2.4).

Relația de egalitate dintre vectori se scrie astfel: $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$.

De asemenea, pot fi comparați doi vectori care descriu mărimi fizice de același fel, dar care sunt definiți în puncte diferite din spațiu și la momente de timp diferite.

Dacă vectorii au aceeași mărime, direcție și sens atunci între ei este o relație de echipolență.

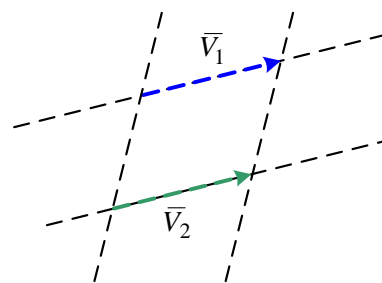


Figura 2.4

II.2. Înmulțirea unui vector cu un scalar

Se consideră un vector \vec{V} și un scalar a (figura 2.5). Vectorul rezultat prin înmulțirea vectorului \vec{V} cu scalarul a are expresia: $\vec{V}_1 = a \cdot \vec{V}$. Vectorul rezultat are aceeași direcție cu vectorul \vec{V} , același sens cu vectorul \vec{V} dacă $a > 0$, respectiv sens contrar cu \vec{V} dacă $a < 0$. Modulul vectorului \vec{V}_1 este dat de produsul $|\vec{V}_1| = |a| \cdot |\vec{V}|$.

Proprietățile înmulțirii unui vector cu un scalar:

- înmulțirea cu scalari este distributivă față de adunarea vectorilor: $\alpha(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \alpha \cdot \vec{V}_1 + \alpha \cdot \vec{V}_2$;
- înmulțirea cu scalari este distributivă față de adunarea scalarilor: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{V} = \alpha \cdot \vec{V} + \beta \cdot \vec{V}$;
- asociativitatea scalarilor: $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{V}) = (\alpha \cdot \beta) \vec{V}$;
- valoarea 1 este element neutru pentru înmulțirea cu scalari: $1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$.

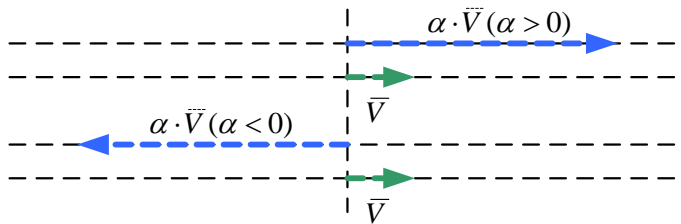


Figura 2.5

II.3. Suma (rezultanta) a doi sau mai mulți vectori

Se consideră doi vectori \vec{V}_1 , respectiv \vec{V}_2 (figura 2.6.a), vectorul descris de relația $\vec{V}_S = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ se numește vectorul sumă al vectorilor \vec{V}_1 , respectiv \vec{V}_2 .

Determinarea vectorului \vec{V}_S poate fi realizată utilizând fie metoda paralelogramului (figura 2.6.a), fie metoda triunghiului (figura 2.6.b).

Dacă se dorește adunarea a trei sau mai mulți vectori se utilizează succesiv regula triunghiului sau regula poligonului (figura 2.6.c).

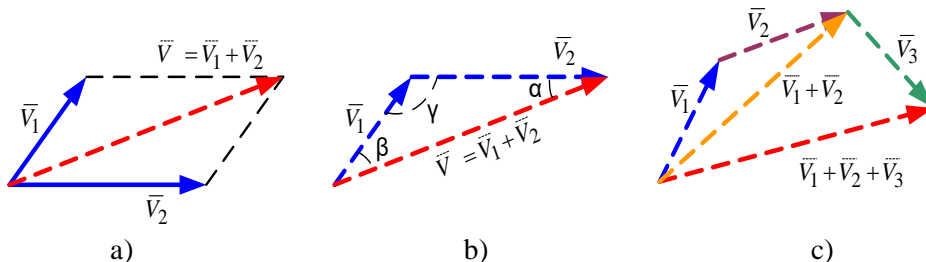


Figura 2.6. Adunarea vectorilor

Proprietățile operației de adunare a vectorilor:

- asociativitatea: $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$;
- comutativitatea: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$;
- vectorul nul $\vec{0}$ este element neutru pentru adunare;
- pentru orice vector \vec{V} există un vector $-\vec{V}$ pentru care:

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = (-\vec{V}) + \vec{V} = \vec{0};$$

Valoarea numerică a sumei a doi vectori este:

$$V_S^2 = V_1^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha + V_2^2 \quad (2.9)$$

Din figura 2.6.a se deduce că: “două forțe aplicate în același punct al unui rigid au o rezultantă aplicată în același punct și reprezentată prin diagonala paralelogramului care are ca laturi forțele”.

De asemenea, din figura 2.6.b, respectiv 2.6.c se deduce că vectorul rezultant se poate obține și pe cale grafică.

Analizând figura 2.6.b și aplicând teorema sinusurilor pot fi determinate relații de legătură între module și unghiuri, astfel:

$$\frac{V_1}{\sin\alpha} = \frac{V_2}{\sin\beta} = \frac{V}{\sin\gamma} \quad (2.10)$$

II.4. Produsul scalar

Produsul scalar a doi vectori:

$$\vec{V}_1(V_{1x} \cdot \vec{i} + V_{1y} \cdot \vec{j} + V_{1z} \cdot \vec{k})$$

respectiv:

$$\vec{V}_2(V_{2x} \cdot \vec{i} + V_{2y} \cdot \vec{j} + V_{2z} \cdot \vec{k})$$

este definit de relația:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos\varphi \quad (2.11)$$

unde φ reprezintă unghiul dintre cei doi vectori (figura 2.7).

Rezultatul acestui produs este o mărime scalară, interpretarea geometrică fiind aceea că produsul scalar a doi vectori reprezintă produsul dintre mărimea unui vector și proiecția celuilalt pe direcția primului vector.

Expresia analitică a produsului scalar este:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z} \quad (2.12)$$

Unghiul format de cei doi vectori este dat de relația:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z}}{\sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2} \cdot \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2}} \quad (2.13)$$

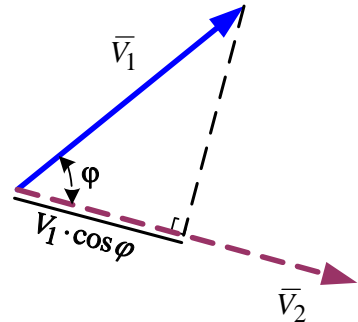


Figura 2.7

Proprietățile produsului scalar:

- comutativitatea: $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$;
- distributivitatea față de adunare: $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$;
- $\alpha \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\alpha \cdot \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (\alpha \cdot \vec{V}_2)$;
- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = |\vec{V}_1|^2$;

Observație: Doi vectori $\vec{V}_1(V_{1x} \cdot \vec{i} + V_{1y} \cdot \vec{j} + V_{1z} \cdot \vec{k})$, respectiv $\vec{V}_2(V_{2x} \cdot \vec{i} + V_{2y} \cdot \vec{j} + V_{2z} \cdot \vec{k})$, sunt ortogonali dacă $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$, adică $V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z} = 0$.

II.5. Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{V}_1(V_{1x} \cdot \vec{i} + V_{1y} \cdot \vec{j} + V_{1z} \cdot \vec{k})$, respectiv $\vec{V}_2(V_{2x} \cdot \vec{i} + V_{2y} \cdot \vec{j} + V_{2z} \cdot \vec{k})$, reprezintă un vector, notat $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, care are:

- mărimea definită de relația: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \sin\varphi$, unde φ reprezintă unghiul dintre cei doi vectori;
- direcția perpendiculară pe planul celor doi vectori;
- sensul stabilit cu regula șurubului sau regula mâinii drepte;
- originea în punctul de intersecție al celor doi vectori;

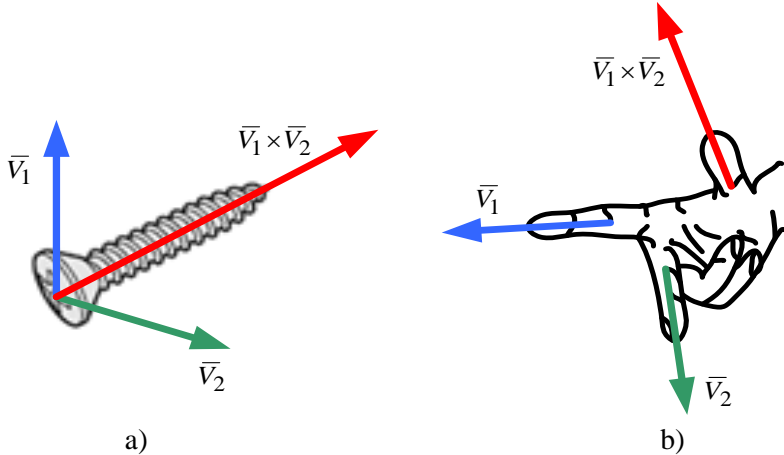


Figura 2.8. Regula șurubului drept (a) și a mâinii drepte (b)

Expresia produsului vectorial se obține cu ajutorul relației:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix} = (V_{1y} \cdot V_{2z} - V_{1z} \cdot V_{2y}) \cdot \vec{i} + (V_{1z} \cdot V_{2x} - V_{1x} \cdot V_{2z}) \cdot \vec{j} + (V_{1x} \cdot V_{2y} - V_{1y} \cdot V_{2x}) \cdot \vec{k} \quad (2.14)$$

Interpretarea geometrică a produsului vectorial este următoarea: *mărima produsului vectorial reprezintă aria paralelogramului a căror laturi sunt cei doi vectori.*

Proprietățile produsului vectorial:

- anticomutativitatea: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)$;
- distributivitate față de adunare: $\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$;
- $\alpha \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = (\alpha \cdot \vec{V}_1) \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times (\alpha \cdot \vec{V}_2)$;
- $\vec{V}_1 \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{V}_1 = \vec{0}$;
- $\vec{V}_1 \times \vec{V}_1 = \vec{0}$

Observație: Doi vectori $\vec{V}_1(V_{1x} \cdot \vec{i} + V_{1y} \cdot \vec{j} + V_{1z} \cdot \vec{k})$, respectiv $\vec{V}_2(V_{2x} \cdot \vec{i} + V_{2y} \cdot \vec{j} + V_{2z} \cdot \vec{k})$, sunt coliniari dacă $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{0}$.

II.6. Produsul mixt al trei vectori

Se consideră trei vectori:

$$\vec{V}_1(V_{1x} \cdot \vec{i} + V_{1y} \cdot \vec{j} + V_{1z} \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{V}_2(V_{2x} \cdot \vec{i} + V_{2y} \cdot \vec{j} + V_{2z} \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{V}_3(V_{3x} \cdot \vec{i} + V_{3y} \cdot \vec{j} + V_{3z} \cdot \vec{k})$$

Produsul mixt al celor trei vectori este un scalar și este dat de relația:

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Proprietăți:

- invarianță la permutări circulare: $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)$;
- $|(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)|$ reprezintă volumul paralelipipedului care are ca laturi vectorii $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$;
- $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = 0$ dacă cei trei vectori sunt coplanari;

II.7. Dublul produs vectorial

Dublul produs vectorial a trei vectori se notează $\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$ și este o mărime vectorială care are direcția normală la planul celor doi vectori din paranteză și are expresia:

$$\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3, \quad (2.16)$$

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \times \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3) \quad (2.17)$$

II.8. Operatorul gradient

Gradientul unei funcții scalare $f(x)$ în raport cu o variabilă vectorială $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se notează cu ∇f unde ∇ este vectorul operator diferențial **nabla**. Gradientul este un câmp vectorial ale cărui componente sunt derivatele parțiale ale lui f , astfel:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \right) \quad (2.18)$$

II.9. Operatorii Δ, d

Operatorul Δ exprimă o mărime aproximativă, care caracterizează o mărime fundamentală finită, foarte mică dar care poate fi cuantificată prin măsurare.

Operatorul d este un operator diferențial și exprimă o mărime care există dar care nu poate fi cuantificată prin măsurare.

II.10. Probleme rezolvate

Problema nr. 2.1: Să se reprezinte grafic, într-un sistem de coordonate cartezian, vectorul: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}$.

R: Se desenează un sistem de coordonate cartezian. Se stabilește un coeficient de scară al desenului (de exemplu: 10 unități = 1 cm).

Pe axa Ox se marchează 25 unități = 2,5 cm, pe axa Oy se marchează -20 de unități, adică se marchează 2,0 cm în sensul negativ al axei, iar pe axa Oz se marchează 20 de unități = 2,0 cm, în sensul pozitiv al axei (figura 2.9.a).

Se trasează componentele V_x, V_y, V_z ale vectorului (figura 2.9.b).

Prin punctele marcate pe fiecare axă se trasează linii paralele cu celelalte axe, obținându-se astfel un paralelipiped (desenat cu linie întreruptă).

Vectorul \vec{V} se obține unind originea sistemului de coordonate $O(0,0,0)$ cu vârful diagonal opus de coordonate $P(V_x, V_y, V_z)$ – figura 2.9.c.

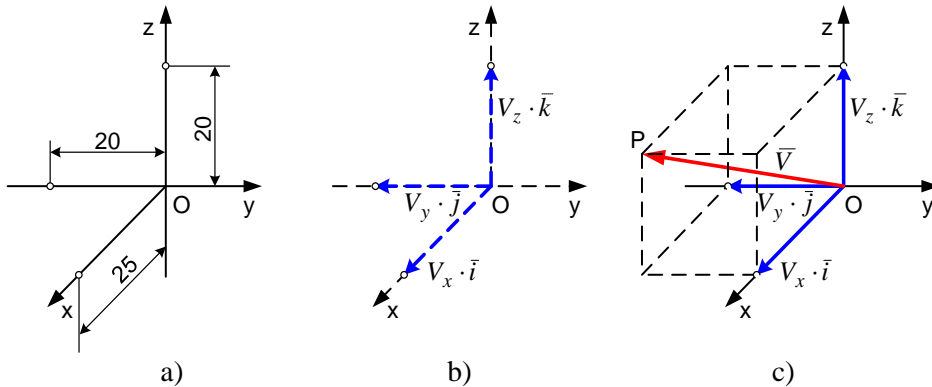


Figura 2.9. Reprezentarea grafică a vectorului $\vec{V}(25, -20, 20)$

Problema nr. 2.2: Se consideră următorii vectori: $\vec{a} = 6 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 5 \cdot \vec{j} - \vec{k}$. Să se calculeze: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, unghiul dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

R: Pentru calculul produsului scalar se utilizează relația:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

adică: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 12 - 3 = 9$

Pentru calculul unghiului dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} se utilizează relația:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

adică:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{9}{7,81 \cdot 2,23} = 0,516,$$

$$\varphi = \arccos(0,516) = 58,88^\circ.$$

Produsul vectorial se obține din relația:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

adică:

$$\vec{a} \times \vec{b} = ((-3) \cdot 0 - 4 \cdot 1) \cdot \vec{i} + (4 \cdot 2 - 6 \cdot 0) \cdot \vec{j} + (6 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) \cdot \vec{k}$$

$$= -4 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k}$$

Produsul mixt al celor trei vectori este dat de relația:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 40 + 0 - 0 - 0 - 6 = 28$$

Problema nr. 2.3: Se consideră două puncte A(2, 3), respectiv B(-4, 6). Se cere să se determine expresia analitică a vectorului \overline{AB} , precum și unghiul α (grade) pe care-l face unghiul cu axa Ox.

R: Un vector definit prin extremitățile sale, care sunt punctele A(x_A, y_A, z_A) și B(x_B, y_B, z_B), are expresia analitică:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}$$

adică:

$$\overline{AB} = ((-4) - 2)\bar{i} + (6 - 3)\bar{j} + (0 - 0)\bar{k} = -6 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$$

Unghiul α se determină din relația:

$$\alpha = \pi - \arctg\left(\frac{\overline{AB}_y}{\overline{AB}_x}\right) = \pi - \arctg\frac{3}{-6} = 180^\circ - 26,56^\circ = 153,44^\circ$$

Problema nr. 2.4: Se consideră doi vectori în plan A și B (figura 2.10). Se cere să se determine vectorul $\overline{R} = \overline{A} + \overline{B}$ analitic și grafic, utilizând regula triunghiului. Valori numerice: $[\overline{A}] = 30$, $\alpha = 25^\circ$, $[\overline{B}] = 45$, $\beta = 40^\circ$.

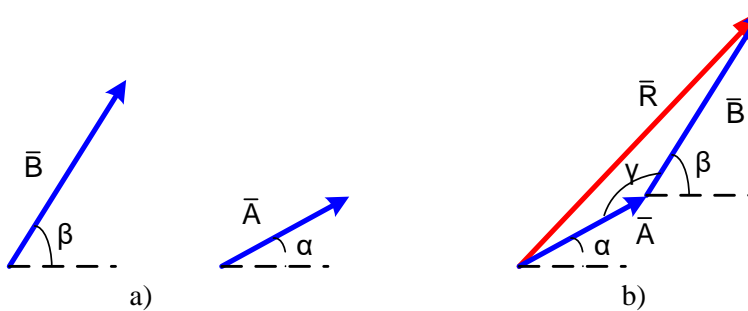


Figura 2.10.

R: Pentru rezolvarea pe cale analitică se utilizează relația:

$$R^2 = [\overline{A}]^2 + [\overline{B}]^2 - 2 \cdot [\overline{A}] \cdot [\overline{B}] \cdot \cos(\gamma)$$

adică:

$$R^2 = 30^2 + 45^2 - 2 \cdot 30 \cdot 45 \cdot \cos(165) = 74,38$$

Grafic se procedează ca în figura 2.10.b.

Problema nr. 2.5: O forță P = 10 kN este aplicată pe direcție verticală asupra unui cadru, așa cum este ilustrat în figura 2.11. Determinați forțele care acționează în barele AB și AC.

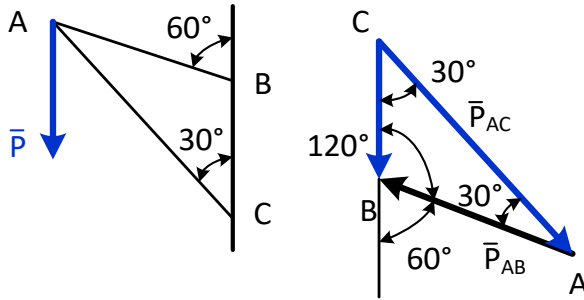


Figura 2.11

R: Pentru rezolvare se aplică teorema sinusului, astfel:

$$\frac{P}{\sin(30^\circ)} = \frac{P_{AB}}{\sin(30^\circ)} = \frac{P_{AC}}{\sin(120^\circ)}$$

de unde rezultă că: $P_{AB} = 10 \text{ kN}$, respectiv $P_{AC} = 17,32 \text{ kN}$

Problema nr. 2.6: O forță F ($F = 300 \text{ N}$) tensionează un cablu prins cu un șurub cu ochi (figura 2.12). Se cere să se determine componentele rectangulare a acestei forțe.

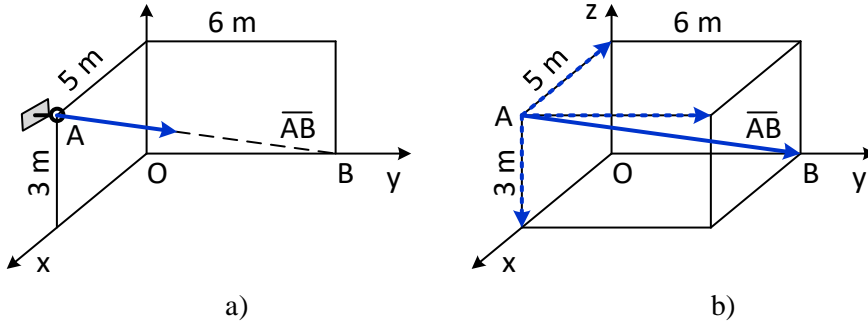


Figura 2.12.

R: Expresia vectorului \overline{AB} este următoarea:

$$\overline{AB} = -5 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j} - 3 \cdot \bar{k}$$

Versorul direcției AB este dat de relația:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{-5 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j} - 3 \cdot \bar{k}}{\sqrt{(-5)^2 + (6)^2 + (-3)^2}} = \\ &= -0,59765 \cdot \bar{i} + 0,71788 \cdot \bar{j} - 0,35859 \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

Expresia vectorială a forței F este dată de relația:

$$\vec{F} = F \cdot \bar{u} = -179,295 \cdot \bar{i} + 215,364 \cdot \bar{j} - 107,577 \cdot \bar{k}$$

III. Reducerea forțelor

III.1. Noțiunea de forță

III.1.1. Introducere

Forța reprezintă mărimea prin care se măsoară interacțiunea mecanică dintre corpuri.

Atunci când un corp, asupra căruia nu acționează niciun fel de forțe, se află într-o mișcare liniară și uniformă, mișcarea acestuia este evidențiată d.p.d.v. cinematic printr-o mărime vectorială, numită **viteză** (considerată constantă). Fenomenul de interacțiune mecanică, conduce la o variație a mișcării mecanice, reprezentată prin **acelerație** (care este o mărime vectorială).

Conform principiului al doilea al mecanicii (Newton), $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, rezultând astfel că și forța este o mărime vectorială, caracterizată prin: modul (mărime), direcție, sens și punct de aplicație.

Tipurile de forțe pe care le putem întâlni în mecanică sunt:

- forțe exterioare: sunt exercitate de corpuri din afara sistemului considerat;
- forțe interioare: sunt forțe de interacțiune dintre corpurile sistemului considerat;
- forțe direct aplicate: un exemplu ar fi greutatea;
- forțe de legătură: sunt datorate restricțiilor geometrice impuse sistemului;

Așa cum s-a arătat în subcapitolul I.4, unitatea de măsură a forței în S.I. este **Newton**-ul [N]. În tehnică se mai întâlnește și unitatea de măsură **kilogram forță** [Kgf], relația dintre cele două unități de măsură fiind: $1 \text{ Kgf} = 9,81 \text{ N}$.

În figura 3.1 este ilustrată o forță oarecare \vec{F} , ale cărei proiecții pe axele sistemului de coordonate sunt: F_x, F_y, F_z .

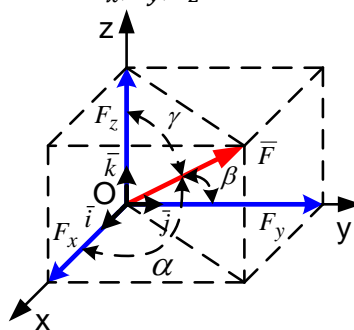


Figura 3.1. Forță oarecare reprezentată în sistem de coordonate ortogonal

Ecuția vectorială a forței este:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \quad (3.1)$$

ecuație care este echivalentă cu următoarea ecuație în formă matriceală:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (F_x \quad F_y \quad F_z)^T \quad (3.2)$$

Modulul forței este dat de relația:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (3.3)$$

Orientarea oricărui vector este dată de versorul acestuia, astfel că în cazul forței, expresia versorului forței este dată de relația:

$$\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{F_x}{F} \cdot \vec{i} + \frac{F_y}{F} \cdot \vec{j} + \frac{F_z}{F} \cdot \vec{k} \quad (3.4)$$

Valorile cosinusurilor directe ale unghiurilor pe care forța le formează cu axele sistemului de coordonate se obțin cu ajutorul relațiilor:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (3.5)$$

Între cosinusurile directe există relația:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (3.6)$$

III.1.2. Caracterul vectorial al forței

În figura 3.2 este ilustrată o forță care acționează asupra unui punct material A. În acest caz, forța are un caracter de **vector legat**.

În figura 3.3 este ilustrată o forță care acționează asupra unui corp rigid oarecare. Experimental se constată că, oriunde s-ar afla punctul de aplicație de-a lungul suportului de acțiune Δ , efectul este același. În acest caz, forța are caracter de **vector alunecător**.

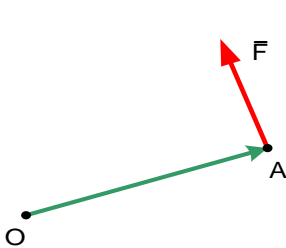


Figura 3.2

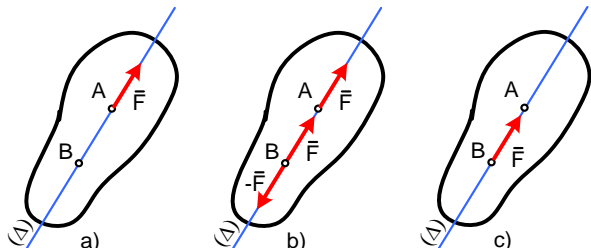


Figura 3.3

III.2. Momentul polar al forței

O forță ce acționează asupra unui corp poate avea asupra acestuia următoarele efecte: **static** (de deformare a corpului), respectiv **dinamic** (care poate fi de translație sau de rotație).

Se consideră o forță reprezentată printr-un vector \vec{F} , al cărui punct de aplicație A este situat pe axa suport (Δ) și este definit prin vectorul de poziție \vec{r}_A în raport cu polul O, ales arbitrar și considerat fix (figura 3.4).

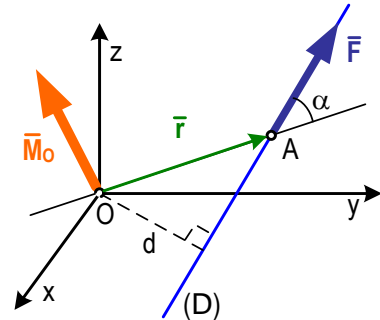


Figura 3.4.

Momentul polar al forței \vec{F} în raport cu un pol O ales arbitrar, este un vector \vec{M}_O definit de produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței \vec{r}_A și forța \vec{F} , astfel:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} \quad (3.7)$$

Momentul polar al forței reprezintă mărimea vectorială care măsoară efectul de rotație pe care îl poate avea acțiunea forței de a roti rigidul în jurul unei drepte perpendiculare în polul O pe planul definit de vectorii \vec{r}_A și \vec{F} .

Momentul polar este un vector legat, cu originea în punctul O, având suportul de-a lungul unei drepte perpendiculare în punctul O la planul definit de vectorii \vec{r}_A și \vec{F} . Vectorul moment polar este astfel orientat încât vectorii \vec{r}_A , \vec{F} și \vec{M}_O să formeze un triedru drept orientat.

Modulul vectorului moment polar este egal cu aria paralelogramului format de vectorii \vec{r}_A și \vec{F} , astfel:

$$M_O = r_A \cdot F \cdot \sin\alpha \quad \text{sau} \\ M_O = F \cdot d \quad (3.8)$$

unde d reprezintă distanța de la polul O la suportul forței (figura 3.4).

În S.I. unitatea de măsură a momentului este $[N \cdot m]$.

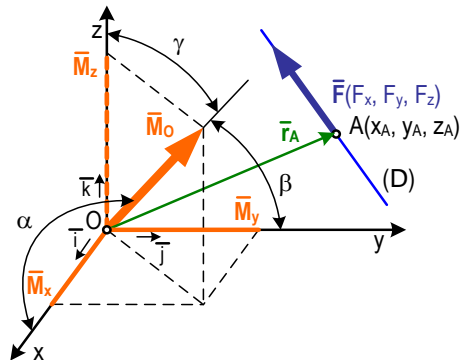


Figura 3.5.

Observație: momentul polar este nul dacă $F = 0$ sau dacă $d = 0$, adică dacă suportul forței trece prin polul O.

Cunoscând proiecțiile F_x , F_y , F_z ale forței, precum și coordonatele x_A , y_A , z_A ale punctului A de aplicație al forței în raport cu axele unui sistem de

coordonate, se pot determina proiecțiile M_x, M_y, M_z ale vectorului moment polar în raport cu același sistem de coordonate, astfel:

$$\vec{M}_O = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k} \quad (3.9)$$

Pe baza acestor proiecții, **numite momente axiale**, pot fi determinate modulul și orientarea momentului polar \vec{M}_O .

Cunoscând expresiile analitice ale vectorilor \vec{r}_A și \vec{F} :

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}, \quad \vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k};$$

și expresia analitică a produsului vectorial, astfel:

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

rezultă expresiile componentelor momentului polar, astfel:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y \\ z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z \\ x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} M_x = y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y \\ M_y = z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z \\ M_z = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x \end{cases} \quad (3.11)$$

Modulul vectorului moment polar se calculează cu relația:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (3.12)$$

Unghiurile α, β și γ dintre dreapta suport și axele sistemului de coordonate (figura 3.5) se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_O}, \cos \beta = \frac{M_y}{M_O}, \cos \gamma = \frac{M_z}{M_O} \quad (3.13)$$

Problema nr. 3.1: Se consideră manivela din figura 3.6, asupra căreia acționează o forță $F = 100$ N. Ținând cont de dimensiunile geometrice ale manivelei (în mm), se cere să se determine momentul forței F , în raport cu punctul O .

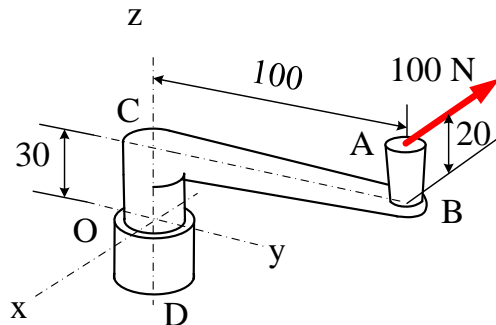


Figura 3.6.

R: Problema poate fi rezolvată în două moduri.

I. Se determină componentele forței \mathbf{F} pe axele sistemului de coordonate, astfel:

$$\bar{\mathbf{F}} = -100 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} [N]$$

Respectiv, coordonatele punctului A (punctul de aplicație al forței), în raport cu punctul O:

$$\bar{\mathbf{r}}_A = 0 \cdot \bar{i} + 0,100 \cdot \bar{j} + 0,050 \cdot \bar{k} [m]$$

Așa cum s-a arătat anterior, momentul forței F în raport cu punctul O se determină cu ajutorul relației:

$$\bar{\mathbf{M}}_O = \bar{\mathbf{r}}_A \times \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix},$$

în care după înlocuiri se obține:

$$\bar{\mathbf{M}}_O = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0,100 & 0,050 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-100 \cdot 0,050) \cdot \bar{j} - (-100 \cdot 0,100) \cdot \bar{k} \\ = -5 \cdot \bar{j} + 10 \cdot \bar{k}$$

Modulul momentului este:

$$M = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2} = 11,180339 N \cdot m$$

II. A doua variantă constă în utilizarea relației (3.8), adică a definiției potrivit căreia momentul unei forțe este egal cu produsul dintre modulul forței și brațul acesteia.

Brațul forței reprezintă ipotenuza triunghiului dreptunghic al cărui catete au valorile: 0,100 m, respectiv 0,050 (= 0,020 + 0,030) m;

Valoarea ipotenuzei este:

$$d = \sqrt{(0,100)^2 + (0,05)^2} = 0,11180339 m$$

Momentul devine:

$$M = F \cdot d = 100 \cdot 0,11180339 = 11,180339 N \cdot m$$

Se observă că valorile obținute sunt identice.

III.2.1. Variația momentului polar la schimbarea polului

Se consideră o forță \vec{F} , având punctul de aplicație A , aflat pe dreapta suport (D) , momentul forței în raport cu un pol O fiind \vec{M}_O (figura 3.7).

Determinarea momentului forței \vec{F} la schimbarea polului din O în O_1 , se realizează pornind de la expresia momentului polar în raport cu polul O_1 :

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}_1 \times \vec{F} = (\vec{r}_A + \vec{O_1O}) \times \vec{F} \quad (3.14)$$

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{O_1O} \times \vec{F}$$

dar: $\vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{M}_O$, deci:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{O_1O} \times \vec{F} \quad (3.15)$$

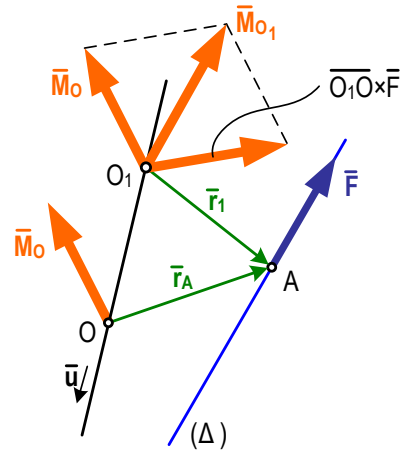


Figura 3.7.

Relația (3.15) reprezintă **legea de variație a momentului polar la schimbarea polului**: *momentul polar în raport cu un pol nou O_1 este egal cu suma dintre momentul polar în raport cu vechiul pol și produsul vectorial $\vec{O_1O} \times \vec{F}$ care poate fi considerat ca moment al forței \vec{F} aplicată în polul O , în raport cu același pol O_1 .*

Observații:

1) Pentru ca momentul polar să fie invariant la schimbarea polului, trebuie ca termenul $\vec{O_1O} \times \vec{F} = 0$. Dar \vec{n}_i și $\vec{F} \neq 0$, ceea ce înseamnă că produsul se anulează dacă $\vec{O_1O} = \lambda \cdot \vec{F}$, adică dacă **schimbarea polului se realizează pe direcția forței**.

2) Dacă se înmulțește scalar relația (3.15) cu versorul \vec{u} al dreptei $\vec{O_1O}$ se obține:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} + (\vec{O_1O} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} \quad (3.16)$$

în care termenul $(\vec{O_1O} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$ deoarece vectorii $\vec{O_1O}$ și \vec{u} sunt coliniari, rezultă:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = ct \quad (3.17)$$

expresie care reprezintă **teorema proiecției momentelor**: *proiecțiile momentelor polare \vec{M}_O și \vec{M}_{O_1} ale forței \vec{F} în raport cu punctele O și O_1 , pe dreapta $\vec{O_1O}$ sunt constante.*

III.2.2. Variația momentului polar la schimbarea punctului de aplicație al forței

Se consideră o forță \vec{F} al cărei punct de aplicație A se află pe dreapta suport (Δ) , momentul forței în raport cu un pol O fiind \vec{M}_O (figura 3.8).

Dacă se modifică punctul de aplicație al forței \vec{F} din punctul A în punctul A_1 , polul O rămânând neschimbat, momentul polar al forței \vec{F} aplicată în A_1 în raport cu polul O este dat de relația:

$$\vec{M}'_O = \vec{r}_{A_1} \times \vec{F} = (\vec{r}_A + \vec{AA}_1) \times \vec{F} \quad (3.18)$$

$$\vec{M}'_O = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{AA}_1 \times \vec{F}$$

dar: $\vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{M}_O$, deci rezultă că:

$$\vec{M}'_O = \vec{M}_O + \vec{AA}_1 \times \vec{F} \quad (3.19)$$

relație care reprezintă **legea de variație a momentului polar la schimbarea punctului de aplicație**: momentul polar al forței \vec{F} în raport cu un pol O neschimbat este egal cu suma dintre momentul polar al forței aplicate în punctul A în raport cu polul O și produsul $\vec{AA}_1 \times \vec{F}$ care reprezintă momentul polar al forței \vec{F} aplicată în punctul A_1 în raport cu polul A .

Observație : dacă modificarea punctului de aplicație are loc pe direcția forței, adică forța alunecă pe suportul său, rezultă că momentul polar este un invariant deoarece termenul $\vec{AA}_1 \times \vec{F} = 0$.

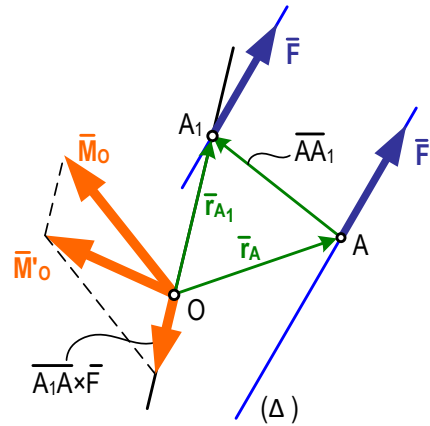


Figura 3.8.

III.3. Momentul axial al forței

Se consideră o forță \vec{F} al cărei punct de aplicație este A, momentul forței în raport cu un pol O fiind M_O (figura 3.9).

Momentul axial al forței \vec{F} în raport cu axa (Δ) , de versor \vec{u} , exprimă capacitatea forței de a roti rigidul în jurul axei și reprezintă proiecția pe axă a momentului polar al forței \vec{F} calculat în raport cu polul O situat pe axa (Δ) .

Pe baza notațiilor din figură se poate scrie:

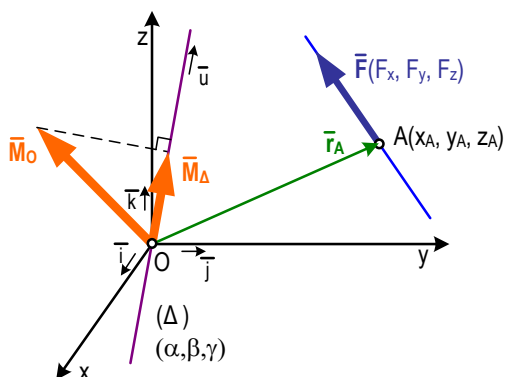


Figura 3.9.

$$M_{\Delta} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{r}_A, \vec{F}, \vec{u}) = M_O \cdot \cos \delta \quad (3.20)$$

Observații : momentul axial este un invariant față de schimbarea polului pe axă, respectiv față de operația de alunecare a vectorului forță de-a lungul suportului său.

Se consideră un sistem de coordonate Oxyz, cu originea în punctul O. Cunoscând componentele forței proiectate pe axele sistemului de coordonate F_x, F_y, F_z respectiv coordonatele x_A, y_A, z_A ale punctului de aplicație a forței, precum și valorile unghiurilor directoare α, β, γ ale dreptei (Δ) în raport cu sistemul de referință considerat, sunt valabile următoarele relații:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}; \quad \vec{r}_A = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}; \quad \vec{u} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}$$

Momentul axial M_{Δ} se obține prin dezvoltarea analitică a produsului mixt:

$$M_{\Delta} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \alpha \cdot (y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y) + \beta \cdot (z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z) + \gamma \cdot (x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x) \quad (3.21)$$

III.4. Cuplu de forțe. Momentul unui cuplu

În figura 3.10 sunt ilustrate două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ egale în modul, de sensuri contrare și care au suporturile diferite și paralele. Acestea formează un **cuplu de forțe**. Distanța d dintre dreptele suport reprezintă **brațul** cuplului, iar planul (P) care conține cele două drepte suport reprezintă **planul de acțiune** al cuplului de forțe.

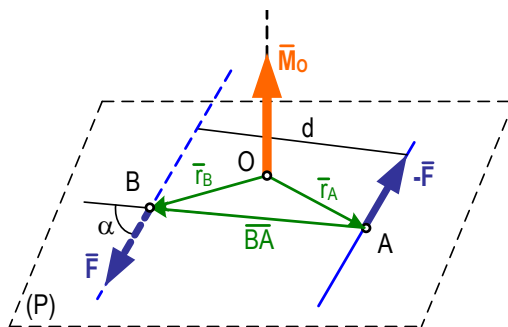


Figura 3.10

Mărimea fizică ce descrie acțiunea unui cuplu de forțe, se numește **momentul cuplului**, iar valoarea acestuia în raport cu un pol oarecare O se determină pornind de la expresia momentului polar:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \quad (3.22)$$

Dar: $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{BA}$ (figura 3.10), rezultă:

$$\vec{M}_O = \vec{BA} \times \vec{F} \quad (3.23)$$

Momentul cuplului de forțe are caracter de vector liber și este invariant la schimbarea polului. De asemenea, are direcția normală la planul cuplului (P), sensul fiind cel de înaintare al unui burghiu drept care se rotește în sensul indicat de cuplu de forțe. Modulul este dat de relația:

$$M_O = BA \cdot F \cdot \sin \alpha, \quad \text{sau} \quad M_O = F \cdot d \quad (3.24)$$

Problema nr. 3.2: Să se determine momentul cuplului de forțe din figura alăturată [9] în raport cu punctul O și cu punctul A (figura 3.11).

R: În raport cu punctul O, momentul cuplului de forțe se scrie:

$$M_O = 180 \cdot (480 + 120) = 108 \text{ N} \cdot \text{m}$$

În raport cu punctul A, momentul cuplului de forțe se scrie:

$$M_O = 180 \cdot (240 + 360) = 108 \text{ N} \cdot \text{m}$$

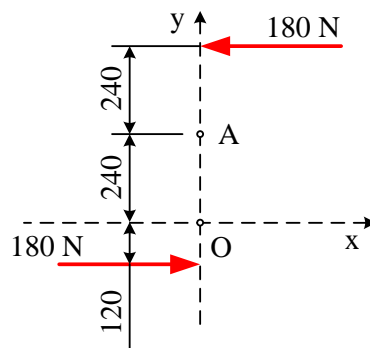


Figura 3.11

Observație: cele două momente sunt egale, ceea ce demonstrează relația (3.24), conform căreia momentul cuplului este egal cu produsul dintre

modulul forței și brațul cuplului. Indiferent de punctul ales, de pe brațul cuplului, momentul cuplului va fi același.

III.5. Operații elementare de echivalență

Operațiile aplicate sistemelor de forțe care nu modifică efectul lor mecanic asupra corpurilor se numesc *operații elementare de echivalență*.

Acestea sunt:

1. Deplasarea punctului de aplicație al forței pe suportul ei;
2. Introducerea sau suprimarea a două forțe egale având același suport și sensuri opuse;
3. Înlocuirea a două forțe concurente prin rezultanta lor, conform regulii paralelogramului;
4. Descompunerea unei forțe după două direcții concurente și coplanare cu suportul forței în același punct, după regula paralelogramului;
5. Înlocuirea unui cuplu de forțe cu momentul cuplului;

III.6. Reducerea forțelor

Așa cum s-a arătat anterior, o forță aplicată unui corp poate avea asupra corpului pe lângă efecte statice (de deformare) și efecte dinamice, care pot fi de translație și/sau de rotație.

În figura 3.12 este ilustrat un corp asupra căruia acționează o singură forță \vec{F} al cărei punct de aplicație este A și care își are suportul de-a lungul axei (Δ) .

Reducerea acestei forțe într-un punct oarecare O, ales arbitrar în afara axei (Δ) , înseamnă a înlocui forța cu elemente mecanice al căror punct de aplicație este punctul O și care produc același efect ca și forța dată \vec{F} .

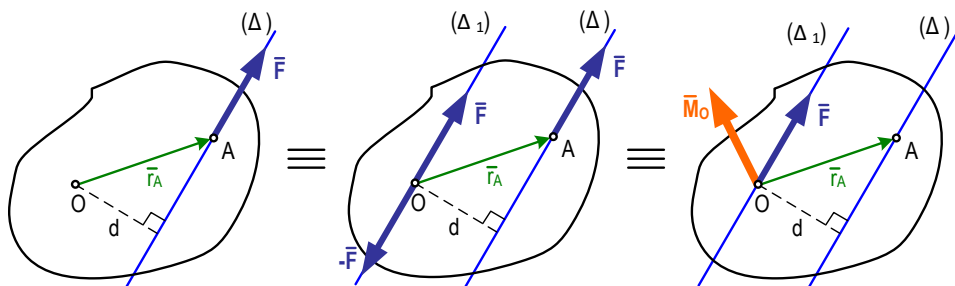


Figura 3.12.

Așa cum s-a arătat în subcapitolul III.5, pot fi aplicate o serie de operații elementare de echivalență care nu modifică efectul forței asupra

corpului. Astfel, în punctul O se introduc două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$, având suportul (Δ_1) , paralel cu (Δ) , având modulul egal cu cel al forței \vec{F} aplicate în A.

Se observă că forța dată \vec{F} de pe dreapta suport (Δ) și forța $-\vec{F}$ de pe dreapta suport (Δ_1) formează un cuplu de forțe mecanic, echivalent cu momentul cuplului:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.25)$$

Astfel, se observă că forța dată \vec{F} se reduce în raport cu polul O la două elemente vectoriale:

- o forță \vec{F} al cărui suport este dreapta (Δ_1) , punctul de aplicație în O, egală, paralelă și de același sens cu forța dată;
- un moment \vec{M}_O care reprezintă momentul forței date \vec{F} în raport cu polul O;

Sistemul mecanic astfel obținut, echivalent cu forța dată, format din vectorii \vec{F} și \vec{M}_O , al căror punct de aplicație este polul O, se numește **torsor de reducere** al forței \vec{F} în raport cu polul O și se notează simbolic:

$$\vec{\tau}_0 = (\vec{F}, \vec{M}_O) \quad (3.26)$$

Aceeași metodă poate fi aplicată și în cazul unui sistem de "n" forțe oarecare care acționează asupra unui solid rigid, obținându-se un sistem mecanic echivalent cu sistemul de forțe dat, format din "2n" vectori concurenți având punctul de aplicație în O, astfel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n \\ \vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n \end{array} \right.$$

Prin însumarea elementelor celor două sisteme de "n" vectori concurenți, rezultă un vector rezultat și un vector moment rezultat al sistemului de forțe, astfel :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \quad (3.27)$$

Sistemul mecanic format din vectorii \vec{R} și \vec{M}_O al căror punct de aplicație este în polul O, este echivalent cu sistemul de forțe dat și reprezintă **torsorul de reducere al sistemului de forțe** în raport cu polul O:

$$\vec{\tau}_0 = (\vec{R}, \vec{M}_O) \quad (3.28)$$

Expresiile analitice ale celor doi vectori care formează torsorul de reducere se obțin pornind de la expresiile vectoriale ale acestora, astfel :

- pentru vectorul forță rezultantă : $\vec{R} = R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k}$,

Pe baza teoremei proiecțiilor, componentele vectorului rezultat sunt:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (3.29)$$

Modulul vectorului forță rezultantă este dat de relația :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (3.30)$$

Unghiurile α, β, γ , formate de suportul rezultantei cu axele sistemului de referință sunt date de relațiile:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}; \quad (3.31)$$

- pentru vectorul moment rezultat : $\bar{M}_O = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$

Componentele vectorului moment rezultat se obțin prin dezvoltarea analitică a produsului vectorial $\sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$ și prin identificarea coeficienților versorilor, astfel:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}); \quad M_y = \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}); \quad (3.32)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

Modulul vectorului moment rezultat este dat de relația :

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (3.33)$$

Unghiurile $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ dintre suportul vectorului moment rezultat și axele sistemului de referință sunt:

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos \beta_1 = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_z}{M_O} \quad (3.34)$$

Proprietățile torsorului de reducere :

- vectorul rezultat \bar{R} este un invariant în raport cu polul de reducere ;
- momentul rezultat \bar{M}_O variază la schimbarea polului după legea de variație a momentului polar: $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1 O} \times \bar{R}$;
- produsul scalar între \bar{R} și \bar{M}_O este o mărime constantă numită **trinom invariant** sau **scalarul** sistemului de forțe dat ;
- dacă torsorul de reducere în raport cu un punct este nul, atunci el este nul în raport cu oricare alt punct de reducere ;
- dacă vectorul rezultat este nul, atunci vectorul moment rezultat este invariant în raport cu polul de reducere (dacă $\bar{R} = 0$, atunci $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O$).

Problema nr. 3.3: Determinați sistemul mecanic echivalent, în raport cu punctul A, al sistemului de forțe și momente din figura 3.13 [9].

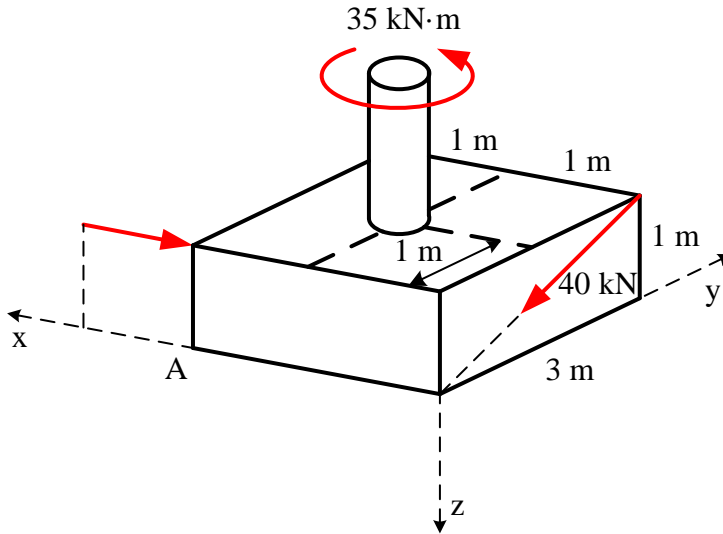


Figura 3.13

R : Conform relațiilor (3.29) se poate scrie :

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = -20 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = -40 \text{ kN} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -37,97 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 40 \text{ kN} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 12,65 \text{ kN}$$

Expresia vectorială a rezultantei este :

$$\vec{R} = -20 \cdot \vec{i} - 37,97 \cdot \vec{j} + 12,65 \cdot \vec{k} \text{ N}$$

Pentru determinarea momentului rezultant se utilizează relațiile (3.32), astfel:

$$M_x = 0$$

$$M_y = 20 \cdot (1) + 40 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (2) = 45,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 40 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot (2) - 35 = 40,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Expresia vectorială a momentului rezultant este:

$$\vec{M} = 45,30 \cdot \vec{j} + 40,90 \cdot \vec{k} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

III.7. Torsor minimal. Axă centrală

În figura 3.14 se consideră un solid rigid, asupra căruia acționează un sistem de n forțe având ca torsor de reducere, în raport cu un pol de reducere O , care este originea unui sistem de coordonate $Oxyz$, doi vectori \vec{R} și \vec{M}_O care formează între ei unghiul α .

În cazul în care unghiul α este nul, cei doi vectori \vec{R} și \vec{M}_O sunt coliniari, situație în care torsorul de reducere se numește **torsor minimal**.

Locul geometric al punctelor în raport cu care un sistem de forțe se reduce la un torsor minimal este o dreaptă, aceasta poartă numele de axă centrală.

Direcția axei centrale este cunoscută (este direcția rezultantei \vec{R} , însă pentru a putea trasa această dreaptă, trebuie să se găsească un punct care aparține acestei drepte.

Axa centrală este situată la distanța r_0 de polul de reducere O , distanță măsurată în sensul dat de produsul vectorial $\vec{R} \times \vec{M}_O$ a cărei valoare este dată de relația:

$$r_0 = \frac{R \cdot M_O \sin \alpha}{R^2}, \quad \text{sau} \quad r_0 = \frac{M_O \sin \alpha}{R}$$

Pentru determinarea expresiei analitice a axei centrale se utilizează relația vectorială:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R} \quad (3.35)$$

echivalentă cu trei ecuații scalare :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Relațiile (3.36) pot fi scrise sub forma unui șir de rapoarte egale :

$$\frac{M_x - y \cdot R_z + z \cdot R_y}{R_x} = \frac{M_y - z \cdot R_x + x \cdot R_z}{R_y} = \frac{M_z - x \cdot R_y + y \cdot R_x}{R_z} \quad (3.37)$$

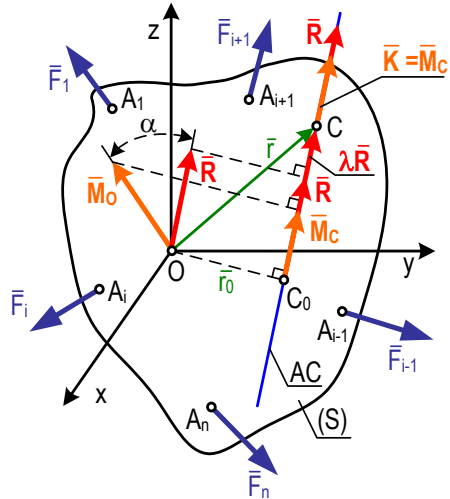


Figura 3.14.

Relația (3.37) reprezintă *forma analitică a ecuației axei centrale*, unde x, y, z reprezintă coordonatele unui punct curent al axei. *Momentul obținut prin reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct de pe axa centrală se numește **moment minim***, și se notează cu \bar{K} sau \bar{M}_C .

Valoarea scalară a momentului minim se obține înmulțind scalar cu versorul rezultantei expresia:

$$\bar{M}_C = \bar{M}_O + \overline{CO} \times \bar{R} \quad \left| \cdot \frac{\bar{R}}{R} \right.$$

de unde rezultă :

$$M_C = K = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R} = \frac{M_x \cdot R_x + M_y \cdot R_y + M_z \cdot R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \quad (3.38)$$

sau

$$M_C = K = M_O \cdot \cos \alpha \quad (3.39)$$

Observații :

- *momentul minim este un invariant*, fiind obținut prin raportul a doi invarianți (trinomul invariant și rezultanta) ;
- dacă *momentul minim* este nul, atunci $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, sistemul de forțe reducându-se la o rezultantă unică în raport cu punctele axei centrale;
- indiferent de polul de reducere ales, rămân *invarianți*: rezultanta \bar{R} , trinomul invariant $\bar{M}_O \cdot \bar{R}$, momentul minim \bar{K} , axa centrală ;
- dacă $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0$, adică $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, rezultă că $\bar{M}_C = \bar{M}_O + (-\bar{r} \times \bar{R})$, adică momentul rezultat este:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{r} \times \bar{R} \quad (3.40)$$

Expresia (3.40) reprezintă **teorema momentelor (sau teorema lui Varignon)** : *când un sistem de forțe se reduce la o rezultantă unică în raport cu punctele axei centrale, momentul rezultat al sistemului de forțe în raport cu un pol oarecare O este egal cu momentul rezultantei forțelor în raport cu același pol.*

III.8. Reducerea unui sistem de forțe concurente

În cazul în care asupra unui rigid este aplicat un sistem de forțe $\vec{F}_i (i = \overline{1, n})$ al căror suporturi se intersectează în același punct, sistemul de forțe se numește concurent (figura 3.15).

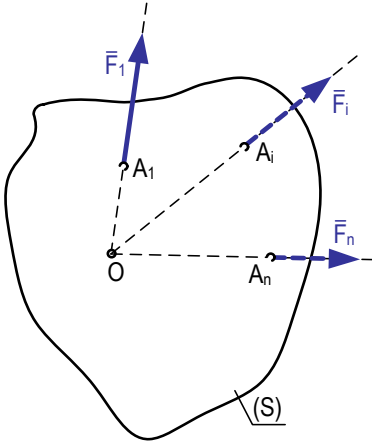


Figura 3.15.

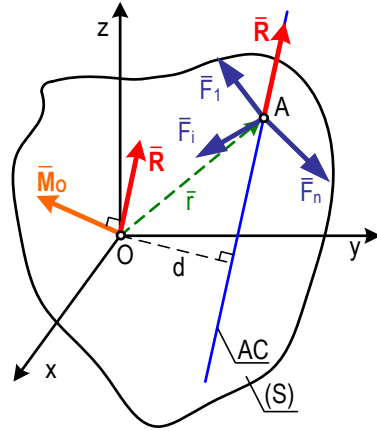


Figura 3.16.

În figura 3.16 este ilustrat un solid rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente $\vec{F}_i (i = \overline{1, n})$, al căror punct de aplicație este A.

Torsorul de reducere în raport cu punctul A este format din vectorii :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \text{ respectiv } \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (0 \times \vec{F}_i) \quad (3.41)$$

adică sistemul de forțe concurente se reduce la o rezultantă unică.

În raport cu polul O, torsorul de reducere este format din vectorii :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \text{ respectiv } \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \vec{r} \times \vec{R} \quad (3.42)$$

Trinomul invariant va avea expresia :

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{r} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0 \quad (3.43)$$

adică momentul minim este nul.

Astfel, un sistem de forțe concurente se reduce la o rezultantă unică în raport cu punctele de pe axa centrală, care este chiar suportul rezultantei și trece prin punctul de concurență.

Observație : Dacă și vectorul rezultant este nul ($\vec{R} = 0$), atunci sistemul de forțe este echivalent cu zero, deci solidul rigid este în echilibru.

Problema nr. 3.4 : Să se determine rezultanta sistemului de forțe din figura 3.17 [9] :

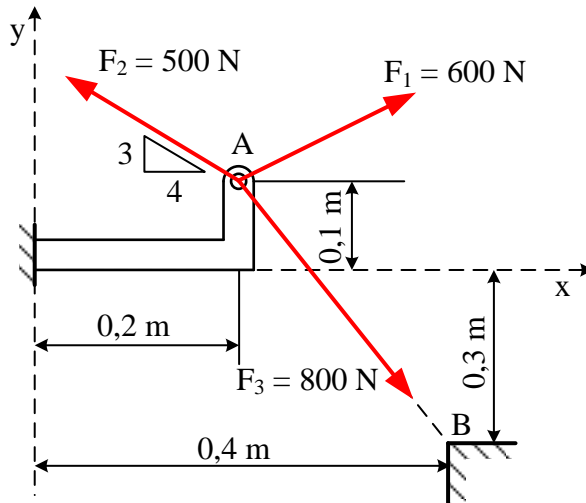


Figura 3.17

R : Se determină componentele fiecărei forțe în parte, astfel :

$$F_{1x} = 600 \cdot \cos(35^\circ) = 491,49 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 600 \cdot \sin(35^\circ) = 344,14 \text{ N}$$

În cazul forței F_2 se utilizează componentele triunghiului dreptunghic care are catetele 3 și 4 (ipotenuza 5):

$$F_{2x} = -500 \cdot \frac{4}{5} = -400 \text{ N}$$

$$F_{2y} = 500 \cdot \frac{3}{5} = 300 \text{ N}$$

În cazul forței F_3 se determină mai întâi unghiul pe care îl face forța F_3 cu verticala, ținând cont de elementele geometrice din figură, astfel :

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0,2}{0,4}\right) = 26,6^\circ$$

$$F_{3x} = 800 \cdot \sin(26,6^\circ) = 358,20 \text{ N}$$

$$F_{3y} = -800 \cdot \cos(26,6^\circ) = -715,32 \text{ N}$$

Însumând componentele fiecărei forțe, se obține :

$$R_x = 449,69 \text{ N}, \quad R_y = -71,18 \text{ N}$$

adică : $R = \sqrt{(449,69)^2 + (-71,18)^2} = 455,28 \text{ N}$

III.9. Reducerea unui sistem de forțe coplanare

În figura 3.18 este ilustrat un solid rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe \vec{F}_i , ($i = \overline{1, n}$), situate într-un plan (P). Se alege un sistem de referință cartezian Oxyz astfel încât planul xOy să coincidă cu planul (P) în care sunt forțele, astfel că : $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}$ și $z_i = 0$.

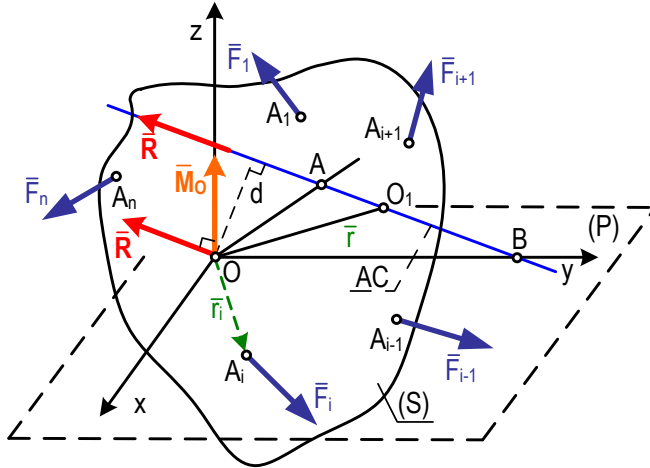


Figura 3.18.

Sistemul de forțe se reduce, în raport cu polul O, la un torsor $\overline{\tau}_0 = (\overline{R}, \overline{M}_O)$ ale cărui componente sunt:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\text{respectiv : } \begin{cases} M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \end{cases} \quad (3.45)$$

Pe baza relațiilor de mai sus se observă că vectorul rezultat \bar{R} este și el situat în planul forțelor, respectiv vectorul moment rezultat \bar{M}_O este perpendicular pe planul forțelor (P).

Pe baza acestor considerente, rezultă că produsul scalar $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0$, astfel că momentul minim este nul. Fiind valabilă teorema lui Varignon, sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică în raport cu un punct O_1 al axei centrale.

Astfel, ecuația axei centrale devine :

$$\frac{z \cdot R_y}{R_x} = \frac{-z \cdot R_x}{R_y} = \frac{M_z - x \cdot R_y + y \cdot R_x}{0} \quad (3.46)$$

de unde rezultă că :

$$\begin{cases} z = 0 \\ M_z - x \cdot R_y + y \cdot R_x = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Din cele prezentate anterior, rezultă că axa centrală este o dreaptă situată în planul forțelor xOy , care intersectează axele Ox și Oy în punctele:

$$A\left(\frac{M_z}{R_y}, 0, 0\right) \text{ respectiv } B\left(0, -\frac{M_z}{R_x}, 0\right) \quad (3.48)$$

Sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică, având ca suport axa centrală situată la distanța $d = \frac{M_z}{R}$ de polul de reducere.

Observații:

- dacă momentul rezultat este nul ($\bar{M}_O = 0$), axa centrală trece prin polul O ;
- dacă rezultanta sistemului de forțe este nulă ($\bar{R} = 0$), sistemul de forțe coplanare este echivalent cu un moment rezultat, având caracter de vector liber;
- rigidul se află în echilibru dacă rezultanta sistemului de forțe este nulă ($\bar{R} = 0$), respectiv momentul rezultat este nul ($\bar{M}_O = 0$).

Problema nr. 3.5: Să se determine rezultanta și momentul rezultat pentru sistemul de forțe din figura 3.19.

Valorile numerice sunt:

$$F_1 = 55 \text{ [N]}, F_2 = 50 \text{ [N]}, F_3 = 60 \text{ [N]}, F_4 = 70 \text{ [N]},$$

$$\alpha_1 = 315^\circ, \alpha_2 = 15^\circ, \alpha_3 = 45^\circ, \alpha_4 = 105^\circ.$$

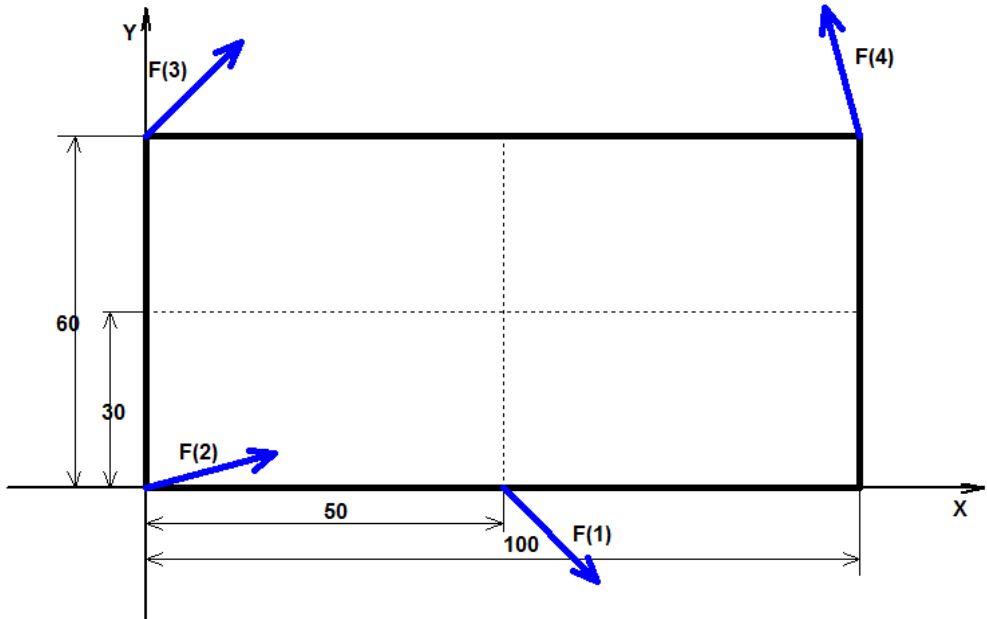


Figura 3.19.

Se determină mai întâi componentele pe cele două axe de coordonate ale rezultantei R , adică R_x și R_y , pe baza relațiilor:

$$R_x = \sum_{i=1}^4 F_{ix} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) + F_2 \cdot \cos(\alpha_2) + F_3 \cdot \cos(\alpha_3) + F_4 \cdot \cos(\alpha_4)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 F_{iy} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) + F_2 \cdot \sin(\alpha_2) + F_3 \cdot \sin(\alpha_3) + F_4 \cdot \sin(\alpha_4)$$

Înlocuind se obține:

$$R_x = 55 \cdot \cos(315) + 50 \cdot \cos(15) + 60 \cdot \cos(45) + 70 \cdot \cos(105) =$$

$$R_x = 55 \cdot 0,707 + 50 \cdot 0,965 + 60 \cdot 0,707 + 70 \cdot (-0,259) = 38,885 + 48,250 + 42,420 - 18,130 = R_x = 111,425 \text{ N}$$

$$R_y = 55 \cdot \sin(315) + 50 \cdot \sin(15) + 60 \cdot \sin(45) + 70 \cdot \sin(105) =$$

$$R_y = 55 \cdot (-0,707) + 50 \cdot 0,259 + 60 \cdot 0,707 + 70 \cdot 0,965 = -38,885 + 12,950 + 42,420 + 67,550 =$$

$$R_y = 84,035 \text{ N}$$

Rezultanta se obține pe baza relației: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, adică:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{111,425^2 + 84,035^2} = \sqrt{19477,412} = 139,561 \text{ N}$$

Momentul rezultat se obține pe baza relației: $M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$

, adică:

$$M_z = (x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x}) + (x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x}) + (x_3 \cdot F_{3y} - y_3 \cdot F_{3x}) + (x_4 \cdot F_{4y} - y_4 \cdot F_{4x}) =$$

$$M_z = (50 \cdot (-38,885) - 0 \cdot 38,885) + (0 \cdot 12,950 - 0 \cdot 48,250) + (0 \cdot 42,420 - 60 \cdot 42,420) + (100 \cdot 67,550 - 60 \cdot (-18,130)) =$$

$$M_z = -1944,250 + 0 + (-2545,200) + 7842,800 = 3353,350$$

$$M_z = 3353,350 \text{ N} \cdot \text{mm} = 3,35335 \text{ N} \cdot \text{m}$$

III.10. Reducerea unui sistem de forțe paralele

În figura 3.20 este ilustrat un solid rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe \vec{F}_i , ($i = \overline{1, n}$), ale căror suporturi sunt paralele cu o direcție oarecare (Δ), de versor \vec{u} . Ținând cont de faptul că forțele care formează sistemul de forțe pot fi scrise sub forma $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}$, rezultă că torsorul de reducere în raport cu un punct oarecare O este :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{u} \quad (3.49)$$

respectiv:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (F_i \cdot \vec{u}) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \cdot F_i) \times \vec{u} \quad (3.50)$$

Pe baza relațiilor (3.49) și (3.50) rezultă că: $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$, adică momentul minim este nul, deci este valabilă teorema lui Varignon, adică:

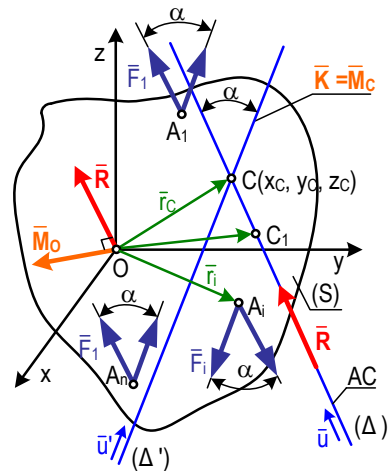


Figura 3.20.

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times (F_i \cdot \bar{u}) = \bar{r} \times \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot \bar{u} \right) \text{ sau } \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i - \bar{r} \cdot \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \bar{u} = 0 \quad (3.51)$$

adică cei doi vectori care compun produsul vectorial sunt coliniari, deci:

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i - \bar{r} \cdot \sum_{i=1}^n F_i = \mu \cdot \bar{u} \quad (3.52)$$

μ fiind un parametru scalar oarecare.

Ecuatia vectorială a axei centrale a sistemului de forțe paralele devine:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \frac{\mu}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \bar{u} \quad \text{sau} \quad \bar{r} = \bar{r}_C + \lambda \cdot \bar{u} \quad (3.53)$$

în care: $\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$ și $\lambda = -\frac{\mu}{\sum_{i=1}^n F_i}$.

Dacă sistemul de forțe paralele este rotit în același sens și cu un același unghi α , devenind paralel cu o nouă direcție (Δ'), fiecare forță păstrându-și punctul de aplicație și modulul, ecuația vectorială a axei centrale devine:

$$\bar{r}' = \bar{r}_C + \lambda' \cdot \bar{u}' \quad (3.54)$$

Analizând relațiile (3.53) și (3.54) se observă că **există un punct C prin care trece axa centrală a sistemului de forțe, indiferent de orientarea forțelor care-l compun.**

Punctul fix $C(x_C, y_C, z_C)$, poartă numele de **centrul forțelor paralele** și este definit de vectorul de poziție:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.55)$$

Coordonatele punctului C se obțin prin scalarizarea relației vectoriale, astfel :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.56)$$

Observație : Centrul forțelor paralele este un *element intrinsec* al sistemului de forțe dat, poziția acestuia rămânând aceeași în raport cu punctele de aplicație ale forțelor, indiferent de sistemul de referință adoptat.

Problema nr. 3.6 : Să se determine rezultanta și momentul resultant în raport cu punctul O, pentru sistemul de forțe paralele din figura 3.21 [9].

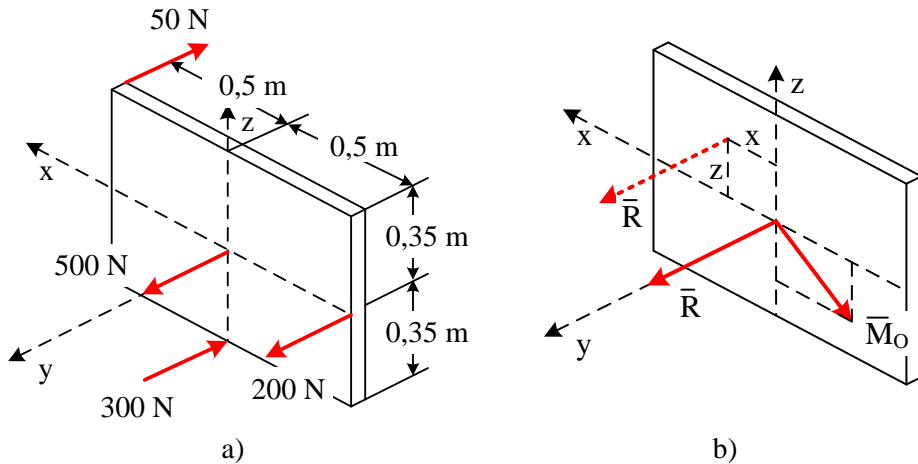


Figura 3.21

R : Expresiile rezultantei și ale momentului resultant sunt :

$$R = (200 + 500 - 300 - 50) \cdot \bar{j} \text{ N} = 350 \cdot \bar{j} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} M_O &= [50 \cdot (0,35) - 300 \cdot (0,35)] \cdot \bar{i} + [-50 \cdot (0,50) - 200 \cdot (0,50)] \cdot \bar{k} \\ &= -87,5 \cdot \bar{i} - 125 \cdot \bar{k} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Coordonatele punctului din planul perpendicular pe direcțiile forțelor, în care suportul rezultantei intersectează planul se deduc din relația :

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O$$

adică :

$$(x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}) \times 350 \cdot \bar{j} = -87,5 \cdot \bar{i} - 125 \cdot \bar{k}$$

deci :

$$350 \cdot x \cdot \bar{k} - 350 \cdot z \cdot \bar{i} = -87,5 \cdot \bar{i} - 125 \cdot \bar{k}$$

de unde rezultă :

$$350 \cdot x = -125, -350 \cdot z = -87,5$$

adică :

$$x = -0,357 \text{ m}, \quad z = 0,250 \text{ m}$$

III.11. Cazuri de reducere

La reducerea unui sistem de forțe se poate întâlni una din următoarele situații:

- $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$: sistemul de forțe este nul, solidul rigid fiind în echilibru;
- $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$: sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică, suportul acesteia fiind axa centrală care trece prin polul de reducere;
- $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$: sistemul de forțe este echivalent cu moment resultant ;
- $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0, \bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0$: sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică, față de orice punct de pe axa centrală, aceasta fiind situată într-un plan perpendicular pe \bar{M}_O , la distanța $d = \frac{M_O}{R}$ de polul O ;
- $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0, \bar{M}_O \cdot \bar{R} \neq 0$: reprezintă cazul general de reducere, sistemul de forțe fiind echivalent cu un torsesor minimal având ca suport axa centrală. Aceasta este o dreaptă paralelă cu suportul rezultantei, situată la distanța $d = \frac{|M_O \cdot \sin \alpha|}{R}$ de polul de reducere, distanță care se măsoară perpendicular pe planul vectorilor \bar{R} și \bar{M}_O , în sensul dat de produsul vectorial $\bar{R} \times \bar{M}_O$.

IV. Geometria maselor

IV.1. Centrul de greutate și centrul maselor unui sistem de puncte materiale

La suprafața Pământului există un câmp gravitațional terestru care acționează asupra particulelor materiale și asupra obiectelor cu o forță de atracție:

$$\vec{G}_i = m_i \cdot \vec{g} \quad (4.1)$$

numită **forță gravitațională** sau **forța de greutate**, proporțională cu masa m_i a particulei.

Factorul de proporționalitate \vec{g} reprezintă accelerația gravitațională și este o caracteristică a intensității câmpului și variază în raport cu poziția particulei față de Pământ ($g = 9,781 \text{ m/s}^2$ la Ecuator ÷ $9,831 \text{ m/s}^2$ la poli).

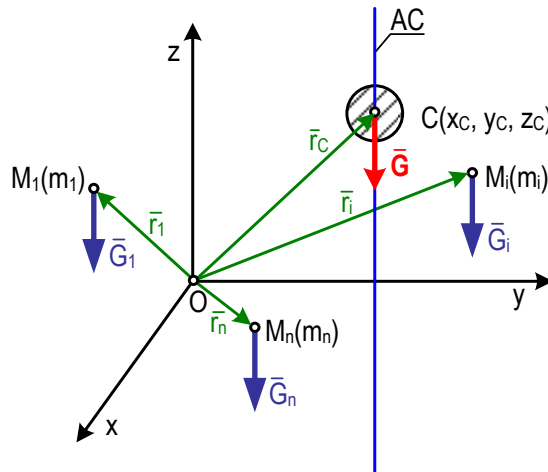


Figura 4.1.

Într-o zonă restrânsă de la suprafața Pământului, câmpul gravitațional terestru se consideră constant, atât ca direcție cât și ca intensitate. Astfel, un sistem de puncte materiale situat în interiorul acestei zone, se poate considera aflat sub acțiunea unui sistem de forțe paralele și de același sens. Un astfel de sistem de forțe paralele se reduce la o rezultantă unică, având ca suport axa centrală (figura 4.1).

Rezultanta reprezintă greutatea sistemului de puncte materiale și este definită de relația:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{g} \quad (4.2)$$

unde: $M = \sum_{i=1}^n m_i$ reprezintă masa totală a sistemului de puncte materiale M_i .

Centrul forțelor paralele \overline{G}_i , notat cu C se numește **centru de greutate** al sistemului de puncte materiale, poziția acestuia în raport cu un pol O fiind dată de relația:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{r}_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad \text{sau} \quad \overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overline{r}_i}{M} \quad (4.3)$$

Relația (4.3) introduce o noțiune mai generală și anume **centrul maselor** unui sistem de puncte materiale.

Prin scalarizarea acestei expresii vectoriale rezultă relațiile cu ajutorul cărora se definesc coordonatele centrului maselor unui sistem de puncte materiale:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{M} \quad (4.4)$$

Relațiile (4.4) sunt echivalente cu următoarele relații de calcul ale coordonatelor centrului maselor, în funcție de tipul corpului omogen:

- pentru bare omoene:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i};$$

- pentru plăci omogene :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i};$$

- pentru volume omogene :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i};$$

În figura 4.2 este reprezentat un solid rigid (din material nedeformabil) și se consideră un volum foarte mic ΔV_i de masă Δm_i . S-a notat cu C_i centrul de greutate, al cărui vector de poziție este \vec{r}_i în raport cu originea unui sistem de referință.

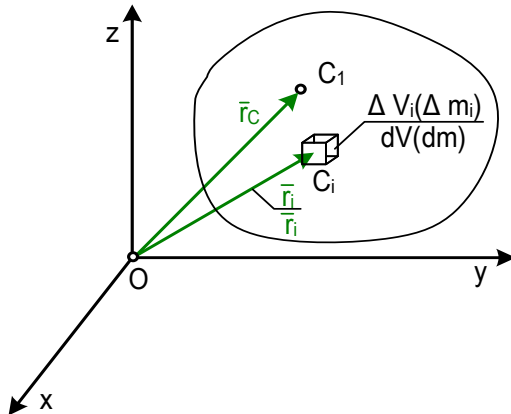


Figura 4.2.

Presupunând rigidul format dintr-o mulțime de n asemenea particule, poziția centrului maselor se determină cu ajutorul relației:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i} \quad (4.5)$$

Pentru determinarea poziției exacte a centrului de masă al unui solid rigid, se trece la limită expresia (4.5), obținându-se:

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} \cdot dm}{\int dm} \quad (4.6)$$

Prin scalarizarea relației vectoriale (4.6) se obțin relațiile de definiție a coordonatelor centrului de masă pentru un solid rigid neomogen:

$$x_C = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm} \quad (4.7)$$

În cazul corpurilor *omogene*, se definesc: $\rho_V = \frac{dm}{dV}$ - densitate volumică; $\rho_A = \frac{dm}{dA}$ - densitate superficială; $\rho_l = \frac{dm}{dl}$ - densitate liniară.

Pe baza acestor relații, rezultă : $dm = \rho_V \cdot dV = \rho_A \cdot dA = \rho_l \cdot dl$.

Deoarece corpurile sunt omogene, densitățile sunt mărimi *constante*, rezultă astfel următoarele relații vectoriale pentru calculul poziției centrului de masă:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dV}{\int dV} \text{ - pentru volume omogene;} \quad (4.8)$$

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dA}{\int dA} \text{ - pentru arii (plăci) omogene;} \quad (4.9)$$

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dl}{\int dl} \text{ - pentru linii (bare) omogene.} \quad (4.10)$$

Relațiile 4.8, 4.9, 4.10 sunt echivalente, fiecare dintre ele, cu câte trei ecuații scalare cu ajutorul cărora se definesc coordonatele centrului maselor, astfel:

$$x_C = \frac{\int x \cdot dV}{\int dV}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dV}{\int dV}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dV}{\int dV} \text{ - volume omogene;} \quad (4.11)$$

$$x_C = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dA}{\int dA} \text{ - suprafețe omogene;} \quad (4.12)$$

$$x_C = \frac{\int x \cdot dl}{\int dl}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dl}{\int dl}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dl}{\int dl} \text{ - linii (bare) omogene;} \quad (4.13)$$

Observații :

- dacă sistemul de puncte materiale admite un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de masă se găsește în acel plan, pe aceea axă, respectiv în acel centru de simetrie;

- dacă un sistem de puncte materiale (S) este obținut dintr-un număr de subsisteme (S₁), (S₂), ... , (S_n) ale căror mase m₁, m₂, ... , m_n și centre de masă (C₁), (C₂), ... , (C_n) se cunosc, poziția centrului de masă se determină cu ajutorul relației :

$$\bar{r}_C = \frac{M_1 \cdot \bar{r}_{C1} + M_2 \cdot \bar{r}_{C2} + \dots + M_n \cdot \bar{r}_{Cn}}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$$

- dacă un sistem de puncte materiale (S) este obținut dintr-un sistem (S₁) din care lipsește un sistem (S₂), poziția centrului de masă se determină cu ajutorul relației :

$$\bar{r}_C = \frac{M_1 \cdot \bar{r}_{C1} - M_2 \cdot \bar{r}_{C2}}{M_1 - M_2}$$

- poziția centrului de masă nu depinde de sistemul de coordonate ales, depinzând doar de poziția reciprocă a punctelor materiale M_i ;

IV.2. Teoremele lui Guldin – Pappus

Teoremele lui Guldin – Pappus se referă la ariile, respectiv volumele suprafețelor, respectiv corpurilor de revoluție. O suprafață de revoluție este obținută prin rotația unei curbe în jurul unei axe situată în planul curbei, dar care nu intersectează curba. Un corp de revoluție este obținut prin rotația unei suprafețe plane în jurul unei axe situată în planul suprafeței, dar care nu intersectează suprafața.

Teorema I : *Aria suprafeței generată prin rotirea unui arc de curbă plană în jurul unei axe din planul curbei, dar pe care nu o intersectează, este egală cu produsul dintre lungimea arcului de curbă și lungimea cercului descris de centrul de masă al arcului de curbă (figura 4.3) :*

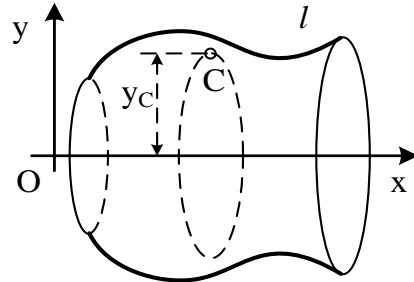


Figura 4.3.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot y_C \cdot l \quad (4.14)$$

Dacă rotația se face cu un unghi $\alpha < 2\pi$, atunci relația (4.14) devine :

$$A = \alpha \cdot y_C \cdot l \quad (4.15)$$

în care unghiul α este măsurat în radiani.

Teorema II : *Volumul corpului generat prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei axe din planul suprafeței, dar pe care nu o intersectează este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de masă al arcului de curbă (figura 4.4) :*

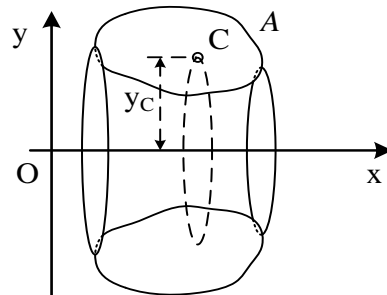


Figura 4.4.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot y_C \cdot A \quad (4.16)$$

Dacă rotația se face cu un unghi $\alpha < 2\pi$, atunci relația (4.17) devine :

$$V = \alpha \cdot y_C \cdot A \quad (4.17)$$

în care unghiul α este măsurat în radiani.

IV.3. Momente statice. Teorema momentelor statice

Se consideră un sistem de « n » puncte materiale M_i , de mase m_i a căror coordonate în raport cu un sistem de referință $Oxyz$ sunt: $x_i; y_i; z_i$, ($i = \overline{1, n}$). Se definește *moment de masă* al sistemului de puncte materiale o expresie de forma :

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^n \cdot y_i^p \cdot z_i^q \quad (4.18)$$

unde n, p, q sunt numere întregi și pozitive, valoarea $n + p + q$ numindu-se *ordinul momentului*. Pentru:

a) $n + p + q = 0$, momentul de masă are ordinul 0 și se numește *masa*

sistemului: $\sum_{i=1}^n m_i = M$;

b) $n + p + q = 1$, momentul de masă este de ordinul I, se numește *moment static*:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i; \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i; \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \quad (4.19)$$

c) $n + p + q = 2$, momentul de masă de este de ordinul II, se numește *moment de inerție*.

Prin definiție, *momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un pol reprezintă suma produselor dintre masele punctelor materiale și distanțele de la aceste puncte la planul, axa sau polul considerat*.

Astfel, expresia generală a momentului static este;

$$S = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta_i \quad - \text{ în cazul mediilor discontinue} \quad (4.20)$$

$$S = \int \delta \cdot dm \quad - \text{ în cazul mediilor continue} \quad (4.21)$$

În funcție de locul până la care se măsoară distanța, se disting:

a) Momente statice *polare*, - distanța se măsoară până la un pol:

$$\bar{S}_O = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{r}_i = M \cdot \bar{r}_C; \\ \int \bar{r} \cdot dm = M \cdot \bar{r}_C. \end{cases} \quad (4.22)$$

Observație : momentul static polar este o mărime vectorială.

b) Momente statice *axiale* – distanța se măsoară până la o axă:

$$S_x = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \sqrt{y_i^2 + z_i^2}; \\ \int \sqrt{y^2 + z^2} \cdot dm. \end{cases} \quad S_y = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \sqrt{z_i^2 + x_i^2}; \\ \int \sqrt{z^2 + x^2} \cdot dm. \end{cases} \quad S_z = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \sqrt{x_i^2 + y_i^2}; \\ \int \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dm. \end{cases} \quad (4.23)$$

c) Momente statice *planare* – distanța se măsoară până la un plan:

$$S_{xOy} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i; \\ \int z \cdot dm. \end{cases} \quad S_{yOz} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i; \\ \int x \cdot dm. \end{cases} \quad S_{zOx} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i; \\ \int y \cdot dm. \end{cases} \quad (4.24)$$

Pornind de la formulele care definesc coordonatele centrului de masă pentru un sistem de puncte materiale, respectiv pentru un solid rigid, rezultă:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i = M \cdot x_C; \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i = M \cdot y_C; \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i = M \cdot z_C \quad (4.25)$$

și

$$\int x \cdot dm = M \cdot x_C; \quad \int y \cdot dm = M \cdot y_C; \quad \int z \cdot dm = M \cdot z_C \quad (4.26)$$

Aceste relații (4.25) și (4.26) exprimă **teorema momentelor statice** : *momentul static al unui sistem material în raport cu un plan sau o axă este egal cu produsul dintre masa întregului sistem presupusă concentrată în centrul de masă al sistemului și distanța de la centrul de masă la planul sau axa respectivă.* Se observă că: *dacă momentul static al unui sistem material în raport cu un plan sau o axă este nul, atunci centrul de masă al sistemului se află în planul sau pe axa respectivă.*

IV.4. Momente de inerție. Raze de inerție

Se definește **momentul de inerție** al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un pol, suma produselor dintre masele punctelor materiale și pătratul distanțelor de la aceste puncte la planul, axa sau polul considerat :

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 \quad (4.27)$$

În raport cu un sistem de referință cartezian se definesc :

- momente de inerție planare :

$$I_{xOy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2, I_{yOz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^2, I_{xOz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2 \quad (4.28)$$

- momente de inerție axiale :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2), I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (4.29)$$

- moment de inerție polar :

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (4.30)$$

- momente de inerție centrifugale :

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i, I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot z_i, I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot x_i \quad (4.31)$$

Se definește **raza de inerție (girație)** distanța la care trebuie plasată întreaga masă a sistemului material M , concentrată într-un singur punct la un plan, o axă sau un pol pentru a obține aceeași valoare a momentului de inerție planar, axial sau polar.

Proprietățile momentelor de inerție :

- momentele de inerție planare, axiale sau polare sunt mărimi pozitive, fiind nule doar atunci când sistemul de puncte materiale este conținut în planul, pe axa sau în polul față de care se calculează;
- momentele de inserție axiale sunt egale cu suma momentelor de inerție planare, calculată în raport cu planele a căror intersecție definește axa respectivă :

$$I_x = I_{xoz} + I_{xoy}, I_y = I_{yoz} + I_{xoy}, I_z = I_{xoz} + I_{yoz} \quad (4.32)$$

- momentul de inerție polar se poate calcula cu una din relațiile următoare:

$$I_O = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_y + I_z), I_O = I_{yoz} + I_{xoz} + I_{xoy},$$

$$I_O = I_{yoz} + I_x = I_{xoy} + I_z = I_{xoz} + I_y \quad (4.33)$$

- momentele de inerție centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule ;

Pentru calculul momentelor de inerție ale suprafețelor compuse se parcurg următoarele etape :

- se descompune suprafața în figuri geometrice simple ;
- se determină poziția centrului de masă pentru fiecare figură geometrică simplă față de un sistem de coordonate arbitrar ales ;
- se calculează momentele de inerție axiale și momentul de inerție centrifugal în raport cu axele centrale, ale tuturor figurilor simple, care însumate determină momentele de inerție ale suprafeței compuse ;
- se determină poziția axelor de inerție principale și valoarea momentelor principale de inerție ;

IV.5. Probleme rezolvate

Pentru rezolvarea problemelor care necesită calculul poziției centrului de greutate trebuie parcurse următoarele etape:

- a) alegerea formulei de calcul, în funcție de datele problemei :

Mediu	Proprietățile și forma corpului			
	Neomogen	Omogen		
		Linii	Plăci	Volum
Discontinuu	$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$	$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}$	$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$	$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$
Continuu	$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm}$	$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dl}{\int dl}$	$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dA}{\int dA}$	$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dV}{\int dV}$

- b) alegerea în mod convenabil a sistemului de referință;
- c) în cazul mediului discontinuu se împarte corpul în figuri geometrice regulate și pentru fiecare figură geometrică componentă se determină coordonatele centrului de greutate, masa, precum și lungimea, aria sau volumul și se aplică relațiile scalare de calcul;
- d) în cazul mediului continuu: se alege convenabil un element infinitesimal de masă, lungime, arie sau volum și se aplică relațiile scalare de calcul.

Problema nr. 4.1 : Să se determine coordonatele centrului de masă pentru o bară omogenă de forma unui arc de cerc (figura 4.5).

R : Axa Ox fiind axă de simetrie înseamnă că coordonata y a centrului de masă este 0, deci

$$y = 0$$

Elementul de masă, respectiv cel de lungime au expresiile :

$$dm = \rho \cdot dl, dl = R \cdot d\theta$$

Coordonata x a unui punct de pe bară se determină cu relația :

$$x = R \cdot \cos\theta$$

Coordonata x a centrului de masă se determină conform relației (4.13) :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int x \cdot dl}{\int dl} = \frac{\int R \cdot \cos\theta \cdot dl}{\int dl} = \frac{\int R \cdot \cos\theta \cdot R \cdot d\theta}{\int R \cdot d\theta} = \frac{R^2 \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \cdot d\theta}{R \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \\ &= R \cdot \frac{\sin\alpha - \sin(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} = R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Problema nr. 4.2 : Determinarea centrului de masă al sectorului de cerc (figura 4.6)

Pentru determinarea coordonatei x a centrului de masă se utilizează relația (4.12), astfel :

$$x_c = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}$$

în care :

$$x = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos\theta, \text{ respectiv } dA = \frac{R \cdot d\theta \cdot R}{2}.$$

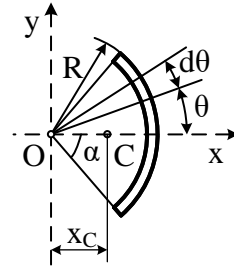


Figura 4.5.

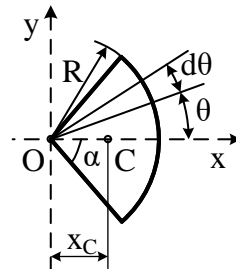


Figura 4.6.

După înlocuiri se obține :

$$x_c = \frac{\int \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos\theta \cdot \frac{R \cdot d\theta \cdot R}{2}}{\int \frac{R \cdot d\theta \cdot R}{2}} = \frac{\frac{R^3}{3} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \cdot d\theta}{\frac{R^2}{2} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Deoarece sectorul de cerc are ca și axă de simetrie axa Ox, prin urmare coordonata y a centrului de masă este 0.

Problema nr. 4.3 : Determinarea centrului de masă al unui con cu raza bazei R și înălțimea h (figura 4.7) :

Deoarece axa Oz reprezintă axa conului, deci este axă de simetrie rezultă că centrul de masă se afla pe această axă, deci coordonatele x și y ale centrului de masă sunt nule.

Pentru determinarea coordonatei z a centrului de masă, la distanța z față de vârful conului se consideră un volum elementar :

$$dv = \pi \cdot r^2 \cdot dz.$$

Din asemănarea triunghiurilor OO'A și OO''A' rezultă :

$$r = \frac{R}{h} \cdot z$$

Coordonata z a centrului de masă se determină pe baza relației (4.11) :

$$z_c = \frac{\int z \cdot dv}{\int dv} = \frac{\int_0^h z \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{h} \cdot z\right)^2 \cdot dz}{\int_0^h \pi \cdot \left(\frac{R}{h} \cdot z\right)^2 \cdot dz} = \frac{\int_0^h z^3 \cdot dz}{\int_0^h z^2 \cdot dz} = \frac{\frac{1}{4} \cdot z^4 \Big|_0^h}{\frac{1}{3} \cdot z^3 \Big|_0^h} = \frac{3}{4} \cdot h$$

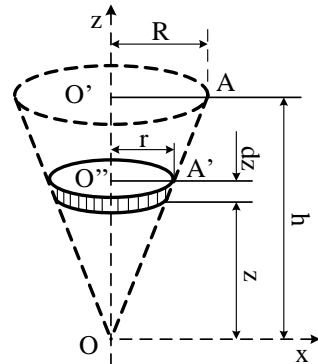


Figura 4.7.

Problema nr. 4.4 : Se cere să se determine coordonatele centrului de greutate pentru bara din figura 4.8 [9] :

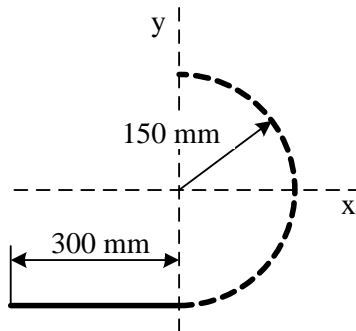


Figura 4.8. Bară omogenă

R : Se împarte bara în două componente: 1 – sub formă de semicerc, 2 – porțiunea dreaptă.

Coordonatele centrului de greutate se calculează cu ajutorul relațiilor:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2}, \text{ respectiv: } y_C = \frac{y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

Dar:

$$l_1 = \pi \cdot R = 150 \cdot \pi \text{ mm}, x_1 = \frac{2 \cdot R}{\pi} = \frac{300}{\pi}, y_1 = 0$$

$$l_2 = 300 \text{ mm}, x_2 = -150 \text{ mm}, y_2 = -150 \text{ mm}$$

Aplicând relațiile se obțin coordonatele centrului de greutate:

$$x_C = \frac{150 \cdot \pi \cdot \frac{300}{\pi} + (-150) \cdot 300}{150 \cdot \pi + 300} = 0,$$

respectiv:

$$y_C = \frac{0 \cdot 150 \cdot \pi + (-150) \cdot 300}{150 \cdot \pi + 300} = -58,3 \text{ mm}$$

Problema nr. 4.5: Se cere să se determine coordonatele centrului de greutate pentru placa omogenă din figura 4.9.

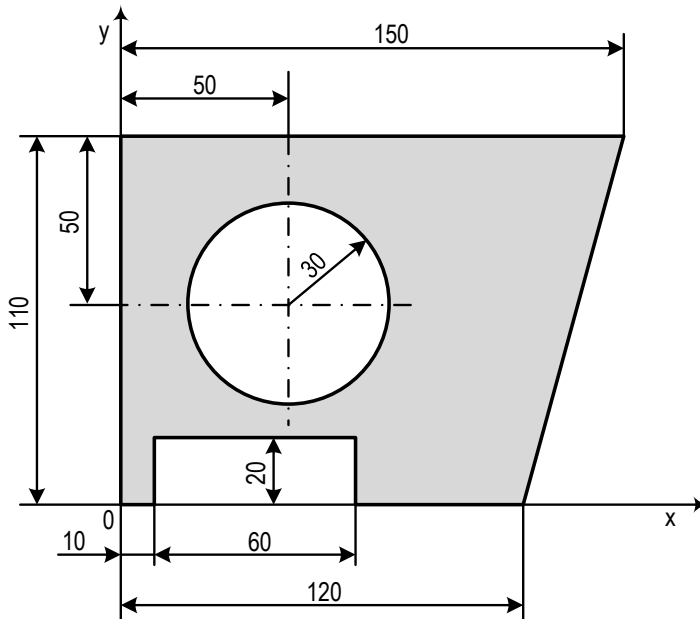






Figura 4.9. Placa omogenă

Se întocmește următorul tabel, astfel:

Fig	Desen	x_c [mm]	y_c [mm]	A [mm ²]	Sem n	$x_c * A$	$y_c * A$
1		60	55	13200	+	792000	726000
2		130	73,33	1650	+	214500	121001.10
3		50	60	2827.431	-	141371.55	169645.86
4		40	10	1200	-	48000	12000
TOTAL				10822,56		817128,45	665355,24
$x_c = \frac{817128,450}{10822,569} = 75,502 \text{ mm}$				$y_c = \frac{665355,240}{10822,569} = 61,478 \text{ mm}$			

Problema nr. 4.6: Se cere să se determine coordonatele centrului de greutate pentru volumul omogen din figura 4.10 [9]:

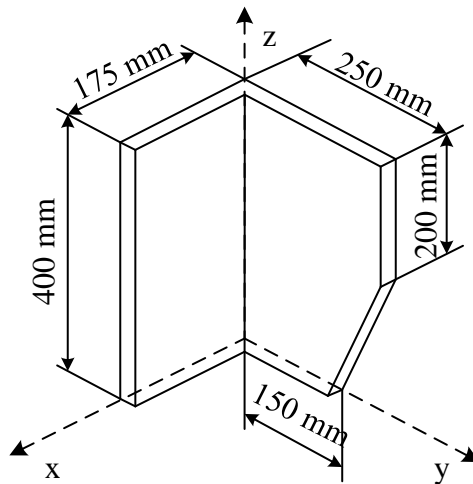





Figura 4.10. Volum omogen

R : Se întocmește următorul tabel :

Fig	Desen	x_c [mm]	y_c [mm]	z_c [mm]	A [mm ²]	S	$x_c \cdot A$	$y_c \cdot A$	$z_c \cdot A$
1		87,5	0	200	70000	+	6125000	0	14000000
2		0	125	200	100000	+	0	12500000	20000000
3		0	216,66	66,66	10000	-	0	2166600	666600
TOTAL					160000		6125000	10333400	33333400
$x_c = \frac{6125000}{160000} = 38,281 \text{ mm}$ $y_c = \frac{10333400}{160000} = 64,583 \text{ mm}$ $z_c = \frac{33333400}{160000} = 208,333 \text{ mm}$									

Problema nr. 4.7: Pentru corpul din figura 4.11 (reprezentat în secțiune), se cere să se determine aria laterală și volumul.

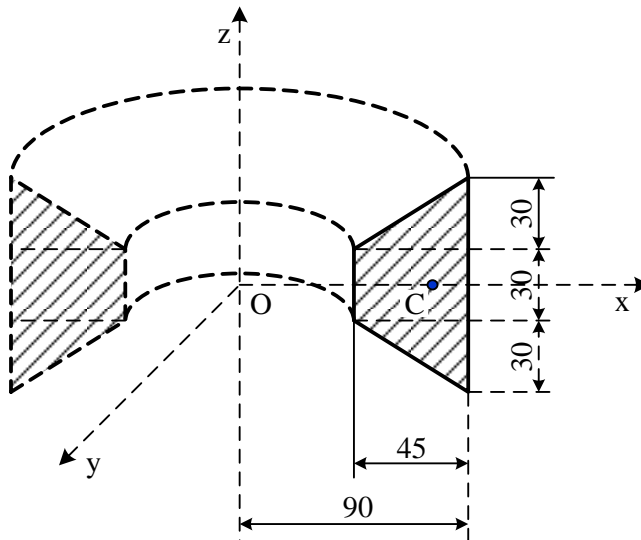


Figura 4.11

R : Pentru determinarea ariei corpului se utilizează relația (4.14) :




$$A = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot l$$

Iar pentru determinarea volumului se utilizează relația (4.16) :

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot A$$

Se observă că în ambele relații apare valoarea coordonatei x a centrului de masă.

Pentru calculul coordonatelor centrului de masă se realizează și se completează tabelul următor :

Nr.	Figura	x_i	z_i	A_i	$x_i \cdot A_i$	$z_i \cdot A_i$
1		75	25	675	50625,000	16875,000
2		67,5	0	1350	91125,000	0,000
3		75	-25	675	50625,000	-16875,000
TOTAL :				2700	192375,000	0,000
		$x_c =$		71,250	$y_c =$	0,000

Lungimea conturului secțiunii este :

$$l = 2 \cdot 54,08 + 30 + 3 \cdot 30 = 228,160 \text{ mm}$$

Aria secțiunii este :

$$A_S = 2700 \text{ mm}^2$$

Lungimea cercului descris de centrul de masă este :

$$L_C = 2 \cdot \pi \cdot x_c = 2 \cdot 3,14159 \cdot 71,250 = 447,676 \text{ mm}$$

Înlocuind valorile determinate anterior în relațiile pentru calculul ariei și volumului se obține :

$$A = L_C \cdot l = 102141,756 \text{ mm}^2$$

respectiv :

$$V = A_S \cdot L_C = 1208725,2 \text{ mm}^3$$

Problema nr 4.8 : Calculul momentului de inerție pentru un dreptunghi.

Se consideră un dreptunghi cu laturile b și h (figura 4.12), în care se exprimă un element de arie dA astfel :

$$dA = b \cdot dz$$

Momentul de inerție axial, în raport cu axa Oy se calculează astfel :

$$J_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot b \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot b \cdot z^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

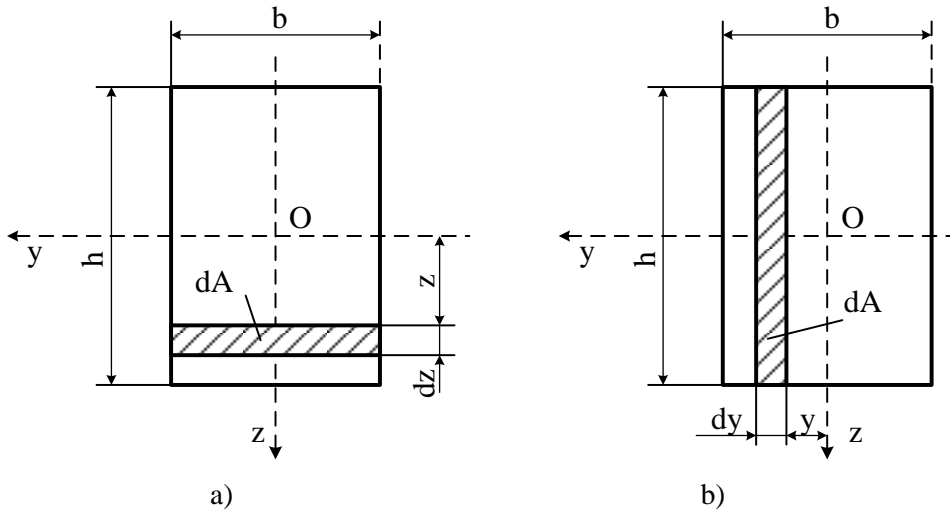


Figura 4.12

Raza de inerție este :

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

Elementul de secțiune este : $dA = h \cdot dy$

Momentul de inerție axial, în raport cu axa Oz este :

$$J_z = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot h \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot h \cdot y^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Raza de inerție este :

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

Problema nr. 4.9 : Calculul momentului de inerție pentru un cerc.

R : Se consideră un cerc de rază R și se consideră un element de arie de forma unui inel de rază r și grosime dr (figura 4.13), astfel :

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

Momentul de inerție polar se calculează astfel :

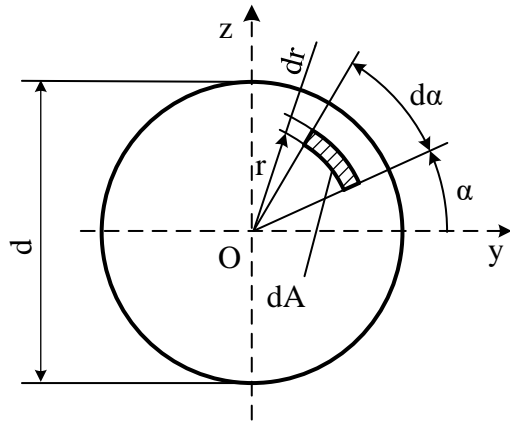


Figura 4.13.

$$J_O = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2 \cdot dA = \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\frac{d}{2}} = 2\pi \frac{1}{4} \left(\frac{d^4}{16} \right) = \frac{\pi d^4}{32}$$

Din motive de simetrie, momentele de inerție axiale sunt egale, deci :

$$J_y = J_z = \frac{J_O}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Raza de inerție este :

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \frac{d}{4}$$

Problema nr. 4.10 : Calculul momentului de inerție pentru o secțiune circulară (figura 4.14).

R : Utilizând relațiile obținute anterior, pentru calculul momentului de inerție polar se scade cercul interior din cel exterior, adică :

$$J_O = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

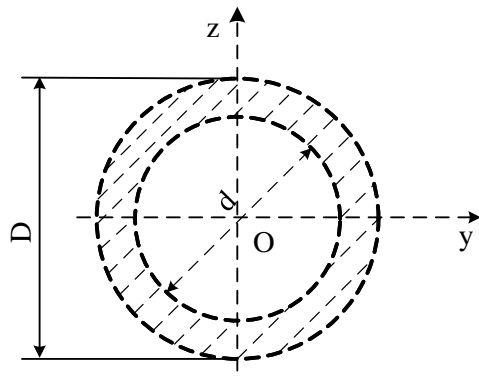


Figura 4.14.

Momentul de inerție axial :

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$$

Raza de inerție este :

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)}{\pi \cdot (D^2 - d^2)}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(D^2 + d^2)}$$

Problema nr. 4.11 : Să se calculeze momentele de inerție pentru placa complexă din figura 4.15.

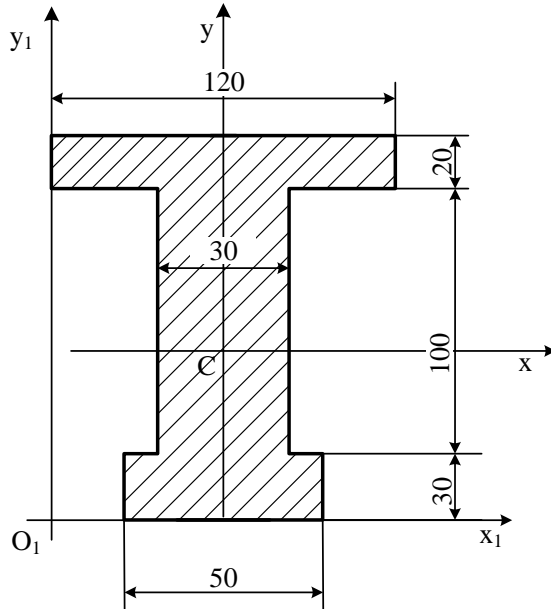


Figura 4.15.

Se alege un sistem de referință arbitrar $O_1x_1y_1$ și se calculează poziția centrului de masă în raport cu acesta :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{60 \cdot 20 \cdot 120 + 60 \cdot 30 \cdot 100 + 60 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 120 + 50 \cdot 100 + 50 \cdot 30} = \\ &= \frac{144000 + 180000 + 90000}{2400 + 3000 + 1500} = \frac{414000}{6900} = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{140 \cdot 20 \cdot 120 + 80 \cdot 30 \cdot 100 + 15 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 120 + 50 \cdot 100 + 50 \cdot 30} = \\ &= \frac{336000 + 240000 + 22500}{2400 + 3000 + 1500} = \frac{598500}{6900} = 86,739 \end{aligned}$$

În continuare, se calculează momentele de inerție în raport cu axele central C_x și C_y :

$$J_x = \frac{50 \cdot 30^3}{12} + 50 \cdot 30 \cdot 71,739^2 + \frac{30 \cdot 100^3}{12} + 30 \cdot 100 \cdot 6,739^2 + \\ + \frac{120 \cdot 20^3}{12} + 120 \cdot 20 \cdot 53,261^2 = \\ 112500 + 7719726,181 + 2500000 + 136242,363 + 80000 \\ + 6808161,890 = 17356630,434 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{30 \cdot 50^3}{12} + \frac{100 \cdot 30^3}{12} + \frac{20 \cdot 120^3}{12} = 3417500 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = 0$$

V. Statica punctului material

V.1. Punct material liber și supus la legături

Se consideră un punct material, asupra căruia acționează un sistem de forțe, acestea sunt forțe *concurrente* și au caracter de *vectori legați*, punctul de aplicație al fiecărei forțe fiind punctul material asupra căruia acționează. În acest caz, sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică, al cărei suport este axa centrală care trece prin punctul de concurență.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

Prin definiție, un punct material este *liber* atunci când poate ocupa orice poziție în spațiu, nefiind supus la nici o restricție de natură geometrică, poziția lui fiind determinată *exclusiv de sistemul de forțe* ce acționează asupra lui.

Pentru ca un punct material liber să fie în echilibru trebuie ca sistemul de forțe ce acționează asupra lui să fie echivalent cu zero, adică:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad (5.1)$$

Relația vectorială (5.1) este echivalentă cu trei ecuații scalare:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Prin definiție, *gradele de libertate (g.d.l.)* reprezintă **parametrii scalari independenți**, numiți și *coordonate generalizate care determină în mod univoc poziția și orientarea unui sistem material în raport cu un sistem de referință*.

Astfel, poziția unui punct material liber, raportată la un sistem de referință cartezian $Oxyz$ este definită prin trei parametri scalari independenți, (coordonatele sale carteziene x, y, z), ceea ce înseamnă că **punctul material liber prezintă trei g.d.l.**

Punctul material liber nu există în realitate, în aplicațiile practice punctul material fiind *supus la legături*, adică este obligat, prin constrângeri geometrice, să ocupe numai anumite poziții în spațiu datorită unor restricții care nu sunt legate de sistemul de forțe ce acționează asupra punctului.

Așadar, *legăturile* reprezintă restricțiile care restrâng libertatea de mișcare a punctului sau a sistemului de puncte materiale.

Legăturile implică două aspecte: unul **geometric** – materializat prin reducerea numărului de grade de libertate și unul **fizic** – materializat prin introducerea forțelor de legătură.

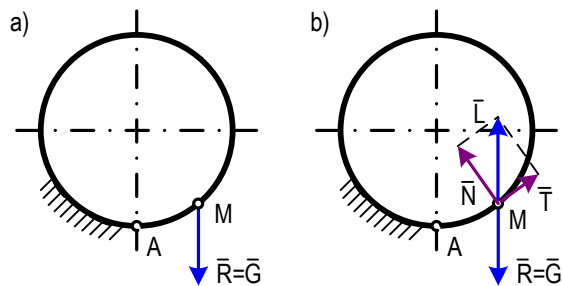


Figura 5.1.

Prin urmare, un punct material greu (cu masă) obligat să rămână pe suprafața interioară a unui cerc, poate rămâne în echilibru : în punctul A (cel mai de jos) dacă cercul este luciu sau, într-un punct oarecare M dacă cercul este aspru.

În primul caz se observă că $\bar{R} = \bar{G} \neq 0$, adică punctul nu este în echilibru. Pentru ca punctul să fie în echilibru, asupra sa trebuie să mai acționeze o forță \bar{L} (cazul b) egală și direct opusă lui \bar{R} , numită **forță de legătură** sau **reacțiune**.

Prin introducerea forței de legătură, punctul material devine *meccanic echivalent* cu un punct material liber.

Axioma legăturilor definește operațiunea de suprimare a unei legături și înlocuirea acesteia cu forțe, astfel: **orice legătură geometrică poate fi întotdeauna înlocuită cu o forță \bar{L} de legătură sau reacțiune.**

Astfel, condiția de echilibru pentru punctul material supus la legături este :

$$\bar{R} + \bar{L} = 0 \quad (5.3)$$

Relația (5.3) este echivalentă cu trei ecuații scalare:

$$\begin{cases} R_x + L_x = 0 \\ R_y + L_y = 0 \\ R_z + L_z = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Din figura 5.1.b se observă că forța de legătură \bar{L} se descompune după direcția normalei, respectiv tangentei la legătură, rezultând componentele \bar{N} și \bar{T} , astfel că:

$$\bar{L} = \bar{N} + \bar{T} \quad (5.5)$$

unde : \bar{N} - reprezintă *reacțiune normală* și se opune deplasării punctului pe direcția normalei la suprafață, respectiv \bar{T} - reprezintă *forța de frecare de*

alunecare și împiedică deplasarea (alunecarea) punctului după direcția tangentei suprafață.

Forța de frecare de alunecare variază între limitele $[0, T_{\max}]$, unde $T_{\max} = \mu \cdot N$ și $\mu > 0$. Coeficientul μ de proporționalitate dintre forța de frecare maximă și normala la suprafață se numește **coeficient de frecare de alunecare** (adimensional).

Observație : $T = \mu \cdot N$ reprezintă condiția de echilibru *la* limita de alunecare, respectiv iar $T \leq \mu \cdot N$ reprezintă condiția de echilibru *sub* limita de alunecare.

V.2. Echilibrul punctului material rezemat pe o suprafață aspră

În figura 5.2. se consideră un punct material M rezemat pe o suprafață (Σ) de ecuație $f(x, y, z) = 0$, considerată fixă și indeformabilă în timp și caracterizată prin coeficientul de frecare de alunecare μ .

Poziția punctului în raport cu un sistem de referință fix fiind definită prin vectorul de poziție :

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad (5.6)$$

În acest caz *punctul material are două grade de libertate*, adică poziția lui este caracterizată de doi parametri scalari independenți.

Asupra punctului material acționează un sistem de forțe a căror rezultantă este : $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Prin aplicarea axiomei legăturilor, se suprimă legătura și se înlocuiește cu o forță de legătură \vec{L} ale cărei componente sunt: \vec{N} după direcția normalei la suprafață, respectiv \vec{T} după direcția tangentei la suprafață.

Deoarece vectorul gradient care definește direcția și sensul normalei la suprafață în punctul M are expresia,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (5.7)$$

Rezultă că se poate scrie:

$$\vec{N} = \lambda \cdot \nabla f \quad (5.8)$$

unde λ reprezintă un parametru scalar oarecare.

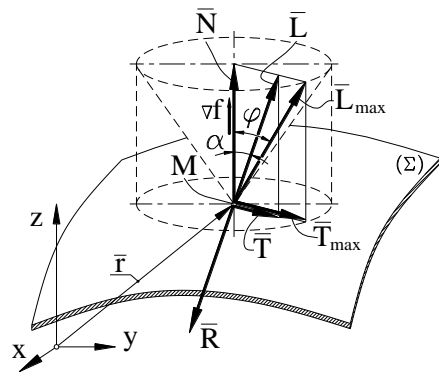


Figura 5.2

Pe baza celor prezentate anterior, ecuația vectorială de echilibru este :

$$\bar{R} + \bar{N} + \bar{T} = 0 \text{ sau : } \bar{R} + \lambda \cdot \nabla f + \bar{T} = 0 \quad (5.9)$$

la care se mai adaugă condiția de echilibru cu frecare $T \leq \mu \cdot N$.

Notând unghiurile α și φ ca în figură, se pot scrie următoarele relații:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{T}{N} \text{ respectiv } \operatorname{tg}\varphi = \frac{T_{\max}}{N} = \mu \quad (5.10)$$

unde φ poartă numele de **unghi de frecare** și are valori cuprinse între $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Deoarece $T \leq T_{\max}$ rezultă că $\operatorname{tg}\alpha \leq \operatorname{tg}\varphi$ și deci : $\alpha \leq \varphi$.

Din ultima relația rezultă că *un punct material se află în echilibru pe o suprafață aspră atunci când vectorul \bar{L} (deci și vectorul \bar{R}) formează cu normala la suprafață un unghi $\alpha \leq \varphi$.*

*Locul geometric al tuturor pozițiilor suportului forței de legătură \bar{L} (deci și al rezultantei \bar{R} și al axei centrale) este un con cu două învelișuri cu vârful în punctul M , unghiul la vîrf 2α și axa normală la suprafață, numit **con de frecare**.*

Condiția necesară și suficientă ca un punct material să se afle în echilibru pe o suprafață aspră, este ca suportul rezultantei forțelor aplicate punctului să se găsească în interiorul conului de frecare din acel punct.

V.3. Echilibrul punctului

În cazul punctului material, toate forțele care acționează asupra acestuia sunt concurente, condiție pentru ca punctul să fie în echilibru acestuia este ca rezultanta forțelor să fie nulă.

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru al punctului material se parcurg următoarele etape :

- se marchează forțele exterioare (dacă punctul material este liber) și cele de legătură (dacă punctul material este supus la legături);
- se alege în mod cât mai convenabil sistemul de referință;
- se scriu ecuațiile scalare de echilibru;
- se rezolvă sistemul de ecuații, determinându-se necunoscutele problemei.

Problema nr. 5.1: În figura 5.1, greutatea G este susținută pe doi scripeți de contragreutățile P_1 , respectiv P_2 . Se cere să se determine poziția de echilibru a greutății G .

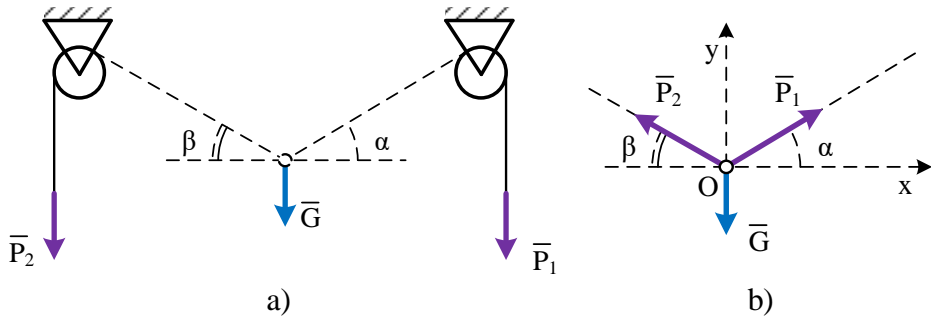


Figura 5.1

R: Greutatea G are două grade de libertate în planul vertical, reprezentate prin unghiurile α și β , măsurate față de ax Ox .

Ecuția vectorială de echilibru este:

$$\vec{G} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$$

care este echivalentă cu două ecuații scalare obținute prin proiecția ecuației vectoriale pe axele Ox , respectiv Oy :

$$\begin{cases} Ox: -P_2 \cdot \cos\beta + P_1 \cdot \cos\alpha = 0 \\ Oy: P_2 \cdot \sin\beta + P_1 \cdot \sin\alpha - G = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\sin\alpha = \frac{G^2 - P_2^2 + P_1^2}{2 \cdot G \cdot P_1}, \quad \sin\beta = \frac{G^2 + P_2^2 - P_1^2}{2 \cdot G \cdot P_2}$$

Pentru ca greutatea G să fie în echilibru trebuie ca $\sin\alpha \leq 1$ și $\sin\beta \leq 1$, adică:

$$G < P_1 + P_2, P_2 < G + P_1, P_1 < P_2 + G$$

ceea ce înseamnă că cele trei forțe trebuie să formeze un poligon închis.

VI. Statica solidului rigid

În realitate, în studiul echilibrului corpurilor, noțiunea de punct material este insuficientă. Este nevoie deci de introducerea unei noțiuni noi, aceea de *corp material*, care împreună cu simplificările necesare și admisibile permit rezolvarea problemelor practice utilizând instrumentele mecanicii teoretice.

Corpul material are cele trei dimensiuni : lungimea, lățimea și grosimea au ordine de mărime comparabile și are ca elemente caracteristice un volum geometric și o masă distribuită pe unitatea de volum, reprezentând o caracteristică a inerției.

Un corp material este numit solid rigid dacă rămâne nedeforțat fiind supus acțiunilor mecanice care au tendința să le schimbe forma.

În studiul echilibrului solidului rigid, la fel ca și în cazul punctului material, se impune cunoașterea numărului de grade de libertate. Astfel, un solid rigid poate fi considerat :

- liber, adică poate ocupa orice poziție în spațiu ;
- supus la legături, adică este obligat să respecte anumite restricții geometrice ;

Observație : studiul echilibrului solidului rigid este asemănător cu cel al echilibrului punctului material.

Forța reprezintă măsura interacțiunii dintre solidul rigid și alte corpuri materiale. În studiul echilibrului solidului rigid se iau în considerare două mari categorii de forțe :

- *forțe date* sau *forțe exterioare active* : nu depind de mișcarea solidului rigid ;
- *forțe exterioare pasive* : care depind de unele forțe exterioare active sau sunt determinate de mișcarea solidului rigid.

Solidul rigid supus la legături este un solid rigid care are o interacțiune mecanică cu un corp, fie prin contact direct, fie prin intermediul unor forțe sau restricții geometrice.

VI.1. Tipuri de forțe

VI.1.1. Greutatea (forța de atracție a Pământului)

Greutatea reprezintă forța de atracție a Pământului exercitată asupra oricărui corp aflat pe suprafața Pământului sau în vecinătatea acestuia. Greutatea unui corp situat la suprafața Pământului este dată de relația:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} \quad (6.1)$$

unde m reprezintă masa corpului, iar \vec{g} reprezintă vectorul accelerației gravitaționale la suprafața Pământului, care este orientat spre centrul planetei

și care are valoarea de $9,80665 \text{ m/s}^2$. Valoarea reală a acesteia depinde de poziția geografică și de altitudine.

Unitatea de măsură pentru greutate, în Sistemul Internațional, este Newton-ul [N], însă în practică se exprimă și în kilograme-forță [kgf]. Un kilogram-forță reprezintă forța egală cu greutatea unui corp cu masa de 1 kg la suprafața Pământului, relația dintre cele două unități de măsură fiind:

$$1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N}$$

Observație: *Greutatea* unui corp nu trebuie confundată cu *masa* acestuia.

Confuzia apare datorită faptului că un corp care cântărește 1 kilogram-forță are masa de 1 kilogram. Diferența dintre cele două noțiuni constă în faptul că masa este o mărime scalară care exprimă cantitativ inerția corpului, iar greutatea este un vector care reprezintă măsura unei interacțiuni între corp și Pământ. *Masa* este o mărime constantă, iar *greutatea* depinde de intensitatea câmpului gravitațional, adică de poziția corpului – latitudine și altitudine.

VI.1.2. Forța de apăsare normală

Când un corp se reazemă pe o suprafață apare o forță cu care suprafața împinge corpul, notată cu \vec{N} , numită **forță de apăsare normală**.

Orientarea forței de apăsare normală depinde de tipul suprafeței, așa cum este ilustrat în figura 6.1.

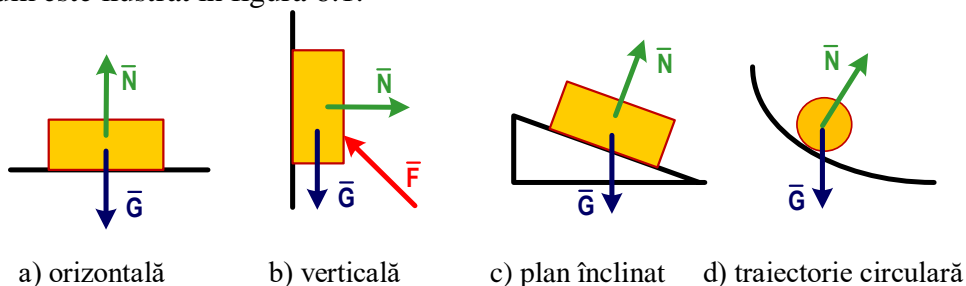


Figura 6.1. Forța de apăsare normală

VI.1.3. Forța de tensiune din fir

În cazul în care corpurile sunt suspendate sau acționate prin fire, apar perechi de forțe de tip acțiune – reacțiune (figura 6.2) care sunt egale în modul și de sens contrar. Firul se consideră ideal, adică este inextensibil și nu are masă.

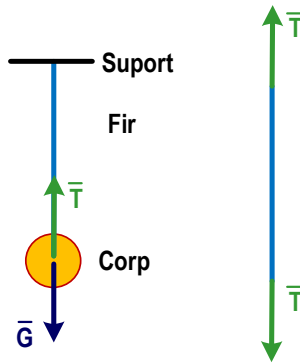


Figura 6.2

VI.1.4. Forța de frecare la alunecare

Acest tip de forță apare la contactul dintre două corpuri, atunci când un corp alunecă peste celălalt corp.

a) repaus	b) repaus	c) repaus	d) mișcare
Nu există forță de tracțiune	Forța de tracțiune mică Forța de frecare statică	Crește forța de tracțiune Forța de frecare statică devine maximă	Frecare cinetică
$G = N$ $F_f = 0$	$G = N$ $F = F_{fstatică}$ $F_{fstatică} < \mu_s N$	$G = N$ $F = F_{fstatică\ max}$ $F_{fstatică} = \mu_s N$	$F = F_{fcinetică}$ $F_{fcinetică} = \mu_s N$

Figura 6.3

În cazul în care cele două corpuri sunt în repaus, nu există deplasare relativă între acestea, deci nu există forța de frecare. Dacă se trage de unul dintre corpuri, apare o forță de frecare, numită *forța de frecare statică*. Dacă forța cu care se trage corpul depășește valoarea maximă a forței de frecare statice, corpul începe să se deplaseze, forța de frecare devenind forța de frecare cinetică, numită și forța de frecare la alunecare. Forța de frecare cinetică este puțin mai mică decât forța de frecare statică și este constantă pe tot parcursul mișcării.

Forțele de frecare sunt orientate în sens opus sensului de deplasare a corpului.

Legile frecării:

- forța de frecare statică maximă și forța de frecare la alunecare nu depind de aria suprafeței de contact;
- forța de frecare este proporțională cu forța de apăsare normală care acționează asupra suprafeței de contact, coeficientul de proporționalitate numindu-se coeficient de frecare static, respectiv cinetic:

$$F_{fsmax} = \mu_s N, \quad F_{fc} = \mu_c N \quad (6.2)$$

Caracteristicile coeficientului de frecare (μ) la alunecare:

1. Coeficientul de frecare la alunecare are valori cuprinse între 0 și 1.
2. Coeficientul de frecare la alunecare depinde de natura materialului din care este confectionat corpul.
3. Coeficientul de frecare la alunecare depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor aflate în contact.

VI.1.4. Forța elastică

Se consideră un fir extensibil, asupra căruia se acționează cu o forță \bar{F} constantă. Considerând deformarea elastică, atunci când acțiunea forței încetează, firul revine la lungimea sa inițială. Conform legii lui Hooke, între forța de deformare și deformarea x a firului există o relație de proporționalitate, astfel:

$$F = k \cdot x \quad (6.3)$$

coeficientul de proporționalitate k se numește constantă elastică. Forța deformatoare este aplicată firului, are același sens cu deformarea firului.

Dacă acțiunea forței deformatoare încetează, firul revine la lungimea sa inițială datorită forței elastice. Forța elastică este proporțională cu deformarea firului, dar în sens opus acesteia, astfel:

$$F_e = -k \cdot x \quad (6.4)$$

Cele mai des întâlnite situații în care apar forțele elastice sunt acele în care în cazul sistemelor mecanice analizate apar resorturi.

VI.2. Echilibrul solidului rigid liber

Solidul rigid **liber** poate ocupa orice poziție în spațiu, nefiind supus la nicio restricție de natură geometrică. Atunci când un solid rigid liber se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe active (efectiv aplicate), poziția

lui de echilibru este determinată *exclusiv* de sistemul de forțe ce acționează asupra lui.

Solidul rigid liber prezintă șase g.d.l. Acestea sunt translațiile și rotațiile în lungul și în jurul axelor unui sistem cartezian de referință.

Condiția necesară și suficientă ca un solid rigid liber supus acțiunii unui sistem de forțe oarecare $\bar{F}_i (i=1 \rightarrow n)$ să fie în echilibru este ca, într-un punct arbitrar din spațiu, **torsorul** sistemului de forțe să fie nul:

$$\begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_O = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Sistemul de ecuații vectoriale este echivalent cu un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute cu ajutorul căruia poate fi studiat echilibrul solidului rigid liber:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

În studiul staticii solidului rigid liber se pot întâlni următoarele tipuri de probleme:

- *directă* – se cunoaște sistemul de forțe care acționează asupra rigidul și se dorește determinarea poziției sale de echilibru;
- *inversă* – se cunoaște poziția de echilibru a rigidului și se dorește determinarea sistemului de forțe care acționează asupra acestuia;
- *mixtă* – se cunosc o parte din forțe cât și din poziția de echilibru și se dorește determinarea celorlalte necunoscute ale sistemului de forțe cât și ale poziției de echilibru.

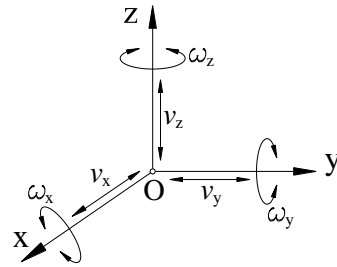


Figura 6.4

Aceste probleme pot fi rezolvate dacă numărul necunoscutelor scalare care intervin în ecuații nu depășește: **șase** – în cazul unui sistem *spațial* de forțe, respectiv **trei** – în cazul unui sistem *plan* de forțe.

Dacă se consideră planul forțelor ca fiind planul xOy atunci sistemul ecuațiilor scalare de echilibru se reduce la

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

adică în această situație sunt disponibile două ecuații de proiecții și una de momente în raport cu axa perpendiculară pe planul forțelor.

VI.3. Echilibrul solidului rigid supus la legături ideale

Poziția și orientarea unui solid rigid depinde de: sistemul de forțe active care acționează asupra lui; caracteristicile geometrice și mecanice ale corpului; existența anumitor restricții numite *legături*, existente independent de sistemul de forțe dat.

La fel ca și în cazul punctului material, în cazul solidului rigid **legătura** reprezintă o restricție de natură geometrică care limitează libertatea de mișcare a acestuia și care prezintă două aspecte:


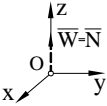

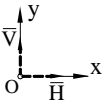

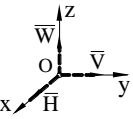

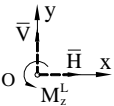

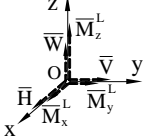
- unul *geometric* constând în reducerea numărului g.d.l.;
- unul *fizic* manifestat prin interacțiunea mecanică între corpurile în contact.

Cu toate că în realitate zona de contact între corpuri este *bidimensională* în general, pentru simplificarea modelării contactul se aproximează cu unul punctiform numit ***punct teoretic de contact***. La el se raportează toate elementele tursorului forțelor de legătură.

În mecanică există următoarele tipuri de legături ale rigidului:

- simpla rezemare într-un punct (reazemul simplu) : anulează translația pe direcția reazemului ;
- articulația sferică (spațială): sunt anulate 3 grade de libertate, fiind posibile doar rotațiile în jurul axelor sistemului de coordonate ;
- articulația cilindrică (plană): sunt anulate două din cele trei grade de libertate ale solidului rigid fiind permisă numai rotația în jurul unei axe perpendiculare pe planul forțelor ;
- încastrarea spațială și plană: suprimă toate gradele de libertate, solidul rigid nemaiavând nicio posibilitate de mișcare ;
- legătura prin fir.

În tabelul următor sunt sintetizate legăturile solidului rigid:

Legătura	Simbol	Reacțiuni	Numărul necunoscutelor introduse
Reazemul simplu			1
Articulația plană			2
Articulația sferică			3
Încăstrarea plană			3
Încăstrarea spațială			6

Studiul echilibrului solidului rigid supus la legături se bazează pe *axioma legăturilor*, astfel că rigidul devine *liber*, asupra lui acționând două sisteme de forțe:

- un sistem al *forțelor active* (date);
- un sistem al *forțelor de legătură* introduse ca echivalent mecanic al legăturilor suprimate.

Reducând cele două sisteme de forțe în raport cu un punct **arbitrar** ales, rezultă:

- un torsesor al forțelor date format din vectorii $[\bar{R}, \bar{M}_0]$;
- un torsesor al forțelor de legătură format din vectorii $[\bar{L}, \bar{M}_0^L]$.

Astfel ecuațiile vectoriale de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{L} = 0 \\ \bar{M}_0 + \bar{M}_0^L = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Prin scalarizare se obține un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute cu ajutorul căruia poate fi studiat echilibrul solidului rigid supus la legături:

$$\begin{cases} R_x + (L_x \equiv H) = 0 \\ R_y + (L_y \equiv V) = 0 \\ R_z + (L_z \equiv W) = 0 \\ M_x + M_x^L = 0 \\ M_y + M_y^L = 0 \\ M_z + M_z^L = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Observație : Acest tip de probleme sunt *static determinate* dacă numărul necunoscutelor scalare ce intervin în rezolvare este:

- ≤ 6 – pentru un rigid tridimensional solicitat de *un sistem spațial de forțe*;
- ≤ 3 – pentru un rigid bidimensional solicitat de *un sistem de forțe situate în planul său*.

Dacă acest plan este, de ex., planul xOy , atunci sistemul ecuațiilor scalare de echilibru se reduce la

$$\begin{cases} R_x + H = 0 \\ R_y + V = 0 \\ M_z + M_z^L = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

VI.4. Echilibrul cu frecare al solidului rigid

Experimental se constată că oricărei mișcări sau tendințe de mișcare relativă între două corpuri în contact se opune o forță de rezistență numită **forță de frecare**.

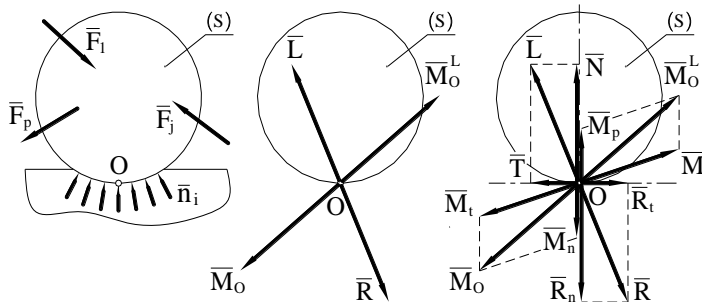


Figura 6.5

Se consideră un solid rigid (S), simplu rezemat în O și supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare \bar{F}_j ($j=1 \rightarrow p$). Datorită deformăției și rugozității corpurilor în zona de contact, în realitate contactul se realizează într-o infinitate de puncte ale unei mici suprafețe create în jurul punctului teoretic de contact O . Aplicând axioma legăturilor, fiecare legătură

geometrică punctiformă se suprimă și se înlocuiește cu o forță de legătură \bar{n}_i ($i=1 \rightarrow n$), de modul și direcție necunoscute.

Reducând sistemul forțelor exterioare \bar{F}_j și a forțelor de legătură \bar{n}_i în raport cu punctul teoretic de contact O , rezultă: un torsesor al forțelor exterioare $[\bar{R}, \bar{M}_0]$ și un torsesor al forțelor de legătură $[\bar{L}, \bar{M}_0^L]$.

Prin descompunerea acestora după normala la suprafață și după o direcție din planul tangent la suprafață în O se obțin componentele:

- pentru sistemul forțelor active $[\bar{R}_n, \bar{R}_t, \bar{M}_n, \bar{M}_t]$;
- pentru sistemul forțelor de legătură $[\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}_p, \bar{M}_r]$.

Ecuțiile vectoriale pentru echilibrul rigidului sunt:

$$\begin{cases} \bar{L} + \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 + \bar{M}_0^L = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Acestea sunt echivalente cu ecuațiile scalare:

$$\begin{cases} R_n = N \\ R_t = T \\ M_n = M_p \\ M_t = M_r \end{cases} \quad (6.12)$$

Interpretarea acestora este următoarea:

- componenta \bar{R}_n a sistemului de forțe active tinde să deplaseze solidul rigid în direcția normalei la suprafața de contact, deplasare împiedicată de componenta \bar{N} a sistemului forțelor de legătură numită **reacțiunea normală**. Aceasta are *direcția normală la suprafață și sensul contrar mișcării simple suprimate*;
- componenta \bar{R}_t a sistemului de forțe active are tendința de a deplasa corpul în planul tangent la suprafață, deplasare care se numește *alunecare* și care este împiedicată de componenta \bar{T} a sistemului forțelor de legătură numită **forța de frecare de alunecare**;
- componenta \bar{M}_n a sistemului forțelor active reprezintă un cuplu ce are tendința de a roti rigidul în jurul normalei la suprafață în punctul de contact, rotație care se numește *pivotare* și care este împiedicată de componenta \bar{M}_p a sistemului forțelor de legătură numită **moment al frecării de pivotare**;
- componenta \bar{M}_t a sistemului forțelor active reprezintă un cuplu ce are tendința de a roti rigidul în jurul unei axe cuprinse în planul tangent la suprafață, rotație care poartă numele de *rostogolire* și care este împiedicată de componenta \bar{M}_r a sistemului forțelor de legătură numită **moment al frecării de rostogolire**.

VI.4.1. Frecarea de alunecare

Aspectele teoretice legate de frecarea de alunecare au fost prezentate în capitolul anterior.

Problema nr. 6.1: Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ este poziționat un corp de masă m . Pentru a menține corpul în repaus pe planul înclinat trebuie aplicată o forță în sus, paralelă cu planul de minim 15 N, iar pentru a deplasa corpul în sus, de-a lungul planului înclinat, cu viteză constantă trebuie aplicată o forță în sus, paralelă cu planul de 30 N.

Se cere să se determine coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan (figura 6.6).

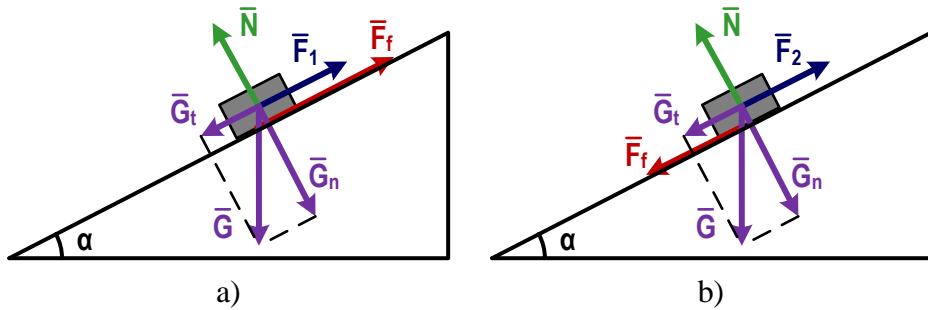


Figura 6.6

R: Cazul a): În figura 6.6.a corpul se află în echilibru static, viteza acestuia fiind nulă ($v = 0$), corpul fiind menținut în repaus pe planul înclinat cu ajutorul forței F_1 . Dacă nu ar fi aplicată această forță corpul ar aluneca în jos, astfel că forța de frecare este orientată în sus, în același sens cu forța F_1 .

Se atașează planului un sistem de coordonate xOy , cu axa Ox orientată paralel cu suprafața planului înclinat și cu sensul pozitiv în sensul de mișcare (adică în jos), și axa Oy perpendiculară pe suprafața planului înclinat, având sensul pozitiv în direcția depărtării de plan.

Ecuția vectorială de echilibru în acest caz este:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} = 0$$

căreia îi corespund două ecuații scalare, corespunzătoare celor două direcții Ox , respectiv Oy :

$$\begin{cases} G_t - F_1 - F_f = 0 \\ N - G_n = 0 \end{cases}$$

unde: $G_t = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$, $G_n = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$, $F_f = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$,

adică:

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - F_1 = 0$$

Cazul b): În figura 6.6.b corpul se află în echilibru dinamic, alunecând în sus de-a lungul planului înclinat cu viteză constantă ($v = \text{const.} \neq 0$), forța de frecare fiind orientată în sens invers mișcării, adică în jos.

În acest caz, ecuația vectorială de echilibru este:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} = 0$$

căreia îi corespund două ecuații scalare, corespunzătoare celor două direcții Ox, respectiv Oy:

$$\begin{cases} F_2 - G_t - F_f = 0 \\ N - G_n = 0 \end{cases}$$

unde: $G_t = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$, $G_n = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$, $F_f = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$, adică:

$$F_2 - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Din relațiile de mai sus se obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute m și μ :

$$\begin{cases} F_1 = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \\ F_2 = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații și înlocuind valorile forțelor și ale unghiului de înclinare al planului, se obține:

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \frac{F_2 - F_1}{F_1 + F_2} = 0,192$$

Problema nr. 6.2.: O bară omogenă de lungime l și greutate G se reazemă de un perete vertical, în punctul A, cu coeficientul de frecare μ_1 și pe o podea orizontală, în punctul B, cu coeficientul de frecare μ_2 . Se cere să se determine unghiul α pe care-l face bara cu orizontala, în poziția de echilibru (figura 6.7).

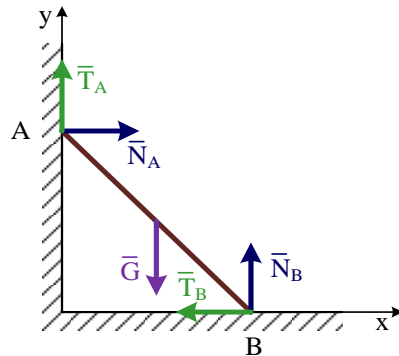


Figura 6.7

R: Asupra scării acționează forța exterioară \vec{G} și un sistem al forțelor de legătură format din reacțiunile normale în punctele de reazem: \vec{N}_A și \vec{N}_B și din forțele de frecare de alunecare: \vec{T}_A și \vec{T}_B .

Pentru ca bara să fie în echilibru trebuie să fie îndeplinite următoarele condiții:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{L} = 0 \\ \vec{M}_A + \vec{M}_A^L = 0 \end{cases}$$

Ecuțiile vectoriale de echilibru sunt echivalente cu următoarele ecuații scalare (două de proiecții și una de momente) :

$$\begin{cases} Ox: N_A - T_B = 0 \\ Oy: N_B + T_A - G = 0 \\ M_A: N_B \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - T_B \cdot l \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă condițiile de echilibru cu frecare la limita de alunecare, în punctele de contact :

$$T_A \leq \mu_1 \cdot N_A, \text{ respectiv } T_B \leq \mu_2 \cdot N_B$$

După înlocuiri rezultă :

$$\begin{cases} Ox: N_A - \mu_2 \cdot N_B = 0 \\ Oy: N_B + \mu_1 \cdot N_A - G = 0 \\ M_A: N_B \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - \mu_2 \cdot N_B \cdot l \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație se deduce valoarea pentru N_A și se introduce în a doua ecuație, de unde se deduce valoarea pentru N_B , adică :

$$N_B = \frac{G}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}$$

Se înlocuiește expresia obținută pentru N_B în ecuația de momente obținându-se :

$$\frac{G}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - \mu_2 \cdot \frac{G}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot l \cdot \sin\alpha = 0$$

de unde rezultă :

$$tg\alpha = \frac{1 - \mu_1 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_2}$$

Problema nr. 6.3. : O scară omogenă de lungime l și greutate G se reazemă de un perete vertical, în punctul A, cu coeficientul de frecare μ_1 și pe o podea orizontală, în punctul B, cu coeficientul de frecare μ_2 . Pe scară urcă un om cu greutatea Q (figura 6.8).

Se cere să se determine unghiul α pe care-l face scara cu orizontala, pentru poziția de echilibru, în funcție de deplasarea d a omului pe scară.

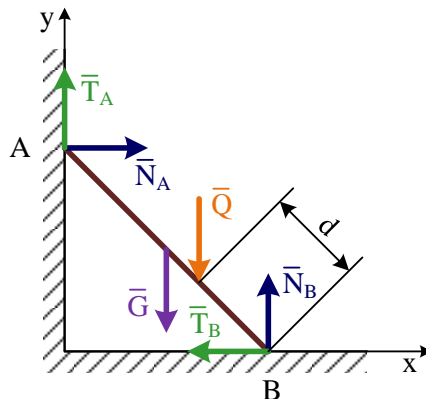


Figura 6.8

R : Asupra scării acționează un sistem de forțe exterioare (greutatea scării \bar{G} și greutatea omului \bar{Q}) și un sistem al forțelor de legătură (reacțiunile normale în punctele de reazem : \bar{N}_A și \bar{N}_B și din forțele de frecare de alunecare : \bar{T}_A și \bar{T}_B).

Pentru ca bara să fie în echilibru trebuie să fie îndeplinite următoarele condiții :

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{L} = 0 \\ \bar{M}_A + \bar{M}_A^L = 0 \end{cases}$$

Ecuțiile vectoriale de echilibru sunt echivalente cu următoarele ecuații scalare (două de proiecții și una de momente) :

$$\begin{cases} Ox: N_A - T_B = 0 \\ Oy: N_B + T_A - G - Q = 0 \\ M_A: N_B \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - Q \cdot (l - d) \cdot \cos\alpha - T_B \cdot l \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă condițiile de echilibru cu frecare la limita de alunecare, în punctele de contact :

$$T_A \leq \mu_1 \cdot N_A, \text{ respectiv } T_B \leq \mu_2 \cdot N_B$$

După înlocuiri rezultă :

$$\begin{cases} Ox: N_A - \mu_2 \cdot N_B = 0 \\ Oy: N_B + \mu_1 \cdot N_A - G - Q = 0 \\ M_A: N_B \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - Q \cdot (l - d) \cdot \cos\alpha - \mu_2 \cdot N_B \cdot l \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație se deduce valoarea pentru N_A și se introduce în a doua ecuație, de unde se deduce valoarea pentru N_B , adică :

$$N_B = \frac{G + Q}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}$$

Se înlocuiește expresia obținută pentru N_B în ecuația de momente obținându-se :

$$\frac{G + Q}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot l \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - Q \cdot (l - d) \cdot \cos\alpha - \mu_2 \cdot \frac{G}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot l \cdot \sin\alpha = 0$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2 \cdot (G + Q) \cdot l} \cdot \left[\frac{(G + Q)}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} - Q \cdot (l - d) \right]$$

VI.4.2. Frecarea de rostogolire

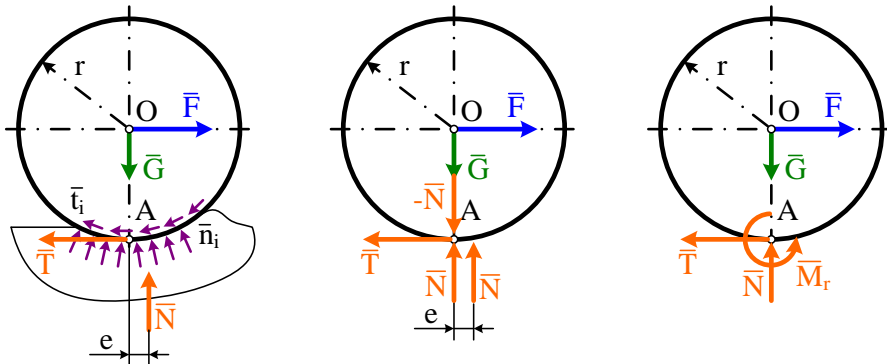


Figura 6.9.

Frecarea de rostogolire reprezintă un fenomen fizic real ce se manifestă printr-un moment rezistent numit *moment al frecării de rostogolire*.

Roata se poate rostogoli în două situații:

- sub acțiunea unei forțe orizontale \bar{F} ce acționează asupra axului roții – cazul **roții trase**;
- sub acțiunea unui moment \bar{M} având ca suport axul roții – cazul **roții motoare**.

Se consideră un disc de rază r ce se rostogolește pe un plan orizontal aspru caracterizat de un coeficient al frecării de alunecare μ . Asupra lui acționează un sistem de forțe exterioare format din greutatea \bar{G} și din forța motoare \bar{F} .

Datorită deformăției și rugozității suprafeței, în realitate contactul are loc pe o mică suprafață situată în jurul punctului teoretic de contact A . În baza axiomei legăturilor, fiecare legătură geometrică punctiformă se suprimă și se înlocuiește cu o reacțiune normală \bar{n}_i ($i=1 \rightarrow n$) și o forță de frecare \bar{t}_i ($i=1 \rightarrow n$), ale căror rezultante sunt:

- reacțiunea normală \bar{N} acționând la o distanță e de punctul A . Suntem obligați să admitem existența distanței e deoarece în caz contrar roata s-ar rostogoli la o valoare oricât de mică a forței \bar{F} , lucru contrazis de practică;
- o forță de frecare \bar{T} al cărui suport se poate considera că trece tangent la suprafață prin punctul A .

Introducând în A două forțe egale și direct opuse de modul N , se observă că sistemul forțelor de legătură este mecanic echivalent cu:

- forțele \bar{N} și \bar{T} aplicate în A ;
- un moment al frecării de rostogolire $M_r = N \cdot e$.

Ecuatiile scalare de echilibru vor fi deci:

$$\begin{cases} F - T = 0 \\ N - G = 0 \\ M_r - F \cdot r = 0 \\ T \leq \mu \cdot N \end{cases} \quad (6.13)$$

Interpretarea lor este următoarea:

- forța motoare \bar{F} are tendința de a deplasa roata prin alunecare pe planul orizontal, deplasare anulată de forța de frecare de alunecare \bar{T} ;
- greutatea \bar{G} are tendința de a deplasa roata după direcția normală la suprafață în A , deplasare anulată de reacțiunea normală \bar{N} ;
- cuplul de mărime $F \cdot r$ are tendința de a roti roata în jurul axei normale la planul său în A , rotație numită *rostogolire* și care este anulată de momentul frecării de rostogolire \bar{M}_r .

Deoarece echilibrul nu are loc decât pentru valori limitate ale forței \bar{F} (crescând forța motoare echilibrul se rupe la un moment dat), rezultă că momentul frecării de rostogolire M_r este limitat. Conform ecuațiilor scalare de echilibru se poate scrie:

$$M_r = N \cdot e = G \cdot e \quad (6.14)$$

Având în vedere că greutate G este bine definită, rezultă că de fapt distanța e este limitată. Valoarea maximă a acestei distanțe se notează

$$e_{\max} = s \quad (6.15)$$

și poartă numele de **coeficient al frecării de rostogolire**. Expresia momentului frecării de rostogolire va fi deci:

$$M_r \leq s \cdot N \quad (6.16)$$

Între coeficientul frecării de rostogolire s și coeficientul frecării de alunecare μ există o relație de legătură ce poate fi stabilită plecând de la cea de a treia ecuație din sistemul ecuațiilor scalare de echilibru, după cum urmează:

$$\begin{aligned} M_r &= F \cdot r \\ s \cdot N &= T \cdot r = \mu \cdot N \cdot r \\ s &= \mu \cdot r \cdot \end{aligned} \quad (6.17)$$

Pentru ca roata să rămână în echilibru este necesar ca $F \cdot r \leq M_r$.

Problema nr. 6.4 : (cazul roții trase)

Se consideră roata de rază r și greutate proprie \bar{G} , asupra căreia acționează o forță \bar{F} (figura 6.10). Considerând cunoscuți coeficienții de frecare la alunecare, μ și cel de rostogolire μ_s , se cere să se determine valoarea forței \bar{F} pentru care roata este în echilibru static.

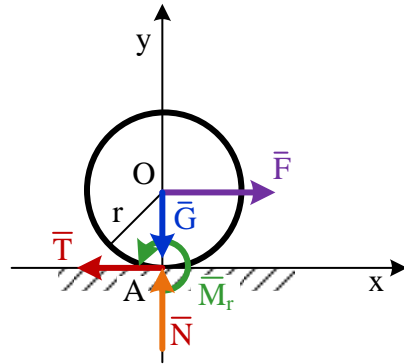


Figura 6.10

R : În acest caz (al roții trase), ecuațiile vectoriale de echilibru sunt :

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{L} = 0 \\ \bar{M}_A + \bar{M}_A^L = 0 \end{cases}$$

Care sunt echivalente cu trei ecuații scalare :

$$\begin{cases} Ox: F - T = 0 \\ Oy: N - G = 0 \\ M_A: M_r - F \cdot r = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă condițiile de echilibru cu frecare la limita de alunecare, respectiv de rostogolire, adică :

$$T \leq \mu \cdot N, \text{ respectiv } M_r \leq \mu_r \cdot N$$

După rezolvarea sistemului de ecuații se obține :

- condiția ca roata să nu alunece : $F \leq \mu \cdot G$;
- condiția ca roata să nu se rostogolească : $F \leq \frac{\mu_r}{r} \cdot G$;

În cazul echilibrului, forța \bar{F} trebuie să fie mai mică decât cea mai mică valoare dintre cele două expresii.

Problema nr. 6.5 : (cazul roții motoare)

Se consideră roata de rază r și greutate proprie \bar{G} , asupra căreia acționează o forță \bar{F} și un moment motor \bar{M} (figura 6.11). Considerând cunoscuți coeficienții de frecare la alunecare, μ și cel de rostogolire μ_s , se cere să se determine valoarea momentului motor \bar{M} pentru a pune roata în mișcare și condiția ca remorcarea să fie posibilă.

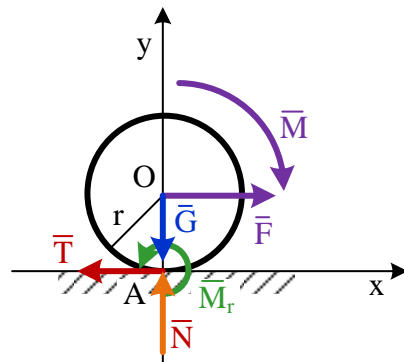


Figura 6.11

R : În acest caz, ecuațiile vectoriale de echilibru sunt :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{L} = 0 \\ \vec{M}_A + \vec{M}_A^L = 0 \end{cases}$$

care sunt echivalente cu trei ecuații scalare :

$$\begin{cases} Ox: F - T = 0 \\ Oy: N - G = 0 \\ M_A: F \cdot r - M_r + M = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă condițiile de echilibru cu frecare la limita de alunecare, respectiv de rostogolire, adică :

$$T \leq \mu \cdot N, \text{ respectiv } M_r \leq \mu_r \cdot N$$

După rezolvarea sistemului de ecuații se obține :

- condiția ca roata să nu alunece : $F \leq \mu \cdot G$;
- condiția ca roata să nu se rostogolească : $M \leq -F \cdot r + \mu_r \cdot G$;

Pentru a pune roata în mișcare este necesar ca momentul motor să aibă mărimea $M = -F \cdot r + \mu_r \cdot G$.

Problema nr. 6.6 : Se consideră roata de rază r și greutate proprie \vec{G} , asupra căreia acționează o forță \vec{F} și un moment motor \vec{M}_O (figura 6.12). Considerând cunoscuți coeficienții de frecare la alunecare, μ și cel de rostogolire μ_s , precum și valoarea unghiului α al planului înclinat, se cere să se studieze condițiile de echilibru.

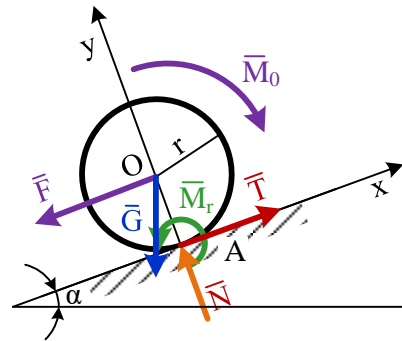


Figura 6.12

R : Sub acțiunea momentului motor \vec{M}_O și a forței \vec{F} roata poate avea tendința de rostogolire în sus și în jos pe planul înclinat și tendința de alunecare doar în jos pe planul înclinat.

Ecuațiile vectoriale de echilibru sunt :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{L} = 0 \\ \vec{M}_O + \vec{M}_O^L = 0 \end{cases}$$

Care sunt echivalente cu trei ecuații scalare :

$$\begin{cases} Ox: T - F - G \cdot \sin\alpha = 0 \\ Oy: N - G \cdot \cos\alpha = 0 \\ M_O: M_O \pm M_r - T \cdot r = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă condițiile de echilibru cu frecare la limita de alunecare, respectiv de rostogolire, adică :

$$T \leq \mu \cdot N, \text{ respectiv } M_r \leq \mu_r \cdot N$$

În ecuația de momente, semnul + corespunde tendinței de rostogolire în sus pe planul înclinat, respectiv semnul – corespunde tendinței de rostogolire în jos pe planul înclinat.

După rezolvarea sistemului de ecuații se obține :

- condiția ca roata să nu alunece : $F = G \cdot (\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$;
- condiția ca roata să nu se rostogolească : $M_O = G \cdot r \cdot \left(\mu \pm \frac{\mu_r}{r}\right) \cdot \cos\alpha$;

Notându-se $c = \frac{M_O}{G \cdot r \cdot \cos\alpha}$, se deosebesc următoarele situații posibile :

- dacă $F \leq G \cdot (\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$ nu este posibilă alunecarea, dar :
 - dacă $\mu - \frac{\mu_r}{r} < c < \mu + \frac{\mu_r}{r}$ roata este în echilibru ;
 - dacă $\mu + \frac{\mu_r}{r} < c$ roata se rostogolește în sus ;
 - dacă $c < \mu - \frac{\mu_r}{r}$ roata se rostogolește în jos ;
- dacă $F > G \cdot (\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$ roata patinează, dar :
 - dacă $\mu - \frac{\mu_r}{r} < c < \mu + \frac{\mu_r}{r}$ roata alunecă în jos fără să se rostogolească ;
 - dacă $\mu + \frac{\mu_r}{r} < c$ roata alunecă în jos și se rostogolește în sus ;
 - dacă $c < \mu - \frac{\mu_r}{r}$ roata alunecă în jos și se rostogolește în jos ;

VI.4.3. Frecarea de pivotare

Frecarea de pivotare reprezintă un fenomen fizic real manifestat printr-un moment rezistent numit *moment al frecării de pivotare*.

Se consideră un arbore vertical, de secțiune transversală inelară, care se reazemă într-un lagăr. Suprafața inelară de contact poartă numele de *suprafață de pivotare*. Asupra arborelui acționează un sistem de forțe exterioare care, în raport cu punctele axei de simetrie se reduce la un torsor minimal (\bar{R}_n, \bar{M}_n) .

În baza axiomei legăturilor, fiecare contact (legătură) punctiform al suprafeței de pivotare se suprimă și se înlocuiește cu o reacțiune normală \bar{n}_i ($i=1 \rightarrow n$) și o forță de frecare de alunecare \bar{t}_i ($i=1 \rightarrow n$).

Acest sistem al forțelor de legătură se reduce în raport cu punctele axei de simetrie la un torsor format din:

- reacțiunea normală \bar{N} care anulează efectul componentei \bar{R}_n a torsorului forțelor active;
- momentul frecării de pivotare \bar{M}_p , care anulează efectul componentei \bar{M}_n a torsorului forțelor active.

Cu notațiile din figură, reacțiunea normală pe elementul de arie dA va fi: $dN = p \cdot dA$

unde: - p reprezintă presiunea creată de forțele exterioare pe unitatea de suprafață $p = \frac{R_n}{A} = \frac{N}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$;

- dA reprezintă elementul de arie : $dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$.

Forța de frecare elementară, tangentă la cercul de rază ρ și dirijată în sens contrar tendinței de rotație imprimată de momentul forțelor active \bar{M}_n va avea valoarea (considerând un coeficient de frecare de alunecare μ constant în toate punctele de contact):

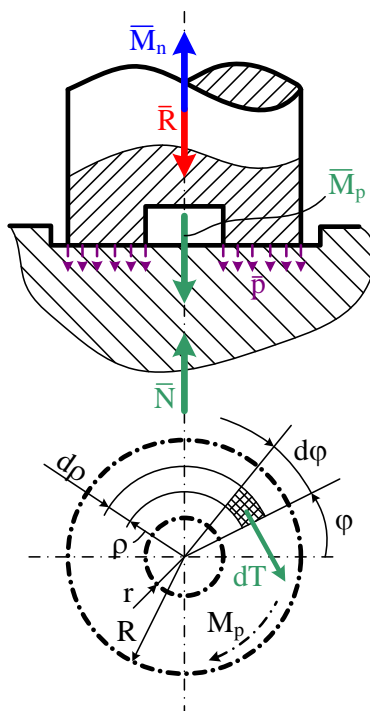


Figura 6.13

$$dT = \mu \cdot dN = \mu \cdot p \cdot dA.$$

Momentul de frecare elementar datorat forței de frecare elementară va fi: $dM_p = \rho \cdot dT$.

Momentul frecării de pivotare pentru întreaga suprafață de contact se obține prin integrare:

$$M_p = \int_A dM_p = \int_A \rho \cdot \mu \cdot p \cdot dA = \mu \cdot p \cdot \iint \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\varphi = \mu \cdot p \cdot \int_r^R \rho^2 \cdot d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu \cdot p \cdot \frac{R^3 - r^3}{3} \cdot 2 \cdot \pi$$

Înlocuind p rezultă:

$$M_p = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot N \quad (6.18)$$

unde se introduce notația :

$$k = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad (6.19)$$

Acest coeficient k poartă numele de **coeficient al frecării de pivotare** și se observă că *depinde atât de forma pivotului (prin cele două raze) cât și de natura suprafețelor în contact* (prin coeficientul frecării de alunecare μ).

Expresia momentului frecării de pivotare va fi deci: $M_p \leq k \cdot N$.

Pentru ca arborele să rămână în echilibru este necesar ca $M_n \leq M_p$.

Problema nr. 6.7: Se cere să se deducă expresia momentului frecării de pivotare în cazul unui disc de frână, asupra căruia acționează două plăcuțe de frână.

Plăcuțele de frână acționează cu o forță P asupra discului, datorită presiunii uniforme p cu care se acționează asupra plăcuțelor.

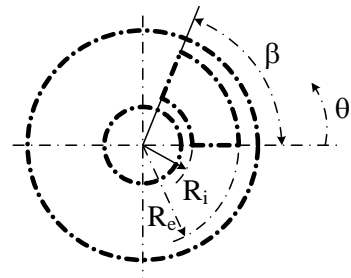


Figura 6.14

R: Se deduce expresia forței de apăsare, astfel:

$$P = p \cdot A = p \cdot \int_0^\beta \int_{R_i}^{R_e} r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{p}{2} \cdot \int_0^\beta (R_e^2 - R_i^2) \cdot d\theta = \frac{p}{2} \cdot (R_e^2 - R_i^2) \cdot \beta$$

Se deduce expresia momentului frecării de pivotare, astfel:

$$M = 2 \cdot \int \mu \cdot p \cdot r \cdot dA = 2\mu p \int_0^\beta \int_{R_i}^{R_e} r^2 \cdot dr \cdot d\theta = \frac{2\mu p}{3} \cdot (R_e^3 - R_i^3) \cdot \beta$$

$$M = \frac{2\mu}{3} \cdot \frac{2 \cdot P}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot (R_e^3 - R_i^3) \cdot \beta$$

$$M = \frac{4 \cdot \mu \cdot P}{3} \cdot \frac{(R_e^3 - R_i^3)}{(R_e^2 - R_i^2)}$$

Se observă că momentul frecării de pivotare nu depinde de unghiul β , ci doar de dimensiunile plăcuței (prin razele R_e , respectiv R_i) și de valoarea forței P cu care plăcuțele acționează asupra discului.

VI.4.4. Frecarea în articulații

Frecarea în articulații reprezintă un fenomen fizic complex, caracterizat în același timp prin *rostogolire și alunecare* (cazul lagărului cu joc) sau numai prin *alunecare* (cazul lagărului fără joc). Se va prezenta în continuare **cazul lagărului cu joc**.

Se consideră un fus (1) de rază r introdus într-un lagăr radial (2). Teoretic, contactul are loc în toate punctele aparținând generatoarei ce trece prin A. Pentru simplificare s-a considerat cazul unei articulații cilindrice plane. Asupra fusului acționează un sistem de forțe exterioare *situate integral în planul discului*, având ca echivalent mecanic un torsor format din:

- rezultanta \bar{R} situată în planul discului sub unghiul α față de normala principală ν ;
- momentul resultant \bar{M}_O orientat după axa perpendiculară în O pe planul discului. Acțiunii momentului \bar{M}_O se opune momentul de frecare din lagăr \bar{M}_f . Suprimând legătura din A, elementele mecanic echivalente sunt \bar{N} , \bar{T} și \bar{M}_r . Ecuațiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referință (τ, ν) considerat, sunt:

$$\begin{cases} N - R \cdot \cos \alpha = 0 \\ T - R \cdot \sin \alpha = 0 \\ M_r - M_O + R \cdot r \cdot \sin \alpha = 0 \\ T \leq \mu \cdot N \\ M_r \leq s \cdot N \end{cases} \quad (6.20)$$

Conform acestora rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \quad (6.21)$$

și

$$M_O \leq R \cdot r \cdot \sin \alpha + s \cdot N \quad (6.22)$$

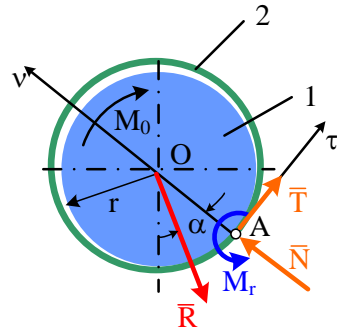


Figura 6.15

sau

$$M_o \leq R \cdot r \cdot \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cdot \cos \alpha \right) \quad (6.23)$$

Având în vedere că $\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ și $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, se obține:

$$M_o \leq \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot R \cdot r,$$

unde se introduce notația : $\mu' = \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}$

Coeficientul μ' poartă numele **coeficient complex al frecării din articulație** și se observă că ține seama atât de dimensiunea fusului (prin raza r) cât și de cele două tipuri de frecări (prin coeficienții μ și s).

Conform principiului acțiunii și reacțiunii momentul de frecare din articulație \bar{M}_f este egal și direct opus lui \bar{M}_o . Expresia lui va fi deci:

$$M_f \leq \mu' \cdot r \cdot R \quad (6.24)$$

Analog, în cazul echilibrului, rezultanta forțelor exterioare \bar{R} este anulată de forța de legătură \bar{L} a cărei expresie este:

- $L = \sqrt{H^2 + V^2}$ în cazul articulației cilindrice;
- $L = \sqrt{H^2 + V^2 + W^2}$ în cazul articulației sferice.

Astfel, momentul de frecare din articulație poate fi pus sub forma:

- $M_f \leq \mu' \cdot r \cdot \sqrt{H^2 + V^2}$ - pentru articulația cilindrică,
- $M_f \leq \mu' \cdot r \cdot \sqrt{H^2 + V^2 + W^2}$ - pentru articulația sferică.

Pentru ca fusul să rămână în echilibru este necesar ca $M_o \leq M_f$.

Observație : Se precizează faptul că fenomenele de frecare ce se produc într-un lagăr sunt mult mai complexe. Cele prezentate mai sus se referă doar la *frecarea uscată*. Cazul în care între fus și lagăr se introduce un lubrifianț poate fi tratat numai cu ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâscoase.

Problema nr. 6.8 : Se consideră un corp cu masa de 50 kg, suspendat de un capăt al unui cablu trecut peste o roată de diametru $D = 120$ mm. Roata este sprijinită pe două lagăre prin intermediul unui ax cu diametrul $d = 15$ mm. Coeficientul de frecare statică între arbore și lagăr este $\mu_s = 0,4$ (figura

6.16.a). Să se determine valorile minime ale tensiunii din capătul liber al cablului pentru cazul în care se dorește ridicarea corpului, respectiv coborârea acestuia. Se consideră că nu există alunecare între cablu și roată.

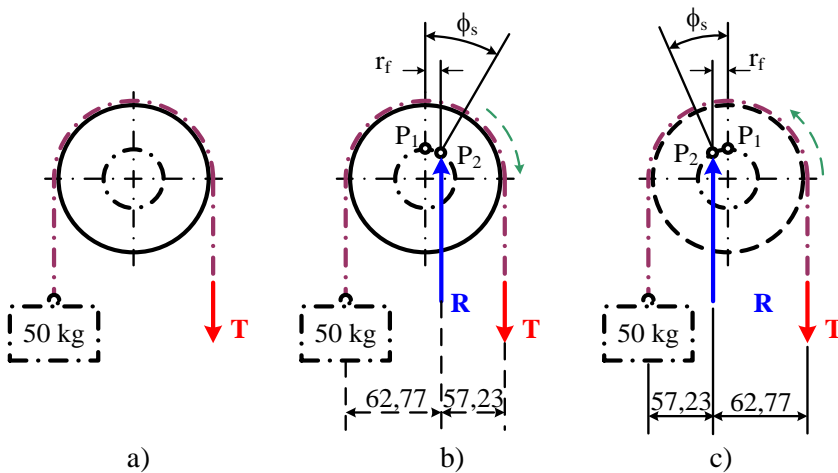


Figura 6.16.

R: Forța de greutate a corpului se notează cu G și are valoarea:
 $G = 50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$.

Când corpul se află în echilibru, valoarea forței aplicate în capătul liber al cablului va fi egală cu cea a forței de greutate, adică $T = 490 \text{ N}$, punctul de contact dintre arbore și lagăr fiind P_1 . Creșterea forței aplicate în capătul liber al cablului, va face ca roata să se rotească (în sensul acelor de ceasornic), astfel că punctul de contact se deplasează în jurul arborelui, devenind P_2 (figura 6.16.b).

Valoarea unghiului de frecare se determină astfel:
 $\phi_s = \tan^{-1} \cdot \mu_s = \tan^{-1} 0,4 = 21,8^\circ$

Distanța r_f măsurată pe orizontală va avea valoarea:

$$r_f = \frac{d}{2} \cdot \sin \phi_s = \frac{d}{2} \cdot \sin(21,8^\circ) = 7,5 \cdot 0,37 = 2,77 \text{ mm}$$

Scriind ecuația de momente în raport cu punctul P_2 se obține:

$$G \cdot (60 + 2,77 \text{ mm}) - T \cdot (60 - 2,77 \text{ mm}) = 0$$

de unde rezultă că: $T = G \cdot \frac{60 + 2,77 \text{ mm}}{60 - 2,77 \text{ mm}} = 490 \cdot \frac{62,77}{57,23} = 537,43 \text{ N}$

Când corpul coboară, discul se deplasează în sens invers acelor de ceasornic, punctul de contact se deplasează spre stânga.

În acest caz, ecuația de mom. în raport cu punctul P_2 este:

$$G \cdot (60 - 2,77 \text{ mm}) - T \cdot (60 + 2,77 \text{ mm}) = 0$$

de unde rezultă că:

$$T = G \cdot \frac{60 - 2,77 \text{ mm}}{60 + 2,77 \text{ mm}} = 490 \cdot \frac{57,23}{62,77} = 446,75 \text{ N}$$

Diferența dintre valoarea forței necesare ridicării corpului și cea necesară coborării este de 90,68 N.

VI.4.5. Frecarea firelor

Un caz des întâlnit în practică îl reprezintă situația în care un fir este trecut peste un tambur (disc fix), fiind în contact cu acesta sub un unghi β . Asupra firului acționează la capetele acestuia forțele T_1 , respectiv T_2 , de valori diferite. Diferența dintre cele două forțe se datorează frecării dintre fir și disc, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ .

Când tendința de mișcare este în sensul acelor de ceasornic (figura 6.17.a), $T_2 > T_1$, respectiv dacă tendința de mișcare este în sens invers acelor de ceasornic $T_1 > T_2$.

Studiul forțelor se realizează în ipoteza că firul este perfect flexibil, inextensibil, iar greutatea acestuia este neglijabilă.

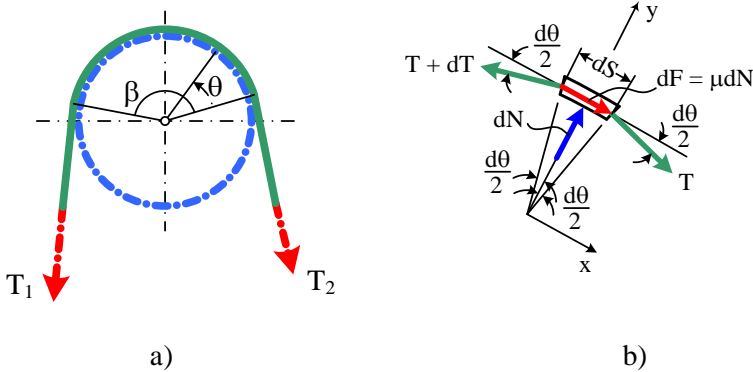


Figura 6.17

În figura 6.17.a este ilustrat un fir trecut peste un tambur și se notează cu β unghiul sub care se află în contact cureaua și roata. Forța de frecare dintre curea și roată are o variație atât ca valoare, cât și ca direcție. Din acest motiv, în studiul forțelor se consideră un element de curea, de lungime ds (figura 6.17.b).

Valoarea forței de frecare este: $dF = \mu \cdot dN$

Această forță se opune mișcării de alunecare a curelei și crește valoarea tensiunii din curea dT .

Aplicând ecuațiile de echilibru corespunzătoare celor două direcții Ox , respectiv Oy (figura 6.17.b), rezultă:

$$O_x: T \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu \cdot dN - (T + dT) \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (6.25)$$

$$O_y: dN - (T + dT) \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

Ținând cont de faptul că pentru valori infinitezimale ale unghiului $d\theta$ sunt valabile relațiile: $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$, $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1$, iar produsul a doi termeni cu valori infinitezimale dT și $\frac{d\theta}{2}$ poate fi neglijat, rezultă că ecuațiile de mai sus pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned} \mu \cdot dN &= dT \\ dN &= T \cdot dT \end{aligned} \quad (6.26)$$

Eliminând dN din cele două relații, rezultă: $\frac{dT}{T} = \mu \cdot d\theta$

Integrând această ecuație între limitele T_2 ($\theta = 0$) și T_1 ($\theta = \beta$), se obține: $\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \mu \cdot \int_0^\beta d\theta$, adică: $\ln \frac{T_1}{T_2} = \mu \cdot \beta$ de unde rezultă: $T_1 = T_2 \cdot e^{\mu \cdot \beta}$

unde: T_1, T_2 reprezintă tensiunile din ramurile curelei, μ reprezintă coeficientul de frecare dintre curea și roata de curea, β reprezintă unghiul de contact dintre curea și roata de curea (în radiani).

Trebuie remarcat faptul că T_1 nu depinde de diametrul tamburului, ci de unghiul β de contact dintre fir și tambur.

Dacă se consideră ambele sensuri de mișcare, rezultă: $T_2 = T_1 \cdot e^{\pm \mu \cdot \beta}$ relații care reprezintă **relațiile lui Euler** pentru frecarea firelor.

Firul va rămâne în echilibru dacă se îndeplinesc condițiile:

$$e^{-\mu \cdot \beta} \leq \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu \cdot \beta} \quad (6.27)$$

Problema nr. 6.9 : În figură, un corp cu masa de 50 kg este suspendat prin intermediul unei curele late, trecute peste un tambur fix. Se cere să se determine valorile limită (minimă și maximă) ale forței P cu care trebuie să se acționeze asupra celuilalt capăt al curelei, astfel încât corpul să nu se deplaseze pe verticală. Coeficientul de frecare dintre curea și tambur este: $\mu = 0,25$.

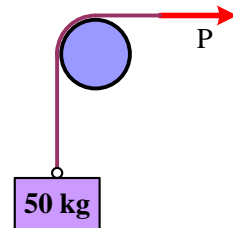


Figura 6.18

R: Forța de greutate a corpului se notează cu G și are valoarea:

$$G = 50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N} .$$

Relația de legătură între forțele din ramurile curelei este $T_1 = T_2 \cdot e^{\mu \cdot \beta}$

Baza logaritmului natural este $e = 2,718$.

Unghiul de contact dintre curea și tambur este de 90° ($\beta = \pi/2$).

Pentru deplasarea iminentă în sus a corpului, se consideră $T_1 = P_{\max}$ și $T_2 = G$.

Aplicând relația rezultă:

$$P_{\max} = G \cdot e^{\mu \cdot \beta} = 490 \cdot 2,718^{0,25 \cdot \pi/2} = 490 \cdot 1,480 = 725,2 \text{ N}$$

Pentru deplasarea iminentă în jos a corpului, se consideră $T_1 = G$ și $T_2 = P_{\min}$.

Aplicând relația rezultă:

$$P_{\min} = G / e^{\mu \cdot \beta} = 490 / 2,718^{0,25 \cdot \pi/2} = 490 / 1,480 = 331,1 \text{ N}$$

VI.4.6. Rigiditatea firelor

În figura 6.19 se consideră un disc de rază R articulat cilindric în centrul său de masă O , cu raza fusului din articulație r , coeficientul complex al frecării din articulație fiind μ' .

Pe disc este înfășurat un cablu care în realitate nu este perfect flexibil, astfel că acesta opune o rezistență la încovoiere numită **rigiditate funiculară**. Aceasta se manifestă prin faptul că în zonele AA_1 și BB_1 unde cablul se înfășoară și se desfășoară de pe scripete, curbura acestuia variază continuu până la valoarea zero și nu brusc cum ar fi posibil în cazul unei flexibilități perfecte.

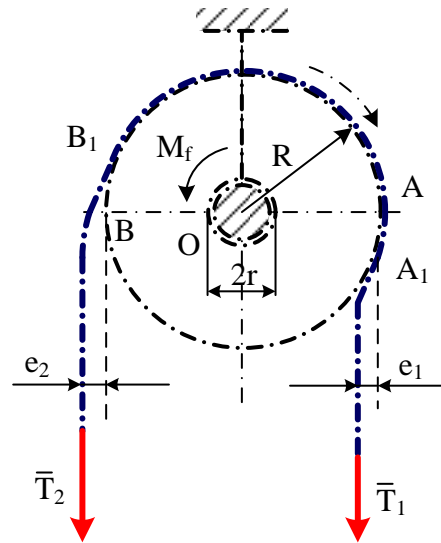


Figura 6.19

Prin urmare, în zona unde se aplică forța motoare \bar{T}_1 , cablul se apropie de axa de rotație cu distanța e_1 , depărtându-se cu distanța e_2 în zona unde acționează forța rezistentă \bar{T}_2 .

Ecuatiile scalare de echilibru în acest caz sunt:

$$\begin{cases} N - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 \cdot (R - e_1) - T_2 \cdot (R + e_2) - \mu' \cdot N \cdot r = 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

de unde rezultă expresia forței motoare :

$$T_1 = \frac{R + e_2 + \mu' \cdot r}{R - e_1 - \mu' \cdot r} \cdot T_2 \quad (6.29)$$

Deoarece e_1 , e_2 , r sunt foarte mici, relația de mai sus devine:

$$T_1 = \left[1 + \frac{e_1 + e_2 + 2 \cdot \mu' \cdot r}{R - e_1 - \mu' \cdot r} \right] \cdot T_2 \cong \left[1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2 \cdot \mu' \cdot r}{R} \right] \cdot T_2 \quad (6.30)$$

Se introduc notațiile : $\lambda = \frac{e_1 + e_2}{R}$, respectiv : $k = 1 + \lambda + \frac{2 \cdot \mu' \cdot r}{R}$

Expresia de mai sus putând fi scrisă sub forma:

$$T_1 \cong k \cdot T_2 \quad (6.31)$$

Relația de mai sus se utilizează în studiul echilibrului sistemelor de scripeti. Prin coeficientul k se pune în evidență atât rigiditatea funiculară cât și frecarea din articulație. Valorile acestui coeficient se determină pe cale experimentală.

VI.5. Echilibrul solidului rigid

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru în cazul solidului rigid, deoarece forțele care acționează asupra lui nu sunt, în general, concurente, pentru echilibrul acestuia se impune condiția ca torsiunea sistemului de forțe ce acționează asupra lui să fie nulă.

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru al solidului rigid se parcurg următoarele etape:

- se întocmește schema mecanică în care se marchează forțele exterioare și de legătură;
- se alege în mod convenabil un sistem de referință;
- se scriu ecuațiile scalare de echilibru;
- se identifică necunoscutele problemei și se rezolvă sistemul de ecuații, determinându-se necunoscutele problemei.

Problema 6.10: Se consideră o bară AB, de lungime $2 \cdot l$, având greutatea \bar{G} , articulată în punctul A și simplu rezemată de un perete vertical în punctul B (figura 6.20.a). Se cere să se determine reacțiunile introduse de legături în punctele A și B în funcție de unghiul α de înclinare a barei față de orizontală.

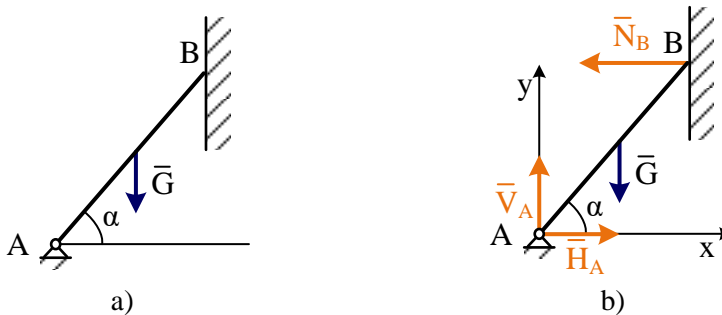


Figura 6.20.

R : Articulația plană din punctul A se înlocuiește cu o reacțiunile \bar{H}_A și \bar{V}_A , iar reazemul simplu din punctul B se înlocuiește cu reacțiunea normală \bar{N}_B (figura 6.20.b).

Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} Ox: & H_A - N_B = 0 \\ Oy: & V_A - G = 0 \\ M_A: & N_B \cdot 2l \cdot \sin\alpha - G \cdot l \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține :

$$\begin{cases} H_A = N_B = \frac{G}{2} \cdot ctg\alpha \\ V_A = G \\ N_B = \frac{G}{2} \cdot ctg\alpha \end{cases}$$

Problema nr. 6.11: Pentru grinda din figura 6.21 se cere să se determine reacțiunile din punctele A și B. Exemplu numeric: $P_1 = 500 \text{ N}$, $P_2 = 200 \text{ N}$, $P_3 = 300 \text{ N}$.

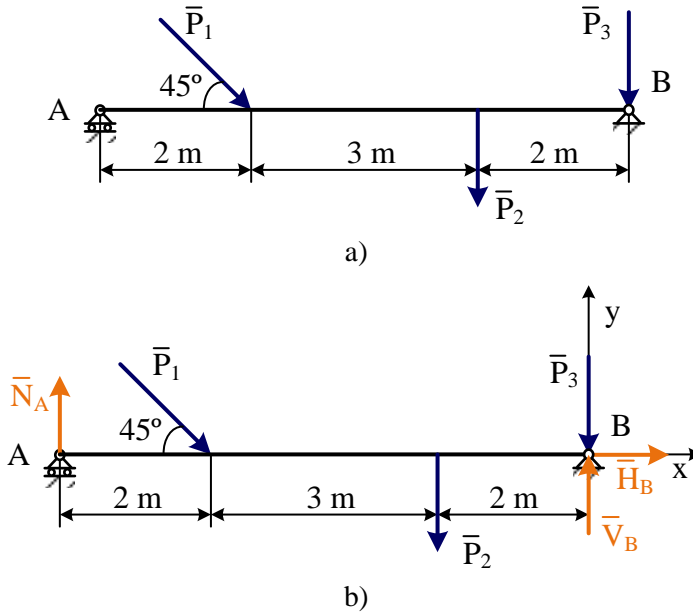


Figura 6.21.

R : În punctul A grindă se reazemă, iar în punctul B, grindă este articulată plan. Prin urmare, în punctul A se introduce reacțiunea normală \bar{N}_A , iar în punctul B se introduc reacțiunile \bar{H}_B , respectiv \bar{V}_B .

Ecuatiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} O_x: H_B + P_1 \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ O_y: N_A + V_B - P_1 \cdot \sin 45^\circ - P_2 - P_3 = 0 \\ M_B: N_A \cdot 7 - P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 - P_2 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație rezultă:

$$N_A \cdot 7 = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 + P_2 \cdot 2 = 500 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 + 200 \cdot 2$$

$$N_A = 107,650 \text{ N}$$

Introducând valoarea obținută pentru N_A în cea de a doua ecuație, rezultă:

$$V_B = P_1 \cdot \sin 45^\circ + P_2 + P_3 - N_A = 353,553 + 200 + 300 - 107,650$$
$$V_B = 745,903 \text{ N}$$

Din prima ecuație rezultă:

$$H_B = -P_1 \cdot \cos 45^\circ = -353,553 \text{ N}$$

Deci:

$$\begin{cases} H_B = -353,553 \text{ N} \\ V_B = 745,903 \text{ N} \\ N_A = 107,650 \text{ N} \end{cases}$$

VII. Echilibrul sistemelor de solide rigide

Prin definiție, un sistem de solide rigide reprezintă o mulțime finită de „n” corpuri materiale aflate în interacțiune mecanică. Un sistem de „n” solide rigide este în echilibru static, dacă fiecare corp din componența sa este în echilibru, respectiv un sistem format din „n” corpuri materiale aflate în echilibru, este la rândul său în echilibru.

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru a sistemelor de solide rigide se pot utiliza metode care se bazează pe:

- teorema echilibrului părților;
- teorema solidificării;

În cazul sistemelor de solide rigide, asupra rigidelor acționează trei categorii de forțe: forțele exterioare (forțele date), forțele de legătură exterioară a sistemului de corpuri și forțele de legătură interioară, care apar între elementele sistemului și care, conform principiului acțiunii și reacțiunii, sunt egale și direct opuse.

VII.1. Teorema echilibrului părților (metoda izolării corpurilor)

Pentru rezolvarea problemelor prin *metoda izolării corpurilor*, se parcurg următoarele etape:

- se izolează corpurile și se impune condiția pentru fiecare corp în parte ca tursorul de reducere să fie nul;
- se întocmesc schemele mecanice în care se reprezintă forțele exterioare, de legătură exterioară și de legătură interioară;
- se alege în mod convenabil sistemul de referință, pentru fiecare corp în parte;
- se scriu ecuațiile scalare de echilibru pentru fiecare corp în parte;
- se identifică necunoscutele problemei și se rezolvă sistemul de ecuații, determinându-se necunoscutele.

Problema nr. 7.1 : Se consideră sistemul format dintr-un disc de greutate Q și rază r și o bară de lungime l , având greutatea G . Discul este rezemat cu frecare pe o suprafață orizontală (în punctul A), iar bara este articulată în punctul O cu discul și este rezemată fără frecare în punctul B , de un perete vertical, față de care se află la unghiul α . Se cere să se determine coeficientul de frecare la alunecare μ , respectiv coeficientul de frecare la rostogolire s , din punctul B , astfel încât sistemul să fie în echilibru. Se neglijează frecarea din articulația O (figura 7.1).

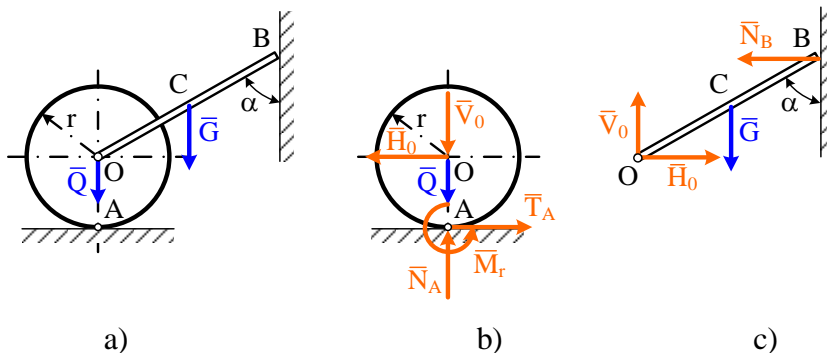


Figura 7.1.

R: Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură. În punctul A se introduc forța de frecare la alunecare T și momentul frecării de rostogolire M_r care se opun tendințelor de alunecare și rostogolire (figura 7.1.b).

În punctul O se introduc reacțiunile H_0 , respectiv V_0 , iar în punctul B se introduce reacțiunea normală N_B (figura 7.1.c).

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp în parte, astfel:

$$\text{- pentru disc: } \begin{cases} T_A - H_0 = 0 \\ N_A - Q - V_0 = 0 \\ M_r - H_0 \cdot r = 0 \end{cases} \text{ pentru bară: } \begin{cases} H_0 - N_B = 0 \\ V_0 - G = 0 \\ G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha - N_B \cdot l \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_A \leq \mu \cdot N_A \\ M_r \leq s \cdot N_A \end{cases}$$

Din ecuația de momente scrisă pentru bară rezultă: $N_B = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Din primele două ecuații scrise pentru bară, rezultă:

$$V_0 = G, \quad H_0 = N_B = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Înlocuind expresia lui V_0 în a doua ecuație scrisă pentru disc, rezultă:

$$N_A = Q + G$$

Înlocuind expresia lui H_0 în ecuația de momente scrisă pentru disc și înlocuind în ultima relație termenii, rezultă:

$$s \cdot (Q + G) - \frac{1}{2} \cdot G \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot r = 0 \text{ sau } s \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot \operatorname{tg} \alpha}{(Q + G)} \cdot r$$

În mod asemănător, înlocuind termenii în a patra ecuație scrisă pentru disc, rezultă:

$$\frac{1}{2} \cdot G \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \cdot (Q + G) \quad \text{sau} \quad \mu \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot \operatorname{tg} \alpha}{(Q + G)}$$

Relațiile deduse pentru s și μ respectă relația de legătură între coeficientul frecării de rostogolire și coeficientul frecării de alunecare:

$$s = \mu \cdot r$$

VII.2. Teorema solidificării

Metoda se bazează pe ipoteza că dacă un sistem de solide rigide libere sau supuse la legături este în echilibru static, atunci el poate fi considerat ca un solid rigid unic obținut prin solidificarea sistemului inițial.

Pentru aplicarea acestei metode se procedează astfel:

- se consideră sistemul de solide rigide ca un singur corp material;
- asupra sistemului de solide rigide se aplică forțele exterioare (active) și se introduc forțele și momentele corespunzătoare legăturilor acestuia;
- se alege în mod convenabil un sistem de referință;
- se scriu și se rezolvă ecuațiile de echilibru static;

Metoda se aplică doar atunci când se dorește cunoașterea reacțiilor datorate legăturilor introduse.

Problema nr. 7.2 : În figura 7.2 este ilustrată o grindă cu zăbrele asupra căreia acționează două forțe de modul P . Se cere să se determine reacțiunile din punctele A și B.

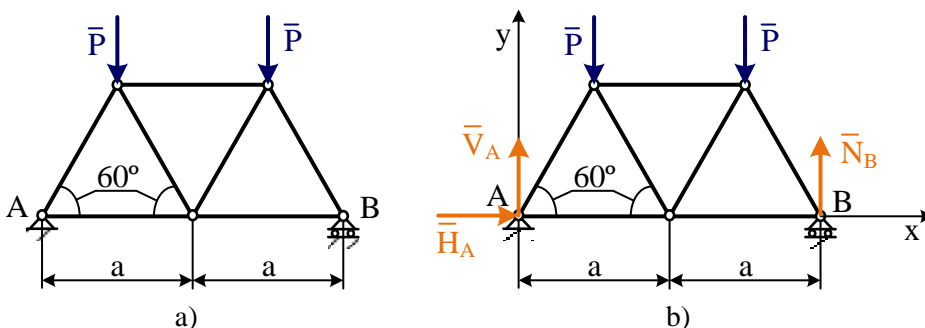


Figura 7.2.

R : Pentru ca grinda cu zăbrele să formeze un ansamblu rigid, static determinat și imobil, între numărul barelor b și numărul nodurilor n trebuie să existe relația

$$b = 2 \cdot n - 3,$$

condiție evident satisfăcută deoarece $b = 7$ și $n = 5$.

Pentru determinarea reacțiilor exterioare se utilizează *metoda solidificării* conform căreia se consideră grinda ca un singur rigid, supus acțiunii forțelor exterioare (date) și a forțelor de legătură exterioară.

În punctul A se introduc reacțiunile H_A , respectiv V_A , iar în punctul B se introduce reacțiunea N_B .

Ecuatiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + N_B - 2 \cdot P = 0 \\ N_B \cdot 2 \cdot a - P \cdot \frac{3a}{2} - P \cdot \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Din ultima relație, rezultă :

$$N_B = P$$

Înlocuind expresia lui N_B în a doua ecuație rezultă :

$$V_A = P$$

În final rezultă :

$$V_A = N_B = P, \quad H_A = 0$$

Bibliografie:

- [1] Mechanics – Theory and Applications, Editura UT Press, ISBN: 978-606-737-061-4, 433 pagini, 2015;
- [2] Negrean, I. ș.a. - Mecanică – Teorie. Aplicații, Editura UTPress, ISBN: 978-973-662-523-7, 544 pagini, 2012;
- [3] Bratu, P. – Curs Mecanica Teoretică – I Statică, Universitatea Dunărea de Jos, Galați, 2008, 220 pag;
- [4] Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B. – Mecanică tehnică, E.D.P., București, 1982, 447 pag;
- [5] Ispas, V. ș.a. – Mecanica, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1997, ISBN 973 – 35 – 0697 – 4, 450 pag;
- [6] Itul, T., Haiduc, N. – Mecanica, Editura UTPress, Cluj-Napoca, 2012, ISBN 978 – 973 – 662 – 704 – 0, 308 pag;
- [7] Pytel, A. Kiusalaas, J. – Engineering Mechanics. Statics. Third Edition, Cengage Learning, ISBN-13: 978-0-495-24469-1, ISBN-10: 0-495-24469-4, USA, 2010, 601 pag;
- [8] Hibbeler, R.C. – Engineering Mechanics. Statics and Dynamics, Fourteenth EDITION, Published by Pearson Prentice Hall, Pearson Education, Inc., Hoboken, New Jersey 07030, ISBN-10: 0-13-391542-5, ISBN-13: 978-0-13-391542-6, 2016, 1469 pag;
- [9] Meriam, J.L., Kraige, L.G. – Engineering Mechanics, Volume I, Statics, Fifth Edition, John Wiley and Sons Inc., 2002, ISBN 0 – 471 – 40646 – 5, 517 pag;
- [10] Darbyshire, A. – Mechanical Engineering, Third Edition, Elsevier, ISBN: 978-0-08-096577-2, USA, 2010, 422 pag;
- [11] Bird, J.O., Ross, C.T.F. - Mechanical Engineering Principles, Second Edition, Published by Routledge, 2012, ISBN: 9780415517850 (pbk) ISBN: 9780203121146 (ebk), 313 pag;
- [12] Huidu, T., Popa, A., Marin, C. – Culegere de probleme și teme aplicative de mecanică – Statica, Editura Macarie, Târgoviște, ISBN 973 - 8135 - 61 – 3, 2001, 162 pag;

[13] Beer, P.F., Johnston, E.R., Mazurek, D.F., Cornwell, Ph., J. – Vector Mechanics For Engineers. Statics and Dynamics, Tenth Edition, Published by McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-339813-6, 2013, 1397 pag;

[14] Peride, N., Chițu, M-G, *Curs de Mecanică pentru ingineri*, Editura Bren 2002, ISBN 973 – 6480 – 94 – 1, 271 pag;

https://www.ct.upt.ro/users/ViorelUngureanu/Curs1_MC.pdf

<http://www.c4s.utcluj.ro/Publicatii/Cursuri/Cursul%20nr%201.pdf>

<https://sites.google.com/site/mecanica1statica/>