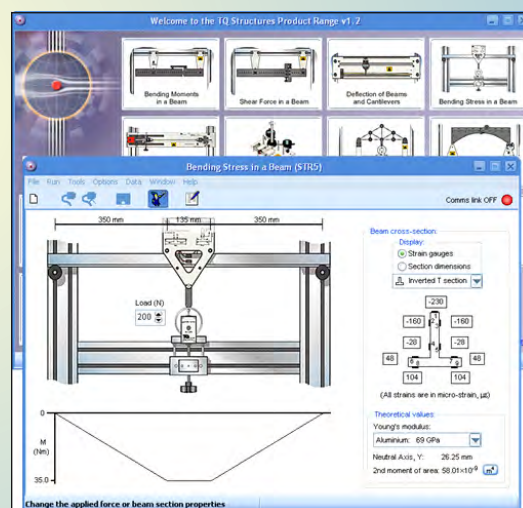
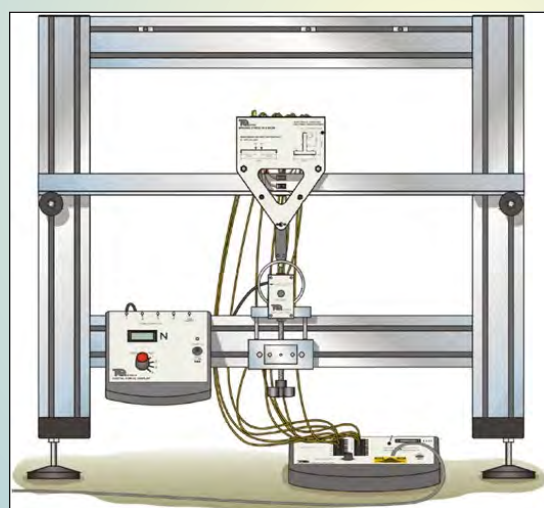


Mihail HĂRDĂU Mircea Cristian DUDESCU Mihaela SUCIU
Mihaela SIMION Radu Ștefan CHIOREAN Ioana Alexandra RAD

METODE EXPERIMENTALE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR



Îndrumător de lucrări de laborator

UTPRESS
Cluj-Napoca, 2018
ISBN 978-606-737-282-3



Editura U.T. PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Prof.dr.ing. Liviu Vaida
Prof.dr.ing. Dan Opruța

Copyright © 2018 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-282-3

PREFAȚĂ

Îndrumătorul de lucrări “*Metode Experimentale în Rezistența Materialelor*” completează un gol în literatura tehnică de specialitate dedicată laboratoarelor disciplinei de Rezistența materialelor, laboratoare frecventate de studenții facultăților cu profil mecanic.

În egală măsură prezenta lucrare are meritul că acordă o mare importanță determinărilor experimentale, cu rezultate verificabile atât prin calcule analitice cât și prin programe numerice de calcul specifice fiecărei lucrări în parte, în majoritatea cazurilor.

Conținutul lucrării cuprinde, în ordine logică, termenii și noțiunile de bază ale Rezistenței materialelor, în corelație directă cu planurile de învățământ și programele analitice uzuale. Prezentarea grafică de înaltă acuratețe asigură utilizatorilor înțelegerea și însușirea metodelor de măsurare, respectiv a modalităților de verificare a rezultatelor prin calcul analitic și numeric.

Din punct de vedere pedagogic Îndrumătorul de lucrări răspunde exigențelor actuale ale proceselor de învățare, de formare în domeniul ingineriei mecanice, cu rezultat direct în dezvoltarea deprinderilor și abilităților cursanților.

Această lucrare a fost realizată de către autori după o lungă perioadă de timp în care au derulat activități didactice în laboratoarele catedrei dotate cu standuri experimentale moderne. În esență, prin cele 11 lucrări prezentate, îndrumătorul de lucrări reprezintă un progres în procesul de învățare prin sistematizarea informațiilor și prin conținutul științific adecvat studenților din anul II, care facilitează procesul de învățare.

Coordonarea științifică a Îndrumătorului de lucrări de laborator a fost realizată de Prof.dr.ing. Mihail HĂRDĂU, Prof.dr.ing. Mircea Cristian DUDESCU, Prof.dr.ing. Mihaela SUCIU, iar coautorii au adus următoarele contribuții la realizarea acestei lucrări: Asist.dr.ing. Mihaela SIMION: *Capitole*: Listă de Simboluri, Noțiuni introductive, Bibliografie, Anexe; *Lucrări*: LE3, LE6, LE8 ÷ LE11 (165 pagini); Asist.dr.ing. Radu Ștefan CHIOREAN: *Lucrări*: LE2, LE4, LE7 (28 pagini); Asist.dr.ing. Ioana Alexandra RAD: *Lucrări*: LE1, LE5 (18 pagini).

Autorii

UTCN, Cluj-Napoca
Februarie 2018

CUPRINS

PREFAȚĂ	
LISTĂ DE SIMBOLURI	1
NOȚIUNI TEORETICE	4
LE1. DETERMINAREA FACTORULUI DE CONCENTRARE AL TENSIUNILOR PRIN FOTOELASTICIMETRIE PLANĂ	17
LE2. DETERMINAREA FORȚEI TĂIETOARE ÎNTR-O GRINDĂ SOLICITATĂ LA ÎNCOVOIERE PLANĂ	24
LE3. DETERMINAREA MOMENTULUI ÎNCOVOIETOR ÎNTR-O GRINDĂ SOLICITATĂ LA ÎNCOVOIERE PLANĂ	34
LE4. STUDIUL TENSIUNII NORMALE ÎNTR-O GRINDĂ UTILIZÂND TENSOMETRIA ELECTRICĂ REZISTIVĂ	45
LE5. STUDIUL TORSIUNII BARELOR CU SECȚIUNE CIRCULARĂ	54
LE6. DETERMINAREA DEFORMAȚIILOR GRINZILOR DREPTE	65
LE7. STUDIUL ÎNCOVOIERII OBLICE A GRINZILOR DREPTE	83
LE8. STUDIUL GRINZILOR DREPTE STATIC NEDETERMINATE	91
LE9. STUDIUL CADRELOR PLANE STATIC NEDETERMINATE	118
LE10. DETERMINAREA DEFORMAȚIILOR BARELOR CURBE ȘI COTITE PLANE	143
LE11. DETERMINAREA FORȚEI CRITICE DE FLAMBAJ A BARELOR DREPTE	174
BIBLIOGRAFIE	193
ANEXE	195

LISTĂ DE SIMBOLURI

Simbol	Denumire	Unitate de măsură ⁽¹⁾
$\sigma, \sigma_{ef}^{(2)}, \sigma_{max}^{(3)}$	tensiune normală	N/mm ²
$\tau, \tau_{ef}, \tau_{max}$	tensiune tangențială	N/mm ²
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	tensiune tangențială, unde primul indice este al axei paralele cu tensiunea, al doilea indice fiind al normalei la secțiune	N/mm ²
σ_p	tensiune (limita) de proporționalitate	N/mm ²
σ_e	tensiune (limita) de elasticitate	N/mm ²
σ_c	tensiune (limita) de curgere	N/mm ²
σ_r	tensiune (limita) de rupere	N/mm ²
σ_a	tensiune (rezistența) admisibilă la tracțiune	N/mm ²
$\sigma_{max}, \sigma_{nom}$	tensiune maximă, respectiv tensiune nominală	N/mm ²
ε	deformație specifică liniară	adimens. ⁽⁶⁾ sau în %
ε_p	deformație specifică liniară de proporționalitate	adimens. sau în %
ε_e	deformație specifică liniară de elasticitate	adimens. sau în %
ε_t	deformație specifică liniară totală	adimens. sau în %
E	modul de elasticitate longitudinală (la întindere, compresiune și încovoiere)	N/mm ²
G	modul de elasticitate transversală (la forfecare și torsiune)	N/mm ²
γ	deformație specifică unghiulară	radiani sau grade [°]
R	rezultanta forțelor	N
M	rezultanta momentelor (sau moment resultant)	N·mm
N_x	forța axială sau forța normală la secțiune	N
T_y, T_z	forța tăietoare (de forfecare) după axa „y”, respectiv, axa „z”	N
$M_x = M_t$	moment de torsiune (sau de răsucire)	N·mm
$M_y = M_{iy}, M_z = M_{iz}$	moment încovoietor după axa „y”, respectiv, axa „z”	N·mm
M_t	moment de torsiune (sau cuplu de torsiune)	N·mm
$N_{cap}, T_{cap}, M_{i\ cap}$	forța axială, forța tăietoare, respectiv, moment încovoietor capabil (sau maxim) pe care le poate suporta piesa	N, N·mm
$F_1, F_2, \dots, F_n, F_i$	forțe concentrate exterioare (sarcini exterioare)	N
Δl	deformație liniară, lungire	mm
l	lungime finală a barei	mm
l_0	lungime inițială a barei	mm
Δs	deformație unghiulară sau luncarea specifică	radiani sau grade [°]
φ	unghi de rotație al secțiunii	radiani sau grade [°]
θ	răsucire specifică	radiani sau grade [°]
V	volum a elementului paralelipipedic elementar	mm ³
u, v, w	deplasare după axa Ox, Oy și respectiv, axa Oz	mm
$A, A_{ef}, A_{nec}^{(4)}$	aria, aria efectivă, respectiv, aria necesară a secțiunii transversale	mm ²

B, H B_{ef}, H_{ef} B_{nec}, H_{nec}	lățime și înălțime, efective, respectiv, necesare, pentru secțiunea dreptunghiulară	mm
a, a_{ef}, a_{nec}	latura, efectivă, și respectiv, necesară pentru secțiunea pătrată	mm
D, d D_{ef}, d_{ef} D_{nec}, d_{nec}	diametrul exterior, respectiv, interior, efectiv și, respectiv, necesar, pentru secțiunea circulară plină și inelară, efective respectiv, necesare	mm
r_{max}	raza maximă pentru secțiunea circulară plină	mm
k_1	coeficient (calculat sau dat) care exprimă raportul dintre H și B	adimensional
$I_z, I_y, I_{min}, I_p,$ I_{zy}	momentul de inerție axial, după axa „z” și axa „y”, minim, polar, respectiv, momentul de inerție centrifugal	mm ⁴
W_z, W_y, W_p	modul de rezistență axial, după axa „z” și axa „y”, respectiv, modul de rezistență polar	mm ³
S_z, S_y	momentul static, în raport cu axa „z” și axa „y”	mm ³
i_z, i_y, i_{min}, i_p	raza de girație (de inerție), după axa „z” și axa „y”, minimă, respectiv, raza de girație polară	mm
m_{iz}, m_{iy}	momente încovoietoare, după axa „z”, respectiv, axa „y”, calculate pentru forță unitară (=1)	N·mm
K_t	coeficient de concentrare al tensiunilor	adimensional
δ	diferența de drum optic	
σ_1, σ_2	tensiuni principale într-un punct	N/mm ²
C	coeficient de material	adimens.
ξ, η	direcții principale ale razei incidente	
k_1	numărul de ordine al izocromatei	adimensional
σ_0	constanta materialului studiat	N/mm ²
G_1	greutatea aplicată	kg
$l, l_0 \div l_4$	lungime (pentru grinzi, bare etc.) sau distanța dintre două reazeme	mm
a, b, c, s	distanța între puncte și forțe aplicate	mm
b_f	brațul forței	mm
$V_n, H_n, M_{i n}^{(5)}$	reacțiunea verticală și orizontală, respectiv, momentul încovoietor, unde $n = 1, 2, 3, \dots$ etc	N, N·mm
T_{stg}, T_{dr}	forța tăietoare situată în stânga, respectiv, în dreapta secțiunii	N
$M_{i stg}, M_{i dr}$	moment încovoietor situat în stânga, respectiv, în dreapta secțiunii	N·mm
ΔR	modificarea rezistenței electrice a traductorului	Ω
K_2	constanta traductorului (Gauge Factor)	adimensional
ϵ_1	deformație specifică longitudinală a rețelei traductorului tensometric	adimens. sau în %
R	rezistența electrică a rețelei nedeformate a traductorului	Ω
ΔR	modificarea rezistenței electrice a traductorului ca urmare a deformației	Ω
y	distanța de la fibrele extreme ale secțiunii transversale la axa geometrică a secțiunii transversale	mm
v_n, δ_n	deplasare sau săgeata (deformația liniară)	mm
$E \cdot I_z$	modulul de rigiditate la încovoiere	N·mm ²

ρ	raza de curbura	mm
h	înălțimea corzii	mm
$\Delta u, \Delta v$	deplasare în direcția de solicitare, respectiv perpendiculară pe direcția de solicitare	mm
S_{ijs}	momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul „j” până la punctul „i”, în raport cu punctul „i” (primul indice), pentru grinda „i – j” static determinată, unde $i, j = 1, 2, 3, \dots$ etc	$N \cdot mm^3$
X_n	necunoscută, unde $n = 1, 2, 3, \dots$ etc	
δ_{ij}	coeficientul necunoscutei X_n	
Ω_i	aria diagramei de momente încovoietoare, unde $i = 0 \div 3$	$N \cdot mm^2$
y_{oj}	ordonata la centrul de greutate al diagramei de momente pentru încărcarea reală în diagrama unitară, unde $j = 0 \div 3$	mm
k	coeficient ce ține seama de forma geometrică a secțiunii transversale	adimensional
R_i, R_e, R_m	raza interioară, exterioară, respectiv, raza medie	mm
B, b, H	dimensiuni geometrice ale secțiunii trapezoidale (baza mare, baza mică și înălțimea)	mm
e_1, e_2	distanța de la baza mică, respectiv, de la baza mare până la axa geometrică a secțiunii transversale	mm
d_e, d_i	distanța de la fibrele extreme (exterioare și interioare) până la axa neutră a secțiunii transversale (secțiune circulară)	mm
r	raza de curbura a axei neutre a secțiunii transversale	mm
e	distanța între axa neutră și axa geometrică a secțiunii transversale	mm
ds	lungime a arcului de curbă infinitezimal (elementară)	
F_0	forță concentrată reală sau fictivă, aplicată în punctul și pe direcția deplasării pentru calculul deplasării δ_h teoretic	N
δ_h, δ_v	deplasare orizontală, respectiv, deplasare verticală	mm
dx	variabila de integrare (lungime infinitezimală sau elementară)	mm
F_{ef}	forța concentrată efectivă	N
F_{cf}	forța critică de flambaj	N
l_f	lungime de flambaj	mm
K	coeficient ce ține seama de modul de rezemare (pentru calculul F_{cf})	adimensional
λ	coeficient de zveltețe sau coeficient de subțirime	adimensional
λ_0, λ_1	coeficient de zveltețe corespunzător limitei de proporționalitate, respectiv, limitei de curgere	adimensional
σ_{cf}	tensiune normală critică de flambaj	N/mm^2
a, b	coeficienți corespunzători pentru un anumit material	adimensional
C_{cf}, C_{impus}	coeficient de siguranță critic la flambaj, respectiv, coeficient de siguranță impus	adimensional

(1) Cu multiplii și submultiplii aferenți unității de măsură

(2) Termenii cu indice „ef” (efectiv) reprezintă valorile efective, reale ale dimensiunilor respectiv, ariilor secțiunilor transversale (care se pot obține prin prelucrări mecanice), sau ale tensiunilor

- (3) Termenii cu indice „max” (maxim) reprezintă valorile maxime
 (4) Termenii cu indice „nec” (necesar) reprezintă valorile calculate ale dimensiunilor respectiv, ale ariilor secțiunilor transversale
 (5) Indicele „n” reprezintă punctul în care apar reacțiunile, respectiv deplasările.
 (6) adimens. sunt mărimile adimensionale (nu au unitate de măsură).

NOȚIUNI INTRODUCATIVE

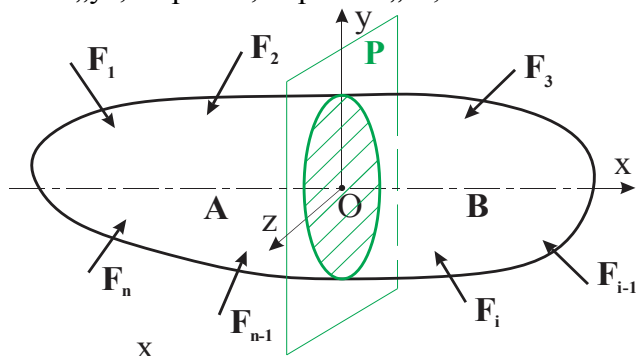
1. Metoda secțiunilor

Metoda secțiunilor se aplică atunci când se calculează eforturile (efort = forță și/sau moment) interioare într-o anumită secțiune transversală a unei piese, solicitată de un sistem de forțe exterioare. Se consideră un solid rigid nedeformabil asupra căruia acționează un sistem oarecare de forțe exterioare F_i , unde $i = 1 \div n$. Se taie corpul cu un plan, perpendicular pe axa geometrică (de simetrie) a acestuia, rezultând două tronsoane, A și B (Fig. 1.a.). Se păstrează una din cele două tronsoane (A), iar sistemul de forțe ce acționează asupra tronsonului înlăturat (B) se înlocuiește, în centrul de greutate al tronsonului A, cu un *torsor*, compus din *rezultanta* R și *momentul resultant*, M . Se atasează secțiunii un sistem ortogonal de referință, în centrul de greutate al secțiunii transversale A. Se pun originile lui R și M în O , O fiind originea sistemului de referință, cu axa Ox dirijată după axa centrului de greutate al tronsonului A. axe ale sistemului spațial ortogonal de referință (Fig. 1.b.), astfel:

- *rezultatnta* R :
 - o componentă normală pe secțiune (N_x), acționând după axa piesei, Ox
 - două componente tangente la secțiune (T_y, T_z), cuprinse în planul secțiunii
- *momentul* M :
 - o componentă normală pe secțiune (M_x), dirijată după axa piesei, Ox
 - două componente cuprinse în planul secțiunii (M_y, M_z).

Solicitările reprezintă modul de reacțiune al materialului la acțiunea sarcinilor exterioare și se pot clasifica, astfel:

- a) dacă $N_x \neq 0$ și toate celelalte 5 componente sunt egale cu zero ia naștere *solicitarea axială*: întinderea și compresiunea (și flambajul);
- b) dacă $T_y \neq 0$ sau $T_z \neq 0$ și toate celelalte 5 componente sunt egale cu zero ia naștere *solicitarea de forfecare sau tăiere* după axa „y”, respectiv, după axa „z”;
- c) dacă $M_x \neq 0$ și toate celelalte 5 componente sunt egale cu zero rezultă *solicitarea de răsucire* sau *torsiune*;
- d) dacă $M_y \neq 0$ sau $M_z \neq 0$ și toate celelalte 5 componente sunt egale cu zero ia naștere *încovoierea* după axa „y”, respectiv, după axa „z”;



a)

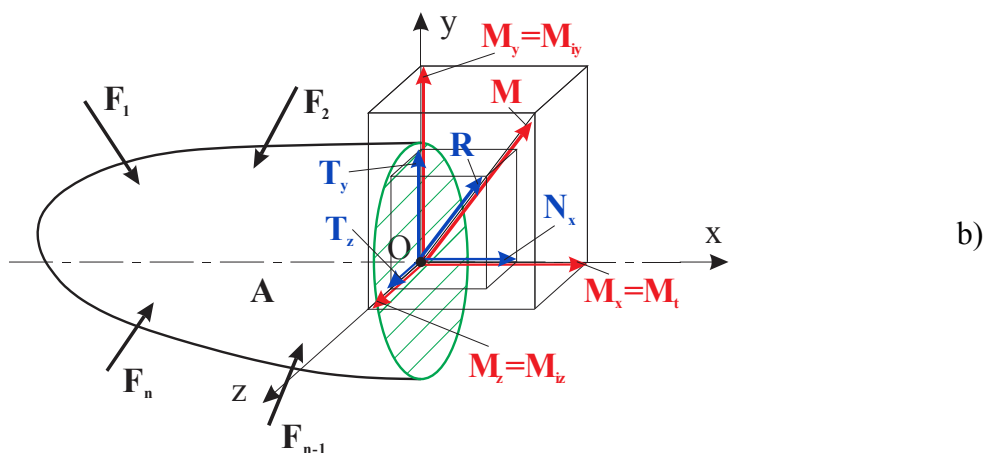


Fig. 1. Metoda secțiunilor: a) Secționarea piesei cu un plan perpendicular pe axa sa; b) Componentele torsorului – eforturile în secțiunea A

Atât rezultanta R cât și momentul M se descompun, fiecare, în câte trei componente, după cele trei

Observație: dacă cel puțin două componente sunt diferite de zero și restul componentelor egale cu zero, atunci rezultă o *solicitare compusă*.

2. Deformații. Deplasări

Deformația reprezintă rezultatul procesului de modificare a formei sau a dimensiunii unui corp sub acțiunea sarcinilor, fără alterarea conținutului de material. Deformațiile se clasifică în:

a) *deformații liniare, lungiri sau scurtări, Δl*

$$\Delta l = l - l_0$$

▪ *deformații specifice liniare, ε* , reprezintă deformația unității de lungime:

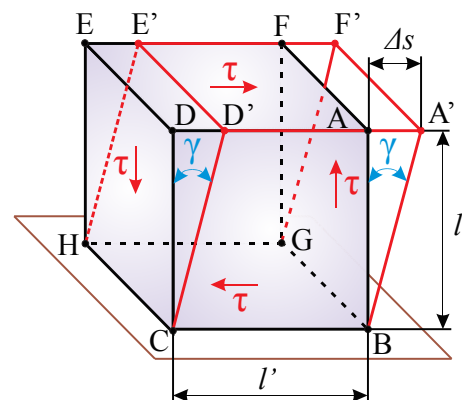
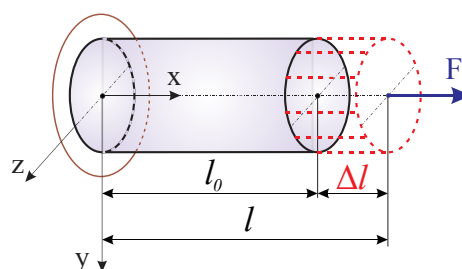
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

b) *deformații unghiulare sau lunecare absolută, Δs*

$$\Delta s = l' \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

▪ *deformații specifice unghiulare, γ (lunecări specifice)* reprezintă modificarea unghiurilor drepte din corp (sau a volumului elementar paralelipipedic din figura alăturată), sub acțiunea tensiunilor tangențiale.

$$\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma = \frac{DD'}{DC}$$



Deplasarea este drumul parcurs de un punct al corpului în decursul deformării (*notații: u după axa Ox , v după axa Oy , w după axa Oz*).

3. Curba caracteristică a materialului. Legea lui Hooke

Curba caracteristică a materialului rezultă prin încercări mecanice (întindere sau compresiune etc.) și oferă informații cu privire la comportarea mecanică a unui material sub acțiunea sarcinilor exterioare, respectiv, a caracteristicilor mecanice și elastice ale acestuia.

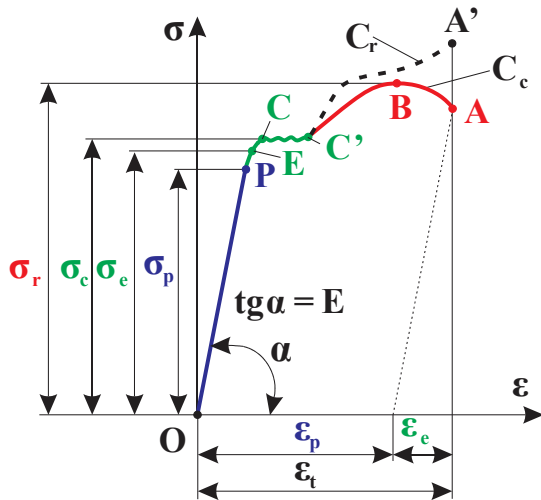


Fig. 2. Curba caracteristică pentru otelul moale

- porțiunea OP , porțiune perfect liniară, limita de proporționalitate (σ_p) sau zona deformațiilor mici, unde este valabilă legea lui Hooke: $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- porțiunea PE , aproape dreaptă în E , limita de elasticitate (σ_e)
- porțiunea EC , materialul începe să curgă în C , limita de curgere (σ_c)
- în punctul B , apare fenomenul de gătuire (σ_r)
- porțiunea BA , se produce ruperea epruvetei
- curba punctată $C'A'$ reprezintă curba caracteristică reală, C_r , iar C_c reprezintă curba convențională sau curba caracteristică inginerească.

Legea lui Hooke poate fi stabilită prin încercări mecanice (întindere, compresiune, forfecare, încovoiere și răsucire) și exprimă o proporționalitate/liniaritate directă între tensiuni și deformații, în zona de elasticitate a materialului.

- pentru sollicitarea axială (întindere, compresiune): $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- pentru sollicitarea de forfecare: $\tau = G \cdot \gamma$

4. Solicitări simple

4.1. Solicitarea axială

Solicitarea axială, de întindere sau compresiune, este solicitarea simplă la care efortul în secțiunea normală pe axa geometrică a barei este o forță normală pe secțiune, N_x .

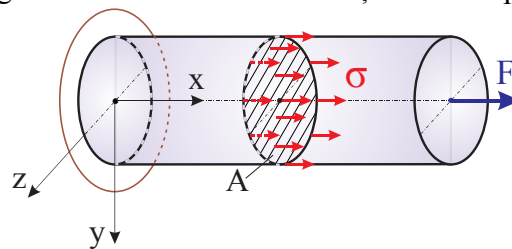


Fig. 3. Bară circulară sollicitată axial (la întindere) de forța F

- Calculul tensiunii normale

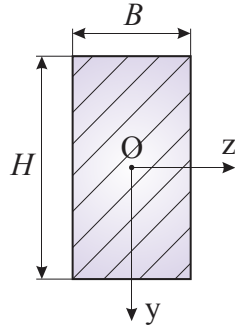
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

- Dimensionare

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}$$

A_{nec} – se calculează în funcție de forma secțiunii transversale

- pentru secțiune dreptunghiulară:

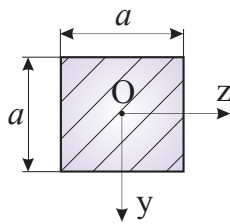


$$H = k_1 \cdot B; A_{nec} = k_1 \cdot B_{nec}^2 = \frac{N}{\sigma_a}$$

$$B_{nec} = \sqrt{\frac{N}{k_1 \cdot \sigma_a}}$$

- se ia $B_{ef} > B_{nec}$, $H_{ef} = k_1 \cdot B_{ef}$ și se calculează $A_{ef} = B_{ef} \cdot H_{ef}$

- pentru secțiune pătratică:

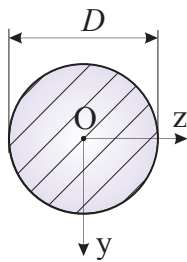


$$A_{nec} = a_{nec}^2 = \frac{N}{\sigma_a}$$

$$a_{nec} = \sqrt{\frac{N}{\sigma_a}}$$

- se ia $a_{ef} > a_{nec}$ și se calculează $A_{ef} = a_{ef}^2$

- pentru secțiune circulară:



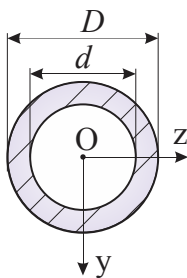
$$A_{nec} = \frac{\pi \cdot D_{nec}^2}{4} = \frac{N}{\sigma_a}$$

$$D_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot \sigma_a}}$$

- se ia $D_{ef} > D_{nec}$ și se calculează

$$A_{nec} = \frac{\pi \cdot D_{ef}^2}{4}$$

- pentru secțiune inelară:



$$D = k_1 \cdot d; A_{nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^2 \cdot (k_1^2 - 1)}{4} = \frac{N}{\sigma_a}$$

$$d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot (k_1^2 - 1) \cdot \sigma_a}}$$

- se ia $d_{ef} > d_{nec}$, $D_{ef} = k \cdot d_{ef}$ și se calculează

$$A_{nec} = \frac{\pi \cdot (D_{ef}^2 - d_{ef}^2)}{4}$$

▪ Verificare

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}} \leq \sigma_a$$

▪ Capacitate de încărcare (efort capabil sau forța axială capabilă)

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a$$

▪ Deformații

$$\Delta l = l - l_0$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot E = \frac{N \cdot l}{E \cdot A_{ef}}$$

4.2. Forfecarea (sau tăierea)

Forfecarea (sau tăierea) este solicitarea simplă la care efortul în secțiune se reduce la o forță tăietoare după axa „y”, T_y , respectiv după axa „z”, T_z și care acționează în planul secțiunii.

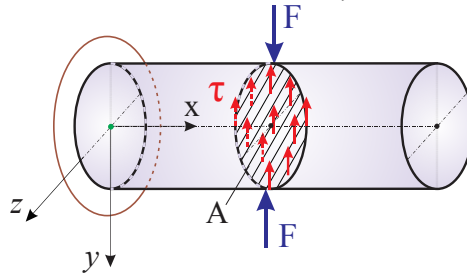


Fig. 4. Forfecarea unei bare circulare solicitată de forța F

▪ <i>Calculul tensiunii tangențiale</i>	$\tau = \frac{T}{A}$
▪ <i>Dimensionare</i>	$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}$ A_{nec} – se calculează în funcție de forma secțiunii transversale (vezi la 5.1.)
▪ <i>Verificare</i>	$\tau_{ef} = \frac{T}{A_{ef}} \leq \tau_a$
▪ <i>Capacitate de încărcare</i>	$T_{cap} = A_{ef} \cdot \tau_a$
▪ <i>Deformații</i>	$\Delta s = l \cdot \text{tgy}$ $\Delta s = \gamma \cdot l = \frac{T \cdot l}{G \cdot A_{ef}}$

4.3. Încovoierea

Încovoierea este solicitarea simplă la care în secțiune apar atât momente încovoietoare, M_z . Dacă sunt însoțite și de forțe tăietoare apare solicitarea de *încovoiere plană*. Dacă există numai momente încovoietoare, atunci solicitarea este de *încovoiere pură*.

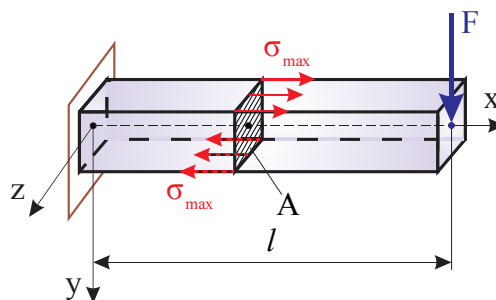


Fig. 5. Încovoierea unei bare cu secțiunea pătratică solicitată de forța F

▪ <i>Calculul tensiunii</i>	<p>– tensiunea normală (formula lui Navier):</p> $\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \text{ sau } \sigma = \frac{M_{zmax}}{W_z}$ <p>– tensiunea tangențială (formula lui Juravski):</p> $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z}{b_y \cdot I_z}$
-----------------------------	---

▪ Dimensionare	$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_{i \text{ max}}}{\sigma_a}$ A_{nec} – se calculează în funcție de forma secțiunii transversale
▪ Verificare	$\sigma_{\text{ef}} = \frac{M_{i \text{ max}}}{W_{z \text{ ef}}} \leq \sigma_a$
▪ Capacitate de încărcare	$M_{i \text{ cap}} = W_{z \text{ ef}} \cdot \sigma_a$
▪ Deformații	

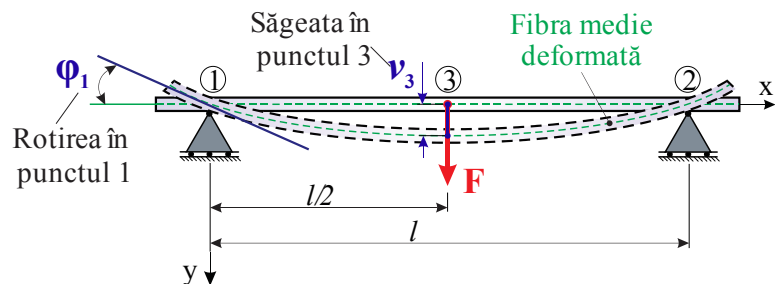


Fig. 4. Deformațiile unei bare sollicitată la încovoiere

– ecuația fibrei medii deformată:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z}$$

Deformațiile se pot calcula cu următoarele metode:

a) metoda identificării constantelor de integrare (metoda Clebsch)

b) metode energetice: – teorema lui Castigliano:

$$v_i = \delta_i = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M_{iz}}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_{iz}}{\partial F_i} \cdot dx$$

– metoda lui Morh – Maxwell:

$$v_i = \delta_i = \sum_1^n \int_l \frac{M_{iz} \cdot m_{iz}}{E \cdot I_z} \cdot dx$$

– metoda lui Veresceaghin:

$$v_i = \delta_i = \sum_1^n \frac{\Omega_i \cdot y_{Gi}}{E \cdot I_z}$$

c) metoda eforturilor:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \delta_{20} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \delta_{n3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases}$$

cu $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (dat de teorema reciprocității deplasărilor).

4.4. Torsiunea (sau răsucirea)

Torsiunea (răsucirea) este sollicitarea simplă la care, în secțiunea barei, apare un vector moment aplicat după axa geometrică a barei, M_t . De regulă, la torsiune sunt studiate piesele de tip arbore, cu secțiune circulară și/sau inelară.

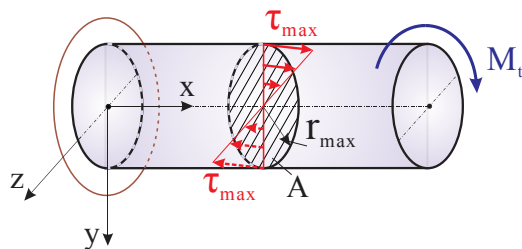


Fig. 6. Bară circulară sollicitată la torsiune sau răsucire de momentul de torsiune M_t

▪ *Calculul tensiunii tangențiale*

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot r_{\max}}{I_p}$$

sau

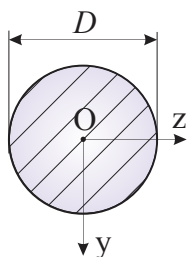
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$$

▪ *Dimensionare*

$$W_{p \text{ nec}} = \frac{M_t}{\tau_a}$$

$W_{p \text{ nec}}$ – se calculează în funcție de forma secțiunii transversale

- pentru secțiune circulară:



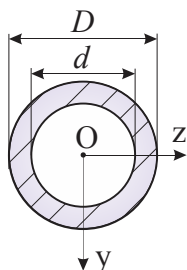
$$W_{p \text{ nec}} = \frac{\pi \cdot D_{\text{nec}}^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a}$$

$$D_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}}$$

- se ia $D_{\text{ef}} > D_{\text{nec}}$, și se calculează

$$W_{p \text{ ef}} = \frac{\pi \cdot D_{\text{ef}}^3}{16}$$

- pentru secțiune inelară:



$$D = k \cdot d; W_{p \text{ nec}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{nec}}^3 \cdot (k^4 - 1)}{16 \cdot k}$$

$$= \frac{M_t}{\tau_a}$$

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t \cdot k}{\pi \cdot (k^4 - 1) \cdot \tau_a}}$$

- se ia $d_{\text{ef}} > d_{\text{nec}}$, $D_{\text{ef}} = k \cdot d_{\text{ef}}$ și se calculează

$$W_{p \text{ nec}} = \frac{\pi \cdot (D_{\text{ef}}^4 - d_{\text{ef}}^4)}{16 \cdot D_{\text{ef}}}$$

▪ *Verificare*

$$\tau_{\text{ef}} = \frac{M_t}{W_{p \text{ ef}}} \leq \tau_a$$

▪ *Capacitate de încărcare*

$$M_{t \text{ cap}} = W_{p \text{ ef}} \cdot \tau_a$$

▪ *Deformații*

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \text{ [rad.]}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \text{ [mm}^{-1}\text{]}$$

$$\left(\varphi^\circ = \varphi_{\text{rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \right)$$

5. Solicitări compuse

Solicitările compuse iau naștere sub acțiunea sarcinilor ce produc simultan în secțiunea transversală a unei piese, două sau mai multe eforturi. Dacă cel puțin două din cele șase componente ale torsorului (Fig. 1) sunt diferite de zero și restul componentelor sunt nule, atunci piesa este supusă unei *solicitări compuse*.

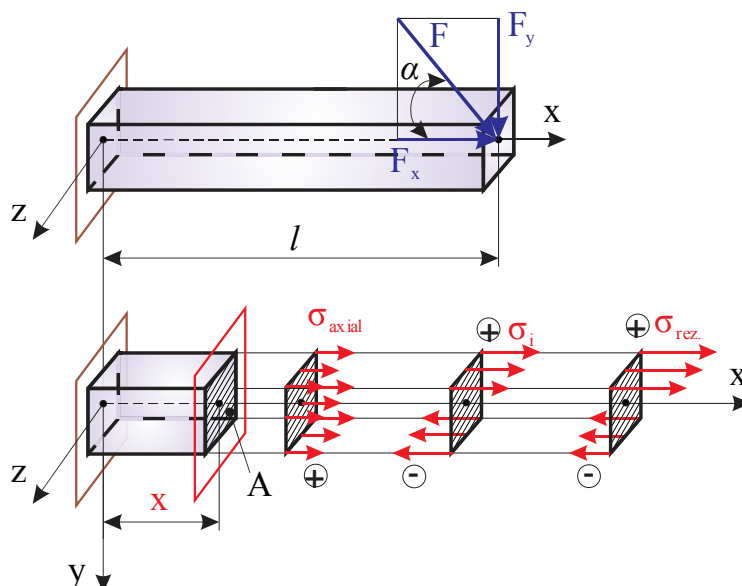


Fig. 7. Solicitare compusă de tip $\sigma + \sigma$ a unei grinzi (solicitare axială și încovoiere)

Tipuri de solicitări compuse:

a) care produc tensiuni de același tip:

- numai tensiuni normale (σ), de exemplu: solicitare axială (întindere sau compresiune) cu încovoiere pe aza „z” ($N+M_{iz}$) (Fig. 7), încovoiere după axa „y” și, respectiv după axa „z” ($M_{iy}+M_{iz}$);
- numai tensiuni tangențiale (τ), de exemplu la arcul elicoidal.

La solicitările compuse care produc aceleași tensiuni în secțiunea transversală, tensiunea rezultantă (σ_{rez}) se calculează ca suma algebrică dintre tensiunea axială (σ_{axial}) și tensiunea de la solicitarea de încovoiere (σ_i) (principiul suprapunerii efectelor).

b) care produc tensiuni diferite:

- atât tensiuni normale (σ), cât și tensiuni tangențiale (τ), de exemplu: arbori cotiți și de transmisie, scule așchietoare etc.

La solicitările compuse care produc tensiuni diferite în secțiunea transversală se calculează o tensiune echivalentă (σ_{ech}). *Tensiunea echivalentă (σ_{ech}) este tensiunea principală a unui element imaginar supus la tracțiune, confecționat din același material ca elementul studiat și aflat într-o stare de tensiuni tot atât de periculoasă ca și elementul supus unei solicitări spațiale* (Fig. 8).

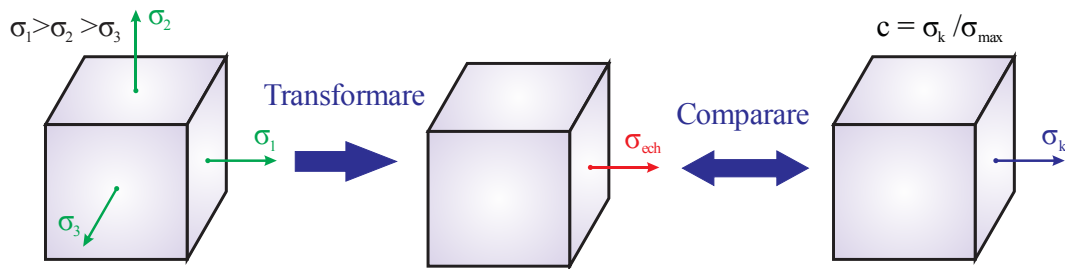


Fig. 8. Schema principială a comparării stării de tensiuni studiate cu starea de tensiuni echivalentă limită

Tensiunea echivalentă (σ_{ech}) pentru starea plană de tensiuni se calculează aplicând una din cele cinci teorii de rezistență:

I. Teoria I-a – teoria tensiunii normale maxime a lui Galileo Galilei

$$\sigma_{ech.I} = 0,5 \cdot \sigma + 0,5 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

II. Teoria a II-a – teoria deformației specifice liniare maxime (Mariotte și Barré de Saint Venant)

$$\sigma_{ech.II} = 0,35 \cdot \sigma + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

III. Teoria a III-a – teoria tensiunii tangențiale maxime a lui Tresca

$$\sigma_{ech.III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

IV. Teoria a IV-a – teoria energiei totale de deformare a lui Beltrami

$$\sigma_{ech.IV} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

V. Teoria a V-a – teoria tensiunilor limită a lui O. Morh

$$\sigma_{ech.V} = (1 - \nu) \cdot \frac{\sigma}{2} + \frac{(1 + \nu)}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

VI. Teoria a VI-a – teoria energiei de variație a formei (von Mises)

$$\sigma_{ech.VI} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

Observații:

1. Cea mai folosită teorie de rezistență pentru calculul tensiunii echivalente în piese mecanice confecționate din materiale ductile este Teoria a III-a.
2. Pentru calculul de dimensionare aplicând una din teoriile de rezistență enumerate, tensiunea echivalentă se înlocuiește cu tensiunea admisibilă la tracțiune (σ_a).

Exemplu: Dimensionarea arborilor cu secțiune circulară plină solicitați la încovoiere de momentul încovoietor M_i și la răsucire de momentul de torsiune M_t , aplicând Teoria a III-a de rezistență:

- se calculează tensiunea echivalentă:

$$\sigma_{ech.III} = \sqrt{\frac{M_i}{W_z^2} + 4 \cdot \frac{M_t}{W_p^2}}$$

$$W_z = 2 \cdot W_p$$

- pentru secțiunea circulară (plină și inelară):

- $\sigma_{ech.III}$ se înlocuiește cu σ_a și relația de dimensionare este:

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{\sigma_a}$$

6. Sisteme static nedeterminate

La sistemele static nedeterminate, eforturile din secțiunile transversale nu se pot determina prin relații de echilibru static, fie din cauza legăturilor suplimentare, fie din cauza formei sistemului.

Pentru calculul sistemelor static nedeterminate este important să se determine *gradul de nedeterminare*. Gradul de nedeterminare (n) este diferența dintre numărul necunoscutelor din reazeme (r) și numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan (s), $n = r - s$. Grinzile static nedeterminate se pot rezolva analitic utilizând ecuațiile celor 3 momente lui Clapeyron sau una din metodele energiei pentru calculul deplasărilor (Castigliano, metoda Morh –Maxwell cu regula lui Vereșceaghin).

I. Grindă dreaptă simplu static nedeterminată

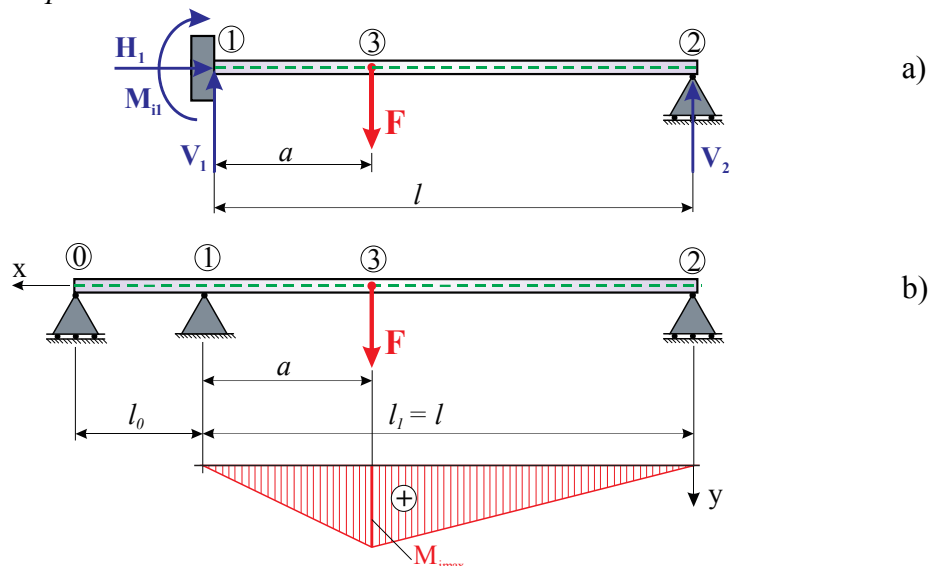


Fig. 9. Grinda static nedeterminată, încadrată în punctul 1 și simplu rezemată în 2:
a) Grinda reală; b) Grinda echivalentă. Diagrama de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 static determinată

Ecuația celor 3 momente a lui Clapeyron se scrie pentru o grindă echivalentă cu două deschideri (Fig. 9.b.) și are expresia generală:

$$M_{i0} \cdot l_0 + 2 \cdot M_{i1} \cdot (l_0 + l_1) + M_{i2} \cdot l_1 + 6 \cdot \left(\frac{S_{01s}}{l_0} + \frac{S_{21s}}{l_1} \right) = 0$$

Pentru grinda echivalentă se impun condițiile: $l_0 = 0$ (0 – 1 porțiune de grindă fictivă), $S_{01s} = 0$ (pe grinda 0 – 1 nu există încărcare, deci nu există diagramă de momente încovoietoare și nu există S_{01s}), $M_{i2} = 0$ pentru că reazemul 2 este reazem simplu și nu are moment încovoietor ca reacțiune. Ecuația celor 3 momente a lui Clapeyron scrisă mai sus devine:

$$2 \cdot M_{i1} \cdot l_1 + 6 \cdot \frac{S_{21s}}{l_1} = 0, \quad \text{unde} \quad S_{21s} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{6}$$

După calcule rezultă:

$$M_{i1} = - \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{2 \cdot l^2}$$

Cunoscând M_{i1} se pot calcula reacțiunile V_1 și V_2 :

$$V_1 = \frac{F \cdot (l - a) \cdot (2 \cdot l^2 + 2 \cdot a \cdot l - a^2)}{2 \cdot l^3}$$

$$V_2 = \frac{F \cdot a^2 (3 \cdot l - a)}{2 \cdot l^3}$$

II. Grindă continuă simplu static nedeterminată

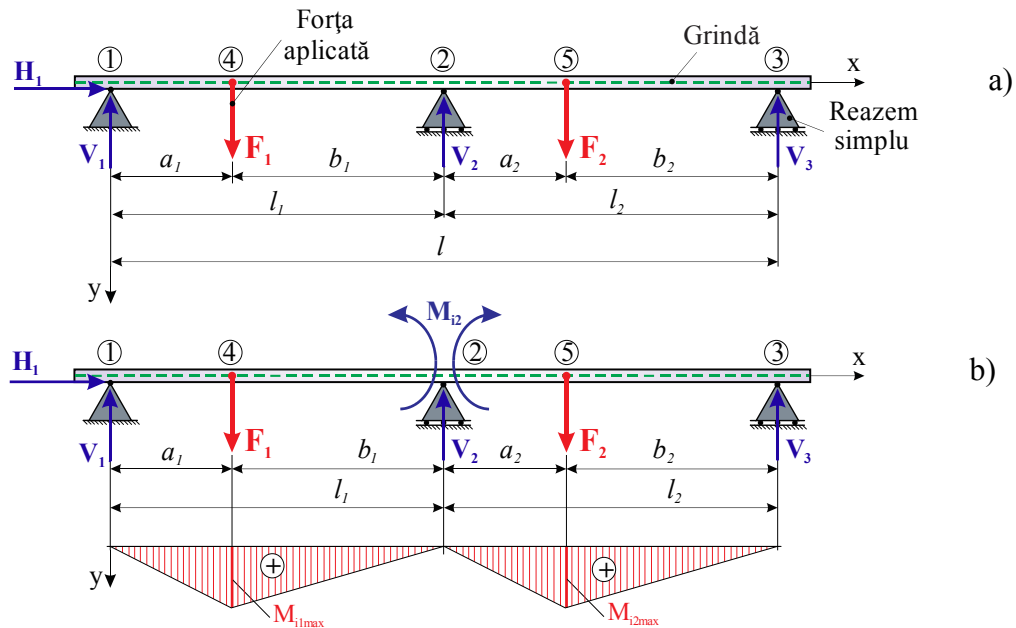


Fig. 10. Grinda static nedeterminată: a) Grinda reală; b) Diagramele de momente încovoietoare pentru grinda continuă, considerată pe cele două porțiuni, ca fiind static determinată

Ecuția celor 3 momente a lui Clapeyron se scrie o singură dată pentru grinda 1 – 2 – 3, având expresia:

$$M_{i1} \cdot l_1 + 2 \cdot M_{i2} \cdot (l_1 + l_2) + M_{i3} \cdot l_2 + 6 \cdot \left(\frac{S_{12s}}{l_1} + \frac{S_{32s}}{l_2} \right) = 0$$

Pentru grinda continuă se impun condițiile pe reazeme: $M_{i1} = 0$, $M_{i2} = 0$ pentru că reazemul 1 este articulat și nu preia moment încovoietor, iar reazemul 2 este simplu și nici el nu preia moment încovoietor ca reacțiune. Ecuția devine:

$$2 \cdot M_{i2} \cdot (l_1 + l_2) + 6 \cdot \left(\frac{S_{12s}}{l_1} + \frac{S_{32s}}{l_2} \right) = 0, \quad \text{unde}$$

$$S_{12s} = \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (l_1 + a_1)}{6}$$

$$S_{32s} = \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot (l_2 + b_2)}{6}$$

După calcule rezultă:

$$M_{i2} = - \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (l_1 + a_1)}{2 \cdot l_1 \cdot (l_1 + l_2)} - \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot (l_2 + b_2)}{2 \cdot l_2 \cdot (l_1 + l_2)}$$

Cunoscând M_{i2} se pot calcula reacțiunile V_1 , V_2 și V_3 :

$$V_1 = \frac{F_1 \cdot b_1 + M_{i2}}{l_1}$$

$$V_2 = \frac{F_1 \cdot (l_2 + b_1) + F_2 \cdot b_2 - V_1 \cdot (l_1 + l_2)}{l_2}$$

$$V_3 = \frac{F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot (a_2 + l_1) - V_2 \cdot l_1}{(l_1 + l_2)}$$

7. Bare curbe plane

Barele curbe plane sunt caracterizate printr-o axă de simetrie care este o curbă plană, iar sarcinile exterioare acționează în planul axei barei. Pentru stabilirea stării de tensiuni și deformații dintr-o bară curbă se trasează diagramele de variație ale eforturilor (N , T și M_i).

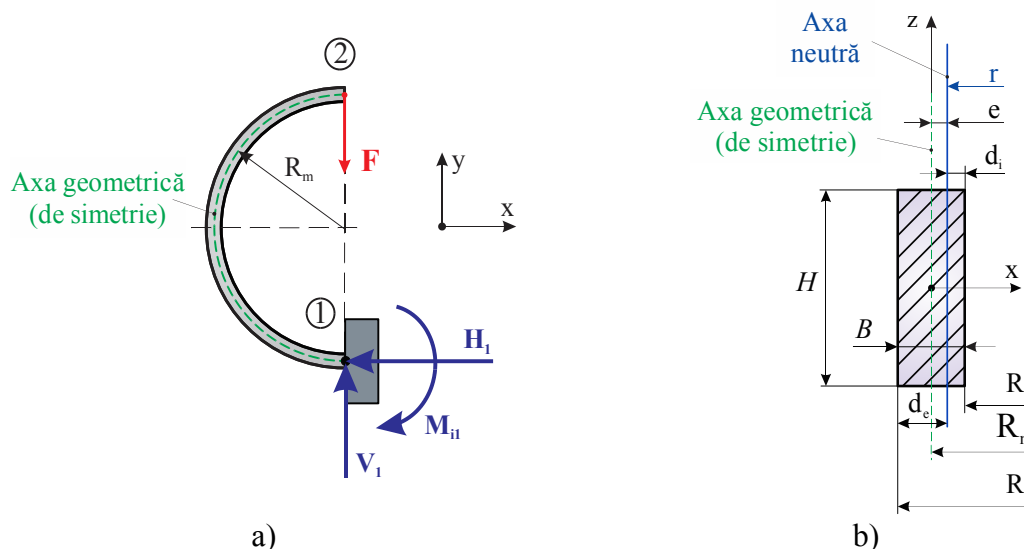


Fig. 9.a) Bară curbă plană de tip semicerc; b) elementele geometrice ale secțiunii transversale

Pentru calculul analitic al tensiunilor normale (σ) în secțiunea barelor curbe și cotate, se pot aplica următoarele două metode:

I. *Metoda I* ($N + M_i$), care ține cont de raza de curbura a axei geometrice a secțiunii transversale

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{A \cdot R_m} + \frac{M_i}{k \cdot R_m} \cdot \frac{y}{R_m + y}$$

$$R_m = \frac{R_i + R_e}{2}$$

- coeficientul „k” se calculează în funcție de forma geometrică a secțiunii transversale

II. *Metoda II* (*Winkler*), care ține cont de raza de curbura a axei neutre a secțiunii transversale (axa neutră fiind axa în care tensiunea totală („ $\sigma + \sigma'$ ”) este nulă.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{e \cdot A} \cdot \frac{y}{r + y}$$

Pentru orice secțiune, raza de curbura a axei neutre se poate calcula cu relația:

$$r = \frac{A}{\frac{A}{R_m} + \frac{I_z}{R_m^3}}$$

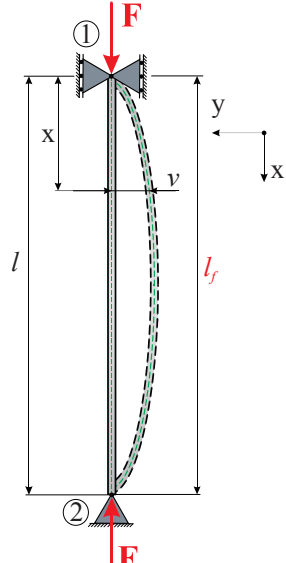
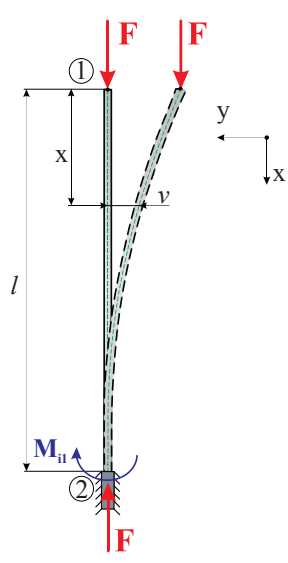
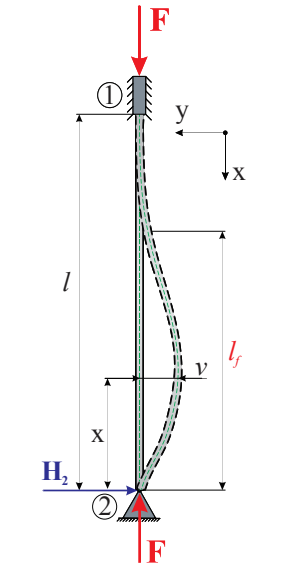
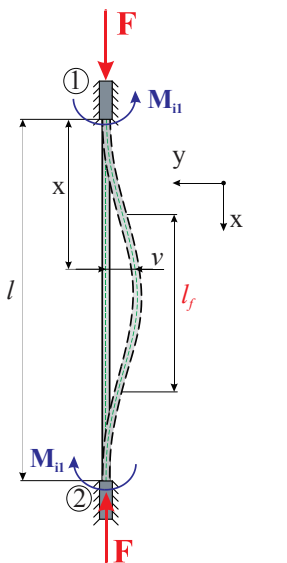
8. Flambajul barelor drepte

Flambajul barelor drepte este fenomenul care ia naștere la compresiunea a unei bare lungi sau de trecere a unei bare lungi, cu lungimea l , din starea de *echilibru stabil* în cea de *echilibru nestabil* la o anumită valoare critică a sarcinilor aplicate, F_{cf} . Valoarea forței critice de flambaj, F_f , depinde de forma și dimensiunile piesei, modul de rezemare și de aplicare a sarcinilor, de materialul piesei. S-au studiat patru cazuri de flambaj pentru bare drepte, cu secțiune constantă (modulul de rigiditate $E \cdot I_{z \min} = \text{constant}$), în patru moduri de rezemare (Tabelul 1).

Flambajul poate fi în domeniul *elastic* (guvernate de legea lui Hooke $\sigma = E \cdot \epsilon$) unde este valabilă formula lui Euler sau în domeniul *plastic*. Pentru identificarea domeniului de flambaj și pentru aplicarea relațiilor de calcul corespunzătoare pentru forța critică de flambaj și tensiunea critică

de flambaj, este necesar să se calculeze, mai întâi, un coeficient adimensional, numit *coeficient de zveltețe sau coeficient de subțirime*, λ .

Tabelul 1. Cele patru cazuri de flambaj, determinate în funcție de modul de rezemare

Cazul I	Cazul II	Cazul III	Cazul IV
			
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0,7$	$K = 0,5$
$l_f = l$	$l_f = 2 \cdot l$	$l_f = 0,7 \cdot l$	$l_f = 0,5 \cdot l$
$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{l^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(2 \cdot l)^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,7 \cdot l)^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,5 \cdot l)^2}$

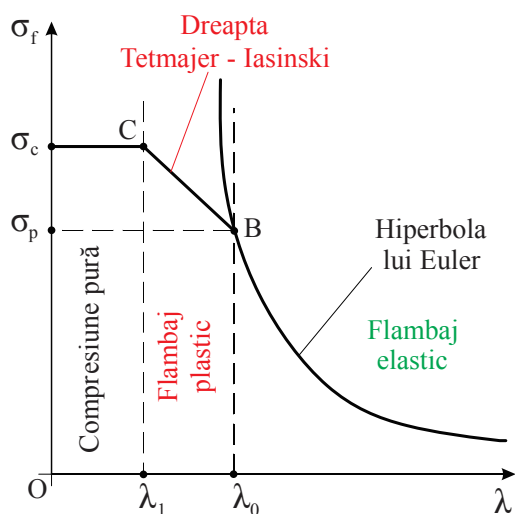


Fig. 1. Delimitarea domeniilor la flambaj în funcție de valoarea coeficientului de zveltețe, λ

I. $\lambda \geq \lambda_0$ sau $\sigma_f \leq \sigma_p$ – zona flambajului elastic, unde este valabilă formula lui Euler:

$$\sigma_{cf} = \frac{F_{cf}}{A_{ef}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{A_{ef} \cdot l_f^2}$$

II. $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ sau $\sigma_f > \sigma_p$ – zona flambajului plastic, tensiunea critică de flambaj se calculează cu relația empirică propusă de Tetmajer – Iasinski:

$$\sigma_{cf} = a - b \cdot \lambda$$

III. $0 < \lambda < \lambda_1$ – compresiune pură, se calculează tensiunea efectivă și se verifică cu tensiunea admisibilă a materialului:

$$\sigma_{ef} = \frac{F_{ef}}{A_{ef}} \leq \sigma_a$$

LE1. DETERMINAREA FACTORULUI DE CONCENTRATOR AL TENSIUNILOR PRIN FOTOELASTICIMETRIE PLANĂ

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea factorului de concentrare al tensiunilor prin metoda fotoelastică în cazul unei bare cu gaură centrală, solicitată axial. Rezultatele determinărilor experimentale se vor raporta la calculul analitic și diagramele existente în literatură pentru acest tip de concentrator.

INTRODUCERE

Ipoteza de repartizare uniformă a tensiunilor în secțiunea barelor nu mai este valabilă pentru cazurile în care secțiunea este slăbită prin găuri, creștături, canale transversale, variații bruște de secțiune. Elementele geometrice locale care determină modificări bruște ale dimensiunilor și formei secțiunii transversale se numesc **concentratori de tensiuni**. În prezența acestor concentratori, tensiunile din secțiunile barelor sunt neuniform distribuite pe secțiune, având valori mai mari decât cele medii, numite tensiuni nominale. Acest efect de creștere locală a tensiunilor se evaluează cu ajutorul coeficientului de concentrare al tensiunilor exprimat sub forma:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (1)$$

în care σ_{\max} este valoarea locală maximă a tensiunii la rădăcina concentratorului, iar σ_{nom} tensiunea nominală calculată pentru secțiunea netă (secțiunea redusă).

Valori ale coeficientului de concentrare a tensiunilor pentru diferiți concentratori se găsesc în lucrările de specialitate. Coeficientul de concentrare al tensiunilor se poate determina teoretic, prin metodele de calcul ale mecanicii corpurilor deformabile, sau experimental prin fotoelasticimetrie plană sau spațială, respectiv prin metode numerice.

Metoda fotoelastică pentru studiul tensiunilor (fotoelasticimetria) face parte din categoria încercărilor pe modele. Cu această metodă se poate determina starea de tensiune în fiecare punct al unui model dintr-un material special, geometric asemenea cu piesa studiată. Solicitarea modelului trebuie să fie similară cu a piesei reale. Aplicând legile similitudinii, se poate determina, apoi, starea de tensiuni în organul de mașină sau elementul de construcție studiat.

Fotoelasticitatea se bazează pe proprietatea de birefrigență (dublă refracție) accidentală a unor materiale speciale numite optic active. Aceste materiale, care în stare netensionată sunt izotrope, devin birefringente în stare tensionată, conform legii calitative a birefringenței.

O rază de lumină polarizată trecând printr-o placă din material optic activ, solicitată în planul propriu, este descompusă în două vibrații paralele cu direcțiile principale în punctul considerat. Cele două vibrații se propagă cu viteze diferite, astfel că la ieșirea din model, ele au o diferență de drum optic. Potrivit legii cantitative a birefringenței, diferența de drum optic este proporțională cu diferența tensiunilor principale:

$$\delta = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot B \quad (2)$$

unde: C este coeficient fotoelastic al materialului

σ_1, σ_2 - tensiunile principale în punctul considerat

B - grosimea modelului

Fenomenul poate fi pus în evidență în lumină polarizată. Se știe că spre deosebire de lumina naturală, transmisă prin vibrații transversale, care se produc în toate planele ce trec prin direcția

de propagare, lumina polarizată se transmite prin vibrații transversale care se produc într-un plan, numit de vibrație, perpendicular pe planul de polarizare.

Lumina polarizată se poate obține cu ajutorul filtrelor polarizante. Filtrele polarizante sau polaroizii, se obțin prin înglobarea într-o masă plastică a unor cristale microscopice cu proprietăți dicroice (dicroism - proprietate a unor cristale birefringente de a absorbi raza ordinară și de a lăsa să treacă numai raza extraordinară, polarizată liniar), cristalele fiind orientate cu axele lor optice în aceeași direcție.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

Instalația pentru studiul modelelor în lumina polarizată, numită polariscop, este reprezentată schematic în Fig. 1. Instalația se compune dintr-o sursă de lumină S, un sistem de lentile L, care creează un fascicul paralel de raze, care proiectează imaginea pe ecranul E, prin polaroizii P și A, cu axele optice perpendiculare, între care se plasează modelul M. După ce străbate primul polaroid P, numit și polarizor, fasciculul luminos este compus din vibrații, care se produc numai în planul paralel cu axa optică a polaroidului.

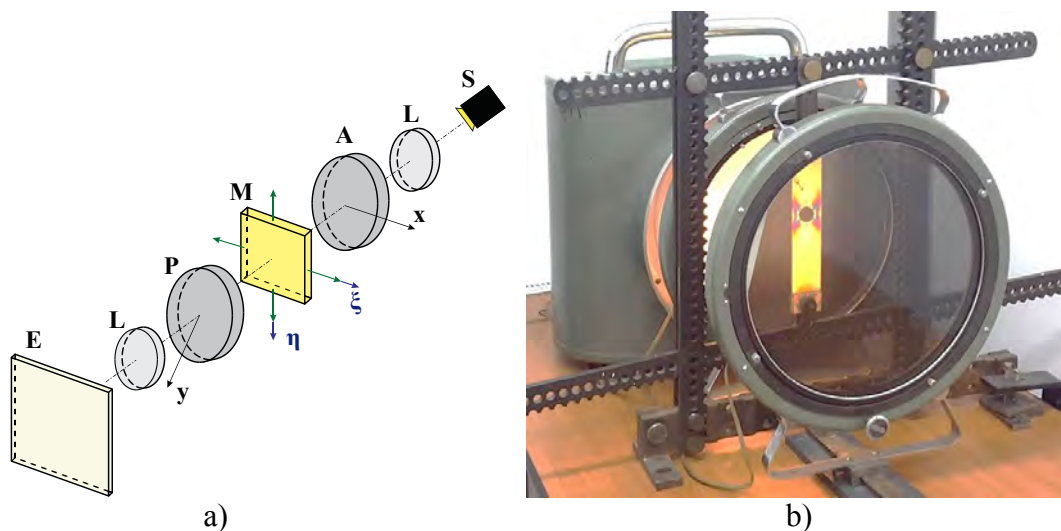


Fig. 1. Polariscop cu lumină difuză a) schema de principiu; b) polariscopul real

Dacă acest fascicul de lumină polarizată întâlnește modelul tensionat, în fiecare punct al modelului raza incidentă se descompune după direcțiile principale ξ, η .

Locul geometric al punctelor în care direcțiile principale sunt paralele cu direcțiile planelor de polarizare ale polaroizilor, este curba care poartă numele de *izoclină*. De-a lungul izoclinei, tensiunile au aceeași înclinare, egală cu înclinarea axelor optice ale polaroizilor. Prin rotirea simultană a polaroizilor se poate obține familia de izocline cu o desime convenabilă.

Locul geometric al punctelor de egală diferență a tensiunilor principale este curba numită *izocromată*. Fiecărei valori k_1 îi corespunde o izocromată (k_1 - indică numărul de ordine al izocromatei), (3):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k_1 \cdot \sigma_0 \quad (3)$$

unde $\sigma_0 = \frac{\lambda}{C \cdot B}$ poartă numele de constanta fotoelastică a materialului modelului de grosime

B , dintr-un material având constanta fotoelastică C , când se studiază în lumină monocromatică de lungime de undă λ .

Valoarea σ_0 se poate determina dintr-o încercare la întindere, compresiune sau încovoiere a unui model, măbind treptat solicitarea și, urmărind apariția izocromatelor. În cazul întinderii

sau compresiunii simple, precum și pe conturul unui model solicitat la încovoiere pură, relația (3) devine:

$$\sigma_1 = k_1 \cdot \sigma_0 \quad \text{sau} \quad |\sigma_2| = k_1 \cdot \sigma_0 \quad (4)$$

Calculând, cu relațiile cunoscute, tensiunile σ_1, σ_2 , corespunzătoare apariției izocromatei de ordinul k_1 , se poate determina σ_0 .

- pentru solicitări axiale
- sau
- pentru solicitări la încovoiere

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \qquad \qquad \sigma = \frac{M_i}{W_z}$$

1. Determinarea constantei fotoelastice σ_0 a unui material optic activ. Etalonarea cu disc comprimat diametral

Se urmărește determinarea constantei fotoelastice σ_0 pentru un model de grosime B dintr-un material optic activ (rășină epoxidică) și a constantei materialului S_0 definită prin relația:

$$S_0 = \sigma_0 \cdot B = \frac{\lambda}{C} \left[\frac{N}{\text{mm}^2} \cdot \text{mm} \right] \quad (5)$$

- unde λ – lungimea de undă a luminii folosite
- σ_0 – constanta fotoelastică a materialului.

Mărimea S_0 servește la calculul constantei unui model din același material având grosimea B_1 :

$$\sigma_{0d_1} = \frac{S_0}{B_1} \left[\frac{N}{\text{mm}^2} \right] \quad (6)$$

Operația se numește etalonarea materialului și se va efectua cu un disc comprimat diametral. Lucrarea se efectuează în lumină galbenă de sodiu polarizată circular. Aceasta se obține dacă între polarizorii încrucișați se așează două lame sfert de undă rotite cu 45° față de polarizori. În lumina polarizată circular apar numai izocromatele. Schematic, instalația este reprezentată în Fig. 2, cu următoarele notații: S – sursă de lumină, L – lentile, P – polarizor, A – analizor, $\lambda/4$ – lamă sfert de undă, E – ecran.

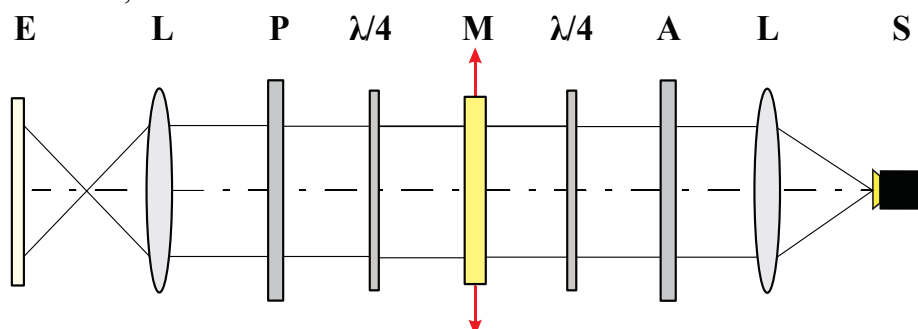


Fig. 2. Polariscopul circular

Epruveta „M” este un disc de diametru D și grosime B , care se solicită la compresiune axială cu ajutorul unui dispozitiv montat pe pârghia de solicitare, conform schemei din Fig 3. Se echilibrează pârghia și se încarcă progresiv talerul, urmărind evoluția izocromatelor în model, până când pe contur apare izocromata de ordin 4 sau 5 (Fig. 4). Se notează greutatea G și se calculează forța F aplicată modelului:

$$F = \frac{l_1}{l_2} \cdot G \quad (7)$$

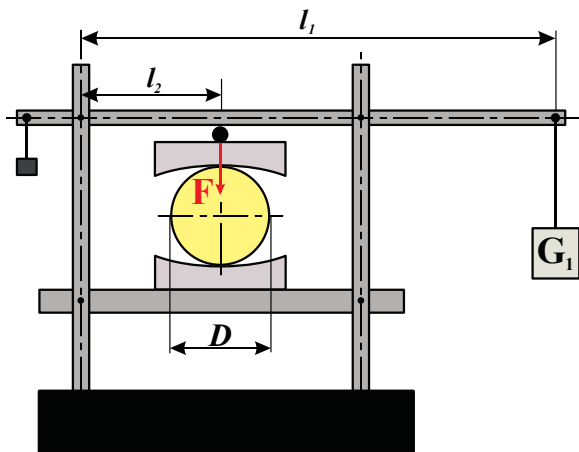


Fig. 3. Dispozitiv de solicitare

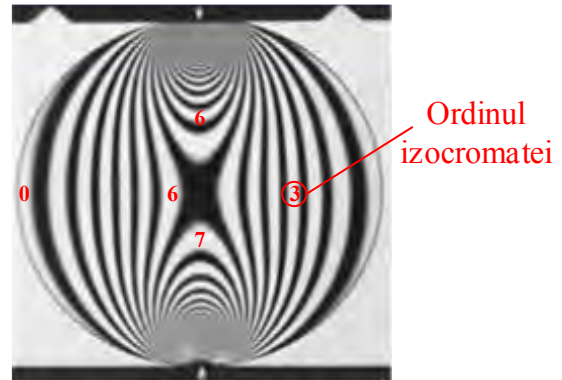


Fig. 4. Exemplu de izocromate în discul comprimat diametral

unde: $G = m \cdot g$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ (acelerația gravitațională);

m – masa aplicată pe taler.

În teoria elasticității se demonstrează că diferența tensiunilor principale în centrul discului se poate calcula cu relația:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot B} \quad (8)$$

Pe de altă parte se știe că: $\sigma_1 - \sigma_2 = k_1 \cdot \sigma_0$ rezultă deci că:

$$\sigma_0 = \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot B \cdot k_1} \quad (9)$$

unde k_1 este ordinul izocromatei în centrul discului.

Se repetă încercarea de câteva ori, cu sarcini diferite și se determină valoarea medie σ_{0m} a lui σ_0 .

- **Date de intrare**

Tabelul 1. Dimensiuni constructive

Material	Dimensiunile [mm]			
	Disc de etalonare		Dispozitiv de solicitare	
	D	B	l_1	l_2
Rășină epoxidică				

- **Rezultate**

Tabelul 2. Valoarea constantei fotoelastice a discului de etalonare

Nr. crt.	Greutatea aplicată G [kg]	Forța aplicată F [N]	Ordinul izocromatei k_1	Constanta fotoelastică [N/mm ²]	
				σ_0	σ_{0m}
1.					
2.					
3.					

2. Determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor pentru o bară cu gaură centrală sollicitată axial

Lucrarea se efectuează într-un polariscop, în lumină galbenă de sodiu polarizată circular (Fig. 2). Modelul, o bară cu gaură centrală sollicitată la întindere, este montat în dispozitivul de solcitare (Fig. 5) și se încarcă cu forțele F prin așezarea pe taler a unor greutateți G (kg). Forța F se calculează cu relația (7). Se urmărește evoluția izocromatelor, până când pe conturul interior al găurii apare cel mult izocromata de ordinul 3 sau 4 (Fig.7).

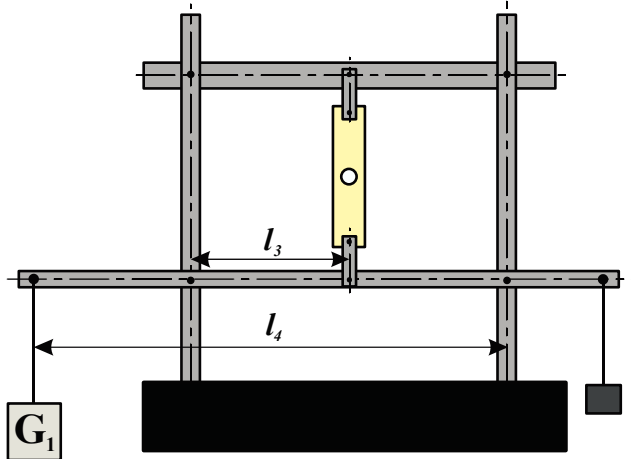


Fig. 5. Dispozitiv de solcitare la întindere a barei cu gaură centrală

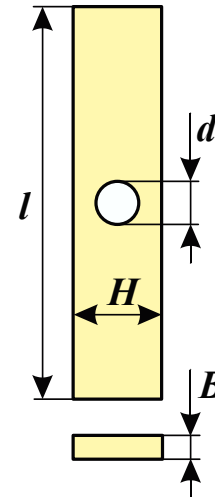


Fig. 6. Dimensiunile modelului din rășină epoxidică

Se determină tensiunile maxime σ_{\max} la rădăcina concentratorului obținute prin metoda fotoelastică utilizând relația (4) și valoarea constantei fotoelastice determinate cu (9). Tensiunea nominală se determină cu relația:

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{(H - d) \cdot B} \quad (10)$$

Raportul dintre tensiunea maximă și cea nominală reprezintă coeficientul de concentrare al tensiunilor K_t (1).

Rezultatele obținute experimental pentru coeficientul de concentrare a tensiunilor se compară cu cele date în literatura de specialitate și prezentate sub forma diagramei din Fig. 8.

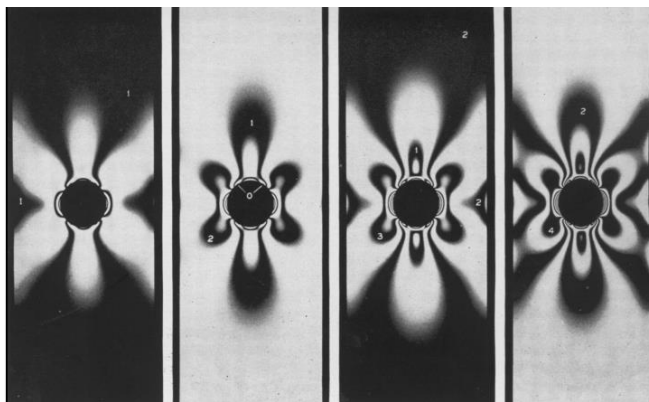


Fig. 7. Evoluția izocromatelor

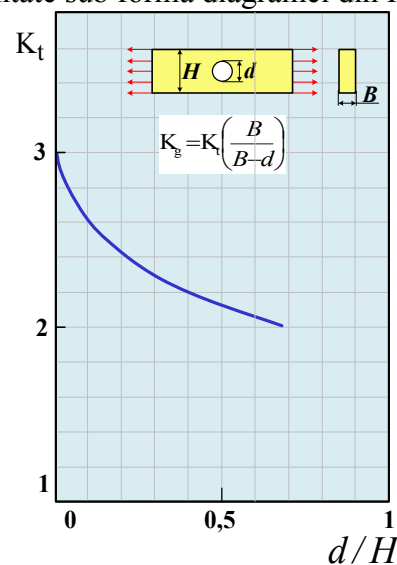


Fig. 8. Coeficientul de concentrare al tensiunilor

- Date de intrare

Tabelul 3. Dimensiuni constructive

Materialul modelului M	Dimensiuni					
	[mm]					
	Model				Dispozitiv de solicitare	
	<i>l</i>	<i>B</i>	<i>H</i>	<i>d</i>	<i>l₃</i>	<i>l₄</i>
Rășină epoxidică						

- Rezultate

Tabelul 4. Valorile teoretice și experimentale ale factorului de concentrare al tensiunilor

Nr. crt.	Greutatea aplicată G [kg]	Forța aplicată F [N]	Tensiunea normală [N/mm ²]		Factorul de concentrare al tensiunilor		Abaterea relativă ΔK _t [%]
			σ _{max}	σ _{nom}	K _t teoretic	K _t fotoelas.	
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]



LE1. Determinarea factorului de concentrare al tensiunilor prin fotoelasticimetrie plană

• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a factorului de concentrare al tensiunilor prin metoda fotoelasticimetriei plane pentru o grindă cu secțiune dreptunghiulară, prevăzută cu o gaură centrală, solicitată la tracțiune.

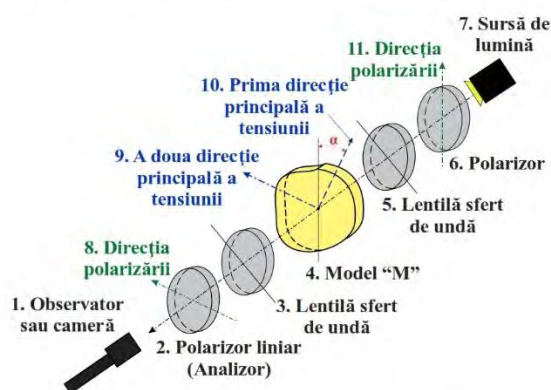
• Noțiuni teoretice

Fotoelasticimetria este o metodă optică pentru determinarea tensiunilor. Când un material optic activ (ex. rășina epoxidică) este solicitat și vizualizat în lumină polarizată, se poate observa o distribuție de *franje*. Aceste franje, numite **izocline** și **izocromate**, oferă informații cu privire la starea de tensiune a modelului solicitat.

Izocromatele reprezintă locul geometric al punctelor în care diferența tensiunilor principale este constantă, iar **izoclinele** se formează atunci când direcția tensiunilor principale coincide cu axele de polarizare ale polarizoizilor. Cu această metodă optică se poate determina valoarea și direcția tensiunilor principale în piesa solicitată.



Polariscop circular (elemente componente)



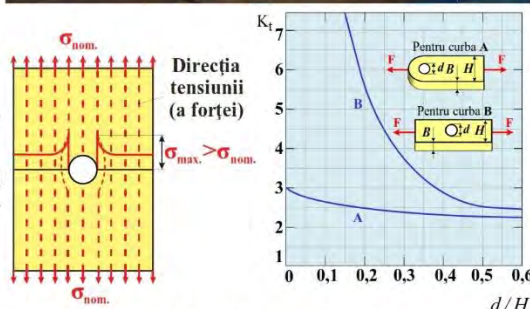
Polariscop circular (stand experimental)



Discontinuitățile geometrice ale piesei supusă solicitărilor, determină creșteri locale ale valorilor tensiunilor.

Factorul de concentrare al tensiunilor este dat de raportul dintre tensiunea maximă identificată în discontinuitate și tensiunea nominală:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{A} = \frac{F}{(H-d) \cdot B}$$



• Experiment — Studiul unei bare dreptunghiulare solicitată la tracțiune

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k_1 \cdot \sigma_0$$

k_1 - ordinul izocromatei

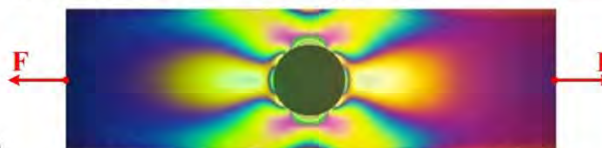
$$\sigma_2 = 0$$

σ_0 - constanta fotoelastică a materialului

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = k_1 \cdot \sigma_0$$

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val.}_{\text{exp.}}| - |\text{Val.}_{\text{teoretic}}|}{|\text{Val.}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$



Model din rășină epoxidică analizat în lumină albă

• Rezultate

Nr. crt.	Greutatea aplicată G [kg]	Forța aplicată F [N]	Tensiunea normală [N/mm ²]		Factorul de concentrare al tensiunilor		Abaterea relativă ΔK_t [%]
			σ_{\max}	σ_{nom}	K_t teoretic	K_t fotoelas.	
1.							
2.							

LE2. DETERMINAREA FORȚEI TĂIETOARE ÎNTR-O GRINDĂ SOLICITATĂ LA ÎNCOVOIERE PLANĂ

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea forței tăietoare în secțiunea transversală a unei grinzi drepte solicitată la încovoiere. Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu valorile obținute în urma calculelor analitice (cu relații teoretice), respectiv cu valorile numerice.

INTRODUCERE

Pentru a pune în evidență forțele interioare, ce iau naștere într-o zonă a corpului, se utilizează metoda secțiunilor. Aceasta presupune realizarea unei secțiuni imaginare în zona în care se dorește determinarea forțelor interioare. În urma secționării, cele două părți ale corpului sunt separate, pentru fiecare din ele putându-se scrie ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Forța tăietoare T reprezintă un efort situat în planul secțiunii, care apare atunci când forțele exterioare tind să producă alunecarea relativă a celor două părți ale corpului.

Într-o secțiune oarecare a unei grinzi, forța tăietoare reprezintă suma tuturor forțelor perpendiculare pe axa grinzii situate în stânga sau în dreapta secțiunii, fiind determinată prin echilibrul static al unei părți rezultate în urma secționării. Convențional, forța tăietoare este pozitivă dacă rotește secțiunea din stânga în sens orar, respectiv negativă dacă rotește secțiunea din stânga în sens anti-orar. Scrierea ecuațiilor de echilibru static presupune, în primă etapă, determinarea reacțiilor în rezemele grinzii.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea forței tăietoare într-o grindă solicitată la încovoiere.

- **Traductorul de forță** este elementul de conversie al semnalului din mărime mecanică în mărime electrică. Traductorul este un cristal piezoelectric care generează o diferență de potențial într-un plan perpendicular pe direcția de solicitare mecanică. Traductorul de forță este amplasat în planul vertical, plan ce conține axa longitudinală a grinzii.
- **Sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță** este un ansamblu de circuite electronice care asigură amplificarea tensiunii traductorului, filtrarea semnalului și procesări analogice (liniarizare, derivare, integrare ș.a.), dacă se impun.
- **Potențiometrul de reglare** asigură aducerea la „zero” a indicației pentru valoarea forței de măsurat.
- **Suportii pentru talere** permit aplicarea sarcinilor pe grindă la intervale de 20 mm. Aceștia sunt prevăzuți cu o crestătură, care asigură aplicarea forțelor în planul vertical ce conține axa longitudinală a grinzii. Dacă aplicarea forțelor nu se face în acest plan, atunci grinda este solicitată suplimentar și la torsiune.
- **Reazemul articulată - fix** - anulează posibilitatea de mișcare a grinzii pe direcțiile orizontală și, respectiv, verticală, permițând doar rotirea grinzii în jurul axei articulației.
- **Reazemul simplu - mobil** - anulează posibilitatea de mișcare a grinzii doar pe direcția verticală, permițând alunecarea ei pe direcția orizontală și rotirea în jurul axei reazemului.
- **Grinda** este o structură simplu rezemată, având și o consolă, zona cuprinsă între extremitatea stângă și reazemul simplu, în care se va determina forța tăietoare. Grinda este

tăiată în zona **secțiunii** unde este montat un mecanism patrulater pentru a permite măsurarea exclusivă a forței tăietoare.

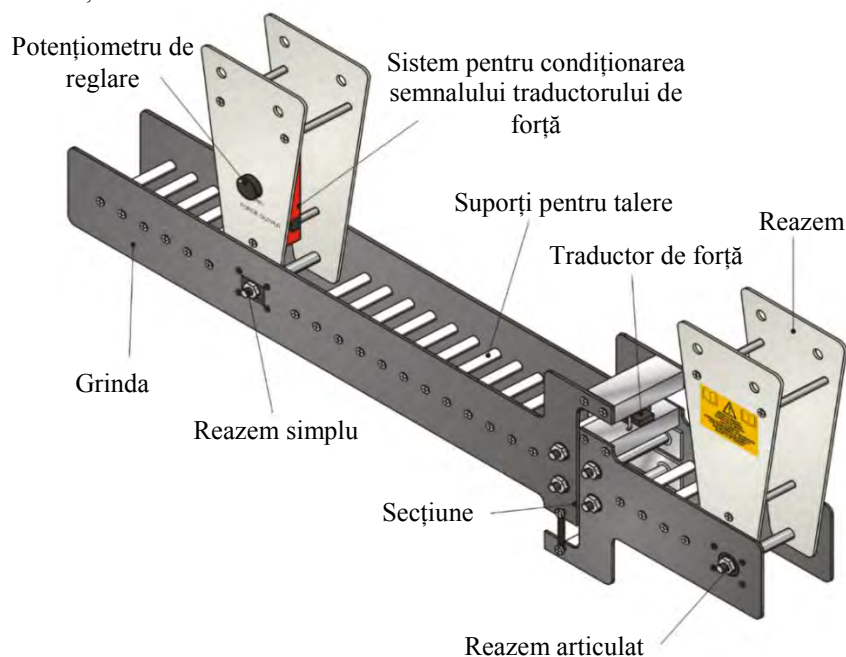


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea forței tăietoare într-o grindă solicitată la încovoiere plană

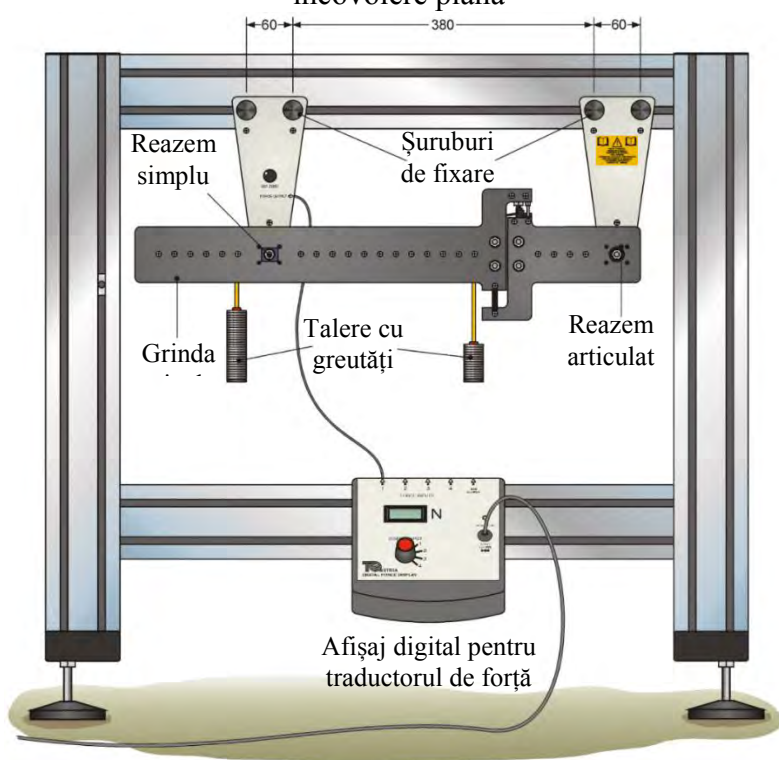


Fig. 2. Standul pentru determinarea forței tăietoare într-o grindă solicitată la încovoiere plană

Mecanismul patrulater este astfel construit încât manivela și balansierul sunt egale, obținându-se un mecanism paralelogram. Această alegere are la bază proprietatea mecanismului paralelogram de a asigura bielei o mișcare plan-paralelă. Se elimină astfel posibilitatea de a solicita traductorul cu forțe oblice pe suprafața supusă studiului. Datorită particularității mecanismului, forța verticală este chiar forța tăietoare care apare în grindă, ca urmare a modului

de rezemare și aplicare a sarcinilor exterioare. În Fig. 2. este prezentată schema standului pentru determinarea forței tăietoare într-o grindă solicitată la încovoiere plană. Echipamentele descrise (Fig. 1.) sunt fixate pe un cadru de susținere și sunt completate de un afișaj digital, ce dă semnalul în formă numerică, afișajul indicând valoarea forței tăietoare în secțiune, în Newtoni [N]. Această valoare poate fi preluată și utilizată în calcule cu ajutorul programului aferent echipamentului (*Structures*).

EFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește măsurarea forței tăietoare pentru o grindă simplu rezemată (un reazem simplu în punctul 1 și o articulație în punctul 2, Fig. 3.b), solicitată la încovoiere de forțe exterioare concentrate F [N] și compararea valorilor măsurate (experimentale) cu valorile teoretice obținute prin calcule analitice.

Experimentul 1: Variația forței tăietoare la aplicarea diferitelor sarcini exterioare

În acest experiment se măsoară forța tăietoare, T , în secțiunea transversală a grinzii (Fig. 3.a.), atunci când grinda simplu rezemată este solicitată la încovoiere de forța concentrată F , aplicată la distanța a [mm], în punctul 3, față de reazemul simplu (punctul 1). Experimentul are ca scop stabilirea variației forței tăietoare în raport cu mărimea forței exterioare concentrate aplicată la o distanță fixă față de reazemul simplu.

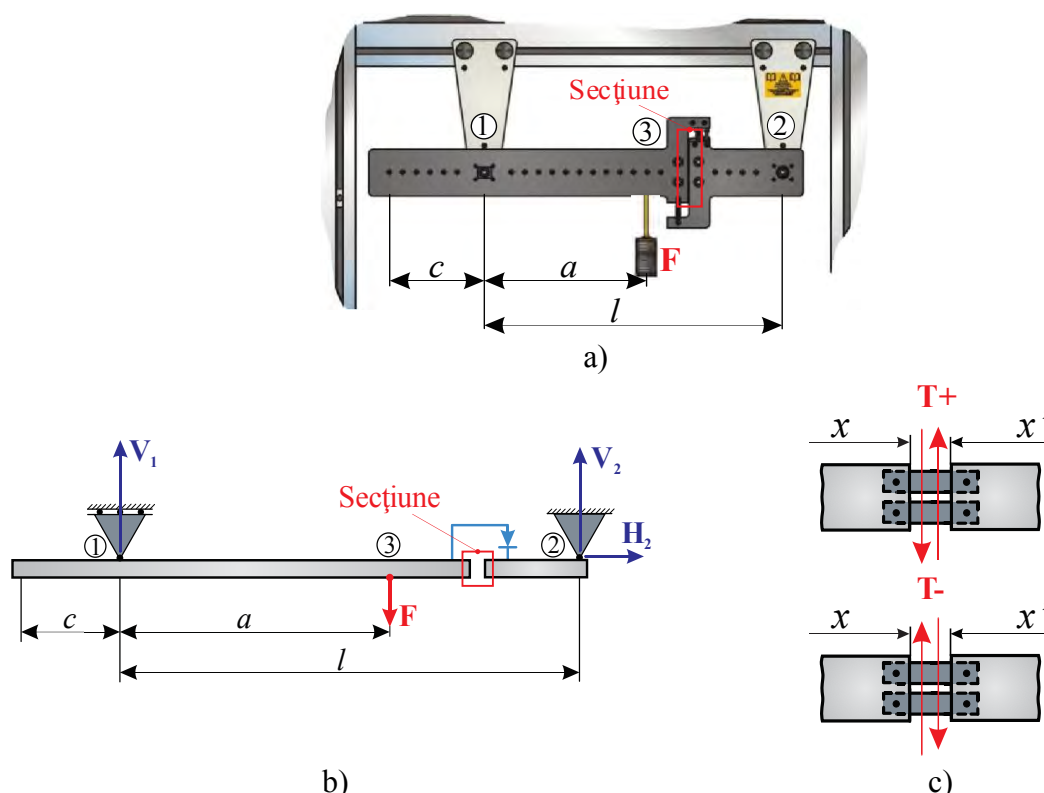


Fig. 3. Reprezentarea schematizată a standului experimental și poziționarea sarcinii exterioare.

În Fig. 3. se prezintă modul de rezemare și solicitare a grinzii, precum și convenția de semne pentru forța tăietoare. Conform Fig. 3.c), forța tăietoare este pozitivă dacă forțele, respectiv reacțiunile ce acționează în stânga secțiunii tind să rotească secțiunea în sensul orar. Pentru grinda studiată, semnul forței tăietoare este pozitiv în consolă în secțiunea din stânga și este negativ în secțiunea din dreapta forței aplicate F .

• **Calculul analitic al forței tăietoare**

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazemele grinzii, aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) = 0; V_1 = F \cdot \frac{(l - a)}{l} \tag{2}$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow V_2 \cdot l - F \cdot a = 0; V_2 = \frac{F \cdot a}{l} \tag{3}$$

Ecuația de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; V_1 + V_2 = F \tag{4}$$

Forța tăietoare se calculează aplicând metoda secțiunilor, fiind suma tuturor forțelor situate în stânga sau în dreapta secțiunii:

$$T_{stg.} = V_1 - F \text{ [N]} \quad \text{sau} \quad T_{dr.} = -V_2 \text{ [N]} \tag{5}$$

• **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se vor parcurge următorii pași:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suportul reazemului simplu);
2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*), luându-se în considerare și greutatea tijei;
3. În creștăturile suporturilor se aplică talerul cu masa de 100 g în stânga secțiunii la o distanță a , conform Fig. 3.a.);
4. În urma solicitării, afișajul digital se indică valoarea forței tăietoare datorată forței exterioare aplicate;
5. Se repetă măsurătoarea folosind talerele cu masele de la 200 g până la 500 g, din 100 g în 100 g;
6. Valorile forțelor tăietoare obținute experimental ($T_{exp.}$) se trec în Tabelul 2;
7. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor, respectiv, ale forței tăietoare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 2;
8. Rezultatele comparative ale determinărilor experimentale și, respectiv, teoretice se utilizează pentru trasearea diagramei de variație a acestora cu forța aplicată (Diagrama 1).

• **Date de intrare**

Tabelul 1. Valoarea forțelor aplicate și distanțe

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanțe [mm]		
		a	c	l
100	0,98		140	440
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,90			

- Rezultate

Tabelul 2. Rezultatele teoretice și experimentale ale forței tăietoare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanțe [mm]			Reacțiuni [N]		Forța tăietoare [N]		Ab. rel. ΔT [%]
		a	c	l	V ₁	V ₂	T _{teoretic}	T _{exp.}	
100	0,98		140	440					
200	1,96								
300	2,94								
400	3,92								
500	4,90								

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

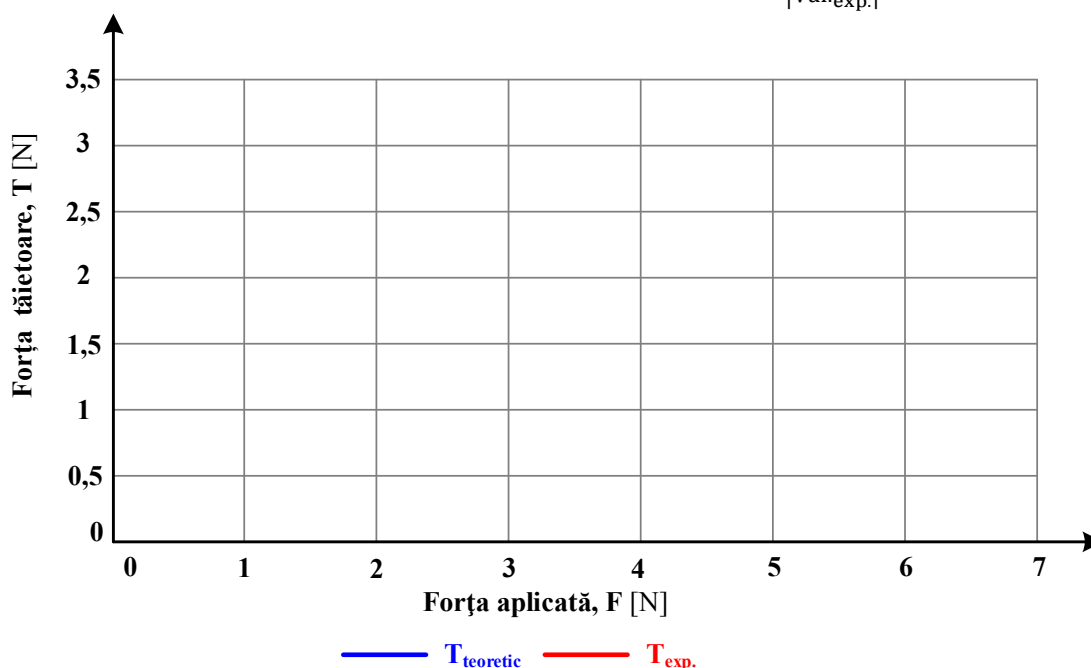


Diagrama 1. Variația forței tăietoare la aplicarea diferitor sarcini exterioare

Experimentul 2: Variația forței tăietoare în funcție de poziția forței exterioare

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a forței tăietoare, T, în secțiunea transversală a grinzii simplu rezemată (Fig. 4.a.), unde forțele concentrate exterioare F, sunt aplicate, succesiv, în unul sau mai multe puncte, obținându-se mai multe cazuri de solicitare (cazul 1, 2 și 3 din Fig. 4., 5. și, respectiv, 6.). Aceste măsurători evidențiază influența punctelor de aplicație ale forțelor exterioare asupra valorii forței tăietoare din secțiunea analizată a grinzii.

Cazul 1 – Se aplică talerul cu masa de 400 g în capătul liber al grinzii (punctul 3), la distanța $c = 140$ mm față de reazemul din punctul 1

- Calculul analitic al forței tăietoare

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, pentru cazul de rezemare și încărcare din Fig. 4.

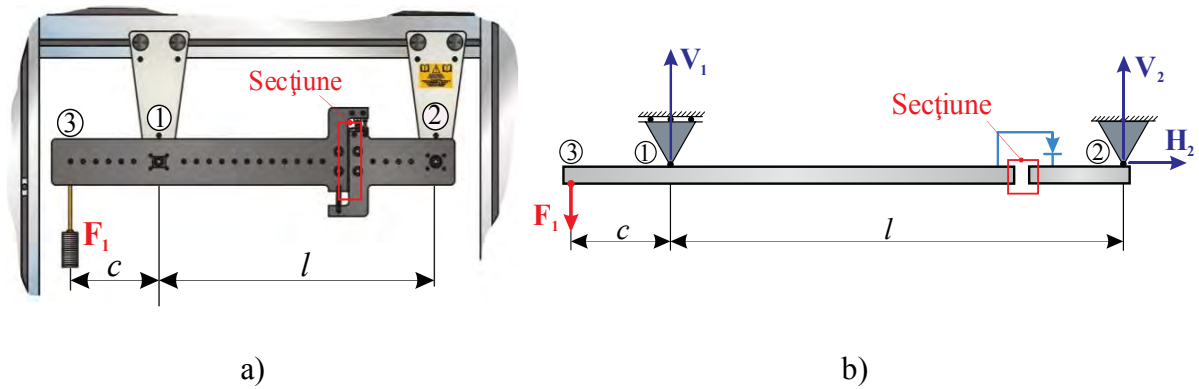


Fig. 4. Cazul 1 - încărcarea grinzii cu forța aplicată pe extremitatea stângă a consolei

Se aplică ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (6)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F_1 \cdot (c + l) = 0; V_1 = F_1 \cdot \frac{(c + l)}{l} \quad (7)$$

$$\sum M_1 = 0; -V_2 \cdot l - F_1 \cdot c = 0 \Rightarrow V_2 = -F_1 \cdot \frac{c}{l} \quad (8)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F_1 = 0; V_1 + V_2 = F_1 \quad (9)$$

Forța tăietoare T în secțiune se calculează cu una din cele două relații:

$$T_{stg.} = V_1 - F_1 \text{ [N]} \quad \text{sau} \quad T_{dr.} = -V_2 \text{ [N]} \quad (10)$$

Cazul 2 – Se aplică talerul cu masa 400 g la distanța $a = 360$ mm față de reazemul din punctul 1

• **Calculul analitic al forței tăietoare**

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, conform Fig. 5. și aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Se obține:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (11)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F_2 \cdot (l - a) = 0; V_1 = F_2 \cdot \frac{(l - a)}{l} \quad (12)$$

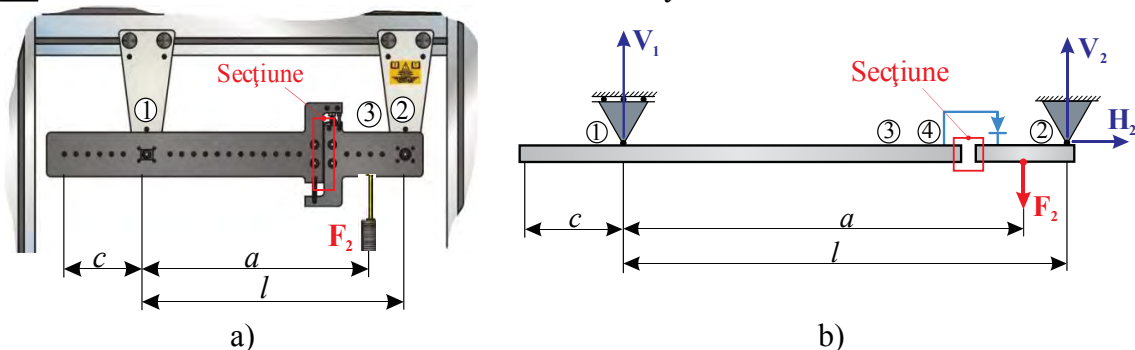


Fig. 5. Cazul 2 - încărcarea grinzii cu forța F_2

$$\sum M_1 = 0; F_2 \cdot a - V_2 \cdot l = 0; V_2 = F_2 \cdot \frac{a}{l} \quad (13)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; \quad V_1 + V_2 - F_2 = 0; \quad V_1 + V_2 = F_2 \quad (14)$$

Forța tăietoare T în secțiune se calculează cu una din cele două relații:

$$T_{\text{stg.}} = V_1 - F_2 \text{ [N]} \quad (\text{pozitivă}) \quad \text{sau} \quad T_{\text{dr.}} = -V_2 \text{ [N]} \quad (15)$$

Cazul 3 - Se aplică talerele cu masa de 200 g și, respectiv, de 400 g de o parte și de alta a secțiunii la distanțele $a = 160$ mm și $b = 360$ mm față de reazemul din punctul 1

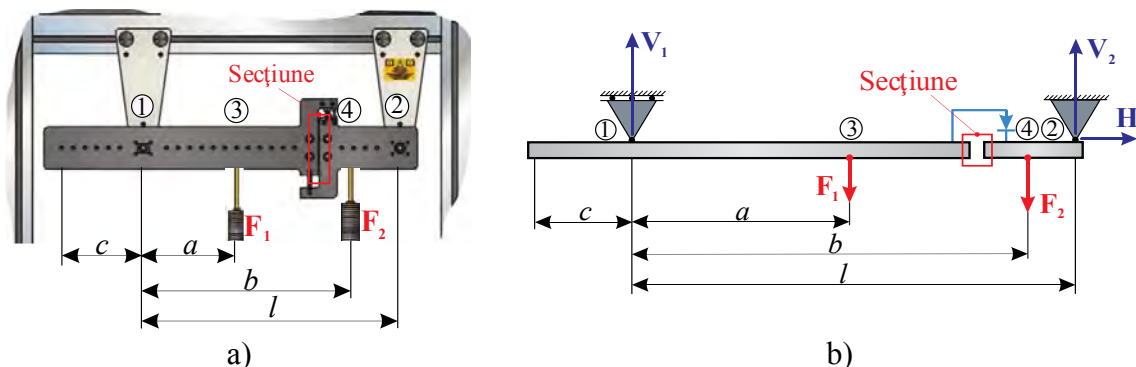


Fig. 6. Cazul 3 - încărcarea grinzii cu forțe situate de o parte și de alta a secțiunii

Aplicarea forțelor în pozițiile indicate duce la obținerea cazului particular de solicitare la încovoiere pură pe intervalul 3-4: $V_1 = F_1$ și $V_2 = F_2$ rezultând forța tăietoare $T = 0$ și momentul încovoiător $M_i = \text{constant}$.

• Calculul analitic al forței tăietoare

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, conform Fig. 6., scriind ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; \quad H_2 = 0 \quad (16)$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot l - F_1 \cdot (l - a) - F_2 \cdot (l - b) = 0; \quad (17)$$

$$V_1 = \frac{F_1 \cdot (l - a) + F_2 \cdot (l - b)}{l}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - V_2 \cdot l = 0; \quad V_2 = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{l} \quad (18)$$

Ecuația de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; \quad V_1 + V_2 - F_1 - F_2 = 0; \quad V_1 + V_2 = F_1 + F_2 \quad (19)$$

Forța tăietoare T în secțiune se calculează cu una din cele două relații:

$$T_{\text{stg.}} = V_1 - F_1 \text{ [N]} \quad \text{sau} \quad T_{\text{dr.}} = F_2 - V_2 \text{ [N]} \quad (20)$$

• Măsurători experimentale

Măsurătorile experimentale se vor realiza pentru cele trei cazuri de încărcare și rezemare prezentate în Fig. 4., 5. și 6., astfel:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suportul reazemului simplu);

2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*), luându-se în considerare și greutatea tijei;
3. În creștăturile suporturilor, se aplică greutatea sau forțele exterioare, conform schemelor de încărcare;
4. În urma solicitării, pe afișajul digital se indică valoarea forței tăietoare corespunzătoare;
5. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor, respectiv, ale forței tăietoare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 4.

- **Date de intrare**

Tabelul 3. Valoarea forțelor aplicate și distanțe

Cazul de încărcare	Forța aplicată F [N]		Distanțe [mm]			
	F ₁	F ₂	a	b	c	l
1	3,92	-	-	-	140	440
2	-	3,92	360	-	-	
3	1,96	3,92	160	360	-	

- **Rezultate**

Tabelul 4. Rezultatele teoretice și experimentale pentru forța tăietoare

Cazul de încărcare	Forța aplicată F [N]		Distanțe [mm]				Reacțiuni [N]		Forța tăietoare [N]		Ab. rel. ΔT [%]
	F ₁	F ₂	a	b	c	l	V ₁	V ₂	T _{teoretic}	T _{exp.}	
1	3,92	-	-	-	140	440					
2	-	3,92	360	-	-						
3	1,96	3,92	160	360	-						

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Din această fereastră se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

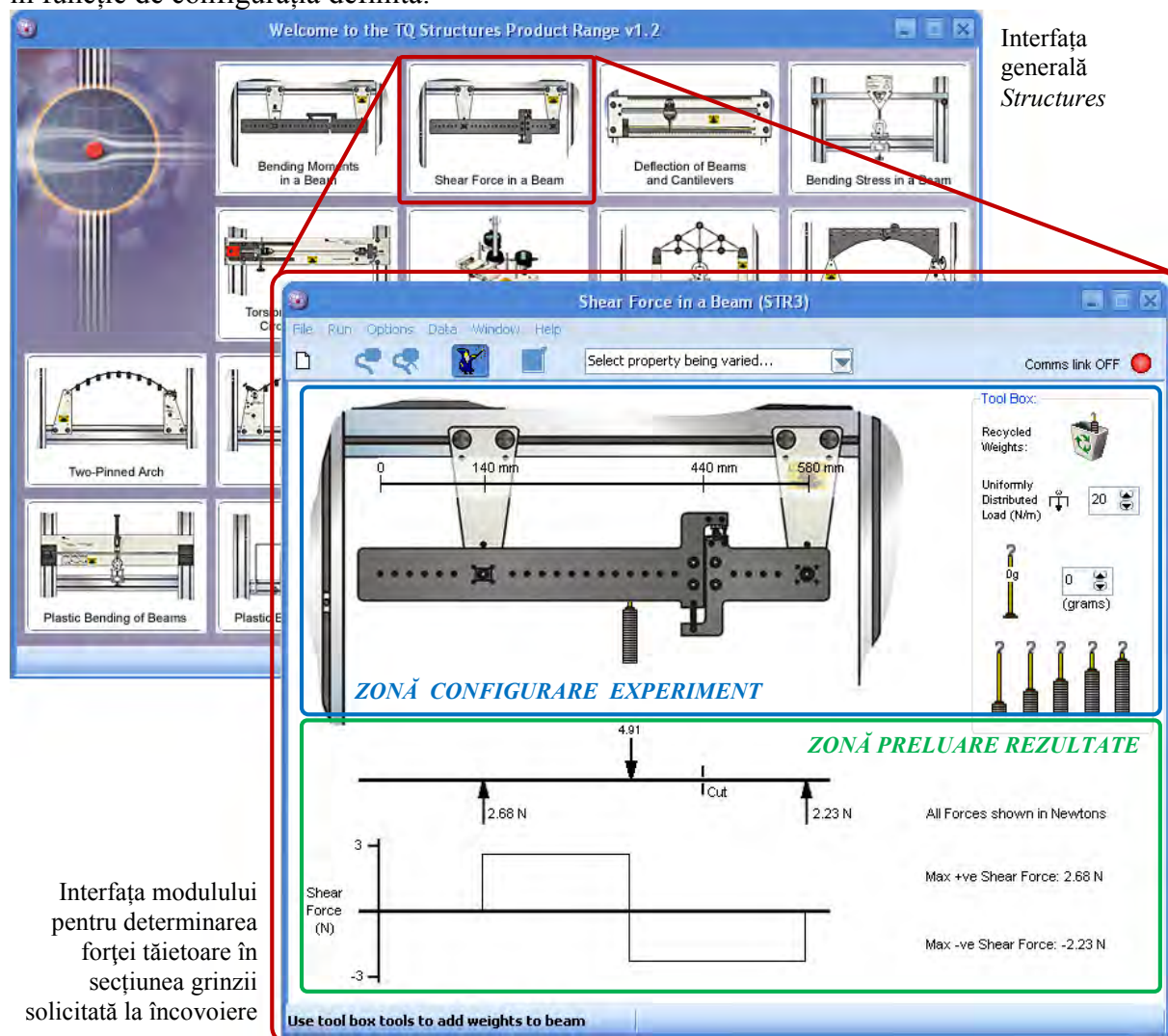


Fig. 7. Modulul *TQ Structures - Shear Force in a Beam* pentru determinarea forței tăietoare în secțiunea grinzii solicitată la încovoiere

Modulul pentru determinarea forței tăietoare (*Shear Force in a Beam*) în secțiunea grinzii solicitată la încovoiere, este compus din **ZONA DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a măsurătorilor, prin adăugarea de mase identice ca valoare și poziție pe structura virtuală cu cele de pe stand. În **ZONA DE PRELUARE A REZULTATELOR**, se completează în timp real câmpurile aferente valorilor sarcinii și a reacțiunilor din cadrul schiței experimentale. Se trasează diagrama de variație a forței tăietoare și se indică valoarea maximă a forței tăietoare corespunzătoare configurației definite.



LE2. Determinarea forței tăietoare într-o grindă solicitată la încovoiere plană

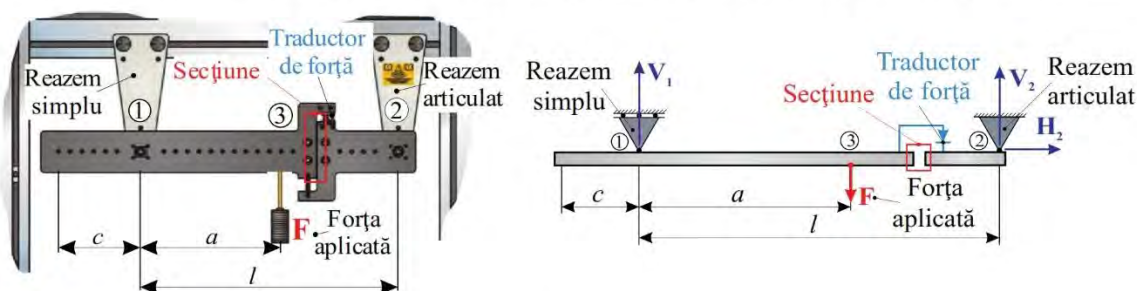
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a forței tăietoare (de forfecare) într-o grindă solicitată la încovoiere plană și compararea valorilor experimentale cu cele determinate teoretic (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

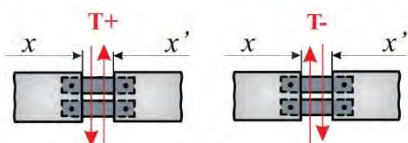
Forța tăietoare într-o secțiune a unei grinzi este o forță în planul secțiunii, normală la axa grinzii și are efectul de tăiere sau forfecare. Forța tăietoare se determină analitic cu metoda secțiunilor și reprezintă suma forțelor tăietoare din stânga sau din dreapta secțiunii.

• Experiment — Variația forței tăietoare la aplicarea diferitor sarcini exterioare



■ **Calculul reacțiunilor V_1 și V_2 .** Se cunosc distanțele a , c și l .

Ecuatii de echilibru date de statică în plan:



Convenția de semn pentru forța tăietoare

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) = 0; V_1 = F \cdot \frac{(l - a)}{l}$$

$$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot a = 0; V_2 = F \cdot \frac{a}{l}$$

$$\text{Verificare: } \sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0$$

■ **Forța tăietoare în secțiune:**

$$T_{\text{stg.}} = V_1 - F \quad \text{sau} \quad T_{\text{dr.}} = -V_2$$

■ **Forța tăietoare experimentală:**

• Valoarea forței tăietoare T_{exp} este indicată pe canalul 1 al afișajului digital.

Abateră relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val}_{\text{exp.}}| - |\text{Val}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m	Forța aplicată F	Distanțe			Reacțiuni		Forța tăietoare		Ab. rel. ΔT
		[mm]			[N]		[N]		
[g]	[N]	a	c	l	V_1	V_2	T_{teoretic}	$T_{\text{exp.}}$	[%]
100	0,98								
200	1,96								
300	2,94								
400	3,92								
500	4,90								

LE3. DETERMINAREA MOMENTULUI ÎNCOVOIETOR ÎNTR-O GRINDĂ SOLICITATĂ LA ÎNCOVOIERE PLANĂ

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea momentului încovoietor în secțiunea transversală a unei grinzi drepte solicitată la încovoiere plană. Valorile determinate experimental se vor compara cu valorile analitice, calculate cu relațiile teoretice.

INTRODUCERE

Pentru a pune în evidență eforturile ce acționează într-o secțiune a corpului, se utilizează metoda secțiunilor. Se secționează corpul rigid nedeformabil în două tronsoane în zona în care se dorește determinarea eforturilor. Pentru fiecare din cele două tronsoane se scriu ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Momentului încovoietor M_i reprezintă un efort cuprins în planul secțiunii, atunci când sarcinile exterioare tind să producă încovoierea celor două părți ale corpului. Momentul față de un punct se calculează ca produsul dintre forță și brațul acesteia în raport cu punctul respectiv (*brațul forței* – perpendiculara dusă din punctul față de care se calculează momentul încovoietor, pe suportul forței, lungimea acelei perpendiculare).

Într-o secțiune a unei grinzi, momentul încovoietor reprezintă suma tuturor momentelor încovoietoare situate în stânga sau în dreapta secțiunii. Convențional, momentul încovoietor este pozitiv în secțiunea din stânga dacă produce întinderea fibrelor inferioare ale grinzii, respectiv negativ dacă le scurtează. Scrierea ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan pentru determinarea momentului încovoietor presupune, în prima etapă, determinarea reacțiunilor din reazemele grinzii.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema de ansamblu pentru măsurarea momentului încovoietor într-o grindă solicitată la încovoiere plană:

- **Traductorul de forță** este elementul de conversie al semnalului din mărime mecanică în mărime electrică. Traductorul este un cristal piezoelectric care generează o diferență de potențial într-un plan perpendicular pe direcția de solicitare. Traductorul de forță este amplasat în planul vertical ce conține axa longitudinală a grinzii;
- **Brațul forței** permite măsurarea forței la o distanță de 125 mm față de secțiunea din grindă;
- **Sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță** este un ansamblu de circuite electronice care asigură amplificarea tensiunii traductorului, filtrarea semnalului și procesări analogice, ca liniarizare, derivare, integrare, ș.a., dacă se impun;
- **Potențiometrul de reglare** asigură aducerea la „zero“ a indicației pentru valoarea forței de măsurat;
- **Suportii pentru talere** permit aplicarea sarcinilor exterioare pe grindă la intervale de 20mm. Aceștia sunt prevăzuți cu o creștătură care asigură aplicarea forțelor în planul vertical ce conține și axa longitudinală a grinzii. Dacă aplicarea forțelor nu se face în acest plan, atunci grinda este solicitată suplimentar și la torsiune;
- **Reazemul articulată** anulează posibilitatea de mișcare a grinzii pe direcțiile orizontală și, respectiv, verticală, permițând doar rotirea grinzii în jurul axei articulației;
- **Reazemul simplu** sau reazemul mobil anulează posibilitatea de mișcare a grinzii pe direcția verticală, permițând deplasarea ei pe direcția orizontală și rotirea în jurul axei reazemului;

- **Grinda** este o bară simplu rezemată, pe porțiunea cuprinsă între cele două reazeme, prevăzută și cu o consolă – zona cuprinsă între extremitatea stângă și reazemul simplu;
- Grinda este tăiată, în zona **secțiunii**, unde se va determina momentul încovoietor, fiind introdusă o articulație ce trece prin axa longitudinală a grinzii. În realitate, grinda este o structură unitară, rigidă, care nu are porțiuni ce se rotesc liber unele în raport cu celelalte. Rotirea în jurul articulației este blocată prin pârghia care constituie brațul forței. Cuplul necesar anulării acestei rotiri este chiar momentul încovoietor ce ar apărea în grindă dacă aceasta nu ar fi tăiată. Mărimea momentului încovoietor este dată de tipul și poziția reazemelor și a sarcinilor care acționează asupra grinzii. Se determină experimental ca produs dintre forța măsurată de traductor și distanța până la secțiunea transversală, adică brațul forței, ce conține axa reazemului.

Fig. 2. prezintă standul pentru determinarea momentului încovoietor într-o grindă solicitată la încovoiere plană. Echipamentele descrise sunt fixate pe un cadru de susținere furnizat de producător. Afișajul digital preia semnalul de la sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță și îl redă în formă numerică. Valoarea indicată reprezintă sarcina exterioară aplicată traductorului de forță. Pentru determinarea momentului încovoietor, indicația de pe afișaj se înmulțește cu lungimea brațului forței. Valoarea momentului încovoietor poate fi preluată și direct din calculator, cu ajutorul programului care însoțește standul.

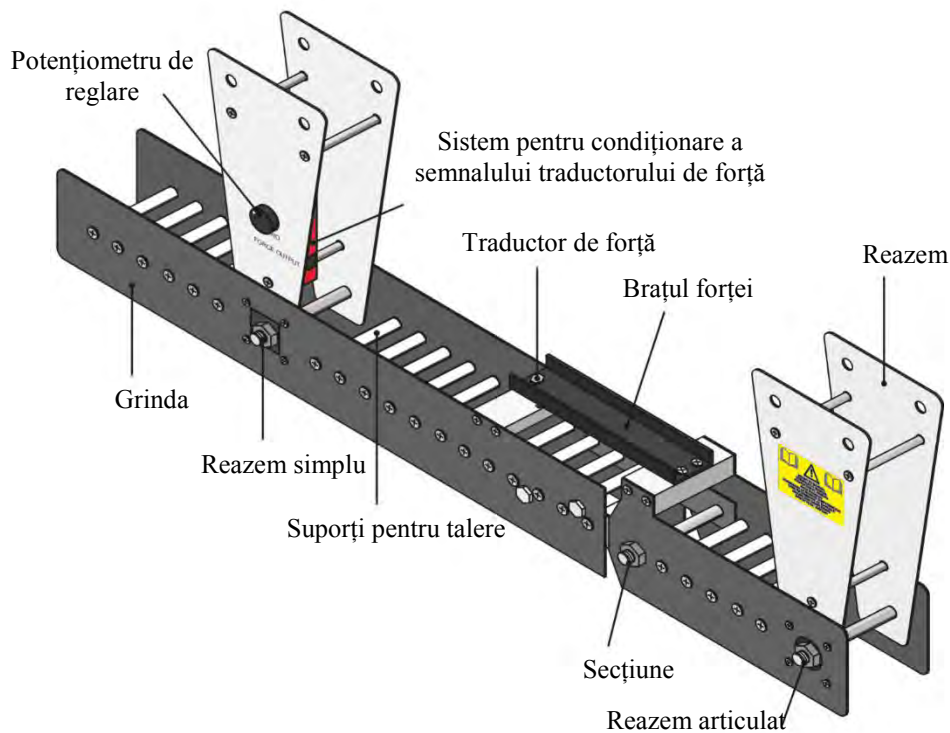


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea momentului încovoietor într-o grindă solicitată la încovoiere plană

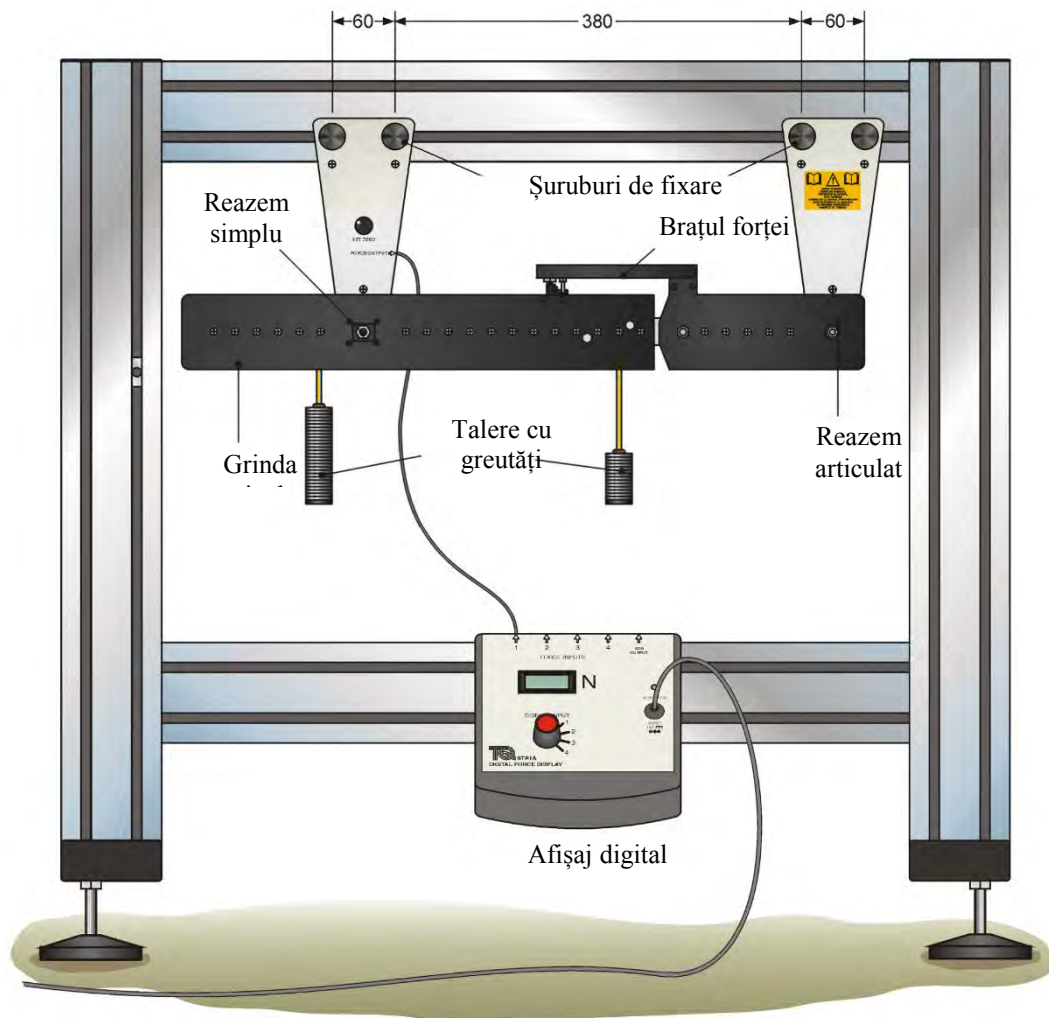


Fig. 2. Standul pentru determinarea momentului încovoietor într-o grindă solicitată la încovoiere plană

EFFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește măsurarea experimentală a momentului încovoietor pentru o grindă de lungime l [mm], simplu rezemată (un reazem simplu în punctul 1 și o articulație în punctul 2, Fig. 3.b.), și compararea valorilor experimentale cu valorile teoretice, obținute prin calcule analitice. Grinda este solicitată la încovoiere de forțe concentrate exterioare, F .

Experimentul 1: Variația momentului încovoietor la aplicarea diferitelor sarcini exterioare

Acest experiment are ca obiectiv studiul variației momentului încovoietor M_i , atunci când forțele exterioare F se aplică la o distanță fixă (distanța a [mm]) față de reazemul din stânga (punctul 1). În Fig. 3. se prezintă modul de rezemare și încărcare al grinzii, respectiv convenția de semne pentru momentul încovoietor. Conform Fig. 3.c), momentul încovoietor este pozitiv în secțiunea din stânga, dacă sub acțiunea sarcinilor exterioare aplicate fibrele superioare ale grinzii se scurtează iar cele inferioare se întind. Pentru grinda studiată, în secțiune semnul momentului încovoietor este pozitiv.

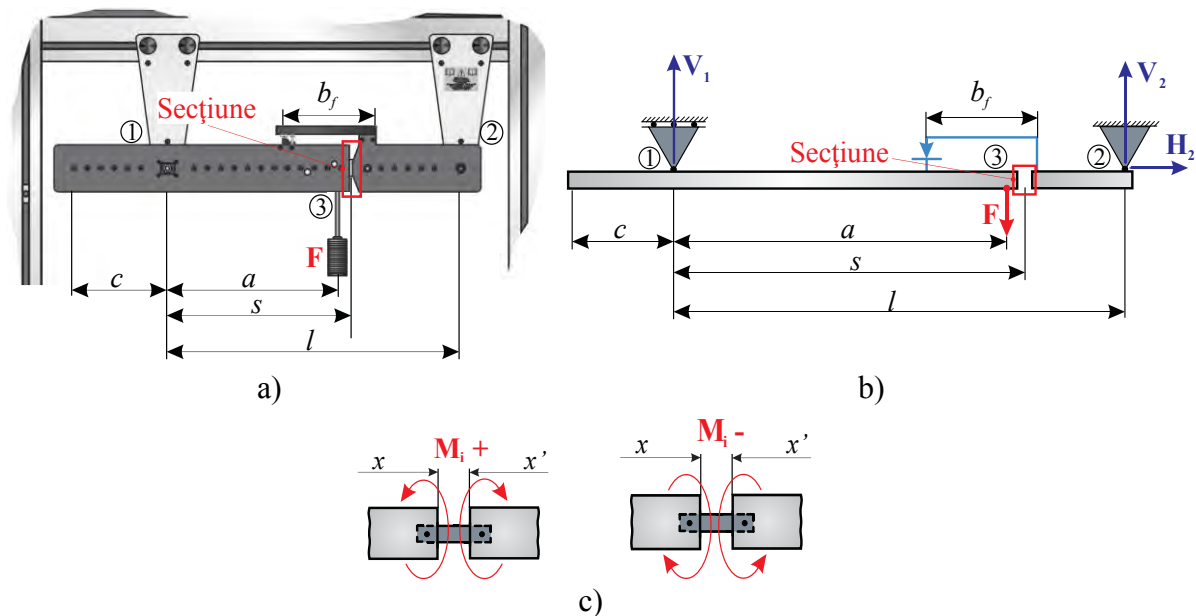


Fig. 3. a) și b). Schema de rezemare și încărcare a grinzii solicitată la încovoiere plană
c). Convenția de semne a momentului încovoiător într-o secțiune

• Calculul analitic al momentului încovoiător

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazemele grinzii, aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot a = 0; V_2 = \frac{F \cdot a}{l} \quad (2)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) = 0; V_1 = F \cdot \frac{(l - a)}{l} \quad (3)$$

Ecuația de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; V_1 + V_2 = F \quad (4)$$

Momentul încovoiător M_i într-o secțiune se determină aplicând metoda secțiunilor și reprezintă suma momentelor încovoiătoare în raport cu centrul de greutate a secțiunii considerate (x sau x') - suma tuturor cuplurilor exterioare (inclusiv momentele încovoiătoare date de reacțiuni) situate în stânga sau în dreapta secțiunii. În cazul grinzii studiate, momentul încovoiător M_i în secțiune se calculează aplicând una din cele două relații:

$$M_{i.stg.} = V_1 \cdot s - F(s - a) \quad \text{sau} \quad M_{i.dr.} = V_2(l - s) \quad (5)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suportul reazemului simplu);
2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*), luându-se în considerare și greutatea tijei;

- În creștăturile suporturilor, se pune talerul cu masa de 100 g în stânga secțiunii, la distanța „a” indicată în Fig. 3.;
- Momentul încovoietor experimental se determină prin înmulțirea valorii forței indicate pe afișajul digital cu brațul acesteia „b_f”, adică:

$$M_{iexp.} = F_{display} \cdot b_f \quad \text{sau} \quad M_{iexp.} = F_{display} \cdot 125 \quad (6)$$
- Se repetă măsurătorile pentru greutatea de la 200 g până la 500 g, din 100 g în 100 g;
- Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor, respectiv, ale momentelor încovoietoare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 2;
- Rezultatele comparative ale măsurătorilor experimentale și ale calculelor teoretice se utilizează pentru trasarea diagramei de variație a acestora cu forța aplicată (Diagrama 1).

- Date de intrare**

Tabelul 1. Valoarea forțelor aplicate și distanțe

Masa m	Forța aplicată F	Distanțe				
		[mm]				
[g]	[N]	a	c	b _f	l	s
100	0,98		140	125	440	300
200	1,96					
300	2,94					
400	3,92					
500	4,90					

- Rezultate**

Tabelul 2. Rezultatele teoretice și experimentale pentru momentul încovoietor

Masa m	Forța aplicată F	Distanțe					Reacțiuni		Moment încovoietor		Ab. rel. ΔM _i
		[mm]					[N]		[N·mm]		
[g]	[N]	a	c	b _f	l	s	V ₁	V ₂	M _i teoretic	M _i exp.	[%]
100	0,98		140	125	440	300					
200	1,96										
300	2,94										
400	3,92										
500	4,90										

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.}| - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100 [\%]$

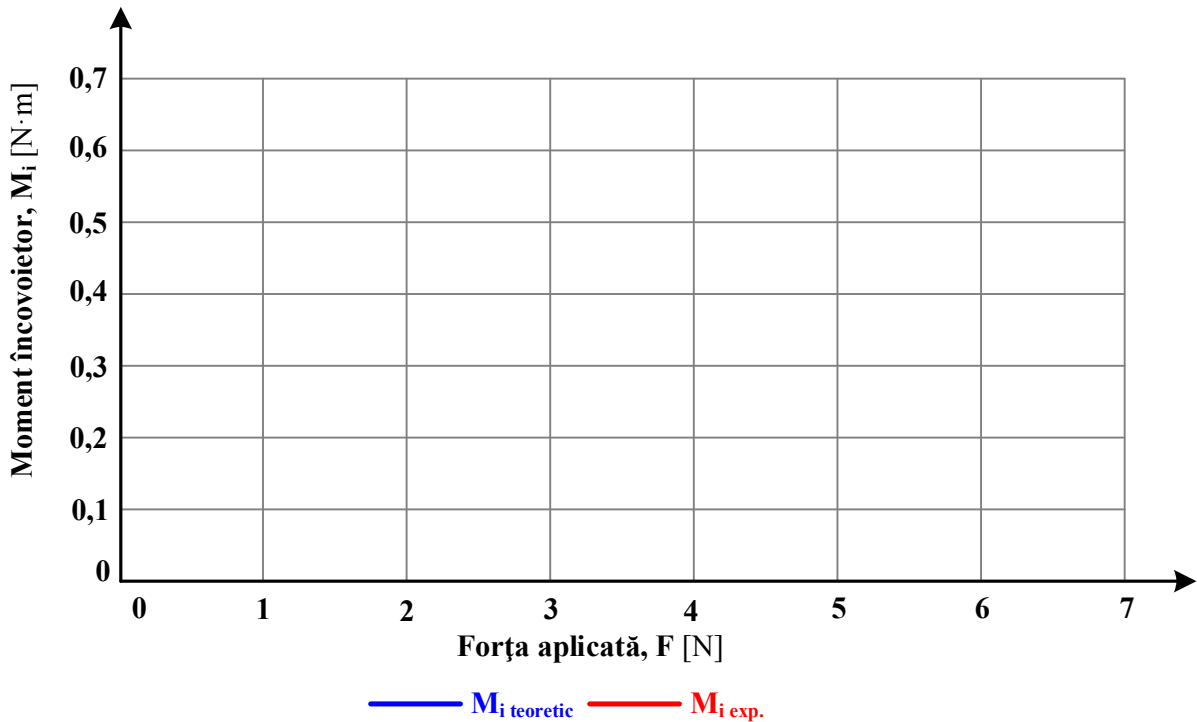


Diagrama 1. Variația momentului încovoietor la aplicarea diferitelor sarcini exterioare

Experimentul 2: Variația momentului încovoietor în funcție de poziția forței exterioare

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a momentului încovoietor, M_i , în secțiunea transversală a grinzii simplu rezemată (Fig. 4.a.), unde forțele concentrate exterioare F , sunt aplicate, succesiv, în unul sau mai multe puncte, obținându-se mai multe cazuri de solicitare (cazul 1, 2 și 3 din Fig. 4., 5. și, respectiv, 6.). Aceste măsurători evidențiază influența poziției punctelor de aplicație ale forțelor exterioare asupra momentului încovoietor din secțiunea studiată a grinzii.

Cazul 1 – Solicitare cu forța aplicată pe capătul consolei

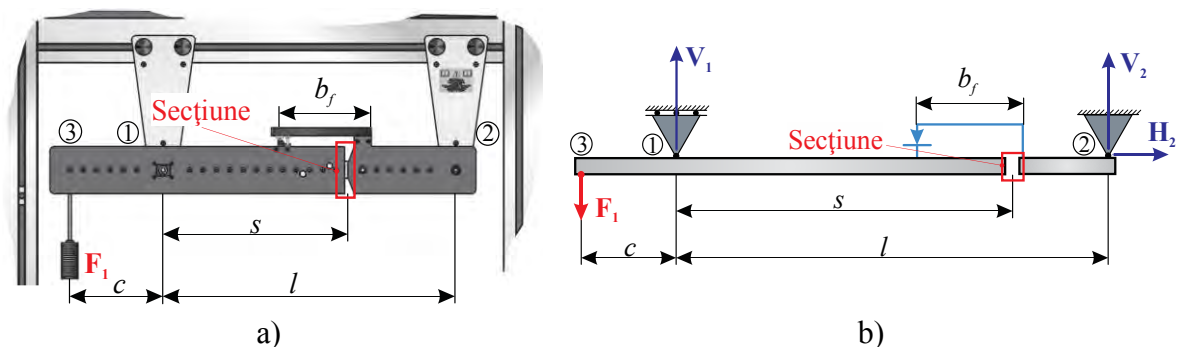


Fig. 4. Cazul 1 – Schema de rezemare și încărcare a grinzii solicitată la încovoiere plană

- **Calculul analitic al momentului încovoietor:**

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, ținând seama de Fig. 4. și aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_1 = 0; -V_2 \cdot l - F_1 \cdot c = 0; V_2 = -F_1 \cdot \frac{c}{l} \quad (8)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F_1 \cdot (c + l) = 0; V_1 = F_1 \cdot \frac{(c + l)}{l} \quad (9)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F_1 = 0; V_1 + V_2 = F_1 \quad (10)$$

Momentul de încovoiere M_i în secțiune se calculează cu una din cele două relații:

$$M_{i_{stg.}} = V_1 \cdot s - F_1(c + s) \quad \text{sau} \quad M_{i_{dr.}} = V_2(l - s) \quad (11)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suportul reazemului simplu);
2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (SET ZERO), luându-se în considerare și greutatea tijei;
3. În creștăturile suportilor, se pune talerul cu masa de 400 g pe capătul liber al grinzii (punctul 3), la distanța $c = 140$ mm față de reazemul din punctul 1 (Fig. 4.);
4. Momentul încovoiător experimental se determină prin înmulțirea valorii forței indicate pe afișajul digital cu brațul „ b_f ” al acesteia, adică:

$$M_{i_{exp.}} = F_{display} \cdot b_f \quad \text{sau} \quad M_{i_{exp.}} = F_{display} \cdot 125 \quad (12)$$

5. Valorile experimentale și teoretice ale momentelor încovoiătoare pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 4.

Cazul 2 - Solicitarea grinzii cu un sistem de forțe exterioare (convoi de forțe) situate de aceeași parte a secțiunii.

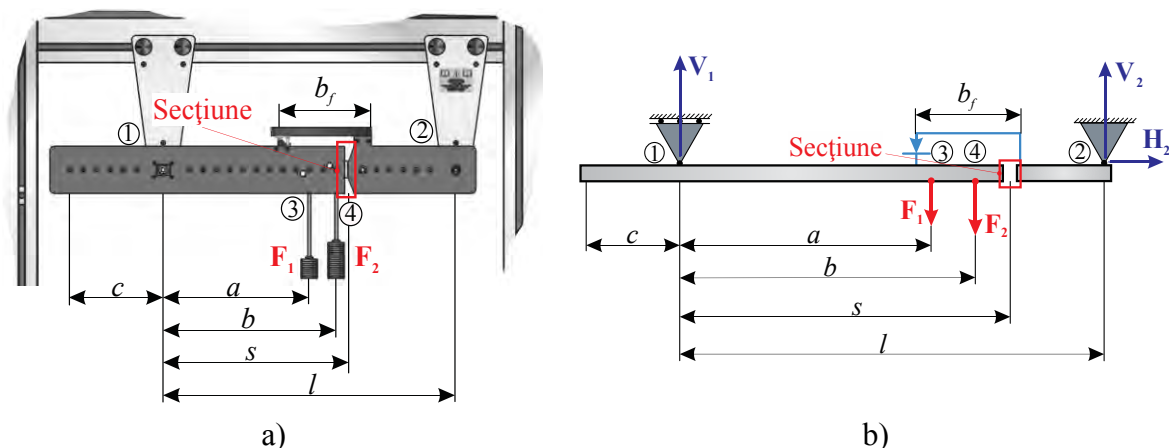


Fig. 5. Cazul 2 - Schema de încărcare și rezemare a grinzii solicitată la încovoiere plană

• Calculul analitic al momentului încovoiător

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, conform Fig. 5. și, aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Se obține:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (13)$$

$$\sum M_1 = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - V_2 \cdot l = 0; V_2 = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{l} \quad (14)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F_1 \cdot (l - a) - F_2 \cdot (l - b) = 0; V_1 = \frac{F_1 \cdot (l - a) + F_2 \cdot (l - b)}{l} \quad (15)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F_1 - F_2 = 0; V_1 + V_2 = F_1 + F_2 \quad (16)$$

Momentul încovoietor M_i în secțiune se calculează aplicând una din cele două relații:

$$M_{i.stg.} = V_1 \cdot s - F_1 \cdot (s - a) - F_2 \cdot (s - b) \quad \text{sau} \quad (17)$$

$$M_{i.dr.} = V_2 \cdot (l - s)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor se parcurg următoarele etape:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suportul reazemului simplu);
2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*), luându-se în considerare și greutatea tijei;
3. În creștăturile suporturilor, se aplică talerele cu masa de 200 g, respectiv 400 g, la distanțele $a = 220$ mm, respectiv $b = 260$ mm față de reazemul din punctul 1 (Fig. 5.);
4. Momentul încovoietor experimental se determină prin înmulțirea valorii forței indicate pe afișajul digital cu brațul „ b_f ” al acesteia, adică:

$$M_{i.exp.} = F_{display} \cdot b_f \quad \text{sau} \quad M_{i.exp.} = F_{display} \cdot 125 \quad (18)$$

5. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor, respectiv, ale momentelor încovoietoare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 4.

Cazul 3 - Solicitarea grinzii cu forțe situate de o parte și de alta a secțiunii

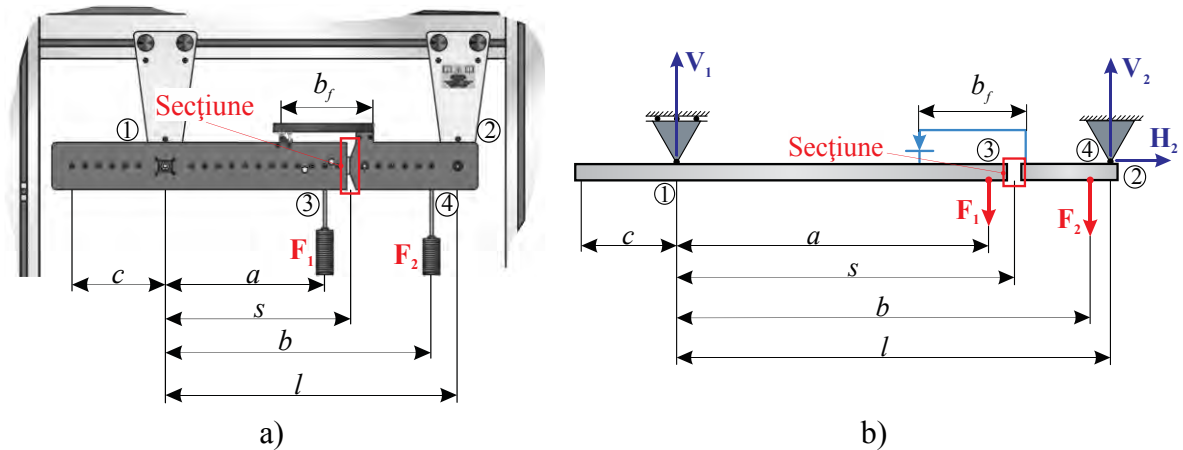


Fig. 6. Cazul 3 - Schema de încărcare și rezemare a grinzii solicitată la încovoiere plană

• Calculul analitic al momentului încovoietor

Se calculează reacțiunile V_1 și V_2 din reazeme, ținând seama de Fig. 6. și aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Se obține:

$$\sum F_x = 0; H_2 = 0 \quad (19)$$

$$\sum M_1 = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - V_2 \cdot l = 0; V_2 = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{l} \quad (20)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F_1 \cdot (l - a) - F_2 \cdot (l - b) = 0; V_1 = \frac{F_1 \cdot (l - a) + F_2 \cdot (l - b)}{l} \quad (21)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală se utilizează pentru verificare:

$$\sum F_y = 0; \quad V_1 + V_2 - F_1 - F_2 = 0; \quad V_1 + V_2 = F_1 + F_2 \quad (22)$$

Momentul încovoietor M_i în secțiune se calculează aplicând una din cele două relații:

$$M_{i.stg.} = V_1 \cdot s - F_1 \cdot (s - a) \quad \text{sau} \quad M_{i.dr.} = V_2 \cdot (l - s) - F_2 \cdot (b - s) \quad (23)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în suprotul reazemului simplu);
2. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*), luându-se în considerare și greutatea tijei;
3. În creștăturile suporturilor, se aplică talerele cu masa de 500 g, respectiv 400 g, la distanțele $a = 240$ mm, respectiv $b = 400$ mm față de reazemul din punctul 1 (Fig. 5.);
4. Momentul încovoietor experimental se determină prin înmulțirea valorii forței indicate pe afișajul digital cu brațul „ b_f ” al acesteia, adică:

$$M_{i.exp.} = F_{display} \cdot b_f \quad \text{sau} \quad M_{i.exp.} = F_{display} \cdot 125 \quad (24)$$

6. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor, respectiv, ale momentelor încovoietoare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 4.

• Date de intrare

Tabelul 3. Valoarea forțelor aplicate și distanțe

Cazul de încărcare	Forța aplicată F [N]		Distanțe [mm]				
	F ₁	F ₂	a	b	c	l	s
1	3,92	-	-	-	140	440	300
2	1,96	3,92	220	260	-		
3	4,90	3,92	240	400	-		

• Rezultate

Tabelul 4. Rezultatele teoretice și experimentale pentru momentul încovoietor

Cazul de încărcare	Forța aplicată F [N]		Distanțe [mm]					Reacțiuni [N]		Momentul încovoietor [N·mm]		Ab. rel. M_i [%]
	F ₁	F ₂	a	b	c	l	s	V ₁	V ₂	M _{iteoretic}	M _{iexp.}	
1	3,92	-	-	-	140	440	300					
2	1,96	3,92	220	260	-							
3	4,90	3,92	240	400	-							

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

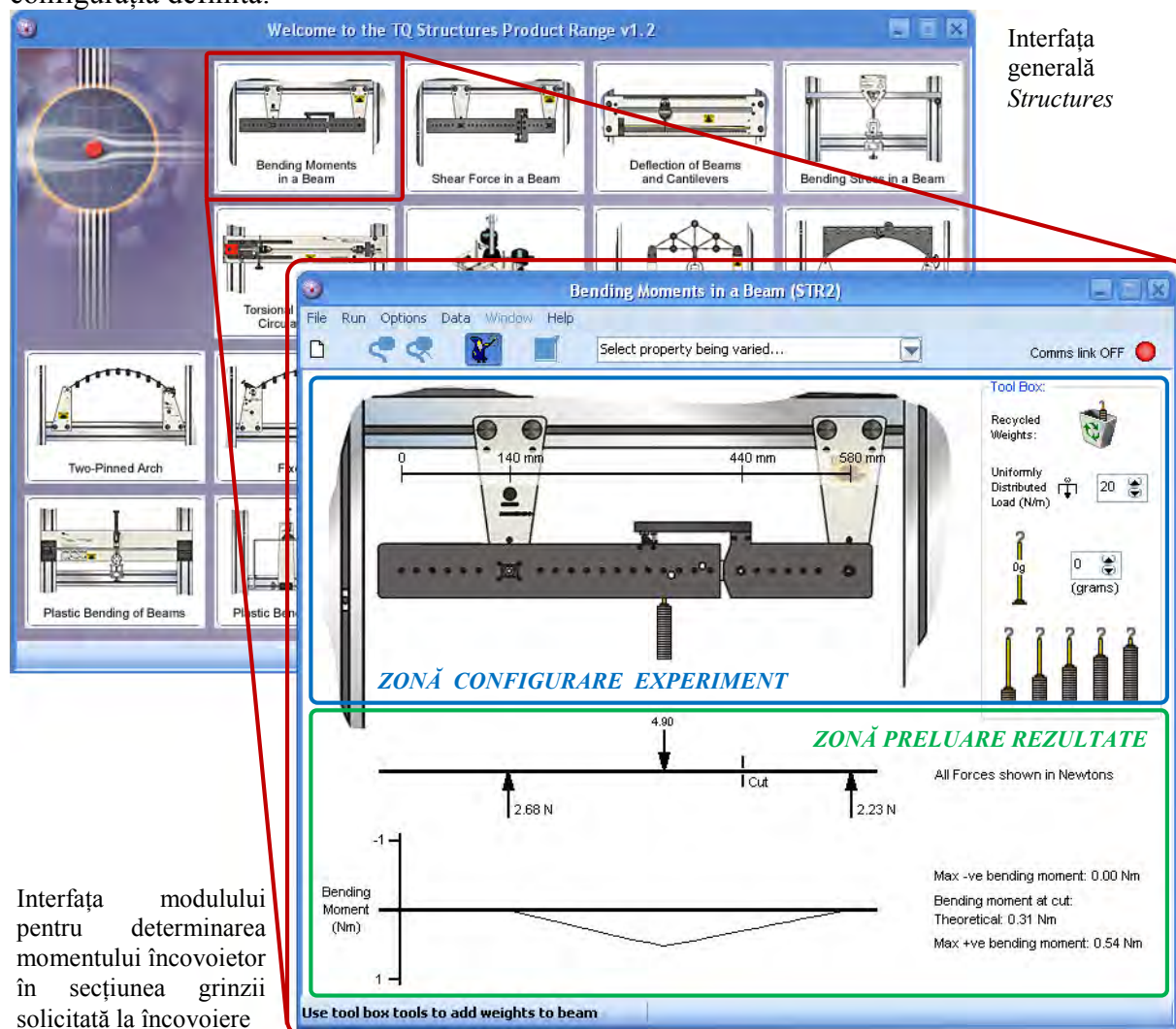


Fig. 7. Modulul *TQ Structures – Bending Moments in a Beam* pentru determinarea momentului încovoietor în secțiunea grinzii solicitată la încovoiere

Modulul pentru determinarea momentului încovoietor (*Bending Moments in a Beam*) în secțiunea grinzii, solicitată la încovoiere, este compus din **ZONA DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a măsurătorilor prin adăugarea de mase identice ca valoare și poziție pe structura virtuală cu cele de pe stand. În **ZONA DE PRELUARE A REZULTATELOR**, programul completează în timp real câmpurile aferente valorilor sarcinii și al reacțiunilor din cadrul schiței experimentale. Se trasează diagrama momentului de încovoiere corespunzător configurației definite, indicându-se valoarea maximă a momentului de încovoiere și, respectiv, valoarea momentului din dreptul secțiunii, care se compară cu valoarea determinată experimental.



LE3. Determinarea momentului încovoiător într-o grindă solicitată la încovoiere plană

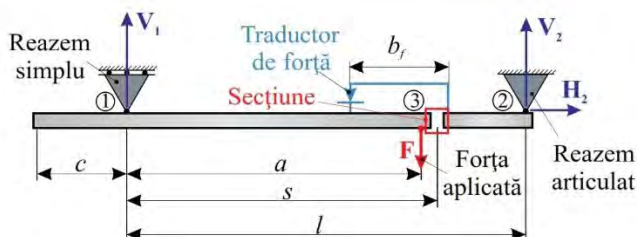
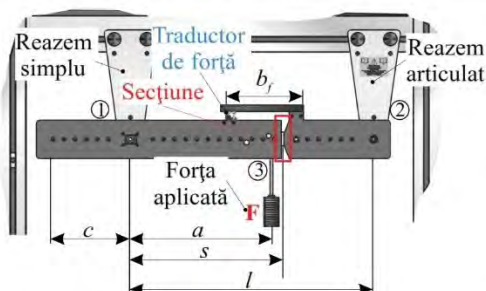
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a momentului încovoiător într-o grindă solicitată la încovoiere plană și compararea valorilor acestora cu valorile determinate teoretic (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

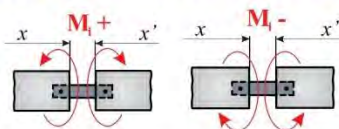
Momentul încovoiător M_i reprezintă suma tuturor momentelor încovoiătoare în raport cu centrul de greutate al unei secțiuni, respectiv a tuturor cuplurilor exterioare (inclusiv ale momentelor date de reacțiuni), situate în stânga sau în dreapta secțiunii.

• Experiment — Măsurarea momentului încovoiător



■ Calculul reacțiilor V_1 și V_2 .

Ecuatii de echilibru date de statică în plan:



Convenția de semne pentru momentul încovoiător

Se cunosc distanțele a , c , b_f , l și s .

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; H_2 = 0; \\ \sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F(l-a) = 0; V_1 = F \cdot \frac{(l-a)}{l} \\ \sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot a = 0; V_2 = F \cdot \frac{a}{l} \end{aligned}$$

Verificare: $\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0$

■ Momentul încovoiător în secțiune:

$$M_{i_{sg.}} = V_1 \cdot s - F(s-a) \quad \text{sau} \quad M_{i_{dr.}} = V_2 \cdot (l-s)$$

■ Momentul încovoiător experimental:

$$M_{i_{exp.}} = F_1 \cdot b_f \quad [\text{N} \cdot \text{mm}]$$

unde: F_1 - forța indicată de afișajul digital; b_f - brațul forței F_1 .

Abateră relativă se calculează:

$$Ab. \text{rel.} = \frac{|\text{Val}_{exp.}| - |\text{Val}_{teoretic}|}{|\text{Val}_{exp.}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m	Forța aplicată F	Distanțe					Reacțiuni		Momentul încovoiător		Ab. rel. ΔM_i
		[mm]					[N]		[N·mm]		
[g]	[N]	a	c	b_f	l	s	V_1	V_2	$M_{i \text{ teoretic}}$	$M_{i \text{ exp.}}$	[%]
100	0,98										
200	1,96										
300	2,94										
400	3,92										
500	4,90										

LE 4. STUDIUL TENSIUNI NORMALE ÎNTR-O GRINDĂ UTILIZÂND TENSOMETRIA ELECTRICĂ REZISTIVĂ

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea tensiunilor normale în secțiunea transversală a unei grinzi drepte solicitată la încovoiere, prin metoda Tensometriei Electrice Rezistive (T.E.R.). Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu valorile analitice, calculate cu relațiile teoretice.

INTRODUCERE

Tensometria electrică este metoda de măsurare a deformațiilor unui corp solicitat prin intermediul unor traductoare, care transformă deformațiile mecanice în variații ale rezistenței electrice. Este cunoscut faptul că rezistența unui conductor este direct proporțională cu lungimea și cu rezistivitatea materialului din care este confecționat, respectiv invers proporțională cu aria secțiunii transversale a firului parcurs de curent. Traductorii tensometrici rezistivi existenți la ora actuală sunt fabricați sub forma unei rețele (folii) metalice depuse pe un suport izolator, rezistența electrică a traductorului fiind în mod uzual de 120 Ω sau de 350 Ω . Materialul firului metalic (rezistența) este, în mod, curent aliajul Ni-Cu, cunoscut sub numele de constantan, iar pentru suportul izolator este utilizată poliamida. Dacă traductorul este lipit pe un element solicitat, atunci este posibilă determinarea deformațiilor specifice ale piesei, ca urmare a modificării rezistenței electrice a traductorului. Acesta constituie principiul de funcționare al traductoarelor tensometrice rezistive.

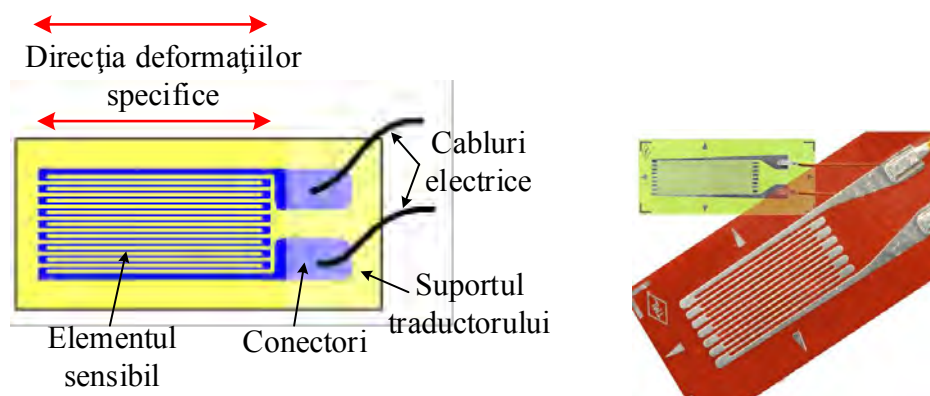


Fig. 1. Traductorul tensometric rezistiv (timbru tensometric sau marcă tensometrică)

Legea de transformare specifică traductorului tensometric rezistiv este:

$$\Delta R = K_2 \cdot \varepsilon_1 \cdot R \quad (1)$$

unde ΔR – modificarea rezistenței electrice a traductorului ca urmare a deformației, Ω

K_2 – constanta traductorului (Gauge Factor), adimensional.

ε_1 – deformația specifică longitudinală a rețelei acestuia, $\mu\text{m}/\text{m}$

R – rezistența electrică a rețelei nedeformate a traductorului, Ω

Constanta traductorului depinde de materialul utilizat pentru fabricarea rețelei și are valori apropiate de 2 (pentru constantan $K_2 = 2,1$). Valorile maxime ale deformației specifice care pot fi măsurate cu un traductor electrotensometric din folie depinde de materialele rețelei și al suportului, pentru combinația constantan – poliamidă plaja de măsurare fiind între $\pm 0,5\%$ și \pm

1,5 %. Valoarea lui ΔR este foarte mică, fiind necesară, de obicei, amplificarea și transformarea acesteia într-un semnal de tensiune, utilizând amplificatoarele de semnal. Circuitele electrice de măsurare sunt concepute astfel încât să permită urmărirea cât mai fidelă a micilor variații de rezistență ale traductorului tensometric, produse de deformațiile preluate de la elementele elastice pe care acestea sunt lipite. În componența amplificatoarelor se pot identifica două părți distincte: un circuit de măsurare de tip punte Wheatstone (numită și punte tensometrică) pe brațele căreia se conectează traductoare rezistive și/sau rezistențe calibrate și un bloc de amplificare și conversie în semnal util. Schema de montaj (punte completă, semipunte sau sfert de punte) se alege în funcție de tipul măsurătorii și de precizia dorită, utilizând proprietatea punții Wheatstone de a însuma efectele din brațele opuse și de a le scădea pe cele din brațele adiacente.

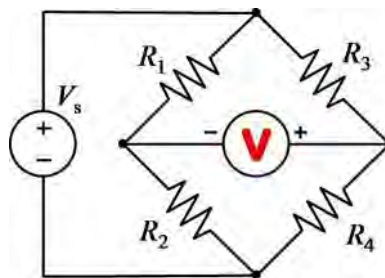


Fig. 2. Puntea Wheatstone

Lucrarea de laborator utilizează un montaj în semipunte ce conține în brațele adiacente, un traductor electrotensometric activ și altul inactiv (nesolicitat), introdus în circuit pentru compensarea efectului variațiilor de temperatură. Traductoarele inactice, aflându-se în aceleași condiții ambientale cu traductoarele active, suferă aceleași deformații termice. Puntea Wheatstone (completă sau semipunte) scade efectele din brațele adiacente, eliminând efectele parazite ale dilatării elementelor elastice ale traductorilor.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 3. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea tensiunilor normale într-o grindă solicitată la încovoiere prin Tensometrie Electrică Rezistivă:

- **Grinda** este o bară profilată din aluminiu, simplu rezemată;
- **Mărcile tensometrice** sau traductoarele electrotensometrice rezistive sunt elementele de conversie între mărimea mecanică și cea electrică. În acest caz, o lungire sau o comprimare este convertită într-o variație a unei rezistențe electrice. Astfel, dacă marca tensometrică este lipită pe o suprafață care urmează să fie solicitată mecanic, atunci nivelul de solicitare poate fi determinat prin monitorizarea variației rezistenței electrice a traductorului tensometric. Cunoscând modulul de elasticitate longitudinală al materialului grinzii, pe baza legii lui Hooke, se poate determina tensiunea normală din fibra grinzii în zona și pe direcția pe care este lipită marca tensometrică;
- **Cadrul de încărcare** este o componentă ce asigură divizarea sarcinii generate cu ajutorul mecanismului de încărcare cu două forțe egale. Prin intermediul **cuielor de reținere** se asigură aplicarea celor două forțe la distanțe egale față de **reazemele** grinzii. Se obține astfel, cazul particular de grindă simplu rezemată solicitată de două forțe egale și egal distanțate de reazeme. Grinda este solicitată la încovoiere pură pe tronsonul cuprins între punctele de aplicație ale celor două forțe exterioare. Această zonă este utilizată pentru determinarea experimentală a tensiunilor normale în secțiunea unei grinzii solicitată la încovoiere plană;
- **Conectorii mărcilor tensometrice** transferă informațiile legate de variația rezistenței electrice a mărcilor către sistemul de conversie și afișare a deformațiilor specifice.

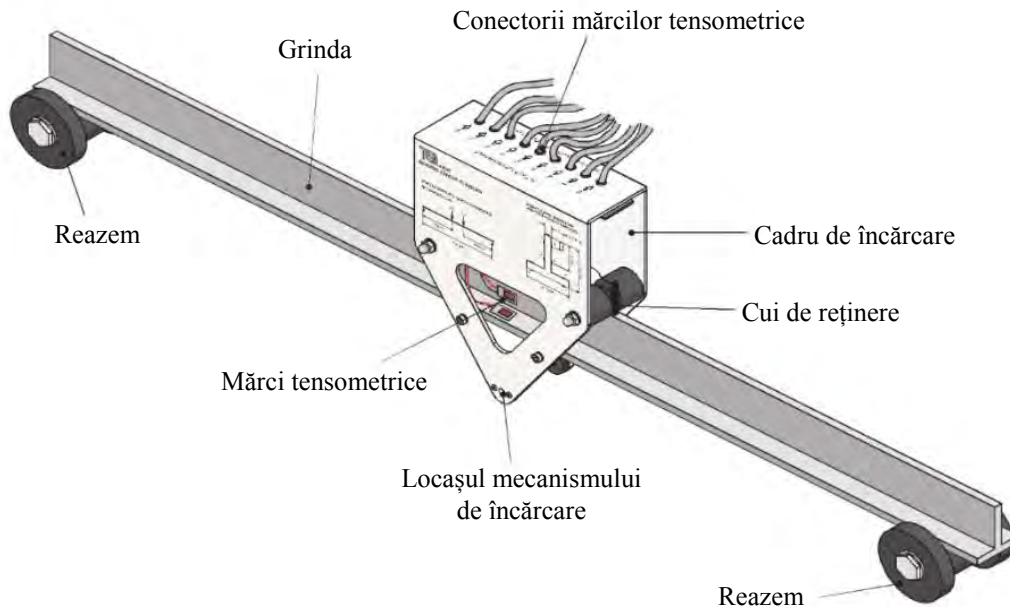


Fig. 3. Schema pentru studiul tensiunii normale în secțiunea unei grinzi solicitate la încovoiere pură

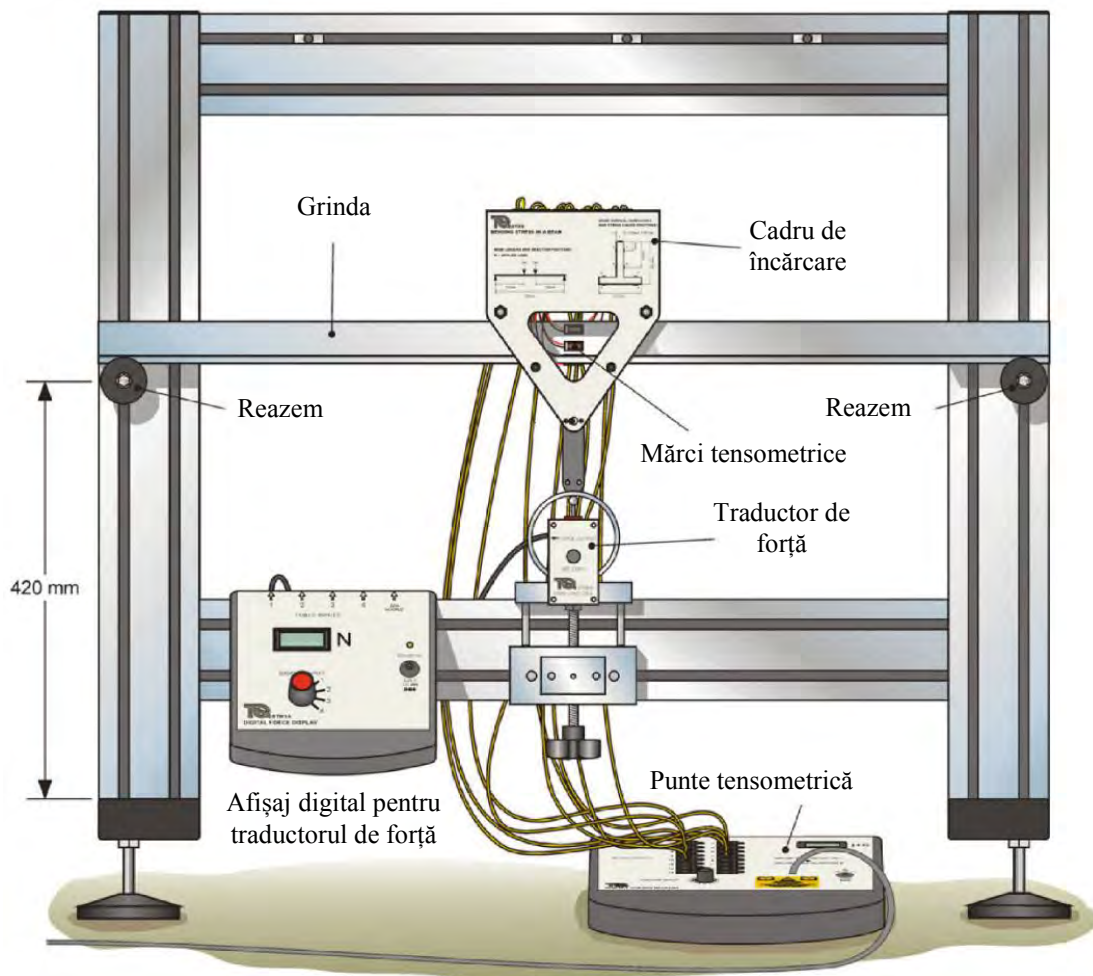


Fig. 4. Standul pentru determinarea tensiunii normale în secțiunea unei grinzi solicitată la încovoiere pură

Cele două cabluri conțin firele unei mărci tensometrice din zona de măsurare, precum și firele perechii ei, ce are ca rol compensarea efectului deformațiilor cauzate de dilatarea termică a grinzii. Aceste mărci de compensare sunt amplasate pe o bucată de grindă nesolicitată mecanic și confecționată din același material ca și grinda studiată, componente ce se află tot în cadrul de încărcare.

În Fig. 4. este prezentat standul pentru determinarea tensiunii normale în secțiunea transversală a unei grinzi solicitată la încovoiere pură. Echipamentele descrise sunt fixate pe cadrul de solicitare furnizat de producător, la care se adaugă:

- **Traductorul de forță** care este un inel dinamometric ce măsoară sarcina aplicată pe cadrul de încărcare, prin intermediul acestuia, de către mecanismul cu șurub și piuliță. Principiul de funcționare al acestui traductor se bazează pe faptul că inelul se ovalizează sub acțiunea unei sarcini aplicate. Pe baza curbei de etalonare a inelului dinamometric, forța transmisă prin inel se poate determina prin măsurarea deformației acestuia;
- **Afișajul digital pentru traductorul de forță** preia semnalul generat de traductor și îl afișează în format numeric, permițând astfel utilizatorului să regleze forța de solicitare a grinzii;
- **Afișajul digital pentru deformația specifică** preia semnalul traductorului tensometric și determină variația rezistenței electrice. Această variație este prea mică pentru a fi detectată cu ajutorul ohmmetrelor clasice, ceea ce duce la necesitatea amplificării ei cu puntea Wheatstone. Pe lângă rolul de amplificator, în schema electrică a punții Wheatstone există și marca pentru compensarea efectului termic, astfel încât cele două procesări de semnal se fac simultan. Componentele electronice care preiau semnalul de ieșire din punte îl transformă și afișează deformația specifică corespunzătoare unei fibre din secțiunea studiată a grinzii.

EFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește determinarea tensiunii normale, σ , pentru o grindă simplu rezemată de lungime l [mm], solicitată la încovoiere pură de forțele concentrate $F/2$, aplicate în punctele 3 și 4, aflate la egală distanță față de cele două reazeme. Tensiunea normală în secțiune se determină aplicând legea lui Hooke, unde deformațiile axiale specifice, ϵ , se măsoară experimental prin metoda Tensometriei Electrice Rezistive. Pentru calculul tensiunilor normale cu legea lui Hooke, este necesar să se cunoască materialul din care s-a realizat grinda, respectiv modulul de elasticitate longitudinală, E .

Experiment: Determinarea tensiunii normale într-o grindă solicitată la încovoiere plană

În acest experiment, se măsoară valorile experimentale ale deformațiilor specifice, ϵ solicitând grinda de secțiune constantă la încovoiere pură. Utilizând legea lui Hooke și deformațiile axiale specifice măsurate se vor determina valorile experimentale ale tensiunilor normale σ . Valorile experimentale ale tensiunilor se vor compara cu valorile calculate analitic.

• **Calculul analitic al tensiunilor normale**

Pentru grinda simplu rezemată de lungime l [mm] și solicitată la încovoiere pură în secțiunea A – A (Fig. 5.), tensiunile normale σ se calculează cu formula lui Navier:

$$\sigma_{\text{analitic}} = \frac{M_i}{I_z} \cdot y \quad (2)$$

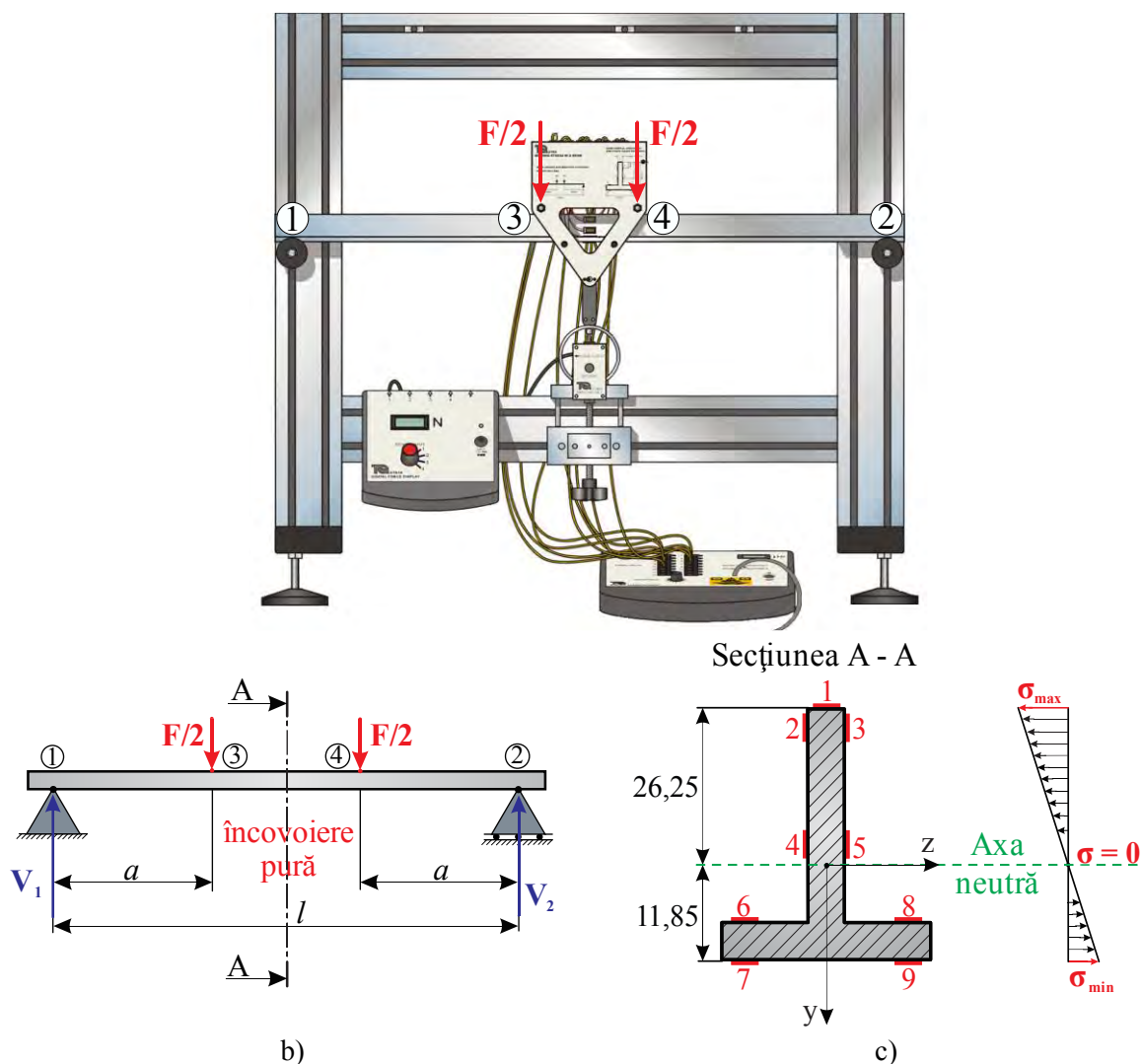


Fig. 5. Rezemarea și solicitarea la încovoiere pură a grinzii – a) Stand experimental; b) Schemă simplificată; c) Poziționarea mărcilor tensometrice în raport cu axa neutră a secțiunii transversale a grinzii și distribuția tensiunilor normale în secțiunea grinzii

$$M_i = \frac{F}{2} \cdot a \quad (3)$$

unde: M_i – momentul încovoiator, [N·mm]
 F – forța de solicitare pe grindă, [N]
 I_z – momentul de inerție axial, după axa „z”, al secțiunii transversale, [mm⁴]
 y – reprezintă poziția unei fibre oarecare față de axa neutră. În cazul dat, cota y reprezintă poziționarea mărcilor tensometrice în raport cu axa neutră a secțiunii transversale a grinzii, valori prezentate în Tabelul 2.
 a – distanța dintre punctul de aplicație al forței $F/2$ și reazemul din stânga sau din dreapta, [mm]

Tabelul 2. Poziționarea traductorilor tensometrici la cota y

Nr. traductorului	Poziționarea traductorilor tensometrici y [mm]
1	-26,25
2 ; 3	-18,25
4 ; 5	-3,25
6 ; 7	5,6
8 ; 9	11,85

• **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se conectează cele 9 mărci tensometrice la puntea tensometrică (marca tensometrică 1 la intrarea 1 ș.a.m.d.), respectiv, traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat pe cadrul de solicitare);
2. Grinda se pretensionează prin intermediul cadrului de încărcare, pentru reducerea jocurilor din reazeme;
3. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențimetrului de reglare (*SET ZERO*);
4. Pentru starea inițială (nesolicitată) a grinzii, se trec în Tabelul 3 deformațiile specifice inițiale, $\varepsilon_{i \text{ exp}}$, citite de pe afișajul digital, corespunzătoare fiecărui traductor aferent canalului selectat al punții tensometrice;
5. Grinda se soliciată cu o forță F prin intermediul cadrului de încărcare;
6. Pentru starea soliciată a grinzii, se trec în Tabelul 3 deformațiile specifice finale, ε_f , citite pe afișajul digital, corespunzătoare fiecărui traductor aferent canalului selectat al punții tensometrice;
7. Se calculează deformația specifică reală, $\varepsilon_{r \text{ exp}}$, cu relația (3), ținând cont de semnul acestora, iar tensiunile normale experimentale σ_{exp} cu relația (4);
8. Valorile experimentale și teoretice ale deformațiilor specifice, respectiv rezultatele experimentale și teoretice ale tensiunilor normale, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 3.

Determinarea experimentală a tensiunilor normale, σ_{exp} , se face cu legea lui Hooke, astfel:

$$\varepsilon_{r \text{ exp}} = \varepsilon_{f \text{ exp}} - \varepsilon_{i \text{ exp}} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{m}} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{exp}} = E_{\text{Al}} \cdot \varepsilon_{r \text{ exp}} \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad (4)$$

• **Date de intrare**

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală, E [N/mm ²]	Momentul de inerție axial, I_z [mm ⁴]	Poziționarea grinzii [mm]	
			a	l
Aluminiu		$58,01 \cdot 10^3$		

- Rezultate

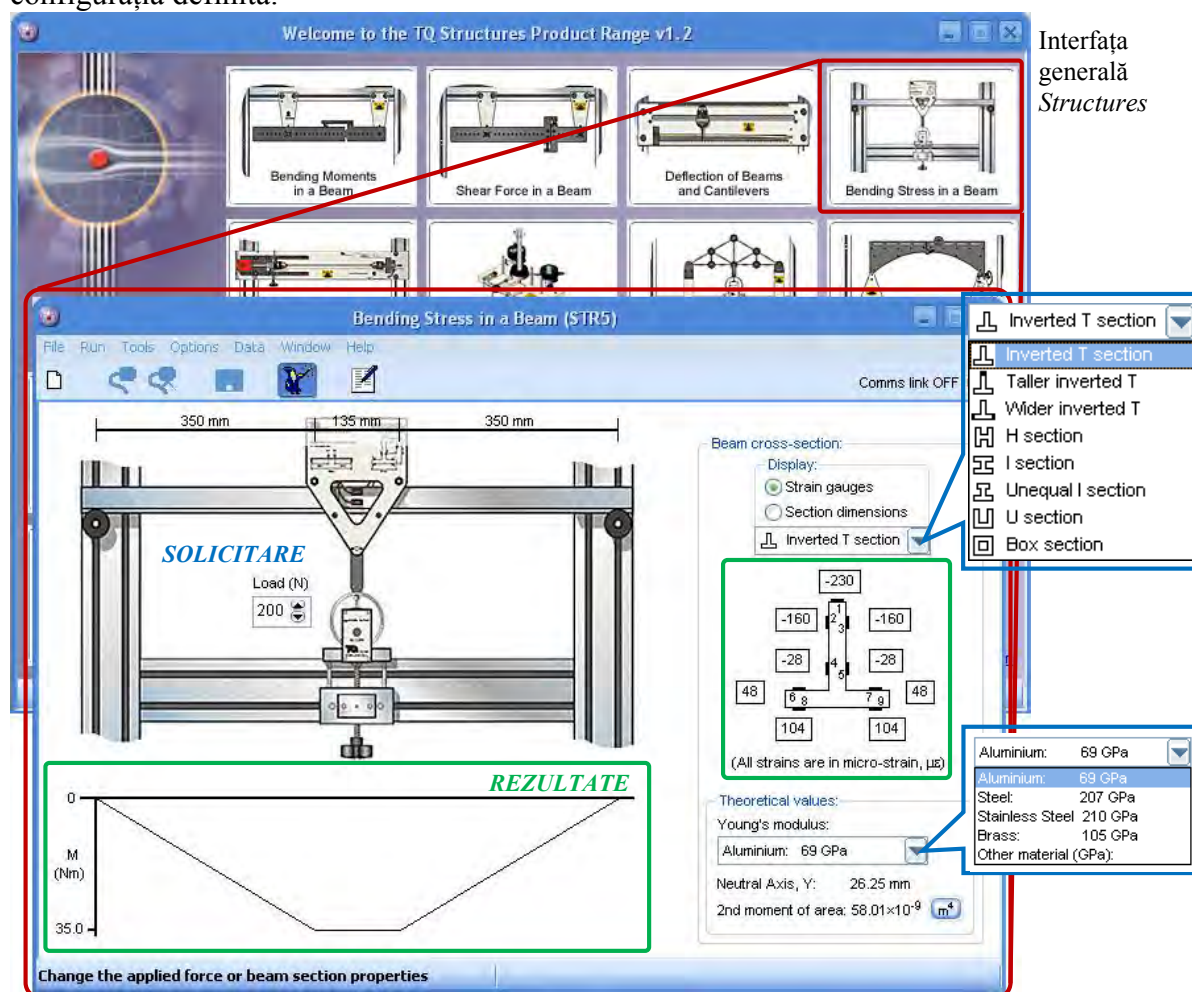
Tabelul 3. Rezultatele experimentale și teoretice pentru tensiunile normale

Nr. trad.	Forța aplicată F [N]	Momentul încovoietor M _i [N·mm]	Deformația specifică experimentală [μm/m]			Tensiunea normală [N/mm ²]		Ab. rel. Δσ [%]
			ε _{i exp.}	ε _{f exp.}	ε _{r exp.}	σ _{teoretic}	σ _{exp.}	
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100 [\%]$

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.



Interfața modulului pentru determinarea distribuției tensiuni normale în secțiunea grinzii solicitată la încovoiere pură

Fig. 6. Modulul *TQ Structures – Bending Stress in a Beam* pentru determinarea distribuției tensiuni normale în secțiunea grinzii solicitată la încovoiere pură

Modulul pentru determinarea distribuției tensiunilor normale (*Bending Stress in a Beam*) în secțiunea grinzilor solicitate la încovoiere, este compus din **CÂMPURILE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a măsurătorilor prin definirea secțiunii transversale a grinzii, a materialului acesteia și a nivelului de solicitare a structurii, și **ZONELE DE PRELUARE A REZULTATELOR**, unde programul completează în timp real valorile deformațiilor specifice în câmpurile aferente fiecărui traductor tensometric, în funcție de poziția lui în secțiunea transversală. Se trasează diagrama de variație a momentului încovoiător corespunzător solicitării.



LE4. Studiul tensiunilor normale într-o grindă utilizând Tensometria Electrică Rezistivă

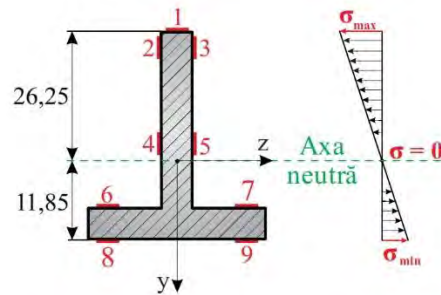
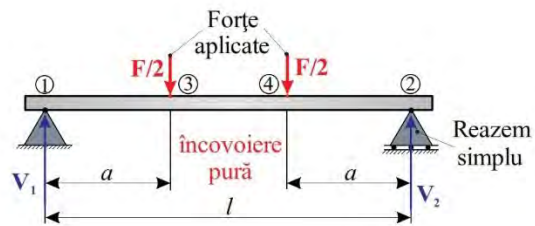
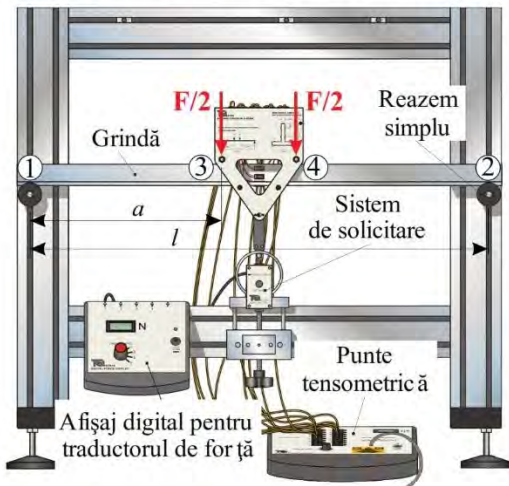
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a tensiunilor normale σ într-o grindă solicitată la încovoiere pură utilizând metoda Tensometriei Electrice Rezistive (TER) și compararea valorilor experimentale cu valorile calculate (teoretice).

• Noțiuni teoretice

Metoda experimentală TER permite determinarea *deformațiilor specifice* ε utilizând traductori tensometrici. Cu formula lui Hooke se pot calcula tensiunile normale, obținându-se variația acestora în secțiunea piesei.

• Experiment — Determinarea tensiunilor normale



■ Calculul tensiunilor normale $\sigma_{teoretic}$ (formula lui Navier):

Se cunosc dimensiunile a și l , respectiv modulul de elasticitate al materialului E_{Al} și momentul de inerție axial al secțiunii I_z .

$$\sigma_{teoretic} = \frac{M_i}{I_z} \cdot y \quad M_i = \frac{F}{2} \cdot 350$$

Abaterea relativă se calculează:

$$Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretica}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$$

■ Calculul tensiunilor normale experimentale (legea lui Hooke):

$$\sigma_{exp.} = E \cdot \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_f - \varepsilon_i$$

• **Deformația specifică, ε [$\mu\text{m}/\text{m}$]** - se determină cu TER prin intermediul punții tensometrice.

• Rezultate

Nr. trad.	Forța aplicată F [N]	Momentul încovoiător M_i [N·mm]	Deformația specifică ε [$\mu\text{m}/\text{m}$]			Tensiunea normală [N/mm^2]		Ab. rel. $\Delta\sigma$ [%]	Nr. traductor	Cota y [mm]
			$\varepsilon_i \text{ exp.}$	$\varepsilon_f \text{ exp.}$	$\varepsilon_r \text{ exp.}$	$\sigma_{teoretic}$	$\sigma_{exp.}$			
1								1	-26,25	
2								2 ; 3	-18,25	
3								4 ; 5	-3,25	
:								6 ; 7	5,6	
9								8 ; 9	11,85	

LE5. STUDIUL TORSIUNII BARELOR CU SECȚIUNE CIRCULARĂ

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea unghiului de răsucire al extremității unei bare de secțiune circulară constantă, solicitată la torsiune. Valorile unghiului de răsucire în raport cu momentul de torsiune aplicat sunt determinate prin măsurători experimentale, rezultatele obținute fiind comparate cu rezultatele determinate analitic (calculate cu relații teoretice).

INTRODUCERE

La o bară dreaptă de secțiune circulară constantă asupra căreia acționează un cuplu de forțe dirijat după axa ei, torsorul ce acționează în centrul de greutate al secțiunii are o singură componentă, M_t solicitarea numindu-se de *torsiune* sau de *răsucire*. Efortul în secțiunea transversală a barei este numit moment de torsiune sau de răsucire (M_t). Determinarea tensiunilor tangențiale care apar într-o bară de secțiune circulară constantă presupune cunoașterea momentului de torsiune și a caracteristicilor geometrice ale secțiunii. În urma solicitării, două secțiuni aflate la o anumită distanță una față de cealaltă, vor avea o rotație relativă una în raport cu cealaltă, mărimea rotației reprezentând *unghiul de răsucire*. Atât stabilirea valorilor tensiunilor tangențiale (condiția de rezistență) cât și a unghiului de răsucire (condiția de rigiditate) este importantă pentru dimensionarea arborilor de transmisie.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema standului pentru măsurarea deformației unghiulare a unei bare circulare solicitată la torsiune:

- **Traductorul de forță** este elementul de conversie al forței în mărime electrică. Traductorul este un cristal piezoelectric care generează o diferență de potențial într-un plan perpendicular pe direcția de solicitare mecanică. Traductorul de forță este amplasat cu un decalaj față de axa longitudinală a **barei circulare** studiate;
- **Brațul forței** este o componentă ce are 50 mm lungime și permite, pe baza indicației traductorului de forță, determinarea cuplului de torsiune care solicită bara studiată. Această componentă este solidarizată cu mandrina din extremitatea dreaptă a barei;
- **Potențiometrul de reglare** asigură posibilitatea de aducere la „zero“ a indicației pentru forța măsurată;
- **Traductorul unghiular** este un element de conversie a deformației unghiulare în mărime electrică a barei torsionate. Traductorul este un potențiomtru ce este solidarizat cu mandrina din extremitatea strângă a barei. Rotirea cursorului potențiometrului duce la modificarea rezistenței electrice a acestuia;
- **Raportorul cu indicator** permite utilizatorului să efectueze calibrarea traductorului unghiular;
- Torsionarea barei circulare se efectuează prin acționarea **roții de mână**, care produce rotația mandrinei din extremitatea stângă;
- **Placa suport** servește ca bază pentru montarea traductorului unghiular, a raportorului cu indicator, a roții de mână și a mandrinei din extremitatea stângă a barei, pentru re poziționarea simultană a acestor componente în cazul în care se dorește modificarea lungimii de solicitare a barei studiate;
- **Șinele de gridare** permit reglarea lungimii de solicitare a barei prin culisarea plăcii-suport în condițiile menținerii alinierii dintre mandrină și axa longitudinală a barei.

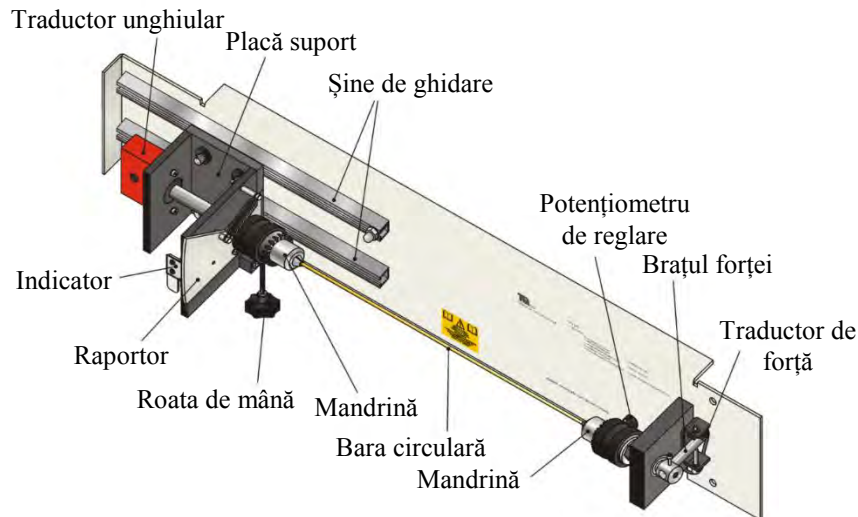


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea deformației unghiulare a unei bare circulare solicitată la torsiune

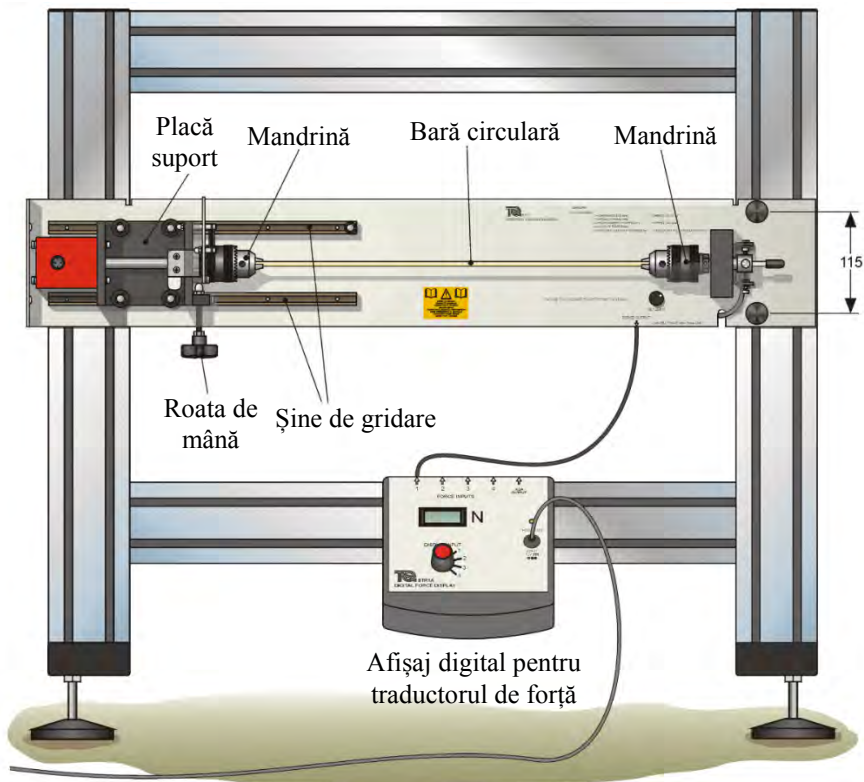


Fig. 2. Standul pentru determinarea deformației unghiulare a unei bare circulare solicitată la torsiune

În Fig. 2. se prezintă schema standului pentru determinarea deformației unghiulare a unei bare circulare solicitată la torsiune. Echipamentele descrise anterior sunt fixate pe cadrul furnizat de producător. De asemenea, mai există un afișaj digital care preia semnalul traductorului de forță și îl redă în formă numerică. Valoarea indicată trebuie înmulțită cu lungimea brațului forței pentru a obține mărimea momentului de torsiune care solicită bara. Afișajul este o componentă opțională, deoarece valoarea momentului de torsiune poate fi preluată și din calculator, cu ajutorul programului care însoțește echipamentul. Valoarea unghiului de răsucire al barei, dată de traductorul unghiular, poate fi preluată exclusiv din programul amintit.

EFFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește determinarea unghiului de răsucire pentru o bară de secțiune constantă circulară (plină și inelară) și de lungime l [mm], atunci când asupra ei acționează un moment de răsucire, M_t . Bara este încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt, și este confecționată din materiale diferite.

Experiment 1.1: *Determinarea unghiului de răsucire pentru o bară de secțiune circulară constantă*

Scopul experimentului este determinarea unghiului de răsucire al unei bare cu secțiune circulară constantă, D [mm] și lungime dată sub acțiunea unui moment de torsiune (Fig. 3.).

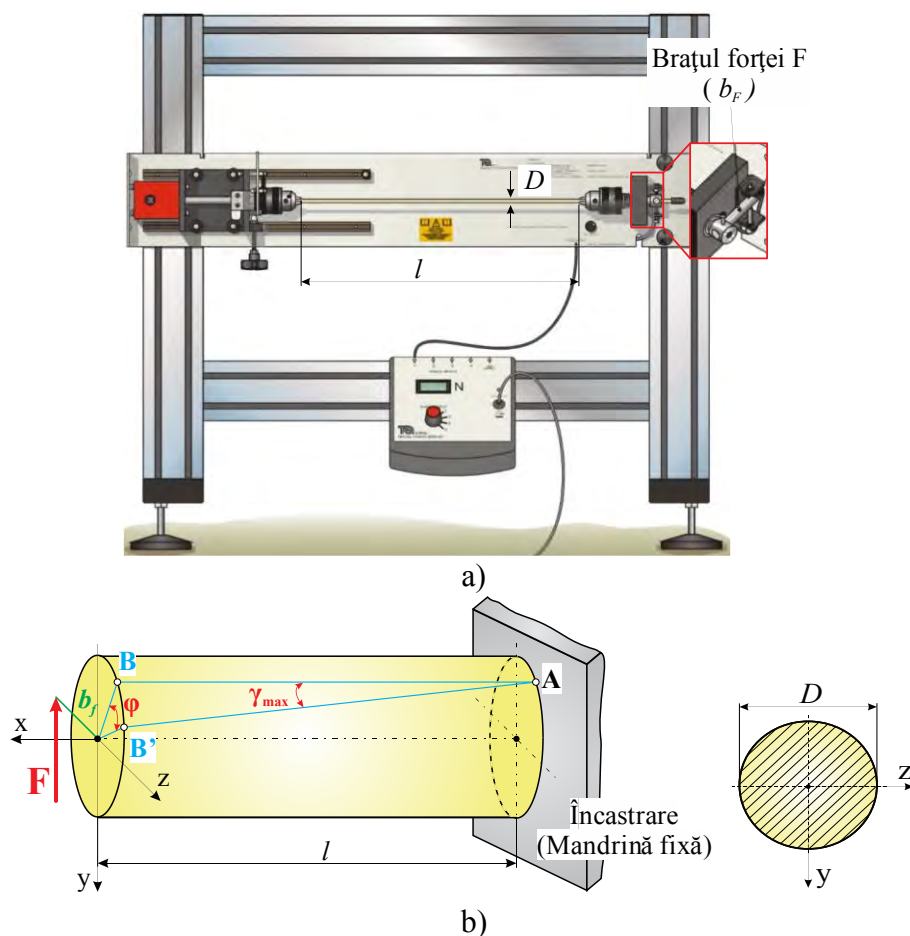


Fig. 3. Răsucirea barei cu secțiune circulară constantă: a) stand experimental; b) schemă de calcul

Acest experiment pune în evidență relația dintre momentul de torsiune aplicat M_t și unghiul de răsucire φ al barei, respectiv influența caracteristicilor de material asupra unghiului de răsucire. Pentru efectuarea măsurătorilor experimentale, respectiv, pentru calculul analitic al unghiului de răsucire, este necesar să se cunoască diametrul exterior D al barei, modulul de elasticitate transversală al materialului, G și momentul de inerție polar pentru secțiunea circulară plină, I_p .

- **Calculul analitic al unghiului de răsucire:**

Unghiul de răsucire pentru bara studiată, se calculează cu relația:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad [\text{rad}] \quad (1)$$

- unde: φ - unghiul de răsucire, [rad]
 M_t - momentul de torsiune, [N·mm]
 l - lungimea barei, [mm]
 G - modulul de elasticitate transversal, [N/mm²]
 I_p - momentul de inerție polar, [mm⁴]
 ▪ pentru secțiunea circulară plină: $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$.

Momentul de torsiune M_t se calculează cu relația:

$$M_t = F \cdot b_f \quad (2)$$

- unde: F - forța aplicată asupra barei de secțiune circulară cu diametrul D [mm] prin intermediul șurubului de solicitare și indicată de afișajul digital al traductorului de forță
 b_f - brațul forței: lungimea tijei solidarizată cu mandrina din extremitatea din dreapta barei de oțel, solicitată la torsiune.

Utilizând relația (1) se obține valoarea unghiului de răsucire în radiani, iar pentru compararea rezultatelor teoretice cu valorile obținute experimental, se transformă valoarea unghiului de răsucire în grade, astfel:

$$\varphi_{\text{analitic}} = \frac{\varphi[\text{rad}] \cdot 180}{\pi} \quad [^\circ] \quad (3)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape de lucru:

1. Înaintea începerii măsurătorilor se realizează etalonarea traductorului unghiular prin intermediul programului aferent standului (obțiunea *Calibrate*), astfel: se solicită bara de oțel cu un moment de torsiune prin șurubul de solicitare până când se obține, succesiv, valoarea 0° și 25° pe raportorul gradat, respectiv în program. Dacă este necesar, se realizează o nouă etalonare prin utilizarea pașilor impuși de programul aferent lucrării (*Calibrate*);
2. Indicatorul raportorului trebuie adus la valoarea „zero” grade [°] cu șurubul de solicitare. În poziția de „zero” grade [°] a raportorului și valoarea forței indicată pe afișajul digital se va aduce la valoarea de „zero” N. În acest scop, se folosește potențiometrul aflat sub mandrina din dreapta standului (*SET ZERO*);
3. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în partea stângă a standului);
4. Bara de oțel se încarcă cu un moment de torsiune, prin intermediul șurubului de solicitare, cu valoarea forței F [N] citită pe afișajul digital;
5. Cu programul aferent sau cu ajutorul raportorului se citește valoarea experimentală a unghiului de răsucire în grade [°], determinat de momentul de torsiune M_t [N·mm]
5. Valorile experimentale și teoretice ale unghiului de răsucire pentru bara cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 2;
6. Rezultatele determinărilor experimentale și, respectiv, ale calculelor teoretice se utilizează pentru trasarea diagramei de variație a acestora cu momentul de torsiune aplicat (Diagrama 1).

- Date de intrare

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru bară

Materialul barei	Modulul de elasticitate transversală G [N/mm ²]	Diametrul secțiunii D [mm]	Momentul de inerție polar I_p [mm ⁴]	Dimensiunile barei [mm]	
				<i>b_f</i>	<i>l</i>
Oțel				50	
Alamă				50	

- Rezultate

Tabelul 2. Rezultatele teoretice și experimentale pentru unghiul de răsucire

Nr. măsurători	Forța aplicată F [N]	Momentul de torsiune M_t [N·mm]	Unghiul de răsucire φ [°]		Ab. rel. $\Delta\varphi$ [%]
			$\varphi_{\text{teoretic}}$	$\varphi_{\text{exp.}}$	
1					
2					
3					
4					
5					

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100 [\%]$

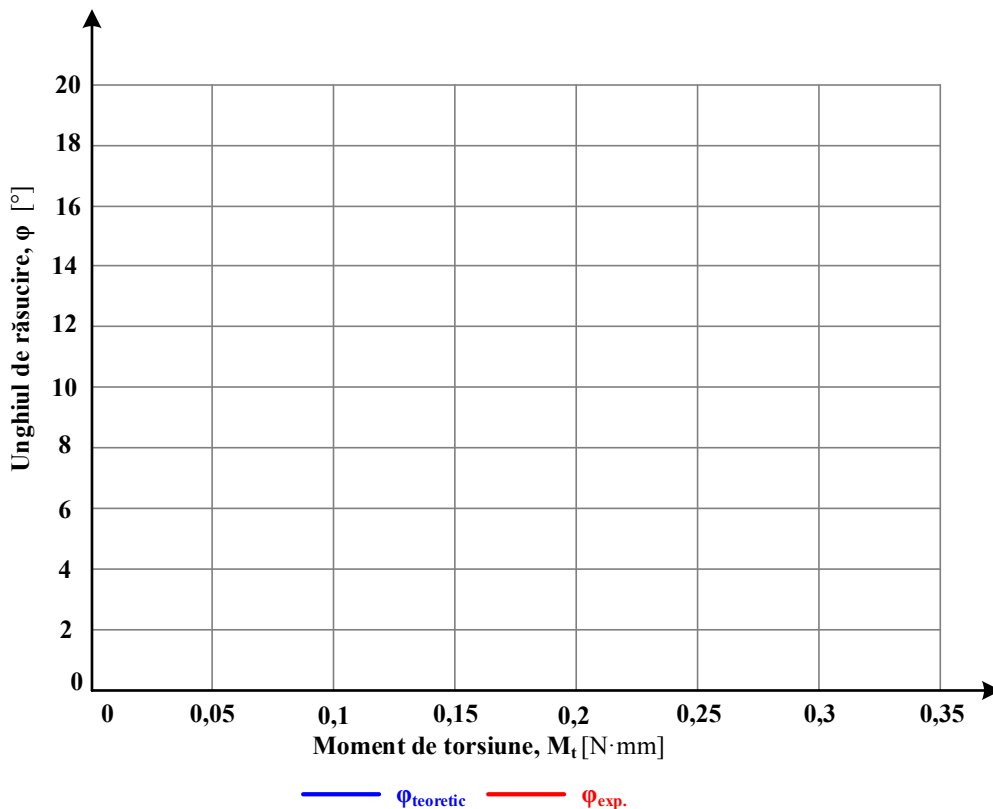


Diagrama 1. Variația unghiului de răsucire cu momentul de torsiune

Experiment 1.2: Efectul lungimii barei asupra deformației la răsucire

În acest experiment se stabilește relația dintre deformația la răsucire și lungimea barei la un moment de torsiune constant. Bara de lungime l [mm] este încastrată la un capăt (Fig. 3.), iar în capătul liber se aplică un moment de torsiune constant, M_t . Caracteristicile geometrice și de material se cunosc de la Experimentul 1.1 și se trec în Tabelul 3.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează bara analizată, introducând-o în mandrina din partea dreaptă cu vârful cauciucat ieșind în afară, astfel încât între cele două mandrine să se realizeze distanțele de 300 mm, 350 mm, 400 mm, 450 mm și 500 mm;
2. Înaintea începerii măsurătorilor se verifică etalonarea traductorului unghiular prin aplicarea unui moment de torsiune cu ajutorul șurubului de solicitare și compararea valorii unghiulare indicate cu cea citită pe indicatorul raportorului. Dacă este necesar, se realizează o nouă etalonare prin utilizarea pașilor impuși de programul aferent lucrării (*Calibrate*);
3. Se verifică dacă indicatorul raportorului este la valoarea „zero” grade [°]. În caz contrar, se utilizează șurubul de solicitare pentru aducerea lui la valoarea „zero” grade [°]. În această poziție a raportorului este necesar ca și valoarea forței afișate să fie la valoarea „zero” N. În acest scop se folosește potențiometrul aflat sub mandrina din dreapta standului (*SET ZERO*);
4. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în partea stângă a standului);
5. Se solicită bara, astfel încât momentul de torsiune să corespundă unei forțe de solicitare de 3 N;
6. Valorile experimentale și teoretice ale unghiului de răsucire pentru bara cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 4;
7. Aplicând etapele 1 – 5, în mod similar, se măsoară experimental unghiul de răsucire pentru bara cu lungimile l [mm], selectate anterior;
8. Valorile experimentale și teoretice ale unghiului de răsucire pentru bara cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 4;
9. Se trasează Diagrama 2 de variație a unghiului de răsucire φ în raport cu lungimea barei dacă momentul de torsiune este constant.

• Date de intrare

Tabelul 3. Caracteristici geometrice și de material pentru bară

Materialul barei	Modulul de elasticitate transversal G [N/mm ²]	Diametrul secțiunii D [mm]	Momentul de inerție polar I_p [mm ⁴]	Dimensiunile barei [mm]	
				b_f	l
Oțel				50	
Alamă				50	

• Rezultate

Tabelul 4. Rezultatele teoretice și experimentale pentru unghiul de răsucire

Forța aplicată F [N]	Momentul de torsiune M _t [N·mm]	Lungimea barei l [mm]	Unghiul de răsucire φ [°]		Ab. rel. Δφ [%]
			φ _{teoretic}	φ _{exp.}	
		300			
		350			
		400			
		450			
		500			

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

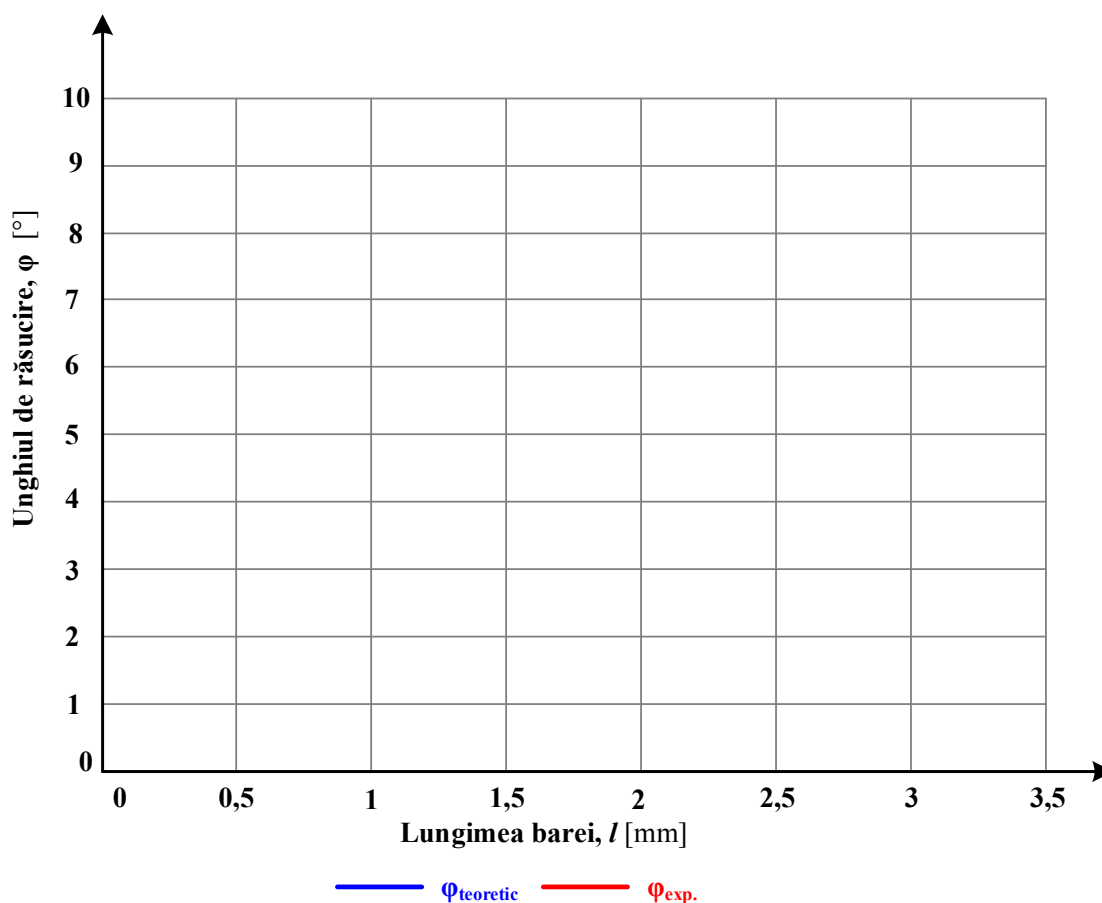


Diagrama 2. Variația unghiului de răsucire în raport cu lungimea barei

Experiment 1.3: Efectul secțiunii barei asupra deformației la răsucire

În acest experiment se măsoară experimental deformația la răsucire pentru o bară cu secțiune secțiune constantă inelară (Fig. 4.). Pentru efectuarea măsurătorilor experimentale, respectiv, pentru calculul analitic al unghiului de răsucire, este necesar să se cunoască diametrul exterior D [mm] și interior d [mm] al barei, modulul de elasticitate transversală al materialului, G și

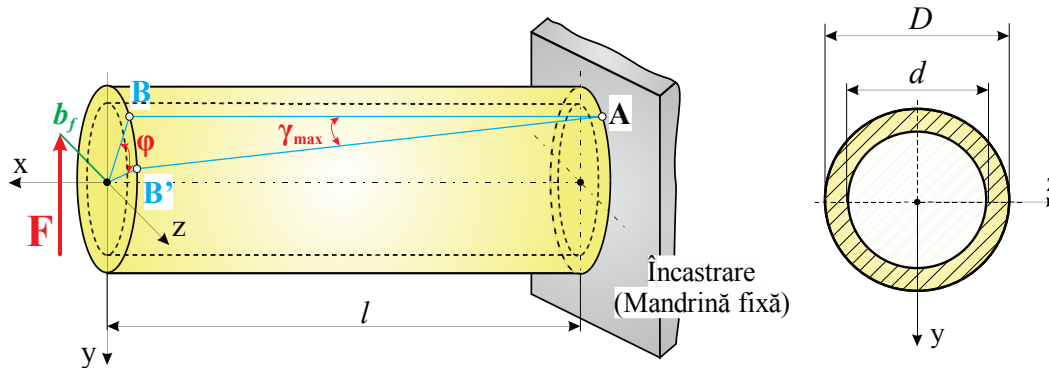


Fig. 4. Răsucirea barei din oțel cu secțiune constantă inelară

momentul de inerție polar pentru secțiunea circulară inelară, I_p . Diametrul exterior al barei inelare este egal cu diametrul exterior al barei cu secțiune circulară plină. Se pot compara valorile experimentale ale unghiului de răsucire măsurate pentru bara inelară cu cele obținute pentru bara cu secțiune plină.

• Calculul analitic a unghiului de răsucire

Unghiul de răsucire φ se calculează cu relația (4), iar momentul de torsiune aplicat se calculează cu relația (5).

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad [\text{rad}] \quad (4)$$

$$M_t = F \cdot b_f \quad (5)$$

unde: φ – unghiul de răsucire, [rad]

M_t – momentul de torsiune, [N·mm]

l – lungimea barei, [mm]

G – modulul de elasticitate transversală, [N/mm²]

I_p – momentul de inerție polar, [mm⁴]

▪ pentru secțiunea inelară: $I_{p1} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$.

F – forța aplicată asupra barei de secțiune inelară cu diametrul D [mm] și d [mm] prin intermediul șurubului de solicitare și indicată de afișajul digital al traductorului de forță

b_f – brațul forței: lungimea tijei solidarizată cu mandrina din extremitatea din dreapta barei de oțel, solicitată la torsiune.

Utilizând relația (4) se obține valoarea unghiului de răsucire în radiani, iar pentru compararea rezultatelor teoretice cu valorile obținute experimental se transformă valoarea unghiului de răsucire în grade, astfel:

$$\varphi_{\text{analitic}} = \frac{\varphi[\text{rad}] \cdot 180}{\pi} \quad [^\circ] \quad (6)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează bara circulară și ulterior, cea având secțiune inelară în mandrina din partea dreaptă, cu vârful cauciucat ieșind în afară, astfel încât între cele două mandrine să fie la distanța de 500 mm;

2. Înaintea începerii măsurărilor, se verifică etalonarea traductorului unghiular, prin aplicarea unui moment de torsiune cu ajutorul șurubului de solicitare și compararea valorii unghiulare indicate cu cea citită pe indicatorul raportorului. Dacă este necesar, se realizează o nouă etalonare prin utilizarea pașilor impuși de programul aferent lucrării (*Calibrate*)
3. Se verifică dacă indicatorul raportorului este la valoarea "zero" grade [°]. În caz contrar, se utilizează șurubul de solicitare pentru aducerea la valoarea "zero" grade [°]. În această poziție a raportorului este necesar ca și forța afișată să fie adusă la valoarea „zero” N. În acest scop se folosește potențiometrul aflat sub mandrina din dreapta standului (*SET ZERO*);
4. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital, prin intermediul sistemului de condiționare de semnal (montat în partea stângă a standului);
5. Se solicită bara, astfel încât momentul de torsiune să corespundă unei forțe de solicitare de maximum 5 N, pornind de la 1 N, din 1 N în 1 N;
6. Valorile experimentale și teoretice ale unghiului de răsucire pentru bara cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 6;
7. Aplicând etapele 1 – 5, în mod similar, se măsoară experimental unghiul de răsucire pentru bara cu secțiune inelară, având lungimea l [mm];
8. Valorile experimentale și teoretice ale unghiului de răsucire pentru bara cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 6.

• **Date de intrare**

Tabelul 5. Caracteristici geometrice și de material pentru bară

Materialul barei	Modulul de elasticitate transversală G [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii barelor		Momentul de inerție polar		Dimensiunile barei	
		[mm]		[mm ⁴]		[mm]	
		<i>D</i>	<i>d</i>	<i>I_p</i>	<i>I_{p1}</i>	<i>b_f</i>	<i>l</i>
Alamă						50	500

• **Rezultate**

Tabelul 6. Rezultatele teoretice și experimentale pentru unghiul de răsucire

Forța aplicată F [N]	Momentul de torsiune M_t [N·mm]	Unghiul de răsucire φ [°]					
		Secțiune circulară plină			Secțiune inelară		
		$\varphi_{teoretic}$	$\varphi_{exp.}$	Ab.rel. $\Delta\varphi$ [%]	$\varphi_{teoretic}$	$\varphi_{exp.}$	Ab. rel. $\Delta\varphi$ [%]

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.}| - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea ce coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

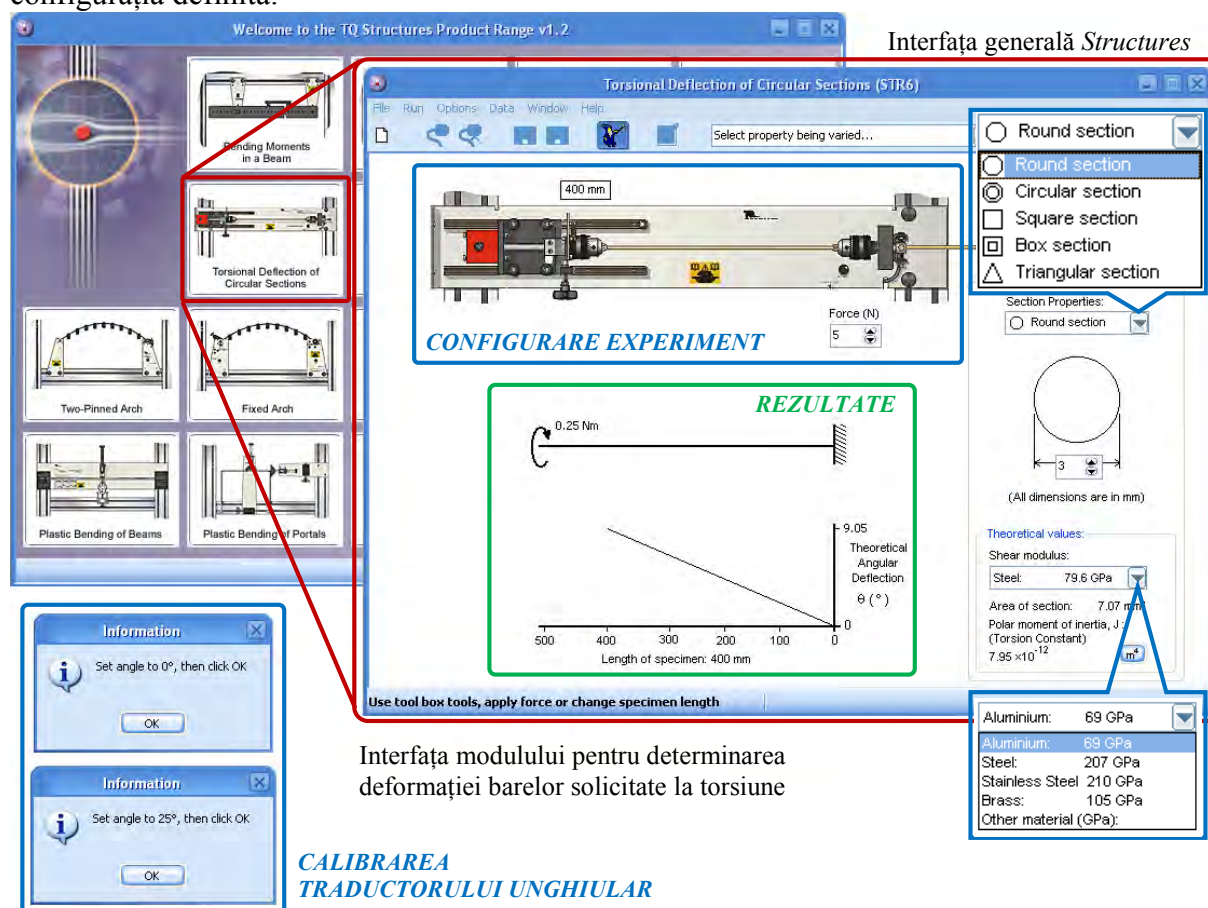


Fig. 4. Modulul *TQ Structures – Torsional Deflection of Circular Sections* pentru determinarea deformației barelor solicate la torsiune

Modulul pentru determinarea deformației barelor drepte (*Torsional Deflection of Circular Sections*) solicate la torsiune este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare al determinărilor, prin definirea secțiunii transversale a barei, a materialului acesteia și a nivelului de sollicitare și **ZONA DE PRELUARE A REZULTATELOR**, unde programul completează în timp real valoarea momentului de torsiune care soliciță bara. Se trasează diagrama deformației unghiulare de-a lungul barei drepte. O particularitate a acestui experiment este necesitatea **CALBRĂRII TRADUCTORULUI UNGHIULAR** prin care programul înregistrează valorile rezistenței potențiometrului din construcția acestuia. Aceste valori corespund deformației unghiulare indicate în cele două ferestre de dialog, ce apar la activarea modulului virtual, pentru determinarea deformației barelor solicate la torsiune.



LE5. Studiul torsiunii barelor cu secțiune circulară

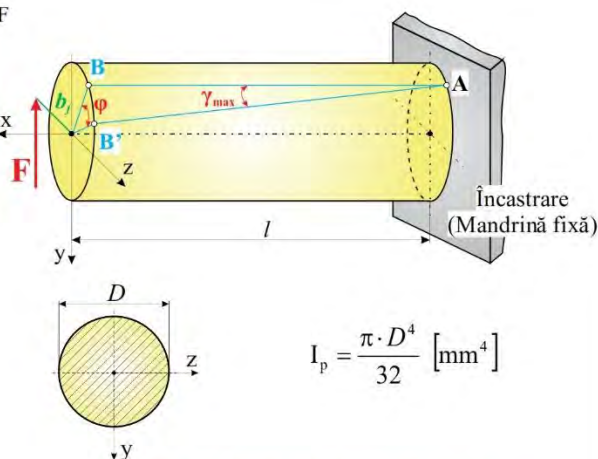
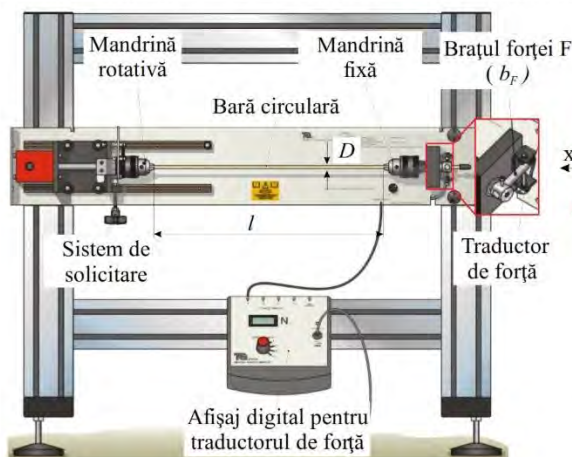
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a unghiului de răsucire φ atunci când bara este solicitată la torsiune și compararea valorilor experimentale cu valorilor teoretice, obținute prin calcul analitic.

• Noțiuni teoretice

Torsiunea (răsucirea) are loc dacă în secțiunea transversală al unei piese se dezvoltă un moment dirijat în lungul axei longitudinale, numit *moment de torsiune sau de răsucire*. În urma torsiunii, secțiunile transversale se rotesc una în raport cu cealaltă cu un *unghi de răsucire φ* iar o fibră (generatoarea AB) se roște cu *unghiul γ_{max}* .

• Experiment — Determinarea unghiului de răsucire



■ Calculul analitic al unghiului de răsucire:

Pentru bara din oțel se cunosc dimensiunile l, b_F, D , respectiv modulul de elasticitate transversală la torsiune a materialului G , momentul de inerție polar al secțiunii barei I_p .

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad [\text{rad}]$$

$$M_t = F \cdot b_F \quad [\text{N} \cdot \text{mm}]$$

■ Unghiului de răsucire experimental:

• **Unghiul de răsucire** este indicat de raportul gradat al standului experimental, $\varphi_{exp.}$ [°].

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val.}_{exp.} - |\text{Val.}_{teoretica}|}{|\text{Val.}_{exp.}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Nr. crt.	Forța aplicată F [N]	Momentul de torsiune M_t [N·mm]	Unghiul de răsucire [°]		Ab. rel. $\Delta\varphi$ [%]
			$\varphi_{teoretic}$	$\varphi_{exp.}$	
1					
2					
3					
4					
5					

LE6. DETERMINAREA DEFORMAȚIILOR GRINZILOR DREPTE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea deformațiilor unei grinzi drepte solicitată la încovoiere plană. Studiul se realizează pe grinzi static determinate pentru două cazuri de rezemare: grinda încastrată la un capăt și liberă la celălalt și grinda simplu rezemată. Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu cele analitice (calculate cu relații teoretice).

INTRODUCERE

Datorită tensiunilor normale ce iau naștere în secțiunea unei grinzii solicitată la încovoiere, grinda se deformează, axa dreaptă devine o curbă. **Fibra medie deformată** a unei grinzi nu suferă modificări de lungime în timpul deformării. Forma acesteia depinde de modul de încărcare și rezemare al grinzii. Dacă se cunoaște ecuația fibrei medii deformată, deplasările altor puncte de pe grindă rezultă din ipoteza secțiunilor plane și normale pe axa grinzii.

Starea deformată din dreptul unei secțiuni transversale oarecare se caracterizează prin următoarele mărimi geometrice: deplasarea normală pe axa grinzii numită **săgeată**, unghiul tangentei la fibra medie deformată față de axa nedeformată, denumită **rotire** și **raza de curbură** a fibrei medii deformată.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea deformației grinzilor drepte, în diferite variante de rezemare:

- **Clemele de fixare** permit rigidizarea grinzii realizând încastrarea acesteia la unul din capete;
- **Reazemul simplu** sprijină grinda pe direcție verticală. Contactul cu grinda este realizat pe muchia unei prisme, pentru a minimiza frecarea pe direcție orizontală și pentru a asigura rotirea liberă a grinzii în jurul acestei muchii;
- **Șina de ghidare** asigură posibilitatea reglării deschiderii grinzii prin culisarea reazemelor simple în condițiile menținerii ortogonalității dintre axa grinzii nesolicitate și palpatorul comparatorului digital;
- **Comparatorul digital** este un traductor de deplasare al cărui circuit electronic permite afișarea sau transmiterea către calculator a deformației măsurate. Este prevăzut și cu un buton care comandă aducerea la „zero” a indicației comparatorului înainte de aplicarea sarcinilor;
- **Indicațiile** trasate pe **rigla** de pe placa ce susține componentele standului, facilitează poziționarea relativă a elementelor de rezemare, solicitare și măsurare, în diferite configurații;
- **Cârligul** este un element ce se interpune între grinda studiată și talerul cu greutate care solicită grinda. Contactul cu grinda este, ca și la reazemele simple, tot pe o muchie prismatică, iar creștătura cu care este prevăzut în partea superioară permite măsurarea deformației grinzii în punctul de aplicare al forței, prin asigurarea posibilității de poziționare a palpatorului comparatorului digital și a talerului cu greutate în planul aceleiași secțiuni transversale. Orificiul pentru talerul cu greutate este poziționat astfel încât să asigure alinierea pe direcție verticală între axul talerului și centrul geometric al secțiunii grinzii, pentru a evita torsionarea grinzii.

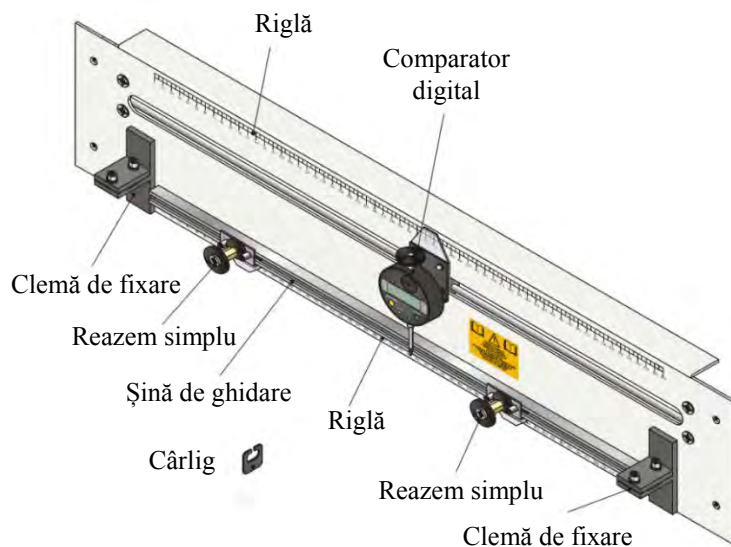


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea deformației grinzilor drepte

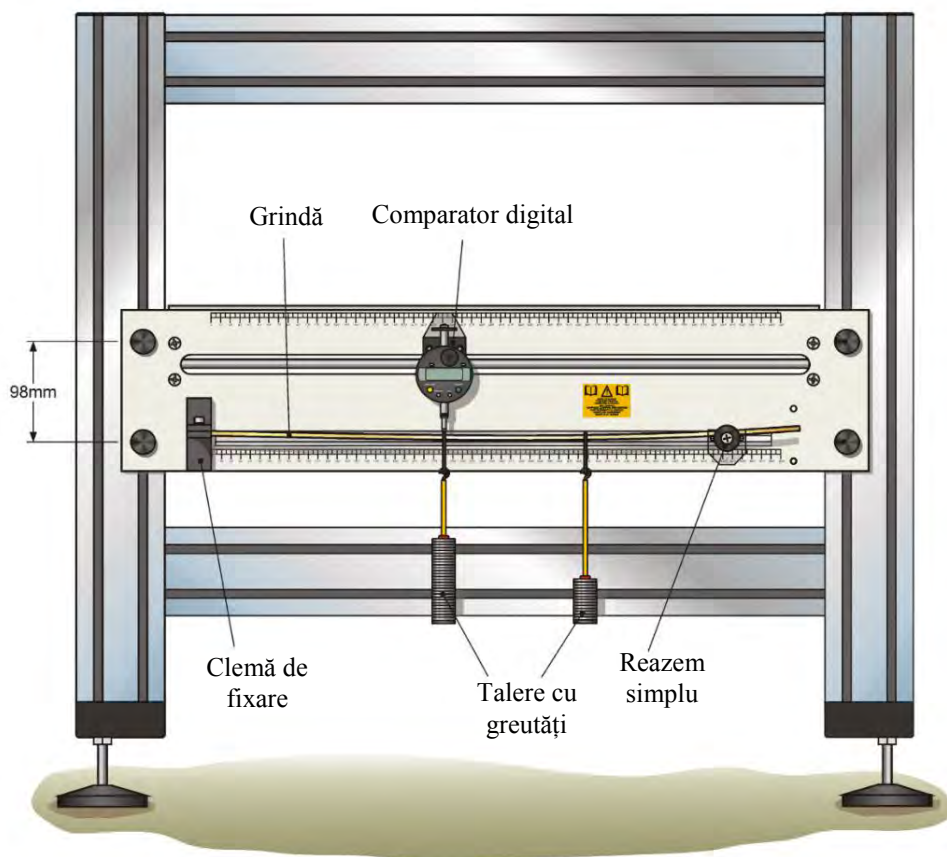


Fig. 2. Standul pentru determinarea deformației grinzilor drepte

În Fig. 2. este prezentată schema standului pentru determinarea deformației grinzilor drepte. Componentele standului permit studiul deformațiilor grinzilor drepte static determinate în ambele variante de rezemare (grindă simplu rezemată sau grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt), având lungimi și deschideri variabile prin poziținarea relativă a elementelor de rezemare. Valoarea deformației barei, dată de către comparatorul digital, poate fi preluată, atât de pe afișajul acestuia, cât și din programul care însoțește standul.

EFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește măsurarea experimentală a deformațiilor (săgeții) pentru o grindă dreaptă, în diferite condiții de rezemare și solicitare și compararea valorilor măsurate (experimentale) cu valorile teoretice obținute prin calcule analitice. De asemenea, se urmărește influența forței aplicate asupra deformațiilor, atunci când grinda de lungime l [mm], este confecționată din materiale diferite, adică modulul de elasticitate al materialului, E , diferă.

Experiment 1: *Determinarea deformației unei grinzi drepte static determinată încadrată la un capăt și liberă la celălalt*

Scopul experimentului constă în măsurarea săgeții în dreptul punctului de aplicație al forței F pentru o grindă dreaptă din aluminiu cu secțiune dreptunghiulară constantă, încadrată la un capăt și liberă la celălalt. Grinda, de lungime l [mm], este solicitată la încovoiere de forța exterioară F , rezultând deformația v , în planul forței aplicate, F .

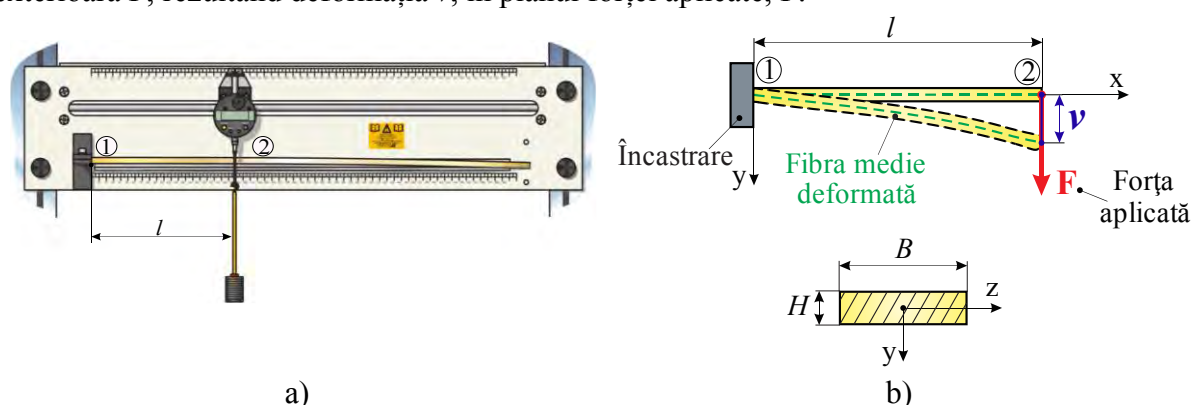


Fig. 3. Determinarea experimentală a săgeții: a) stand experimental; b) schemă simplificată

• Calculul analitic a săgeții:

$$v_{2 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z} \quad (1)$$

unde: $v_{2 \text{ teoretic}}$ – deformația liniară (săgeata) în punctul 2, [mm]

F – forța aplicată în nodul 2, [N]

l – distanța între punctul de aplicare al forței (punctul 2) și încadrare (punctul 1), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, $I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$ [mm⁴]

Pentru efectuarea calculelor analitice (teoretice) se utilizează valorile măsurate ale dimensiunilor secțiunii transversale al grinzii.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează grinda de aluminiu în clema din stânga prin intermediul șuruburilor;
2. Se poziționează comparatorul digital la distanța l [mm] față de clema de fixare din stânga corespunzătoare punctului 2 din Fig. 3.;

- Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero” mm, luându-se în considerare și greutatea tijei;
- Se poziționează cârligul de greutate în dreptul palpatorului comparatorului;
- Se aplică, succesiv, cele cinci greutăți, de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g;
- Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 2;
- Aplicând etapele 1 – 5, în mod similar, se măsoară experimental săgeata pentru barele drepte cu lungimea l [mm], din alamă și oțel;
- Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinzile din alamă și oțel cu lungimea l [mm] se trec în Tabelele 3 și 4
- Utilizând valorile teoretice obținute cu ajutorul formulei (1) și cele experimentale pentru săgeată, se trasează Diagrama 1 de variație a săgeții în funcție de forța aplicată, pentru cele trei materiale ale barei.

- Date de intrare**

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinal E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I _z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					
Alamă					
Oțel					

- Rezultate**

Tabelul 2. Rezultate teoretice și experimentale ale săgeții pentru grinda de aluminiu

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Săgeata în punctul 2 [mm]		Ab. rel. Δv ₂ [%]
		v ₂ teoretic	v ₂ exp.	
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,9			

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 3. Rezultate teoretice și experimentale ale săgeții pentru grinda de alamă

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Săgeata în punctul 2 [mm]		Ab. rel. Δv_2 [%]
		$v_{2\text{ teoretic}}$	$v_{2\text{ exp.}}$	
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,9			

Tabelul 4. Rezultate teoretice și experimentale ale săgeții pentru grinda de oțel

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Săgeata în punctul 2 [mm]		Ab. rel. Δv_2 [%]
		$v_{2\text{ teoretic}}$	$v_{2\text{ exp.}}$	
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,9			

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100 [\%]$

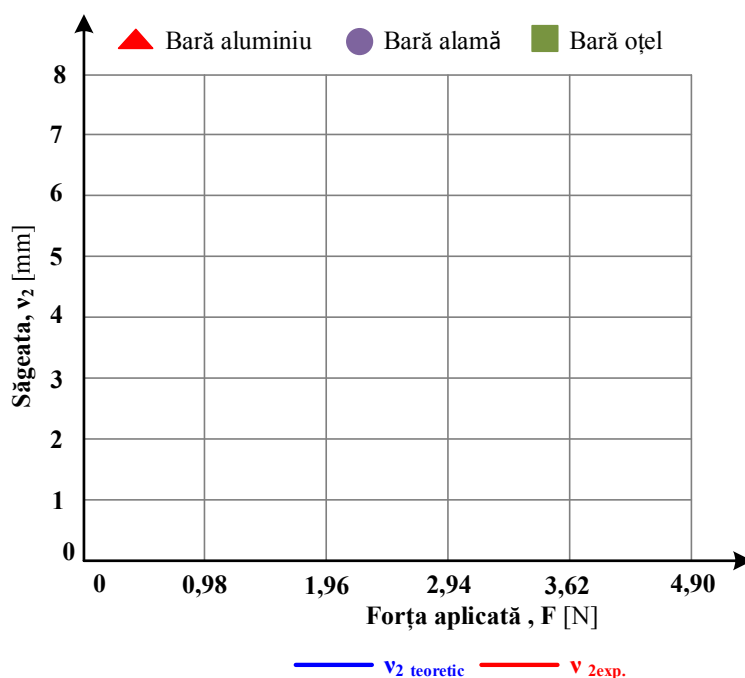


Diagrama 1. Variația săgeții la aplicarea diferitor sarcini exterioare

Experiment 2.1: Determinarea deformației unei grinzi drepte static determinată simplu rezemată

Scopul experimentului constă în determinarea săgeții în dreptul punctului de aplicare al forței F [N] pentru o grindă dreaptă cu secțiune constantă dreptunghiulară simplu rezemată și compararea rezultatelor experimentale cu rezultatele obținute cu relația analitică (teoretică). Se consideră l [mm] distanța dintre cele două reazeme, iar forța concentrată se aplică la jumătatea distanței dintre cele două reazeme, pentru ambele cazuri de încărcare (punctul 3), Fig. 4.

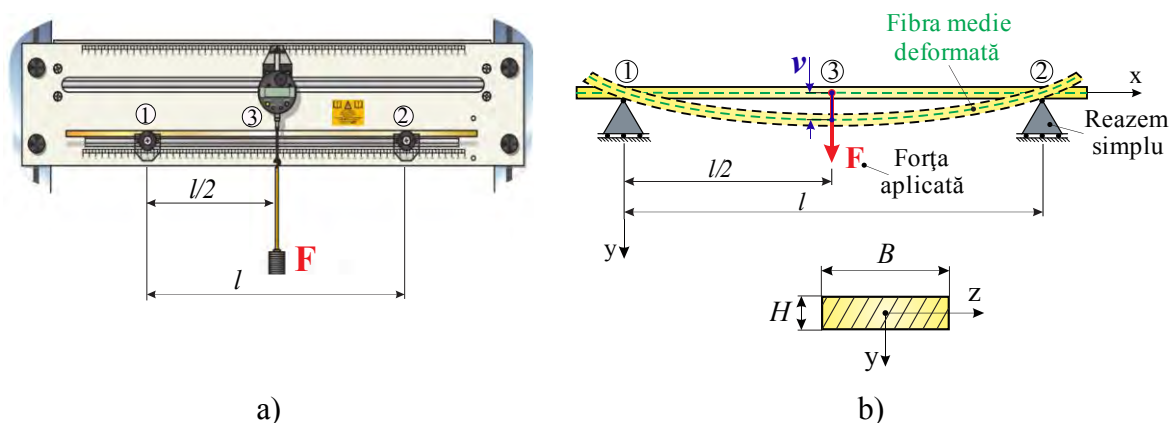


Fig. 4. Determinarea experimentală a săgeții: a) stand experimental; b) schemă simplificată

• Calculul analitic al săgeții:

$$v_{3 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} \quad (2)$$

unde: $v_{3 \text{ teoretic}}$ – deformația liniară (săgeata) calculată în 3, [mm]

F – forța aplicată în punctul 3, [N]

l – distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴]

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Pentru calculele analitice (teoretice) se utilizează valorile măsurate ale dimensiunilor secțiunii transversale al grinzii, respectiv modulul de elasticitate longitudinală al materialului.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează cele două reazeme astfel încât între ele să fie distanța l [mm] și se așează grinda reazeme (punctele 1 și 2 din Fig. 4.);
2. Se poziționează comparatorul la distanța $l/2$ [mm], corespunzătoare punctului 3 din Fig. 4.;
3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero” mm, luându-se în considerare și greutatea tijei;
4. În dreptul palpatorului comparatorului se poziționează cârligul de greutate;
5. Folosind cârligul se aplică succesiv greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g;

6. Valoarea afișată de comparatorul digital reprezintă valoarea experimentală a săgeții;
7. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 4;
8. Utilizând valorile teoretice obținute cu ajutorul relației (2) și cele experimentale pentru săgeată, se trasează Diagrama 2 de variație a săgeții în funcție de forța aplicată, pentru grinda simplu rezemată.

- **Date de intrare**

Tabelul 3. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					

- **Rezultate**

Tabelul 4. Rezultate teoretice și experimentale pentru săgeata din punctul 3

Masa, m [g]	Forța aplicată, F [N]	Săgeata în punctul 3 [mm]		Ab. rel. Δv_3 [%]
		v_3 teoretic	v_3 exp.	
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,9			

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

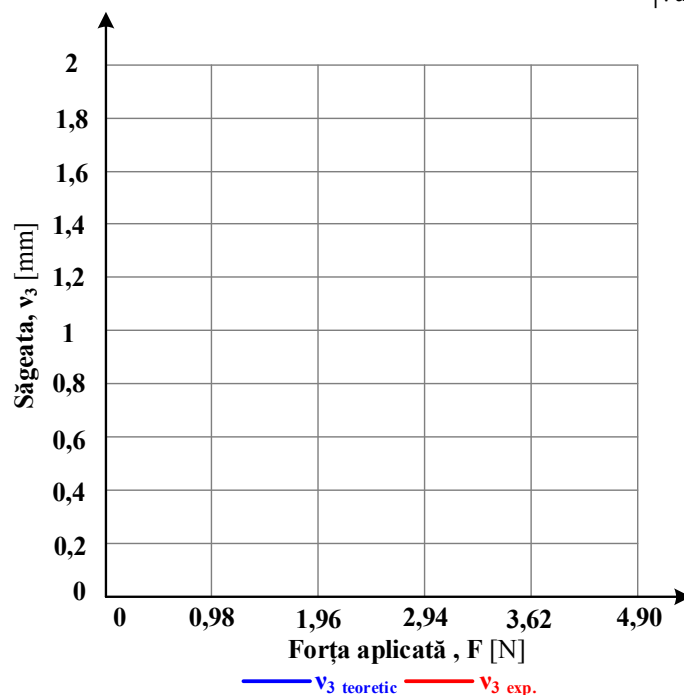


Diagrama 2. Variația săgeții pentru bara simplu rezemată

Experiment 2.2: Studiul influenței deschiderii grinzii simplu rezemate asupra deformațiilor

Scopul experimentului constă în studiul influenței deschiderii grinzii simplu rezemată asupra deformațiilor acesteia și compararea rezultatelor experimentale cu cele obținute cu formula analitică (teoretică).

• Calculul analitic al săgeții

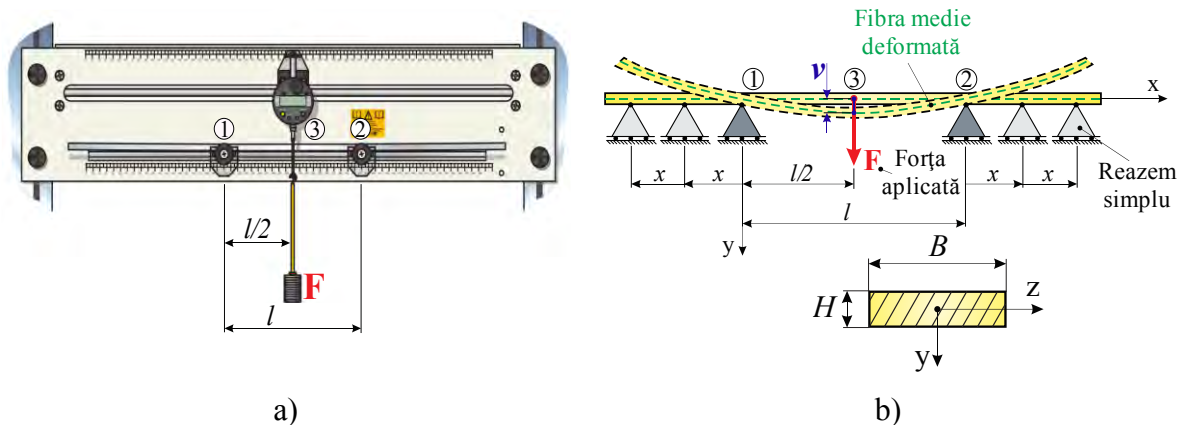


Fig. 5. Studiul influenței lungimii grinzii asupra deformațiilor:
a) stand experimental; b) schemă simplificată

Pentru grida din Fig. 5 săgeata în punctul 3 se calculează astfel:

$$v_{3 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} \quad (3)$$

unde: $v_{3 \text{ teoretic}}$ – deformația liniară (săgeata) calculată, [mm]

F – forța aplicată în punctul 3, [N]

l – distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴].

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Pentru efectuarea calculelor analitice (teoretice) se utilizează valorile măsurate ale dimensiunilor secțiunii transversale al grinzii, respectiv modulul de elasticitate longitudinală al materialului.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Cele două reazeme simple se poziționează la distanța $l = 200$ mm și se așează grinda pe cele două reazeme (punctele 1 și 2 din Fig. 5.);
2. Se poziționează comparatorul la distanța $l/2$ [mm], corespunzătoare punctului 3 din Fig. 5.;
3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital, luându-se în considerare și greutatea tijei. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero”;
4. În dreptul palpatorului comparatorului se poziționează cârligul de greutate și se aplică sarcina de 500 g;
5. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 6;

6. Se poziționează succesiv reazemele pentru a obține deschideri ale grinzii de 260, 320, 380, 440, 500, respectiv 560 mm;
7. Aplicând etapele 1 – 5, în mod similar, se măsoară experimental săgeata pentru grinda dreaptă cu lungimea l [mm], pentru poziționarea reazemelor de la etapa 7;
8. Se repetă pașii 2 – 5, valorile deplasărilor măsurate comparându-se cu cele calculate;
9. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grindă, se trec în Tabelul 6;
10. Utilizând valorile teoretice obținute cu ajutorul relației (3) și cele experimentale pentru săgeată, se trasează Diagrama 3 de variație a săgeții în funcție de deschiderea dintre cele două reazeme (lungimea l^3), pentru bara simplu rezemată.

- **Date de intrare**

Tabelul 5. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grizii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial, I_z [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

- **Rezultate**

Tabelul 6. Rezultate teoretice și experimentale pentru săgeata din punctul 3

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța l [mm]	Lungime ³ l^3 [m ³]	Săgeata în punctul 3 [mm]		Ab. rel. Δv_3 [%]
				v_3 teoretic	v_3 exp.	
500	4,90	200	0,008000			
		260	0,017576			
		320	0,32768			
		380	0,054872			
		440	0,085184			
		500	0,125000			
		560	0,175616			

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

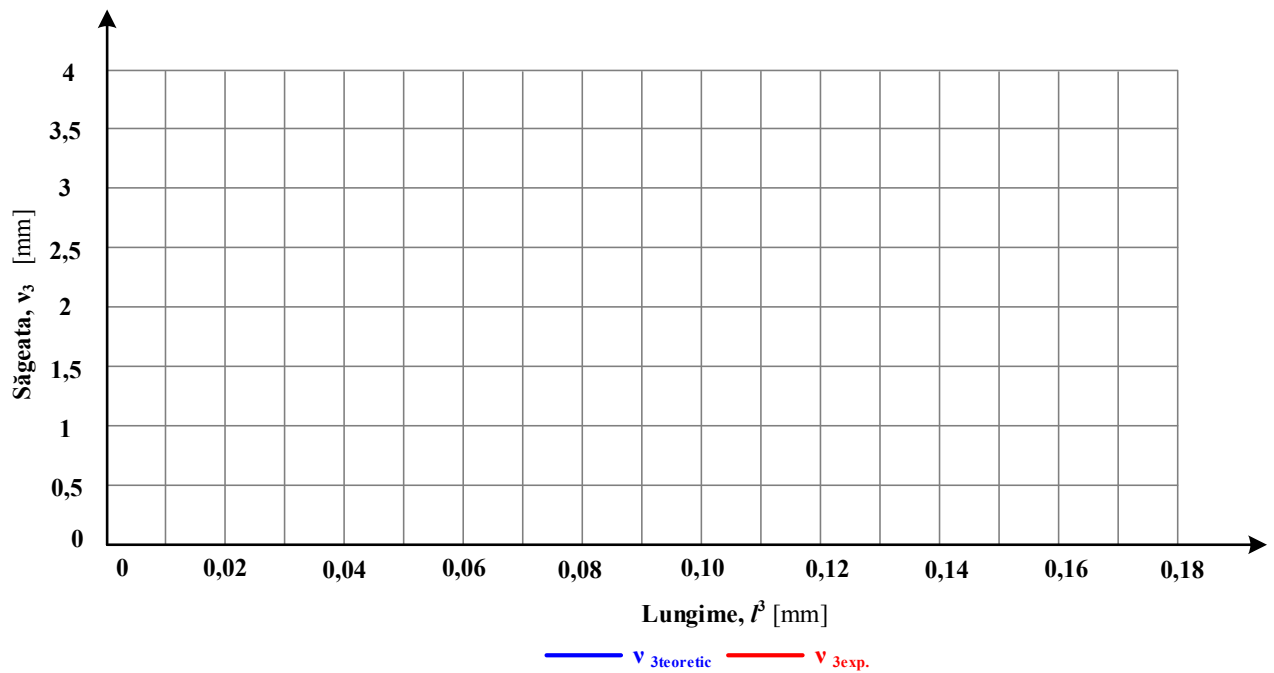


Diagrama 3. Variația săgeții pentru grinda simplu rezemată în funcție de deschiderea dintre cele două reazeme

Experiement 3: Forma deformată a grinzii simplu rezemată solicitată cu o sarcină concentrată

Scopul experimentului constă în determinarea săgeții în lungul grinzii simplu rezemată și stabilirea formei deformată a acesteia. Grinda are lungime dată, iar forța concentrată se aplică la jumătatea deschiderii grinzii (punctul 3) conform Fig. 6.

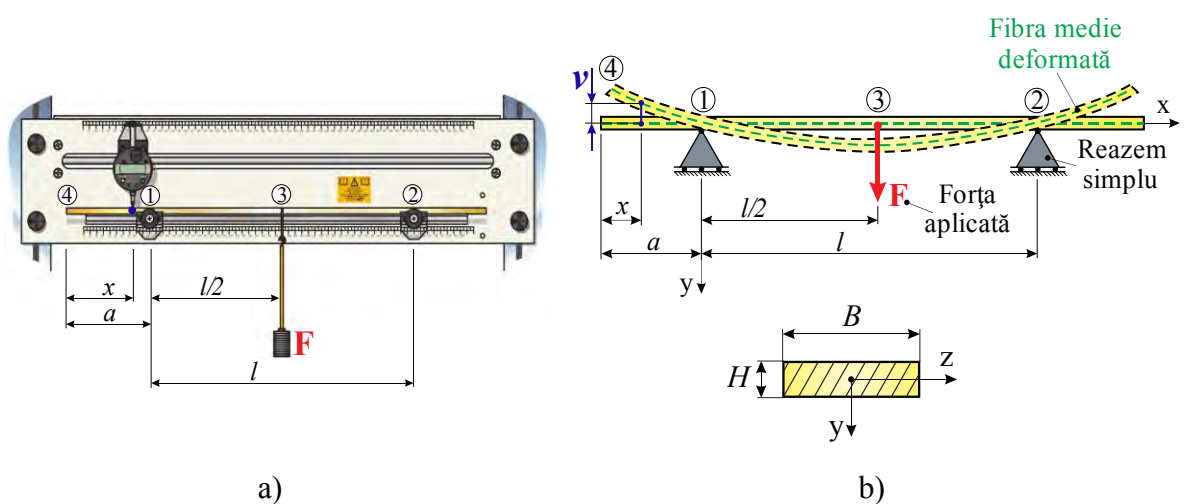


Fig. 6. Determinarea formei deformată a grinzii: a) standul experimental; b) schema simplificată

- **Calculul analitic al săgeții:**

$$v_{4 \text{ teoretic}}(x) = - \frac{7 \cdot F \cdot l^2 \cdot (a - x)}{96 \cdot E \cdot I_z} \quad (3)$$

unde: $v_{4 \text{ teoretic}}(x)$ – deformația liniară (săgeata) calculată în secțiunea la distanța x față de extremitatea stângă a grinzii, [mm]

F – forța aplicată în punctul 3, [N]

l – distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), [mm]

x – poziția secțiunii față de capătul grinzii (punctul 4), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴].

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Pentru efectuarea calculelor analitice (teoretice) se utilizează valorile măsurate ale dimensiunilor secțiunii transversale al grinzii, respectiv modulul de elasticitate longitudinală al materialului.

- **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Cele două reazeme simple se poziționează astfel încât distanța dintre ele să fie $l = 400$ mm și se așează grinda pe cele două reazeme (punctele 1 și 2 din Fig. 6.). Poziționarea se realizează astfel încât consolele să aibă aceeași lungime;
2. Se poziționează succesiv comparatorul la distanțele x [mm] față de capătul stâng al grinzii, corespunzătoare punctului 4 din Fig. 6. și respectând valorile din Tabelul 5;
3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei;
4. Cârlițul de greutate se poziționează la jumătatea distanței dintre cele două reazeme și se aplică o sarcină de 500 g;
5. Valoarea afișată de comparatorul digital reprezintă valoarea experimentală a săgeții;
6. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 8;
7. Se trasează Diagrama 4 de variație a săgeții în funcție de poziția secțiunii, obținându-se forma deformată a grinzii (fibra medie deformată);
8. Se analizează graficul obținut și se compară cu funcția teoretică a curbei în zona dintre reazeme și, respectiv, cea corespunzătoare celor două console.

- **Date de intrare**

Tabelul 7. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial, I_z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					400

• Rezultate

Tabelul 8. Rezultate teoretice și experimentale pentru săgeata

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța x față de capătul din stânga al grinzii [mm]	Săgeata [mm]		Ab.rel. $\Delta v_4(x)$ [%]
			v_4 teoretic(x)	v_4 exp.(x)	
		0			
		20			
		40			
		60			
		80			
		100			
		150			
		200			
		250			
		300			
		350			
		400			
		450			
		500			

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

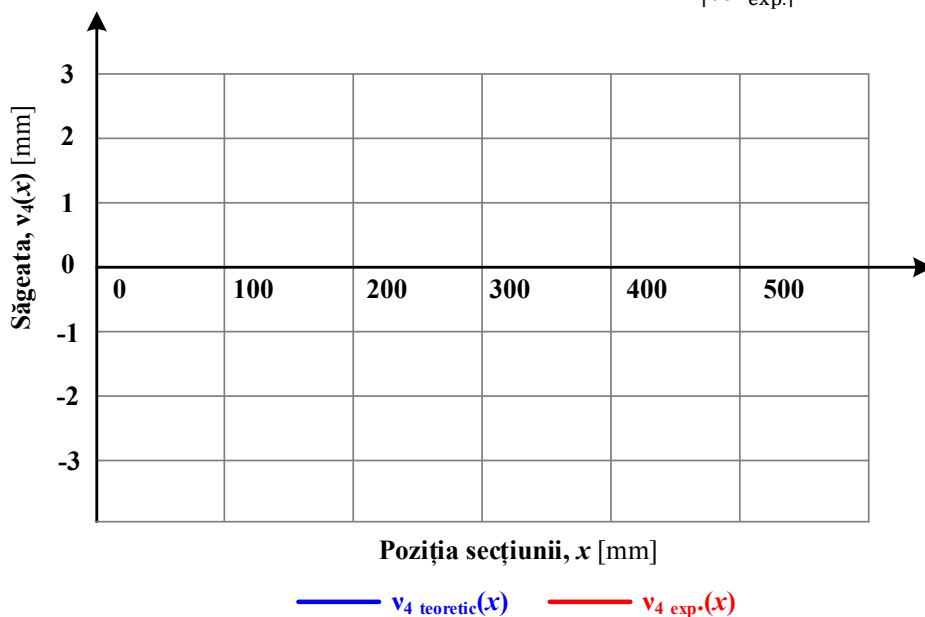


Diagrama 4. Variația săgeții cu poziția secțiunii

Experiment 4: Determinarea razei de curbură în cazul unei grinzi solicitată la încovoiere pură

În cadrul acestei măsurători se aplică sarcini pe extremitățile consolelor unei grinzi simplu rezemate pentru a produce solicitarea de încovoiere pură a grinzii între cele două reazeme. Momentul încovoiător între cele două reazeme fiind constant și raza de curbură a fibrei medii deformată este constantă, rezultând o deformare sub forma unui arc de cerc (deformație circulară).

Valoarea razei de curbură determinată teoretic (dată de relația 4) se compară cu cea experimentală (dată de relația 5). Dacă se determină experimental raza de curbură a fibrei medii deformată și se calculează momentul încovoiător ($M_{i\ 1-2} = F \cdot a$), această măsurătoare se constituie și într-o metodă de determinare a modului de elasticitate longitudinală (modulul lui Young) al grinzii (Diagrama 4).

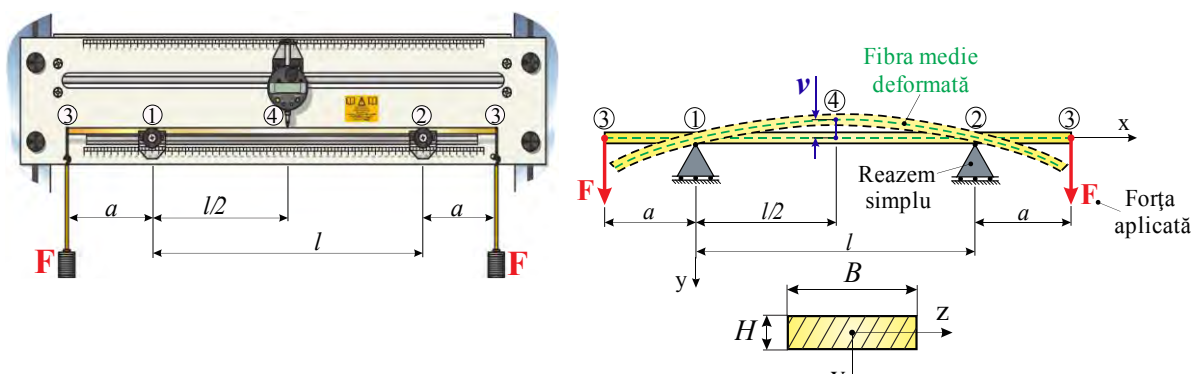


Fig. 8. Deformația unei grinzi solicitată la încovoiere pură

• **Calculul analitic al razei de curbură**

În acest experiment se utilizează expresia curburii grinzii funcție de momentul încovoiător, modulul de elasticitate al materialului grinzii și caracteristicile geometrice ale ei:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_i}{E \cdot I_z} \quad (4)$$

- unde: M_i - momentul încovoiător între cele două reazeme, [N·mm]
 ρ - raza de curbură, [mm]
 I_z - momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴]

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

E - modulul de elasticitate longitudinal, [N/mm²].

Pe baza determinărilor experimentale ale săgeții grinzii la mijlocul deschiderii (punctul 4) raza de curbură se calculează folosind relația teoretică (5) (Fig. 9.):

$$\rho = \frac{l^2 + 4h^2}{8h} \quad (5)$$

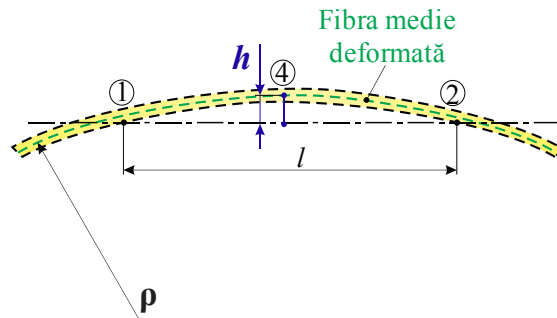


Fig. 9. Raza de curbura

- unde: l – lungimea arcului de coardă sau distanța dintre cele două reazeme ale grinzii (Fig. 8.), [mm];
 ρ – raza de curbura a fibrei medii deformată, [mm];
 h – înălțimea corzii, egală cu săgeata măsurată în 4, v_4 , [mm].

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se măsoară cu ajutorul unui șubler dimensiunile secțiunii transversale al grinzilor, valorile măsurate se introduc în Tabelul 6. Se calculează cu ajutorul valorilor măsurate momentul de inerție I_z ;
2. Se poziționează cele două reazeme simple cu distanța dintre ele având valoarea l [mm] și se așează grinda pe cele două reazeme, astfel încât consolele rezultate să aibă aceeași lungime a [mm];
3. Se poziționează comparatorul la distanța $l/2$ [mm], corespunzătoare punctului 4 din Fig. 8.;
4. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei;
5. Se poziționează cârligele de greutate la capetele grinzii la distanța a [mm] față de reazeme și se aplică sarcini identice pe ambele capete;
6. Se calculează momentul încovoietor între cele două reazeme ca fiind produsul dintre forța aplicată și lungimea consolei ($M_i = F \cdot a$). Se înlocuiește în (4) și se determină valoarea razei de curbura, rezultată care se trece în Tabelul 10;
7. Valoarea afișată de comparatorul digital reprezintă valoarea experimentală a săgeții, respectiv înălțimea h [mm] a corzii. Utilizând (5) se determină raza de curbura;
8. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții și al razei de curbura se trec în Tabelul 10;
9. Aplicând etapele 1 – 7, în mod similar, se măsoară experimental săgeata pentru grinzile din alamă și oțel, având lungimea l [mm];
10. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinzile din alamă și oțel se trec în Tabelele 11 și 12;
11. Se trasează Diagrama 4 de variație al modului de elasticitate longitudinală pentru cele trei materiale, folosind parametrii relației (4), $1/\rho$ și M_i/I_z .

- Date de intrare

Tabelul 9. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial, I _z [mm ⁴]	Dimensiunile grinzii [mm]	
		B	H		l	a
		Aluminiu				
Alamă				400	100	
Oțel				400	100	

- Rezultate

Tabelul 10. Rezultate teoretice și experimentale pentru raza de curbură (grinda de aluminiu)

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Moment încovoietor M _i [N·mm]	$\frac{M_i}{I_z}$ [$\frac{N}{mm^3}$]	Săgeata în punctul 4 v ₄ [mm]	Raza de curbură ρ [mm]		$\frac{1}{\rho_{teoretic}}$	Ab.rel. Δρ [%]
					ρ _{teoretic}	ρ _{exp.}		
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,9							

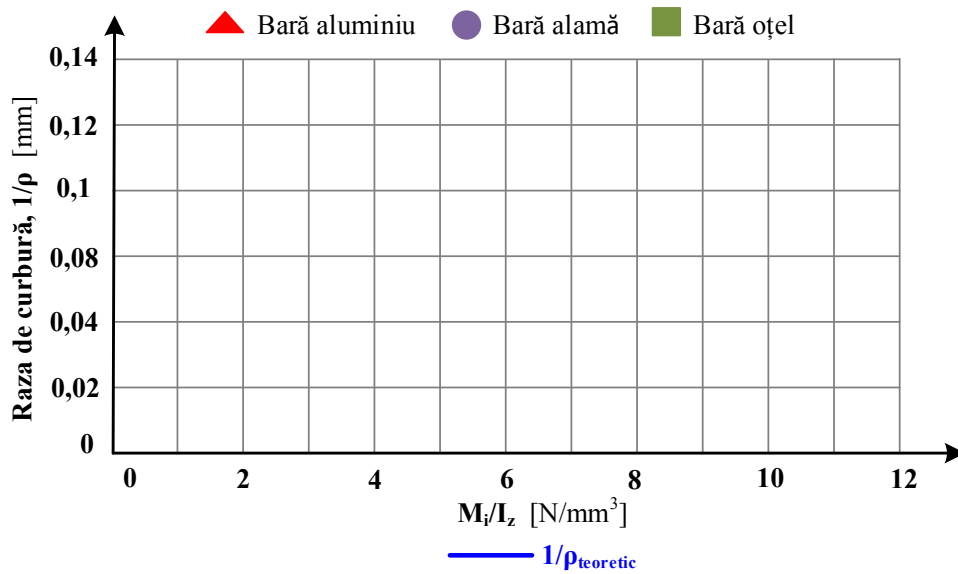
Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: Ab. rel. = $\frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 11. Rezultate teoretice și experimentale pentru raza de curbură (grinda de alamă)

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Moment încovoietor M _i [N·mm]	$\frac{M_i}{I_z}$ [$\frac{N}{mm^3}$]	Săgeata în punctul 4 v ₄ [mm]	Raza de curbură ρ [mm]		$\frac{1}{\rho_{teoretic}}$	Ab.rel. Δρ [%]
					ρ _{teoretic}	ρ _{exp.}		
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,9							

Tabelul 12. Rezultate teoretice și experimentale pentru raza de curbură (grinda de oțel)

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Moment încovoietor M _i [N·mm]	$\frac{M_i}{I_z}$ [$\frac{N}{mm^3}$]	Săgeata în punctul 4 v ₄ [mm]	Raza de curbură ρ [mm]		$\frac{1}{\rho_{teoretic}}$	Ab.rel. Δρ [%]
					ρ _{teoretic}	ρ _{exp.}		
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,9							



EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

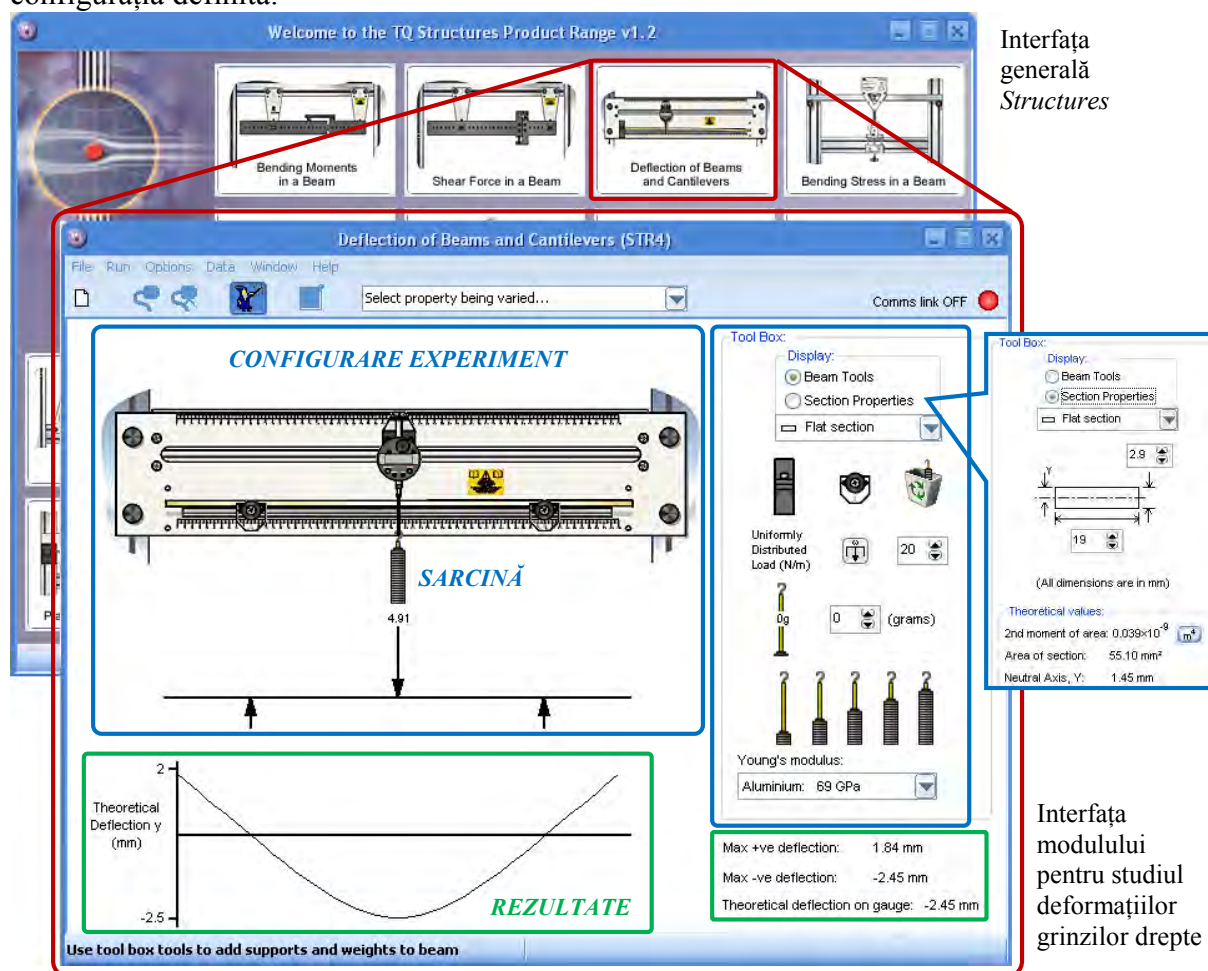


Fig. 9. Modulul *TQ Structures – Deflection of Beams and Cantilevers* pentru studiul deformațiilor grinzilor drepte

Modulul pentru determinarea deformațiilor grinzilor (*Deflection of Beams and Cantilevers*) solicitate la încovoiere, este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a măsurătorilor prin alegerea tipului și a poziției reazemelor, prin definirea formei secțiunii transversale, precum și prin adăugarea de mase identice ca valoare pe structura virtuală cu cele de pe standul real. În **ZONELE PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR** programul afișează bara în starea deformată și indică valoarea săgeții grinzii drepte, aferente sarcinii aplicate în dreptul comparatorului digital.



LE6. Determinarea deformațiilor grinzilor drepte

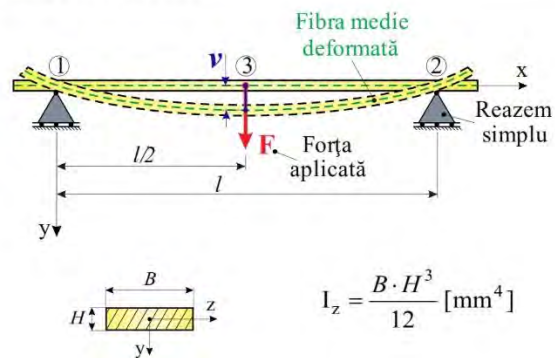
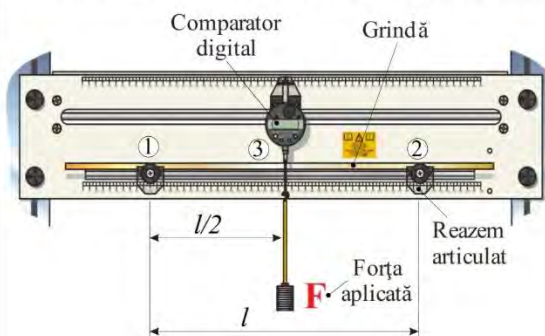
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a săgeții (v) pentru o grindă solicitată la încovoiere și compararea acesteia cu valorile obținute din relații teoretice (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

Starea deformată din dreptul unei secțiuni transversale oarecare a unei grinzi drepte solicitată la încovoiere se caracterizează prin două mărimi geometrice: deplasarea normală pe axa grinzii numită *săgeată* (v) și unghiul tangentei la fibra medie deformată denumită *rotire* (φ). Săgețile și rotirile se pot determina analitic, fie cu metode bazate pe *ecuația diferențială a fibrei medii deformată* sau utilizând *metode energetice* (metode rezultate din egalitatea lucrului mecanic exterior cu energia potențială de deformare). În domeniul elastic de solicitare, între deplasări și forțele care le produc, există relații liniare.

• Experiment - Măsurarea săgeții pe direcția forței aplicate



■ Calculul săgeții în punctul 3:

Se cunosc dimensiunile l , B și H , respectiv modulul de elasticitate al materialului E_{Al} .

$$v_3 \text{ teoretic} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI_z} \text{ [mm]}$$

■ Săgeata experimentală:

• Valoarea **săgeții pe direcția forței F** este indicată de comparatorul digital, $v_3 \text{ exp.}$

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val.}_{\text{exp.}}| - |\text{Val.}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val.}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța l [mm]	Săgeata în punctul 3 [mm]		Ab. rel. Δv_3 [%]
			$v_3 \text{ teoretic}$	$v_3 \text{ exp.}$	
100	0,98				
200	1,96				
300	2,94				
400	3,92				
500	4,90				

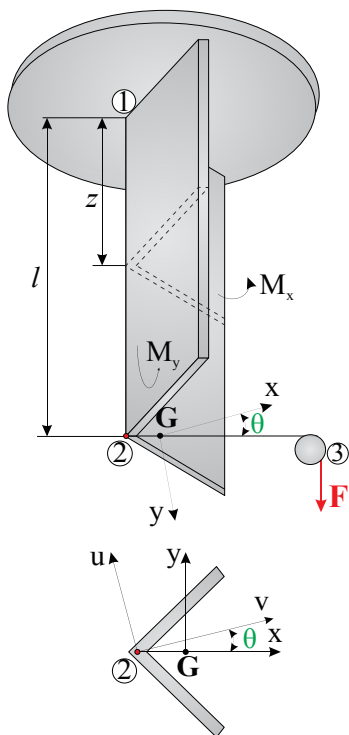
LE7. STUDIUL ÎNCOVOIERII OBLICE A GRINZILOR DREPTE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea deplasărilor la încovoierea oblică a unei grinzi având diverse forme ale secțiunii transversale (dreptunghi, profil L sau profil U). Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu cele analitice (calculate cu relațiile teoretice).

INTRODUCERE

Încovoierea oblică se produce în cazul când planul forțelor nu conține nici una din axele principale de inerție ale secțiunii. În Fig. 1. este prezentată o grindă din profil L cu aripi egale



încăstrată solicitată cu o sarcină concentrată la capătul liber. Axele principale de inerție ale secțiunii x și y trec prin centrul de greutate G dar nu coincid întotdeauna cu sistemul geometric (u-v) definit de direcția de solicitare. Dacă momentul încovoiător ar fi orientat după una din axele principale ale secțiunii (x-y) s-ar produce încovoierea plană, deformația producându-se doar după direcția axei respective. În cazul în care momentul încovoiător este orientat la un anumit unghi față de una din axele principale de inerție încovoierea se va produce după ambele axe. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *încovoiere oblică* sau *dublă*.

Deplasarea capătului liber va avea două componente: una după direcția de solicitare (Δu) și una după direcția perpendiculară pe aceasta (Δv). Deplasările se calculează descompunând vectorul moment după direcțiile principale. Aceasta conduce la următoarele formule de calcul:

Fig. 1. Încovoierea dublă a grinzii profil L

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{teoretic}} &= \frac{F \cdot l^3}{6E} \left[\left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) \right] \\ \Delta v_{\text{teoretic}} &= \frac{F \cdot l^3}{6E} \sin 2\theta \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

unde: F – forța aplicată, [N];
 l – lungimea grinzii, [mm];
 E – modulul lui Young, [N/mm²];
 Δu – deplasarea în direcția de solicitare, [mm];
 Δv – deplasarea în direcție perpendiculară pe solicitare, [mm];
 θ – unghiul de solicitare, grade [°];
 I_x și I_y – momentele de inerție principale, după axa „x”, respectiv, după axa „y”, [mm⁴].

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 2. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea deformațiilor profilelor solicitate la încovoiere oblică.

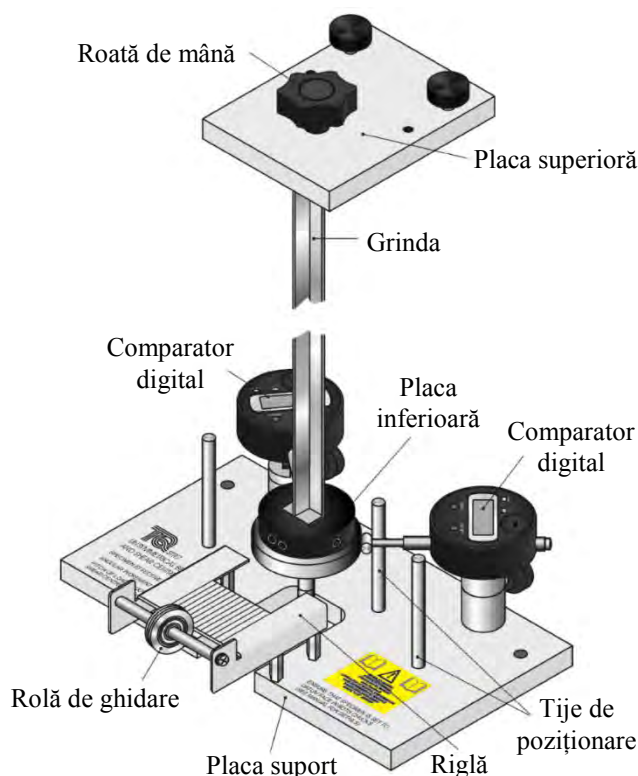


Fig. 2. Echipamentele pentru măsurarea deformațiilor profilelor solicitate la încovoiere oblică și determinarea centrului de forfecare

- **Grinda** este un profil laminat pentru care se dorește determinarea deplasărilor la încovoiere oblică;
- **Roata de mână** permite schimbarea orientării secțiunii profilului în raport cu direcția forței care solicită grinda;
- **Placa superioară** fixează extremitatea grinzi, în condițiile asigurării posibilității de reorientare a profilului;
- **Placa inferioară** este solidară cu extremitatea grinzi, care se mișcă liber și asigură zona de contact cu palpatoarele comparatoarelor indiferent de forma secțiunii profilului studiat;
- **Comparatoarele digitale** sunt traductoare de deplasare ale căror circuite electronice permit afișarea sau transmiterea către calculator a deformației măsurate. Sunt prevăzute și cu un buton care comandă de aducere la „zero” a indicației comparatorului înainte de aplicarea sarcinilor;
- **Tije de poziționare** asigură ortogonalitatea sau paralelismul între palpatoarele comparatoarelor, în funcție de experiment;
- **Riglă** permite determinarea direcției de aplicare a forței, atunci când această direcție nu corespunde cu una din direcțiile principale ale secțiunii grinzi studiate;
- **Rola de ghidare** transformă direcția de aplicare a forței din verticală (direcția greutății talerului) în orizontală (planul secțiunii transversale al profilului studiat). Rola poate fi repositionată pe tija ce o susține;
- **Placa suport** asigură poziționarea relativă a tuturor componentelor fixe din extremitatea liberă a barei studiate.

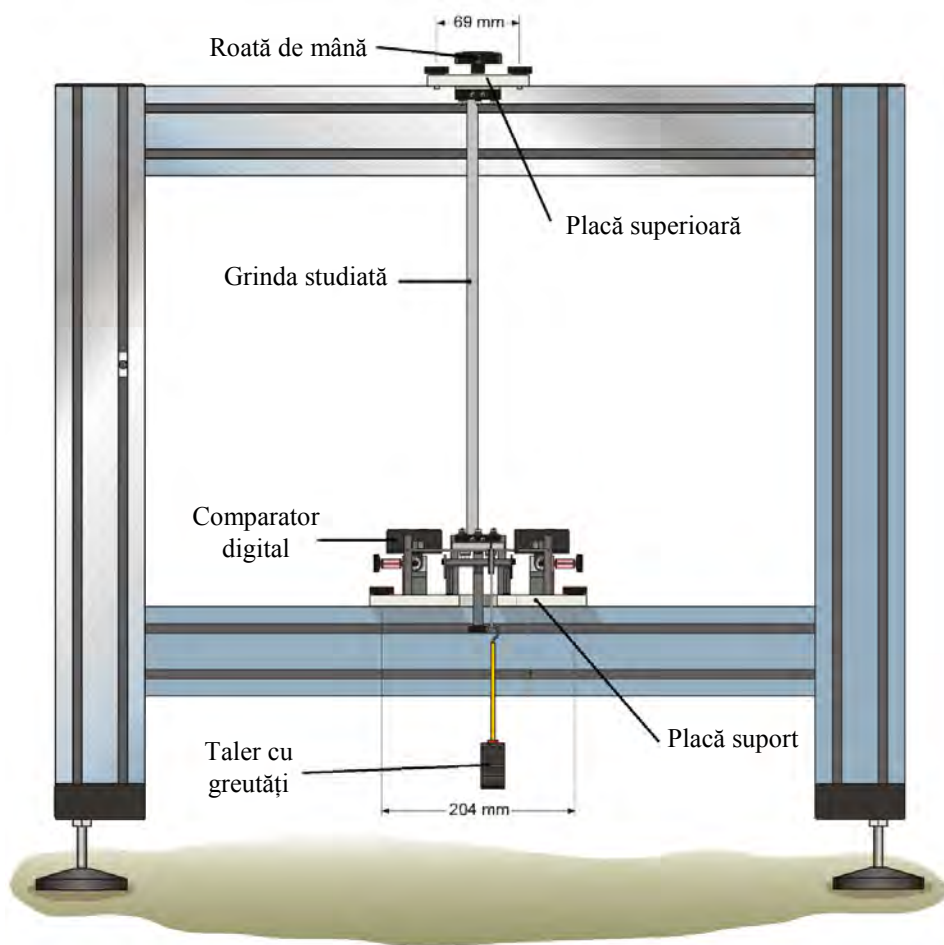


Fig. 3. Standul pentru măsurarea deformațiilor profilelor solicitate la încovoiere oblică și determinarea centrului de forfecare

În Fig. 3. este prezentată schema standului pentru măsurarea deformațiilor profilelor solicitate la încovoiere oblică. Componentele standului permit determinarea simultană a deformațiilor barei după două direcții ortogonale. Valorile deformațiilor barei pot fi prelucrate tabelar și grafic, utilizând programul care însoțește echipamentul.

EFECTUAREA LUCRĂRII

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează una dintre cele trei grinzi disponibile, având profilul drepunghiular, U sau L, în placa inferioară respectiv placa superioară, poziționarea acestora făcându-se conform Fig. 4.;
2. Se deblochează placa superioară cu ajutorul roții de mână, aceasta având poziții selectabile, ce corespund unei rotații de $22,5^\circ$. Se poziționează secțiunea grinzii, astfel ca una din axele principale de inerție (prezentate în Fig. 5.) să coincidă cu direcția de solicitare, după care placa superioară se blochează cu ajutorul roții de mână;
3. Se verifică dacă direcțiile de măsurare ale comparatoarelor digitale sunt perpendiculare între ele. Acest lucru este realizat dacă comparatoarele ating tije de poziționare. De asemenea, se verifică dacă palpatoarele comparatoarelor sunt în contact cu placa inferioară și li se permite acestora o cursă de aproximativ 10 - 11 mm spre înainte respectiv 2 - 3 mm spre

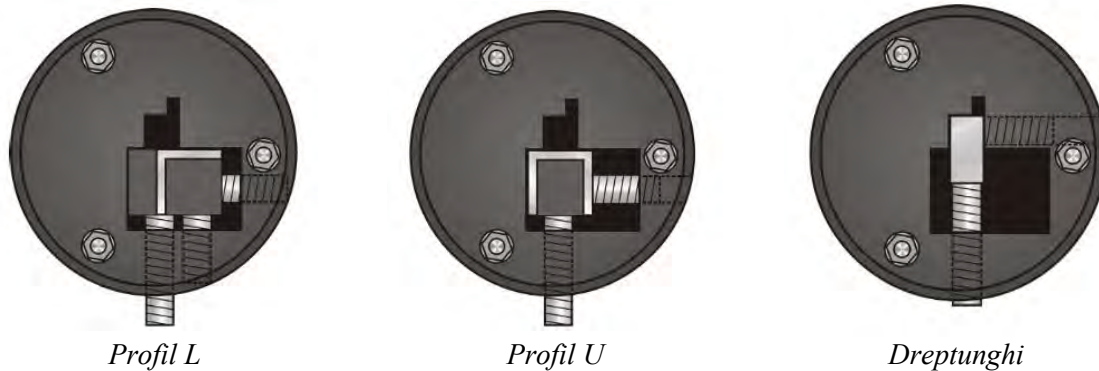


Fig. 4. Orientarea și poziționarea fiecărui profil în placa inferioară

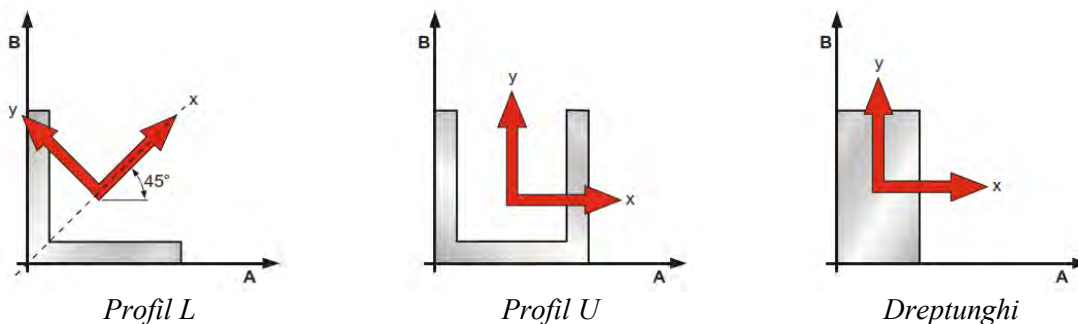


Fig. 5. Orientarea axelor principale de inerție ale secțiunilor analizate

înapoi. În caz contrar, comparatoarele vor fi deblocate din poziție și glisate corespunzător. Se aduce la „zero” indicația comparatoarelor înainte de aplicarea sarcinilor;

4. Se solicită grinda, aplicând talerele de la 100 g până la valoarea maximă de 500 g, din 100 g în 100 g. Se va verifica dacă firul de care se agață talerele este paralel cu liniile marcate pe riglă. În caz contrar, se rezonează rola de ghidare prin glisare pe axul acesteia;
5. Se citesc valorile indicațiilor celor două comparatoare;
6. Valorile experimentale și teoretice ale deplasărilor după cele două direcții de solicitare, pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelele 2 și 3;
7. Se rezonează grinda prin rotire în direcția acelor de ceasornic de la unghiul de 0° până la obținerea unui unghi de 180° , față de poziția inițială, din $22,5^\circ$ în $22,5^\circ$. Rezultatele se trec într-un tabel similar precizându-se poziția unghiulară;
8. Se calculează valorile deplasărilor experimentale (Δu) și (Δv) (păstrând semnul acestora) utilizând formulele:

$$\Delta u_{\text{exp.}} = \frac{(C_{\text{stânga}} + C_{\text{dreapta}})}{\sqrt{2}}; \quad \Delta v_{\text{exp.}} = \frac{(C_{\text{stânga}} - C_{\text{dreapta}})}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

9. Se compară valorile măsurate cu cele calculate, utilizând formulele (1) și se determină abaterea relativă;
10. Valorile momentelor de inerție principale pentru cele trei tipuri de secțiuni se trec în Tabelul 1;
11. Se trasează două diagrame astfel:
 - Diagrama 1 de variație a valorilor analitice și experimentale ale săgeții orizontale Δu în funcție de forța aplicată, F [N];
 - Diagrama 2 de variație a valorilor analitice și experimentale ale săgeții verticale Δv în funcție de forța aplicată, F [N].

- Date de intrare

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Momentele de inerție axiale [mm ⁴]						Dimensiunea grinzii l [mm]
		Profil L		Profil U		Profil dreptunghiular		
Aluminiu		I _z	I _y	I _z	I _y	I _z	I _y	

- Rezultate

Tabelul 2. Rezultate teoretice și experimentale pentru deplasările în direcția de solicitare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Unghiul de solicitare: $\theta =$ [°]							
		Deplasarea în direcția de solicitare [mm]							
		$\Delta u_{teoretic}$	Comp. stânga Δu	Comp. dreapta Δu	$\Delta u_{exp.}$	Ab. rel. Δu [%]			
100	0,98								
200	1,96								
300	2,94								
400	3,92								
500	4,90								

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

Tabelul 3. Rezultate teoretice și experimentale pentru deplasările în direcție perpendiculară pe direcția de solicitare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Unghiul de solicitare: $\theta =$ [°]							
		Deplasarea în direcție perpendiculară pe solicitare [mm]							
		$\Delta v_{teoretic}$	Comp. stânga Δv	Comp. dreapta Δv	$\Delta v_{exp.}$	Ab. rel. Δv [%]			
100	0,98								
200	1,96								
300	2,94								
400	3,92								
500	4,90								

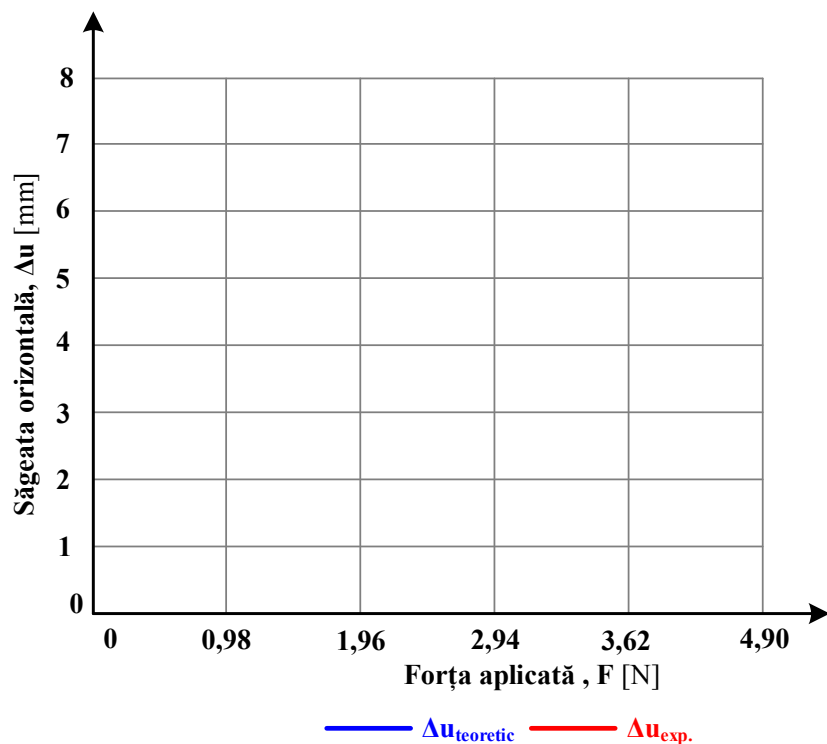


Diagrama 1. Variația săgeții orizontale în funcție de forța aplicată F

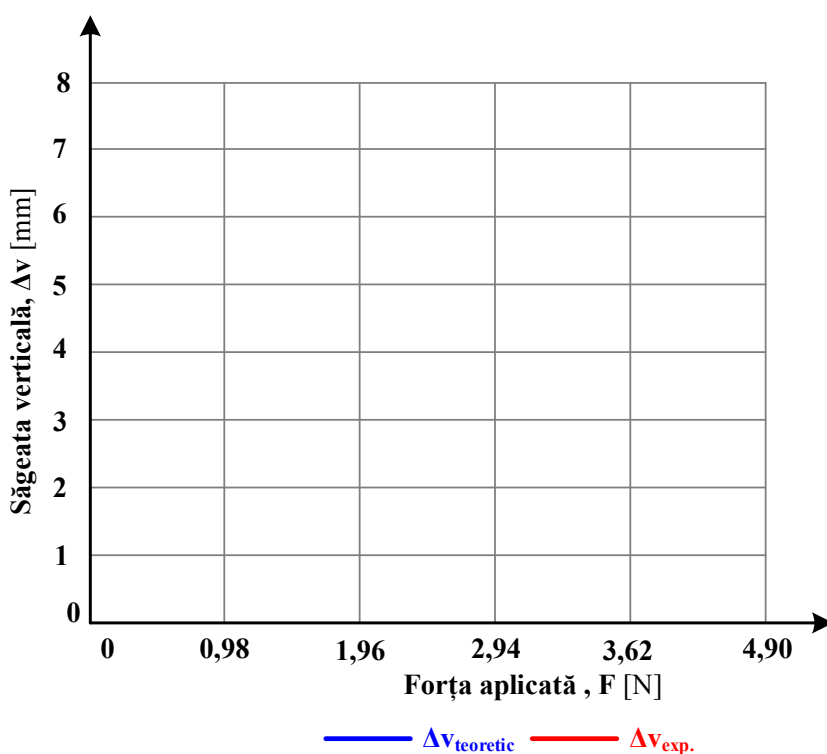


Diagrama 2. Variația săgeții verticale în funcție de forța aplicată F

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat.

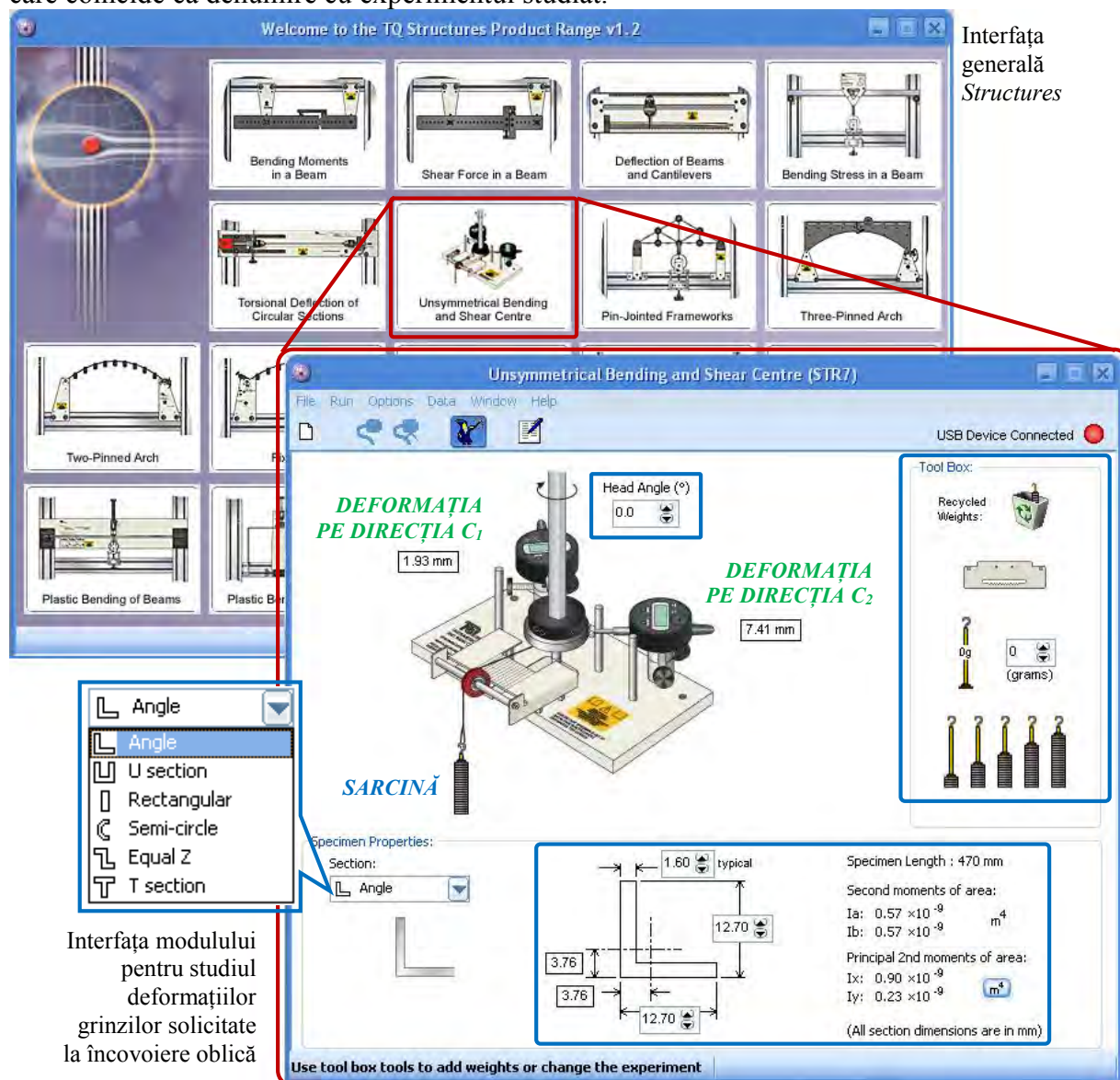


Fig. 6. Modulul *TQ Structures – Unsymmetrical Bending and Shear Centre* pentru studiul deformațiilor grinzilor solicitate la încovoiere oblică

Modulul pentru determinarea deformațiilor grinzilor solicitate la încovoiere oblică (*Unsymmetrical Bending and Shear Centre*) este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a măsurătorilor prin definirea secțiunii transversale a grinzii (ca formă și orientare) și adăugarea de mase identice ca valoare pe structura virtuală, cu cele utilizate pe standul real și **CÂMPURILE PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR**, unde programul afișează valorile deplasărilor capătului liber al barei, aferente sarcinii aplicate, pe direcțiile celor două comparatoare digitale.



LE7. Studiul încovoierii oblice a grinzilor drepte

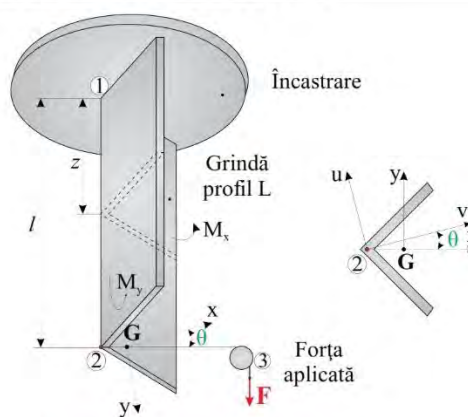
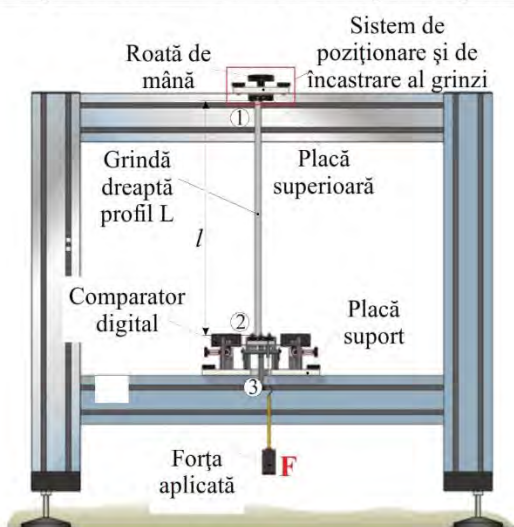
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a deplasărilor verticale și orizontale la încovoierea oblică a unei grinzi având diferite forme ale secțiunii transversale (dreptunghi, profil L sau profil U) și compararea valorilor măsurate cu cele obținute cu relații teoretice (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

Încovoierea oblică (sau dublă) este o solicitare compusă de tip $\sigma + \sigma$ și se produce când planul forțelor nu conține nici una din axele principale de inerție ale secțiunii barei. Momentul încovoietor este orientat la un anumit unghi față de una din axele principale de inerție (x sau y), încovoierea producându-se după ambele axe. Deplasarea va avea două componente: una după direcția de solicitare (Δu) și una după direcția perpendiculară pe aceasta (Δv) și se calculează descompunând vectorul moment după direcțiile principale. Tensiunile normale rezultante, calculate cu relațiile de la încovoierea plană, și deformațiile produse se obțin prin suprapunerea efectelor.

• Experiment — Grindă dreaptă de profil L solicitată la încovoiere oblică



■ Deplasări experimentale:

$$\Delta u_{\text{exp.}} = \frac{(C_{\text{stanga}} + C_{\text{dreapta}})}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta v_{\text{exp.}} = \frac{(C_{\text{stanga}} - C_{\text{dreapta}})}{\sqrt{2}}$$

- unde C_{stanga} , C_{dreapta} reprezintă valorile deplasărilor citite pe cadrane digitale situate în dreapta și în stânga grinzii.

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val}_{\text{exp.}}| - |\text{Val}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

■ Calculul analitic (teoretic) al deplasărilor:

Se cunosc dimensiunile l , θ respectiv momentele axiale pentru profilul L: $I_x = 228 \text{ mm}^4$, $I_y = 878 \text{ mm}^4$.

$$\Delta u_{\text{teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E} \left[\left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) \right]$$

$$\Delta v_{\text{teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E} \sin 2\theta \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right)$$

• Rezultate

Masa m	Forța aplicată F	Lungimea l	Unghiul de solicitare: $\theta =$ [°]																
			Deplasări [mm]																
			$\Delta u_{\text{teoretic}}$	Comp. stânga Δu	Comp. dreapta Δu	$\Delta u_{\text{exp.}}$	Ab. rel. Δu [%]	$\Delta v_{\text{teoretic}}$	Comp. stânga Δv	Comp. dreapta Δv	$\Delta v_{\text{exp.}}$	Ab. rel. Δv [%]							
[g]	[N]	[mm]																	
100	0,98																		
200	1,96																		
300	2,94																		
400	3,92																		
500	4,90																		

LE8. STUDIUL GRINZILOR DREPTE STATIC NEDETERMINATE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv măsurarea experimentală a reacțiunilor și a deplasării (săgeții) pe direcție verticală a grinzilor drepte static nedeterminate. Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu rezultatele calculelor analitice (obținute cu relațiile teoretice).

INTRODUCERE

O grindă devine static nedeterminată dacă numărul necunoscutelor (reacțiunile din reazeme) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan ($s = 3$). Gradul de nedeterminare al grinzii (n) este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor din reazeme (r) și numărul ecuațiilor de echilibru (s). Grinzile static nedeterminate se pot rezolva analitic utilizând ecuațiile celor 3 momente a lui Clapeyron, cu una din metodele energiei pentru calculul deplasărilor (Castigliano, Morh-maxwell, Veresceaghin) sau cu metoda eforturilor.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea reacțiunilor și a deformațiilor grinzilor drepte static nedeterminate, în diferite variante de rezemare:

- **Grinda** este o bara de secțiune dreptunghiulară, a cărei deschidere poate fi modificată prin re poziționarea reazemului din extremitatea dreaptă;
- **Încastrarea** introduce în plan 3 reacțiuni. Din cele trei reacțiuni necunoscute pe care un astfel de reazem le introduce este posibilă determinarea momentului încovoietor, prin intermediul unui traductor piezoelectric ce este amplasat la o distanță de 50 mm față de axa reazemului. Valoarea momentului încovoietor se calculează înmulțind indicația forței măsurate de traductor cu valoarea brațului forței;
- **Reazemul simplu** se poziționează la extremitatea dreaptă a grinzii pe care o sprijină, introducând o reacțiune suplimentară. Reazemul simplu introduce o reacțiune pe direcție verticală, realizând o grindă simplu-static nedeterminată. Dacă se introduc **cleme de rigidizare** reazemul devine **încăstrat**, introducând 3 necunoscute: reacțiunile pe direcție orizontală (H) și verticală (V), respectiv un moment de încovoiere (M_i);
- **Mecanismul paralelogram** este un caz particular al mecanismului patrulater în care manivela și balansierul sunt egale. Această alegere are la bază proprietatea mecanismului paralelogram de a asigura bielei o mișcare plan-paralelă (elementul de mecanism se poate mișca în plan doar în poziții paralele cu orientarea inițială – cu alte cuvinte, nu se poate înclina). Astfel, se elimină posibilitatea de a solicita traductoarele din construcția reazemului simplu și al celui încăstrat cu forțe oblice, garantând astfel măsurarea doar a reacțiunii pe direcția verticală;
- **Sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță** este un ansamblu de circuite electronice care asigură adaptarea de nivel a tensiunii traductorului (amplificare), filtrarea semnalului și procesări analogice (liniarizare, derivare, integrare ș.a., dacă se impun);
- **Potențiometrul de reglare** asigură posibilitatea de aducere la „zero“ a indicației valorii pentru măsurarea cu traductoare;
- **Comparatorul digital** este un traductor de deplasare al cărui circuit electronic permite afișarea sau transmiterea către calculator a deformației grinzii, măsurată în punctul în care este amplasat palpatorul său. Este prevăzut și cu un buton care comandă aducerea la „zero“ a indicației comparatorului înainte de aplicarea sarcinilor.

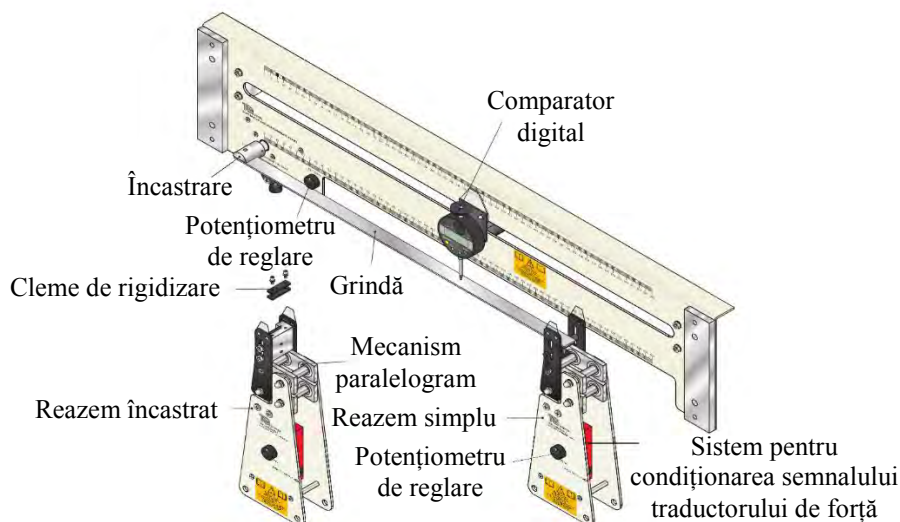


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea reacțiilor și a deformației grinzilor drepte static nedeterminate

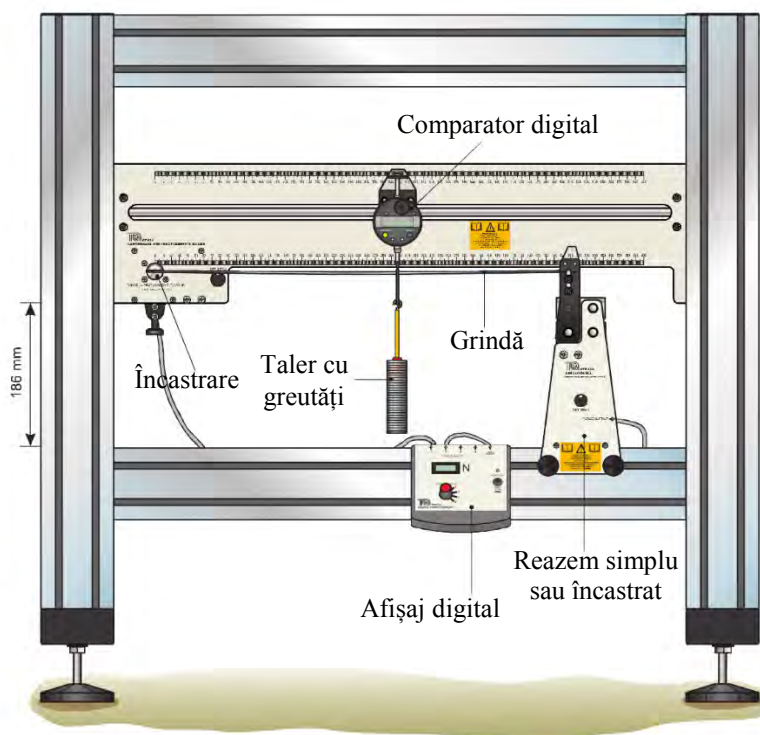


Fig. 2. Standul pentru determinarea reacțiilor și a deformației grinzilor drepte static nedeterminate

În Fig. 2. este prezentată schema standului pentru determinarea reacțiilor și a deformației grinzilor drepte static nedeterminate. Componentele standului permit studiul deformațiilor grinzilor drepte simplu sau dublu static nedeterminate (grindă încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt sau grindă dublu-încastrată), având deschiderea variabilă, prin repoziționarea rezelor din extremitatea dreaptă. Valoarea deformației grinzii, dată de comparatorul digital, poate fi citită atât de pe afișajul acestuia, cât și din programul care însoțește standul. Echipamentele descrise sunt fixate pe cadrul de solicitare furnizat de producător și sunt completate de un afișaj digital care preia semnalul de la traductorul de forță și îl redă în formă numerică. Valoarea reacțiilor poate fi preluată din programul care însoțește standul.

EFECTUAREA LUCRĂRII

Scopul lucrării este măsurarea experimentală a reacțiilor și săgeții în dreptul punctului de încărcare pentru diferite condiții de rezemare pentru o grindă static nedeterminată cu secțiune dreptunghiulară constantă. Valorile experimentale ale reacțiilor se vor compara cu valorile analitice calculate cu relațiile teoretice. Într-un prim experiment, se realizează măsurarea reacțiilor și compararea lor cu valori analitice, pentru o grindă static determinată.

Experiment 1.1: *Determinarea reacțiilor din reazeme pentru o grindă dreaptă static determinată simplu rezemată*

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală ale reacțiilor din cele două reazeme, atunci când variază poziția punctului de aplicare al forței aplicată F , aflată la distanța a [mm] față de reazemul din punctul 1. Se vor determina și valorile analitice rezultate din aplicarea relațiilor teoretice.

• Calculul analitic al reacțiilor

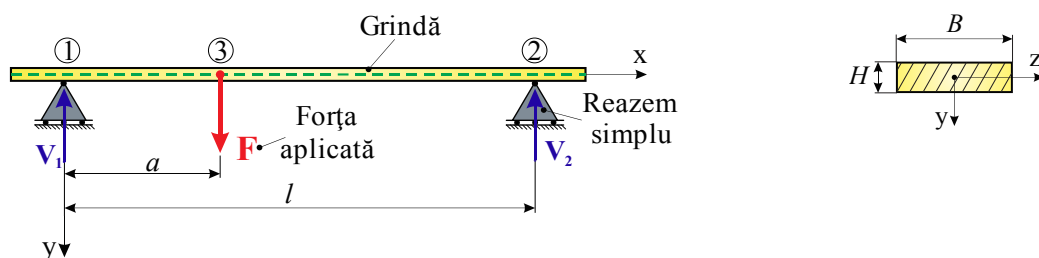


Fig. 3. Schema simplificată a grinzii static determinate

Reacțiunile din reazeme în cazul unei grinzi static determinate solicitate la încovoiere se determină din ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; \quad V_1 + V_2 = F \quad (1)$$

$$\sum M_1 = 0; F \cdot a - V_2 \cdot l = 0; V_2 = \frac{F \cdot a}{l} \text{ [N]} \quad (2)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F(l - a) = 0; V_1 = \frac{F(l - a)}{l} \text{ [N]} \quad (3)$$

unde: V_1, V_2 - reacțiunile pe direcție verticală din reazemele aferente punctelor 1 și 2, [N]

F - forța aplicată în punctul 3, [N]

a - este distanța de la punctul 1 la punctul de aplicație al forței F , [mm]

l - distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), [mm].

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează cele două reazeme prevăzute cu traductoare de forță la distanța l [mm];
2. Se așează grinda pe cele două reazeme, astfel încât consolele acestora să fie egale;
3. Se conectează traductorii montați pe reazemul din partea stângă, respectiv, din partea dreaptă, la canalul 2 și, respectiv canalul 3, ale afișajului digital al forței;

4. Se verifică indicația „zero” a afișajului digital, pe canalul 2 și, respectiv, canalul 3. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*);
5. Se încarcă grinda, succesiv, cu cinci forțe diferite, de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, utilizând talerele cu greutate, poziționate la distanța a [mm] față de reazemul din stânga;
6. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor ($V_{1 \text{ exp.}}$, $V_{2 \text{ exp.}}$) indicate de afișajul digital se trec în Tabelul 2;
7. Pentru determinarea dependenței reacțiunilor față de poziția forței pe grindă, se păstrează forța constantă și, pentru valori ale parametrului a [mm], cuprinse între 80 mm și 360 mm care cresc din 40 mm în 40 de mm, se determină reacțiunile în reazeme;
8. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor din reazeme pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 3;
9. După fiecare re poziționare a forței, se calibrează la „zero” citirile corespunzătoare reacțiunilor din cele două reazeme (pasul 4);
10. Se trasează două diagrame astfel:
 - Diagrama 1 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunilor verticale V_1 și V_2 în funcție forța aplicată, F [N];
 - Diagrama 2 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunilor verticale V_1 și V_2 în funcție de distanța variabilă, a [mm].

• **Date de intrare**

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					

• **Rezultate**

Tabelul 2. Rezultate teoretice și experimentale pentru reacțiuni

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța a [mm]	Reacțiuni verticale [N]					
			V_1 teoretic	V_1 exp.	Ab.rel. ΔV_1 [%]	V_2 teoretic	V_2 exp.	Ab.rel. ΔV_2 [%]
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,9							

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. \text{ rel.} = \frac{|Val. \text{ exp.} - |Val. \text{ teoretică}|}{|Val. \text{ exp.}|} \cdot 100$ [%]

Tabelul 3. Rezultate teoretice și experimentale pentru reacțiuni

Masa m	Forța aplicată F	Distanța a	Reacțiuni verticale					
			[N]					
[g]	[N]	[mm]	V ₁ teoretic	V ₁ exp.	Ab.rel. ΔV ₁ [%]	V ₂ teoretic	V ₂ exp.	Ab.rel. ΔV ₂ [%]
500	4,9	80						
		120						
		160						
		200						
		240						
		280						
		320						
		360						

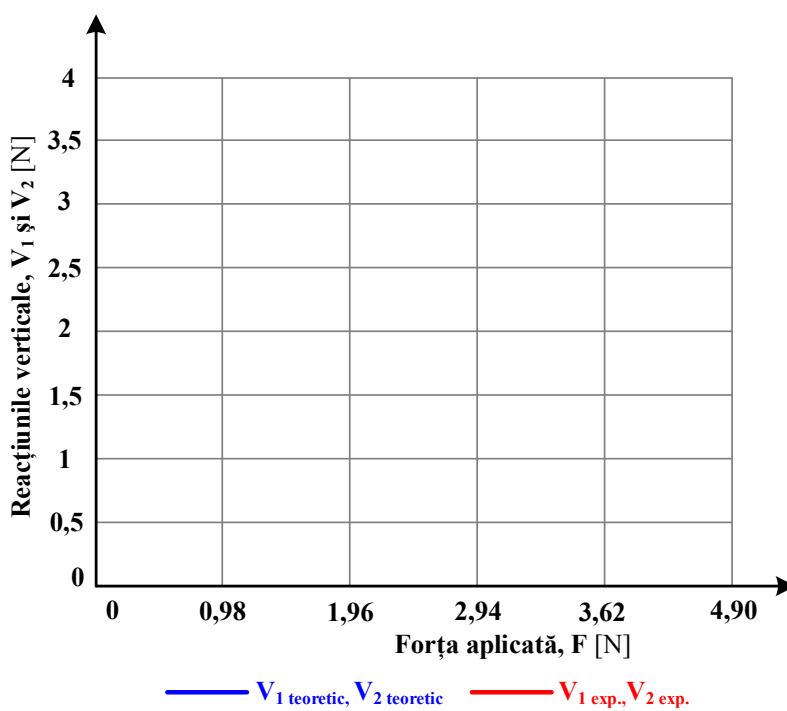


Diagrama 1. Variația reacțiunilor verticale în funcție de forța aplicată F [N]

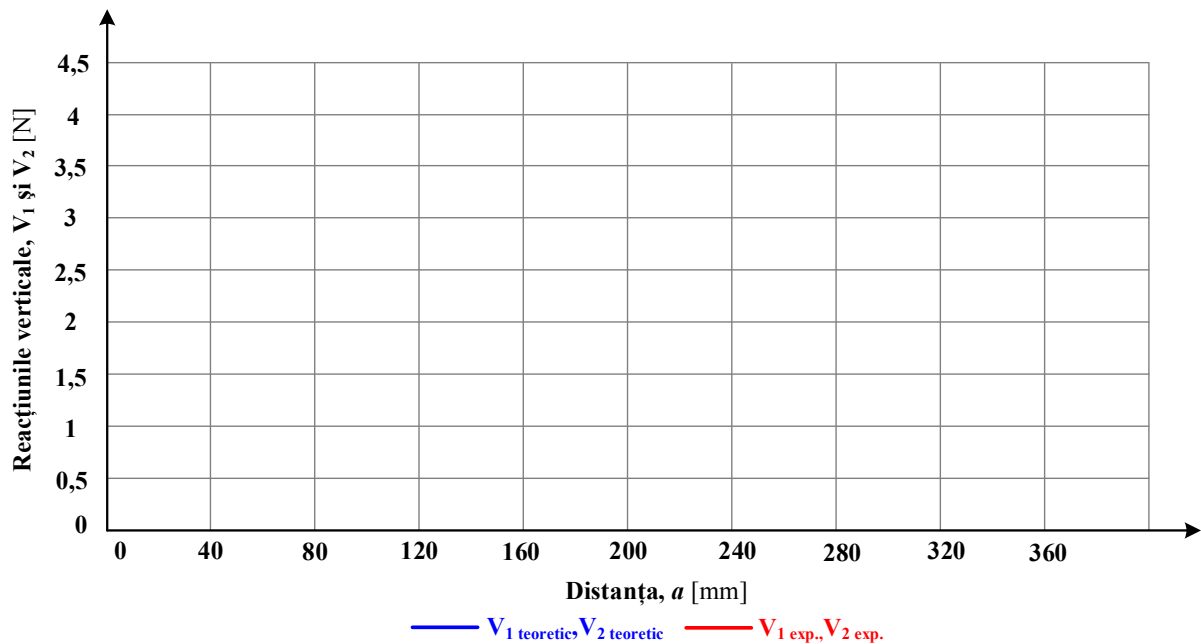


Diagrama 2. Variația reacțiunilor în funcție de distanța a [mm]

Experiment 1.2a: Determinarea săgeții pentru o grindă dreaptă static determinată simplu rezemată, în funcție de încărcare

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a săgeții v în funcție de valoarea forței aplicate F , lungimea grinzii și punctul de aplicație al forței (la mijlocul distanței l) fiind păstrate constante.

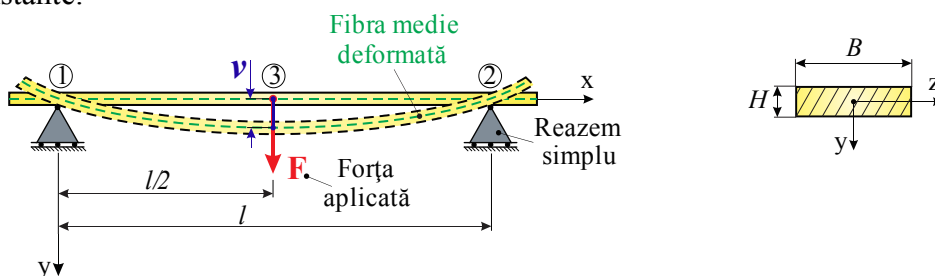


Fig. 4. Schema simplificată pentru determinarea săgeții pentru o grindă static determinată

• **Calculul analitic al săgeții**

Săgeata (distanța dintre poziția nedeformată și poziția deformată a fibrei medii deformate a grinzii) sau deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței (v_3), pentru grinda rezemată și încărcată ca în Fig. 4. se poate calcula cu relația:

$$v_3 \text{ teoretic} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} \quad (4)$$

unde: $v_3 \text{ teoretic}$ – deformația liniară (săgeata) calculată în punctul 3, [mm]

F – forța aplicată în punctul 3, [N]

l – distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴].

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Pentru calculele analitice (teoretice) se măsoară dimesiunile secțiunii transversale ale grinzii, și se ia modulul de elasticitate longitudinală al materialului.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se păstrează configurația reazemelor de la Experimentul 1.1, dar se deconectează traductoarele de forță cu care sunt prevăzute cele două reazeme (canalele 2 și 3);
2. Se poziționează cele două reazeme, astfel încât să se obțină distanța l [mm];
3. Se așează grinda pe reazeme, astfel încât consolele acesteia să fie egale la fiecare capăt;
4. Se poziționează comparatorul digital la distanța $l/2$ și se blochează folosind piulița aferentă (din spatele panoului asamblat pe cadrul standului);
5. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
6. Se poziționează cârligul pentru greutăți în dreptul acului comparatorului;
7. Se aplică succesiv greutățile de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g;
8. Valorile indicate de comparatorul digital reprezintă săgeata pe direcția forței;
9. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 5;
10. Se trasează Diagrama 3 de variație a valorilor analitice și experimentale ale săgeții determinate în funcție de forța aplicată.

• Date de intrare

Tabelul 4. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I _z [mm ⁴]	Dimensiunile grinzii [mm]	
		B	H		l	l/2
Aluminiu						

• Rezultate

Tabelul 5. Rezultatele teoretice și experimentale pentru săgeata din punctul 3

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Săgeata în punctul 3 [mm]		Ab. rel. Δv ₃ [%]
		v ₃ teoretic	v ₃ exp.	
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,90			

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

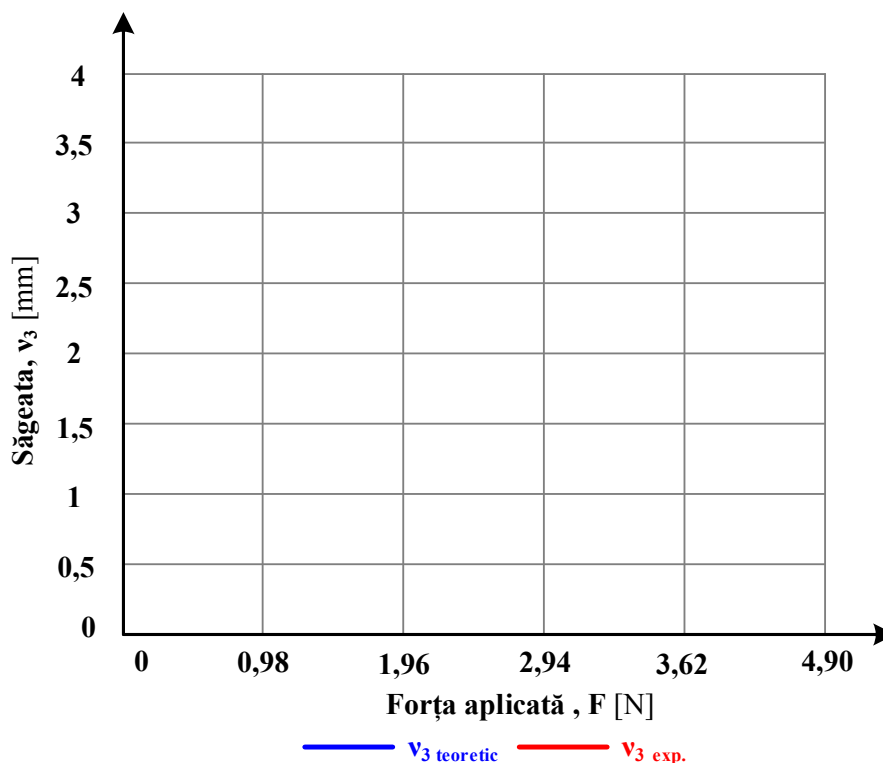


Diagrama 3. Variația săgeții în funcție de forța aplicată

Experiment 1.2b: *Determinarea săgeții pentru o grindă dreaptă static determinată simplu rezemată, în funcție de deschiderea grinzii*

În acest experiment se urmărește măsurarea săgeții (v_3) atunci când punctul de aplicare al forței F este la distanța $l/2$ (la mijlocul deschiderii grinzii), cât și determinarea valorilor teoretice, rezultate din aplicarea relațiilor analitice. Pentru acest experiment, poziția punctului de aplicare al forței F este aceeași, distanța dintre cele două reazeme fiind variabilă.

• **Calculul analitic al săgeții**

Săgeata (distanța dintre poziția nedeformată și poziția deformată a fibrei medii deformată a grinzii) sau deplasarea punctului de aplicație a forței (v) pentru grinda rezemată și încărcată ca în Fig. 4., se poate calcula cu relația:

$$v_{3 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} \quad (5)$$

unde: $v_{3 \text{ teoretic}}$ – deformația liniară (săgeata) calculată în 3, [mm]

F – forța aplicată în punctul 3, [N]

l – distanța dintre cele două reazeme simple (punctele 1 și 2), (Fig. 4.), [mm]

E – modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm²]

I_z – momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii, [mm⁴].

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

• **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se păstrează configurația reazemelor de la punctul 1a dar se deconectează traductoarele de forță cu care sunt prevăzute cele două reazeme (canalele 2 și 3);
2. Se poziționează cele două reazeme la distanța de 200 mm între ele;
3. Se așează grinda pe reazeme, astfel încât consolele acestora să fie egale;
4. Se poziționează comparatorul digital la distanța $l/2$ (100 mm față de oricare din cele două reazeme) și se blochează folosind piulița aferentă (din spatele panoului asamblat pe cadrul standului);
5. Se pornește comparatorul și se verifică indicația de „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
6. Se poziționează cârligul pentru greutate în dreptul acului comparatorului și se aplică greutatea de 500 g (4,9 N);
7. Valoarea afișată de comparatorul digital reprezintă săgeata pe direcția forței;
8. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 7;
9. Se repetă măsurătorile și pentru celelalte valori ale distanței l [mm], crescătoare din 50 mm în 50 mm, date în Tabelul 7;
10. Valorile experimentale și teoretice ale săgeții pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 7;
11. Se trasează Diagrama 4 de variație a valorilor analitice și experimentale ale săgeții în funcție de distanța dintre cele două reazeme.

- **Date de intrare**

Tabelul 6. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]	Dimensiunile grinzii [mm]	
		B	H		l	$l/2$
		Aluminiu				

- **Rezultate**

Tabelul 7. Rezultatele teoretice și experimentale pentru săgeata din punctul 3

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deschiderea grinzii l [mm]	l^3 [mm ³]	Săgeata în punctul 3 [mm]		Ab. rel. Δv_3 [%]
				v_3 teoretic	v_3 exp.	
500	4,9	200				
		250				
		300				
		350				
		400				

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val_{exp.} - |Val_{teoretică}|}{|Val_{exp.}|} \cdot 100$ [%]

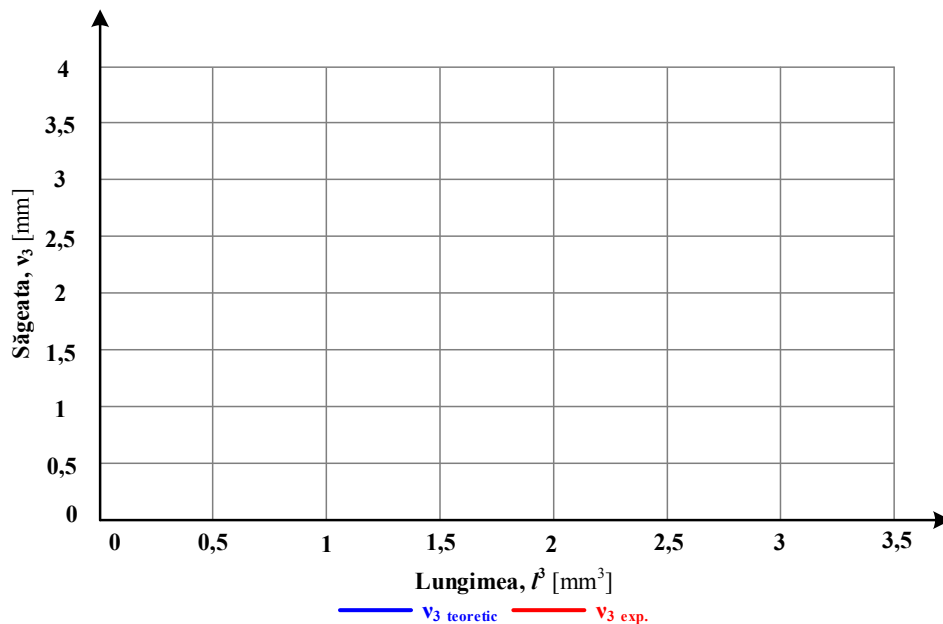


Diagrama 4. Variația săgeții în funcție de lungimea l^3

Experiment 2.1: Determinarea reacțiunilor din reazeme pentru o grindă dreaptă simplu static nedeterminată

În acest experiment se urmărește măsurarea reacțiunilor din reazeme pentru o grindă simplu static nedeterminată și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. Grinda are lungimea l [mm] și este încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt (Fig. 5.), numărul reacțiunilor introduse de cele două reazeme fiind patru (3 în încastrare și 1 în reazemul simplu, $r = 4$). Gradul de nedeterminare (n), obținut ca diferența între numărul necunoscutelor (r , reacțiunile din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan (s) este 1, rezultând o problemă simplu static nedeterminată.

Prima etapă în rezolvarea unei probleme static nedeterminată constă în calculul gradului de nedeterminare (n) pentru grinda (Fig. 6.a.), astfel:

$$n = r - s - \text{calculul gradului de nedeterminare} \quad (6)$$

$$r = 3 + 1 = 4 - \text{numărul necunoscutelor (reacțiunile din reazeme)} \quad (7)$$

$$s = 3 - \text{numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan (două ecuații de proiecții de forțe și o ecuație de moment)} \quad (8)$$

$$n = r - s = 1 \Rightarrow \text{grindă o dată static nedeterminată (în cazul dat)} \quad (9)$$

Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unor relații suplimentare legate de deplasările sistemului, obținute de regulă, utilizând metode energetice de calcul (teorema lui Castigliano, metoda Morh-Maxwell cu regula lui Vereșceaghin), sau cu ecuația celor trei momente a lui Clapeyron.

• Calculul analitic al reacțiunilor

Pentru calculul teoretic al reacțiunilor pentru grinda static nedeterminată se aplică ecuația celor trei momente a lui Clapeyron.

Grinda static nedeterminată (Fig. 6.a.), încastrată în 1 și simplu rezemată în 2, se transformă într-o grindă continuă (Fig. 6.b). Se prelungește fictiv grinda din 1 spre stânga cu lungimea l_0 ($l_0 = 0$), grinda 0 – 1 – 2 fiind echivalentă (prin două reazeme echivalente cu încastrarea – o articulație în 1 și un reazem simplu în 0).

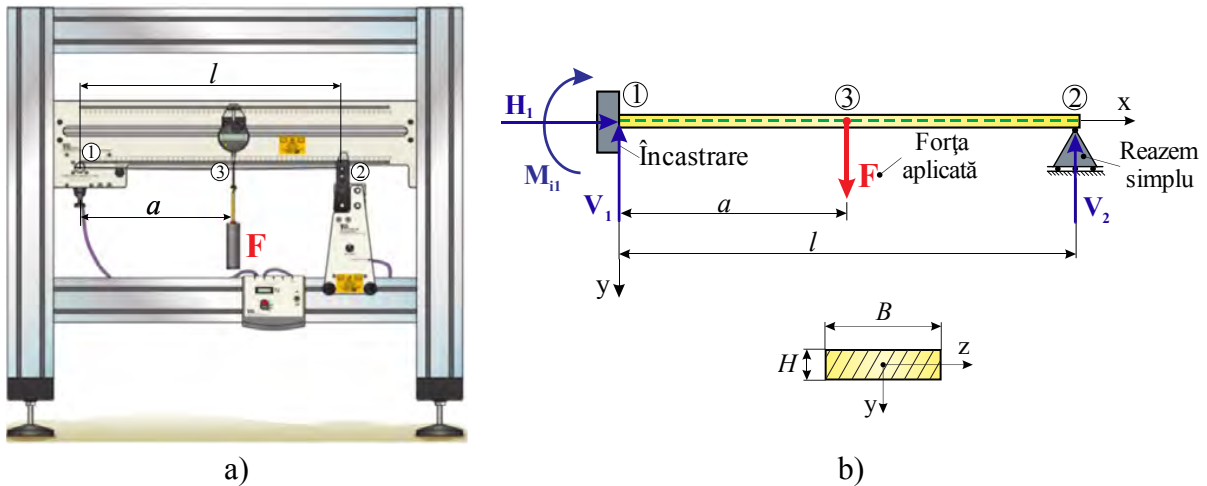


Fig. 5. Determinarea reacțiunilor pentru grinzi static nedeterminate: a) Standul experimental; b) Grinda încadrată în punctul 1 și simplu rezemată în punctul 2
 Cele două reazeme introduc 3 reacțiuni: în 1 există 2 reacțiuni (o forță verticală și o forță orizontală), în 0 există o reacțiune verticală, ca și în încadrare. Se construiește diagrama de momente încovoietoare pentru grinda static determinată 1 – 2 de lungime $l_1 = l$ [mm], cu momentul încovoietor maxim, M_{imax} , în dreptul forței F , cu valoarea:

$$M_{imax} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a)}{l} \quad (10)$$

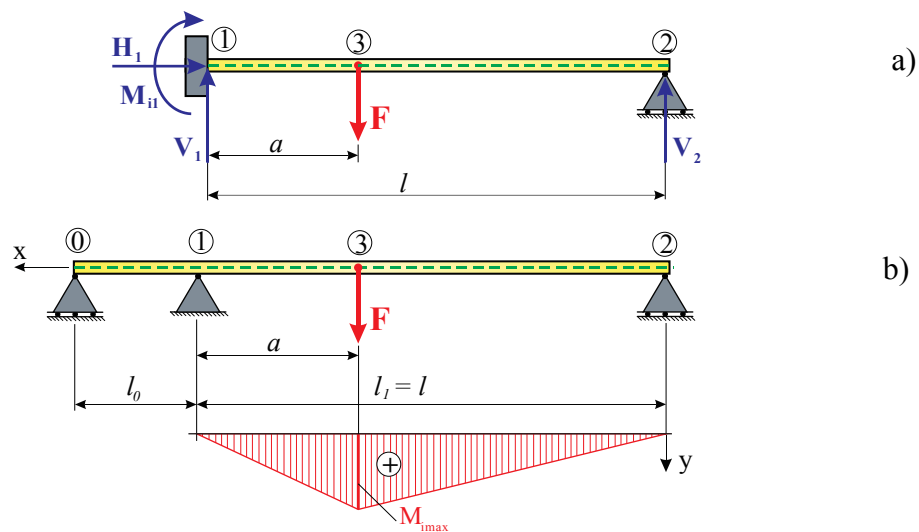


Fig. 6. Grinda static nedeterminată: a) Grinda reală; b) Grinda echivalentă. Diagrama de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 static determinată

Ecuția celor 3 momente a lui Clapeyron are expresia generală:

$$M_{i0} \cdot l_0 + 2 \cdot M_{i1} \cdot (l_0 + l_1) + M_{i2} \cdot l_1 + 6 \cdot \left(\frac{S_{01s}}{l_0} + \frac{S_{21s}}{l_1} \right) = 0 \quad (11)$$

unde: l_0, l_1 - distanțele dintre reazeme, [mm]

M_{i0}, M_{i1}, M_{i2} - momente încovoietoare în punctele 0, 1 și 2, [N·mm]

S_{01s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 1 până la punctul 0, în raport cu punctul 0 (primul indice), pentru grinda 0 – 1 static determinată, [mm³]

S_{21s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 1 până la punctul 2, în raport cu punctul 2 (primul indice), pentru grinda 1 – 2 static determinată, [mm³]

Pentru grinda static determinată se impun condițiile: $l_0 = 0$ (0 – 1 porțiune de grindă fictivă), $S_{01s} = 0$ (pe grinda 0 – 1 nu există încărcare, deci nu există diagramă de momente încovoietoare și nu există S_{01s}), $M_{i2} = 0$ pentru că reazemul 2 este un reazem simplu și nu are moment încovoietor ca reacțiune. Ecuația (11) devine:

$$2 \cdot M_{i1} \cdot l_1 + 6 \cdot \frac{S_{21s}}{l_1} = 0 \quad (12)$$

În ecuația (12) momentul static S_{21s} se determină ca produs dintre aria diagramei de momente încovoietoare (care este un triunghi, cu aria dată de primul termen din relația 13) și distanța de la centrul de greutate al diagramei de momente încovoietoare până la primul indice (2) (al doilea termen din relația 13):

$$S_{21s} = \left[\frac{l \cdot F \cdot a \cdot (l - a)}{l} \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{0 + l + (l - a)}{3} \right] \quad (13)$$

După calcule se obține:

$$S_{21s} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{6} \quad (14)$$

În expresia (12) se introduce expresia (14) rezultând relația teoretică de calcul a momentului încovoietor din punctul 1:

$$M_{i1} = - \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{2 \cdot l^2} \quad (15)$$

Cunoașterea expresiei analitice a momentului încovoietor M_{i1} face ca grinda inițială din Fig. 6.a). să devină static determinată.

Acum, reacțiunile din rezeme pentru grinda solicitată la încovoiere de forța F (Fig. 6.a).), se determină aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 = 0 \quad (16)$$

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; \quad V_1 + V_2 = F \quad (17)$$

$$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot a - M_{i1} = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{F \cdot a + M_{i1}}{l} \quad (18)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) + M_{i1} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{F \cdot (l - a) - M_{i1}}{l} \quad (19)$$

Expresia momentului încovoietor (15) se introduce în ecuațiile de momente încovoietoare (18) și (19), și se obțin relațiile teoretice de calcul pentru reacțiunile pe direcție verticală:

$$V_1 = \frac{F \cdot (l - a) \cdot (2 \cdot l^2 + 2 \cdot a \cdot l - a^2)}{2 \cdot l^3} \quad (20)$$

$$V_2 = \frac{F \cdot a^2 (3 \cdot l - a)}{2 \cdot l^3} \quad (21)$$

Ecuațiile (15), (20) și (21) permit calculul teoretic al reacțiunilor din rezeme pentru grinda static nedeterminată din Fig. 5. sau Fig. 6.a).

• **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează reazemul simplu (din punctul 2) la distanța l [mm] față de încastrare (din punctul 1) și se fixează cu ajutorul a două șuruburi;
2. Se conectează traductorul corespunzător încastrării la canalul 1 al afișajului digital al forței, iar cel din reazemul simplu, la canalul 2;
3. Se verifică indicația „zero” a canalului 1 și, respectiv canalului 2. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*);
4. Se încarcă, succesiv, grinda cu greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, la distanța a măsurată față de încastrare;
5. Rezultatele experimentale se citesc astfel:
 - canalul 1 indică valoarea forței F_1 . Valoarea momentului încovoietor din încastrare M_{i1} [N·m] se determină ca produs dintre forța citită F_1 și bratul forței, b_{F1} ;
 - canalul 2 indică valoarea reacțiunii pe verticală, V_2 [N];
6. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 9;
7. În partea a doua a experimentului, se încarcă grinda cu greutatea de 500 g la distanța $a = 80$ mm măsurată față de încastrare;
8. Rezultatele experimentale se citesc astfel:
 - valoarea momentului încovoietor din încastrare M_{i1} [N·m] se determină ca produs dintre forța citită F_1 [N] de pe canalul 1, și bratul forței, b_{F1} ;
 - canalul 2 indică valoarea reacțiunii pe verticală, V_2 [N];
9. Se repetă pasul 8 pentru celelalte valori ale distanței a [mm], crescătoare din 40 mm în 40 mm din Tabelul 10;
10. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 10;
11. Se trasează patru diagrame astfel:
 - Diagrama 5 de variație a valorilor analitice și experimentale ale momentului încovoietor, M_{i1} în funcție forța aplicată, F
 - Diagrama 6 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunii verticale V_2 în funcție de forța aplicată, F
 - Diagrama 7 de variație a valorilor analitice și experimentale ale momentului încovoietor, M_{i1} în funcție de distanța variabilă a [mm]
 - Diagrama 8 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunii verticale V_2 în funcție de distanța variabilă a [mm].

• **Date de intrare**

Tabelul 8. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					

• Rezultate

Tabelul 9. Rezultate teoretice și experimentale pentru reacțiunile din reazeme

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța a [mm]	Reacțiuni [N]					
			M_{i1} teoretic	M_{i1} exp.	Ab.rel. ΔM_{i1} [%]	V_2 teoretic	V_2 exp.	Ab.rel. ΔV_2 [%]
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,90							

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 10. Rezultate teoretice și experimentale pentru reacțiunile din reazeme

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța a [mm]	Forța afișată pe canalul 1 F ₁ [N]	Momentul încovoietor din punctul 1 [N·m]		Reacțiunea din punctul 2 [N]	
				M_{i1} teoretic	M_{i1} exp.	V_2 teoretic	V_2 exp.
500	4,9	80					
		120					
		160					
		200					
		240					
		280					
		320					
		360					

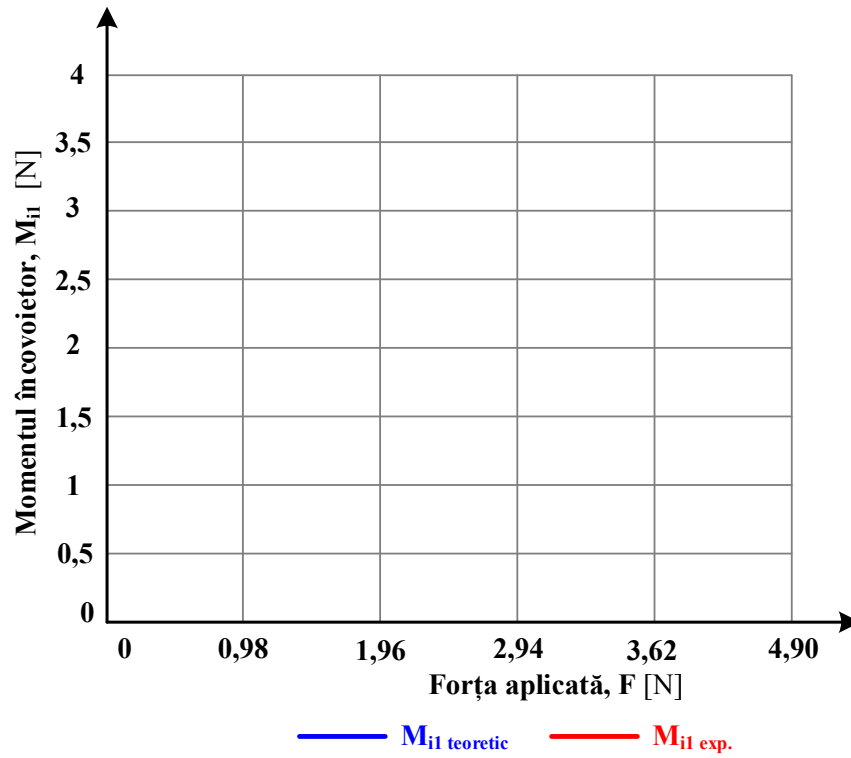


Diagrama 5. Variația momentului încovoietor în funcție forța aplicată F [N]

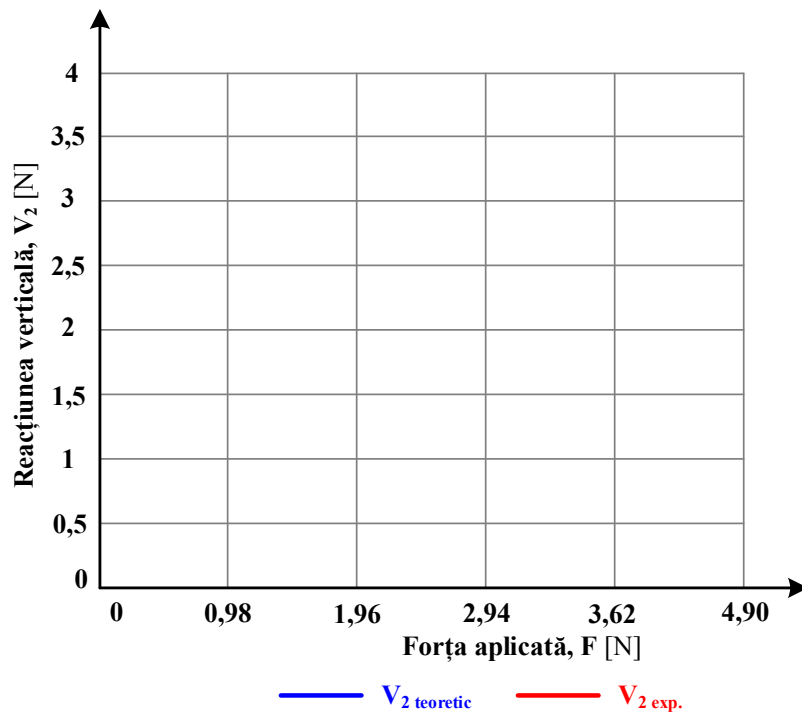


Diagrama 6. Variația reacțiunii verticale în funcție forța aplicată F [N]

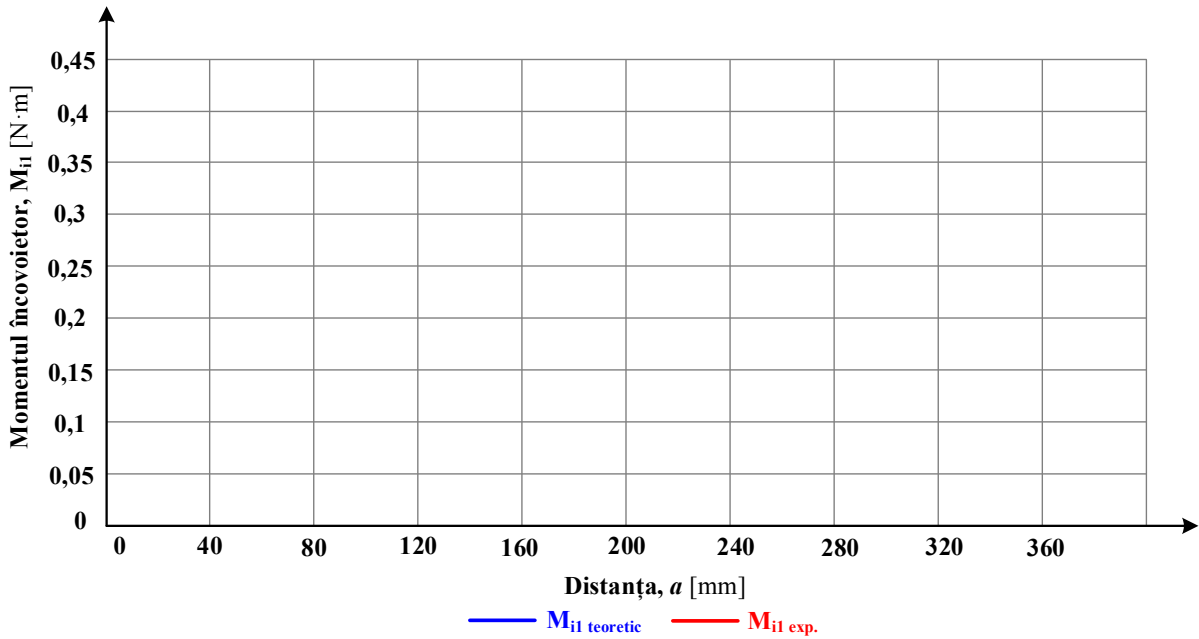


Diagrama 7. Variația momentului încovoietor în funcție de distanța variabilă a [mm]

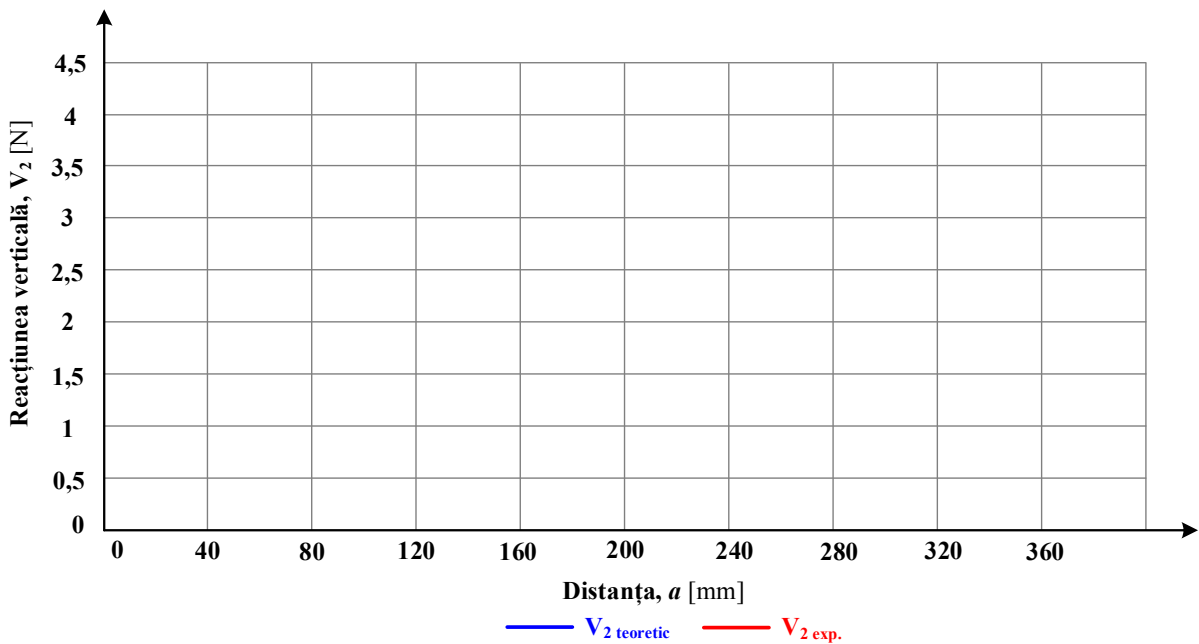


Diagrama 8. Variația reacțiunii verticale în funcție de distanța variabilă a [mm]

Experiment 2.2: Determinarea reacțiunilor din reazeme pentru o grindă dreaptă static nedeterminată – încastrată la ambele capete

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a reacțiunilor din reazeme pentru o grindă static nedeterminată dublu încastrată și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. Grinda are lungimea l [mm] și este încastrată în ambele capete (Fig. 7.), numărul reacțiunilor introduse de cele două reazeme fiind șase ($r = 6$). Gradul de nedeterminare (n), obținut ca diferența între numărul necunoscutelor (reacțiunilor din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru static, este trei.

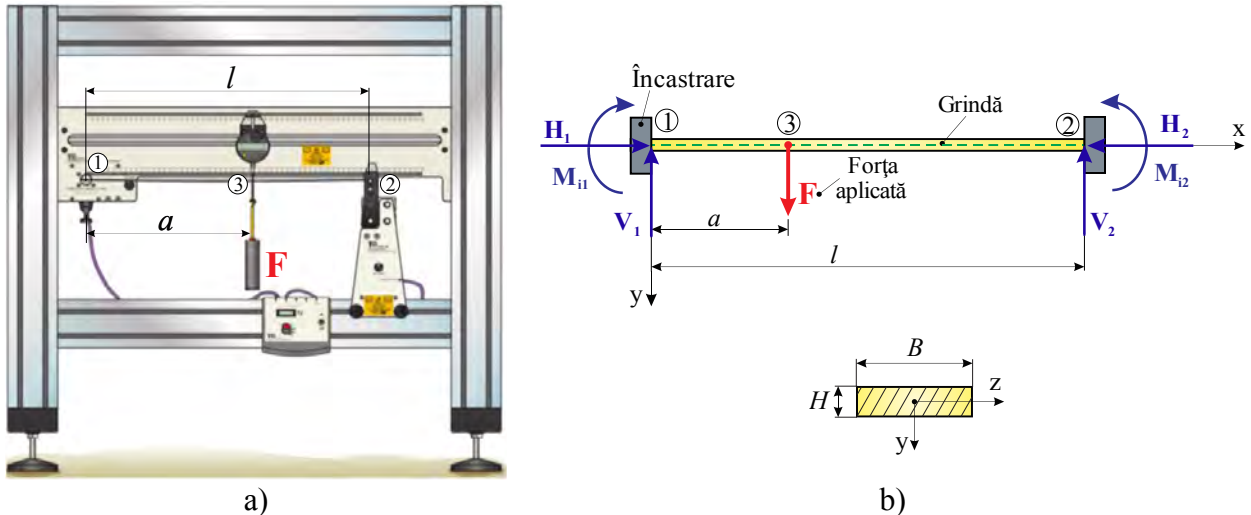


Fig. 7. Determinarea reacțiilor pentru grinzi static nedeterminate: a) Stand experimental; b) Grinda dublu încastrată

Prima etapă în aplicarea acestei metode constă în calculul gradului de nedeterminare (n) pentru grinda (Fig. 8.a.), astfel:

$$n = r - s - \text{calculul gradului de nedeterminare} \quad (22)$$

$$r = 3 + 3 = 6 - \text{numărul necunoscutelor (reacțiunile din reazme)} \quad (23)$$

$$s = 3 - \text{numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan} \quad (24)$$

$$n = r - s = 3 - \text{grindă de trei ori static nedeterminată} \quad (25)$$

Reacțiunile orizontale nu se pot calcula, deci se renunță la reacțiunile orizontale din cele două încastrări, de unde rezultă $r = 2 + 2 = 4$. Se renunță și la ecuația pe orizontală din statică, deci $s = 2$, iar gradul de nedeterminare devine $n = 4 - 2 = 2$.

Grinda dublu încastrată este dublu static nedeterminată.

Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unor relații suplimentare legate de deplasările sistemului, obținute de regulă utilizând metode energetice de calcul (teorema lui Castigliano, metoda Morh-Maxwell cu formula lui Vereșceaghin), sau cu ecuația celor trei momente a lui Clapeyron.

• Calculul analitic al reacțiilor

Pentru calculul teoretic al reacțiilor pentru grinda static nedeterminată se aplică ecuația celor trei momente a lui Clapeyron.

Grinda static nedeterminată (Fig. 8.a.), încastrată în ambele capete, se transformă într-o grindă continuă (Fig. 8.b.). Se prelungește fictiv grinda din 1 spre stânga cu lungimea l_0 , respectiv din 2 spre dreapta cu lungimea l_2 , grinda 0 – 1 – 2 – 3 fiind echivalentă (prin două reazeme echivalente cu încastrările – două articulații în 1 și 3, respectiv două reazeme simple în 0 și 2). Se construiește diagrama de momente încovoietoare pentru grinda static determinată 1 – 2 de lungime $l_1 = l$ [mm], din care rezultă momentul de încovoiere maxim, $M_{i\max}$, în dreptul forței F , cu valoarea:

$$M_{i\max} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a)}{l} \quad (26)$$

Ecuația celor 3 momente a lui Clapeyron se scrie de două ori succesiv pentru două deschideri ale grinzii – pentru grinda 0 – 1 – 2, iar apoi pentru grinda 1 – 2 – 3, având expresiile:

$$M_{i0} \cdot l_0 + 2 \cdot M_{i1} \cdot (l_0 + l_1) + M_{i2} \cdot l_1 + 6 \cdot \left(\frac{S_{01s}}{l_0} + \frac{S_{21s}}{l_1} \right) = 0 \quad (27)$$

$$M_{i0} \cdot l_0 + 2 \cdot M_{i1} \cdot (l_0 + l_1) + M_{i2} \cdot l_1 + 6 \cdot \left(\frac{S_{01s}}{l_0} + \frac{S_{21s}}{l_1} \right) = 0 \quad (28)$$

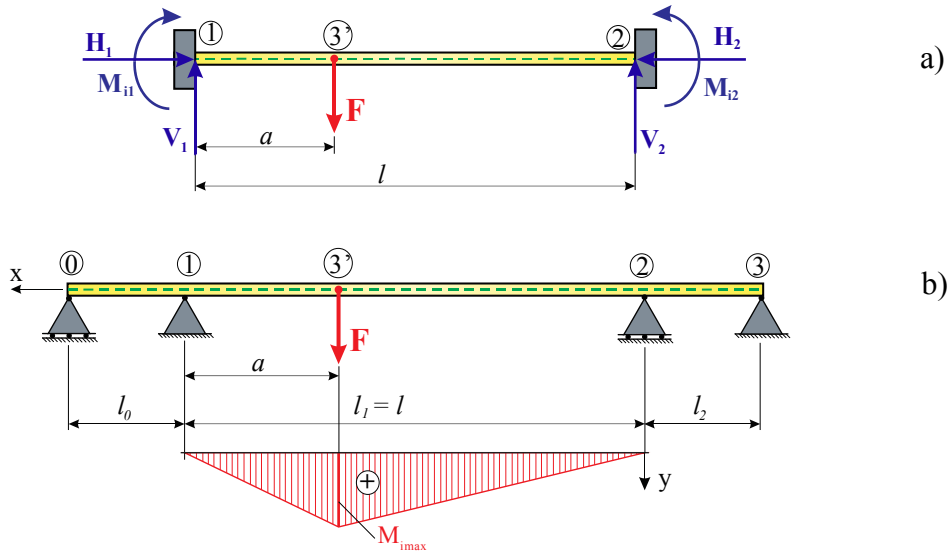


Fig. 8. Grinda static nedeterminată: a) Grinda reală;
b) Grinda echivalentă. Diagrama de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 static determinată

unde: l_0, l_1, l_2 - distanțele dintre reazeme, [mm]

$M_{i0}, M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}$ - momente încovoietoare în punctele 0, 1, 2 și 3, [N·mm]

S_{01s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 1 până la punctul 0, în raport cu punctul 0 (primul indice), pentru grinda 0 – 1 static determinată, [mm³]

S_{21s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 1 până la punctul 2, în raport cu punctul 2 (primul indice), pentru grinda 1 – 2 static determinată, [mm³]

S_{12s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 2 până la punctul 1, în raport cu punctul 1 (primul indice), pentru grinda 1 – 2 static determinată, [mm³]

S_{32s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 2 până la punctul 3, în raport cu punctul 3 (primul indice), pentru grinda 2 – 3 static determinată, [mm³]

Pentru grinda continuă se impun condițiile: $l_0 = 0, l_2 = 0$ (0 – 1, respectiv 2 – 3 sunt grinzi fictive), $S_{01s} = 0, S_{32s} = 0$ (pe grinzile 0 – 1 și 2 – 3 nu există încărcare, deci nu există diagrame de momente încovoietoare și nu există S_{01s} , respectiv S_{32s}). Ecuațiile (27) și (28) devin:

$$2 \cdot M_{i1} \cdot l_1 + M_{i2} \cdot l_2 + 6 \cdot \frac{S_{21s}}{l_1} = 0 \quad (29)$$

$$M_{i1} \cdot l_1 + 2 \cdot M_{i2} \cdot l_1 + 6 \cdot \frac{S_{12s}}{l_1} = 0 \quad (30)$$

În ecuațiile (29) și (30) momentele statice S_{21s} și S_{12s} se determină ca produs dintre aria diagramei de momente încovoietoare (care este un triunghi cu aria dată de primul termen din relațiile (31) și (32) și distanța de la centrul de greutate al diagramei de momente încovoietoare până la primul indice (2) (al doilea termen din relațiile (31) și (32):

$$S_{21s} = \left[\frac{l \cdot F \cdot a \cdot (l - a)}{l} \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{0 + l + (l - a)}{3} \right] \quad (31)$$

$$S_{12s} = \left[\frac{l \cdot F \cdot a \cdot (l - a)}{l} \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{0 + l + (l - a)}{3} \right] \quad (32)$$

După calcule se obține:

$$S_{21s} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{6} \quad (33)$$

$$S_{12s} = \frac{F \cdot a \cdot (l - a) \cdot (2l - a)}{6} \quad (34)$$

În expresiile (29) și (30) se introduc expresiile (33) și (34) rezultând relațiile teoretice de calcul ale momentelor încovoietoare din punctele 1 și 2:

$$M_{i1} = -\frac{F \cdot a \cdot (l - a)^2}{l^2} \quad (35)$$

$$M_{i2} = -\frac{F \cdot a^2 \cdot (l - a)}{l^2} \quad (36)$$

Cunoașterea expresiilor analitice ale momentelor încovoietoare M_{i1} și M_{i2} fac ca grinda inițială din Fig. 8.a) să devină static determinată.

Acum, reacțiunile în rezeme pentru grinda solicitată la încovoiere de forța F (Fig. 8.a)), se determină aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 \quad (\text{nu se pot calcula}) \quad (37)$$

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; \quad V_1 + V_2 = F \quad (38)$$

$$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot a - M_{i1} + M_{i2} = 0; \quad V_2 = \frac{F \cdot a + M_{i1} - M_{i2}}{l} \quad (39)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) + M_{i1} - M_{i2} = 0; \quad (40)$$

$$V_1 = \frac{F \cdot (l - a) - M_{i1} + M_{i2}}{l}$$

Expresiile momentelor încovoietoare (35), (36) se introduc în ecuațiile de momente (39) și (40) și se obțin relațiile teoretice de calcul pentru reacțiunile pe direcție verticală:

$$V_1 = \frac{F \cdot (l - a)^2 \cdot (2 \cdot a + l)}{l^3} \quad (41)$$

$$V_2 = \frac{F \cdot a^2 \cdot (3 \cdot l - 2 \cdot a)}{l^3} \quad (42)$$

Ecuațiile (35), (36), (41) și (42) permit calculul teoretic al reacțiunilor din rezeme pentru grinda static nedeterminată din Fig. 7. sau Fig. 8.a).

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează reazemul încastrat (din punctul 2) la distanța l [mm] față de reazemul încastrat (din punctul 1) și se fixează cu ajutorul a două șuruburi;
2. Se conectează traductorul corespunzător încastrării din 1 la canalul 1, iar cel din 2 la canalul 2 al afișajului digital al forței;
3. Se verifică indicația „zero” a canalului 1 și, respectiv canalului 2. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențioanelor de reglare (*SET ZERO*);
4. Se încarcă, succesiv, grinda cu greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, la distanța a măsurată față de încastrare;
5. Rezultatele experimentale se citesc astfel:
 - valoarea momentului de încovoiere, M_{i1} [N·m], din încastrarea corespunzătoare punctului 1 se determină ca produs dintre forța citită F_1 [N] de pe canalul 1 și brațul forței, b_{F1} [m];
 - valoarea reacțiunii pe verticală, V_2 [N], din încastrarea corespunzătoare punctului 2, este forța indicată de canalul 2.

6. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelele 13 și 14;
7. Se trasează două diagrame astfel:
- Diagrama 9 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunii verticale V_2 în funcție de forța aplicată F [N];
 - Diagrama 10 de variație a valorilor analitice și experimentale ale momentului de încovoiere, M_{i1} în funcție de forța aplicată F [N].

• **Date de intrare**

Tabelul 11. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală, E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]	Dimensiunea grinzii l [mm]
		B	H		
Aluminiu					

• **Rezultate**

Tabelul 12. Rezultatele teoretice și experimentale pentru reacțiunile verticale

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța a [mm]	Reacțiuni [N]			
			V_1 teoretic	V_2 teoretic	V_2 exp.	Ab. rel. ΔV_2 [%]
100	0,98					
200	1,96					
300	2,94					
400	3,92					
500	4,90					

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 13. Rezultatele teoretice și experimentale pentru momentele încovoietoare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Distanța a [mm]	Reacțiuni [N]			
			M_{i1} teoretic	M_{i1} exp.	Ab.rel. ΔM_{i1} [%]	M_{i2} teoretic
100	0,98					
200	1,96					
300	2,94					
400	3,92					
500	4,90					

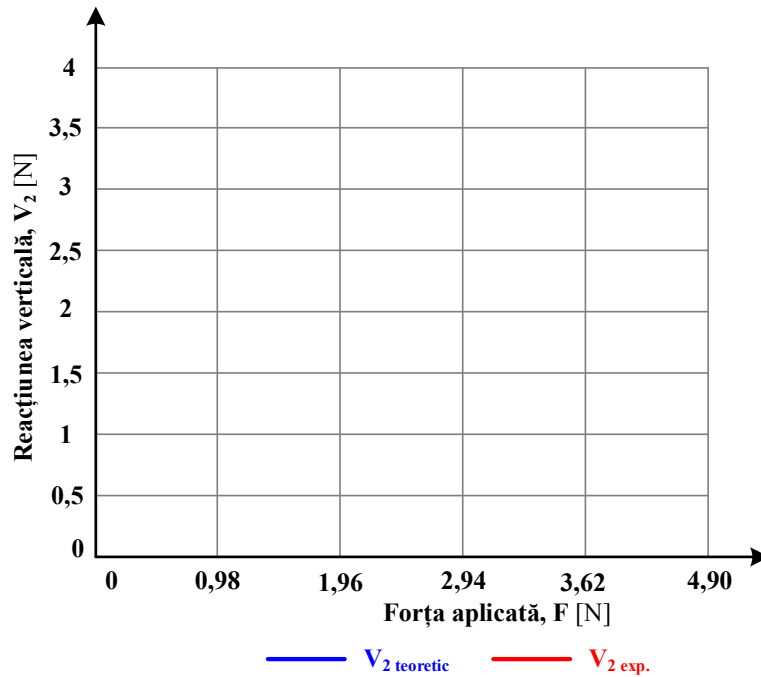


Diagrama 9. Variația reacțiunii verticale în funcție de forța aplicată F [N]

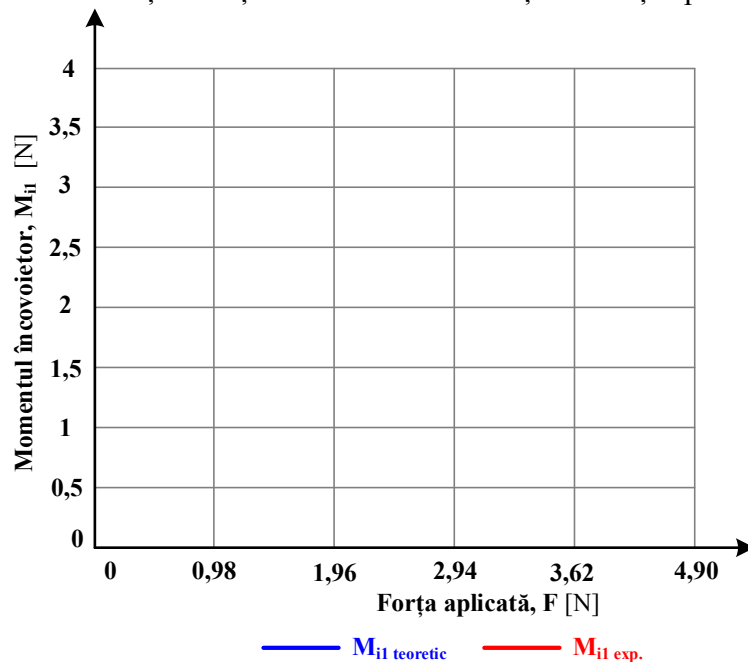


Diagrama 10. Variația momentului încovoietor în funcție de forța aplicată F [N]

Experiment 2.3: Grindă continuă simplu static nedeterminată

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a reacțiilor din reazeme, pentru o grindă continuă simplu static nedeterminată cu trei reazeme (o articulație în punctul 1 și două reazeme simple în 2 și 3) și compararea valorilor măsurate cu cele obținute din calcule analitice. Grinda are lungimea l [mm], numărul reacțiunilor introduse de cele trei reazeme fiind patru ($r = 4$). Gradul de nedeterminare (n), obținut ca diferența între numărul necunoscutelor (reacțiunilor din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan, este unu (reacțiunea orizontală fiind nulă). Pentru grinda din Fig. 9. se calculează gradul de nedeterminare (n), astfel:

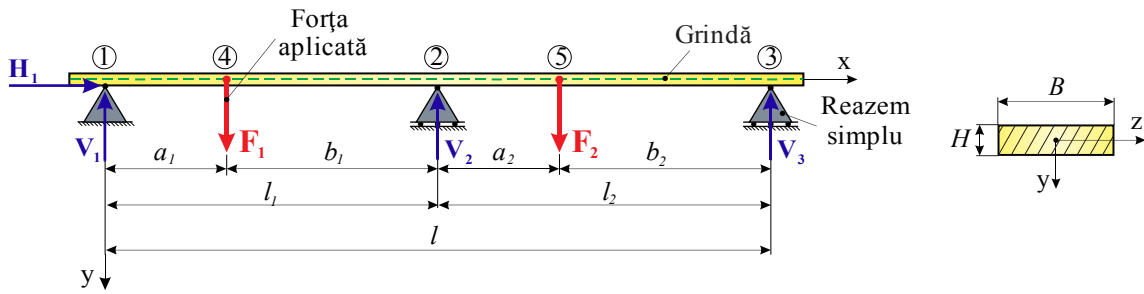


Fig. 9. Determinarea reacțiilor pentru o grindă continuă static nedeterminată

$$n = r - s - \text{gradul de nedeterminare} \quad (43)$$

$$r = 2 + 2 = 4 - \text{numărul necunoscutelor (reacțiunile din reazme)} \quad (44)$$

$$s = 3 - \text{numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan} \quad (45)$$

$$n = r - s = 4 - 3 = 1 \quad (46)$$

Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unei relații suplimentare legată de deplasările sistemului, obținută de regulă, utilizând metode energetice de calcul (teorema lui Castigliano, Mohr – Maxwell, Veresceaghin), sau cu ecuația celor trei momente a lui Clapeyron.

• Calculul analitic al reacțiilor

Pentru calculul teoretic al reacțiilor pentru grinda continuă simplu static nedeterminată se scrie ecuația celor trei momente a lui Clapeyron – o singură dată, grinda având gradul de nedeterminare „1” ($n = 1$), respectiv două reacțiuni în articulația 1 și câte o reacțiune în reazemele simple 2 și 3.

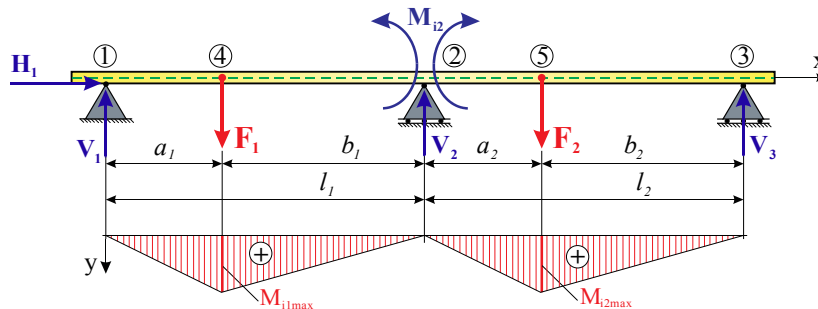


Fig. 10. Diagramele de momente încovoietoare pentru grinda continuă, considerată pe cele două porțiuni, ca fiind static determinată

Grinda continuă simplu static nedeterminată (Fig. 10.), se împarte în două porțiuni de grindă static determinată – porțiunea de grindă 1 – 2 de lungime l_1 , pe care este aplicată forța concentrată F_1 la distanța a_1 față de punctul 1, respectiv, porțiunea de grindă 2 – 3 de lungime l_2 [mm] pe care este aplicată forța concentrată F_2 la distanța b_2 față de punctul 3. Ecuația celor 3 momente a lui Clapeyron se scrie o singură dată pentru grinda 1 – 2 – 3, având expresia:

$$M_{i1} \cdot l_1 + 2 \cdot M_{i2} \cdot (l_1 + l_2) + M_{i3} \cdot l_2 + 6 \cdot \left(\frac{S_{12s}}{l_1} + \frac{S_{32s}}{l_2} \right) = 0 \quad (47)$$

unde: l_1, l_2 - distanțele dintre reazeme, [mm]

M_{i1}, M_{i2}, M_{i3} - momente încovoietoare în punctele 1, 2 și 3, [N·mm]

S_{12s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 1 până la punctul 2, în raport cu punctul 1 (primul indice), pentru grinda 1 – 2 static determinată, [mm³]

S_{32s} – momentul static al diagramei de momente încovoietoare de la punctul 2 până la punctul 3, în raport cu punctul 3 (primul indice), pentru grinda 2 – 3 static determinată, [mm³]

Se construiesc diagramele de momente încovoietoare pentru grinzile static determinate 1 – 2, respectiv 2 – 3, din care rezultă momentele de încovoiere maxime, $M_{i1 \max}$, $M_{i2 \max}$ în dreptul forțelor F_1 și F_2 , cu expresiile:

$$M_{i1 \max} = \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1}{l_1} \quad (48)$$

$$M_{i2 \max} = \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2}{l_2} \quad (49)$$

Pentru grinda continuă se impun condițiile pe reazeme: $M_{i1} = 0$, $M_{i2} = 0$ pentru că reazemul 1 este articulată și nu preia moment încovoiător, iar reazemul 2 este simplu și nici el nu preia moment încovoiător ca reacțiune. Ecuația (26) devine:

$$2 \cdot M_{i2} \cdot (l_1 + l_2) + 6 \cdot \left(\frac{S_{12s}}{l_1} + \frac{S_{32s}}{l_2} \right) = 0 \quad (50)$$

În ecuația (50) momentele statice S_{12s} și S_{32s} se determină ca produs dintre aria diagramei de momente încovoietoare (care este un triunghi cu aria dată de primul termen din relațiile 51 și 52) și distanța de la centrul de greutate al diagramei de momente încovoietoare până la primul indice din notația S_{12s} și S_{32s} (al doilea termen din relațiile 51 și 52):

$$S_{12s} = \left[l_1 \cdot \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1}{l_1} \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{0 + l_1 + a_1}{3} \right] \quad (51)$$

$$S_{32s} = \left[l_2 \cdot \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2}{l_2} \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{0 + l_2 + b_2}{3} \right] \quad (52)$$

După calcule se obține:

$$S_{12s} = \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (l_1 + a_1)}{6} \quad (53)$$

$$S_{32s} = \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot (l_2 + b_2)}{6} \quad (54)$$

În expresia (50) se introduc expresiile (53) și (54) rezultând relația teoretică de calcul pentru momentul încovoiător din punctul 2:

$$M_{i2} = - \frac{F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (l_1 + a_1)}{2 \cdot l_1 \cdot (l_1 + l_2)} - \frac{F_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot (l_2 + b_2)}{2 \cdot l_2 \cdot (l_1 + l_2)} \quad (55)$$

Pentru calculul reacțiunii V_1 se scrie ecuația de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 în raport cu punctul 2 ținând cont și de momentul încovoiător M_{i2} din reazemul 2, calculat cu (55):

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l_1 - F_1 \cdot b_1 - M_{i2} = 0 \quad (56)$$

de unde rezultă V_1 :

$$V_1 = \frac{F_1 \cdot b_1 + M_{i2}}{l_1} \quad (57)$$

Pentru calculul reacțiunii V_2 se scrie ecuația de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 – 3 în raport cu punctul 3 (în care M_{i2} nu mai intră direct, ci prin intermediul lui V_1 care s-a calculat în funcție de M_{i2}):

$$\sum M_3 = 0; V_1 \cdot (l_1 + l_2) + V_2 \cdot l_2 - F_1 \cdot (l_2 + b_1) - F_2 \cdot b_2 = 0 \quad (58)$$

de unde rezultă V_2 :

$$V_2 = \frac{F_1 \cdot (l_2 + b_1) + F_2 \cdot b_2 - V_1 \cdot (l_1 + l_2)}{l_2} \quad (59)$$

În expresia (59) se introduce ecuația (57) și expresia reacțiunii V_2 devine:

$$V_2 = \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot (F_1 \cdot l_1 \cdot l_2 + F_2 \cdot b_2 \cdot l_1 - F_1 \cdot b_1 \cdot l_2 - M_{i2} \cdot l_1 - M_{i2} \cdot l_2) \quad (60)$$

Pentru calculul reacțiunii V_3 se scrie ecuația de momente încovoietoare pentru grinda 1 – 2 – 3 în raport cu punctul 1 (în care M_{i2} nu mai intră direct, ci prin intermediul lui V_1 și V_2 care s-au calculat în funcție de M_{i2}):

$$\sum M_1 = 0; V_3 \cdot (l_1 + l_2) + V_2 \cdot l_1 - F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot (a_2 + l_1) = 0 \quad (61)$$

de unde rezultă V_3 :

$$V_3 = \frac{F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot (a_2 + l_1) - V_2 \cdot l_1}{(l_1 + l_2)} \quad (62)$$

În expresia (62) se introduce ecuația (60) și expresia reacțiunii V_3 devine:

$$V_3 = \frac{1}{(l_1 + l_2)} \cdot \left[-\frac{1}{l_2} \cdot (F_1 \cdot l_1 \cdot l_2 + F_2 \cdot b_2 \cdot l_1 - F_1 \cdot b_1 \cdot l_2 - M_{i2} \cdot l_1 - M_{i2} \cdot l_2) + F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot (a_2 + l_1) \right] \quad (63)$$

După calcule, expresia (63) devine:

$$V_3 = \frac{1}{l_2 \cdot (l_1 + l_2)} \cdot [-F_1 \cdot l_1 \cdot l_2 - F_2 \cdot b_2 \cdot l_1 + F_1 \cdot b_1 \cdot l_2 + M_{i2} \cdot l_1 + M_{i2} \cdot l_2 + F_1 \cdot a_1 \cdot l_2 + F_2 \cdot l_2 \cdot (a_2 + l_1)] \quad (64)$$

Ecuațiile (57), (60), și (64) permit calculul analitic (teoretic) al reacțiunilor din rezeme pentru grinda continuă simplu static nedeterminată din Fig. 10.

Pentru verificarea corectitudinii expresiilor pentru reacțiunile V_1 , V_2 , V_3 , se poate utiliza ecuația de proiecție de forțe pe direcție verticală:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 + V_3 - F_1 - F_2 = 0 \quad (65)$$

sau:

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 + V_3 = F_1 + F_2 \quad (66)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se poziționează reazemele simple în punctul 1, în punctul 2, respectiv, în punctul 3, obținându-se distanțele l_1 și l_2 în reazeme și se fixează cu ajutorul șuruburilor;
2. Se conectează traductorii afișajului digital aferenți reazemelor astfel: din reazemul 2 la canalul 2, iar din reazemul 3 la canalul 3;
3. Se poziționează grinda pe cele trei reazeme astfel încât să existe contact între reazeme și grinda studiată;
4. Se verifică indicația „zero” a canalului 2, și respectiv canalului 3. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențioanelor de reglare (*SET ZERO*);
5. Se încarcă, succesiv, grinda cu greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, la distanțele a_1 , a_2 , b_1 și, respectiv, b_2 specificate în Tabelul 14;
6. Valorile experimentale ale celor două reacțiuni verticale (V_2 și V_3) se citesc de pe afișajul digital, selectând succesiv canalele 2 și 3, aferente reazemelor din punctele 2 și 3;
7. Valorile experimentale și teoretice ale reacțiunilor pentru grinda cu lungimea l [mm] se trec în Tabelul 15;
8. Se trasează Diagrama 11 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunilor verticale V_2 și V_3 .

- Date de intrare

Tabelul 14. Caracteristici geometrice și de material pentru grindă

Materialul grinzii	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale		Momentul de inerție axial I _z [mm ⁴]	Dimensiunile grinzii [mm]			
		[mm]			a ₁	a ₂	b ₁	b ₂
		B	H					
Aluminiu								

- Rezultate

Tabelul 15. Rezultatele teoretice și experimentale pentru reacțiunile verticale din reazeme

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Reacțiuni [N]					
		V ₂ teoretic	V ₂ exp.	Ab. rel. ΔV ₂ [%]	V ₃ teoretic	V ₃ exp.	Ab. rel. ΔV ₃ [%]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90						

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

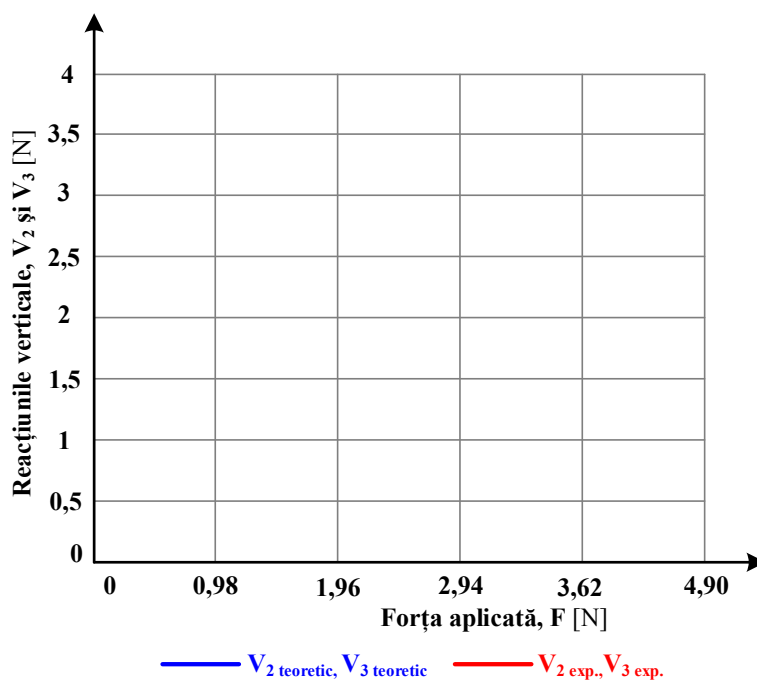


Diagrama 11. Variația reacțiunilor verticale în funcție de forța aplicată

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program care permite reproducerea virtuală a experimentelor. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

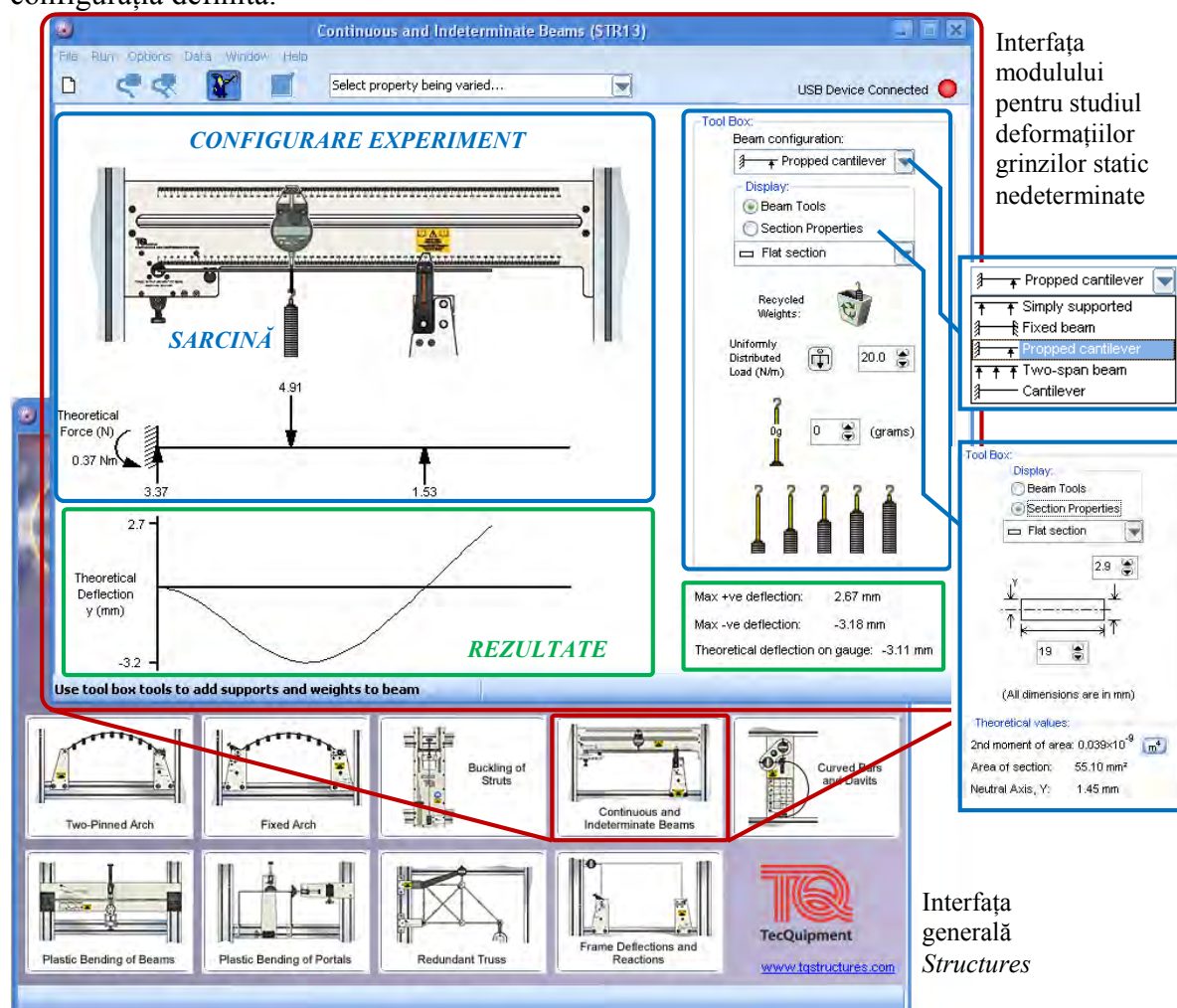


Fig.11. Modulul *TQ Structures – Continuous and Indeterminate Beams* pentru studiul deformațiilor grinzilor static nedeterminate

Modulul pentru determinarea valorilor reacțiunilor și ale deformațiilor grinzilor static nedeterminate (*Continuous and Indeterminate Beams*) solicitate la încovoiere, este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a determinărilor prin alegerea tipului de reazemare și a deschiderii între reazeme. Totodată, se definește forma secțiunii transversale și se adaugă sarcini pe structura virtuală. În **ZONELE PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR** programul afișează grinda în starea deformată și indică, pentru sarcina dată, valoarea săgeții grinzii în dreptul comparatorului digital, precum și valorile reacțiunilor din reazeme.



LE8. Studiul grinzilor drepte static nedeterminate

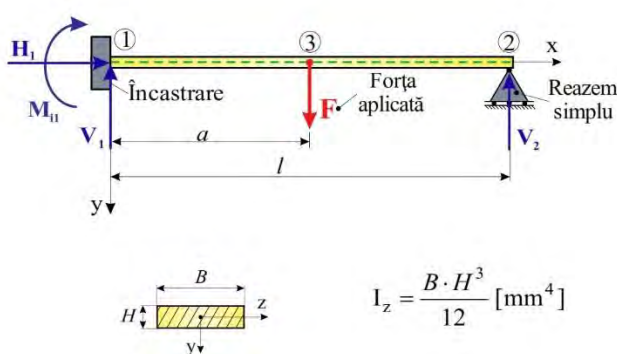
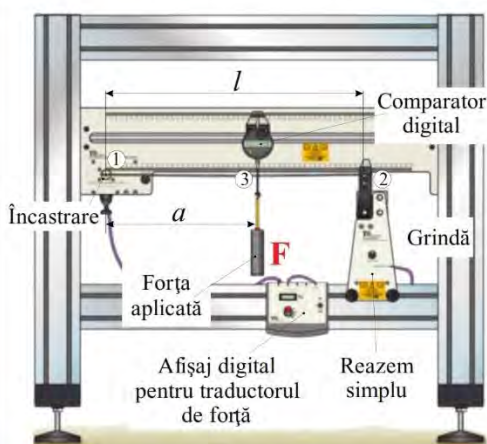
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a reacțiilor din reazeme, respectiv a săgeții pentru o grindă static nedeterminată solicitată la încovoiere și compararea acestora cu relații teoretice (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

O grindă devine *static nedeterminată* dacă i se anulează mai multe grade de libertate, iar eforturile din secțiunile transversale nu pot fi calculate cu relațiile analitice din mecanica statică. Gradul de nedeterminare a grinzii (n) este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor (r) și numărul ecuațiilor de echilibru statice (s). Grinzile nedeterminate se pot rezolva utilizând, alături de relațiile statice, ecuațiile de deformații sau ecuații bazate pe teoremele energiei potențiale de deformare.

• Experiment — Grindă încastrată și simplu rezemată



▪ Calculul analitic (teoretic) al reacțiilor:

Se cunosc dimensiunile l, a, c, B, H și b_{F1} .

$$M_{11 \text{ teoretic}} = -\frac{F \cdot a \cdot (l-a) \cdot (2l-a)}{2 \cdot l^2}$$

$$V_{1 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot (l-a) \cdot (2 \cdot l^2 + 2 \cdot a \cdot l - a^2)}{2 \cdot l^3}$$

$$V_{2 \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot a^2 \cdot (3 \cdot l - a)}{2 \cdot l^3}$$

▪ Reacțiuni experimentale:

• $V_{2 \text{ exp}}$ se indică pe canalul 2 al afișajului digital.

• $M_{11 \text{ exp}} = F_1 \cdot b_{F1}$

unde: F_1 - forța indicată pe canalul 1 al afișajului digital;
 b_{F1} - brațul forței F_1 .

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val}_{\text{exp.}}| - |\text{Val}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m	Forța aplicată F	Reacțiuni							Săgeata	
		$V_{1 \text{ teoretic}}$	$V_{2 \text{ teoretic}}$	$V_{2 \text{ exp.}}$	Ab.rel. ΔV_2	$M_{11 \text{ teoretic}}$	$M_{11 \text{ exp.}}$	Ab.rel. ΔM_{11}	v_{teoretic}	$v_{\text{exp.}}$
[g]	[N]	[N]	[N]	[N]	[%]	[N·m]	[N·m]	[%]	[mm]	[mm]
100	0,98									
200	1,96									
300	2,94									
400	3,92									
500	4,90									

LE 9. STUDIUL CADRELOR PLANE STATIC NEDETERMINATE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv măsurarea experimentală a reacțiunilor și a deplasării (săgeții) pe direcție orizontală a unui cadru plan static nedeterminat (dublu încastrat). Rezultatele determinărilor experimentale se vor compara cu rezultatele calculelor analitice (obținute cu relațiile teoretice).

INTRODUCERE

Un cadru plan devine static nedeterminat dacă numărul necunoscutelor (reacțiuni) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan.

Pentru ridicarea nedeterminării este necesar să fie impuse condiții suplimentare. Acestea se referă la modul în care se poate deforma sistemul, ținând cont de efectul legăturilor la care este supus. Astfel, se impune ca deplasările sau rotirile produse în reazeme să fie nule.

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1 este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea reacțiunilor și a deformației unui cadru plan static nedeterminat:

- **Cadrul plan** este o structură de secțiune dreptunghiulară care este încastrată la ambele capete și care prezintă niște **marcaje** sub forma unor creștături foarte fine care facilitează amplasarea sarcinii în poziții dorite;
- **Cârligul** este un element ce se interpune între cadrul studiat și talerul cu greutate care îl solicită, contactul fiind asigurat de-a lungul unei muchii prismatice. Orificiul pentru talerul cu greutate este poziționat astfel încât să asigure alinierea pe direcție verticală, între axul talerului și centrul geometric al secțiunii, pentru a evita torsionarea structurii;
- **Traductorul de forță** este elementul de conversie al semnalului din mărime mecanică în mărime electrică. Traductorul este un cristal piezoelectric care generează o diferență de potențial, într-un plan perpendicular pe direcția de solicitare mecanică;
- **Sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță** este un ansamblu de circuite electronice care asigură adaptarea de nivel a tensiunii traductorului (amplificare), filtrarea semnalului și procesări analogice (liniarizare, derivare, integrare, ș.a., dacă se impun);
- **Potențiometrul de reglare** asigură posibilitatea de aducere la „zero” a indicației pentru valoarea forței măsurate;
- **Mecanismul paralelogram** este un caz particular al mecanismului patrulater, în care manivela și balansierul sunt egale. Această alegere are la bază proprietatea mecanismului paralelogram de a asigura bielei mișcare plan-paralelă (elementul de mecanism se poate mișca în plan doar în poziții paralele cu orientarea inițială – cu alte cuvinte, nu se poate înclina). În acest fel este eliminată posibilitatea de a solicita traductorul din construcția reazemului încastrat cu forțe oblice, garantând astfel măsurarea reacțiunii pe direcția orizontală;
- **Arcul de pretensionare** asigură contactul ferm între biela mecanismului paralelogram și traductorul de forță. Această pretensionare nu alterează rezultatul măsurătorii datorită posibilității de anulare a forței din arc, cu ajutorul potențiometrului de reglare, înainte de solicitarea structurii;

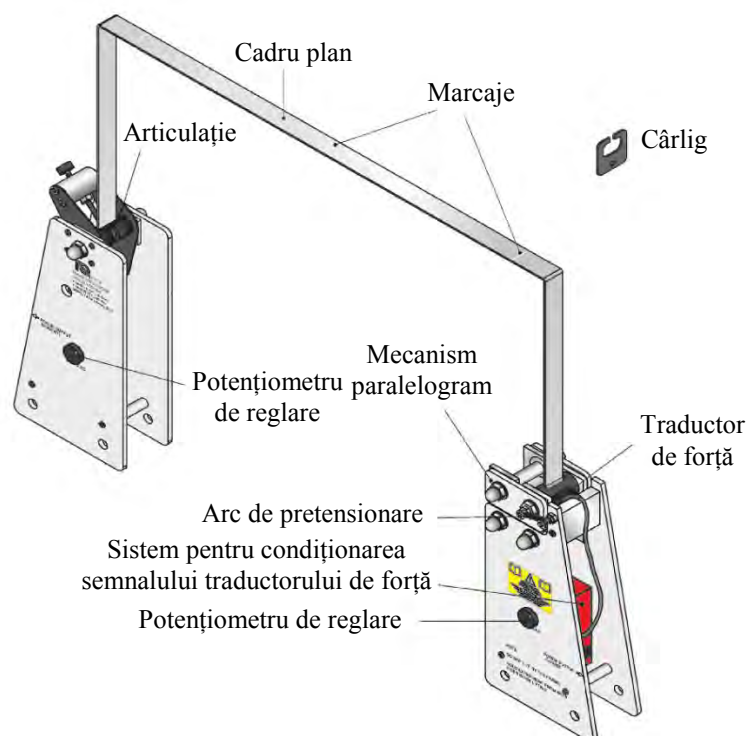


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea reacțiilor și a deformației unui cadru plan static nedeterminat

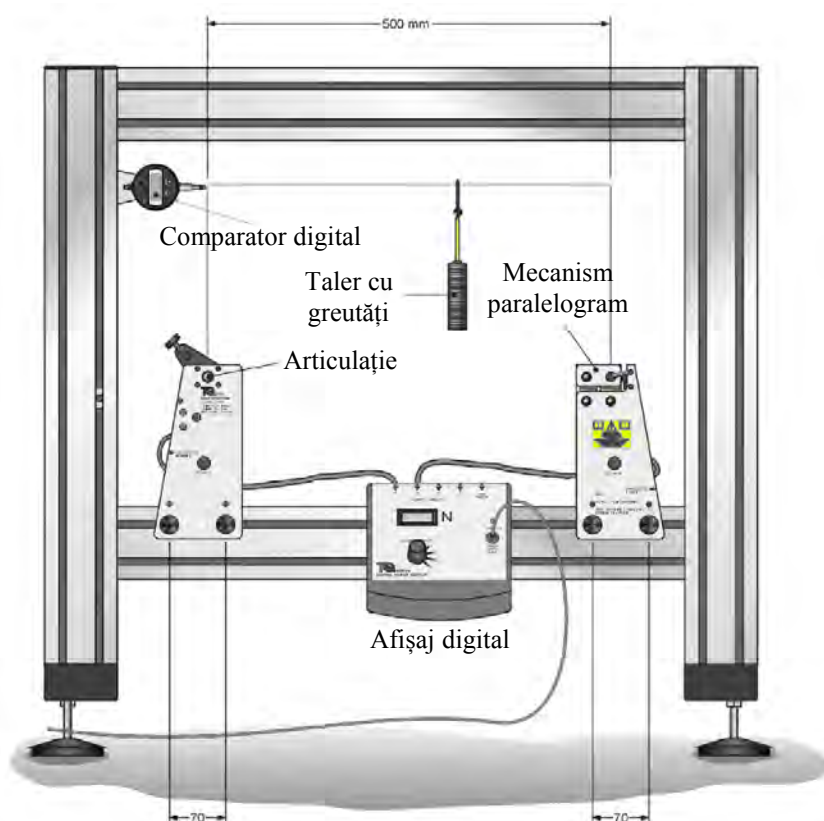


Fig. 2. Standul pentru determinarea reacțiilor și a deformației unui cadru plan static nedeterminat

- **Articulația** este o piesă de construcție specială care blochează toate gradele de libertate ale nodului structurii unde este montată, în condițiile asigurării posibilității de măsurare a cuplului care este generat în încăstrare de către sarcinile aplicate structurii. Traductorul de

forță este amplasat la o distanță de 50 mm față de axa articulației, valoare cuplului fiind determinată indirect prin înmulțirea indicației traductorului cu brațul antemenționat.

În Fig. 2. este prezentată schema standului pentru determinarea reacțiilor și a deformației unui cadru plan static nedeterminat. Echipamentele descrise anterior sunt fixate pe cadrul de solicitare furnizat de producător și sunt completate de un afișaj digital, care preia semnalul de la sistemele pentru condiționarea semnalului traductoarelor de forță și îl redă în formă numerică și de un comparator digital, ce este un traductor de deplasare al cărui circuit electronic permite afișarea deformației structurii măsurată în punctul și pe direcția în care este amplasat palpatorul său. Comparatorul este prevăzut și cu un buton care comandă aducerea la „zero” a indicației acestuia înainte de aplicarea sarcinilor. Valoarea reacțiilor și a deformației poate fi preluată și din calculator, cu ajutorul programului care însoțește echipamentul.

EFFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește măsurarea experimentală a reacțiilor din reazeme pentru diferite condiții de încărcare, pentru un cadru static plan nedeterminat (dublu încastrat), de secțiune dreptunghiulară constantă. Valorile experimentale ale reacțiilor se vor compara cu valorile analitice, calculate cu relațiile teoretice.

• Măsurători experimentale

Experiment 1: *Determinarea reacțiilor pentru un cadru static nedeterminat încărcat cu o sarcină concentrată la mijlocul porțiunii orizontale*

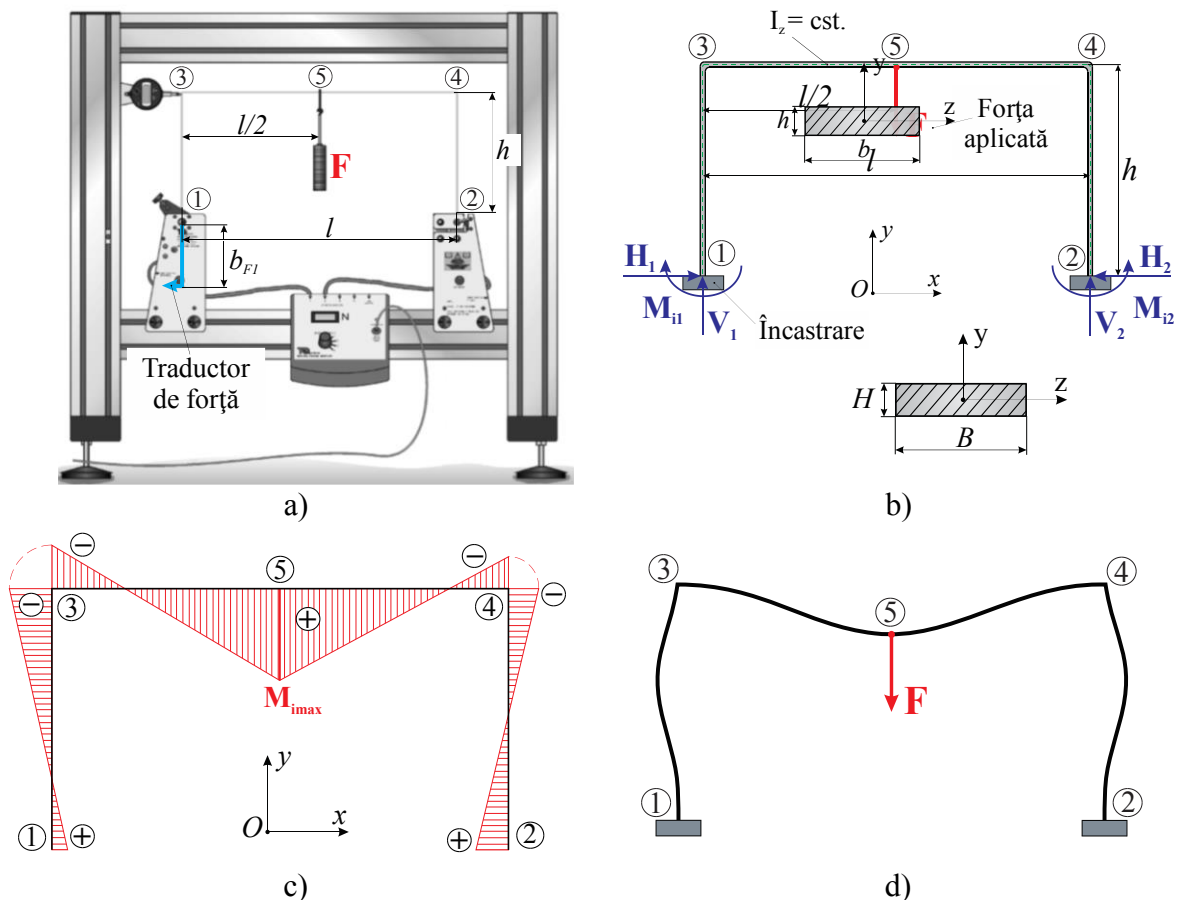


Fig. 3. Determinarea experimentală a reacțiilor din încastrări:

a) standul experimental; b) reprezentare schematică a cadrului încastrat; c) diagrama de momente încovoietoare pentru forța concentrată F ; d) schema deformată a cadrului

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a reacțiilor din reazeme pentru un cadru static nedeterminat dublu încastrat și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. În urma solicitării cadrului la încovoiere (Fig. 3.a.) de forța exterioară F care acționează la mijlocul porțiunii orizontale (la distanța $l/2$), în încastrări iau naștere reacțiuni: două forțe pe direcție orizontală, două forțe pe direcție verticală și două momente încovoietoare. Rezultă că numărul total al reacțiilor introduse de cele două încastrări este șase ($r = 6$).

Gradul de nedeterminare (n), se obține ca diferența între numărul necunoscutelor (reacțiilor din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru date de Statica în plan. Se calculează astfel:

$$n = r - s \text{ – gradul de nedeterminare} \quad (1)$$

$$r = 3 + 3 = 6 \text{ – numărul necunoscutelor (reacțiunile) din reazme} \quad (2)$$

$$s = 3 \text{ – numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan} \quad (3)$$

$$n = r - s = 6 - 3 = 3 \quad (4)$$

De unde rezultă că pentru acest caz, gradul de nedeterminare este 3.

Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unor relații suplimentare legate de deplasările sistemului, obținute de regulă utilizând metode energetice de calcul (teorema lui Castigliano, Morh-Maxwell, Vereșceaghin) sau prin metoda eforturilor.

• Calculul analitic al reacțiilor

Metoda eforturilor pentru calculul reacțiilor din reazeme

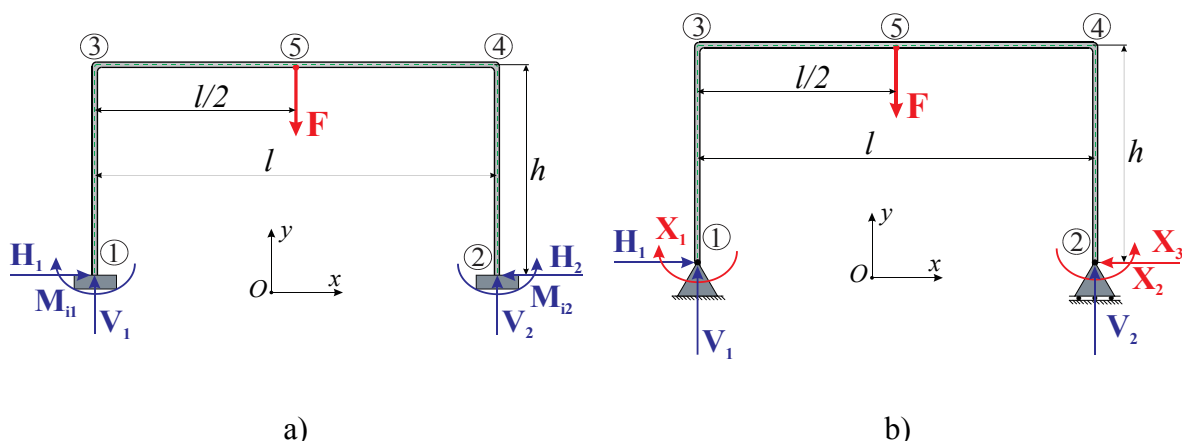


Fig. 4. Cadru static nedeterminat solicitat la încovoiere de o forță concentrată

a) Cadru inițial; b) Sistem de bază

Pentru calculul necunoscutelor (reacțiilor) din cele două reazeme se aplică *metoda eforturilor*. Numărul de relații necesare ridicării nedeterminării prin metoda eforturilor este dat de gradul de nedeterminare, (n).

Metoda eforturilor se poate aplica dacă se transformă sistemul static nedeterminat inițial într-unul static determinat, numit sistem de bază (Fig. 4.b.), echivalent cu sistemul inițial (Fig. 4.a.). Sistemul de bază se obține înlocuind cele două încastrări din punctele 1 și 2 cu un reazem articulat în 1, respectiv cu un reazem simplu în 2, iar momentele încovoietoare aferente încastrărilor se notează cu X_1 , respectiv X_2 , iar reacțiunea orizontală din 2 cu X_3 .

Sistemul de bază obținut este echivalent cu sistemul inițial. Deplasările din reazeme, corespunzătoare eforturilor din încastrări, sunt nule, ceea ce permite scrierea următoarului sistem de trei ecuații cu trei necunoscute (X_1, X_2, X_3):

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Coeficienții necunoscutelor X_1 , X_2 și X_3 au câte doi indici: primul indice arată, după formula lui Veresceaghin (6), de unde se ia aria diagramei de momente încovoietoare, iar al doilea indice, arată de unde se ia ordonata la centrul de greutate al diagramei de momente pentru încărcarea reală (dată de primul indice) în diagrama unitară (pentru încărcarea unitară aplicată în punctul și pe direcția deplasării). În relația (5) δ_{ij} , $i = 1 \div 3$, $j = 0 \div 3$ reprezintă deplasările produse de sarcini unitare aplicate în punctul și pe direcția necunoscutelor static nedeterminate.

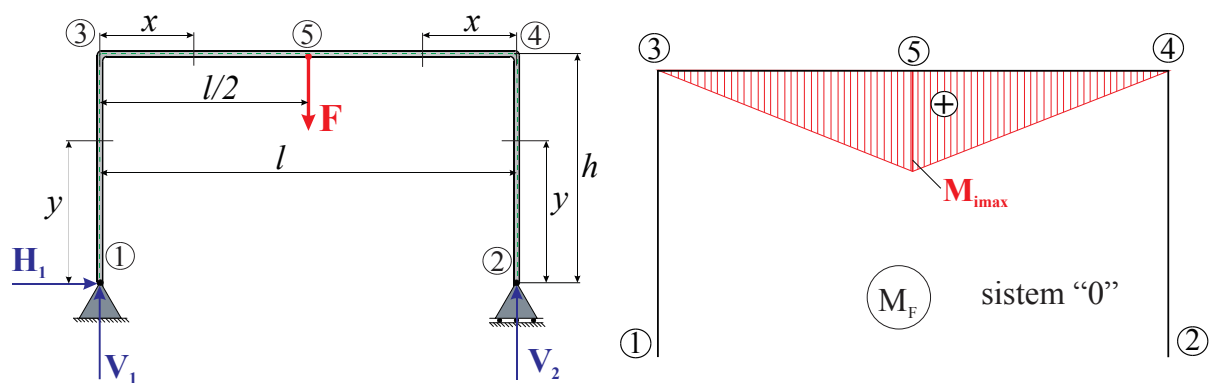
Când indicii coincid, atât aria diagramei de momente încovoietoare, cât și ordonata la centrul de greutate se ia din aceeași diagramă de momente. Conform teoremei reciprocității deplasărilor $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$, $\delta_{10} = \delta_{01}$, $\delta_{20} = \delta_{02}$, $\delta_{30} = \delta_{03}$.

$$\delta_{ij} = \sum \frac{\Omega_i \cdot y_{oj}}{E \cdot I_z} \quad (6)$$

unde: δ_{ij} , $i = 0 \div 3$, $j = 0 \div 3$ – coeficienții necunoscutelor X_1 , X_2 și X_3 din sistemul (5) care se vor calcula cu formula lui Veresceaghin (6)
 Ω_i , $i = 0 \div 3$ – aria diagramei de momente încovoietoare
 y_{oj} , $j = 0 \div 3$ – ordonata la centrul de greutate al diagramei de momente reale în diagrama unitară

În continuare, se vor trasa, succesiv, patru diagrame de momente încovoietoare: atunci când asupra cadrului static determinat (sistemul de bază, sistem "0") acționează forța exterioară F , respectiv atunci când asupra cadrului static determinat acționează pe rând $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, sarcini unitare aplicate în locul necunoscutelor static nedeterminate (sisteme unitare "1", "2", "3").

a) se aplică numai forța exterioară F



a) b)
 Fig. 5. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța exterioară F
 b) Diagrama de momente încovoietoare pentru F

Calculul reacțiilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoietor
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1 – 3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -H_1 \cdot y = 0$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = F$	2 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = 0$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0;$ $V_2 = \frac{F}{2}$	3 – 5	$x \in [0; \frac{l}{2}]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h$ $= V_1 \cdot x$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0;$ $V_1 = \frac{F}{2}$	4 – 5	$x \in [0; \frac{l}{2}]$	$M_z(x) = V_2 \cdot x$

b) se aplică numai momentul unitar $X_1 = 1$ în punctul 1

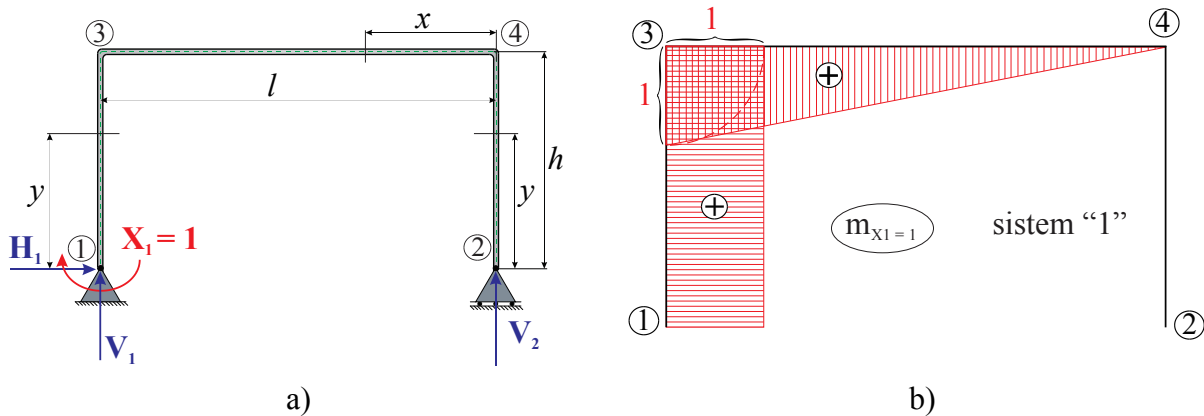


Fig. 6. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de momentul unitar, X_1
b) Diagrama de momente încovoietoare pentru $X_1 = 1$

Calculul reacțiilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoietor
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1 – 3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = X_1 - H_1 \cdot y =$ $= X_1 = 1$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = V_2$	2 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = 0$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - 1 = 0$ $V_2 = -\frac{1}{l}$	4 – 3	$x \in [0; l]$	$M_z(x) = V_2 \cdot x$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l + 1 = 0$ $V_1 = \frac{1}{l}$			

c) se aplică numai momentul unitar $X_2 = 1$ în punctul 2

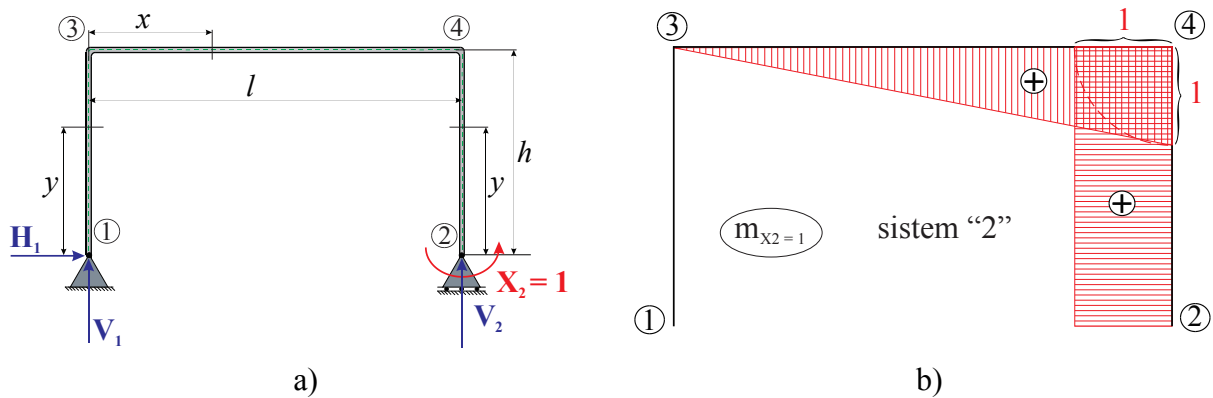


Fig. 7. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de moment unitar, X_2
 b) Diagrama de momente încovoietoare pentru $X_2 = 1$

Calculul reacțiilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoiător pe porțiuni
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1 – 3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -H_1 \cdot y$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = -V_2$	2 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = X_2 = 1$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l + 1 = 0;$ $V_2 = -\frac{1}{l}$	3 – 4	$x \in [0; l]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h =$ $= V_1 \cdot x$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - 1 = 0;$ $V_1 = \frac{1}{l}$			

d) se aplică numai forța orizontală unitară X_3 în punctul 2

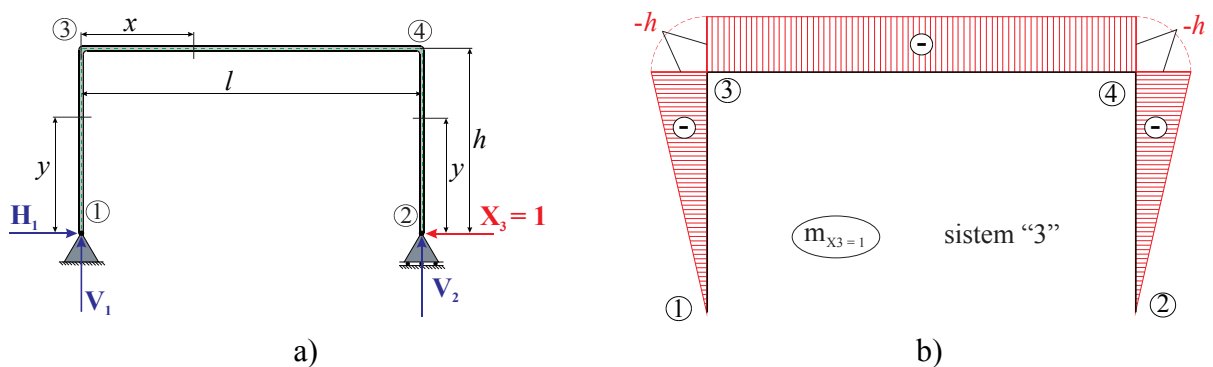


Fig. 8. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța unitară orizontală, X_3
 b) Diagrama de momente încovoietoare pentru $X_3 = 1$

Pentru sistemul de ecuații (5) se calculează coeficienții necunoscutelor, astfel: aria diagramei de momente încovoietoare și ordonata la centrul ei de greutate se iau din aceeași diagramă de momente, când indicii coincid.

Calculul reacțiilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoietor pe porțiuni
$\sum F_x = 0; H_1 - X_3 = 0;$ $H_1 = X_3 = 1$	1 - 3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -H_1 \cdot y$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = -V_2$	2 - 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -X_3 \cdot y$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l = 0; V_2 = 0$	3 - 4	$x \in [0; l]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l = 0; V_1 = 0$			

Indicii arată de unde se ia aria diagramei de momente încovoietoare (primul indice), respectiv ordonata la centrul ei de greutate (al doilea indice). Astfel, se obțin expresiile:

$$\delta_{11} = 1 \cdot h \cdot 1 + \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = h + \frac{l}{3} \quad (8)$$

$$\delta_{22} = 1 \cdot h \cdot 1 + \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = h + \frac{l}{3} \quad (9)$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot (-h) \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-h) + l \cdot (-h) \cdot (-h) = \frac{2 \cdot h^3}{3} + h^2 \cdot l \quad (10)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l}{6} \quad (11)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{(-h) \cdot h}{2} \cdot 1 + l \cdot (-h) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-h^2 - l \cdot h}{2} \quad (12)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{(-h) \cdot h}{2} \cdot 1 + l \cdot (-h) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-h^2 - l \cdot h}{2} \quad (13)$$

$$\delta_{10} = \delta_{01} = 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{F \cdot l^2}{24} \quad (14)$$

$$\delta_{20} = \delta_{02} = 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{F \cdot l^2}{24} \quad (15)$$

$$\delta_{30} = \delta_{03} = l \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-h) = -\frac{F \cdot l^2 \cdot h}{8} \quad (16)$$

Înlocuind expresiile (8÷16) în sistemul de ecuații (5) se obține un sistem de ecuații care permite calculul analitic al necunoscutelor $X_1 = M_{i1}$; $X_2 = M_{i2}$; $X_3 = H_2$:

$$\begin{cases} \left(h + \frac{l}{3} \right) \cdot X_1 + \frac{l}{6} \cdot X_2 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_3 + \frac{F \cdot l^2}{24} = 0 \\ \frac{l}{6} \cdot X_1 + \left(h + \frac{l}{3} \right) \cdot X_2 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_3 + \frac{F \cdot l^2}{24} = 0 \\ \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_1 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_2 + \left(\frac{2 \cdot h^3}{3} + h^2 \cdot l \right) \cdot X_3 + \left(-\frac{F \cdot l^2 \cdot h}{8} \right) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Astfel, cadrul static nedeterminat inițial are o parte din reacțiuni determinate. Calculul celorlalte reacțiuni necunoscute V_1 , V_2 și H_2 (Fig. 9.a). pentru cadrul dublu încastrat, se face utilizând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 - H_2 = 0; H_1 = H_2 \quad (18)$$

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; V_1 + V_2 = F \quad (19)$$

$$\sum M_1 = 0; M_{i1} + F \cdot \frac{l}{2} - V_2 \cdot l - M_{i2} = 0; V_2 = \frac{F \cdot \frac{l}{2} + M_{i1} - M_{i2}}{l} \quad (20)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l + M_{i1} - F \cdot \frac{l}{2} - M_{i2} = 0; V_1 = \frac{F \cdot \frac{l}{2} - M_{i1} + M_{i2}}{l} \quad (21)$$

► *Exemplu de calcul al reacțiunilor pentru următoarele date de intrare: $h = 250$ mm; $l = 500$ mm; $F = 4,90$ N*

Se calculează coeficienții necunoscutelor X_1, X_2, X_3 din sistemul de ecuații (5) cu relațiile (8÷16). Se obține:

$$\begin{array}{l} \delta_{11} = 0,417 \\ \delta_{22} = 0,417 \\ \delta_{33} = 0,0417 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \delta_{12} = \delta_{21} = 0,0834 \\ \delta_{13} = \delta_{31} = -0,09375 \\ \delta_{23} = \delta_{32} = -0,09375 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \delta_{10} = \delta_{01} = 0,05104 \\ \delta_{20} = \delta_{02} = 0,05104 \\ \delta_{30} = \delta_{03} = -0,0383 \end{array} \right.$$

Sistemul de ecuații (5) devine:

$$\begin{cases} 0,417 \cdot X_1 + 0,0834 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,05104 = 0 & (a) \\ 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,05104 = 0 & (b) \\ (-0,09375) \cdot X_1 + (-0,09375) \cdot X_2 + 0,0417 \cdot X_3 + (-0,0383) = 0 & (c) \end{cases} \quad (22)$$

▪ Din sistemul de ecuații cu trei necunoscute X_1, X_2 și X_3 (1), se scriu două sisteme de ecuații (cu expresiile a și b, respective b și c):

$$\begin{cases} 0,417 \cdot X_1 + 0,0834 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,05104 = 0 & (a) \\ 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,05104 = 0 & (b) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,05104 = 0 & (b) \\ (-0,09375) \cdot X_1 + (-0,09375) \cdot X_2 + 0,0417 \cdot X_3 + (-0,0383) = 0 & (c) \end{cases} \quad (24)$$

▪ Din sistemul de ecuații (23) se reduce necunoscuta X_3 , prin înmulțirea ecuației (b) cu (-1), și se obține o primă ecuație cu necunoscutele X_1 , respectiv X_2 :

$$0,3336 \cdot X_1 - 0,3336 \cdot X_2 = 0 \quad (25)$$

▪ Din sistemul de ecuații (24) se reduce necunoscuta X_3 , prin înmulțirea ecuației (b) cu coeficientul $\delta_{33} = 0,0417$, respectiv ecuația (c) cu coeficientul $\delta_{23} = +0,09375$, și se obține cea de-a doua ecuație cu necunoscutele X_1 , respectiv X_2 :

$$-0,005312 \cdot X_1 + 0,008598 \cdot X_2 = 0,001462 \quad (26)$$

▪ Cu ecuațiile (25) și (26) se formează un sistem de ecuații cu două necunoscute (X_1, X_2):

$$\begin{cases} 0,3336 \cdot X_1 - 0,3336 \cdot X_2 = 0 \\ -0,005312 \cdot X_1 + 0,008598 \cdot X_2 = 0,001462 \end{cases} \quad (27)$$

▪ Din sistemul de ecuații cu două necunoscute (27), prin reducerea necunoscutei X_2 , se calculează: $X_1 = 0,10513$.

▪ Cunoscând valoarea lui X_1 , din cea de-a doua ecuație a sistemului de ecuații (27), se calculează necunoscuta: $X_2 = 0,10513$.

▪ Necunoscuta X_3 se calculează cu ecuația (a) din sistemul de ecuații (22), și are valoarea: $X_3 = 1,105$.

- Așadar, pentru cadrul studiat, din cele 6 necunoscute din încastrări (reacțiunile pe direcție orizontală și verticală și momentele încovoietoare), cu metoda eforturilor, s-au calculat:

$$X_1 = M_{i1} = 0,10513 \text{ N}\cdot\text{m}; \quad X_2 = M_{i2} = 0,10513 \text{ N}\cdot\text{m}; \quad X_3 = H_2 = 1,105 \text{ N}.$$

- Pentru calculul celorlalte necunoscute H_1 , V_1 , V_2 se utilizează ecuațiile de echilibru (18), (20) și (21). Se obține:

$$H_2 = H_1 = 1,105 \text{ N}; \quad V_1 = 2,45 \text{ N}; \quad V_2 = 2,45 \text{ N}.$$

- Rezultatele reacțiunilor din încastrări se trec în Tabelul 2.
- Se procedează similar pentru celelalte valori ale forțelor de solicitare.

- *Metoda Castigliano* pentru calculul reacțiunilor din reazeme

O altă metodă de calcul a reacțiunilor din reazeme (reacțiunile verticale și orizontale, respectiv momentul încovoietor) este *metoda Castigliano*. Metoda se aplică pentru calculul reacțiunilor din reazeme pentru un cadru static nedeterminat plan, dublu încastrat și solicitat la încovoiere de forța concentrată exterioară F [N]. Forța concentrată se aplică la distanța $l/2$ [mm], pe porțiunea orizontală a cadrului, conform Fig. 14.a).

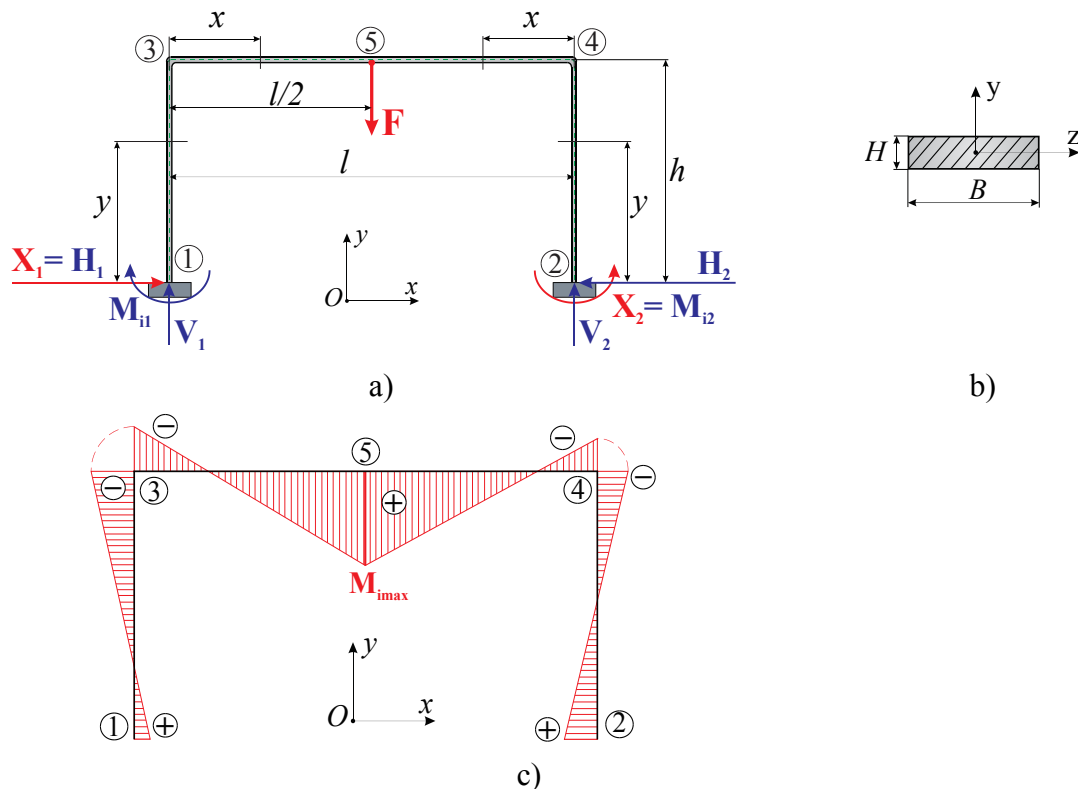


Fig. 9. Determinarea experimentală a reacțiunilor din încastrări cu metoda Castigliano:

- Cadru plan static nedeterminat dublu încastrat;
- secțiunea transversală a cadrului
- diagrama de momente încovoietoare pentru forța concentrată F

Se calculează gradul de nedeterminare (n), ce se obține ca diferența între numărul necunoscutelor (reacțiunilor din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan. Se obține:

$$n = r - s - \text{gradul de nedeterminare} \quad (28)$$

$$r = 3 + 3 = 6 - \text{numărul necunoscutelor (reacțiunile) din reazeme} \quad (29)$$

$$s = 3 - \text{numărul ecuațiilor de echilibru date de Statică în plan} \quad (30)$$

$$n = r - s = 6 - 3 = 3 \quad (31)$$

De unde rezultă că pentru acest caz, gradul de nedeterminare este 3. Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unor relații suplimentare legate de deplasările sistemului. Cu metoda Castigliano se impune cadrului static nedeterminat condiția ca deplasările din încastrări să fie nule. Condiția impusă cadrului este adevărată deoarece, încastrarea nu permite nici o deplasare în plan (translație verticală, orizontală și rotație) după nici o direcție (ecuația 32).

Formula generală a lui Castigliano pentru calculul reacțiunilor este:

$$\delta_{i(X_i)} = \int_{ds} \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X_i} \cdot ds = 0 \quad (32)$$

unde: $\delta_{(X_i)}$ – deplasarea produsă în punctul și pe direcția necunoscutii X_i , $i = 1 \div n$, [mm]
 X_i – necunoscutele cu care se înlocuiesc reacțiunile din reazeme
 M_i – expresia momentului încovoietor
 $E \cdot I_z$ – modulul de rigiditate la încovoiere.

• Calculul reacțiunilor

Ecuatiile de echilibru date de Statică în plan sunt:

$$\sum F_x = 0; \quad H_1 - H_2 = 0; \quad H_1 = H_2 \quad (33)$$

$$\sum F_y = 0; \quad V_1 + V_2 = F; \quad V_1 = V_2 = 0,5 \cdot F \quad (34)$$

$$\sum M_1 = 0; \quad M_{i1} + F \cdot 0,5 \cdot l - V_2 \cdot l - M_{i2} = 0 \quad (35)$$

Ecuatiile suplimentare de deformații exprimate cu formula lui Castigliano pentru cadrul studiat, se scriu pentru încastrarea din 1 (sau pentru încastrarea din 2): *deplasarea punctului 1 pe direcția forței (necunoscutii) X_1 și rotirea secțiunii transversale 1 a cadrului în direcția de acționare a momentului (necunoscutii) X_2 sunt nule, adică:*

$$\begin{cases} \delta_{1(X_1)} = \int_{ds} \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X_1} \cdot ds = 0 \\ \varphi_{1(X_2)} = \int_{ds} \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X_2} \cdot ds = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Interval	Expresia momentului încovoietor	$\frac{\partial M_i}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M_i}{\partial X_2}$	Variabila de integrare	Limite de integrare
1 – 3 2 – 4	$M_{i1} - H_1 \cdot y = X_2 - X_1 \cdot y$	-y	1	dy	[0; h]
3 – 5 4 – 5	$M_{i1} - H_1 \cdot h + \frac{F}{2} \cdot x =$ $= X_2 - X_1 \cdot h + \frac{F}{2} \cdot x$	-h	1	dx	$[0; \frac{l}{2}]$

Observație: Structura fiind simetrică, toate integralele se iau de două ori atunci când se scrie sistemul de ecuații (37).

Astfel, pentru cadrul din Fig. 9. a). se înlocuiește reacțiunea orizontală $H_1 (= H_2)$ din punctul 1 cu necunoscuta X_1 și, respectiv, se înlocuiește momentul încovoietor $M_{i2} (= M_{i1})$ din punctul 2 cu necunoscuta X_2 . Termenii integralelor din sistemul de ecuații (36) sunt explicitați în tabelul de mai sus.

Știind că toate barele cadrului au același modul de rigiditate, adică $E \cdot I_z = \text{constant}$, sistemul de ecuații (37) devine:

$$\begin{cases} \frac{2}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^h (X_2 - X_1 \cdot y) \cdot (-y) \cdot dy + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(X_2 - X_1 \cdot h + \frac{F}{2} \cdot x \right) \cdot (-h) \cdot dy \right] = 0 \\ \frac{2}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^h (X_2 - X_1 \cdot y) \cdot (1) \cdot dy + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(X_2 - X_1 \cdot h + \frac{F}{2} \cdot x \right) \cdot (1) \cdot dy \right] = 0 \end{cases} \quad (37)$$

În urma rezolvării sistemului de ecuații (37) se obțin ecuațiile de calcul al reacțiunilor (38) $X_1 = H_1 = H_2$, respectiv, $X_2 = M_{i1} = M_{i2}$:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3 \cdot F \cdot l^2}{8 \cdot h^2 + 16 \cdot h \cdot l} = H_1 = H_2 \\ X_2 = \frac{F \cdot l^2}{8 \cdot h + 16 \cdot h} = M_{i1} = M_{i2} \end{cases} \quad (38)$$

Pentru calculul reacțiunii verticale ($V_1 = V_2$) se utilizează ecuația de proiecție a forțelor pe direcție verticală (34).

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Cadrul de lungime l [mm] și înălțime h_1 [mm] este dublu încastrat în punctele 1 și 2 (Fig. 3.);
2. Se poziționează cârligul pentru forțe la mijlocul porțiunii orizontale a cadrului (distanța $l/2$ [mm] este indicată de o linie pe această porțiune a cadrului);
3. Se conectează traductorul corespunzător încastrării din 1 la canalul 1, iar cel din 2 la canalul 2, al afișajului digital al forței;
4. Se verifică indicația „zero” a canalului 1 și respectiv, a canalului 2. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențioanelor de reglare (*SET ZERO*);
5. Se încarcă, succesiv, grinda cu greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, la distanța $l/2$ [mm];
6. Rezultatele experimentale se citesc astfel:
 - valoarea momentului încovoietor din încastrare $M_{i1} = M_{i2} = M_i$ [N·m] se determină ca produs dintre forța citită de pe canalul 1, F_1 [N], și bratul forței, b_{F1} [m];
 - canalul 2 indică valoarea reacțiunii pe orizontală, $H_1 = H_2 = H$ [N];
7. Rezultatele teoretice și experimentale ale reacțiunilor din reazeme pentru grinda cu lungimea l [mm], se trec în Tabelul 2, respectiv în Tabelul 3;
8. Se trasează două diagrame astfel:
 - Diagrama 1 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunii orizontale H_2 , în funcție de forța aplicată, F [N];
 - Diagrama 2 de variație a valorilor analitice și experimentale ale momentului de încovoiere M_{i1} , în funcție de forța aplicată, F [N].

- Date de intrare

Tabelul 1. Caracteristici geometrice și de material pentru cadru

Materialul cadrului	Modulul de elasticitate longitudinal E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I _{z1} [mm ⁴]	Dimensiunile cadrului [mm]		
		B	H		l	l/2	h
Aluminiu					500	250	250

- Rezultate

Tabelul 2. Rezultatele teoretice și experimentale pentru reacțiunile verticale și orizontale

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Reacțiuni			
		V ₁ teoretic =V ₂ teoretic [N]	H ₁ teoretic =H ₂ teoretic [N]	H ₁ exp. =H ₂ exp. [N]	Ab.rel. ΔH [%]
100	0,98				
200	1,96				
300	2,94				
400	3,92				
500	4,90	2,45	1,105		

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 3. Rezultatele teoretice și experimentale pentru momentele încovoietoare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Reacțiuni		
		M _{i1} teoretic = M _{i2} teoretic [N·m]	M _{i1} exp. = M _{i2} exp. [N·m]	Ab.rel. ΔM _i [%]
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,90	0,1052		

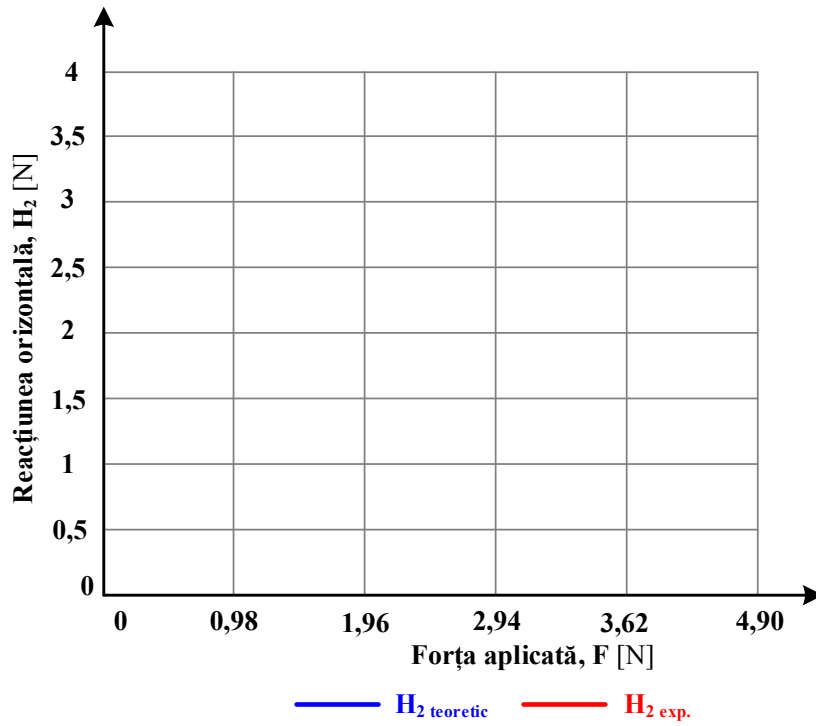


Diagrama 1. Variația reacțiunii orizontale în funcție de forța aplicată

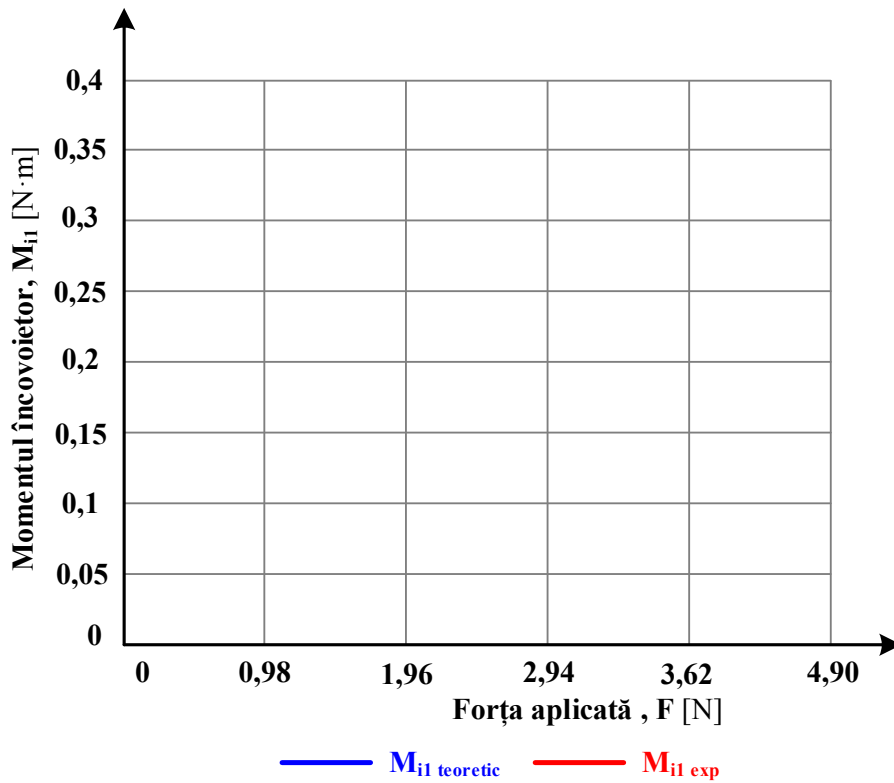


Diagrama 2. Variația momentului încovoietor în funcție de forța aplicată

Experiment 2: *Determinarea reacțiilor pentru un cadru static nedeterminat cu încărcare asimetrică*

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a reacțiilor din reazeme pentru un cadru static nedeterminat dublu încastrat, încărcat asimetric și compararea valorilor măsurate cu cele calculate analitic.

Cadrul este solicitat la încovoiere de forța exterioară F aplicată la distanța a [mm] față de punctul 4 sau la distanța b [mm] față de punctul 5 (Fig. 10.). În urma solicitării, în încastrări iau naștere reacțiuni: două forțe pe direcție orizontală, două forțe pe direcție verticală și două momente încovoietoare. Rezultă că numărul total al reacțiilor introduse de cele două încastrări este șase, ($r = 6$). Gradul de nedeterminare (n), obținut ca diferență între numărul necunoscutelor (reacțiilor din reazeme) și numărul ecuațiilor de echilibru static, este trei și se calculează astfel:

$$n = r - s - \text{gradul de nedeterminare} \quad (39)$$

$$r = 3 + 3 = 6 - \text{numărul necunoscutelor (reacțiunile din reazme)} \quad (40)$$

$$s = 3 - \text{numărul ecuațiilor de echilibru date de Statica în plan} \quad (41)$$

$$n = r - s = 6 - 3 = 3 \quad (42)$$

Ridicarea nedeterminării presupune găsirea unor relații suplimentare legate de deplasările sistemului, obținute, de regulă, utilizând metode energetice de calcul (teorema lui Castigliano, Morh-Maxwell, Veresceaghin) sau prin metoda eforturilor.

• Calculul analitic al reacțiilor

Pentru calculul necunoscutelor (reacțiunile pe orizontală și verticală și momentele încovoietoare) din cele două reazeme se aplică metoda eforturilor. Numărul de relații necesare ridicării nedeterminării prin metoda eforturilor este dat de gradul de nedeterminare calculat, (n).

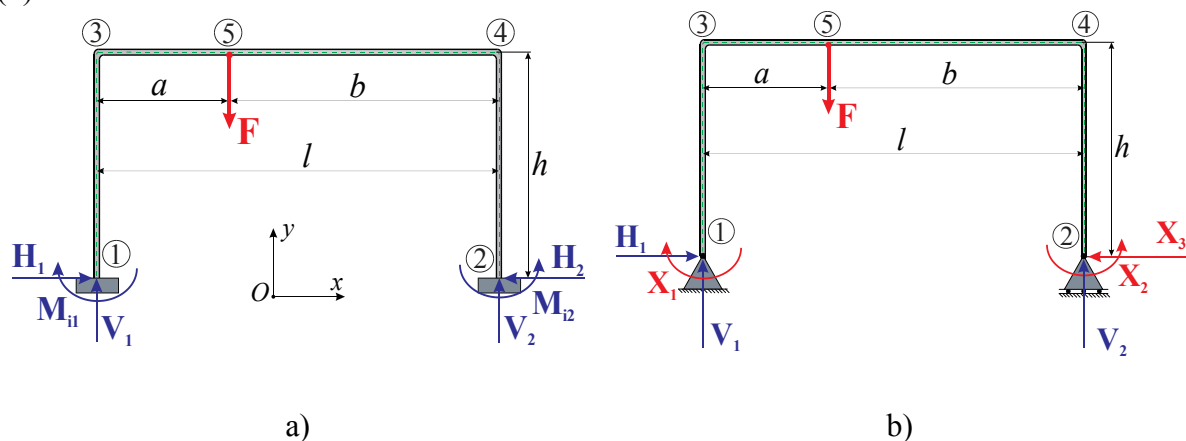


Fig. 10. Cadru static nedeterminat solicitat la încovoiere:
a) Cadru inițial; b) Sistem de bază

Metoda eforturilor se poate aplica dacă se transformă sistemul static nedeterminat inițial într-unul static determinat, numit sistem de bază (Fig. 10.b.), echivalent cu sistemul inițial (Fig. 10.a.). Sistemul de bază (sistemul "0") se obține înlocuind cele două încastrări din punctele 1 și 2 cu un reazem articulat în 1, respectiv cu un reazem simplu în 2, momentele încovoietoare aferente încastrărilor se notează cu X_1 , X_2 (sistemul "1" și "2"), iar reacțiunea orizontală din punctul 2 cu X_3 (sistemul "3").

Sistemul de bază obținut este echivalent cu sistemul inițial. Deplasările din reazeme corespunzătoare eforturilor din încastrări sunt nule, ceea ce permite scrierea următoarelor ecuații:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Coefficienții necunoscutelor X_1 , X_2 și X_3 au câte doi indici: primul indice arată, după formula lui Veresceaghin (44), de unde se ia aria diagramei de momente încovoietoare, iar al doilea indice, arată de unde se ia ordonata la centrul de greutate al diagramei de momente pentru încărcarea reală (dată de primul indice) în diagrama unitară.

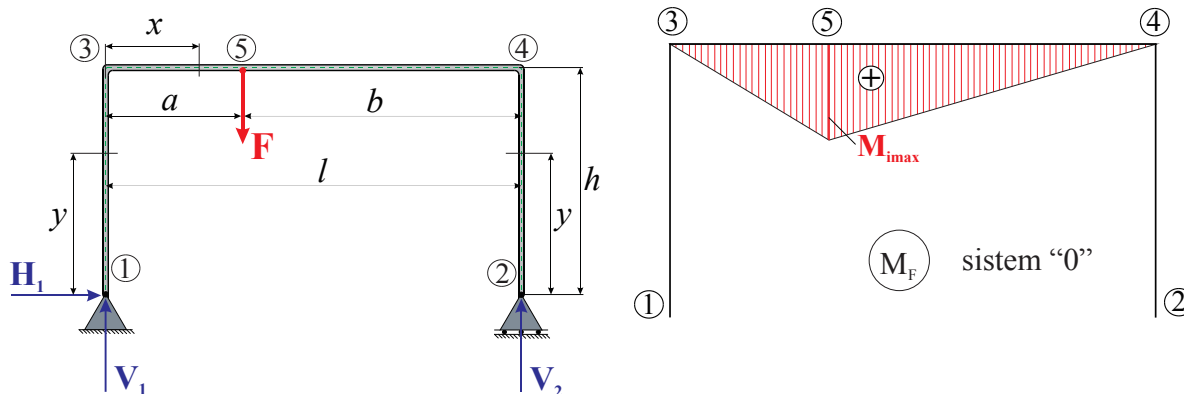
Când indicii coincid, atât aria diagramei de momente încovoietoare, cât și ordonata la centrul ei de greutate, se ia din aceeași diagramă de momente. Conform teoremei reciprocității deplasărilor $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$, $\delta_{10} = \delta_{01}$, $\delta_{20} = \delta_{02}$, $\delta_{30} = \delta_{03}$.

$$\delta_{ij} = \sum \frac{\Omega_i \cdot y_{oj}}{E \cdot I_z} \quad (44)$$

unde: δ_{ij} , $i = 0 \div 3$, $j = 0 \div 3$ – coeficienții necunoscutelor X_1 , X_2 și X_3 din sistemul (43) care se vor calcula cu formula lui Veresceaghin (44).

În continuare, se vor trasa, succesiv, diagramele de momente încovoietoare atunci când asupra cadrului static determinat acționează forța exterioară F , respectiv necunoscutele (reacțiunile din reazeme) notate cu X_1 , X_2 , X_3 egale cu unitatea.

a) se aplică numai forța exterioară F



a)

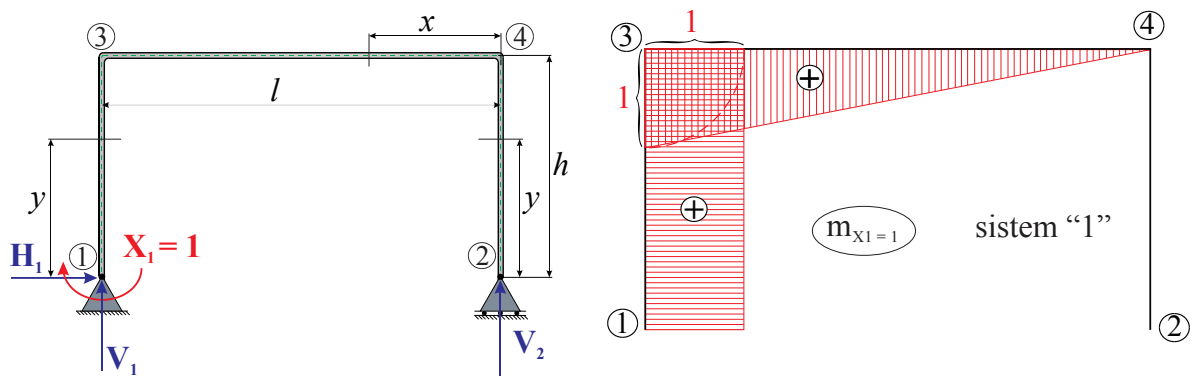
b)

Fig. 11. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța exterioară F
b) Diagrama de momente încovoietoare pentru sistemul de bază încărcat cu F

Calculul reacțiunilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoiător
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -H_1 \cdot y = 0$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = F$	2 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = 0$

$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0$ $V_2 = \frac{F}{2}$	3-5	$x \in [0; a]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h$ $= V_1 \cdot x$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0$ $V_1 = \frac{F}{2}$			

b) se aplică numai momentul unitar $X_1 = 1$ în punctul 1



a)

b)

Fig. 12. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța unitară X_1
b) Diagrama de momente încovoietoare pentru $X_1 = 1$

Calculul reacțiunilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoietor
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1-3	$y \in [0; h)$	$M_z(y) = X_1 - H_1 \cdot y =$ $= X_1 = 1$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = -V_2$	2-4	$y \in [0; h)$	$M_z(y) = 0$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l - 1 = 0$ $V_2 = \frac{1}{l}$	4-3	$x \in [0; l)$	$M_z(x) = V_2 \cdot x$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l + 1 = 0$ $V_1 = -\frac{1}{l}$			

c) se aplică numai momentul unitar $X_2 = 1$ în punctul 2

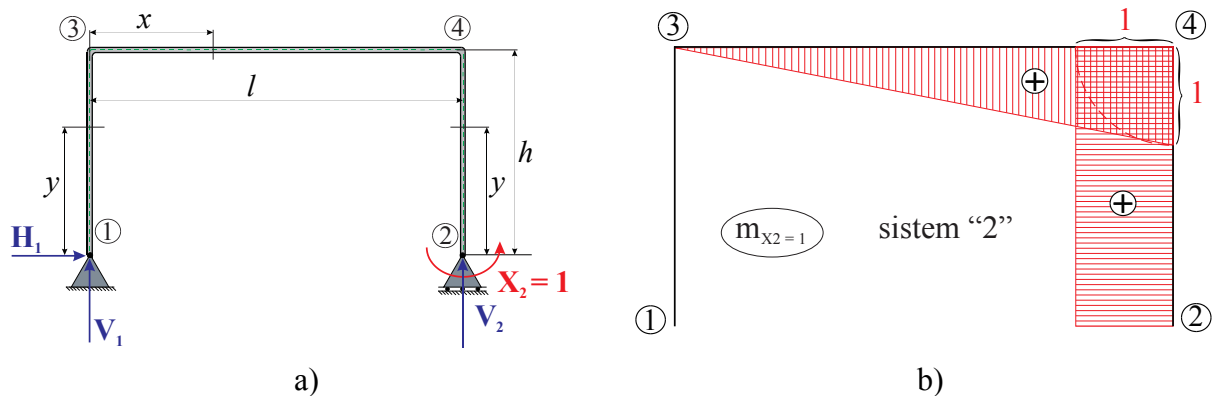


Fig. 13. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța unitară X_2
b) Diagrama de momente încovoietoare

Calculul reacțiilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoiator
$\sum F_x = 0; H_1 = 0$	1 – 3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = 0$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = V_2$	2 – 4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = X_2 = 1$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l + 1 = 0$ $V_2 = -\frac{1}{l}$	3 – 4	$x \in [0; l]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l - 1 = 0$ $V_1 = \frac{1}{l}$			

d) se aplică numai forța orizontală unitară $X_3 = 1$ în punctul 2

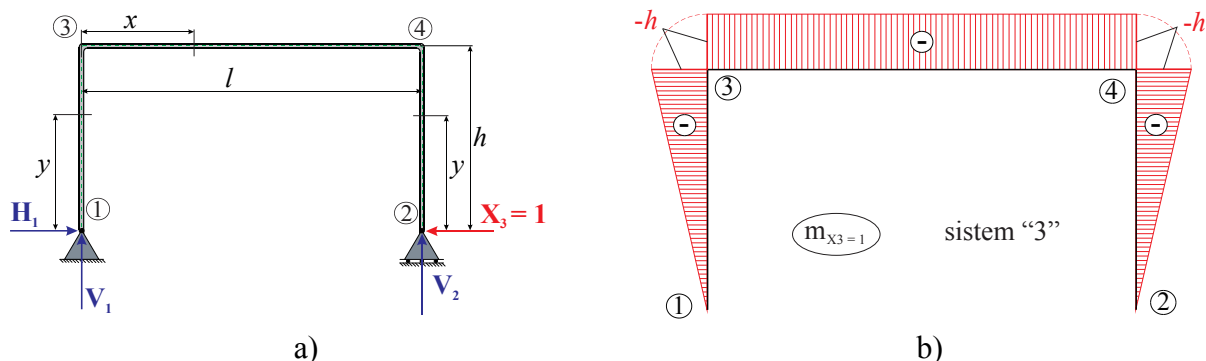


Fig. 14. Cadru static determinat solicitat la încovoiere de forța orizontală unitară X_3
b) Diagrama de momente încovoietoare pentru $X_3 = 1$

Calculul reacțiunilor din reazeme	Calculul eforturilor pe porțiuni		
	Interval	Variabila	Expresia momentului încovoietor
$\sum F_x = 0; H_1 - X_3 = 0;$ $H_1 = X_3 = 1$	1-3	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -H_1 \cdot y = -y$
$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 = 0; V_1 = -V_2$	2-4	$y \in [0; h]$	$M_z(y) = -X_3 \cdot y = -y$
$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot l = 0; V_2 = 0$	3-4	$x \in [0; l]$	$M_z(x) = V_1 \cdot x - H_1 \cdot h$
$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l = 0; V_1 = 0$			

Pentru sistemul de ecuații (43) se calculează coeficienții necunoscutelor, astfel: aria diagramei de momente încovoietoare și ordonata la centrul ei de greutate se iau din aceeași diagramă de momente când indicii coincid. Indicii arată de unde se ia aria diagramei de momente încovoietoare (primul indice), respectiv ordonata la centrul ei de greutate (al doilea indice). Se obțin expresiile:

$$\delta_{11} = 1 \cdot h \cdot 1 + \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = h + \frac{l}{3} \quad (46)$$

$$\delta_{22} = 1 \cdot h \cdot 1 + \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = h + \frac{l}{3} \quad (47)$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot (-h) \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-h) + l \cdot (-h) \cdot (-h) = \frac{2 \cdot h^3}{3} + h^2 \cdot l \quad (48)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l}{6} \quad (49)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{(-h) \cdot h}{2} \cdot 1 + l \cdot (-h) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-h^2 - l \cdot h}{2} \quad (50)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{(-h) \cdot h}{2} \cdot 1 + l \cdot (-h) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-h^2 - l \cdot h}{2} \quad (51)$$

$$\delta_{10} = \delta_{01} = a \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(l-b)}{l} + \frac{b}{l} \right) + b \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{l}$$

$$= \frac{F \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot l} \left(\frac{a}{3 \cdot l} + \frac{b}{l} \right) + \frac{F \cdot b^3}{3 \cdot l^2} \quad (52)$$

$$\delta_{20} = \delta_{02} = a \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{l} + b \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(l-a)}{l} + \frac{a}{l} \right)$$

$$= \frac{F \cdot a^3 \cdot b}{3 \cdot l^2} + \frac{F \cdot a \cdot b^2}{2 \cdot l} \left(\frac{b}{3 \cdot l} + \frac{a}{l} \right) \quad (53)$$

$$\delta_{30} = \delta_{03} = l \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-h) = -\frac{F \cdot a \cdot b \cdot h}{2} \quad (54)$$

Înlocuind expresiile (46÷54) în sistemul de ecuații (43) se obține un sistem de ecuații care permite calculul analitic al necunoscutelor $X_1 = M_{i1}$; $X_2 = M_{i2}$; $X_3 = H_2$:

$$\begin{cases} \left(h + \frac{l}{3} \right) \cdot X_1 + \frac{l}{6} \cdot X_2 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_3 + \left[\frac{F \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot l} \left(\frac{(l-b) + 3 \cdot b}{3 \cdot l} \right) + \frac{2 \cdot F \cdot b^3}{6 \cdot l^2} \right] = 0 \\ \frac{l}{6} \cdot X_1 + \left(h + \frac{l}{3} \right) \cdot X_2 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_3 + \left[\frac{2 \cdot F \cdot a^3 \cdot b}{6 \cdot l^2} + \frac{F \cdot a \cdot b^2}{2 \cdot l} \left(\frac{(l-a) + 3 \cdot a}{3 \cdot l} \right) \right] = 0 \\ \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_1 + \left(-\frac{h^2 - l \cdot h}{2} \right) \cdot X_2 + \left(\frac{2 \cdot h^3}{3} + h^2 \cdot l \right) \cdot X_3 + \left(-\frac{F \cdot a \cdot b \cdot h}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Astfel, cadrul static nedeterminat inițial, are trei reacțiuni determinate. Calculul reacțiunilor necunoscute V_1 și V_2 și H_2 (Fig. 10.a). pentru cadru, se face utilizând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 - H_2 = 0; H_1 = H_2 = X_3 \quad (56)$$

$$\sum F_y = 0; V_1 + V_2 - F = 0; V_1 + V_2 = F \quad (57)$$

$$\sum M_1 = 0; M_{i1} + F \cdot a - V_2 \cdot l - M_{i2} = 0; V_2 = \frac{F \cdot a + M_{i1} - M_{i2}}{l} \quad (58)$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot l + M_{i1} - F \cdot b - M_{i2} = 0; V_1 = \frac{F \cdot b - M_{i1} + M_{i2}}{l} \quad (59)$$

► *Exemplu de calcul al reacțiunilor pentru datele de intrare: $h = 250$ mm; $a = 200$ mm; $b = 300$ mm; $l = 500$ mm; $F = 4,90$ N*

▪ Se calculează coeficienții necunoscutelor X_1, X_2, X_3 din sistemul de ecuații (43) cu relațiile (46÷54). Se obține:

$$\begin{array}{l} \delta_{11} = 0,417 \\ \delta_{22} = 0,417 \\ \delta_{33} = 0,0417 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \delta_{12} = \delta_{21} = 0,0834 \\ \delta_{13} = \delta_{31} = -0,09375 \\ \delta_{23} = \delta_{32} = -0,09375 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \delta_{10} = \delta_{01} = 0,0784 \\ \delta_{20} = \delta_{02} = 0,0686 \\ \delta_{30} = \delta_{03} = -0,03675 \end{array} \right.$$

Sistemul de ecuații (43) devine:

$$\begin{cases} 0,417 \cdot X_1 + 0,0834 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,0784 = 0 & (a) \\ 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,0686 = 0 & (b) \\ (-0,09375) \cdot X_1 + (-0,09375) \cdot X_2 + 0,0417 \cdot X_3 + (-0,036753) = 0 & (c) \end{cases} \quad (60)$$

▪ Din sistemul de ecuații cu trei necunoscute X_1, X_2 și X_3 (60), se scriu două sisteme de ecuații (cu expresiile a și b, respectiv b și c):

$$\begin{cases} 0,417 \cdot X_1 + 0,0834 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,0784 = 0 & (a) \\ 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,0686 = 0 & (b) \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} 0,0834 \cdot X_1 + 0,417 \cdot X_2 + (-0,09375) \cdot X_3 + 0,0686 = 0 & (b) \\ (-0,09375) \cdot X_1 + (-0,09375) \cdot X_2 + 0,0417 \cdot X_3 + (-0,036753) = 0 & (c) \end{cases} \quad (62)$$

▪ Din sistemul de ecuații (61) se reduce necunoscuta X_3 , prin înmulțirea ecuației (b) cu (-1), și se obține o primă ecuație cu necunoscutele X_1 , respectiv X_2 :

$$0,3336 \cdot X_1 - 0,3336 \cdot X_2 = 0 \quad (63)$$

▪ Din sistemul de ecuații (62) se reduce necunoscuta X_3 , prin înmulțirea ecuației (b) cu coeficientul $\delta_{33} = 0,0417$, respectiv ecuația (c) cu coeficientul $\delta_{23} = -0,09375$, și se obține cea de-a doua ecuație cu necunoscutele X_1 , respectiv X_2 :

$$-0,005311 \cdot X_1 + 0,008599 \cdot X_2 = 0,00058469 \quad (64)$$

▪ Cu ecuațiile (63) și (64) se formează un sistem de ecuații cu două necunoscute (X_1, X_2):

$$\begin{cases} 0,3336 \cdot X_1 - 0,3336 \cdot X_2 = 0 \\ -0,005311 \cdot X_1 + 0,008599 \cdot X_2 = 0,00058469 \end{cases} \quad (65)$$

- Din sistemul de ecuații (65), prin reducerea necunoscutei X_2 , se calculează: $X_1 = -0,098216$.
- Cunoscând valoarea lui X_1 din cea de-a doua ecuație a sistemului de ecuații (65), se calculează necunoscuta: $X_2 = -0,06884$.
- Necunoscuta X_3 se calculează cu ecuația (a) din sistemul de ecuații (60) și are valoarea: $X_3 = 0,33$.
- Așadar, pentru cadrul studiat, din cele 6 necunoscute din încastrări (reacțiunile pe direcție orizontală și verticală și momentele încovoietoare), cu metoda eforturilor, s-au calculat:
 $X_1 = M_{i1} = -0,098216 \text{ N}\cdot\text{m}$; $X_2 = M_{i2} = -0,06884 \text{ N}\cdot\text{m}$; $X_3 = H_2 = 0,33 \text{ N}$.
- Pentru calculul celorlalte necunoscute H_1 , V_1 , V_2 se utilizează ecuațiile de echilibru (56), (58) și (59). Se obține:
 $H_2 = H_1 = 0,33 \text{ N}$; $V_1 = 2,99 \text{ N}$; $V_2 = 1,9 \text{ N}$.
- Rezultatele teoretice ale reacțiunilor din încastrări se trec în Tabelul 5 și Tabelul 6.
- Se calculează în mod similar reacțiunile corespunzătoare și celorlalte valori ale forțelor.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Cadrul de lungime l [mm] și înălțime h_1 [mm] este dublu încastrat în punctele 1 și 2;
 2. Se poziționează cârligul pentru forțe la distanța a [mm], obținându-se o încărcare asimetrică (Fig. 10.a).;
 3. Se conectează traductorii la afișajul digital astfel: încastrarea din punctul 1 la canalul 1 (pentru citirea momentului încovoietor), iar încastrarea din punctul 2 la canalul 2 (pentru citirea reacțiunii pe orizontală);
 4. Se verifică indicația „zero” a canalului 1 și respectiv a canalului 2. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențioanelor de reglare (*SET ZERO*);
 5. Se încarcă, succesiv, grinda cu greutatea de la 100 g până la 500 g, din 100 g în 100 g, la distanța a [mm];
 6. Rezultatele experimentale se citesc astfel:
 - a) *Prima citire*: Forțele se aplică la distanța a [mm] față de punctul 3
 - valoarea momentului încovoietor din încastrarea 1, M_{i1} [N·m], se determină ca produs dintre forța citită de pe canalul 1, F_1 [N], și brațul forței, b_{F1} [m];
 - canalul 2 indică valoarea reacțiunii pe orizontală din 2, H_2 [N];
 - b) *Citirea a doua*: Se mută forța F la distanța a [mm] față de punctul 4
 - valoarea momentului încovoietor din încastrarea 2, M_{i2} [N·m], se determină ca produs dintre forța citită de pe canalul 1, F_1 [N], și brațul forței, b_{F1} [m];
 - canalul 2 indică valoarea reacțiunii pe orizontală din 1, H_1 [N];
- Obs*: Distanța a [mm] are aceeași valoare în ambele cazuri de citire a măsurătorilor, numai punctul față de care se măsoară diferă. Deci, și în această situație se obțin: $M_{i1} = M_{i2}$, respectiv $H_1 = H_2$.
7. Rezultatele teoretice și experimentale ale reacțiunilor din rezeme pentru grinda de lungime l [mm], se trec în Tabelul 5 și Tabelul 6;
 8. Se trasează două diagrame astfel:

- Diagrama 3 de variație a valorilor analitice și experimentale ale reacțiunii orizontale H_2 , în funcție de forța aplicată, F [N];
- Diagrama 4 de variație a valorilor analitice și experimentale ale momentului de încovoiere M_{i1} , în funcție de forța aplicată, F [N].

• **Date de intrare**

Tabelul 4. Caracteristici geometrice și de material pentru cadru

Materialul cadrului	Modulul de elasticitate longitudinal E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_{z1} [mm ⁴]	Dimensiunile cadrului [mm]		
		B	H		a	l	h

• **Rezultate**

Tabelul 5. Rezultatele teoretice și experimentale pentru reacțiunile orizontale și verticale

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Reacțiuni					
		H_1 teoretic [N]	H_2 teoretic [N]	H_2 exp. [N]	Ab. rel. ΔH_2 [%]	V_1 teoretic [N]	V_2 teoretic [N]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90	0,33	0,33				

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 6. Rezultatele teoretice și experimentale pentru momentele încovoietoare

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Reacțiuni			
		M_{i1} teoretic [N·m]	M_{i1} exp. [N·m]	Ab. rel. ΔM_{i1} [%]	M_{i2} teoretic [N·m]
100	0,98				
200	1,96				
300	2,94				
400	3,92				
500	4,90	-0,098216			

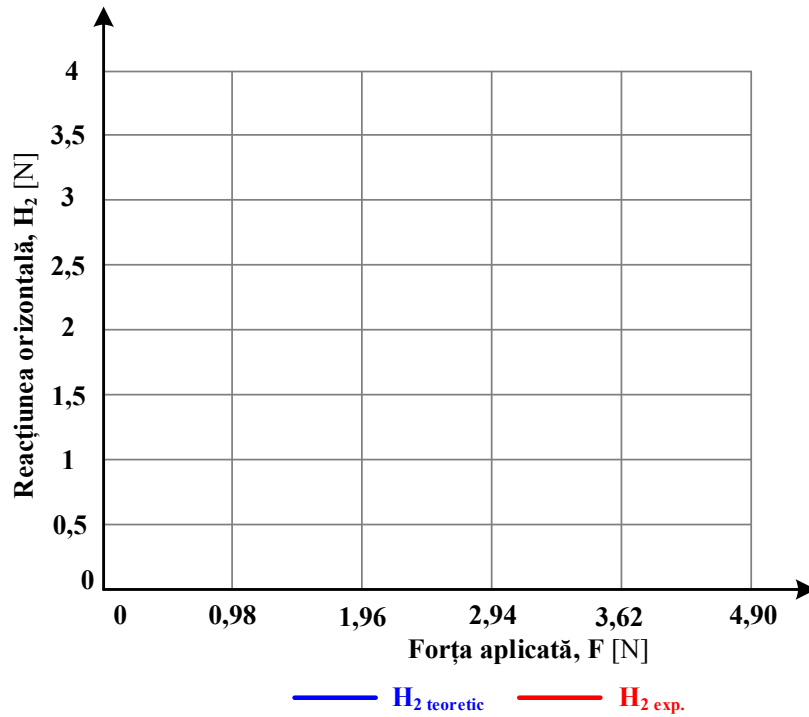


Diagrama 3. Variația reacțiunii orizontale în funcție de forța aplicată

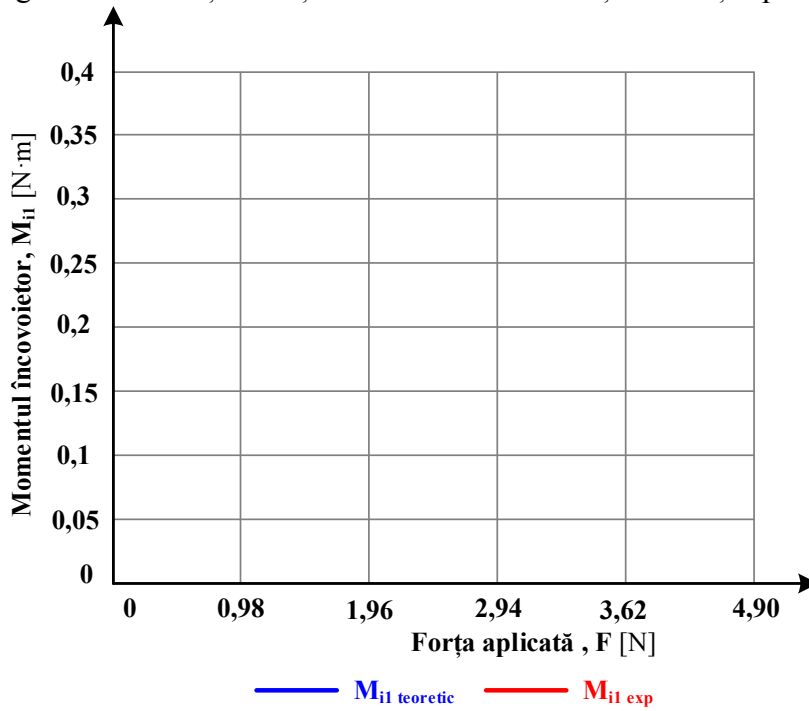


Diagrama 4. Variația momentului încovoietor în funcție de forța aplicată

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor desfășurate. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Din această fereastră se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

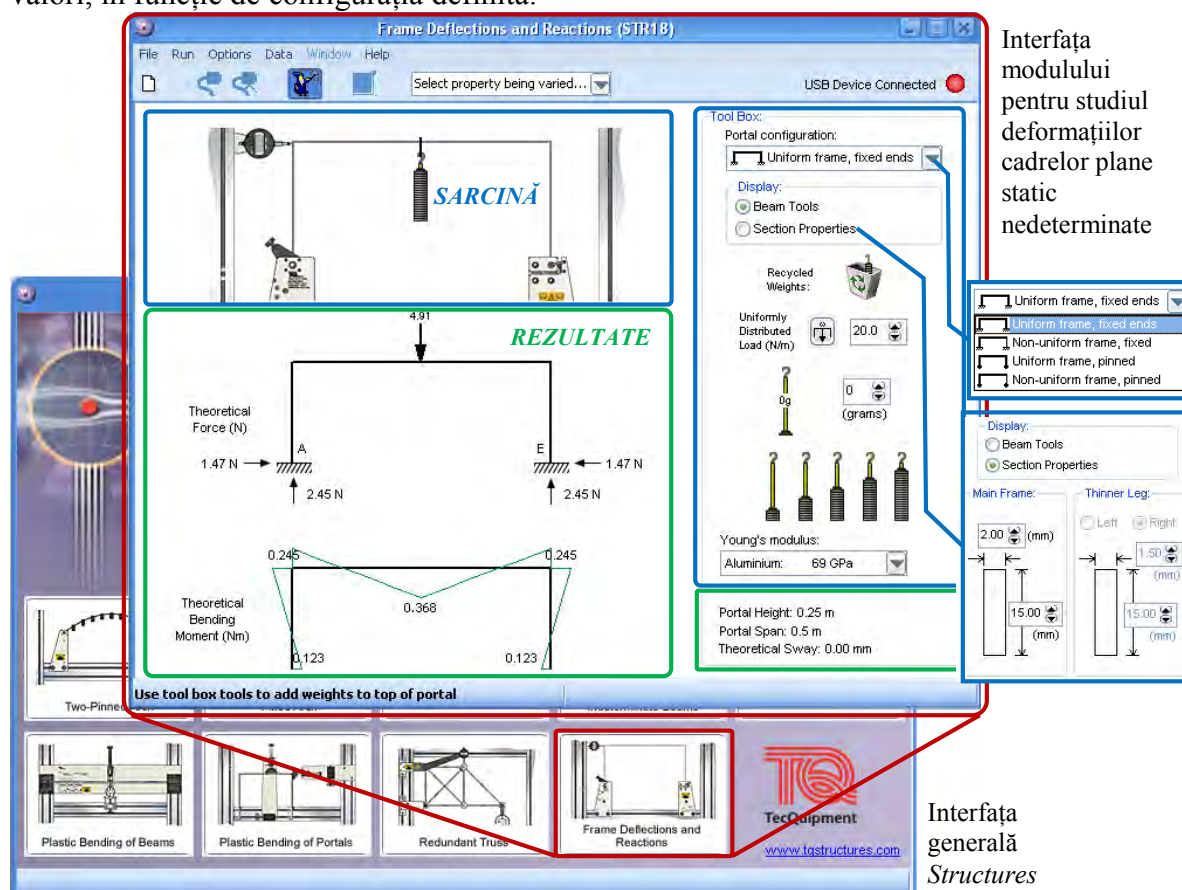


Fig.15. Modulul *TQ Structures – Frame Deflections and Reactions* pentru studiul deformațiilor cadrelor plane static nedeterminate

Modulul pentru determinarea valorilor reacțiunilor și ale deformațiilor cadrelor plane static nedeterminate (*Frame Deflection and Reactions*) solicitate la încovoiere, este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile reale de desfășurare a determinărilor prin alegerea modului de reazemare, definirea secțiunii transversale și adăugarea de sarcini pe structura virtuală. În **ZONELE PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR**, programul trasează diagrama de variație a momentului încovoietor și indică, pentru sarcina dată, valorile reacțiunilor din reazeme.



LE9. Studiul cadrelor plane static nedeterminate

• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a reacțiilor din încastrări pentru un cadru plan static nedeterminat încărcat și rezemat simetric și compararea acestora cu relații teoretice (calcul analitic).

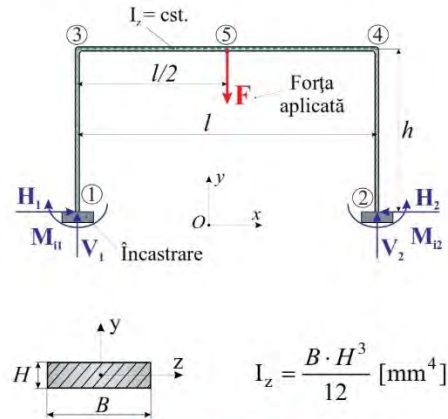
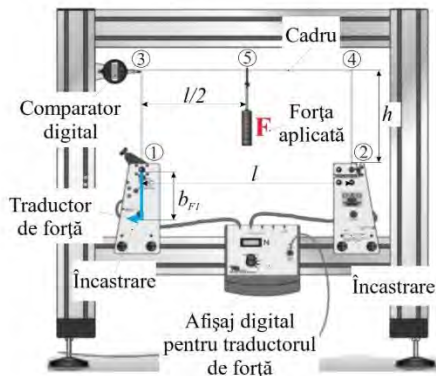
• Noțiuni teoretice

Gradul de nedeterminare (n) este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor (r) și numărul ecuațiilor de echilibru static (s). Pentru calculul reacțiilor în cazul unui cadru static nedeterminat se utilizează, alături de relațiile de echilibru static, ecuațiile de deformații sau ecuații bazate pe metode energetice pentru calculul deplasărilor (ex. Castigliano). În acest experiment, problema este de *trei ori static nedeterminată* iar pentru obținerea relațiilor de calcul ale reacțiilor (egale două câte două datorită simetriei geometrice și de încărcare) se aplică metoda Castigliano:

$$\delta_{i(x_i)} = \int ds \frac{M}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X_i} ds = 0$$

unde: X_i - necunoscutele cu care se înlocuiesc reacțiunile static nedeterminate
 M_i - momentul încovoietor
 $E \cdot I_z$ - modulul de rigiditate la încovoiere.

• Experiment — Cadru plan static nedeterminat



■ Calculul analitic (teoretic) al reacțiilor:

Se cunosc dimensiunile l, h, B, H respectiv b_{F1} .

Ecuații de echilibru static:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x=0; & \quad H_1-H_2=0; H_1=H_2 \\ \Sigma F_y=0; & \quad V_1+V_2-F=0; V_1+V_2=F \\ & \quad \rightarrow V_1=V_2=0,5F \\ \Sigma M_1=0; & \quad M_{11}+F \cdot 0,5l-V_2 \cdot l-M_{12}=0 \end{aligned}$$

Calculul necunoscutelor (Castigliano):

$$\begin{aligned} X_1 = H_1 = H_2 &= \frac{3 \cdot F \cdot l^2}{8 \cdot h^2 + 16 \cdot h \cdot l} \\ X_2 = M_{11} = M_{12} &= \frac{F \cdot l^2}{8 \cdot h + 16 \cdot l} \end{aligned}$$

■ Reacțiuni experimentale:

• H_2 se indică pe canalul 2 al afișajului digital;

• $M_{11 \text{ exp}} = F_1 \cdot b_{F1}$ [N·m];

unde: F_1 - forța indicată pe canalul 1 al afișajului digital; b_{F1} - brațul forței F_1 .

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val.}_{\text{exp.}}| - |\text{Val.}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val.}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m	Forța aplicată F	Reacțiuni						
		V_1 teoretic (= V_2 teoretic)	H_1 teoretic (= H_2 teoretic)	H_2 exp.	Ab.rel. ΔH_2	M_{11} teoretic (= M_{12} teoretic)	M_{11} exp.	Ab.rel. ΔM_{11}
[g]	[N]	[N]	[N]	[N]	[%]	[N·m]	[N·m]	[%]
100	0,98							
200	1,96							
300	2,94							
400	3,92							
500	4,90							

LE10. DETERMINAREA DEFORMAȚILOR BARELOR CURBE ȘI COTITE PLANE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea deformațiilor în plan orizontal și vertical pentru patru tipuri de bare curbe și cotite static determinate. Barele curbe și, respectiv cotite analizate sunt încastrate la un capăt și libere la celălalt. Rezultatele deplasărilor în planul orizontal și în cel vertical determinate experimental se vor compara cu valorile analitice (calculate cu relațiile teoretice).

INTRODUCERE

Barele curbe plane sunt caracterizate printr-o axă de simetrie curbă plană, iar sarcinile exterioare acționează în planul axei barei. Pentru stabilirea stării de tensiuni și deformații dintr-o bară curbă se trasează diagramele de variație ale eforturilor (N , T și M_i), solicitarea fiind compusă cu tensiuni de același tip, „ $\sigma + \sigma$ ”. Pentru calculul analitic al eforturilor (N , T și M_i) într-o secțiune oarecare a unei bare curbe plane sau cotite, se aplică metoda secțiunilor. Eforturile au definițiile și convențiile de semne similare cu cele de la bara dreaptă, cu observația că axele pe care se proiectează forțele sunt tangenta (t), respectiv, normala (n) la bara curbă sau cotită. Pentru calculul analitic al tensiunilor normale (σ) în secțiunea barelor curbe și cotite, se pot aplica următoarele două metode:

a) *Metoda I* ($N + M_i$), care ține cont de raza de curbură a axei geometrice a secțiunii transversale

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{A \cdot R_m} + \frac{M_i}{k \cdot R_m} \cdot \frac{y}{R_m + y} \quad (1)$$

$$R_m = \frac{R_i + R_e}{2} \quad (2)$$

unde: N , M_i – forța axială, respectiv, momentul încovoiător în secțiune, [N], [N·mm]

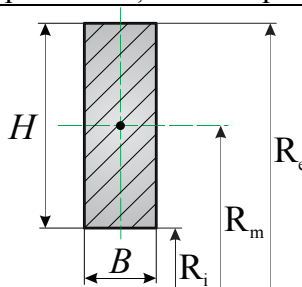
A – aria secțiunii transversale, [mm²]

R_m – raza de curbură medie a axei geometrice, [mm], calculată cu (2)

y – distanța de la fibrele extreme ale secțiunii transversale la axa geometrică a secțiunii transversale, [mm]

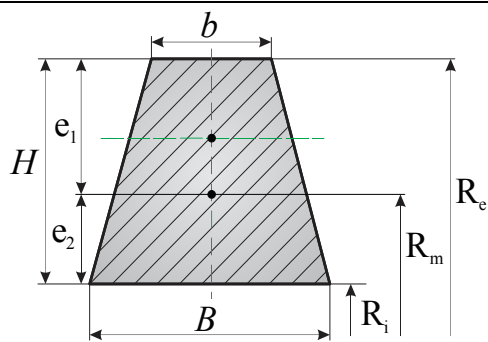
k – coeficient ce ține seama de forma geometrică a secțiunii transversale.

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:



$$k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{H}{2 \cdot R_m} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{H}{2 \cdot R_m} \right)^4 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{H}{2 \cdot R_m} \right)^6 + \dots \quad (3)$$

▪ pentru secțiunea trapezoidală:

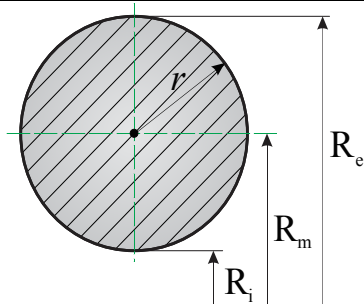


$$e_1 = \frac{2 \cdot B + b}{3 \cdot (B + b)} \quad (4)$$

$$k = -1 + \frac{2 \cdot R_m}{(B + b) \cdot H} \cdot \left\{ \left[b + \frac{(B - b)}{H} \cdot (e_1 + R_m) \right] \cdot \ln \frac{(R_m + e_1)}{(R_m - e_2)} - (B - b) \right\} \quad (5)$$

unde: B, b, H – dimensiuni geometrice ale secțiunii trapezoidale (baza mare, baza mică și înălțimea), [mm]
 e_1, e_2 – distanța de la baza mică, respectiv, de la baza mare până la axa geometrică a secțiunii transversale, [mm].

▪ pentru secțiunea circulară:



$$k = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{r}{R_m} \right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{r}{R_m} \right)^4 + \frac{5}{64} \cdot \left(\frac{r}{R_m} \right)^6 + \dots \quad (6)$$

b) *Metoda II (Winkler)*, care ține cont de raza de curbură a axei neutre a secțiunii transversale (axa neutră fiind axa în care tensiunea totală („ $\sigma + \sigma''$ ”) este nulă).

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{e \cdot A} \cdot \frac{y}{r + y} \quad (7)$$

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{e \cdot A} \cdot \frac{d_e}{R_e} \quad (8)$$

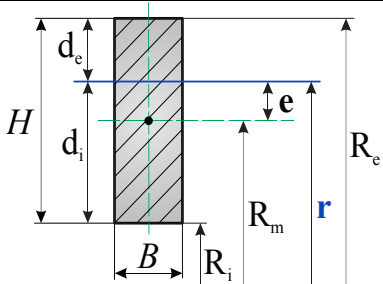
$$\sigma_i = \frac{N}{A} - \frac{M_i}{e \cdot A} \cdot \frac{d_i}{R_i} \quad (9)$$

unde: N, M_i – forța axială, respectiv momentul încovoietor în secțiune, [N], [N·mm]
 A – aria secțiunii transversale, [mm²]
 R_e, R_i – raza exterioară, respectiv interioară a secțiunii transversale, [mm]
 d_e, d_i – distanța de la fibrele extreme (exterioare și interioare) până la axa neutră a secțiunii transversale, [mm]
 r – raza de curbură a axei neutre a secțiunii transversale, [mm]
 e – distanța între axa neutră și axa geometrică a secțiunii transversale, [mm].

Pentru orice secțiune, raza de curbură a axei neutre se poate calcula analitic cu relația:

$$r = \frac{A}{\frac{A}{R_m} + \frac{I_z}{R_m^3}} \quad (10)$$

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

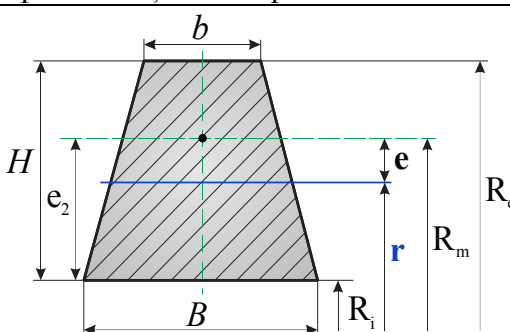


$$r = \frac{H}{\ln \frac{r+d_e}{r-d_e}} \quad (11)$$

Dacă $R_e = r + d_e$ (12), respectiv, $R_i = r - d_i$ (13), atunci relația (11) devine:

$$r = \frac{H}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \quad (14)$$

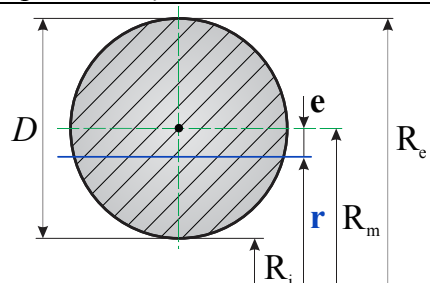
▪ pentru secțiunea trapezoidală:



$$r = \frac{\frac{b+B}{2} \cdot H}{\left(\frac{B \cdot R_e - b \cdot R_i}{H}\right) \cdot \ln \frac{R_e}{R_i} - (B - b)} \quad (15)$$

$$e_2 = \frac{2 \cdot b + B}{3 \cdot (B + b)} \cdot H \quad (16)$$

▪ pentru secțiunea circulară:



$$r = \frac{D^2}{4 \cdot \left(2 \cdot R_m - \sqrt{4 \cdot R_m^2 - D^2}\right)} \quad (17)$$

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 1. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea deformației barelor curbe și cotite:

- **Bara curbă** este o structură de secțiune dreptunghiulară încastrată la un capăt, prin intermediul **plăcilor de fixare** și solicitată la capătul liber de o forță concentrată F. Standul are în dotare patru configurații diferite de bare curbe sau cotite;
- **Comparatoarele digitale** sunt traductoare de deplasare ale căror circuite electronice permit afișarea sau transmiterea către calculator a deformației măsurate. Sunt prevăzute și cu un buton ce comandă aducerea la „zero” a indicației comparatorului, înainte de aplicarea sarcinilor;
- **Suportul magnetic** asigură poziționarea comparatoarelor, astfel încât între palpatoarele lor să existe ortogonalitatea care să permită măsurarea simultană a deformațiilor pe direcția verticală, respectiv orizontală;

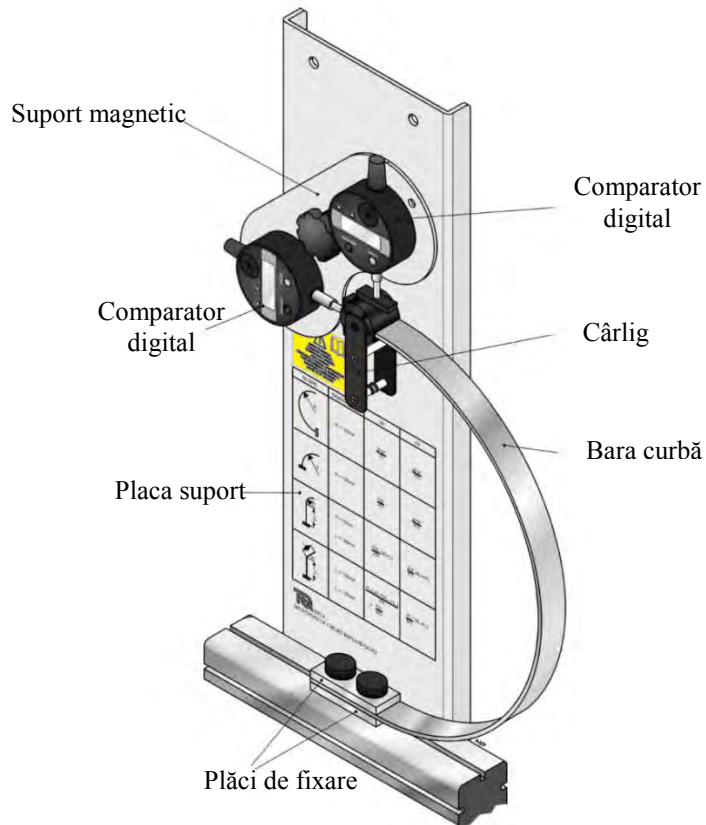


Fig. 1. Echipamentele pentru determinarea deformației barelor curbe și cotite

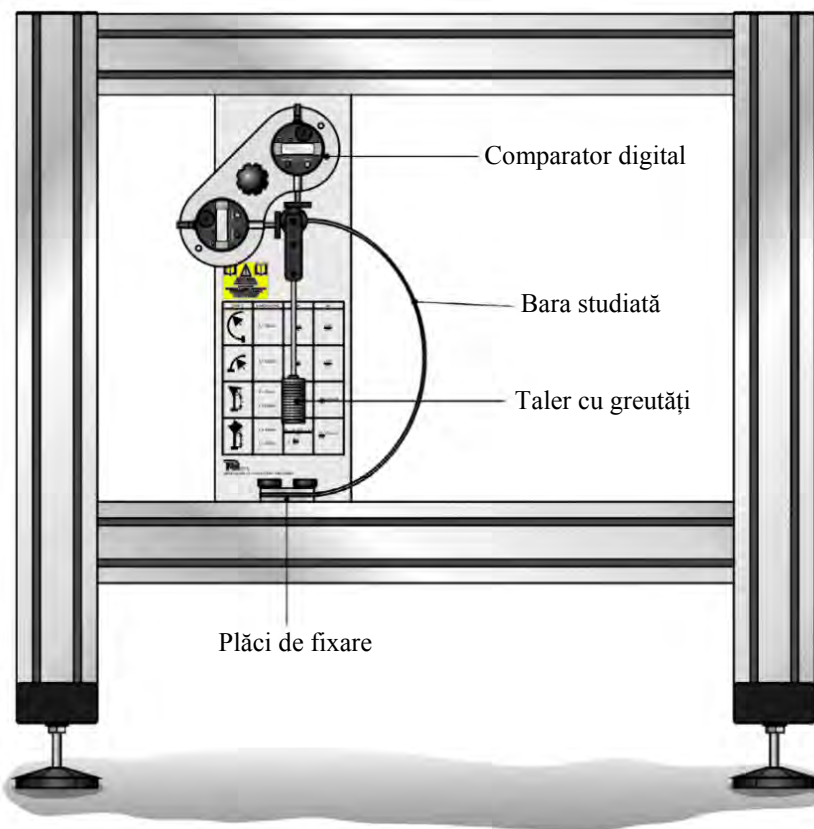


Fig. 2. Standul pentru determinarea deformației barelor curbe și, respectiv, cotite

- **Placa suport** este o placă metalică, feroasă, care permite re poziționarea suportului magnetic în funcție de structura studiată;
- **Cârligul** este un element ce se interpune între bara studiată și talerul cu greutate care o soliciță. Limitatoarele de pe tija inferioară au rolul de a poziționa sarcina aplicată cât mai aproape de verticala ce trece prin centrul geometric al secțiunii (structurii) pentru a nu produce deformații în afara planului barei.

În Fig. 2. este prezentată schema standului pentru determinarea deformației barelor curbe și cotite. Componentele standului permit determinarea simultană a deformațiilor pe direcția verticală și, respectiv, orizontală pentru diferite configurații de bare curbe și, respectiv, cotite.

Valorile deformațiilor barei, date de comparatoarele digitale, pot fi preluate atât de pe afișajul acestora, cât și din programul care însoțește standurile.

EFECTUAREA LUCRĂRII

În această lucrare se urmărește măsurarea experimentală a deplasărilor orizontale și verticale pentru bare curbe și, respectiv, cotite, de secțiune dreptunghiulară constantă. Barele sunt solicițate la încovoiere de forța concentrată F , aplicată în capătul liber al acestora. Valorile experimentale ale deplasărilor se vor compara cu valorile analitice, obținute cu relații teoretice. Pentru fiecare tip de bară curbă și, respectiv, cotită, se calculează eforturile N , T și M_{iz} în secțiune, respectiv tensiunile normale maxime, σ .

Experimentul 1.1: *Determinarea deplasărilor și tensiunilor normale pentru bara curbă plană de tip semicerc*

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a deplasărilor verticale (δ_v), respectiv orizontale (δ_h) pentru bara curbă plană de tip semicerc și compararea valorilor experimentale cu valorile analitice obținute prin relații teoretice.

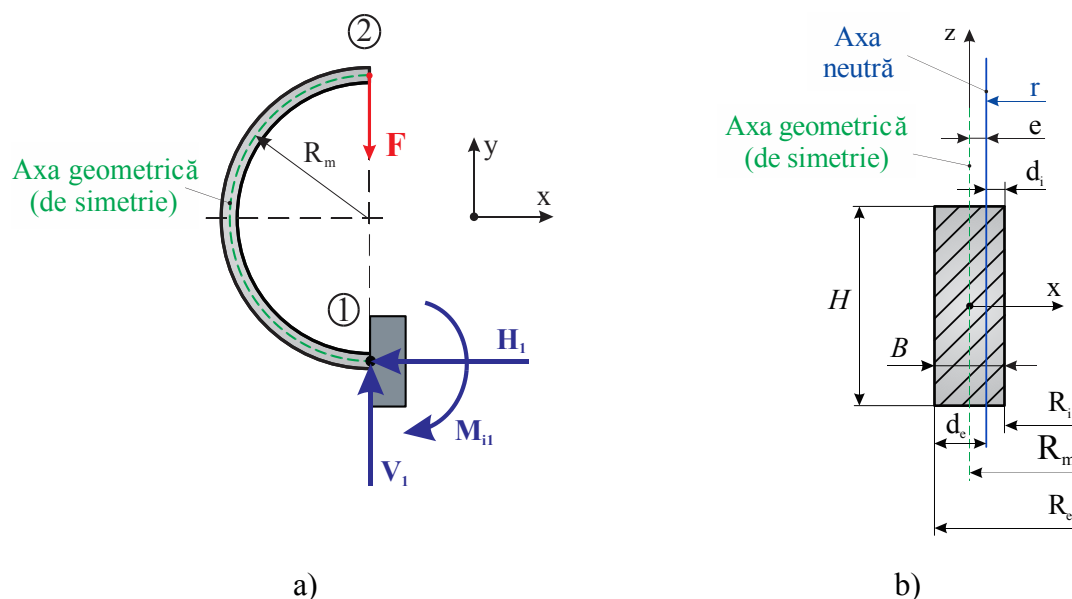


Fig. 3. a) Bară curbă plană de tip semicerc; b) elementele geometrice ale secțiunii transversale

Bara curbă plană din Fig. 3.a) este încastrată în 1 și este solicitată la încovoiere de forța concentrată F , aplicată în capătul liber (punctul 2). Calculul eforturilor N , T și M_i în secțiunea transversală a barei curbe se face aplicând metoda secțiunilor. Calculul analitic al tensiunilor normale în secțiunea maxim solicitată, se face aplicând una din cele două metode teoretice prezentate anterior.

• **Calculul analitic al eforturilor în secțiune**

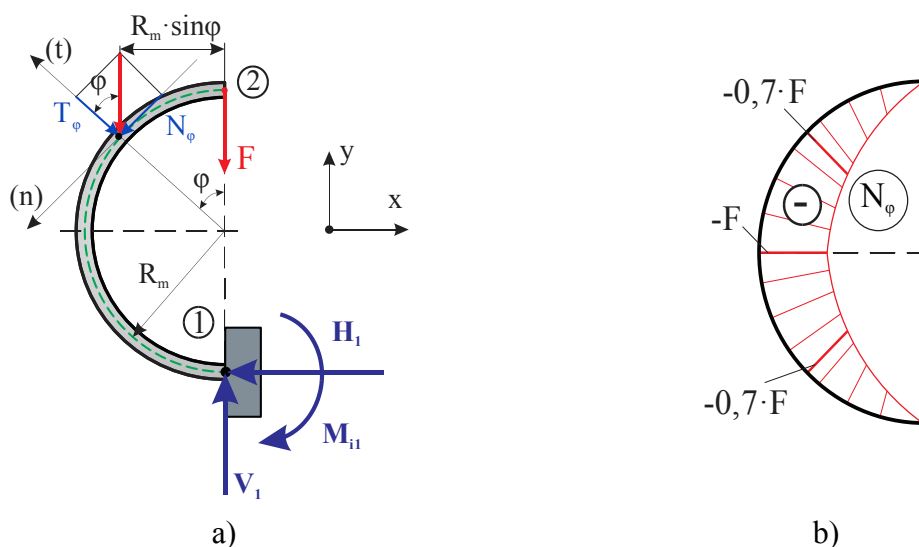
Pentru calculul analitic al eforturilor N , T și M_i într-o secțiune oarecare a unei bare curbe se aplică metoda secțiunilor. Forța exterioară F se descompune în două componente: o componentă normală la secțiune (n), N_φ și, respectiv, o componentă perpendiculară pe secțiune (t), conținută în planul acesteia, T_φ . S-a notat cu φ unghiul de variație de-a lungul barei. Eforturile se calculează aplicând metoda secțiunilor pe porțiunea curbă (în intervalul 2 – 1) și se obține:

Interval	Variabila	Eforturile în secțiune	
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$N_\varphi = -F \cdot \sin\varphi$ $T_\varphi = F \cdot \cos\varphi$ $M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	(18)

Pentru ridicarea diagramelor de variație ale eforturilor N , T și M_i din Fig. 4., este necesar să se calculeze, succesiv, eforturile, pe intervalul 2 – 1, pentru $\varphi = 0^\circ$; $\varphi = 45^\circ$; $\varphi = 90^\circ$; $\varphi = 135^\circ$; $\varphi = 180^\circ$. Se obține:

Tabelul 1. Expresiile eforturilor calculate pentru unghiul φ

Unghiul φ	0°	45°	90°	135°	180°
N_φ	0	$-0,7 \cdot F$	$-F$	$-0,7 \cdot F$	0
T_φ	F	$0,7 \cdot F$	0	$-0,7 \cdot F$	$-F$
$M_{i\varphi}$	0	$0,7 \cdot F \cdot R_m$	$F \cdot R_m$	$0,7 \cdot F \cdot R_m$	0



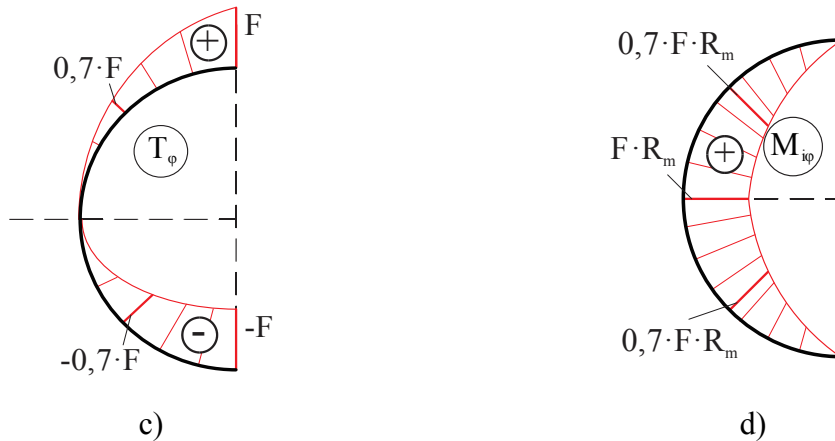


Fig. 4. a) Schema pentru calculul eforturilor N_φ , T_φ și M_φ ; b), c) și d) Diagramele de eforturi pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc

• Calculul analitic al deplasărilor

Deplasările verticale și orizontale produse de forța exterioară F [N], aplicată în punctul 2, se calculează cu metoda energetică Castigliano.

▪ *calculul deplasării orizontale*, δ_h teoretic

Pentru calculul analitic al deplasărilor orizontale, pentru a putea aplica teorema lui Castigliano, pe direcția orizontală se aplică o forță concentrată egală cu zero, $F_0 = 0$ [N] (Fig. 5.). Pentru calculul deplasărilor orizontale (δ_h teoretic) relația lui Castigliano are forma:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_0} \cdot ds \quad (19)$$

unde: ds – lungimea arcului de curbă: $ds = R_m \cdot d\varphi$

F_0 – forță concentrată, reală sau fictivă, aplicată în punctul și pe direcția deplasării de calculat δ_h teoretic ($F_0 = 0$ dacă F_0 este forță fictivă)

I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale, [mm⁴]

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

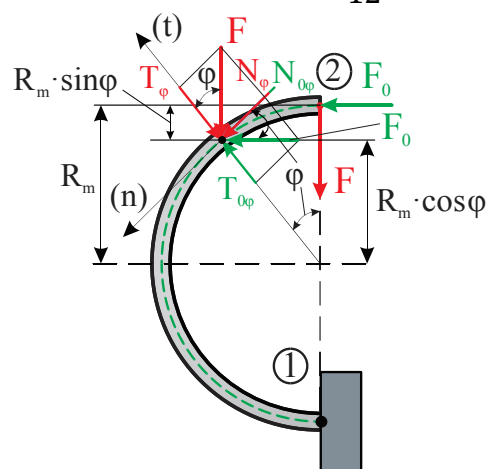


Fig. 5. Schema simplificată a barei curbă pentru calculul deplasării orizontale

Tabelul 2. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F_0}$
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi - F_0 \cdot R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$ $F_0 = 0$	$-R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$

În relația (19) se introduc termenii din Tabelul 2, știind că $F_0 = 0$, (19) devine:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^\pi (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot [-R_m(1 - \cos\varphi)] R_m \cdot d\varphi \quad (20)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = -\frac{2 \cdot F \cdot R_m^3}{E \cdot I_z} \quad (21)$$

Relația (21) permite calculul teoretic al deplasării orizontale din punctul 3, produsă de forța exterioară F , calculată cu formula lui Castigliano.

▪ *calculul deplasării verticale, δ_v teoretic*

Deplasarea verticală este produsă de forța concentrată reală F , aplicată în punctul 2 (Fig. 5.), iar formula lui Castigliano are expresia:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F} \cdot ds \quad (22)$$

Tabelul 3. Termeni de calcul pentru deplasarea verticală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F}$
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	$R_m \cdot \sin\varphi$

În relația (22) se introduc termenii din Tabelul 3 și se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^\pi (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot (R_m \cdot \sin\varphi) \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (23)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{\pi \cdot F \cdot R_m^3}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad (24)$$

Relația (24) permite calculul teoretic al deplasării verticale din punctul 2, produsă de forța concentrată reală exterioară verticală, F .

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează în punctul 1 bara curbă de tip semicerc prin intermediul a două plăci de fixare, respectiv cu două șuruburi de fixare;
2. Se poziționează cele două comparatoare digitale astfel încât palpatoarele să fie în contact cu capătul liber al barei curbe (punctul 2) și să aibă cursă maximă în orice direcție;

3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator, până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
4. Se prinde cârligul pentru greutateți în capătul liber al barei și se încarcă bara curbă, succesiv, cu greutateți de la 100 până la 500 g, din 100 g în 100 g;
5. Valorile experimentale se citesc astfel:
 - deplasarea pe direcția verticală (δ_v) este dată de comparatorul digital cu palpator vertical;
 - deplasarea pe direcția orizontală (δ_h) este dată de comparatorul digital cu palpator orizontal;
6. Valorile experimentale și teoretice ale deplasărilor (orizontale și verticale) pentru bara curbă se trec în Tabelul 5;
7. Valorile teoretice ale tensiunilor normale maxime (σ_e, σ_i) date de relațiile (8) și (9), calculate pentru unghiul $\varphi = 90^\circ$ pentru bara curbă de tip semicerc se trec în Tabelul 6;
8. Se trasează Diagrama 1 de variație a deplasărilor în funcție de forța aplicată, pentru bara curbă plană de tip semicerc.

• **Date de intrare**

Tabelul 4. Caracteristici geometrice și de material pentru bara curbă semicerc

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

• **Rezultate**

Tabelul 5. Rezultatele teoretice și experimentale ale deplasărilor pentru bara curbă semicerc

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deplasarea după axa x (orizontală) [mm]			Deplasarea după axa y (verticală) [mm]		
		δ_h teoretic	δ_h exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_h$ [%]	δ_v teoretic	δ_v exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_v$ [%]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90						

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 6. Rezultatele teoretice și experimentale ale tensiunilor normale pentru bara curbă semicerc

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Tensiunea normală extreme [N/mm ²]	
		σ_e	σ_i
100	0,98		
200	1,96		
300	2,94		
400	3,92		
500	4,90		

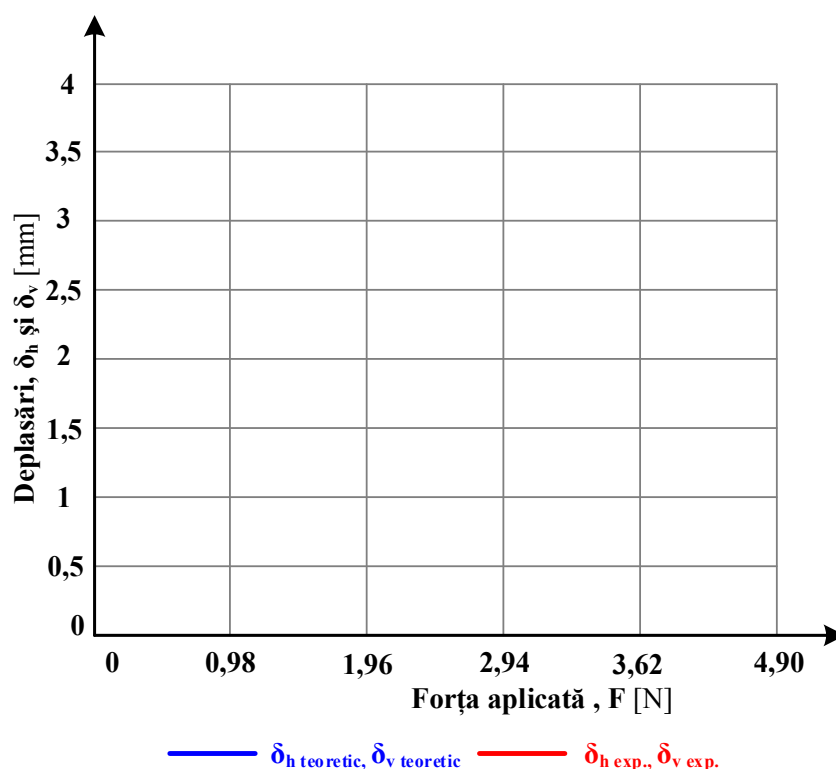


Diagrama 1. Variația deplasărilor orizontale și verticale în funcție de forța aplicată

Experimentul 1.2: Determinarea deplasărilor și tensiunilor normale pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a deplasărilor verticale (δ_v), respectiv, orizontale (δ_h), pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc și compararea valorilor experimentale cu valorile analitice obținute prin calcule analitice cu relațiile teoretice.

Bara curbă plană este încastrată în punctul 1 (Fig. 6.) și solicitată la încovoiere de forța concentrată F, aplicată în capătul liber (punctul 2). Eforturile N, T și M_i în secțiunea transversală a barei curbe se calculează analitic, aplicând metoda secțiunilor, iar tensiunile normale în secțiunea maxim solicitată se calculează aplicând una din cele două metode teoretice prezentate anterior.

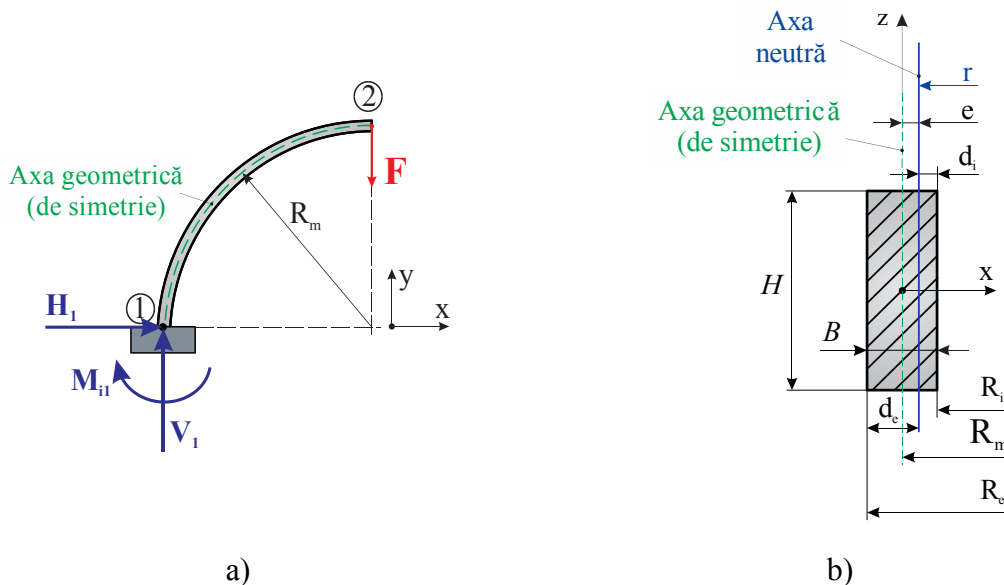


Fig. 6. a) Bară curbă plană în formă de sfert de cerc; b) elementele geometrice ale secțiunii transversale

• **Calculul analitic al eforturilor din secțiune**

Pentru calculul analitic al eforturilor în secțiunea transversală a barei curbe plane de tip sfert de cerc, forța exterioară F se descompune în două componente: o componentă normală la secțiune (n), N_φ și, respectiv, o componentă perpendiculară pe secțiune (t), conținută în planul acesteia, T_φ . S-a notat cu φ unghiul de variație de-a lungul barei. Eforturile se calculează aplicând metoda secțiunilor pe porțiunea de bară curbă (intervalul 2 – 1). Se obțin următoarele relații de calcul ale eforturilor din secțiune:

Interval	Variabila	Eforturile în secțiune	
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$N_\varphi = -F \cdot \sin\varphi$ $T_\varphi = F \cdot \cos\varphi$ $M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	(25)

Pentru ridicarea diagramelor de variație ale eforturilor N , T și M_i din Fig. 7., pe intervalul 2 – 1 se calculează, succesiv, eforturile pentru $\varphi = 0^\circ$; $\varphi = 45^\circ$; $\varphi = 90^\circ$. Se obține:

Tabelul 7. Expresiile eforturilor calculate pentru unghiul φ

Unghiul φ	0°	45°	90°
N_φ	0	$-0,7 \cdot F$	$-F$
T_φ	F	$0,7 \cdot F$	0
$M_{i\varphi}$	0	$0,7 \cdot F \cdot R_m$	$F \cdot R_m$

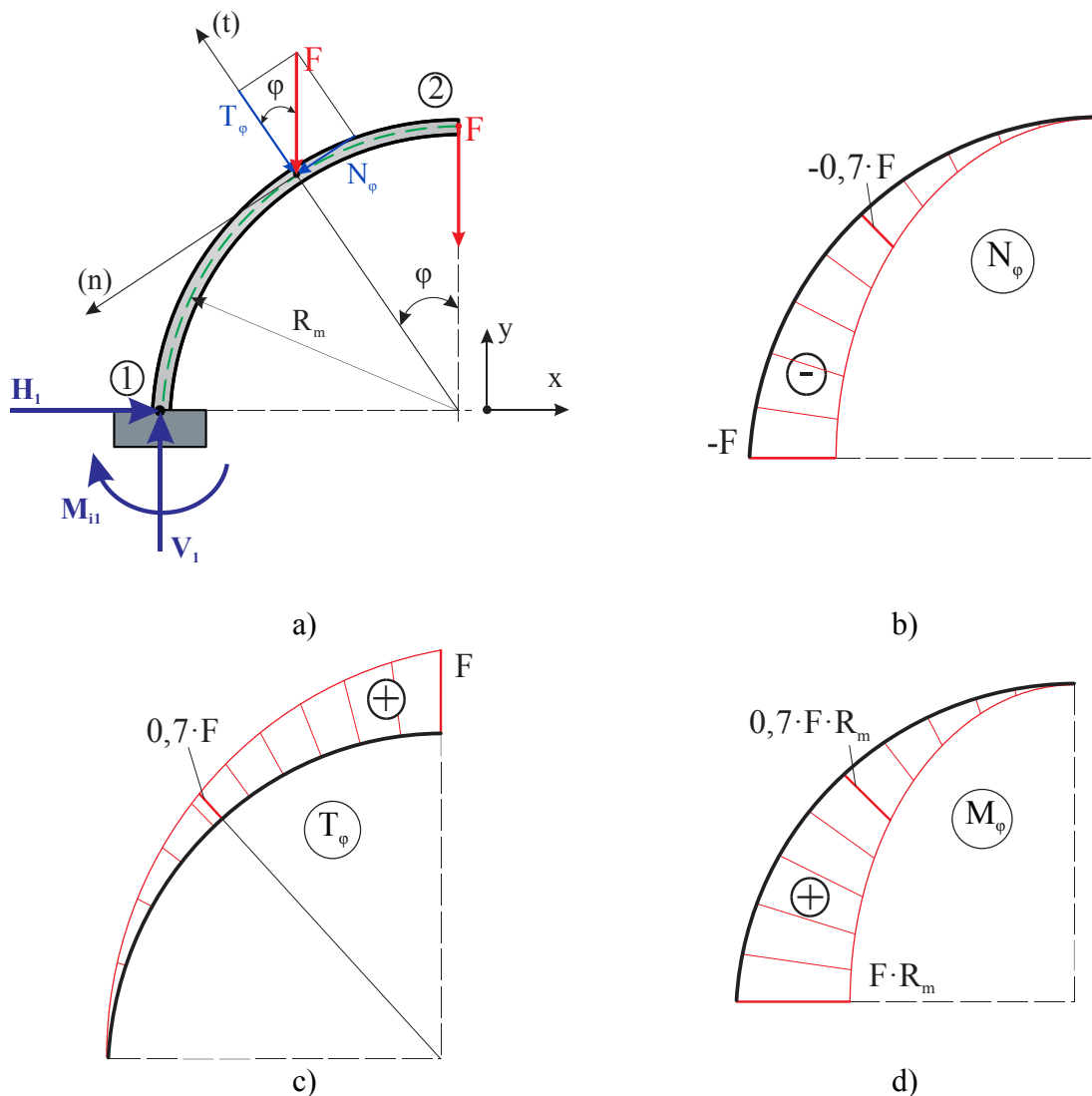


Fig. 7. a) Schema pentru calculul eforturilor N_φ , T_φ și M_φ ; b), c) și d) Diagramele de eforturi pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc

• **Calculul analitic al deplasărilor**

Deplasările verticale și orizontale produse de forța exterioară F [N], aplicată în 2 (Fig. 8.), se calculează cu metoda energetică Castigliano.

▪ *calculul deplasării orizontale*, δ_h teoretic

Pentru calculul analitic al deplasărilor orizontale, pe direcția orizontală se aplică o forță concentrată fictivă în punctul și pe direcția deplasării, $F_0 = 0$ [N] (Fig. 8.).

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_0} \cdot ds \tag{26}$$

- unde: ds – lungimea arcului de cerc: $ds = R_m \cdot d\varphi$
 F_0 – forță concentrată fictivă, aplicată în punctul și pe direcția deplasării $\delta_{h \text{ teoretic}}$
($F_0 = 0$ dacă F_0 este forță fictivă)
 I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale, [mm⁴]
▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Tabelul 8. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F_0}$
2-1	$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi - F_0 \cdot R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$ $F_0 = 0$	$-R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$

În relația (26) se introduc termenii din Tabelul 8 și știind că $F_0 = 0$, relația (26) devine:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot [-R_m(1 - \cos\varphi)] \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (27)$$

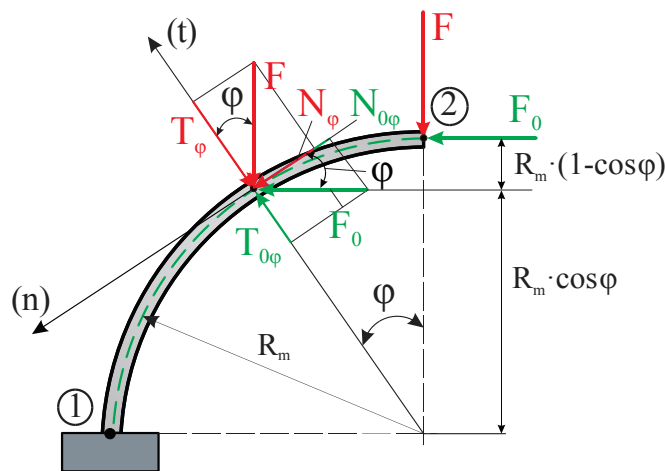


Fig. 8. Schema simplificată a barei curbe pentru calculul deplasării orizontale cu formula lui Castigliano

După calcule, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = -\frac{F \cdot R_m^3}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad (28)$$

Relația (28) permite calculul teoretic al deplasării orizontale din punctul 2, produsă de forța exterioară F cu formula lui Castigliano.

▪ *calculul deplasării verticale, δ_v teoretic*

Deplasarea verticală este produsă de forța concentrată verticală F, existentă deja în punctul 2 (Fig. 8.), iar relația de calcul a deplasării verticale cu formula lui Castigliano are expresia:

$$\delta_v \text{ teoretic} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F} \cdot ds \quad (29)$$

Tabelul 9. Termeni de calcul pentru deplasarea verticală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F_0}$
2-1	$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	$R_m \cdot \sin\varphi$

În relația (29) se introduc termenii din Tabelul 9 și se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot (R_m \cdot \sin\varphi) \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (30)$$

Se obține astfel relația de calcul a deplasării verticale:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{\pi \cdot F \cdot R_m^3}{4 \cdot E \cdot I_z} \quad (31)$$

Relația (31) permite calculul teoretic al deplasării verticale din punctul 2, produsă de forța exterioară concentrată F , cu formula lui Castigliano.

• *Metoda Morh – Maxwell* pentru calculul deplasărilor pe orizontală și pe verticală

O altă metodă cu care se pot calcula deplasările pe direcția orizontală și, respectiv, verticală, este metoda Morh – Maxwell. Pentru calculul deplasării orizontale și, respectiv, verticale, se aplică o forță concentrată unitară, în punctul și pe direcția deplasării (Fig. 9.a) și b).

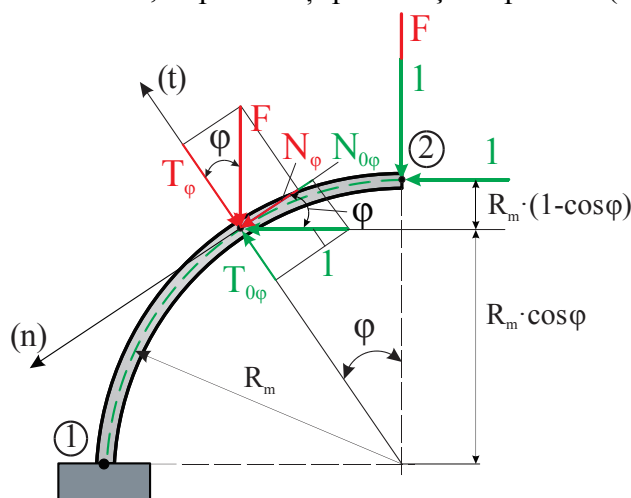


Fig. 9. Schema simplificată a barei de tip semicerc pentru calculul deplasărilor orizontale și, respectiv, verticale pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc

Relația generală de calcul a deplasărilor pe direcția orizontală și, respectiv, verticală este:

$$\delta_{\text{teoretic}} = \int \frac{M_i \cdot m_i}{E \cdot I_z} \cdot ds \quad (32)$$

unde: ds – lungimea arcului de cerc: $ds = R_m \cdot d\varphi$

1 – forța concentrată exterioară, unitară aplicată în punctul și pe direcția deplasării orizontale ($\delta_{h \text{ teoretic}}$) și, respectiv, verticale ($\delta_{v \text{ teoretic}}$)

M_i, m_i – momentul de încovoiere produs de forța concentrată exterioară F , respectiv produs de forța unitară 1, [N·mm]

I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale, [mm⁴]

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

▪ *calculul deplasării orizontale, $\delta_{h \text{ teoretic}}$*

Pentru calculul deplasării orizontale se aplică formula lui Morh – Maxwell. În acest scop, se vor scrie ecuațiile de momente încovoietoare, M_i (pentru încărcarea cu forță exterioară reală F), m_i (pentru încărcarea cu forța unitară orizontală), pe intervalul 2 – 1 în funcție de forța concentrată verticală exterioară F [N] și, respectiv, forța concentrată orizontală unitară 1, (Fig. 9.).

Tabelul 10. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Morh – Maxwell

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i și m_i
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$ $m_{i\varphi} = -1 \cdot R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$

În relația (32) se introduc termenii din Tabelul 10 și relația (32) devine:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot [-R_m(1 - \cos\varphi)] \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (33)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = -\frac{F \cdot R_m^3}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad (34)$$

Relațiile (33) și respectiv, (34), obținute cu formula lui Morh – Maxwell (32), au aceeași formă cu relațiile (27), (28) determinate cu formula lui Castigliano (26). Relația (34) permite calculul deplasării orizontale, $\delta_{h \text{ teoretic}}$.

▪ *calculul deplasării verticale, $\delta_{v \text{ teoretic}}$*

Pentru calculul deplasării verticale se aplică formula lui Morh – Maxwell. În acest scop, se vor scrie ecuațiile de momente încovoietoare, M_i (pentru încărcarea cu forță exterioară reală F), m_i (pentru încărcarea cu forța unitară orizontală), pe intervalul 2 – 1 în funcție de forța concentrată verticală exterioară F [N] și, respectiv, forța concentrată verticală unitară 1, (Fig. 9.).

Tabelul 11. Termeni de calcul pentru deplasarea verticală cu formula lui Morh – Maxwell

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i și m_i
2 – 1	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$ $m_{i\varphi} = R_m \cdot \sin\varphi$

În relația (32) se introduc termenii din Tabelul 11 și, relația (32) devine:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot (R_m \cdot \sin\varphi) \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (35)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{\pi \cdot F \cdot R_m^3}{4 \cdot E \cdot I_z} \quad (36)$$

Relațiile (35) și, respectiv, (36) obținute cu formula lui Morh – Maxwell (32), au aceeași formă cu relațiile (30), (31) determinate cu formula lui Castigliano (29). Relația (36) permite calculul deplasării verticale, $\delta_{v \text{ teoretic}}$.

• **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează în punctul 1 bara curbă de tip sfert de cerc prin intermediul a două plăci de fixare, respectiv cu două șuruburi de fixare;
2. Se poziționează cele două comparatoare digitale, astfel încât palpatoarele să fie în contact cu capătul liber al barei curbe (punctul 2) și să aibă cursă maximă în orice direcție;

3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajului digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator, până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
4. Se prinde cârligul pentru greutăți în capătul liber al barei și, succesiv, se încarcă bara cu greutățile de la 100 până la 500 g, din 100 g în 100 g;
5. Valorile experimentale se citesc astfel:
 - deplasarea pe direcția verticală (δ_v) este dată de comparatorul digital cu plapator vertical;
 - deplasarea pe direcția orizontală (δ_h) este dată de comparatorul digital cu plapator orizontal;
6. Valorile experimentale și teoretice ale deplasărilor (orizontale și verticale) pentru bara curbă de tip sfert de cerc se trec în Tabelul 13;
7. Valorile teoretice ale tensiunilor normale maxime în punctul 1 (σ_e , σ_i), date de relațiile (8) și (9) și calculate pentru unghiul $\varphi = 90^\circ$ pentru bara curbă de tip sfert de cerc se trec în Tabelul 14;
8. Se trasează Diagrama 2 de variație a deplasărilor în funcție de forța aplicată, pentru bara curbă plană de tip sfert de cerc.

• Date de intrare

Tabelul 12. Caracteristici geometrice și de material pentru bara curbă de tip sfert de cerc

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

• Rezultate

Tabelul 13. Rezultatele teoretice și experimentale ale deplasărilor pentru bara curbă de tip sfert de cerc

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deplasarea după axa x (orizontală) [mm]			Deplasarea după axa y (verticală) [mm]		
		δ_h teoretic	δ_h exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_h$ [%]	δ_v teoretic	δ_v exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_v$ [%]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90						

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 14. Rezultatele teoretice și experimentale ale tensiunilor normale pentru bara de tip sfert de cerc

Masa m	Forța aplicată F	Tensiunile normale extreme	
		[N/mm ²]	
[g]	[N]	σ_e	σ_i
100	0,98		
200	1,96		
300	2,94		
400	3,92		
500	4,90		

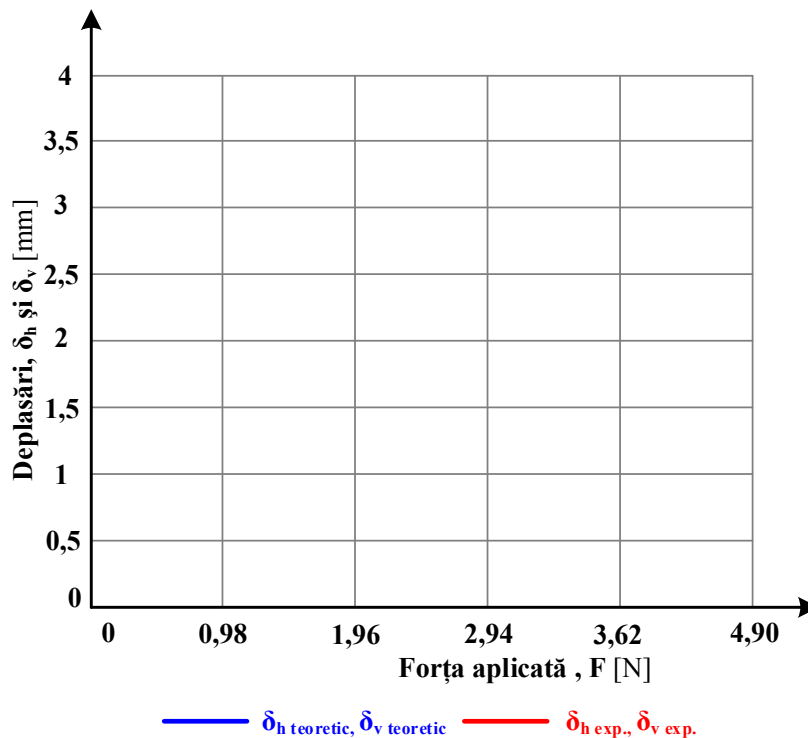


Diagrama 2. Variația deplasărilor orizontale și verticale în funcție de forța aplicată

Experimentul 1.3: Determinarea deplasărilor și tensiunilor normale pentru bara curbă plană de tip grui

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a deplasărilor verticale (δ_v), respectiv, orizontale (δ_h), pentru bara curbă plană de tip grui și compararea valorilor experimentale cu valorile analitice obținute din relații teoretice.

Bara studiată în acest experiment (Fig. 10.) este formată din două porțiuni: o porțiune verticală, definită de punctele 1 – 2 și o porțiune curbă (intervalul 2 – 3), în care eforturile variază pe lungimea porțiunii curbe cu unghiul φ . Bara este încastrată în 1 și sollicitată la încovoiere de forța concentrată F, aplicată în capătul liber (punctul 3).

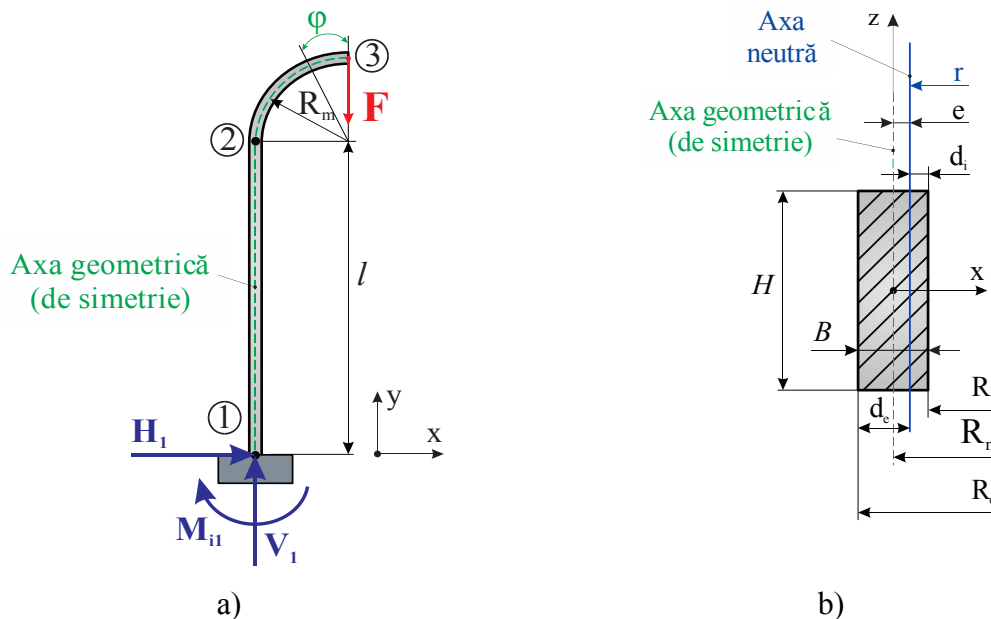


Fig. 10. a) Bară curbă plană de tip grui; b) elementele geometrice ale secțiunii transversale
 Se calculează eforturile N , T și M_i în secțiunea transversală a barei cu metoda secțiunilor și, respectiv, tensiunile normale în secțiunea maxim sollicitată (în încastrare – punctul 1), aplicând una din cele două metode teoretice prezentate anterior.

• **Calculul analitic al eforturilor în secțiune**

Pentru calculul analitic al eforturilor N , T și M_i într-o secțiune oarecare a barei curbe, se aplică metoda secțiunilor. Forța exterioară F , aplicată pe capătul liber al barei pe porțiunea curbă 2 - 3, se descompune în două componente: o componentă normală la secțiune (n), N_φ și, respectiv, o componentă perpendiculară pe secțiune (t), conținută în planul acesteia, T_φ (Fig. 11.a). S-a notat cu φ unghiul de variație de-a lungul barei. Reacțiunile din încastrare (în punctul 1) se calculează aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 = 0 \tag{37}$$

$$\sum F_y = 0; V_1 - F = 0; V_1 = F \tag{38}$$

$$\sum M_1 = 0; M_{i1} - F \cdot R_m = 0; M_{i1} = F \cdot R_m \tag{39}$$

Eforturile se calculează aplicând, succesiv, metoda secțiunilor pe porțiunea de bară dreaptă verticală (intervalul 1 - 2), respectiv, pe porțiunea curbă (intervalul 3 - 2). Se obține:

Tabelul 15. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Eforturile în secțiune	
3 - 2	$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$N_\varphi = -F \cdot \sin\varphi$ $T_\varphi = F \cdot \cos\varphi$ $M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	(40)
1 - 2	$y \in [0; l]$	$N_y(y) = -V_1 = -F$ $T_x(y) = -H_1 = 0$ $M_z(y) = M_{i1} - H_1 \cdot y = M_{i1} = F \cdot R_m$	(41)

Pentru ridicarea diagramelor de variație ale eforturilor N , T și M_i din Fig. 11., pe intervalul 3 - 2 este necesar să se calculeze, succesiv, eforturile pentru $\varphi = 0^\circ$; $\varphi = 45^\circ$; $\varphi = 90^\circ$. Se obține:

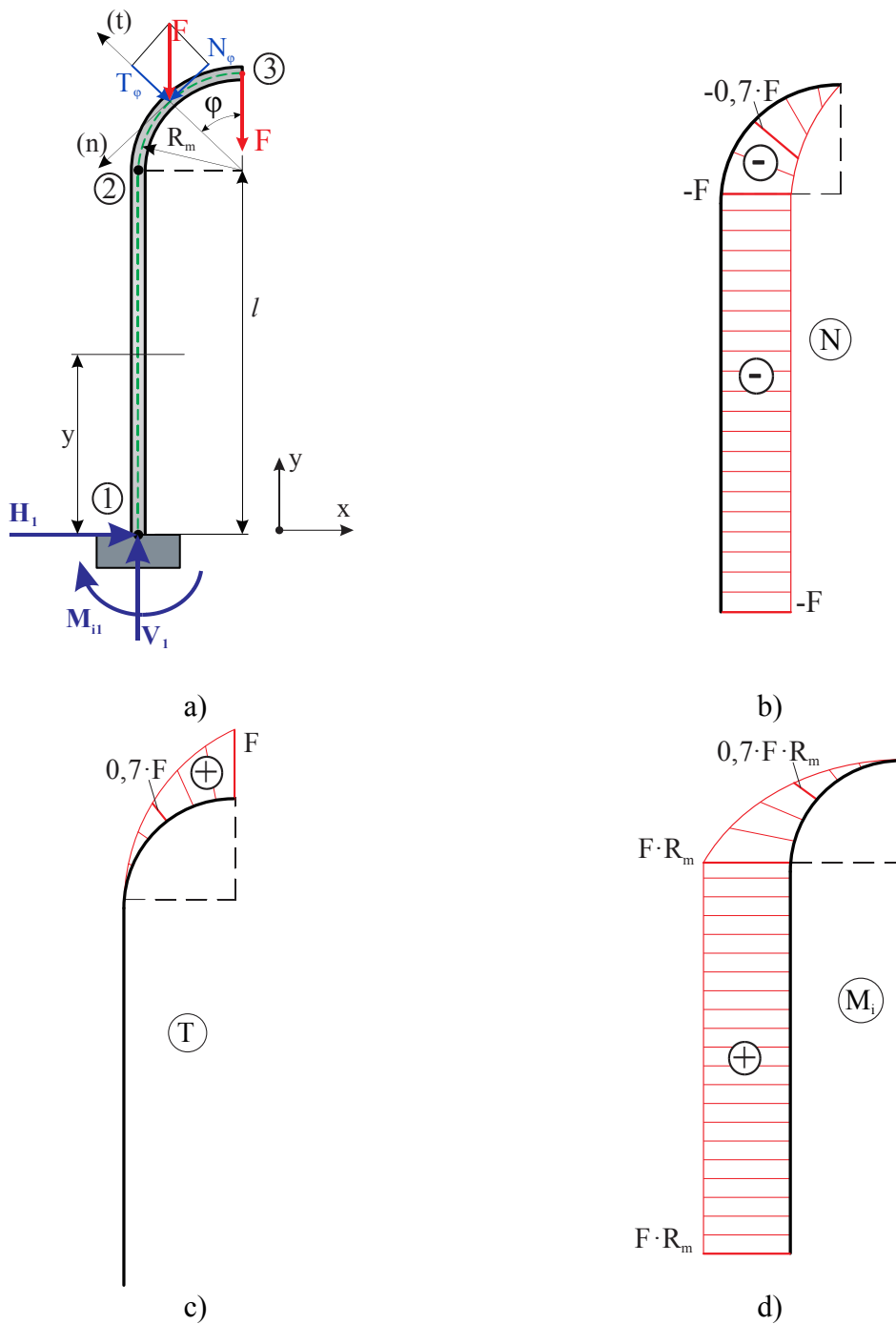


Fig. 11. a) Schema pentru calculul eforturilor N , T și M_i ; b), c) și d) Diagramele de eforturi pentru bara de tip grui

Tabelul 16. Expresiile eforturilor calculate pentru unghiul φ

Unghiul φ	0°	45°	90°
N_φ	0	$-0,7 \cdot F$	$-F$
T_φ	F	$0,7 \cdot F$	0
$M_{i\varphi}$	0	$0,7 \cdot F \cdot R_m$	$F \cdot R_m$

• **Calculul analitic al deplasărilor**

Deplasările verticale și orizontale produse de forța exterioară F [N], aplicată în punctul 3 (Fig. 11.a.), se calculează cu formula lui Castigliano.

▪ *calculul deplasării orizontale, $\delta_{h \text{ teoretic}}$*

Pentru calculul analitic al deplasărilor orizontale, pe direcția orizontală se aplică o forță orizontală concentrată, fictivă egală cu zero, $F_0 = 0$ [N] (Fig. 12.). Relația de calcul a deplasării orizontale are expresia:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_0} \cdot ds \quad (42)$$

- unde: ds – lungimea arcului de cerc: $ds = R_m \cdot d\varphi$
 F_0 – forță concentrată orizontală fictivă, aplicată în punctul și pe direcția deplasării
 $\delta_{h \text{ teoretic}}$ ($F_0 = 0$ dacă F_0 este forță fictivă)
 I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale, [mm⁴]
 ▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

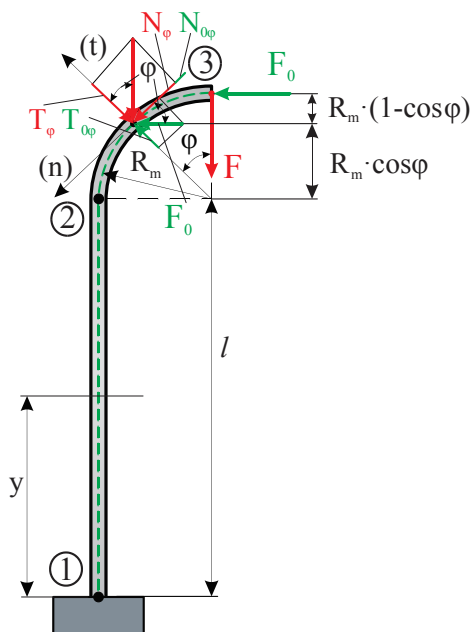


Fig. 12. Schema simplificată a barei de tip grui pentru calculul deplasării orizontale

Tabelul 17. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F_0}$
1 – 2	$y \in [0; l]$	$M_{iz}(y) = -F \cdot R_m + F_0 \cdot (R_m + l) - F_0 \cdot y$	$R_m + l - y$
3 – 2	$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi - F_0 \cdot R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$	$-R_m \cdot (1 - \cos\varphi)$

În (42) se introduc termenii din Tabelul 17 și știind că $F_0 = 0$, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l (-F \cdot R_m) \cdot (R_m + l + y) \cdot dy + \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot [-R_m \cdot (1 - \cos\varphi)] \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (43)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = -\frac{F \cdot R_m \cdot (R_m + l)^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad (44)$$

Relația (44) permite calculul teoretic al deplasării orizontale din punctul 3, produsă de forța exterioară F cu formula lui Castigliano.

▪ *calculul deplasării verticale, δ_v teoretic*

Deplasarea verticală este produsă de forța concentrată verticală existentă F , aplicată în 3 (Fig. 12.) și se poate calcula analitic cu expresia:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F} \cdot ds \quad (45)$$

Tabelul 18. Termeni de calcul pentru deplasarea verticală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F}$
1 – 2	$y \in [0; l]$	$M_{iz}(y) = F \cdot R_m$	R_m
3 – 2	$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$M_{i\varphi} = F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	$R_m \cdot \sin\varphi$

În relația (45) se introduc termenii din Tabelul 18 și se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = +\frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l (F \cdot R_m) \cdot R_m \cdot dy + \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \cdot R_m \cdot \sin\varphi) \cdot (R_m \cdot \sin\varphi) \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (46)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot R_m^2}{4 \cdot E \cdot I_z} (R_m \cdot \pi + 4 \cdot l) \quad (47)$$

Relația (47) permite calculul teoretic al deplasării verticale din punctul 3, produsă de forța exterioară concentrată verticală F cu formula lui Castigliano.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează în punctul 1 bara de tip grui prin intermediul a două plăci de fixare, respectiv cu două șuruburi de fixare;

- Se poziționează cele două comparatoare digitale astfel încât palpatoarele să fie în contact cu capătul liber al barei curbe (punctul 3) și să aibă cursă maximă în orice direcție;
- Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajul digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator, până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
- Se prinde cârligul pentru greutateți în capătul liber al barei și se încarcă, succesiv, cu greutatețile de la 100 până la 500 g, din 100 g în 100 g;
- Valorile experimentale se citesc astfel:
 - deplasarea pe direcția verticală (δ_v) este dată de comparatorul digital cu palpator vertical;
 - deplasarea pe direcția orizontală (δ_h) este dată de comparatorul digital cu palpator orizontal;
- Valorile experimentale și teoretice ale deplasărilor (orizontale și verticale) pentru bara de tip gruie se trec în Tabelul 20;
- Valorile teoretice ale tensiunilor normale maxime în punctele 1 și 2 (σ_e , σ_i), calculate cu relațiile (8) și (9) pentru bara de tip gruie se trec în Tabelul 21;
- Se trasează Diagrama 3 de variație ale deplasărilor în funcție de forța exterioară aplicată, pentru bara plană de tip gruie.

• **Date de intrare**

Tabelul 19. Caracteristici geometrice și de material pentru bara de tip gruie

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

• **Rezultate**

Tabelul 20. Rezultatele teoretice și experimentale ale deplasărilor pentru bara de tip gruie

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deplasarea după axa x (orizontală) [mm]			Deplasarea după axa y (verticală) [mm]		
		δ_h teoretic	δ_h exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_h$ [%]	δ_v teoretic	δ_v exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_v$ [%]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90						

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 21. Rezultatele teoretice și experimentale ale tensiunilor normale pentru bara de tip gruiie

Masa m	Forța aplicată F	Tensiunile normale extreme (în punctele 1 și 2)	
		[N/mm ²]	
[g]	[N]	σ_e	σ_i
100	0,98		
200	1,96		
300	2,94		
400	3,92		
500	4,90		

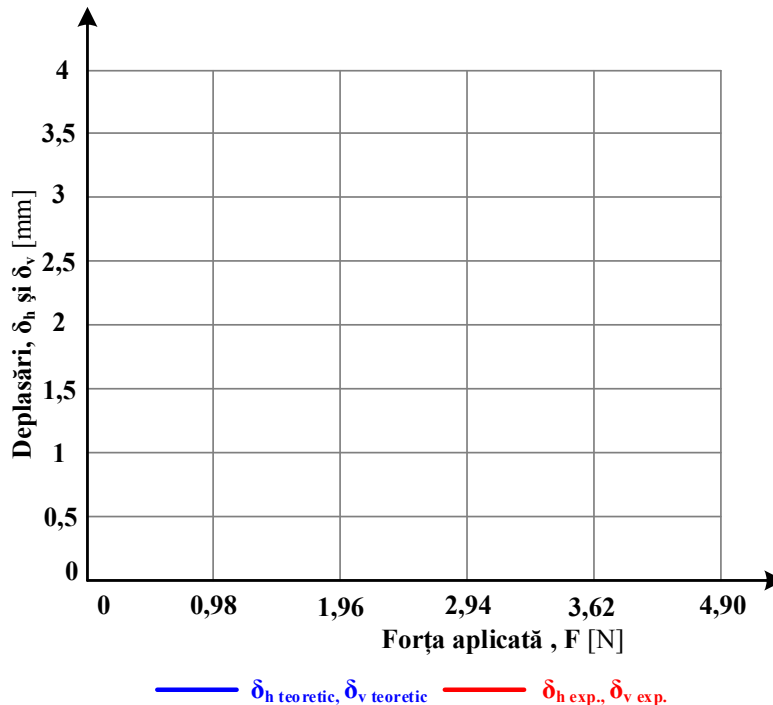


Diagrama 3. Variația deplasărilor orizontale și verticale în funcție de forța aplicată la bara de tip gruiie

Experimentul 1.4: Determinarea deplasărilor și tensiunilor normale pentru o bară cotită plană

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a deplasărilor verticale (δ_v), respectiv, orizontale (δ_h) pentru bara cotită plană și compararea valorilor experimentale cu valorile analitice obținute din relații teoretice. Bara cotită studiată este formată dintr-o porțiune verticală de lungime l_1 [mm] (intervalul 1 – 2), și o porțiune dreaptă cu lungimea l_2 [mm] înclinată cu 45° față de axa orizontală, x (Fig. 13.). Bara este încastrată în extremitatea inferioară (punctul 1 din Fig. 13.) și sollicitată la încovoiere de forța concentrată verticală F [N], aplicată în capătul liber (punctul 3).

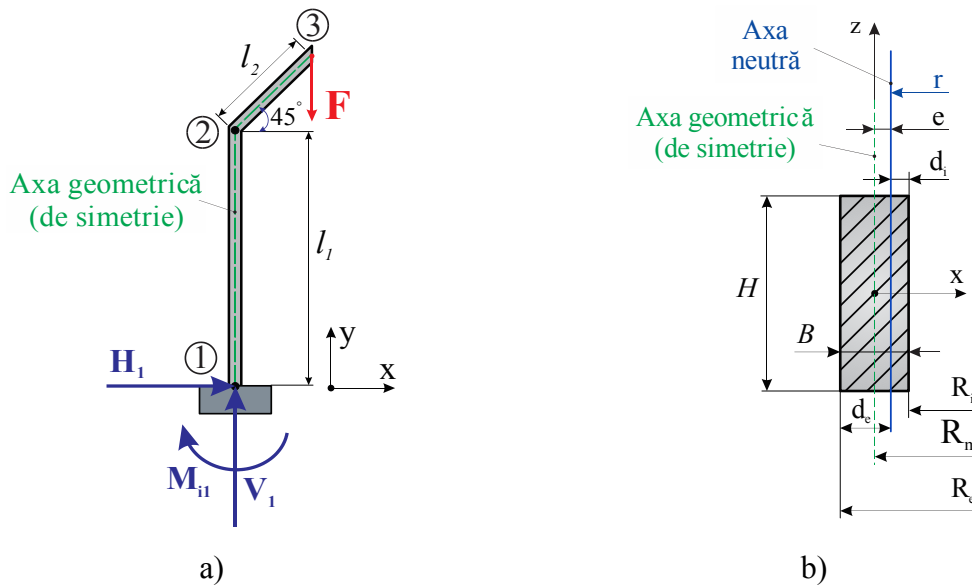


Fig. 13. a) Bară cotită plană; b) elementele geometrice ale secțiunii transversale
Se calculează eforturile N , T și M_i în secțiunea transversală a barei cotite cu metoda secțiunilor și de asemenea se calculează tensiunile normale în secțiunea maxim solicitată (în încăstrare – punctul 1).

• Calculul analitic al eforturilor în secțiune

Pentru calculul analitic al eforturilor N , T și M_i într-o secțiune oarecare a barei cotite se aplică metoda secțiunilor. Forța exterioară F se descompune în două componente (una în lungul barei și cealaltă perpendiculară pe bară), cu unghiul de 45° : o componentă normală la secțiune (N), orientată după axa normală (n) la secțiunea barei, și o componentă perpendiculară la secțiune (T), conținută în planul acesteia și orientată după axa (t) (Fig. 14.). Reacțiunile din încăstrare (punctul 1) se calculează aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0; H_1 = 0 \quad (48)$$

$$\sum F_y = 0; V_1 - F = 0; V_1 = F \quad (49)$$

$$\sum M_1 = 0; M_{i1} + F \cdot l_2 \cdot \cos 45^\circ = 0; M_{i1} = -0,707 \cdot F \cdot l_2 \quad (50)$$

Eforturile se calculează aplicând, succesiv, metoda secțiunilor pe porțiunea de bară dreaptă verticală (intervalul 1 – 2), respectiv pe porțiunea înclinată (intervalul 3 – 2). Se obțin următoarele relații de calcul ale eforturilor în secțiune:

Interval	Variabila	Eforturile în secțiune	
1 – 2	$y \in [0; l_1]$	$N_y(y) = -V_1 = -F$ $T_x(y) = -H_1 = 0$ $M_z(y) = M_{i1} - H_1 \cdot y = M_{i1} = -0,707 \cdot F \cdot l_2$	(51)
3 – 2	$x \in [0; l_2]$	$N_y(y) = -0,707 \cdot F$ $T_x(y) = -0,707 \cdot F$ $M_z(y) = M_{i1} - H_1 \cdot y = M_{i1} = -0,707 \cdot F \cdot l_2$	(52)

Diagramele de eforturi N , T și M_i se construiesc pe baza relațiilor eforturilor în secțiuni, pe intervalele 1 – 2 și, respectiv, 3 – 2, și se obține:

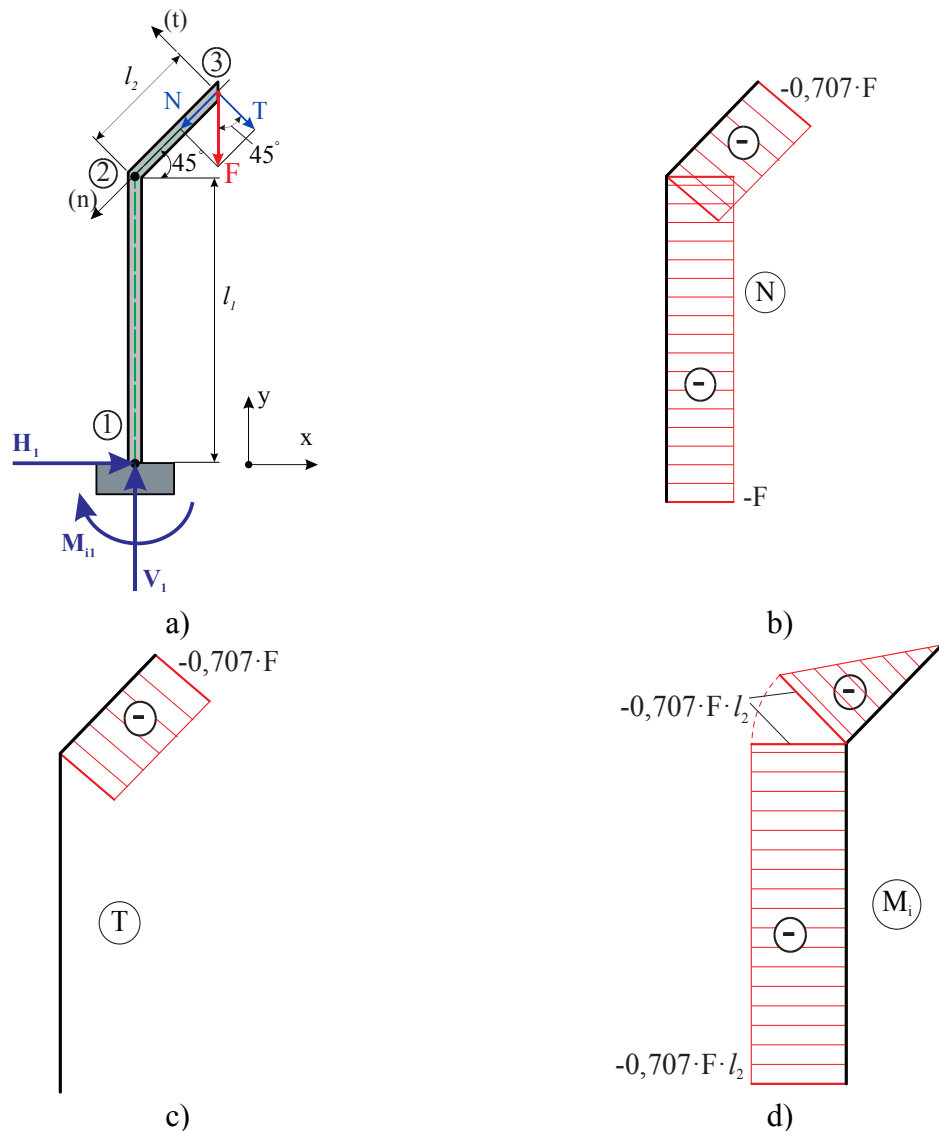


Fig. 14. a) Schema pentru calculul eforturilor N , T și M_i ; b), c) și d) Diagramele de eforturi pentru bara cotită plană

• Calculul analitic al deplasărilor

Deplasările verticale și orizontale produse de forța exterioară concentrată verticală F [N], aplicată în punctul 3 (Fig. 15.), se calculează cu formula lui Castigliano.

▪ *calculul deplasării orizontale*, δ_h teoretic

Pentru calculul analitic al deplasărilor orizontale, pe direcția orizontală se aplică o forță concentrată orizontală fictivă egală cu zero, $F_0 = 0$ [N] (Fig. 15.).

Relația de calcul a deplasării orizontale are expresia:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_0} \cdot dx \quad (53)$$

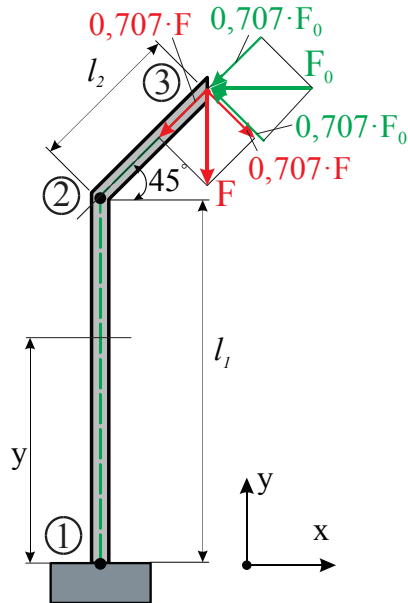


Fig. 15. Schema simplificată pentru bara cotită plană pentru calculul deplasărilor orizontale și, respectiv, verticale

unde: dx – variabila de integrare

F_0 – forță concentrată orizontală fictivă egală cu zero, aplicată în punctul și pe direcția deplasării $\delta_{h \text{ teoretic}}$

I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale, $[\text{mm}^4]$

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Tabelul 22. Termeni de calcul pentru deplasarea orizontală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F_0}$
1 – 2	$y \in [0; l_1]$	$M_{iz}(y) = M_{i1} - H_1 \cdot y = F_0 \cdot (l_1 - 0,707 \cdot l_2) - 0,707 \cdot F \cdot l_2 - F_0 \cdot y$	$l_1 - 0,707 \cdot l_2 - y$
3 – 2	$x \in [0; l_2]$	$M_{iz}(x) = 0,707 \cdot F_0 \cdot x - 0,707 \cdot F \cdot x$	$0,707 \cdot x$

În relația (53) se introduc termenii din Tabelul 22 și, știind că $F_0 = 0$, relația (53) devine:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{l_1} (-0,707 \cdot F \cdot l_2) \cdot (l_1 - 0,707 \cdot l_2 - y) \cdot dy + \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{l_2} (-0,707 \cdot F \cdot x) \cdot (0,707 \cdot x) \cdot dx \quad (54)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{h \text{ teoretic}} = -\frac{F \cdot l_2^3}{6 \cdot E \cdot I_z} - \frac{F \cdot l_1 \cdot l_2}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot (l_2 + 0,707 \cdot l_1) \quad (55)$$

Relația (55) permite calculul teoretic al deplasării orizontale a punctului 3, produsă de forța exterioară concentrată fictivă F_0 cu formula lui Castigliano.

- calculul deplasării verticale, δ_v teoretic

Deplasarea verticală este produsă de forța concentrată verticală reală F [N], aplicată în punctul 3 (Fig. 15.) și are expresia:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \int \frac{M_i}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F} \cdot ds \quad (56)$$

Tabelul 23. Termeni de calcul pentru deplasarea verticală cu formula lui Castigliano

Interval	Variabila	Momentul încovoietor, M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial F}$
1 – 2	$y \in [0; l_1]$	$M_{iz}(y) = M_{i1} = -0,707 \cdot F \cdot l_2$	$-0,707 \cdot l_2$
3 – 2	$x \in [0; l_2]$	$M_{iz}(x) = -0,707 \cdot F \cdot x$	$-0,707 \cdot x$

În relația (56) se introduc termenii din Tabelul 23 și se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{l_1} (-0,707 \cdot F \cdot l_2) \cdot (-0,707 \cdot l_2) \cdot dy + \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^{l_2} (-0,707 \cdot F \cdot x) \cdot (-0,707 \cdot x) \cdot dx \quad (57)$$

După calcule, se obține:

$$\delta_{v \text{ teoretic}} = \frac{F \cdot l_2^2}{6 \cdot E \cdot I_z} (l_2 + 3 \cdot l_1) \quad (58)$$

Relația (58) permite calculul teoretic al deplasării verticale din punctul 3, produsă de forța exterioară verticală concentrată F cu formula lui Castigliano.

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Se fixează în punctul 1 bara cotită plană, prin intermediul a două plăci de fixare, respectiv cu două șuruburi de fixare;
2. Se poziționează cele două comparatoare digitale, astfel încât palpatoarele să fie în contact cu capătul liber al barei cotite (în punctul 3) și să aibă cursă maximă în orice direcție;
3. Se pornește comparatorul și se verifică indicația „zero” a afișajul digital. În caz contrar, setarea se realizează prin apăsarea continuă a butonului *Origin* de pe comparator, până la afișarea valorii de „zero”, luându-se în considerare și greutatea tijei talerului;
4. Se prinde cârligul pentru greutateți în capătul liber al barei cotite și se încarcă, succesiv, cu greutatețile de la 100 până 500 g, din 100 g în 100 g;
5. Valorile experimentale se citesc astfel:
 - deplasarea pe direcția verticală (δ_v) este dată de comparatorul digital cu palpator vertical;
 - deplasarea pe direcția orizontală (δ_h) este dată de comparatorul digital cu palpator orizontal;
6. Valorile experimentale și teoretice ale deplasărilor (orizontale și verticale) pentru bara cotită plană se trec în Tabelul 25;
7. Valorile teoretice ale tensiunilor normale maxime ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), calculate cu relațiile (59), (60) pentru bara curbă cotită plană se trec în Tabelul 26;

$$\sigma_{1,2} = \frac{N_{1,2}}{A} + \frac{M_{i1,2}}{W_z} \quad (59)$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} \quad (60)$$

8. Se trasează Diagrama 4 de variație a deplasărilor în funcție de forța aplicată, pentru bara cotită plană.

• **Date de intrare**

Tabelul 24. Caracteristici geometrice și de material pentru bara cotită plană

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

• **Rezultate**

Tabelul 25. Rezultatele teoretice și experimentale pentru deplasările pentru bara cotită plană

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deplasarea după axa x (orizontală) [mm]			Deplasarea după axa y (verticală) [mm]		
		δ_h teoretic	δ_h exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_h$ [%]	δ_v teoretic	δ_v exp.	Ab.rel. $\Delta\delta_v$ [%]
100	0,98						
200	1,96						
300	2,94						
400	3,92						
500	4,90						

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

Tabelul 26. Rezultatele teoretice și experimentale ale tensiunilor normale pentru bara cotită plană

Masa M [g]	Forța aplicată F [N]	Tensiunile normale în punctele 1, 2 și 3 [N/mm ²]		
		σ_1	σ_2	σ_3
100	0,98			
200	1,96			
300	2,94			
400	3,92			
500	4,90			

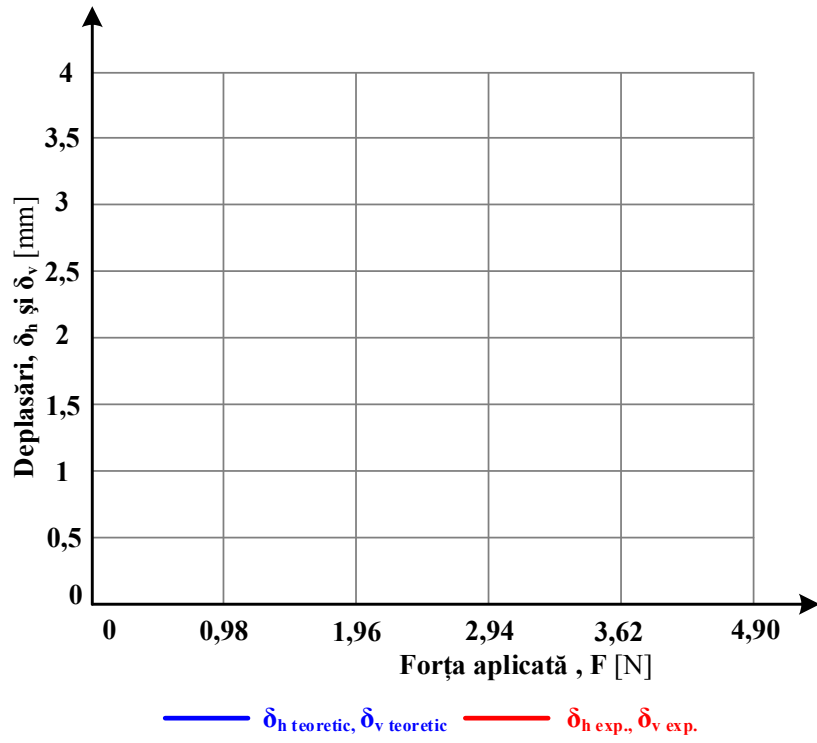


Diagrama 4. Variația deplasărilor orizontale și verticale în funcție de forța aplicată pentru bara cotită plană

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tequipment.com) sunt însoțite și de o un program ce permite reproducerea virtuală a experimentelor desfășurate. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Din această fereastră se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.

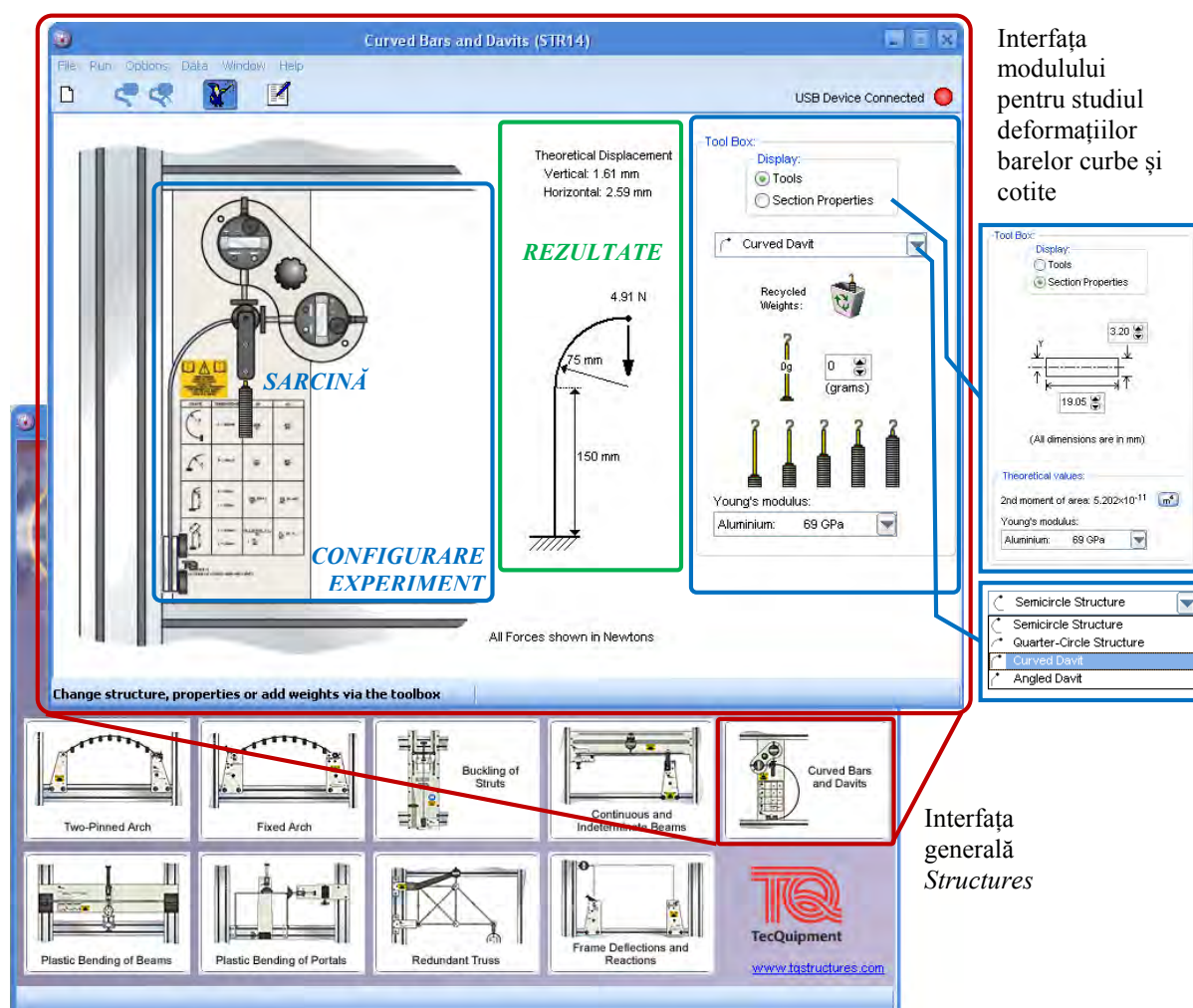


Fig. 4. Modulul *TQ Structures – Curved Bars and Davits* pentru studiul deformațiilor barelor curbe și cotate

Modulul pentru determinarea deformațiilor barelor curbe și cotate (*Curved Bars and Davits*) este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile de desfășurare a experimentelor prin alegerea tipului de structură, definirea secțiunii transversale și adăugarea de sarcini pe structura virtuală. În **ZONA PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR**, programul redă schița de calcul și indică valorile deplasărilor pe direcția verticală și, respectiv, orizontală din capătul liber al barelor curbe sau cotate.



LE10. Determinarea deformațiilor barelor curbe și cotite plane

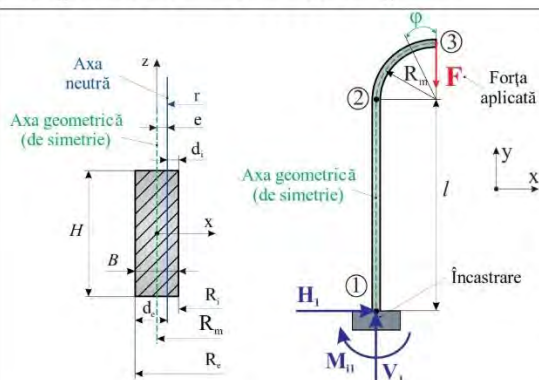
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a deplasărilor (δ_h , δ_v) barelor curbe și cotite solicitate la încovoiere și compararea acestora cu cele obținute cu relații teoretice (calcul analitic). Determinarea tensiunilor normale maxime (σ_{max}) și trasarea diagramelor de variație al acestora în secțiunile maxim solicitate.

• Noțiuni teoretice

Barele curbe plane sunt caracterizate printr-o axă de simetrie curbă plană, iar sarcinile exterioare acționează în planul axei barei. Pentru stabilirea stării de tensiuni și deformații dintr-o bară curbă se trasează diagramele de variație ale eforturilor (N și M_i), solicitarea fiind compusă, cu tensiuni de același tip, $\sigma + \sigma$.

• Experiment — Bară curbă plană



Se cunosc dimensiunile: l, R_m, B, H .

S-au calculat: $R_i = 73,4$ mm, $R_e = 76,6$ mm, $r = 74,98862$ mm, $e = 0,01138$ mm, $d_i = 1,58862$ mm.

Interval	Efort axial N [N]	Moment încovoiitor M_i [N·mm]	Variabila de integrare	Limite
3 - 2	$-F \cdot \sin\varphi$	$-F \cdot R_m \cdot \sin\varphi$	$R_m d\varphi$	$\varphi \in [0, \pi/2]$
2 - 1	$-F$	$-F \cdot R_m$	dy	$y \in [0, l]$

$$W_z = \frac{B \cdot H^2}{6} [\text{mm}^3]; \quad I_z = \frac{B \cdot H^3}{12} [\text{mm}^4]; \quad r = \frac{H}{\ln \frac{R_e}{R_i}} [\text{mm}]$$

■ Calcul analitic al tensiunii normale σ :

• Nodul 1: $y = h/2$ $\sigma_{\max_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_z}$

• Nodul 2: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r - y}$

$y = d_i$ $\sigma_{\max_2} = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{d_i}{R_i}$

■ Calcul analitic al deplasărilor (nodul 3):

$$(u) = \delta_{h\text{teoretic}} = \frac{F \cdot R_m \cdot (R_m + l)^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad (v) = \delta_{v\text{teoretic}} = \frac{F \cdot R_m^2 \cdot (4 \cdot l + \pi \cdot R_m)}{4 \cdot E \cdot I_z}$$

■ Deplasarea experimentală:

- Valoarea deplasărilor pe direcție verticală $\delta_{v\text{exp}}$ și orizontală $\delta_{h\text{exp}}$, produse de forța aplicată F sunt indicate de comparatoare digitale.

Abaterea relativă se calculează:

$$\text{Ab. rel.} = \frac{|\text{Val}_{\text{exp.}}| - |\text{Val}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Masa m [g]	Forța aplicată F [N]	Deplasarea [mm]					Tensiunea normală [N/mm ²]		
		$\delta_{h\text{teoretic}}$	$\delta_{h\text{exp}}$	Ab.rel. $\Delta\delta_h$	$\delta_{v\text{teoretic}}$	$\delta_{v\text{exp}}$	Ab.rel. $\Delta\delta_v$	σ_{\max_1}	σ_{\max_2}
100	0,98								
200	1,96								
300	2,94								
400	3,92								
500	4,90								

LE11. DETERMINAREA FORȚEI CRITICE DE FLAMBAJ A BARELOR DREPTE

SCOPUL LUCRĂRII

Lucrarea are ca obiectiv determinarea experimentală și analitică a forței critice de flambaj pentru o bară dreaptă, în diferite condiții de rezemare și pentru lungimi diferite ale barei. Rezultatele experimentale pentru forța critică de flambaj se vor compara cu cele analitice (calculate cu relațiile teoretice).

INTRODUCERE

Piese mecanice pot ceda în diferite moduri (cum ar fi ruperea la solicitări statice și dinamice), depinzând de tipul structurii, condițiile de rezemare, caracteristicile de geometrie și de material, de tipul sarcinilor exterioare, de regimul de solicitare (static sau dinamic). În practica inginerescă, sunt situații când pot interveni stări de echilibru instabil din punct de vedere elastic: unor creșteri mici ale forțelor aplicate le corespund creșteri foarte mari ale deformațiilor și tensiunilor. Dacă pentru o anumită valoare a forței exterioare F , bara lungă de compresie nu mai revine la forma și poziția inițială (de echilibru elastic stabil), atunci înseamnă că s-a produs fenomenul de pierdere a stabilității elastice. Acest fenomen apare la bare lungi (lungimea barei este mult mai mare decât dimensiunile secțiunii transversale) solicitate la compresiune (solicitare axială) și poartă denumirea de *flambaj*, iar forța care produce acest fenomen se numește *forță critică de flambaj*, F_{cf} . Forța critică de flambaj, F_{cf} este valoarea forței pentru o bară trece din echilibrul stabil în cel instabil. Solicitarea barelor cu sarcini exterioare ale căror valori depășesc valoarea forței critice, duc la apariția deformațiilor mari (deformații plastice, permanente), la apariția microfisurilor în secțiune și, în final, la ruperea acestora.

Flambajul de poate defini astfel: *trecerea unei bare lungi din starea inițială de echilibru elastic stabil în starea finală de echilibru elastic instabil, atunci când forța care o solicită (axial – la compresiune) trece de o anumită valoare critică. Flambajul apare la solicitarea de compresiune axială a unei bare lungi.*

A calcula o bară la flambaj înseamnă a determina valoarea forței critice F_{cf} și a alege forța efectivă, F_{ef} , de solicitare a acesteia de „c” ori mai mică, „c” fiind coeficientul de siguranță la flambaj:

$$F_{ef} = \frac{F_{cf}}{c} \quad (1)$$

S-au studiat patru cazuri generale de flambaj pentru bare drepte și cu secțiune constantă (modulul de rigiditate $E \cdot I_{z \min} = \text{constant}$), pentru patru moduri de rezemare (Tabelul 1): dublu articulat, capăt liber – încastrare, încastrare – articulat, dublu încastrat. Forța critică de flambaj în domeniul elastic se poate calcula cu relația generală a lui Euler:

$$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_f^2} \quad (2)$$

$$l_f = K \cdot l \quad (3)$$

unde: E – modulul de elasticitate longitudinală (sau modulul lui Young), $[N/mm^2]$

l_f – lungimea de flambaj, $[mm]$

l – lungimea barei, $[mm]$

K – coeficient ce ține seama de modul de rezemare al barei, adimensional

I_{\min} – momentul de inerție axial minim, care poate fi după axa z sau y , $[mm^4]$.

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$I_{z \min} = \frac{B \cdot H^3}{12} ; I_{y \min} = \frac{B^3 \cdot H}{12} \quad (4)$$

Lungimea de flambaj, l_f , reprezintă distanța dintre două puncte de inflexiune succesive ale fibrei medii deformate a barei flambate și depinde de modul de rezemare al barei (prin coeficientul K din figurile din Tabelul 1) și se determină în funcție de modul de rezemare al barei.

În Tabelul 1 se prezintă simplicitate cele patru cazuri de flambaj, unde cazul I - bara dreaptă dublu articulată - reprezintă cazul fundamental de flambaj.

Tabelul 1. Cele patru cazuri de flambaj, determinate în funcție de modul de rezemare

Cazul I	Cazul II	Cazul III	Cazul IV
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0,7$	$K = 0,5$
$l_f = l$	$l_f = 2 \cdot l$	$l_f = 0,7 \cdot l$	$l_f = 0,5 \cdot l$
$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{l^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(2 \cdot l)^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,7 \cdot l)^2}$	$F_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,5 \cdot l)^2}$

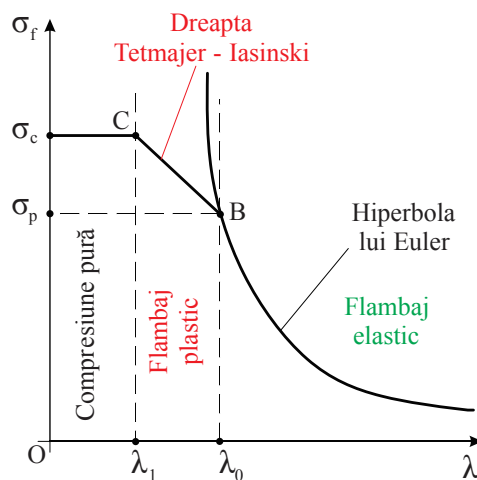


Fig. 1. Delimitarea domeniilor la flambaj în funcție de valoarea coeficientului de zveltețe, λ

În urma studiilor experimentale, cercetătorii au observat că flambajul poate fi în domeniul *elastic* (governat de legea lui Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$) sau în domeniul *plastic*. Pentru identificarea domeniului de flambaj și pentru aplicarea relațiilor de calcul corespunzătoare pentru forța critică de flambaj și tensiunea critică de flambaj, este necesar să se calculeze, mai întâi, un coeficient adimensional, numit *coeficient de zveltețe sau coeficient de subțirime*, λ .

În funcție de coeficientul de zveltețe, s-a trasat grafic variația tensiunii critice de flambaj (Fig. 1.), care este o hiperbolă de gradul al treilea, numită *hiperbola lui Euler*. În funcție de coeficientul de zveltețe λ , se deosebesc *trei zone*:

I. *Zona flambajului elastic*, când $\lambda \geq \lambda_0$ sau $\sigma_f \leq \sigma_p$ unde este valabilă formula lui Euler de calcul pentru forța critică de flambaj (2). Se calculează tensiunea corespunzătoare forței critice de flambaj, denumită *tensiune critică de flambaj*, cu expresia:

$$\sigma_{cf} = \frac{F_{cf}}{A_{ef}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{A_{ef} \cdot l_f^2} \quad (5)$$

unde: A_{ef} – aria efectivă (calculată) a secțiunii transversale, [mm²]

▪ pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$A_{ef} = B \cdot H \quad (6)$$

În relația (5), momentul de inerție se calculează ca produs între aria secțiunii transversale și pătratul razei minime de inerție (de girație), cu relația:

$$I_{\min} = A_{ef} \cdot i_{\min}^2 \quad (7)$$

Din relația (4), rezultă expresia de calcul pentru raza de inerție minimă:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{ef}}} \quad (8)$$

Ținând cont de expresia (7), relația (5) devine:

$$\sigma_{cf} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_{ef} \cdot i_{\min}^2}{A_{ef} \cdot l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_f}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (9)$$

Din relația (9), coeficientul de zveltețe λ se calculează astfel:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} \quad (10)$$

II. *Zona flambajului plastic*, când $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ sau $\sigma_f > \sigma_p$ în care nu mai este valabilă formula lui Euler. Pentru oțeluri, se calculează tensiunea critică de flambaj cu relația empirică propusă de Tetmajer – Iasinski:

$$\sigma_{cf} = a - b \cdot \lambda \quad (11)$$

unde: a și b – sunt coeficienți corespunzători pentru un anumit material și sunt adimensionali (Tabelul 2).

Se determină coeficientul de siguranță la flambaj (c_{cf}) cu relația (12) și se compară cu coeficientul de siguranță impus (c_{impus}) date în Tabelul 3.

$$c_{cf} = \frac{\sigma_{cf}}{\sigma_{ef}} \geq c_{impus} \quad (12)$$

unde:

$$\sigma_{ef} = \frac{F}{A_{ef}} \quad (13)$$

În Tabelul 2 sunt dați coeficienții a și b din relația (11), respectiv λ_0 și λ_1 (din Fig. 1.), pentru câteva materiale uzuale.

Tabelul 2. Coeficienții a și b, respectiv λ_0 și λ_1 pentru materialele uzuale

Materialul	a	b	λ_0	λ_1
Oțel OL37 ($\sigma_r = 370 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_c = 240 \text{ N/mm}^2$)	304	1,12	105	60
Oțel cu $\sigma_r = 480 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_c = 310 \text{ N/mm}^2$	460	2,57	100	60
Oțel cu $\sigma_r = 520 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_c = 360 \text{ N/mm}^2$	577	3,74	100	60
Oțel cu 5% Nichel	461	2,25	86	0
Oțel Crom - Molibden	980	5,30	55	0
Duraluminiu	372	2,14	50	0
Lemn	28,7	0,19	100	0

Tabelul 3. Coeficienți de siguranță pentru diferite piese din domeniul ingineresc

Domeniul de utilizare		Coeficient de siguranță, C_{impus}
Tija pistonului	Mașini cu un cilindru	8 ÷ 12
	Mașini cu un cilindru și contratijă	4 ÷ 8
	Mașini cu doi cilindri	
Biela	Mașini termice mari	14 ÷ 28
	Motoare de autovehicule	4 ÷ 5,5
Elemente de construcții din:	Oțel	1,7 ÷ 2,4
	Lemn	5 ÷ 10
	Fontă	5 ÷ 5,5
Piese de mașini metalice, obișnuite		4 ÷ 12
Piese de mașini supuse la solicitări variabile		14 ÷ 28

III. Zona compresiunii pure, când $0 < \lambda < \lambda_1$ bara nu flambează și se produc deformații mici, iar calculul se face la compresiune simplă. Se calculează tensiunea efectivă (σ_{ef}) din secțiunea transversală a barei și se compară cu rezistența admisibilă a materialului (σ_a):

$$\sigma_{ef} = \frac{F_{ef}}{A_{ef}} \leq \sigma_a \quad (14)$$

În general, pentru calcul la flambaj al barelor drepte cu secțiune constantă se parcurg etapele prezentate sub forma schemei logice prezentată în Fig. 2.

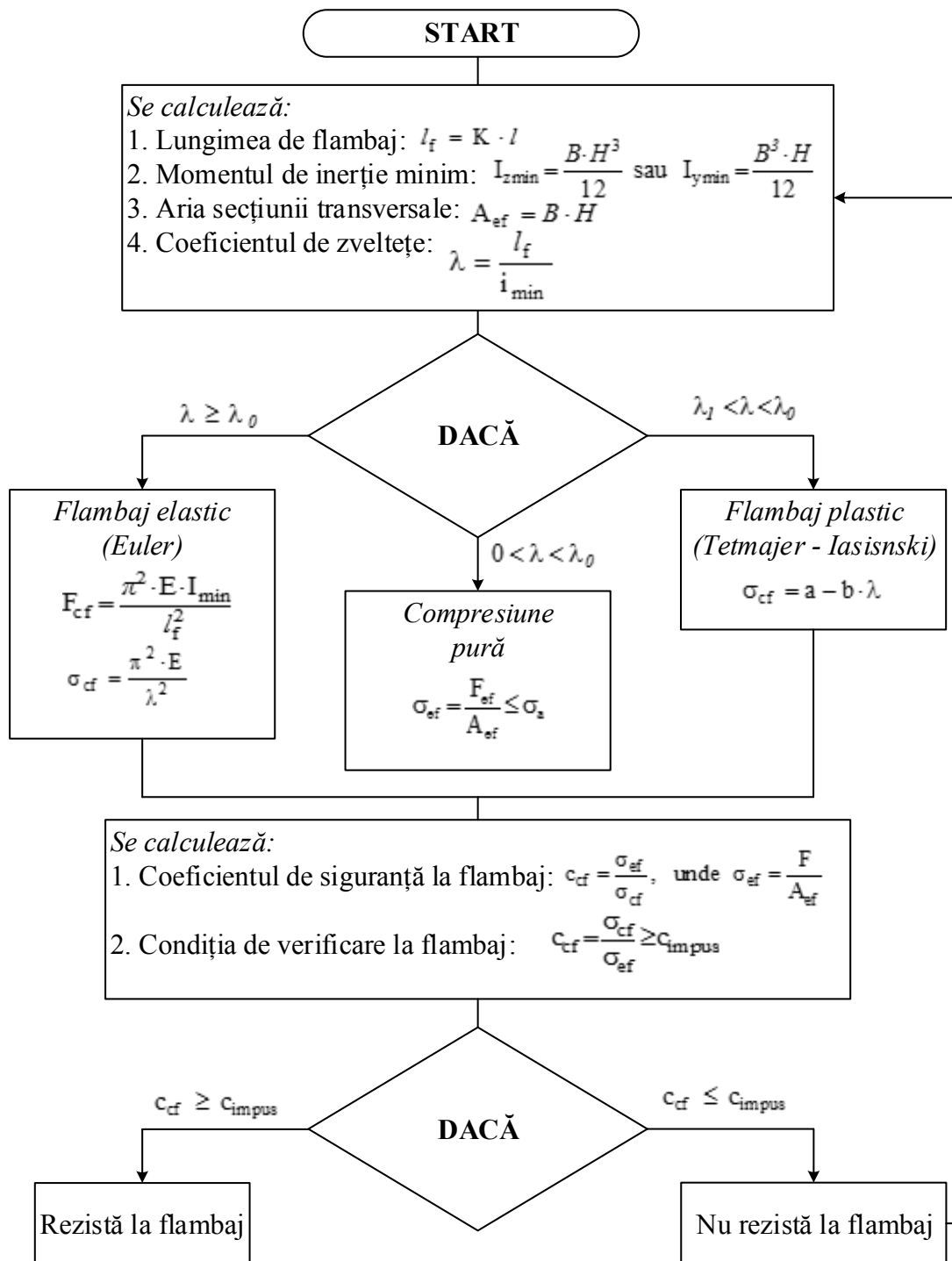


Fig. 2. Scema logică pentru calculul la flambaj al barelor drepte

DESCRIEREA STANDULUI EXPERIMENTAL

În Fig. 3. este prezentată schema de ansamblu a echipamentelor pentru măsurarea forței critice de flambaj, pentru bare de lungimi diferite și diferite cazuri de rezemare:

- **Barele** sunt în număr de cinci, având secțiuni dreptunghiulară și lungimi diferite;
- Solicitarea la flambaj se efectuează prin acționarea **roții de mână**, care produce deplasarea pe verticală a traversei;
- **Traversa** reprezintă reazemul din extremitatea superioară a barei și este o piesă prevăzută cu o creștătură și găuri filetate, ce permit montajul **dispozitivului de încastrare**. Fără acest dispozitiv, bara se poziționează în creștătura traversei, realizându-se astfel rezemare prin articulație în extremitatea superioară a barei;
- **Dispozitivul pentru articulație** este prevăzut cu o creștătură ce permite rotația barei în reazem, realizându-se astfel rezemarea prin articulație în extremitatea inferioară al barei studiate;
- **Placa suport** servește ca bază pentru montarea roții de mână și a traversei, asigurând și ghidarea mișcării pe verticală a traversei, prin intermediul tijelor montate solidar cu placa. Aceasta facilitează re poziționarea simultană a componentelor ce constituie mecanismul de solicitare al barei;
- **Șinele de ghidare** permit reglarea poziției plăcii suport în funcție de lungimea barei studiate, în condițiile menținerii alinierii pe verticală a celor două reazeme din extremitățile barei;
- **Sistemul pentru condiționarea semnalului traductorului de forță** este un ansamblu de circuite electronice, care asigură adaptarea tensiunii traductorului (amplificare), filtrarea semnalului și procesări analogice (liniarizare, derivare, integrare ș.a., dacă se impun);

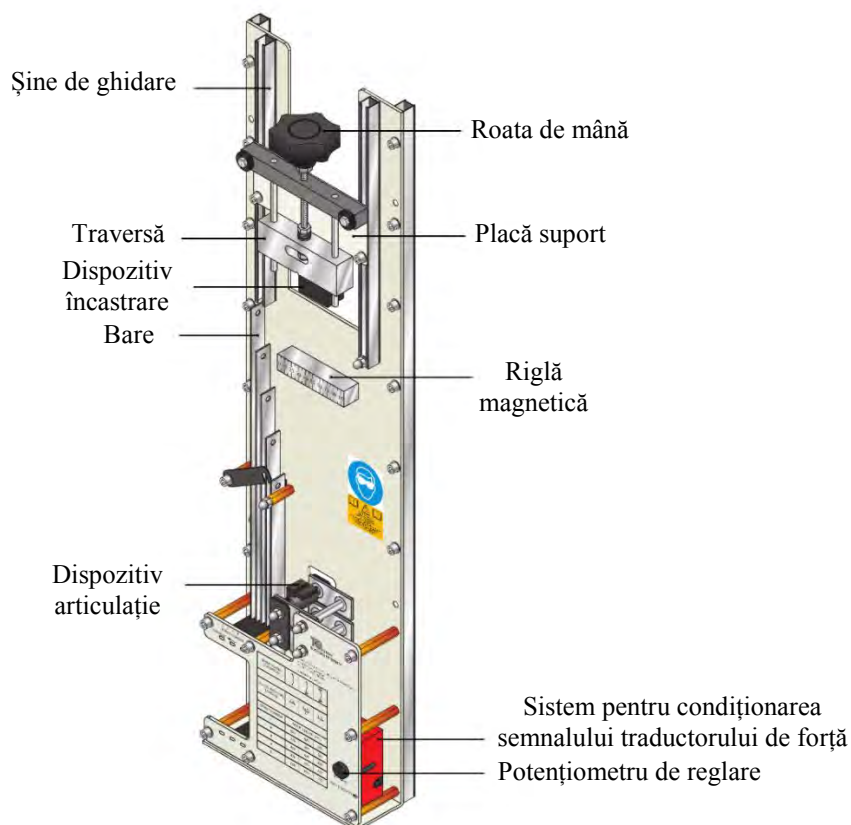


Fig. 3. Echipamentele pentru măsurarea forței critice de flambaj pentru bare de lungimi diferite și moduri diferite de rezemare

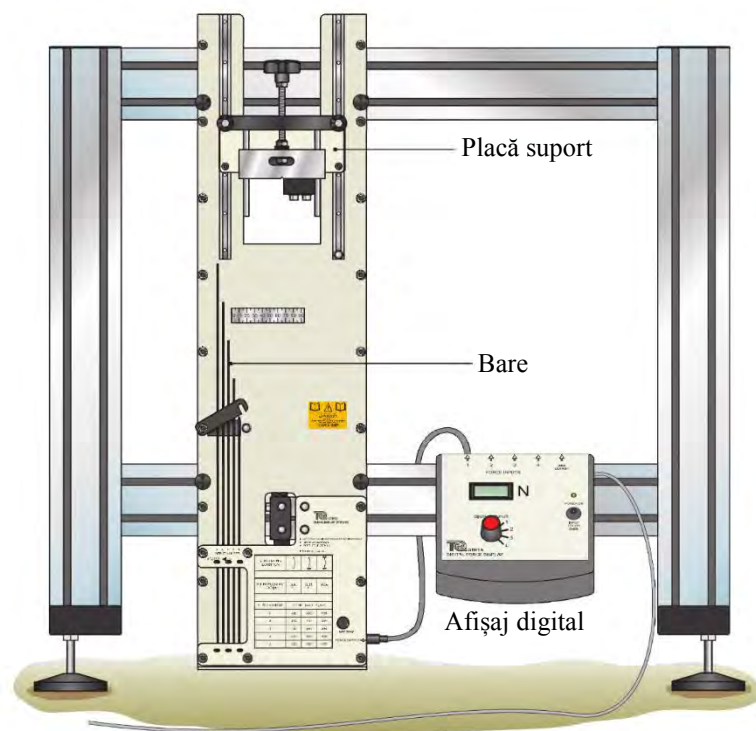


Fig. 4. Standul pentru măsurarea forței critice de flambaj pentru bare de lungimi diferite și diferite moduri de rezemare

- **Potențiometrul de reglare** asigură posibilitatea de aducere la „zero” a indicației pentru valoarea forței ce se măsoară;
- **Rigla magnetică** permite măsurarea aproximativă a deformației barei atunci când s-a atins valoarea forței critice de flambaj. Magnetul permite re poziționarea riglei în zona deformațiilor maxime ale barei, zonă care depinde de modul de rezemare studiat.

În Fig. 4. este prezentată schema standului pentru măsurarea forței critice de flambaj pentru bare de lungimi diferite și moduri diferite de rezemare. Echipamentele descrise anterior sunt fixate pe cadrul de solicitare furnizat de producător și sunt completate de un afișaj digital, care preia semnalul traductorului de forță și îl redă în formă numerică. Valoarea măsurată a forței critice de flambaj poate fi preluată și din software-ul care însoțește echipamentul.

EFFECTUAREA LUCRĂRII

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale pentru forța critică de flambaj, se consideră bara dreaptă cu secțiune dreptunghiulară și cu lungimea variabilă l [mm], rezemată succesiv, astfel: Caz 1 – dublu articulată, Caz 3 – încastrată în extremitatea superioară și articulată în extremitatea inferioară, Caz 4 – dublu încastrată. Bara dreaptă este solicitată la compresiune de forță concentrată F [N]. În urma solicitării, bara, inițial dreaptă, se deformează, se flambează, trecând într-o stare de echilibru instabil.

Experiment 1: Măsurarea forței critice de flambaj pentru bara dreaptă dublu articulată

Se urmărește măsurarea experimentală a forței critice de flambaj pentru o bară dreaptă dublu articulată, în 1 și 2 (Fig. 5.) și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. De asemenea,

se urmărește ce se întâmplă cu valoarea forței critice de flambaj dacă se păstrează condițiile de rezemare, caracteristicile geometrice și de material ale barei, dar se modifică lungimea acesteia.

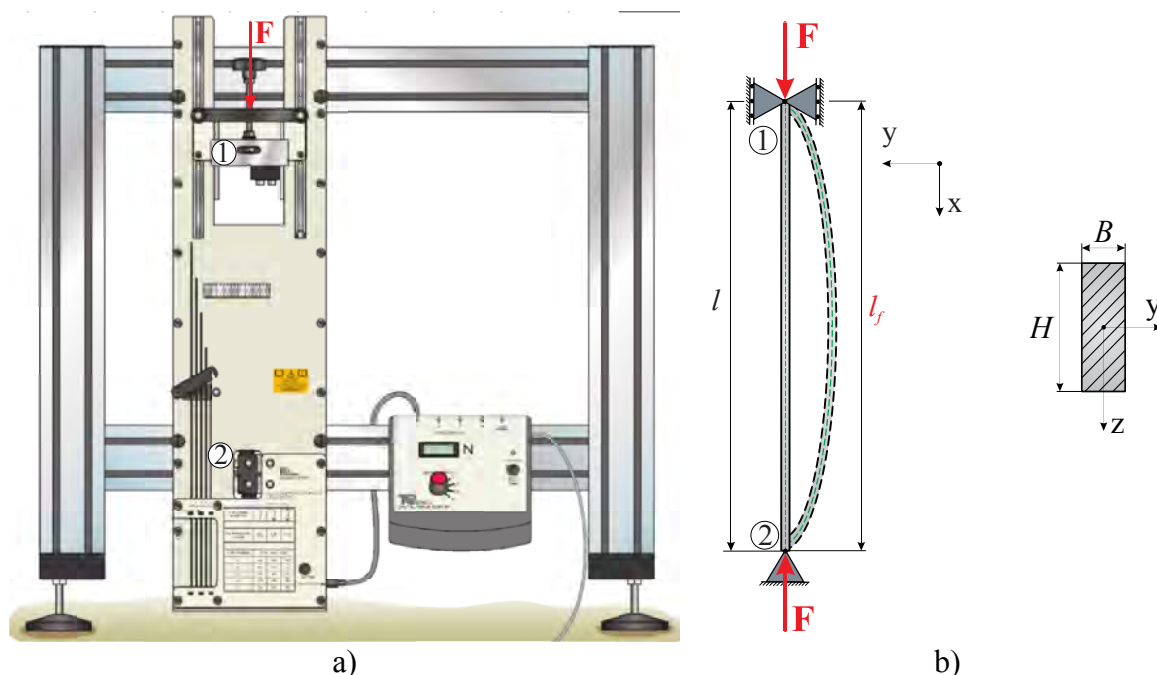


Fig. 5. Determinarea forței critice de flambaj pentru o bară dublu articulată:
a) standul experimental; b) reprezentarea simplificată

Bara dreaptă se solicită axial (la compresiune) cu forța concentrată F [N] până când se obține forța critică de flambaj, F_{cf} .

• Calculul analitic a forței critice de flambaj

Se calculează lungimea de flambaj, în funcție de coeficientul K , cu relația:

$$l_f = K \cdot l \quad (15)$$

unde: K – coeficient ce ține seama de modul de rezemare al barei

Pentru o bară dublu articulată, lungimea de flambaj este l_f , care este lungimea inițială a barei l [mm], cu coeficientul $K = 1$.

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii:

Aria secțiunii transversale: $A_{ef} = B \cdot H \quad (16)$

Momentul de inerție axial minim: $I_{z \min} = \frac{B^3 \cdot H}{12} \quad \text{sau} \quad I_{y \min} = \frac{B \cdot H^3}{12} \quad (17)$

Pentru a stabili domeniul de flambaj, se calculează coeficientul de zveltețe λ (conform relației (10)):

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I_{z \min}}{A}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{B^3 \cdot H}{12 \cdot B \cdot H}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{B^2}{12}}} \quad (18)$$

În domeniul elastic de solicitare la compresiune, forța critică de flambaj se calculează aplicând formula lui Euler, care are expresia generală:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_f^2} \quad (19)$$

unde: $F_{cf \text{ teoretic}}$ – forța critică de flambaj, [N]
 l_f – lungimea de flambaj, [mm]
 E – modulul de elasticitate longitudinală (modulul lui Young), [N/mm²]
 I_{\min} – momentul de inerție axial minim al secțiunii, [mm⁴].

Din relația (19) rezultă că forța critică de flambaj depinde de lungimea de flambaj – de modul de rezemare, de forma secțiunii transversale – prin modulul de inerție axial minim, I_{\min} , respectiv de materialul din care este confecționată bara – prin modulul de elasticitate longitudinală (sau modulul lui Young), E .

Expresia forței critice de flambaj (19) devine:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(K \cdot l)^2} \quad (20)$$

Pentru bara dreaptă dublu articulată, forța critică de flambaj în domeniul elastic se calculează cu formula lui Euler:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(1 \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{l^2} \quad (21)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Pentru a obține o bară dublu articulată (Fig. 5.), pe standul experimental, se montează în extremitatea inferioară (punctul 2) un dispozitiv - articulație, iar în extremitatea superioară (punctul 1) traversa mobilă, prevăzute cu canale în V;
2. Se modifică distanța pe verticală între cele două reazeme (care trebuie să fie egală cu lungimea barei l [mm] – prima valoare a lungimii din Tabelul 2), prin glisarea plăcii suport a traversei mobile pe cele două șine. Fixarea la o anumită distanță se realizează prin intermediul a două șuruburi de fixare (care au și rolul de blocare în cazul unei glisări necontrolate a traversei mobile);
3. Se poziționează bara de lungime l [mm] între cele două reazeme (în canalele V), astfel încât bara dreaptă să fie într-o poziție verticală stabilă;
4. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță. Traductorul de forță este cuplat la reazemul articulat din extremitatea inferioară (punctul 2);
5. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*);
6. Se solicită bara la compresiune prin intermediul roții de mână (sau a șurubului de solicitare), producând deformarea elastică în planul xOy ;
7. Bara se solicită până când, pe afișajul digital, forța indicată nu se mai modifică. În această situație înseamnă că forța aplicată barei a atins valoarea critică de flambaj;
8. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara de lungime l [mm] se trec în Tabelul 5;
9. Aplicând etapele 2 – 8, în mod similar, se măsoară experimental forța critică de flambaj pentru bara dreaptă cu lungimile l [mm] din Tabelul 5;
10. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara cu lungimile l [mm] se trec în Tabelul 5;
11. Se trasează Diagrama 1 de variație ale valorilor analitice și experimentale pentru forța critică de flambaj în funcție de lungimea barei.

- **Date de intrare**

Tabelul 4. Caracteristici geometrice și de material pentru bara dublu articulată

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial minim $I_{z \min}$ [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

- **Rezultate**

Tabelul 5. Rezultatele teoretice și experimentale pentru forța critică de flambaj pentru bara dublu articulată

Lungimea barei l [mm]	Lungimea de flambaj $l_f=l$ [mm]	Raza minimă de inerție $i_{z \min}$ [mm]	Coeficientul de zveltețe λ	Forța critică de flambaj F_{cf} [N]		Ab.rel. ΔF_{cf} [%]
				$F_{cf \text{ teoretic}}$	$F_{cf \text{ exp.}}$	
320						
370						
420						
470						
520						

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. \text{ rel.} = \frac{|Val. \text{ exp.} - |Val. \text{ teoretică}|}{|Val. \text{ exp.}|} \cdot 100 \text{ [%]}$

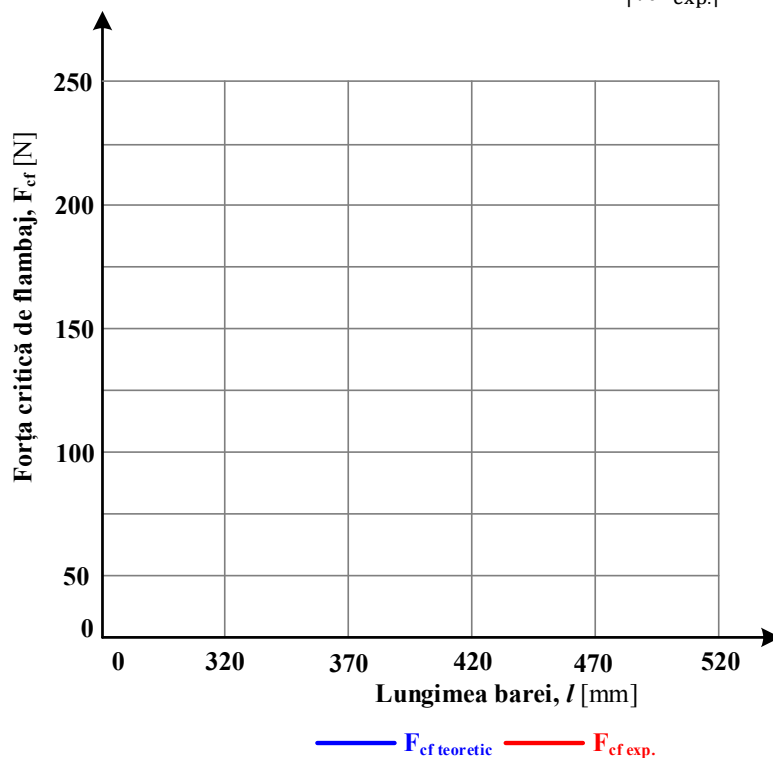


Diagrama 1. Variația forței critice de flambaj în funcție de lungime pentru bara dublu articulată

Experiment 2: Măsurarea forței critice de flambaj pentru bara dreaptă încastrată la un capăt și articulată la celălalt capăt

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a forței critice de flambaj pentru o bară dreaptă, încastrată în punctul 1 și articulată în punctul 2 (Fig. 6.) și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. De asemenea, se urmărește variația valorilor forței critice de flambaj, dacă se păstrează condițiile de rezemare, caracteristicile geometrice și de material ale barei, dar se modifică lungimea acesteia. Bara dreaptă se soliciță cu forța concentrată F [N] până când se obține forța critică de flambaj, F_{cf} .

• **Calculul analitic a forței critice de flambaj**

Se calculează lungimea de flambaj, în funcție de coeficientul K , cu relația:

$$l_f = K \cdot l \quad (22)$$

unde: K – coeficient ce ține seama de modul de rezemare al barei

Pentru o bară încastrată la extremitatea superioară și articulată la extremitatea inferioară, lungimea de flambaj este $l_f = 0,7 \cdot l$ [mm], pentru care coeficientul $K = 0,7$.

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii:

Aria secțiunii
transversale:

$$A_{ef} = B \cdot H \quad (23)$$

Momentul de inerție
axial minim:

$$I_{z \min} = \frac{B^3 \cdot H}{12} \quad \text{sau} \quad I_{y \min} = \frac{B \cdot H^3}{12} \quad (24)$$

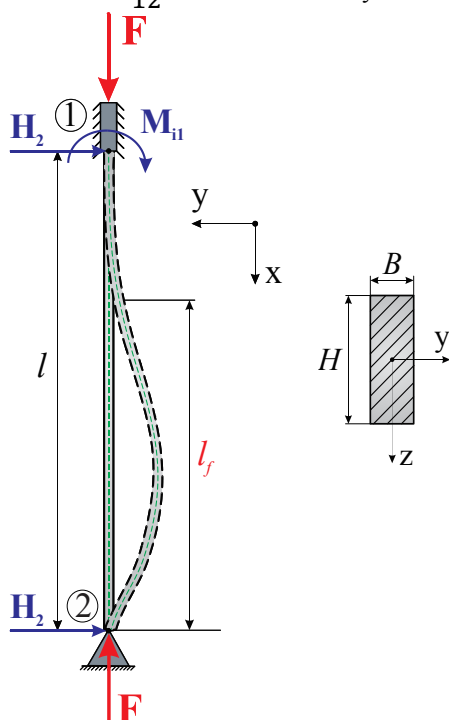


Fig. 6. Determinarea forței critice de flambaj pentru o bară încastrată la un capăt și articulată la celălalt capăt

Pentru a stabili domeniul de flambaj, se calculează coeficientul de zveltețe λ (conform relației (10)):

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot l}{\sqrt{\frac{I_{z \min}}{A}}} = \frac{0,7 \cdot l}{\sqrt{\frac{B^3 \cdot H}{12 \cdot B \cdot H}}} = \frac{0,7 \cdot l}{\sqrt{\frac{B^2}{12}}} \quad (25)$$

În domeniul elastic de solicitare la compresiune, forța critică de flambaj se calculează aplicând formula lui Euler, care are expresia generală:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_f^2} \quad (26)$$

unde: $F_{cf \text{ teoretic}}$ – forța critică de flambaj, [N]
 l_f – lungimea de flambaj, [mm]
 E – modulul de elasticitate longitudinală (modulul lui Young), [N/mm²]
 I_{\min} – momentul de inerție axial minim al secțiunii, [mm⁴].

Din relația (26) rezultă că forța critică de flambaj depinde de lungimea de flambaj – de modul de rezemare, de forma secțiunii transversale – prin modulul de inerție axial minim, I_{\min} , respectiv de materialul din care este confecționată bara – prin modulul de elasticitate longitudinală (sau modulul lui Young), E .

Expresia forței critice de flambaj (26) devine:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(K \cdot l)^2} \quad (20)$$

Pentru bara dreaptă încastrată la un capăt și articulată la celălalt capăt, forța critică de flambaj este:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,7 \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{0,49 \cdot l^2} \quad (21)$$

• Măsurători experimentale

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Pentru a obține o bară articulată la un capăt și încastrată la celălalt capăt (Fig. 6.), pe standul experimental, se montează în extremitatea inferioară (punctul 2) un dispozitiv - articulație, iar în extremitatea superioară (punctul 1) pe traversa mobilă, se fixează dispozitivul de încastrare prin intermediul a două șuruburi;
2. Se modifică distanța pe verticală între cele două reazeme (care trebuie să fie egală cu lungimea barei l [mm] – prima valoare a lungimii din Tabelul 4), prin glisarea plăcii suport a traversei mobile pe cele două șine. Fixarea la lungimea l [mm] se realizează prin intermediul a două șuruburi de fixare (care au și rolul de blocare, în cazul unei glisări necontrolate a traversei mobile);
3. Se poziționează bara de lungime l [mm] între cele două reazeme, astfel: se fixează bara pe dispozitivul de încastrare cu un șurub de fixare (fixarea se face fără joc), apoi bara se poziționează în canalul V al reazemului articulată;
4. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță. Traductorul de forță este cuplat la reazemul articulată din extremitatea inferioară (punctul 2);
5. Se verifică indicația „zero” a canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*);
6. Se solicită bara la compresiune prin intermediul roții de mână (sau a șurubului de solicitare), producând deformarea elastică în planul xOy ;
7. Bara se solicită până când, pe afișajul digital, forța indicată nu se mai modifică. În această situație, înseamnă că forța aplicată barei a atins valoarea critică;

8. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara de lungime l [mm] se trec în Tabelul 7;
9. Aplicând etapele 2 – 8, în mod similar, se măsoară experimental forța critică de flambaj pentru bara dreaptă cu lungimile l [mm] din Tabelul 7;
10. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara cu lungimile l [mm] se trec în Tabelul 7;
11. Se trasează Diagrama 2 de variație ale valorilor analitice și experimentale pentru forța critică de flambaj în funcție de lungimea barei.

- **Date de intrare**

Tabelul 6. Caracteristici geometrice și de material pentru bara încastrată și articulată

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinală E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale [mm]		Momentul de inerție axial minim $I_{z \min}$ [mm ⁴]
		B	H	
Aluminiu				

- **Rezultate**

Tabelul 7. Rezultatele teoretice și experimentale pentru forța critică de flambaj pentru bara încastrată și articulată

Lungimea barei l [mm]	Lungimea de flambaj $l_f=0,7 \cdot l$ [mm]	Raza minimă de inerție $i_{z \min}$ [mm]	Coeficientul de zveltețe λ	Forța critică de flambaj F_{cf} [N]		Ab.rel. ΔF_{cf} [%]
				F_{cf} teoretic	F_{cf} exp.	
300						
350						
400						
450						
500						

Notă: Abaterea relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

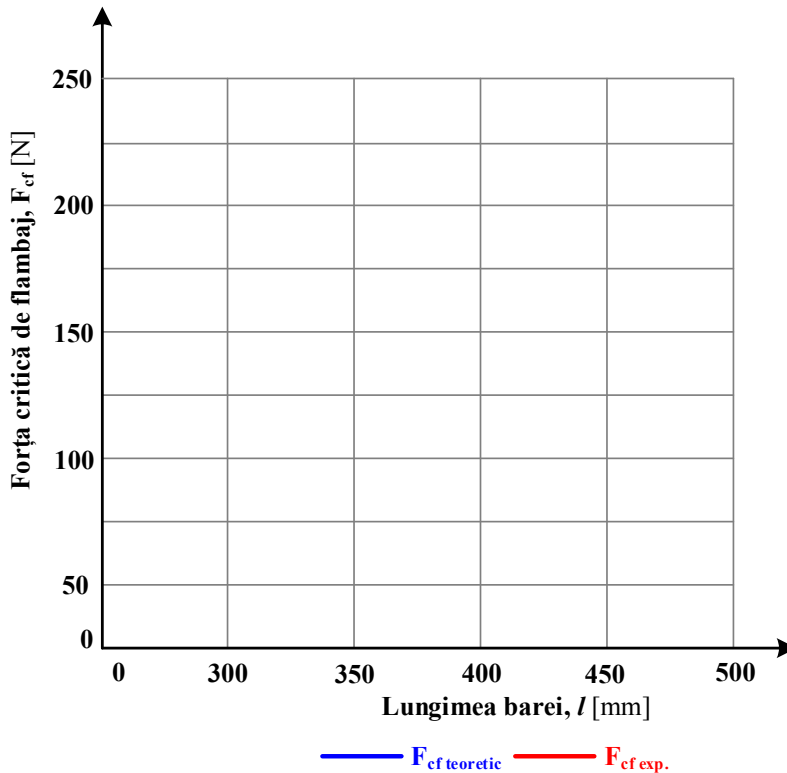


Diagrama 2. Variația forței critice de flambaj în funcție de lungime pentru bara încastrată și articulată

Experiment 3: Măsurarea forței critice de flambaj la barele drepte dublu încastrate

În acest experiment se urmărește măsurarea experimentală a forței critice de flambaj pentru o bară dreaptă, dublu încastrată, în punctele 1 și 2 (Fig. 7.) și compararea valorilor măsurate cu cele analitice. De asemenea, se urmărește variația valorilor forței critice de flambaj dacă se păstrează condițiile de rezemare, caracteristicile geometrice și de material ale barei, dar se modifică lungimea acesteia. Bara dreaptă se soliciță cu forța concentrată F [N] până când se obține forța critică de flambaj, F_{cf} .

• Calculul analitic a forței critice de flambaj

Se calculează lungimea de flambaj, în funcție de coeficientul K , cu relația:

$$l_f = K \cdot l \quad (15)$$

unde: K – coeficient ce ține seama de modul de rezemare al barei

Pentru o bară dublu încastrată, lungimea de flambaj este de două ori lungimea inițială a barei l [mm], pentru care coeficientul $K = 2$.

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii:

Aria secțiunii transversale: $A_{ef} = B \cdot H$ (16)

Momentul de inerție axial minim: $I_{z \min} = \frac{B^3 \cdot H}{12}$ sau $I_{y \min} = \frac{B \cdot H^3}{12}$ (17)

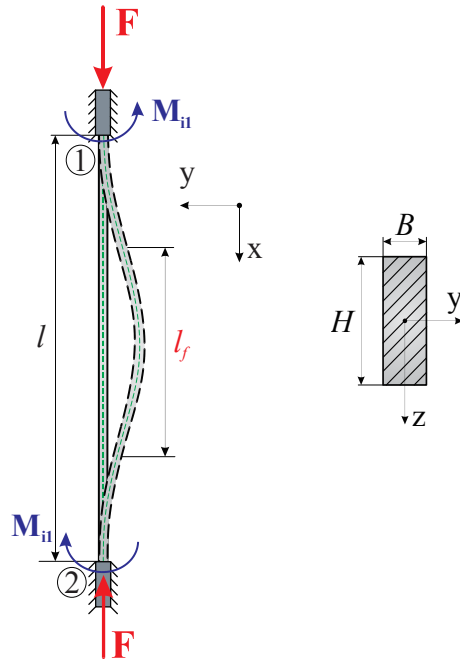


Fig. 7. Determinarea forței critice de flambaj pentru bara dublu încastrată

Pentru a stabili domeniul de flambaj, se calculează coeficientul de zveltețe λ (conform relației (10)):

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot l}{\sqrt{\frac{I_{z \min}}{A}}} = \frac{0,5 \cdot l}{\sqrt{\frac{B^3 \cdot H}{12 \cdot B \cdot H}}} = \frac{0,5 \cdot l}{\sqrt{\frac{B^2}{12}}} \quad (18)$$

În domeniul elastic de solicitare la compresiune, forța critică de flambaj se calculează aplicând formula lui Euler, care are expresia generală:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_f^2} \quad (19)$$

unde: $F_{cf \text{ teoretic}}$ – forța critică de flambaj, [N]
 l_f – lungimea de flambaj, [mm]
 E – modulul de elasticitate longitudinală (modulul lui Young), [N/mm²]
 I_{\min} – momentul de inerție axial minim al secțiunii, [mm⁴].

Din relația (19) rezultă că forța critică de flambaj depinde de lungimea de flambaj – de modul de rezemare, de forma secțiunii transversale – prin modulul de inerție axial minim, I_{\min} , respectiv de materialul din care este confecționată bara – prin modulul de elasticitate longitudinală (sau modulul lui Young), E .

Expresia forței critice de flambaj (19) devine:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(K \cdot l)^2} \quad (20)$$

Pentru bara dreaptă dublu încastrată forța critică de flambaj în domeniul elastic se calculează cu formula lui Euler:

$$F_{cf \text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{(0,5 \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{z \min}}{0,25 \cdot l^2} \quad (21)$$

- **Măsurători experimentale**

Pentru realizarea măsurătorilor experimentale se parcurg următoarele etape:

1. Pentru a obține o bară dublu încastrată (Fig. 7.), pe standul experimental, se montează în extremitatea inferioară și superioară a standului, dispozitive de încastrare prin intermediul șuruburilor de fixare;
2. Se modifică distanța pe verticală între cele două reazeme (care trebuie să fie egală cu lungimea barei l [mm] – prima valoare a lungimii din Tabelul 6), prin glizarea plăcii - suport a traversei mobile pe cele două șine. Fixarea la lungimea l [mm] se realizează prin intermediul a două șuruburi de fixare (care au și rolul de blocare în cazul unei glisări necontrolate a traversei mobile);
3. Se poziționează bara de lungime l [mm] între cele două reazeme încastrate, prin fixarea cu șuruburi la ambele capete ale barei drepte (fixarea se face fără joc);
4. Se conectează traductorul de forță la canalul 1 al afișajului digital de forță. Traductorul de forță este cuplat la reazemul încastrat din extremitatea inferioară (punctul 2);
5. Se verifică indicația „zero” canalului 1. În caz contrar, aducerea la „zero” se realizează prin intermediul potențiometrului de reglare (*SET ZERO*);
6. Se solicită bara la compresiune prin intermediul roții de mână (sau a șurubului de solicitare), producând deformarea elastică în planul xOy ;
7. Bara se solicită până când, pe afișajul digital, forța indicată nu se mai modifică. În această situație, înseamnă că forța aplicată barei a atins valoarea critică de flambaj;
8. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara de lungime l [mm] se trec în Tabelul 9;
9. Aplicând etapele 2 – 8, în mod similar, se măsoară experimental forța critică de flambaj pentru bara dreaptă cu lungimile l [mm] prevăzute în Tabelul 9;
10. Valorile experimentale și teoretice ale forței critice de flambaj pentru bara cu lungimile l [mm] se trec în Tabelul 9;
11. Se trasează Diagrama 3 de variație ale valorilor analitice și experimentale pentru forța critică de flambaj în funcție de lungimea barei.

- **Date de intrare**

Tabelul 8. Caracteristici geometrice și de material pentru bara dublu articulată

Materialul barei	Modulul de elasticitate longitudinal E [N/mm ²]	Dimensiunile secțiunii transversale		Momentul de inerție axial I_z [mm ⁴]
		[mm]		
		B	H	
Aluminiu				

- Rezultate

Tabelul 9. Rezultatele teoretice și experimentale pentru forța critică de flambaj pentru bara dublu încastrată

Lungimea barei l [mm]	Lungimea de flambaj $l_f (=0,5 \cdot l)$ [mm]	Raza minimă de inerție $i_{z \min}$ [mm]	Coeficientul de zveltețe λ	Forța critică de flambaj F_{cf} [N]		Ab.rel. ΔF_{cf} [%]
				$F_{cf.teoretic}$	$F_{cf.exp.}$	
280						
330						
380						
430						
480						

Notă: Abateră relativă se calculează cu relația: $Ab. rel. = \frac{|Val.exp.|-|Val.teoretică|}{|Val.exp.}| \cdot 100$ [%]

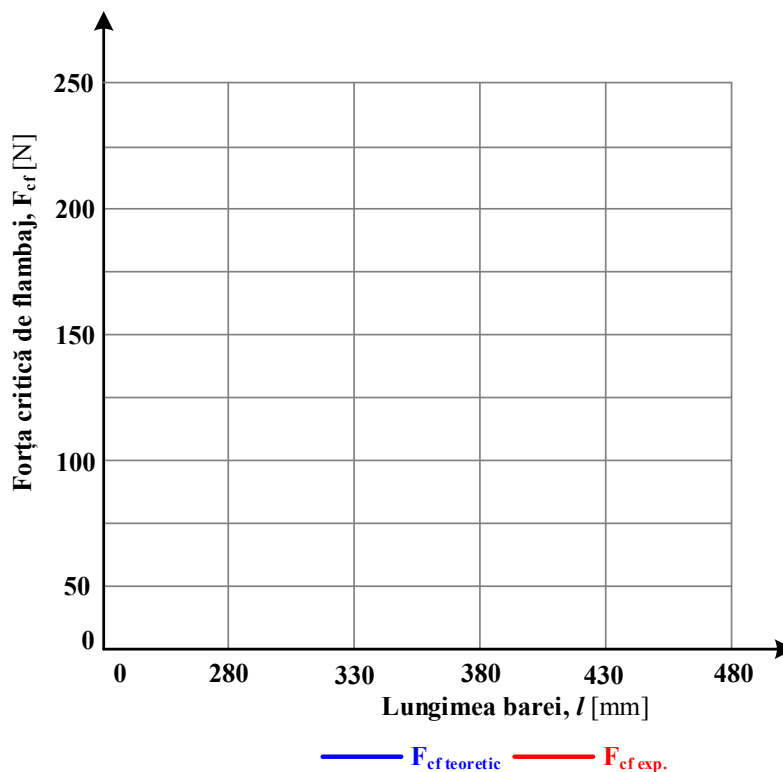
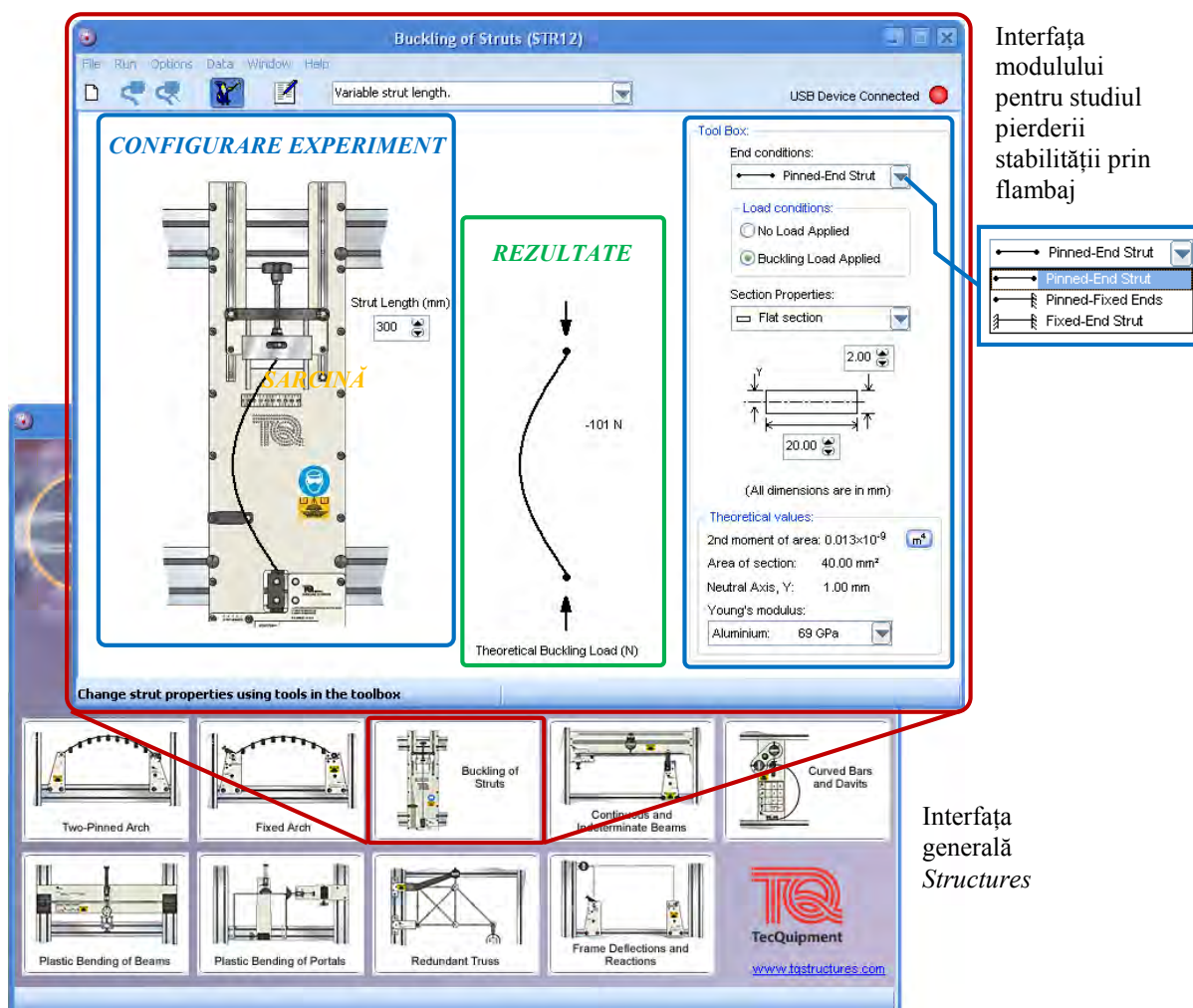


Diagrama 3. Variația forței critice de flambaj în funcție de lungime pentru bara dublu încastrată

EXPERIMENT VIRTUAL (TQ STRUCTURES)

Standurile produse de firma TQ (www.tecequipment.com) sunt însoțite și de un program care permite reproducerea virtuală a experimentelor desfășurate. Interfața generală *Structures* conține pictograme ale tuturor standurilor disponibile în catalogul producătorului. Din această fereastră se alege opțiunea care coincide ca denumire cu experimentul studiat. Experimentul virtual aduce completări din punct de vedere didactic, prin transferul structurii reale la o schiță de calcul și prin trasarea diagramelor de eforturi și/sau de deformații, actualizate ca formă și valori, în funcție de configurația definită.



Interfața
modulului
pentru studiul
pierderii
stabilității prin
flambaj

Interfața
generală
Structures

Fig. 6. Modulul *TQ Structures – Buckling of Struts* pentru studiul fenomenului de pierdere a stabilității prin flambaj a barelor lungi solicitate la compresiune

Modulul pentru studiul fenomenului de flambaj (*Buckling of Struts*) este compus din **ZONELE DE CONFIGURARE A EXPERIMENTULUI**, unde se reproduc condițiile de desfășurare a determinărilor experimentale prin alegerea cazului de rezemare, definirea secțiunii transversale și a lungimii efective a barei comprimate. În **ZONA PENTRU PRELUAREA REZULTATELOR** programul trasează forma deformată a barei în momentul pierderii stabilității prin flambaj și, de asemenea, se indică valoarea forței critice de flambaj.



LE11. Determinarea forței critice de flambaj a barelor drepte

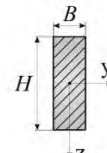
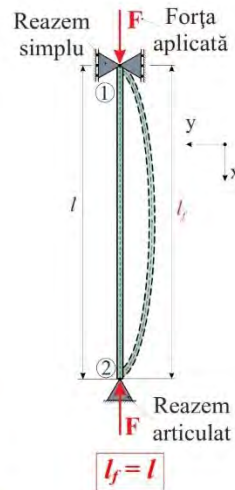
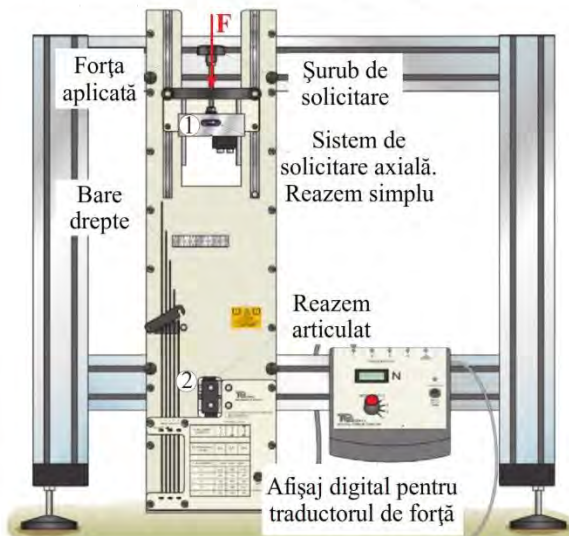
• Scopul lucrării

Determinarea experimentală a forței critice de flambaj pentru bare drepte în diferite cazuri de rezemare și compararea cu valorile obținute cu relații teoretice (calcul analitic).

• Noțiuni teoretice

Fenomenul de trecere a unei bare din starea de echilibru stabil în starea de echilibru nestabil, la o anumită valoare (critică) a sarcinilor aplicate, poartă numele de *flambaj*. Flambajul se datorează unei forțe de compresiune aplicată axial, producând deformația barei și se caracterizează prin: *forță critică de flambaj* (F_{cf}) - forța care modifică starea de echilibru a barei lungi solicitată la compresiune, *lungimea de flambaj* (l_f) - distanța dintre două puncte de inflexiune al fibrei medii deformate, respectiv *coeficientul de zvelțețe* (λ). Mărimea forței de flambaj depinde de: lungimea barei, forma secțiunii transversale, modul de rezemare și materialul barei.

• Experiment — Bară dreaptă plană dublu articulată solicitată axial



$$A = B \cdot H \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$I_{z\min} = \frac{B^3 \cdot H}{12} \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{z\min}}{A}} \text{ [mm]}$$

■ Calculul analitic (teoretic) a forței critice de flambaj:

Se cunosc dimensiunile l , B , H respectiv modulul de elasticitate a materialului E_{Al} .

$$F_{cf\text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 EI_{z\min}}{l_f^2} \Rightarrow F_{cf\text{ teoretic}} = \frac{\pi^2 EI_{z\min}}{l^2}$$

■ Calculul coeficientului de zvelțețe:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} \Rightarrow \lambda = \frac{l}{i_{\min}}$$

■ Forța critică de flambaj experimentală:

• $F_{cf\text{ exp}}$ este valoarea forței indicată de afișajul digital al traductorului de forță la apariția fenomenului de flambaj.

Abaterea relativă se calculează:

$$Ab.\text{rel.} = \frac{|\text{Val}_{\text{exp.}}| - |\text{Val}_{\text{teoretica}}|}{|\text{Val}_{\text{exp.}}|} \cdot 100$$

• Rezultate

Lungimea l [mm]	Lungimea de flambaj l_f [mm]	Coeficientul de zvelțețe λ	Forța critică de flambaj [N]		Ab.rel. ΔF_{cf} [%]
			$F_{cf\text{ teoretic}}$	$F_{cf\text{ exp.}}$	
320					
370					
420					
470					
520					

BIBLIOGRAFIE

- [1] Bal, N., *Rezistența materialelor. Solicitări simple*, ISBN 973-9471-14-5, Ed. U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 1999
- [2] Bejan, M., *Rezistența materialelor*, vol I și II, ISBN 973-8466-12-1, Ed. AGIR, București, ISBN 973-86710-1-9, Ed. MEGA, Cluj-Napoca, 2015
- [3] Bejan M., *În lumea unităților de măsură*, Editura Academiei Române și Editura Agir, București, Romania, 2005.
- [4] Buzdugan, Gh., *Rezistența materialelor*, Ed. TEHNICĂ, București, 1980
- [5] Crețu, A., *Rezistența materialelor*, vol. I, ISBN 973-713-089-8, Ed. MEDIAMIRA, Cluj-Napoca, 2005
- [6] Dudescu, C.M., *Rezistența Materialelor. Noțiuni fundamentale. Solicitări simple*, ISBN 978-973-662-831-3, Ed. U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2013
- [7] Hibbler, R.C., *Mechanics of materials*, 8th Edition, ISBN 10:0-13-602230-8; ISBN 13: 978-0-13-602230-5, Ed. PEARSON, 2011
- [8] Milea A., *În lumea măsurărilor și a unităților de măsură*, Editura Agir, București, Romania, 2008, Disponibil la: <https://www.scribd.com/doc/203100503/59353991-in-Lumea-Masurarilor-Si-a-Unitatilor-de-Masura>
- [9] Păstrav, I., Boancă, C., ș.a. *Rezistența materialelor. Probleme*, Atelierul de Multiplicare, Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1987
- [10] Păstrav, I., Boancă, C., ș.a. *Rezistența materialelor. Îndrumător de laborator*, Atelierul de Multiplicare, Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1986
- [11] SR EN ISO 80000-1. Mărimi și unități. Partea 1: Generalități, Asociația de standardizare din România, 2013.
- [12] Suciu, M., Suciu, L., *Rezistența materialelor - Volumul 1*, ISBN 973-9471-11-0, Ed. U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 1999
- [13] Suciu, M., *Rezistența materialelor*, Ediția a II-a, ISBN 978-606-504-079-3, Ed. ALMA MATER, 2009
- [14] Șomotecan, M., Hărdău, M., Bodea, S., *Rezistența materialelor*, ISBN 973-662-200-2, Ed. U.T.PRESS, 2005
- [15] Șomotecan, M., Hărdău, M., Bodea, S., *Rezistența materialelor. Vol. I – Solicitări simple*, ISBN 973-8335-85-X, ISBN 973-8335-86-8, Ed. U.T.PRESS, 2003
- [16] Young, W.C., *Roark's formulas for stress & strain*, 6th Edition, ISBN 0-07-100373-8, McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [17] ***Hotărârea nr. 1091 din 16 august 2006 - privind cerințele minime de securitate și sănătate pentru locul de muncă.
- [18] ***Hotărârea nr. 1146 din 30 august 2006 - privind cerințele minime de securitate și sănătate pentru utilizarea în muncă de către lucrători a echipamentelor de muncă.
- [19] ***Legea nr. 319 din 14 iulie 2006 - a securității și sănătății în muncă.
- [20] ***Hotărârea nr. 1425 din 11 octombrie 2006 - Norme Metodologice de aplicare a prevederilor Legii securității și sănătății în muncă nr. 319/2006.

- [21] ***Hotărârea nr. 1169/2011 pentru modificarea și completarea Hotărârii Guvernului nr. 355/2007 privind supravegherea sănătății lucrătorilor.
- [22] ***Hotărârea nr. 1051 din 9 august 2006 - privind cerințele minime de securitate și sănătate pentru manipularea manuală a maselor care prezintă riscuri pentru lucrători, în special de afecțiuni dorsolombare.
- [23] ***Hotărârea nr. 1.028 din 9 august 2006 - privind cerințele minime de securitate și sănătate în muncă referitoare la utilizarea echipamentelor cu ecran de vizualizare.
- [24] ***Hotărârea nr. 1.048 din 9 august 2006 - privind cerințele minime de securitate și sănătate pentru utilizarea de către lucrători a echipamentelor individuale de protecție la locul de muncă.
- [25] ***Hotărârea nr. 971 din 26 iulie 2006 - privind cerințele minime pentru semnalizarea de securitate și/sau de sănătate la locul de muncă.
- [26] ***TecQuipment – Lecturer Guide: Fișe de laborator
- [27] ***Convertor unități de măsură, disponibil la: <http://www.calcule.ro/Convertor-unitati-masura.aspx>
- [28] ***Mărimi și unități de măsură – Lucrare pregătitoare A, disponibil la: <http://ebooks.unibuc.ro/Fizica/Sabina/1.pdf>
- [29] ***Mecanică, disponibil la: <http://biblioteca.regielive.ro/download-301831.html>
- [30] ***Legea a doua a mișcării – Legea 2 a lui Newton, disponibil la: <http://www.geocities.ws/stanalicu/Class/newtlaws/U2L3a.html>
- [31] ***Lucru mecanic, disponibil la: <http://fizicavlaiculugoj.wikispaces.com/file/view/Lucrul+mecanic+efectuat+de+o+forta+constanta+F.docx>
- [32] ***Newton; disponibil la: <http://ro.wikipedia.org/wiki/Newton>
- [33] ***Semne indicatoare, Disponibil la: <http://www.e-oferta.ro/firme/g-security-agency-.html>
- [34] ***Semne indicatoare, Disponibil la: <http://deltasystech.ro/prospecte/SSM%20-%20PSI/INDICATOARE%20DE%20AVERTIZARE.pdf>
- [35] ***Semne indicatoare, Disponibil la: <http://www.semneindicatoare.ro/index.php?route=common/home>
- [36] SR ISO 31-3:1995 Măsuri și unități. Partea 3. Mecanică

ANEXE

ANEXA 1

MĂRIMI, UNITĂȚI DE MĂSURĂ ȘI RELAȚII DE CONVERSIE

În România, Sistemul Internațional (Le Système International d'unités) (SI) de unități este singurul legal, reglementat prin legislație și prin standarde. Este totuși permis, ca în anumite condiții, să fie utilizate și alte unități aflate în afara sistemului internațional. Marea majoritate a statelor lumii a adoptat Sistemul Internațional de unități ca sistem oficial de unități. Numai câteva state (precum Marea Britanie și SUA) mențin în continuare sistemul anglo-saxon de unități, cunoscut ca și United States Customary System (USCS), în paralel cu SI.

În această anexă se prezintă principalele mărimi, unități de măsură și relațiile de conversie ale acestora utilizate în rezolvarea problemelor din cadrul disciplinei de Rezistența Materialelor. Unitățile SI pentru mărimile fundamentale, împreună cu simbolurile lor sunt prezentate în Tabelul 1.

Tabelul 1. Unități SI fundamentale

Mărimile fundamentale		Unitate SI fundamentală	
Denumire	Simbol	Denumire	Simbol
Lungime	L	metru	m
Masă	m	kilogram	kg
Timp	τ	secundă	s
Intensitatea curentului electric	I	amper	A
Temperatura (termodinamică)	T	kelvin	K
Cantitate de substanță	n	mol	mol
Intensitate luminoasă	J	candela	cd

Unitățile care nu se regăsesc în SI, dar se folosesc împreună cu acesta sunt prezentate în Tabelul 2, iar în Tabelul 3 sunt evidențiate cele mai utilizate sisteme de unități. Multiplii (Tabelul 4) și submultiplii (Tabelul 5) unităților SI se formează prin adăugarea prefixelor corespunzătoare la denumirea unității și, respectiv, al simbolurilor acestor prefixe la simbolurile unităților.

Tabelul 2. Unități utilizate împreună cu SI

Mărimea	Unitatea		
	Denumire	Simbol	Relația de transformare
Timp	Minute	min	1 min = 60 s
	Oră	h	1 h = 60 min
	Zi	d	1 d = 24 h
Volum	Litru	L, l	1 l = 1 dm ³
Masa	Tonă	t	1 t = 1000 kg

Tabelul 3. Sisteme de unități

Sistemul de unități	Unități fundamentale	Mărimi fundamentale
---------------------	----------------------	---------------------

Sistemul Internațional SI	m (metru)	lungime
	kg (kilogram)	masă
	s (secundă)	țimp
	A (amper)	intensitate curent electric
	K (kelvin)	temperatură termodinamică
	cd (candela)	intensitate luminoasă
Sistemul tehnic MKfS	m (metru)	lungime
	kgf (kilogram forță)	forță
	s (secundă)	țimp
Sistemul tehnic britanic GSU	ft (foot)	lungime
	lbf (pound force)	forță
	s (secundă)	țimp

Tabelul 4. Multiplii unităților SI

Factor	Prefix	Simbol
1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}	Yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}	Zeta	Z
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	Exa	E
1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	Peta	P
1 000 000 000 000 = 10^{12}	Tera	T
1 000 000 000 = 10^9	Giga	G
1 000 000 = 10^6	Mega	M
1 000 = 10^3	Kilo	K
100 = 10^2	Hecto	h
10 = 10^1	deca	da

Tabelul 5. Submultiplii unităților SI

Factor	Prefix	Simbol
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}	zepto	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}	yocto	y

Conform SR ISO 31-3:1995 unitatea de măsură pentru forță în sistemul S.I. este newtonul [N]; în vederea simplificării calculului elementelor mecanice și de construcție se aproximează $1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$.

În sistemul englez *forța* este considerată o mărime fundamentală, ceea ce duce de cele mai multe ori la confuzii și erori care necesită utilizarea unei constante dimensionale în multe relații. Pentru a evita acest inconvenient forța poate fi considerată o mărime derivată din legea a doua a lui Newton: „*Accelerația unui obiect produsă de o forță efectivă este direct proporțională cu această forță în aceeași direcție și invers proporțională cu masa acestuia*”. Adică:

$$F = m \cdot a \quad (3)$$

unde: F este forța, [N]; m reprezintă masa, [kg]; a este accelerația gravitațională, [m/s^2].

Newtonul (N) este unitatea de măsură a forței în SI, fiind definit astfel: „*forța necesară pentru a imprima o accelerație de 1 m/s^2 unui corp cu masa de 1 kg* ”. Relațiile care se stabilesc între unitățile de forță sunt:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (4)$$

Lucrul mecanic este o formă de energie, fiind definit astfel: „*Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă F , al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța d , în direcția și în sensul forței, este egal cu produsul dintre modulul forței și modulul deplasării*”.

$$L = F \cdot d \quad (6)$$

unde: L reprezintă lucrul mecanic, [J]; F este forța aplicată, [N]; d este distanța efectuată datorită forței F , [m]. Unitatea de măsură în SI pentru lucru mecanic este joule (J):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7)$$

În Tabelul 6 sunt evidențiate principalele mărimi mecanice din sfera disciplinei Rezistența Materialelor, iar în Tabelul 7 sunt date relațiile de conversie în Sistemul Internațional a diferitor unități de măsură.

Tabelul 6. Principalele mărimi mecanice, simboluri și unități de măsură

Mărimi mecanice		Unități de măsură noi (S.I.) și corespondența în sistemul vechi				Echivalența cu alte unități de măsură
Denumire	Simbol	Sistemul S.I.		Unități de măsură S.I. și corespondența în sistemul vechi MKfS		
		Simbol	Factor dimensional	S.I.	MKfS	
				Simbol	Simbol	
Forțe, sarcini (încărcări concentrate)	F, Q	N	$\text{N} = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	kN	tf	$1 \text{ tf} \approx 10 \text{ kN}$ $1 \text{ N} = 0,102 \text{ kgf}$ $1 \text{ kgf} \approx 10 \text{ N} = 1 \text{ daN}$ $10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ dyn}$
				daN	kgf	
Sarcini (încărcări)	q, p	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$		$\frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$\frac{\text{tf}}{\text{m}}$	$1 \frac{\text{tf}}{\text{m}} \approx 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

distribuite			$\frac{N}{m}$ $= kg \cdot s^{-2}$	$\frac{daN}{m}$	$\frac{kgf}{m}$	$1 \frac{kgf}{m} \approx 10 \frac{N}{m}$ $= 1 \frac{daN}{m}$
Momente (încovoietoare sau de torsiune)	M (M _i , M _t)	N·m	N·m = = m ² ·kg·s ⁻²	kN·m	kgf·m	1 tf·m ≈ 10 kN·m 1 kgf·m ≈ 10 N·m = 1 daN·m
				daN·m	tf·m	1 N·m = 0,102 kgf·m
Lucru mecanic Energie	L	J	J = m ² ·kg·s ⁻²	daJ	kgf·m	1 J = 0,102 kgf·m 1 tf·m ≈ 10 ⁴ J 10 ⁻⁷ J = 1 erg
	U			kN·m	tf·m	
Putere	P	W	W = m ² ·kg·s ⁻³	kW	CP	1 W = 1,36·10 ⁻³ CP = 0,102 $\frac{kgf \cdot m}{s}$
						1 CP = 75 $\frac{kgf \cdot m}{s}$ = 736 W
Tensiune – efort (totală, normală sau tangențială)	p σ, τ	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2} = m^{-1} \cdot$ $\cdot 10^6 kg \cdot s^{-2}$	$\frac{kN}{m^2}$	$\frac{kgf}{cm^2}$	1 $\frac{N}{mm^2} = 0,102$ $\frac{kgf}{mm^2}$
				$\frac{daN}{cm^2}$	$\frac{kgf}{mm^2}$	1 $\frac{kgf}{cm^2} = 10^2 \frac{kN}{m^2} =$ $= 10^5 1 \frac{N}{mm^2} = 1$ $\frac{daN}{cm^2} =$ $= 1 bar$
	E, G	Pa	1 Pa = 10 ⁻⁶ $\frac{N}{mm^2}$	MPa		1 MPa = 1 $\frac{N}{mm^2}$

Tabelul 7. Relații de conversie a unităților de energie și lucru mecanic

	Unitate de măsură dată			
Lungime		1 m	1 cm	1 mm
	m	1	0,01	0,001
Arie		1 m²	1 cm²	1 mm²
	m²	1	10 ⁻⁴	10 ⁻⁶
Masă		1 kg	1 g	1 kgf·s²/m
	kg	1	10 ⁻³	9,80665
Forță		1 N	1 kgf	1 lbf
	N	1	9,80665	4,4484972
Presiune și eforturi		1 Pa = N/m²	1 kgf/m²	1 kgf/cm²
	Pa = N/m²	1	9,80665	9,80665·10 ⁴
		1 atm	1 bar	1 daN/cm²
	Pa = N/m²	101325	10 ⁵	10 ⁵
Putere		1 W = J/s	1 kW	1 CP
	W = J/s	1	10 ³	735,5
Energie și lucru mecanic		1 J	1kJ	1 kgf·m
	J = W·s	1	10 ³	9,81
		1 J	1 kcal	1 CPh
	J = W·s	1	4,186·10 ³	2,65·10 ⁶

ANEXA 2

NORME DE PROTECȚIE A MUNCII

În această anexă se prezintă noțiunile de bază prevăzute în normele de Protecție a Muncii. În cadrul instruirii se vor prelucra următoarele materiale: Legea 319/2006 și Hotărârile de Guvern: H.G. 1425/2006, H.G. 971/2006, H.G. 1091/2006, H.G. 1169/2011, H.G. 1051/2006, H.G. 1028/2006, H.G. 1146/2006, H.G. 1048/2006.

INSTRUCȚIUNI DE PROTECȚIE A MUNCII

În cadrul Laboratorului de Rezistența Materialelor, studenții trebuie să respecte următoarele cerințe:

- accesul în laborator se face numai în prezența cadrului didactic;
- în timpul lucrărilor de laborator trebuie să respecte în mod conștient o disciplină fermă impusă de necesitatea de a preveni orice posibilitate de accident sau de declanșare a unui incendiu;
- în cadrul laboratorului, studenții vor rămâne tot timpul la standul aferent lucrării de laborator propusă de cadrul didactic;
- nu vor atinge tabloul electric după ce a fost pus sub tensiune;
- în timpul funcționării standului experimental, este interzisă modificarea fără rost a butoanelor, comutatoarelor, întrerupătoarelor, aferente standurilor experimentale. Este interzisă acționarea butoanelor altor standuri aflate în apropiere și care nu sunt utilizate pentru acea lucrare de laborator;
- se interzice efectuarea lucrărilor de laborator cu aparate și instrumente sau alte accesorii ale acestora, defecte sau degradate. În acest sens se va organiza revizia periodică a tuturor echipamentelor, iar, de la caz la caz, se vor repara acele defecte;
- nu va pune sub tensiune echipamentul, înainte de a fi verificat de cadrul didactic. În cazul când se constată o funcționare anormală, care indică prezența unui deranjament, se va întrerupe imediat sursa de alimentare, iar punerea în funcțiune se va face numai după identificarea și înlăturarea deranjamentului;
- în caz de accidente prin electrocutare, se vor aplica măsurile de prim ajutor prevăzute în actele privind protecția muncii, în vigoare;
- se interzice cu desăvârșire orice alt fel de activitate a studenților cu instalațiile sau aparatele din laborator în lipsa cadrului didactic sau a unei persoane special calificată pentru supravegherea lucrării;
- pentru asigurarea condițiilor de igienă a muncii se va păstra curățenia în laborator, iar la începutul și sfârșitul orelor de laborator se va aerisi sala;
- la părăsirea laboratorului standurile trebuie lăsate în starea în care au fost găsite;
- nerespectarea acestor reguli va determina sancționarea celor vinovați: interzicerea accesului în laborator, sancțiuni administrative;
- în prima sedință de lucrări de laborator cu studenții, cadrul didactic care va desfășura lucrările de laborator va face instructajul de protecția muncii. Instructajul va fi consemnat într-un proces verbal semnat de cadrul didactic și de către toți studenții care efectuează lucrări practice în laborator.

NORME DE PREVENIRE ȘI STINGERE A INCENDIILOR




În Laboratoarele de Rezistența Materialelor se vor respecta cu strictețe următoarele norme de prevenire și stingere a incendiilor:





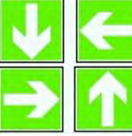
- se interzice fumatul în laborator;
- se interzice blocarea căilor de acces, accesul la hidranți, accesul la stingătoare;
- este interzisă blocarea ferestrelor cu pachete, materiale sau aparate;
- este interzisă depozitarea materialelor folosite la curățirea aparatelor pe calorifere sau în apropierea surselor de căldură;
- se va verifica periodic instalația electrică a echipamentelor;
- nu se vor folosi întrerupătoare, prize defecte;
- este interzisă folosirea instalațiilor electrice improvizate;
- nu este permis a se lăsa aparatele electrice nesupravegheate sub tensiune;
- tablourile electrice, releele, contactoarele etc. vor fi prevăzute cu carcase de protecție, iar la tablourile electrice se vor întrebuința numai siguranțe calibrate;
- se interzice supraîncărcarea circuitelor prin racordarea mai multor consumatori decât cei prevăzuți pentru instalația respectivă;
- în caz de incendiu se va anunța unitatea de pompieri la telefon și, totodată, se vor lua măsuri de stingere cu materiale non-inflamabile (spumă, pulbere etc.);
- este interzisă folosirea materialelor non-inflamabile în alte scopuri;
- este interzisă blocarea accesului și circulației la echipamente, la panourile electrice, la materialele și la instalațiile pentru semnalizarea sau stingerea incendiilor.

INDICATORI DE SEMNALIZARE

În vederea prevenirii accidentelor de muncă, în Tabelul 1 sunt prezentate panourile de semnalizare, montate în Laboratorul de Rezistența Materialelor.

Tabelul 1. Semnificația panourilor de semnalizare

Necesități de semnalizare. Semnificație	Marcarea semnalizărilor	
	Locul amplasării	Pictograma
<i>Focul deschis interzis</i>	Lângă: echipamente/în sala de laborator	
<i>Apă nepotabilă</i>	Deasupra chiuvetei	
<i>Nu puneți în funcțiune</i>	La standurile din laborator	

<i>Intrarea interzisă persoanelor neautorizate</i>	La intrare în laborator	
<i>Fumatul interzis</i>	La intrare în laborator	
<i>Pericol electric</i>	Pe capacul tabloului electric	
<i>Pericol general</i>	Pe standurile din laborator aflate în funcțiune	
<i>Materiale inflamabile</i>	Lângă: pompe/ rezervoare /rastel butelii	
<i>Pericol de împiedicare</i>	La intrare în laborator	
<i>Pericol de cădere pe scări</i>	La intrare în laborator	
<i>Extinctori</i>	Deasupra locului de depunere	
<i>Trusa de prim-ajutor</i>	Pe perete deasupra trusei	
<i>Căi/ieșiri de salvare</i>	Pe stâlpi Deasupra ușilor	
<i>Păstrați curățenia</i>	Deasupra locului de dispunere	



Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Facultatea de Mecanică
Departamentul de Inginerie Mecanică

FIȘĂ DE INSTRUIRE COLECTIVĂ PRIVIND SECURITATEA ȘI SĂNĂTATEA ÎN MUNCĂ ȘI SITUAȚIILE DE URGENȚĂ

Întocmită azi _____

Subsemnatul (a) _____, având funcția de _____ în cadrul Departamentului de Inginerie Mecanică a Facultății de Mecanică din cadrul Universității Tehnice din Cluj-Napoca, am procedat la instruirea unui număr de _____ studenți din grupa _____, conform tabelului nominal anexat, în domeniul securității și sănătății în muncă și situații de urgență pentru disciplina Rezistența Materialelor, în zilele _____.

În cadrul instruirii s-au prelucrat următoarele materiale: L. 319/2006, H.G. 1425/2006, H.G. 971/2006, H.G. 1091/2006, H.G. 1169/2011, H.G. 1051/2006, H.G. 1028/2006, H.G. 1146/2006, H.G. 1048/2006, reguli de comportare în situații de urgență, Măsuri de prevenire și stingere a incendiilor (MPSI).

Prezenta fișă de instructaj se va păstra la Departamentul de Inginerie Mecanică.

Verificat,

Semnătura persoanei care a efectuat instruirea,



TABEL NOMINAL CU PERSOANELE PARTICIPANTE LA INSTRUIRE

Subsemnații, studenți ai Universității Tehnice din Cluj-Napoca în grupa _____ am fost instruiți și am luat cunoștință de materialele prelucrate și consemnate în fișa de instruire colectivă privind securitatea și sănătatea în muncă și situații de urgență și ne obligăm să le respectăm întocmai.

Nr. crt.	Numele și prenumele	Act de identitate	Semnătura
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

Nr. crt.	Numele și prenumele	Act de identitate	Semnătura
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			

Numele, prenumele și semnătura persoanei

care a primit un exemplar

care a efectuat instruirea

ANEXA 3

TABELE INGINEREȘTI

Tabelul 1. Constante elastice ale materialelor utilizate în cadrul măsurătorilor experimentale

Denumirea materialului	Modulul de elasticitate longitudinală E $\cdot 10^5$ [N/mm ²]	Modulul de elasticitate transversală G $\cdot 10^5$ [N/mm ²]
Alamă	2,07	0,380
Aluminiu	0,69	0,240 ÷ 0,270
Oțel	2,10	0,795

Tabelul 2. Coeficienții a și b, respectiv λ_0 și λ_1 pentru materialele uzuale

Materialul	a	b	λ_0	λ_1
Oțel OL37 ($\sigma_r = 370$ N/mm ² , $\sigma_c = 240$ N/mm ²)	304	1,12	105	60
Oțel cu $\sigma_r = 480$ N/mm ² , $\sigma_c = 310$ N/mm ²	460	2,57	100	60
Oțel cu $\sigma_r = 520$ N/mm ² , $\sigma_c = 360$ N/mm ²	577	3,74	100	60
Oțel cu 5% Nichel	461	2,25	86	0
Oțel Crom - Molibden	980	5,30	55	0
Duraluminiu	372	2,14	50	0
Lemn	28,7	0,19	100	0

Tabelul 3. Coeficienți de siguranță pentru diferite piese din domenii ingineresti

Domeniul de utilizare		Coeficient de siguranță γ_{Cimpus}
Tija pistonului	Mașini cu un cilindru	8 ÷ 12
	Mașini cu un cilindru și contratijă	4 ÷ 8
	Mașini cu doi cilindri	
Biela	Mașini termice mari	14 ÷ 28
	Motoare de autovehicule	4 ÷ 5,5
Elemente de construcții din:	Oțel	1,7 ÷ 2,4
	Lemn	5 ÷ 10
	Fontă	5 ÷ 5,5
Piese de mașini metalice, obișnuite		4 ÷ 12
Piese de mașini supuse la solicitări variabile		14 ÷ 28

Tabelul 4. Constante elastice (E, G, ν) și, respectiv, fizice (γ_m) pentru materiale uzuale

Materialul	Modulul de elasticitate longitudinală E ($\times 10^5$) N/mm ²	Modulul de elasticitate transversală G ($\times 10^5$) N/mm ²	Coeficient de contracție transversală ν	Greutate volumică (specifică)* $\gamma_m (\times 10^{-5})$ N/mm ³
Oțel carbon	20 ÷ 2,1	0,81	0,24 ÷ 0,28	7,85
Oțel aliat	2,1	0,81	0,25 ÷ 0,30	
Oțel turnat	1,75	–	–	
Fontă cenușie	1,15 ÷ 1,60	0,45	0,23 ÷ 0,27	7,25
Cupru laminat	1,1 ÷ 1,3	0,49	–	8,3 ÷ 8,9

Bronz fosforos	1,15	0,42	0,32 ÷ 0,35	8,56 ÷ 8,9
Alamă laminată la rece	0,91 ÷ 0,99	0,35 ÷ 0,37	0,32 ÷ 0,42	8,4 ÷ 8,73
Plumb	0,17	0,07	0,42	11,3
Aliaje de aluminiu	0,67 ÷ 0,71	0,24 ÷ 0,27	0,32 ÷ 0,36	2,56 ÷ 2,75
Duraluminiu	0,7 ÷ 0,75	0,26 ÷ 0,27		
Beton	0,11 ÷ 0,40	0,044 ÷ 0,16	0,15 ÷ 0,18	1,8 ÷ 2,2
Lemn – în lungul fibrelor	0,09 ÷ 0,125	0,004 ÷ 0,01	0,013	0,45 ÷ 0,69
Lemn – perpendicular fibrelor	0,003 ÷ 0,01		0,760	0,1 ÷ 0,8
Cauciuc	0,00008	–	0,47	0,92 ÷ 0,96
Plexiglas	0,025 ÷ 0,039	–	0,35 ÷ 0,38	1,2

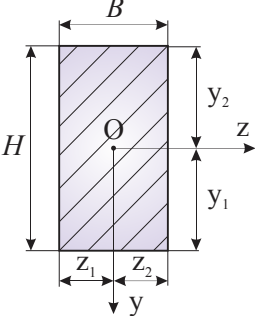
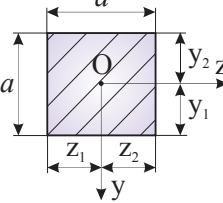
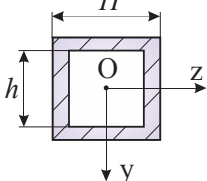
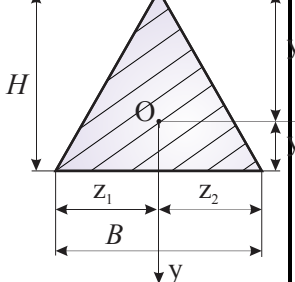
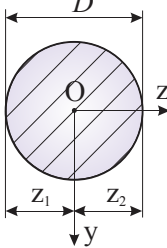
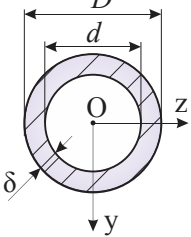
* Greutatea volumică sau specifică se calculează cu relația: $\gamma_m = \frac{\Delta G}{\Delta V}$

Tabelul 5. Rezistențe (tensiuni) ale unor materiale ingineresti

Materialul		Caracteristici mecanice			
		Rezistența la rupere σ_r	Limita de curgere σ_c	Rezistența admisibilă la tracțiune* σ_a	Alungirea la rupere $\varepsilon_r = \delta$
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	%
Oțel carbon	OL – 37	360 ÷ 440	210 ÷ 240	90 ÷ 150	26 ÷ 25
	OL – 42	410 ÷ 490	230 ÷ 260	130 ÷ 160	23 ÷ 22
	OL – 50	490 ÷ 610	270 ÷ 290	150 ÷ 180	21
	OL – 70	min. 690	340 ÷ 360	210 ÷ 250	11
Oțel carbon de calitate superioară	OLC – 10	490	290	130 ÷ 170	16
	OLC – 25	540	360	140 ÷ 170	19
	OLC – 45	700	480	200 ÷ 260	14
Oțel aliat	18MnCr10	880	610	300 ÷ 380	9
	33MoCr11	980	780	300 ÷ 380	12
	13CrNi30	1170	640	380 ÷ 460	10
Oțel carbon turnat în piese	OT 40 – 2	400	200	100 ÷ 130	24
	OT 50 – 2	500	280	130 ÷ 180	18
Fonte cu grafit laminar	Fc 200	230	–	60 ÷ 80	-
	Fc 300	330	–	90 ÷ 110	-
Fonte cu grafit nodular	Fgn 450 – 5	450	320	150 ÷ 200	5
	Fgn 600 – 2	600	400	200 ÷ 260	2
Cupru laminat		200 ÷ 270	–	40 ÷ 54	35 ÷ 25
Aliaje din aluminiu		90 ÷ 120	–	10 ÷ 12	3
Bronz cu staniu, turnat		200 ÷ 250	–	40 ÷ 50	20 ÷ 6
Bronz fosforos		300 ÷ 450	–	60 ÷ 90	25 ÷ 10
Alamă laminată		200 ÷ 300	–	40 ÷ 60	30 ÷ 20

*Rezistențele admisibile la tracțiune sunt date pentru solicitarea statică

Tabelul 6. Caracteristici geometrice pentru secțiuni transversale cu geometrie simplă

Forma geometrică a secțiunii transv.	Aria secțiunii transv. A mm^2	Poziția centrului de greutate mm	Momente de inerție I mm^4	Module de rezistență W mm^3	Raze de girație (de inerție) i mm
	$B \cdot H$	$z_1 = z_2 = \frac{B}{2}$ $y_1 = y_2 = \frac{H}{2}$	$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$ $I_y = \frac{B^3 \cdot H}{12}$	$W_z = \frac{B \cdot H^2}{6}$ $W_y = \frac{B^2 \cdot H}{6}$	$i_z = 0,289 \cdot H$ $i_y = 0,289 \cdot B$
	a^2	$z_1 = z_2 = \frac{a}{2}$ $y_1 = y_2 = \frac{a}{2}$	$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{a^3}{6}$	$i_z = i_y = 0,289 \cdot a$
	$H^2 - h^2$	-	$I_z = I_y = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6 \cdot H}$	$i_z = i_y = 0,289 \cdot \sqrt{H^2 + h^2}$
	$\frac{1}{2} \cdot B \cdot H$	$z_1 = z_2 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{3}$ $y_2 = \frac{2 \cdot H}{3}$	$I_z = \frac{B \cdot H^3}{36}$ $I_y = \frac{B^3 \cdot H}{48}$	$W_z = \frac{B \cdot H^2}{12}$ $W_y = \frac{B \cdot H^2}{24}$	$i_z = 0,236 \cdot H$ $i_y = 0,204 \cdot B$
	$\frac{\pi \cdot D^2}{4}$	$z_1 = z_2 = \frac{D}{2}$	$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$	$W_z = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{6}$	$i_z = i_y = \frac{D}{4}$
	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$	$\delta = \frac{D - d}{2}$ $D_m = \frac{D + d}{2}$	$I_z = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$W_z = W_y = \frac{\pi}{32 \cdot D} (D^4 - d^4)$	$i_z = i_y = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$