Adrian HOLHOȘ

Curs de

Matematici speciale

U.T.PRESS
CLUJ-NAPOCA, 2018
ISBN 978-606-737-294-6

Adrian HOLHOȘ

Curs de

Matematici speciale

U.T. PRESS
CLUJ-NAPOCA, 2018
ISBN 978-606-737-294-6

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Prof.dr. Alexandru Mitrea

ISBN 978-606-737-294-6

Cuprins

Prefaţă

Această carte se adresează studenţilor din anul întâi de la universităţile tehnice şi conţine materia predată la disciplina Matematici Speciale la Facultatea de Inginerie Electrică.

Materialul este structurat în nouă capitole şi conţine noţiuni teoretice şi exerciţii aplicative din trei domenii: ecuaţii diferenţiale, analiză complexă şi transformata Laplace. La începutul fiecărui capitol sunt prezentate noţiunile şi rezultatele teoretice necesare, care sunt însoţite de exemple şi aplicaţii. La sfârşitul fiecărui capitol sunt date câteva exerciţii pentru fixarea noţiunilor teoretice însoţite de indicaţii de rezolvare.

Am consultat cursuri predate mai demult de colegi dar şi materiale predate la alte universităţi din ţară şi din străinătate. Sper ca lucrurile prezentate în această carte să fie de folos studenţilor, colegilor şi tuturor celor interesaţi de matematică şi de aplicaţiile acesteia.

Doresc să mulţumesc frumos domnului profesor Alexandru Mitrea pentru observaţiile şi sugestiile care au dus la o îmbunătăţire a conţinutului şi a prezentării acestui material.

Cluj-Napoca,

Aprilie 2018 Autorul

Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

1.1 Noţiuni introductive

1.1 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială** *o ecuaţie care conţine derivate ale unei funcţii necunoscute. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, ecuaţia se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară** *sau simplu* **ecuaţie diferenţială***, iar dacă funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile se numeşte* **ecuaţie cu derivate parţiale***.*

1.2 Notaţie. Deoarece în numeroase aplicaţii variabila independentă este timpul, vom nota, în cele mai multe cazuri, cu t variabila independentă. Funcţiile necunoscute le vom nota cu x, y, z, etc. Derivatele funcţiei necunoscute le vom nota cu $x', x'', \dots, x^{(n)}$ sau cu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \dots, \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}$ pentru a pune în evidenţă variabila independentă. În fizică şi mecanică se folosesc uneori notaţiile $\dot{x}$ şi $\ddot{x}$ pentru derivatele lui x de ordinul unu şi doi (unde timpul este variabila independentă).

1.3 Definiţie. **Ordinul unei ecuaţii** *este ordinul cel mai mare al derivatelor funcţiei necunoscute, care apar în ecuaţie.*

1.4 Observaţie. O ecuaţie diferenţială de ordinul n are forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Dacă reuşim să explicităm pe $x^{(n)}$ în funcţie de celelalte variabile, adică

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

atunci, spunem că am adus ecuaţia (1.1) la ***forma normală***.

În particular, ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi sunt de forma $F(t, x, x') = 0$ sau de forma $x' = f(t, x)$.

1.5 Definiţie. *Dacă ecuaţia diferenţială (1.1) se poate scrie sub forma*

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

atunci ecuaţia se numeşte **liniară***.*

1.6 Exemplu.

$x''' + \sqrt{t}x' + \cos t\ x = e^t$ este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul trei

$y'y^2 = 5t$ este o ecuaţie diferenţială neliniară de ordinul întâi

$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 4u''_{t^2}$ este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi

1.7 Definiţie. *Se numeşte* **soluţie** *a ecuaţiei diferenţiale (1.1) orice funcţie derivabilă* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, unde* $I \subseteq \mathbb{R}$ *este un interval, cu proprietatea că*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \qquad \text{pentru orice } t \in I.$$

1.8 Definiţie. *Prin* **soluţie generală** *a ecuaţiei diferenţiale (1.1) se înţelege o soluţie* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de forma*

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

unde $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie care depinde efectiv de n constante arbitrare* $C_1, C_2, \ldots, C_n$*. Prin* **soluţie particulară** *a ecuaţiei diferenţiale (1.1) se înţelege o soluţie care se obţine din soluţia generală dând valori particulare constantelor* $C_1, C_2, \ldots,\ C_n$*. Prin* **soluţie singulară** *a ecuaţiei diferenţiale (1.1) se înţelege o soluţie care nu poate fi obţinută din soluţia generală printr-o particularizare a constantelor* $C_1, C_2, \ldots, C_n$*.*

1.9 Definiţie. *Determinarea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale se numeşte* **integrare a ecuaţiei diferenţiale***.*

1.10 Definiţie. *Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte* **curbă integrală***.*

1.11 Exemplu. Ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul întâi $x = tx' + (x')^2$ are soluţia generală $x(t) = Ct + C^2$. Într-adevăr,

$$x - tx' - (x')^2 = Ct + C^2 - tC - C^2 = 0.$$

Printre soluţiile particulare ale ecuaţiei, sunt şi funcţiile $x_1(t) = -3t + 9$, $x_2(t) = -2t + 4$, $x_3(t) = -t + 1$, $x_4(t) = 0$, $x_5(t) = t + 1$, $x_6(t) = 2t + 4$, $x_7(t) = 3t + 9$, pentru că se obţin din soluţia generală pentru $C = -3$, $C = -2$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$, respectiv $C = 3$. Curbele integrale corespunzătoare sunt drepte. Ele sunt desenate cu roşu în Figura 1.1. Ecuaţia are şi soluţia $x(t) = -t^2/4$, pentru că

$$x - tx' - (x')^2 = -\frac{t^2}{4} - t \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) - \left(-\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = 0.$$

Se observă că această soluţie este singulară pentru că ea reprezintă o funcţie de gradul doi şi nu se poate obţine din soluţia generală, care este o funcţie de gradul întâi. În Figura 1.1, curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare, este parabola desenată cu negru, care este înfăşurătoarea familiei de drepte $x = Ct + C^2$ (este tangentă la fiecare dreaptă din familie).

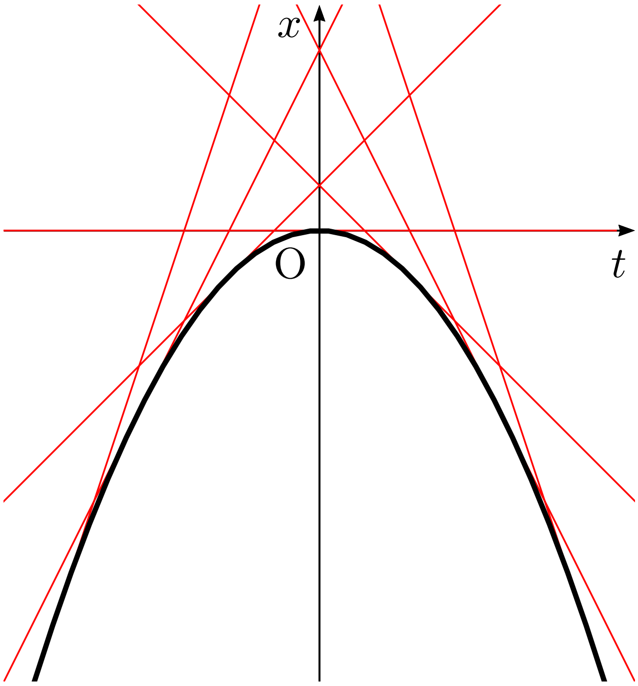

Figura 1.1: Câteva dintre curbele integrale ale ecuaţiei $x = tx' + (x')^2$

1.12 Definiţie. *Prin* **problema lui Cauchy** *relativ la ecuaţia diferenţială (1.1) se înţelege determinarea unei soluţii particulare* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *a ecuaţiei (1.1) astfel încât fiind date* x_0, $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ *şi* $t_0 \in I$ *să avem*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad x''(t_0) = x_2, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Aceste relaţii se numesc **condiţii iniţiale**.

1.2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi integrabile

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi au forma generală normală $x' = f(t, x)$. Vom studia în continuare câteva cazuri particulare.

Primitiva unei funcţii

Cel mai simplu exemplu de ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este ecuaţia

$$x' = f(t), \tag{1.2}$$

unde $f \in C(I)$, iar $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid. Soluţia unei astfel de ecuaţii se numeşte ***primitivă*** a funcţiei f şi se notează $\int f(t)\,dt$.

În continuare, redăm primitivele funcţiilor mai des întâlnite.

$$\int t^a \,\mathrm{d}t = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ t \in I \subset (0,\infty)$$

$$\int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln|t| + C, \qquad t \in I \subset \mathbb{R}^*$$

$$\int a^t \,\mathrm{d}t = \frac{a^t}{\ln a} + C, \qquad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} \arctan\frac{t}{a} + C, \qquad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2-a^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C, \qquad a \neq 0,\ t \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} \,\mathrm{d}t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+a^2}\right) + C, \qquad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}} \,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2-a^2}\right| + C, \qquad a > 0,\ t \in I \subset \mathbb{R} \setminus [-a, a]$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}} \,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{a} + C, \qquad a > 0,\ t \in I \subset (-a, a)$$

$$\int \sin t \,\mathrm{d}t = -\cos t + C, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t + C, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.13 Exemplu. Să se rezolve problema lui Cauchy

$$x' = \sqrt{t^2+4}, \quad x(0) = 2.$$

Prin integrare prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int \sqrt{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int t' \cdot \sqrt{t^2+4}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{t^2+4} - \int t \left(\sqrt{t^2+4}\right)' \mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{t^2+4} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{t^2+4} - \int \frac{t^2+4-4}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{t^2+4} - \int \sqrt{t^2+4}\,\mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{t^2+4} - x(t) + 4\ln(t + \sqrt{t^2+4}).
\end{aligned}$$

Obţinem soluţia generală

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+4} + 4\ln(t + \sqrt{t^2+4})\right] + C.$$

Condiţia iniţială ne arată că $2 = x(0) = 2\ln 2 + C$, de unde $C = 2(1 - \ln 2)$. Soluţia problemei lui Cauchy este:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+4} + 4\ln(t + \sqrt{t^2+4})\right] + 2(1 - \ln 2).$$

Ecuaţii cu variabile separabile

1.14 Definiţie. *Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi*

$$x' = g(t) \cdot h(x) \tag{1.3}$$

unde $g \in C(I)$, $h \in C(J)$ şi $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sunt intervale nevide, se numeşte **ecuaţie cu variabile separabile**.

O astfel de ecuaţie se rezolvă scriind formal:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t) \cdot h(x)$$

de unde (deşi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ nu este o fracţie), pentru $x \in J_1$ unde J_1 este un subinterval al lui J pentru care $h(x) \neq 0$, avem

$$\frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t$$

Prin integrare rezultă

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soluţia se obţine în forma implicită $H(x) = G(t) + C$, unde $H(x)$ este o primitivă a funcţiei $1/h(x)$, iar $G(t)$ este o primitivă a funcţiei $g(t)$.

1.15 Observaţie. Dacă ecuaţia $h(x) = 0$ are rădăcina x_0 atunci $x = x_0$ este soluţie singulară a ecuaţiei (1.3). Într-adevăr, fiindcă $x' = 0$ se vede că relaţia (1.3) este identic verificată de funcţia constantă $x(t) = x_0$.

1.16 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x' = ax$, unde a este un parametru real.

Observăm că $x = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Dacă $x \neq 0$ putem separa variabilele

$$x' = ax \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = a\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \ln|x| = at + C \Leftrightarrow |x| = e^{at+C} \Leftrightarrow x = \pm e^{at+C}.$$

Notând $C_1 = \pm e^C \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ obţinem $x = C_1 e^{at}$. Înglobând şi soluţia $x = 0$ obţinem $x(t) = C_1 e^{at}$, $C_1 \in \mathbb{R}$ soluţia generală a ecuaţiei considerate.

1.3 Modelarea matematică

Pentru că derivata $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t)$ unei funcţii x este viteza cu care cantitatea $x = x(t)$ se schimbă în raport cu variabila independentă t, este natural ca relaţii în care apar derivate să descrie schimbările din univers. Astfel, procesele dinamice întâlnite în natură şi studiate în ştiinţe (fizică, chimie, biologie, economie, etc.) se modelează folosind ecuaţii diferenţiale.

1.17 Definiţie. *Numim* **model matematic** *problema matematică ataşată unei probleme concrete din lumea reală. Procesul prin care ajungem de la problema concretă la problema matematică se numeşte* **modelare matematică**.

Modelarea matematică implică cel puţin trei paşi:

1. formularea unei probleme sau situaţii din realitate în termeni matematici, obţinându-se astfel un model matematic;

2. analiza sau soluţionarea problemei matematice;

3. interpretarea rezultatelor matematice obţinute în contextul din lumea reală.

Acest proces poate fi descris astfel:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{problemă concretă}} \arrow[r, "\text{formulare}"] & \boxed{\text{model matematic}} \arrow[d, "\text{analiză}"] \\
\boxed{\text{soluţia problemei concrete}} & \boxed{\text{soluţia modelului matematic}} \arrow[l, "\text{interpretare}"']
\end{tikzcd}$$

Un model trebuie să răspundă la două cerinţe:

a. să fie suficient de complex şi detaliat pentru a putea descrie cât mai bine problema reală;

b. să fie suficient de simplu pentru a putea fi analizat matematic.

Dacă modelul este prea complex, analiza lui este prea dificilă şi nu poate fi făcută, iar dacă modelul este prea simplu rezultatele pot fi lipsite de relevanţă. Un model adecvat surprinde într-un mod simplu caracteristicile esenţiale ale problemei concrete studiate.

1.18 Exemplu (Dinamica populaţiei)**.** Fie P_0 numărul de indivizi ai unei populaţii (oameni, insecte, bacterii, etc.) la momentul de timp t_0. Se cere să se determine numărul indivizilor acestei populaţii la momentul de timp $t \geq t_0$.

Fie $P(t)$numărul de indivizi la momentul de timp t. Presupunem că rata natalităţii α şi mortalităţii β sunt constante. Aceste rate arată numărul de naşteri/decese per individ per unitatea de timp.

Într-o perioadă scurtă de timp Δt au loc, aproximativ, $\alpha P(t)\Delta t$ naşteri şi $\beta P(t)\Delta t$ decese. Variaţia populaţiei în această perioadă de timp este

$$\Delta P \approx (\alpha - \beta)P(t)\Delta t.$$

Obţinem

$$P'(t) = \frac{dP}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t).$$

Notând $k = \alpha - \beta$ obţinem modelul

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

model studiat în 1798 de Thomas Robert Malthus.

Integrând ecuaţia cu variabile separabile se obţine soluţia

$$P(t) = C \cdot e^{kt}.$$

Folosind condiţia iniţială rezultă $P_0 = Ce^{kt_0}$ de unde $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$, pentru $t \geq t_0$.

Să presupunem că o populaţie de bacterii Escherichia Coli se dublează tot la 20 de minute. Nişte măsurători de laborator făcute în cadrul unui experiment arată că erau la un moment dat 1,2 milioane de bacterii per ml de volum. Câte bacterii vor fi după o jumătate de oră, dacă se menţin condiţiile existente?

Fie t timpul măsurat în minute. Avem $P(t_0) = P_0 = 1,2 \cdot 10^6$. Din condiţia de multiplicare $P(t_0 + 20) = 2P(t_0)$ obţinem $P_0 e^{k(t_0+20-t_0)} = 2P_0$, adică $e^{20k} = 2$, de unde $k = \ln 2/20$. Astfel, după o jumătate de oră numărul de bacterii este

$$P(30 + t_0) = P_0 e^{\frac{\ln 2}{20} \cdot 30} = 1,2 \cdot 10^6 \cdot 2\sqrt{2} \approx 3,4 \text{ milioane.}$$

Un alt model în dinamica populaţiilor a fost studiat de belgianul Pierre Verhulst în 1838. El a precizat că populaţia unei ţări nu poate creşte nelimitat ca în modelul lui Malthus din cauza condiţiilor de mediu. El a adăugat ipoteza că rata de creştere k, scade proporţional cu efectivul atins de populaţie. Astfel se obţine modelul logistic:

$$\begin{cases} P'(t) = (k - aP(t)) \cdot P(t), & k > 0,\ a > 0 \\ P(t_0) = P_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Soluţia acestei probleme Cauchy se obţine tot prin separarea variabilelor.

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(k-aP)} = \mathrm{d}t \iff \frac{1}{k}\left(\frac{\mathrm{d}P}{P} + \frac{a \cdot \mathrm{d}P}{k - aP}\right) = t + \ln C' \iff \ln P - \ln(k - aP) = \ln C + kt.$$

De aici rezultă

$$\frac{P}{k - aP} = C \cdot e^{kt} \iff P = \frac{kCe^{kt}}{1 + aCe^{kt}}.$$

Folosind condiţia iniţială avem $P_0 = kCe^{kt_0}/(1 + aCe^{kt_0})$. Valoarea constantei este $C = \frac{P_0 e^{-kt_0}}{k - aP_0}$. Astfel, populaţia la momentul de timp $t \geq t_0$ va fi

$$P(t) = \frac{kP_0}{(k - aP_0)e^{-k(t-t_0)} + aP_0}.$$

El a notat că populaţia Belgiei în 1815 a fost 3 494 985, în 1824 a fost 3 816 249, iar în 1833 a fost 4 142 257. Să verificăm conform acestui model care este populaţia în 1900, 1915 şi în 2009.

Fie $t_0 = 1815$ şi $P_0 = 3\,494\,985$. Pentru a afla parametrii a şi k rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} P_1 = \frac{kP_0}{(k-aP_0)e^{-k(t_1-t_0)}+aP_0} \\ P_2 = \frac{kP_0}{(k-aP_0)e^{-k(t_2-t_0)}+aP_0} \end{cases}$$

Fiindcă $t_1 - t_0 = 9$ şi $t_2 - t_0 = 18$, eliminând pe a din cele două ecuaţii, rezultă

$$\frac{\frac{P_0}{P_1} - e^{-9k}}{1 - e^{-9k}} = \frac{\frac{P_0}{P_2} - e^{-18k}}{1 - e^{-18k}}.$$

Obţinem

$$k = -\frac{1}{9} \ln\left(\frac{P_0}{P_2} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_1 - P_0}\right) \approx 0,01725033$$

$$aP_0 = k \cdot \frac{P_0}{P_1} \cdot \frac{P_1^2 - P_0 P_2}{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2} \approx 0,00715177$$

În tabelul de mai jos avem estimările conform modelului lui Malthus şi Verhulst şi erorile relative.

An	P reală	P prognozată	Malthus	P prognozată	Verhulst
1815	3 494 985	3 494 985	—	3 494 985	—
1824	3 816 249	3 816 249	—	3 816 249	—
1833	4 142 257	4 167 044	0,59 %	4 142 257	—
1820	3 645 894	3 669 972	0,66 %	3 672 655	0,73 %
1845	4 800 861	4 685 435	2,40 %	4 577 613	-4,65 %
1900	6 719 000	8 019 397	19,35 %	6 358 094	-5,37 %
1915	7 697 000	9 285 259	20,63 %	6 735 519	-12,49 %
2009	10 755 000	23 263 866	116,30 %	8 030 811	-25,32 %

Populaţia maximă conform modelului lui Verhulst este

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{k}{a} \approx 8\,430\,029.$$

Această valoare a fost depăşită în realitate, după cum reiese şi din tabel.

1.19 Exemplu (Dezintegrarea substanţelor radioactive)**.** S-a stabilit experimental că o substanţă radioactivă se dezintegrează cu o viteză proporţională cu cantitatea de substanţă existentă. Notând cu $X(t)$ cantitatea de substanţă existentă la momentul de timp t şi cu $-k$, unde $k > 0$, coeficientul de proporţionalitate, legea dezintegrării radioactive se scrie

$$X'(t) = -kX(t).$$

Obţinem acelaşi model ca cel al dinamicii populaţiei cu 0 naşteri şi k decese. Soluţia acestei ecuaţii este $X(t) = Ce^{-kt}$.

Metoda de datare cu carbon ^{14}C se bazează pe această lege a dezintegrării. Această metodă a fost introdusă de Willard Libby şi echipa sa în 1947 (pentru care a primit premiul Nobel pentru chimie în 1960) şi poate fi descrisă astfel: Carbonul există natural sub forma a trei izotopi: ^{12}C, ^{13}C şi ^{14}C, primii doi stabili şi al treilea radioactiv, în următoarele proporţii: ^{12}C - 98,89%, ^{13}C- 1,11%, ^{14}C-0,00000000010%. Astfel, pentru un singur atom de ^{14}C din natură există aproximativ 1 000 000 000 000 atomi de carbon ^{12}C. Carbonul 14 este produs în atmosferă din azot sub influenţa razelor solare. El se amestecă cu oxigenul din atmosferă formând CO_2. Prin procesul de fotosinteză carbonul ^{14}C este asimilat de plante. Prin hrănirea cu plante animalele incorporează în organismul lor ^{14}C. Când animalele sau plantele mor, pentru că nu mai există schimb de carbon cu mediul, cantitatea de carbon 14 existentă în ele se diminuează. Carbonul 14 prin dezintegrare formează înapoi azotul. După o perioadă de aproximativ 5730 de ani cantitatea de carbon 14 se înjumătăţeşte. Măsurând cantitatea de carbon ^{14}C existentă în planta sau animalul mort, obţinem informaţii care ne permit calcularea datei când a murit. Să presupunem că începem să socotim timpul t de la moartea organismului şi notăm cu $X(t)$ cantitatea de carbon ^{14}C existentă în acel organism la momentul t. Datorită legii de dezintegrare a substanţelor radioactive deducem că $X(t) = Ce^{-kt}$. Constanta C se determină din

$$C = X(0)$$

şi din faptul că $X(0)$ reprezintă cantitatea de carbon 14 existentă în organism în momentul morţii acestuia. Ştiind că raportul r dintre cantitatea de carbon ^{14}C şi carbon ^{12}C rămâne aproximativ constant, măsurând cantitatea c de carbon 12 existentă în organism în momentul descoperirii sale, obţinem

$$X(0) = r \cdot c.$$

Folosind perioada de înjumătăţire putem deduce valoarea constantei k:

$$\frac{1}{2}X(0) = X(0)e^{-k \cdot 5730}$$

de unde

$$k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,000120968.$$

Notând cu T momentul descoperirii, avem $X(T) = X(0)e^{-kT}$ şi deci

$$T = -\frac{1}{k} \ln \frac{X(T)}{X(0)} \approx -8266,64 \cdot \ln \frac{X(T)}{rc}$$

ceea ce ne arată cât timp s-a scurs de la moartea acelui organism.

Metoda poate fi folosită pentru a data rămăşiţele unui organism viu sau orice conţine carbon, dar nu pentru datarea rocilor şi metalelor. Cea mai controversată datare cu carbon 14 a fost cea din 1988 când Vaticanul a permis datarea giulgiului din Torino. Se crede că această pânză ar fi fost folosită la înmormântarea lui Hristos. Fibrele din bucata luată pentru a fi datată din celebra pânza de in conţin între 91,6% şi 93% din cantitatea originală de carbon ^{14}C. Aceste cantităţi corespund perioadelor

$$T = -8266,64 \cdot \ln 0,93 \approx 600$$

$$T = -8266,64 \cdot \ln 0,916 \approx 725.$$

Fiindcă testul a fost făcut în 1988, bucata de pânză datează din perioada 1263-1388. Răspunsul oficial a plasat-o între 1260 şi 1390. Deşi nimeni nu contestă validitatea datării cu carbon 14, mulţi contestă procedura folosită pentru datarea acestei pânze. Unii spun că bucata de pânză analizată ar fi fost adăugată la giulgiu ulterior (cândva în perioada medievală). Alţii spun că bucata analizată ar fi fost contaminată şi astfel rezultatele testului cu carbon 14 nu sunt relevante.

1.20 Observaţie. Pentru o problemă dată se pot construi mai multe modele cu diferite grade de fidelitate (vezi două dintre modelele dinamicii populaţiilor). Să observăm că un model poate

Figura 1.2: Stânga: imaginea feţei de pe giulgiul din Torino. Dreapta: negativul imaginii

servi la mai multe scopuri. Modelul malthusian al creşterii populaţiei şi legea dezintegrării substanţelor radioactive sunt modelate de ecuaţia

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R} \text{ constantă.}$$

Acest model poate fi folosit şi în economie pentru calcularea dobânzii compusă continuu şi în farmacie, pentru cantitatea de substanţe din medicamente aflată în sânge la un moment dat.

1.4 Alte ecuaţii de ordinul întâi integrabile

Ecuaţii omogene

1.21 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială omogenă** *o ecuaţie de forma*

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right),$$

unde $f \in C(I)$*,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid şi* $f(y) \neq y$*, pentru orice* $y \in I$*.*

Această ecuaţie se rezolvă prin schimbarea de funcţie

$$y = \frac{x}{t}.$$

Avem $x' = (t \cdot y)' = y + t \cdot y'$. Ecuaţia care se obţine

$$y + t \cdot y' = f(y)$$

este cu variabile separabile. Nu ne rămâne decât să integrăm această ecuaţie şi apoi să revenim la variabilele iniţiale.

1.22 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $tx' = x + \sqrt{x^2 + t^2}$.

Pentru $t > 0$ aducem ecuaţia la forma

$$x' = \frac{x}{t} + \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1},$$

care este o ecuaţie omogenă. Notăm $y = x/t$. Avem $x = ty$ şi

$$y + ty' = y + \sqrt{y^2+1} \iff \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \iff \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = \ln t + C.$$

Dacă dorim soluţia în forma explicită folosim funcţia sinus hiperbolic $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ şi avem

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\ln(y+\sqrt{y^2+1}) &= \frac{y+\sqrt{y^2+1} - \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}}{2} = \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2 + 1 - 1}{2(y+\sqrt{y^2+1})}\\ &= \frac{2y(y+\sqrt{y^2+1})}{2(y+\sqrt{y^2+1})} = y.\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $y = \operatorname{sh}(C + \ln t)$, adică $x(t) = t\operatorname{sh}(C + \ln t)$, pentru $t > 0$. Dar aceasta este echivalent cu

$$x(t) = t \cdot \frac{e^{C+\ln t} - e^{-C-\ln t}}{2} = t \cdot \frac{e^C t - e^{-C}\frac{1}{t}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^C t^2 - e^{-C}\right).$$

Dacă $t < 0$ ecuaţia iniţială se rescrie

$$x' = \frac{x}{t} - \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1},$$

care prin aceeaşi substituţie ca şi pentru cazul de mai sus ne dă $y = \operatorname{sh}(C' - \ln(-t))$. Obţinem soluţia $x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-C'}t^2 - e^{C'}\right)$, pentru $t < 0$. Pentru $C' = -C$, obţinem soluţia generală pe $\mathbb{R}$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^C t^2 - \frac{1}{e^C}\right).$$

Ecuaţii reductibile la ecuaţii omogene

1.23 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială reductibilă la ecuaţie omogenă** *o ecuaţie de forma*

$$x' = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right),$$

unde $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sunt constante reale şi $f \in C(I)$, I un interval real nevid.

Pentru integrarea acestor ecuaţii considerăm cazurile:

I. $a\beta - b\alpha \neq 0$. În acest caz, datorită condiţiei puse, sistemul

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$$

are soluţie unică, pe care o notăm (t_0, x_0). Făcând schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases}$$

şi ţinând cont că $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = y'$, rezultă ecuaţia omogenă

$$y' = f\left(\frac{as + by + at_0 + bx_0 + c}{\alpha s + \beta y + \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma}\right) = f\left(\frac{as + by}{\alpha s + \beta y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{s}}{\alpha + \beta\frac{y}{s}}\right).$$

II. $a\beta - b\alpha = 0$. Notând cu $\lambda = \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ şi notând $y = \alpha t + \beta x$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$$y' = \alpha + \beta x' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda y + c}{y + \gamma}\right).$$

1.24 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x' = \frac{2(x+2)^2}{(x+t-1)^2}$.

Soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

este $(t_0, x_0) = (3, -2)$. Notăm $s = t - 3$ şi $y = x + 2$, obţinem

$$y' = \frac{2y^2}{(y+s)^2} = \frac{2\left(\frac{y}{s}\right)^2}{\left(\frac{y}{s} + 1\right)^2}.$$

Notăm $z = \frac{y}{s}$. Rezultă

$$z + sz' = \frac{2z^2}{(1+z)^2} \Longleftrightarrow sz' = \frac{2z^2 - z - 2z^2 - z^3}{(1+z)^2} = -\frac{z(1+z^2)}{(z+1)^2}.$$

Separăm variabilele şi obţinem

$$\frac{(1+z)^2\,\mathrm{d}z}{z(1+z^2)} = -\frac{\mathrm{d}s}{s} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}s}{s} \Longleftrightarrow \ln z + 2\,\mathrm{arctg}\, z = -\ln s + C.$$

Revenim la variabilele iniţiale şi obţinem soluţia în forma implicită

$$\ln(x+2) + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{t-3} = C.$$

Soluţia singulară se obţine din $z = 0$, adică $x(t) = -2$.

1.25 Exemplu. Să se integreze $x' = \sin(t - x)$.

Notăm $y = t - x$. Rezultă $y' = 1 - x' = 1 - \sin y$. Separăm variabilele şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}y}{1 - \sin y} = \mathrm{d}t \Longleftrightarrow t + C = \int \frac{dy}{1 - \sin y}.$$

Facem schimbarea de variabile $z = \mathrm{tg}\,\frac{y}{2}$. Rezultă

$$t + C = \int \frac{1}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\int \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2} = -\frac{2}{z-1} = -\frac{2}{\mathrm{tg}\,\frac{y}{2} - 1} = -\frac{2}{\mathrm{tg}\,\frac{t-x}{2} - 1}.$$

Avem $\mathrm{tg}\,\frac{x-t}{2} + 1 = \frac{2}{t+C}$, de unde $x(t) = t + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{t+C} - 1\right)$. Soluţiile singulare ale ecuaţiei se obţin din $\sin y = 1$. Avem $y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, adică $x(t) = t - 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Ecuaţii liniare

1.26 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie liniară de ordinul întâi** *o ecuaţie de forma*

$$x' + p(t)x = q(t),$$

unde $p, q \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid.

O ecuaţie liniară se rezolvă înmulţind ecuaţia cu $e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}$ şi privind membrul stâng al ecuaţiei ca derivata unui produs

$$x'(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} + x(t)p(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = q(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow \left(x(t)\cdot e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\right)' = q(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Integrând se obţine

$$x(t)\cdot e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = \int q(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + C \Longleftrightarrow x(t) = e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int q(t)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + C\right).$$

O altă metodă de rezolvare este următoarea: se rezolvă mai întâi ecuaţia liniară omogenă, adică $x' + p(t)x = 0$, care este o ecuaţie cu variabile separabile. Se obţine soluţia ecuaţiei omogene $x = Ce^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$. Pentru a găsi soluţia ecuaţiei neomogene folosim ***metoda variaţiei constantei (Lagrange)***: căutăm soluţia generală sub forma $x = C(t)e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$, unde $C(t)$ este o funcţie necunoscută în variabila t.

1.27 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x' - 2tx = 2te^{t^2}$.

Avem $p(t) = -2t$. Înmulţim toată ecuaţia cu $e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = e^{-t^2}$. Se obţine

$$x'e^{-t^2} - 2te^{-t^2}x = 2t \Longleftrightarrow \left(x\cdot e^{-t^2}\right)' = 2t \Longleftrightarrow x\cdot e^{-t^2} = t^2 + C \Longleftrightarrow x(t) = (t^2 + C)e^{t^2}.$$

O altă rezolvare este următoarea: se rezolvă mai întâi ecuaţia $x' - 2tx = 0$. Avem

$$x' = 2tx \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2tx \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2t\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \ln x = t^2 + \ln C \Leftrightarrow x = Ce^{t^2}.$$

Căutăm acum o soluţie de forma $x = C(t)\cdot e^{t^2}$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă

$$x'(t) - 2tx(t) = 2te^{t^2} \Leftrightarrow C'(t)e^{t^2} + C(t)e^{t^2}2t - 2tC(t)e^{t^2} = 2te^{t^2} \Leftrightarrow C'(t) = 2t \Leftrightarrow C(t) = t^2 + C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare va fi $x = (t^2 + C)e^{t^2}$.

Ecuaţii Bernoulli

1.28 Definiţie. *Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, o ecuaţie de forma*

$$x' + p(t)x = q(t)x^{\alpha}, \tag{1.6}$$

unde $p, q \in C(I)$, I interval nevid din $\mathbb{R}$, se numeşte **ecuaţie Bernoulli**.

1.29 Observaţie. Pentru $\alpha = 0$ ecuaţia (1.6) este o ecuaţie liniară, iar pentru $\alpha = 1$, ea se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile.

Pentru $\alpha > 0$ ecuaţia de tip Bernoulli admite soluţia $x(t) = 0$, $t \in I$. Considerând un subinterval $I_1 \subseteq I$ unde $x(t) \neq 0$, $t \in I_1$, prin substituţia $y = x^{1-\alpha}$, ecuaţia (1.6) se transformă într-o ecuaţie liniară.

O altă metodă de rezolvare este metoda variaţiei constantei: se rezolvă mai întâi ecuaţia liniară omogenă, adică $x' + p(t)x = 0$, care are soluţia $x = Ce^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$. Pentru a găsi soluţia ecuaţiei neomogene căutăm soluţia generală sub forma $x = C(t)e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$, unde $C(t)$ este o funcţie necunoscută în variabila t.

1.30 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $2x' \sin t + x \cos t = x^3 \sin^2 t$.

Soluţia singulară a ecuaţiei este $x = 0$. Pentru a găsi soluţia generală notăm $y = x^{-2}$ de unde $x = y^{-\frac{1}{2}}$. Avem

$$-y^{-\frac{3}{2}} \cdot y' \sin t + y^{-\frac{1}{2}} \cos t = y^{-\frac{3}{2}} \sin^2 t \Longleftrightarrow y' - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot y = -\sin t.$$

Avem

$$e^{\int \frac{-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t} = e^{-\ln \sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Ecuaţia se scrie

$$\left(y \cdot \frac{1}{\sin t}\right)' = -1 \Longleftrightarrow y \cdot \frac{1}{\sin t} = C - t \Longleftrightarrow y = (C-t)\sin t \Longleftrightarrow x^{-2} = (C-t)\sin t.$$

Obţinem soluţiile generale

$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(C-t)\sin t}}.$$

Pentru a determina soluţia ecuaţiei cu metoda variaţiei constantei, rezolvăm mai întâi ecuaţia $2x' \sin t + x \cos t = 0$. Avem

$$2x' \sin t = -x \cos t \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\cos t}{2 \sin t} \Longleftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \ln \sin t + \ln C \Longleftrightarrow x = \frac{C}{\sqrt{\sin t}}.$$

Căutăm soluţia sub forma $x = \frac{C(t)}{\sqrt{\sin t}}$. Înlocuim în ecuaţia dată iniţial şi după nişte calcule se ajunge la ecuaţia $2C'(t) = C^3(t)$, care este cu variabile separabile.

$$2C' = C^3 \Longleftrightarrow -2\frac{\mathrm{d}C}{C^3} = -\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow C^{-2} = -t + C \Longleftrightarrow C(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{C-t}}.$$

Soluţia ecuaţiei Bernoulli este $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{(C-t)\sin t}}$.

Ecuaţii Riccati

1.31 Definiţie. *O* **ecuaţie Riccati** *este o ecuaţie de forma*

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

unde $a, b, c \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid.*

Putem rezolva o astfel de ecuaţie doar dacă cunoaştem o soluţie particulară x^* a acesteia. Notând

$$x = x^* + \frac{1}{y}$$

se obţine o ecuaţie cu funcţia necunoscută y care va fi o ecuaţie liniară.

1.32 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x' - 2tx + x^2 = 5 - t^2$, ştiind că admite o soluţie de forma $x^* = at + b$.

Pentru că x^* este soluţie avem

$$a - 2t(at + b) + a^2t^2 + 2abt + b^2 = 5 - t^2$$

de unde $a = 1$ şi $b = \pm 2$. Notăm $x = t \pm 2 + \frac{1}{y}$. Rezultă ecuaţia cu variabile separabile

$$y' = \pm 4y + 1 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\pm 4y + 1} = \mathrm{d}t \iff \pm\frac{1}{4}\ln\left(y \pm \frac{1}{4}\right) = t + C \iff y = e^{\pm 4(t+C)} \mp \frac{1}{4}.$$

Aşadar

$$x = t \pm 2 + \frac{4}{4e^{\pm 4(t+C)} \mp 1}.$$

Ecuaţii cu diferenţiala totală exactă

1.33 Definiţie. *O* **ecuaţie cu diferenţiala totală exactă** *este o ecuaţie de forma*

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

unde $P, Q \in C^1(D)$, $D = I \times J$, I, J intervale reale nevide, astfel încât există o funcţie $U(x, y) \in C^2(D)$ cu proprietatea că $U'_x = P$ şi $U'_y = Q$.

Soluţia unei astfel de ecuaţii este dată în forma implicită $U(x, y) = C$.

Condiţia ca o ecuaţie de forma $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ să fie cu diferenţială totală exactă este ca $P'_y = Q'_x$. Dacă această condiţie este verificată, ne rămâne de aflat funcţia U. Aceasta se poate determina cu formula

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t$$

sau

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este ales arbitrar.

1.34 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $(6xy - 2y^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2 - 6xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

Notăm $P(x, y) = 6xy - 2y^3$ şi $Q(x, y) = 3x^2 - 6xy^2$. Verificăm dacă ecuaţia dată este cu diferenţiala totală exactă. Trebuie ca $P'_y = Q'_x$. Avem $P'_y = 6x - 6y^2 = Q'_x$. Determinăm acum funcţia U. Alegem $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Avem

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x, t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y (3x^2 - 6xt^2)\,\mathrm{d}t = 3x^2 \cdot t\Big|_0^y - 2x \cdot t^3\Big|_0^y = 3x^2y - 2xy^3.$$

Soluţia ecuaţiei date este $3x^2y - 2xy^3 = C$.

Ecuaţii Lagrange

1.35 Definiţie. *O* **ecuaţie Lagrange** *este o ecuaţie de forma*

$$x = t\varphi(x') + \psi(x'),$$

$\varphi, \psi \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid. Pentru funcţia particulară* $\varphi(u) = u$, *ecuaţia se numeşte* **ecuaţie Clairaut**.

Pentru a rezolva astfel de ecuaţii facem schimbarea de funcţie $p = x'$. Obţinem relaţia $x = t\varphi(p) + \psi(p)$. Derivăm în raport cu t relaţia şi obţinem

$$p = \varphi(p) + t\varphi'(p) \cdot p' + \psi'(p) \cdot p'.$$

Deci

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \cdot (t\varphi'(p) + \psi'(p)) = p - \varphi(p).$$

Schimbăm rolurile lui t şi p. Rezultă ecuaţia liniară

$$t\varphi'(p) + \psi'(p) = (p - \varphi(p))\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}.$$

1.36 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x = 2tx' + \sin x'$.

Notăm $x' = p$. Se obţine $x = 2tp + \sin p$, iar prin derivare $p = 2p + 2tp' + \cos p \cdot p'$, care este echivalentă cu $p'(2t + \cos p) = -p$. Dacă $p = 0$ atunci soluţia singulară a ecuaţiei este $x = 0$. Dacă $p \neq 0$ atunci

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \cdot (2t + \cos p) = -p \Longleftrightarrow -p\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = 2t + \cos p \Longleftrightarrow t' + \frac{2}{p}t = -\frac{\cos p}{p}.$$

Înmulţim ecuaţia cu

$$e^{\int \frac{2}{p}\,\mathrm{d}p} = e^{2\ln p} = p^2$$

şi obţinem

$$\left(t \cdot p^2\right)' = -p\cos p,$$

adică

$$t \cdot p^2 = -\int p\cos p\,\mathrm{d}p = -\left(p\sin p + \cos p + C\right).$$

Obţinem soluţia parametrică a ecuaţiei

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{p^2}(p\sin p + \cos p + C) \\ x = 2tp + \sin p = -\frac{2}{p}(p\sin p + \cos p + C) + \sin p. \end{cases}$$

1.37 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x = tx' + (x')^2$.

Această ecuaţie este o ecuaţie Clairaut. Notăm $x' = p$. Avem $x = tp + p^2$. Prin derivare rezultă $p = p + tp' + 2pp'$, adică $p'(t + 2p) = 0$.

Dacă $p' = 0$, atunci $p = C$ şi obţinem soluţia generală $x = tC + C^2$.

Dacă $t + 2p = 0$, avem $t = -2p$ şi $x = tp + p^2 = -2p^2 + p^2 = -p^2$. Prin eliminarea parametrului p avem $p = -t/2$ şi $x = -\left(-\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{4}$, care este soluţia singulară a ecuaţiei.

1.5 Existenţa, unicitatea şi stabilitatea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi

Existenţa şi unicitatea soluţiilor

În secţiunile precedente au fost studiate câteva clase de ecuaţii de ordinul întâi pentru care, cel puţin din punct de vedere teoretic, se poate determina efectiv soluţia generală. În general, pentru o ecuaţie dată, nu se poate determina nici măcar o soluţie particulară. De aceea este foarte important să se demonstreze existenţa soluţiilor, pentru ca apoi aceste soluţii să fie determinate prin metode numerice.

1.38 Teoremă (Teorema lui Picard de existenţă şi unicitate a soluţiilor)**.** *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi*

$$x' = f(t, x),$$

unde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe domeniul* $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ *care verifică o condiţie Lipschitz în raport cu* x*, adică există* $L > 0$ *astfel încât*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L \cdot |x - y|, \qquad \textit{pentru orice } (t, x) \in D \textit{ şi } (t, y) \in D.$$

Atunci există $h > 0$ *şi există o unică funcţie derivabilă* $\varphi : [t_0 - h, t_0 + h] \longrightarrow \mathbb{R}$ *care verifică proprietăţile*

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Demonstraţie. Problema este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\,\mathrm{d}u.$$

Într-adevăr, dacă x satisface $x' = f(t, x)$ şi $x(t_0) = x_0$ atunci prin integrare între t_0 şi t obţinem ecuaţia integrală de mai sus. Reciproc, dacă x satisface ecuaţia integrală atunci dacă facem $t = t_0$ obţinem $x(t_0) = x_0$, iar prin derivare (f este continuă) obţinem $x'(t) = f(t, x(t))$.

Pentru rezolvarea ecuaţiei integrale folosim metoda aproximaţiilor succesive a lui Emile Picard. Considerăm şirul de funcţii (φ_n) definit prin relaţia de recurenţă

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_{n-1}(u))\,\mathrm{d}u, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \varphi_0(t) = x_0.$$

Fie $M = \max_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ şi $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

I. Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ avem

$$|\varphi_n(t) - x_0| \le b.$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$ inegalitatea este adevărată. Pentru pasul de inducţie

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u))\,\mathrm{d}u\right| \le \left|\int_{t_0}^t |f(u, \varphi_{n-1}(u))|\,\mathrm{d}u\right| \\ &\le M\left|\int_{t_0}^t \mathrm{d}u\right| = M\cdot|t-t_0| \le M\cdot h \le M\cdot\frac{b}{M} = b.\end{aligned}$$

II. Demonstrăm că şirul (φ_n) este uniform convergent pe $[t_0 - h, t_0 + h]$. Considerăm seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n - \varphi_{n-1}$, care are ca şir al sumelor parţiale (S_n) tocmai şirul $(\varphi_n - x_0)$. Într-adevăr,

$$S_n = \varphi_1 - x_0 + \varphi_2 - \varphi_1 + \cdots + \varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi_n - x_0.$$

Vom arăta că această serie este uniform convergentă, ceea ce va demonstra că $(\varphi_n - x_0)$ este uniform convergent, deci şi (φ_n) este uniform convergent. Pentru aceasta demonstrăm prin inducţie că

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\,|t-t_0|)^n}{n!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Pentru $n = 1$ avem

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\int_{t_0}^t f(u, x_0)\,\mathrm{d}u\right| \le M\left|\int_{t_0}^t \mathrm{d}u\right| = M\cdot|t-t_0| = \frac{M}{L}\cdot\frac{L\,|t-t_0|}{1!}.$$

Pentru pasul de inducţie avem

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| &= \left|\int_{t_0}^t [f(u, \varphi_n(u)) - f(u, \varphi_{n-1}(u))]\,\mathrm{d}u\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^t L\cdot|\varphi_n(u) - \varphi_{n-1}(u)|\,\mathrm{d}u\right| \\ &\le L\left|\int_{t_0}^t \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\,|u-t_0|)^n}{n!}\,\mathrm{d}u\right| \\ &= \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\,|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Din inegalitatea demonstrată rezultă că

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^n}{n!}, \qquad \text{pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Şi pentru că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} = e^{Lh} - 1$, seria cu termenul general din membrul drept al inegalităţii de mai sus este convergentă şi conform criteriului lui Weierstrass obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)$ este uniform convergentă pe $[t_0 - h, t_0 + h]$.

III. Demonstrăm că $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ este soluţie a problemei Cauchy considerate. Trecem la limită în egalitatea

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u))\,\mathrm{d}u$$

şi obţinem datorită uniform convergenţei şirului (φ_n) că

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))\,\mathrm{d}u.$$

IV. Demonstrăm unicitatea soluţiei obţinute. Presupunem că ecuaţia integrală mai are o soluţie $\psi = \psi(t)$, adică

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \psi(u))\,\mathrm{d}u.$$

Demonstrăm prin inducţie că

$$|\varphi_n(t) - \psi(t)| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{(L\,|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Prin trecere la limită va rezulta că $|\varphi(t) - \psi(t)| \le 0$, pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, adică $\varphi(t) = \psi(t)$, de unde rezultă unicitatea soluţiei.

Pentru $n = 0$ avem

$$|\varphi_0(t) - \psi(t)| = |\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(u, \psi(u))\,\mathrm{d}u \right| \le M \cdot |t - t_0|\,.$$

Pentru pasul de inducţie

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(u, \varphi_n(u)) - f(u, \psi(u)) \right] \mathrm{d}u \right| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot |\varphi_n(u) - \psi(u)|\,\mathrm{d}u \right| \\ &\le L \left| \int_{t_0}^{t} \frac{M}{L} \cdot \frac{(L\,|u-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}u \right| = \frac{M}{L} \cdot \frac{(L\,|t-t_0|)^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

□

1.39 Observaţie. Metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard folosită în demonstraţie constituie şi o metodă de rezolvare a problemei Cauchy date. Fiecare termen al şirului (φ_n) reprezintă o soluţie aproximativă a problemei, cu eroarea estimată prin

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

1.40 Observaţie. Intervalul de existenţa a unei soluţii poate fi mai mare în realitate, decât intervalul garantat de teoremă.

1.41 Exemplu. Fie problema Cauchy $x' = tx^2$, $x(1) = 2$. Această ecuaţie cu variabile separabile are soluţia

$$x(t) = \frac{2}{2 - t^2}, \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Funcţia $f(t,x) = tx^2$ este continuă şi lipschitziană pe $D = [1-a, 1+a] \times [2-b, 2+b]$ pentru orice $a, b > 0$ finite. Să vedem care este intervalul maxim pe care este garantată existenţa soluţiei conform teoremei. Avem

$$M = \max_{(t,x)\in D} tx^2 = (1+a)(2+b)^2.$$

De aici

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{(1+a)(2+b)^2} \leq \frac{1}{8(1+a)},$$

pentru că $8b \leq (2+b)^2$, pentru orice b. Valoarea maximă a lui

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{1}{8(1+a)}\right)$$

se obţine când $a = \frac{1}{8(1+a)}$ adică $a = \frac{\sqrt{6}-2}{4} \approx 0,112$. Teorema garantează existenţa soluţiei pentru $t \in [1-a, 1+a] \approx [0,887\,,\, 1,112]$. De fapt, soluţia există pentru $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \approx (-1,414\,,\, 1,414)$.

1.42 Observaţie. Dacă funcţia $f(t,x)$ din teoremă nu este lipschitziană în raport cu x, atunci ecuaţia poate să aibă mai multe soluţii.

1.43 Exemplu. Să se studieze existenţa soluţiilor ecuaţiei $x' = \sqrt{|x|}$ cu condiţia iniţială $x(0) = 0$.

Observăm că $x = 0$ este soluţie a problemei Cauchy date.

Să considerăm acum cazul când $x > 0$. Ecuaţia cu variabile separabile are soluţia

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \mathrm{d}t \iff 2\sqrt{x} = t - C \iff x = \frac{(t-C)^2}{4}.$$

Pentru $C_1 \geq 0$ funcţia

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-C_1)^2}{4}, & t \geq C_1 \\ 0, & t < C_1 \end{cases}$$

este soluţie a ecuaţiei iniţiale.

În cazul $x < 0$ avem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x}} = \mathrm{d}t \iff -2\sqrt{-x} = t - C \iff x = -\frac{(t-C)^2}{4}.$$

Pentru $C_2 \leq 0$ funcţia

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{(t-C_2)^2}{4}, & t \leq C_2 \\ 0, & t > C_2 \end{cases}$$

este soluţie a ecuaţiei iniţiale.

Aşadar, ecuaţia are o infinitate de soluţii, care sunt de forma

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-C_1)^2}{4}, & t \geq C_1 \\ 0, & t \in (C_2, C_1) \\ -\frac{(t-C_2)^2}{4}, & t \leq C_2 \end{cases} \qquad C_2 \leq 0 \leq C_1$$

Faptul că nu are soluţie unică se datorează faptului că funcţia $f(t,x) = \sqrt{|x|}$ nu este lipschitziană în jurul originii, pentru că

$$\sup_{x\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \sup_{x\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

1.44 Observaţie. Dacă funcţia $f(t,x)$ din teoremă nu este continuă în raport cu t, atunci ecuaţia poate să aibă mai multe soluţii sau să nu aibă nici o soluţie.

1.45 Exemplu. Să se studieze existenţa soluţiilor problemei Cauchy $tx' = 2x$, $x(0) = x_0$.

Prin separarea variabilelor obţinem soluţia generală $x = Ct^2$. Dacă $x_0 = 0$ atunci problema are o infinitate de soluţii. Dacă $x_0 \neq 0$ atunci problema nu are nici o soluţie. Acest lucru se datorează faptului că $f(t,x) = \frac{2x}{t}$ nu este continuă în $t = 0$.

Stabilitatea soluţiilor

1.46 Observaţie. Am văzut care sunt condiţiile de existenţă a unei soluţii pentru ecuaţia diferenţială de ordinul întâi. Ne interesează acum următoarea problemă: dacă perturbări mici ale ecuaţiei sau ale condiţiilor iniţiale conduc la perturbări mici ale soluţiei. Pentru a studia acest lucru demonstrăm mai întâi următorul rezultat.

1.47 Lema (Lema lui Gronwall)**.** *Fie $\alpha, \beta, v : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ funcţii continue cu proprietatea că*

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(u)v(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \textit{pentru orice } t \in [a,b].$$

Atunci

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{\int_u^t \beta(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u.$$

Demonstraţie. Fie $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(t) = e^{-\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \int_a^t \beta(u)v(u)\,\mathrm{d}u.$$

Funcţia g este o funcţie derivabilă cu proprietatea că $g(a) = 0$ şi

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u}\beta(t)v(t) - \beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u}\int_a^t \beta(u)v(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \cdot \left(v(t) - \int_a^t \beta(u)v(u)\,\mathrm{d}u\right) \leq \alpha(t)\beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u}. \end{aligned}$$

Folosind definiţia lui g şi inegalitatea obţinută rezultă

$$\begin{aligned} \int_a^t \beta(u)v(u)\,\mathrm{d}u &= e^{\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \cdot g(t) = e^{\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \int_a^t g'(u)\,\mathrm{d}u \\ &\leq e^{\int_a^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{-\int_a^u \beta(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u = \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{\int_u^t \beta(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

□

1.48 Teoremă (Teorema de dependenţă de date)**.** *Fie $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue pe domeniul $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Funcţia f verifică o condiţie Lipschitz în raport cu a doua variabilă, adică există $L > 0$ astfel încât*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L \cdot |x - y|, \qquad \textit{pentru orice } (t,x) \in D \textit{ şi } (t,y) \in D.$$

Fie x şi y funcţii cu proprietăţile

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y'(t) = g(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Atunci

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

unde

$$M = \sup_{(t,x)\in D} |f(t,x) - g(t,x)|.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &= \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\,\mathrm{d}u - y_0 - \int_{t_0}^{t} g(u, y(u))\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} |f(u, x(u)) - g(u, y(u))|\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} |f(u, x(u)) - f(u, y(u))| + |f(u, y(u)) - g(u, y(u))|\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} L\left(|x(u) - y(u)| + \frac{M}{L}\right)\mathrm{d}u\right|.
\end{aligned}$$

Aplicăm Lema lui Gronwall pentru $v = |x(t) - y(t)| + \frac{M}{L}$, $\alpha = |x_0 - y_0| + \frac{M}{L}$ şi $\beta = L$

$$|x(t) - y(t)| + \frac{M}{L} \leq |x_0 - y_0| + \frac{M}{L} + \left|\int_{t_0}^{t}\left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L}\right) L e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u\right|.$$

Presupunem $t > t_0$. Atunci

$$\left|\int_{t_0}^{t} e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u\right| = \int_{t_0}^{t} e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u = \left.\frac{e^{L(t-u)}}{-L}\right|_{t_0}^{t} = \frac{1}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right)$$

şi

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L}\right)\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \\
&= |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right).
\end{aligned}$$

Dacă $t < t_0$ atunci

$$\left|\int_{t_0}^{t} e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u\right| = \int_{t}^{t_0} e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u = \left.\frac{e^{L(t-u)}}{-L}\right|_{t}^{t_0} = \frac{1}{L}\left(1 - e^{L(t-t_0)}\right) = \frac{1}{L}\left(1 - e^{-L|t-t_0|}\right)$$

şi pentru că $2 - e^{-a} \leq e^{a}$, pentru orice a, va rezulta că

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L}\right)\left(1 - e^{-L|t-t_0|}\right) \\
&\leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right).
\end{aligned}$$

$\square$

1.49 Observaţie. Dacă f coincide cu g atunci $M = 0$ şi inegalitatea din teoremă devine

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|}.$$

Să observăm că dacă $|x_0 - y_0|$ este o cantitate suficient de mică şi t se află într-un interval finit atunci şi diferenţa $|x(t) - y(t)|$ este mică. În plus, dacă $x_0 = y_0$ atunci x şi y coincid ceea ce ne arată, într-un alt mod, unicitatea soluţiei problemei Cauchy.

1.50 Definiţie. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ecuaţia*

$$x' = f(t, x) \tag{1.7}$$

este **stabilă Hyers-Ulam** *dacă există $c_f > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice funcţie derivabilă y care verifică*

$$|y'(t) - f(t, y(t))| \leq \varepsilon, \qquad \textit{pentru orice } t \in I \tag{1.8}$$

să existe o soluţie x a ecuaţiei (1.7) astfel încât:

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon c_f, \qquad \textit{pentru orice } t \in I.$$

1.51 Observaţie. Dacă y este soluţie a inegalităţii (1.8) atunci y verifică

$$\left| y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,\mathrm{d}u \right| \leq |t - t_0|\varepsilon, \qquad \text{pentru orice } t \in I \text{ şi } t_0 \in I.$$

Într-adevăr, dacă notăm $g(t) = y'(t) - f(t, y(t))$, atunci $|g(t)| \leq \varepsilon$. Dacă integrăm avem

$$\int_{t_0}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u = y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,\mathrm{d}u.$$

De aici rezultă că

$$\left| y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,\mathrm{d}u \right| = \left| \int_{t_0}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u \right| \leq \varepsilon \left| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

1.52 Teoremă (Teorema de stabilitate)**.** *Fie $I = [a, b]$ un interval compact şi $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietatea că verifică o condiţie Lipschitz în cea de-a doua variabilă. Atunci ecuaţia (1.7) este stabilă Hyers-Ulam.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Fie y o funcţie care verifică (1.8). Fie J un interval compact care-l conţine pe $y(a)$. Conform Teoremei de existenţă există un interval compact $[a, a + h]$ şi o unică funcţie derivabilă $x : [a, a + h] \longrightarrow J$ care verifică

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = y(a).$$

Prin integrare, obţinem reprezentarea

$$x(t) = y(a) + \int_{a}^{t} f(u, x(u))\,\mathrm{d}u.$$

Folosim Observaţia 1.51 şi obţinem

$$\begin{aligned}
|y(t)-x(t)| &= \left|y(t)-y(a)-\int_a^t f(u,y(u))\,\mathrm{d}u + y(a) + \int_a^t f(u,y(u))\,\mathrm{d}u - x(t)\right| \\
&\le \left|y(t)-y(a)-\int_a^t f(u,y(u))\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_a^t f(u,y(u))\,\mathrm{d}u - \int_a^t f(u,x(u))\,\mathrm{d}u\right| \\
&\le (t-a)\varepsilon + \int_a^t |f(u,y(u)) - f(u,x(u))|\,\mathrm{d}u \\
&\le (t-a)\varepsilon + \int_a^t L\cdot |y(u)-x(u)|\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Folosim Lema lui Gronwall şi obţinem

$$\begin{aligned}
|y(t)-x(t)| &\le (t-a)\varepsilon + \int_a^t (u-a)\varepsilon L\, e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u \\
&= (t-a)\varepsilon + \varepsilon\left[-\ \ (u-a)e^{L(t-u)}\Big|_a^t + \int_a^t e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u\right] \\
&= \varepsilon\int_a^t e^{L(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)}-1\right) \le \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{Lh}-1\right).
\end{aligned}$$

□

1.53 Exemplu. Fie $\varepsilon, \lambda > 0$ şi fie $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea

$$|f'(x) - \lambda f(x)| \le \varepsilon, \qquad \text{pentru orice } x \ge 0.$$

Atunci există un unic $k \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\left|f(x) - ke^{\lambda x}\right| \le \frac{\varepsilon}{\lambda}$, pentru orice $x \ge 0$.

Notăm $g(x) = f'(x) - \lambda f(x)$. Soluţia acestei ecuaţii liniare este

$$f(x) = e^{\lambda x}\left(\int_0^x g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + f(0)\right).$$

Considerăm $k = f(0) + \int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Acesta este un număr real pentru că

$$\left|\int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty |g(t)|\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \le \varepsilon\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - ke^{\lambda x}\right| &= \left|e^{\lambda x}\left(\int_0^x g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + f(0)\right) - \left(f(0) + \int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)e^{\lambda x}\right| \\
&\le e^{\lambda x}\int_x^\infty |g(t)|\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \le \varepsilon e^{\lambda x}\cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\bigg|_x^\infty = \frac{\varepsilon}{\lambda}
\end{aligned}$$

Presupunem că există şi un $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\left|f(x) - ce^{\lambda x}\right| \le \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Atunci

$$\begin{aligned}
|k-c| &= e^{-\lambda x}\left|ke^{\lambda x} - ce^{\lambda x}\right| = e^{-\lambda x}\left|ke^{\lambda x} - f(x) + f(x) - ce^{\lambda x}\right| \\
&\le e^{-\lambda x}\left(\left|ke^{\lambda x} - f(x)\right| + \left|f(x) - ce^{\lambda x}\right|\right) \le e^{-\lambda x}\cdot\frac{2\varepsilon}{\lambda},
\end{aligned}$$

inegalitate care este adevărată pentru orice $x \ge 0$. Pentru $x \to \infty$, obţinem $|k-c| \le 0$, adică $k = c$, ceea ce arată unicitatea constantei k.

1.6 Exerciţii

Probleme propuse

1.1. Să se arate că $x = a\cos(\ln t) + b\sin(\ln t)$ verifică relaţia

$$t^2x'' + tx' + x = 0.$$

1.2. Să se arate că $x = (t + \sqrt{t^2 - 1})^n$ verifică relaţia

$$(t^2 - 1)x'' + tx' - n^2x = 0.$$

Să se găsească funcţiile x cu proprietăţile

1.3. $x' = t \cdot \cos t, \quad x(\pi) = 0$

1.4. $x' = t(1 - t)^6, \quad x(1) = 0$

1.5. $x' = \frac{e^t}{2e^{2t}+3}, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$

1.6. $t^2x' = 2 - t^3, \quad x(2) = -1$

1.7. $tx' - t^2 \ln t + 1 = 0$

1.8. $x'(x' - 1) = 2$

1.9. $x'' = te^t$

1.10. $x'' = \cos^2 t, \quad x'(0) = 0,\ x(0) = 0$

1.11. $x'' = \sqrt{1 + t^2}, \quad x'(0) = 0,\ x(0) = 0$

1.12. Să se rezolve problema Cauchy $tx' - x = 1$, $x(2) = 3$.

1.13. Să se găsească funcţia x care verifică proprietăţile:

a) $(2 + e^t)x^2x' = e^t, \quad x(0) = 0$

b) $x' = a^{t+x} + a^{t-x}, a > 1, \quad x(0) = 0$

c) $t\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{1 + t^2} \cdot x' = 0, \quad x(1) = 1$

1.14. Care sunt soluţiile singulare ale ecuaţiei $2t\sqrt{1 - x^2} = x'(1 + t^2)$? Dar soluţia generală?

1.15. Să se integreze ecuaţia $x^2 \cdot \sin t + \cos^2 t \cdot \ln x \cdot x' = 0$.

1.16. Să se integreze $txx' = 1 - t^2$.

1.17. Să se găsească soluţia ecuaţiei $(t^2 - 1)x' - x = 0$ care verifică condiţia iniţială $x'(0) = -1$.

1.18. Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei $x' = 2t(1-x)^2$.

1.19. Să se determine soluţia ecuaţiei $x' = (k-x)x,\ x(t_0) = x_0$.

1.20. Să se integreze $x'\sqrt{2+2t+t^2} + (t+1)\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.21. O cană cu apă la temperatura de $100°C$ este adusă într-o încăpere cu temperatura constantă $25°C$. Dacă după 2 minute temperatura apei este de $85°C$, care va fi temperatura ei după 20 de minute?

1.22. Să se integreze

a) $(3x^2 - 2x - y)\,\mathrm{d}x + (2y - x + 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0$

b) $(3x^2y + y^3)\,\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$

c) $(2x + y - 1)\,\mathrm{d}x + (x - 2y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$

d) $[xye^{xy}(2+xy) - y^2]\,\mathrm{d}x + [x^2e^{xy}(1+xy) - 2xy]\,\mathrm{d}y = 0$

e) $(\sin y + y\sin x)\,\mathrm{d}x + (x\cos y - \cos x)\,\mathrm{d}y = 0.$

1.23. Să se integreze

a) $tx' = x + x\ln x - x\ln t$

b) $tx' = x + t\cos^2\dfrac{x}{t}$

c) $x' = \dfrac{x}{t} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{t}$

d) $tx' - x + t = 0$

1.24. Să se integreze

a) $x' = \dfrac{x+t}{t-x+2}$

b) $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (3x + 3y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$

c) $(2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (2y - x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$

1.25. Să se rezolve problemele Cauchy:

a) $tx' + x = 5t\sin t, \quad x(0) = 0$

b) $t^2 + tx' = x, \quad x(2) = 1$

c) $t\ln t \cdot x' - x = 3t^3\ln^2 t, \quad x(e) = 0$

d) $tx' - x = t^3\cos t, \quad x(\pi) = 0$

1.26. Să se integreze

a) $x' + 2tx = 2tx^2$

b) $x' - 2xe^t = 2\sqrt{x}e^t$

c) $t^2x^3x' + tx^4 = 3$

d) $x' = 2x + e^{-3t}x^{-2}$

e) $txx' + x^2 = 6\ln t$

f) $tx' + x = 4tx^4$

1.27. Să se integreze

a) $x' - x^2 + 2e^t x = e^{2t} + e^t,$ cu soluţia particulară $x^* = e^t$

b) $x' = -2 - x + x^2,$ cu soluţie particulară constantă $x^* = a.$

1.28. Să se integreze

a) $x = t(1 + x') + x'^2$

b) $x = 2tx' + \ln x'$

c) $t = \dfrac{x}{x'} + \dfrac{1}{x'^2}$

d) $y = xy' + r\sqrt{1 + y'^2}$

Indicaţii la problemele propuse

1.1. Se calculează mai întâi derivatele x' şi x''

1.2. Se arată mai întâi că $x' = \frac{n}{\sqrt{t^2-1}} \cdot x$

1.3. $x(t) = t\sin t + \cos t + 1$

1.4. Se face schimbarea de variabilă $u = 1 - t$ sau se integrează prin părţi:
$x(t) = \frac{1}{8}(1-t)^8 - \frac{1}{7}(1-t)^7$

1.5. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{3}}$

1.6. $x(t) = 2 - \frac{2}{t} - \frac{t^2}{2}$

1.7. $x(t) = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - \ln t + \mathcal{C}$

1.8. Se rezolvă ecuaţia $y^2 - y - 2 = 0$; $x_1(t) = 2t + \mathcal{C}$ şi $x_2(t) = -t + \mathcal{C}$

1.9. $x(t) = (t-1)e^t - e^t + \mathcal{C}_1 t + \mathcal{C}_2$

1.10. $x(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{8}$

1.11. $x(t) = \frac{1}{6}(1+t^2)\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}t\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \frac{1}{3}.$

1.12. $x(t) = 2t - 1.$

1.13. a) $x = \sqrt[3]{3\ln\frac{2+e^t}{3}}$. b) $x = \log_a \operatorname{tg}\left(a^t + \frac{\pi}{4} - 1\right)$. c) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+t^2} = 2\sqrt{2}.$

1.14. $x = \pm 1$ soluţii singulare, $x = \sin\left(C\ln(t^2+1)\right)$ soluţie generală.

1.15. $\frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{\cos t} + C$

1.16. $x^2 = 2\ln t - t^2 + C$

1.17. $x(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

1.18. $x = 1$ soluţie singulară şi $x = 1 - \frac{1}{t^2+C}$ soluţie generală.

1.19. $x(t) = \frac{kx_0}{(k-x_0)e^{-k(t-t_0)} + x_0}$

1.20. $x = \operatorname{sh}(C - \sqrt{1 + (t+1)^2})).$

1.21. Se foloseşte legea de răcire a lui Newton: variaţia temperaturii unui corp este proporţională cu diferenţa dintre temperatura T a corpului şi temperatura M a mediului, adică

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - M).$$

Rezolvând ecuaţia diferenţială, temperatura apei la momentul de timp t este $T(t) = M + Ce^{-kt}$. Din condiţia $T(0) = 100$, rezultă $C = 75$. Din $T(2) = 85$, rezultă $-k = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$. Va rezulta

$T(20) = 25 + 75 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 33°C$.

1.22. a) ecuaţie cu diferenţiala totală exactă cu soluţia $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$. b) $x^3y + xy^3 = C$. c) $x^2 + xy - y^2 - x + y = C$. d) $x^2ye^{xy} - y^2x = C$. e) $x \sin y - y \cos x = C$.

1.23. a) ecuaţie omogenă cu soluţia generală $x(t) = te^{Ct}$ şi $x = t$, $x = 0$ soluţii singulare. b) ecuaţie omogenă cu soluţia generală $\operatorname{tg} \frac{x}{t} = \ln |t| + C$ şi $x = t\frac{(2k+1)\pi}{2}$ soluţii singulare. c) $\sin \frac{x}{t} = \frac{C}{t}$ şi $x = k\pi t$ soluţii singulare d) $x = t \ln \frac{C}{t}$.

1.24. a) ecuaţie reductibilă la ecuaţie omogenă; soluţia generală este

$$\operatorname{arctg} \frac{x-1}{t+1} = \ln \left(C\sqrt{(t+1)^2 + (x-1)^2} \right).$$

b) Ecuaţia poate fi privită ca o ecuaţie reductibilă la ecuaţii omogene. Pentru că sistemul format de ecuaţiile $x+y+1 = 0$ şi $3x+3y-2 = 0$ este incompatibil, facem schimbarea de funcţie $z = x + y$. Avem $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z - \mathrm{d}x$. Ecuaţia devine $(3-2z)\,\mathrm{d}x + (3z-2)\,\mathrm{d}z = 0$. Aceasta este cu variabile separabile. Soluţia este $6x+6y+5\ln|2x+2y-3| = 4x+C$ şi $2x+2y = 3$. c) Ecuaţia poate fi privită şi ca o ecuaţie cu diferenţiala totală exactă cu soluţia $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

1.25. a) $x = \frac{5\sin t}{t} - 5\cos t$ b) $x = -t^2 + \frac{5t}{2}$. c) $x = (t^3 - e^3)\ln t$ d) $x = t^2 \sin t + t \cos t + t$

1.26. a) ecuaţie Bernoulli cu soluţia $x(t) = \frac{1}{Ce^{t^2}+1}$ b) $x = \left(Ce^{e^t} - 1\right)^2$ c) $x = -\frac{\sqrt[4]{C+4t^3}}{t}$ d) $x = \sqrt[3]{\frac{Ce^{6t} - e^{-3t}}{3}}$ e) $x = \pm\frac{\sqrt{C+3t^2(2\ln t-1)}}{t}$ f) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{Ct^3+6t}}$

1.27. a) $x = e^t + \frac{1}{C-t}$ b) $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ şi $x_1 = 2 + \frac{3}{3Ce^{-3t}-1}$, $x_2 = -1 + \frac{3}{3Ce^{3t}+1}$

1.28. a) ecuaţie Lagrange cu soluţia sub forma parametrică $t = -2p + 2 + Ce^{-p}$ şi $x = (-2p + 2 + c^{-p})(1+p) + p^2$ b) $t = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$ şi $x = \ln p + \frac{2C}{p} - 2$ c) ecuaţie Clairaut cu soluţia generală $t = xC + C^2$ şi soluţia singulară $4t = -x^2$ d) $y = Cx + r\sqrt{1+C^2}$ şi $x^2 + y^2 = r^2$.

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

2.1 Ecuaţii diferenţiale pentru care se poate reduce ordinul

Ecuaţii cu derivata de ordin superior cunoscută

O ecuaţie de forma

$$x^{(n)} = f(t),$$

$f \in C(I)$, se rezolvă prin integrarea succesivă a ecuaţiei de n ori.

2.1 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x'' = te^t$.

Prin integrare avem

$$x' = \int te^t \, \mathrm{d}t = \int t \left(e^t\right)' \, \mathrm{d}t = te^t - \int e^t \, \mathrm{d}t = te^t - e^t + C_1 = (t-1)e^t + C_1.$$

Integrând încă o dată, obţinem

$$x(t) = \int (t-1)e^t + C_1 \, \mathrm{d}t = \int (t-1) \left(e^t\right)' \, \mathrm{d}t + \int C_1 \, \mathrm{d}t = (t-1)e^t - e^t + C_1 t + C_2.$$

Ecuaţii din care lipsesc funcţia şi primele derivate

O ecuaţie de forma

$$F\left(t, x^{(k)}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0$$

din care lipsesc x şi primele $k-1$ derivate, admite micşorarea ordinului prin substituţia $x^{(k)} = p$.

2.2 Exemplu. Curbura unei curbe plane în forma explicită $y = y(x)$ se exprimă cu formula

$$\kappa = \frac{y''(x)}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se ştie că un cerc cu raza r are curbura $\kappa = \frac{1}{r}$. Să se determine toate curbele care au curbura $\frac{1}{r}$.

Rezolvăm ecuaţia

$$\frac{y''(x)}{\left(1+(y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Dacă notăm cu $p = y'$, obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{p'}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{d}x}{r} \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+C_1}{r}.$$

Cu substituţia $p = \operatorname{tg} t$, rezultă

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \cdot \left(\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}} = \int \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Avem

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{x+C_1}{r} \Longleftrightarrow \frac{p^2}{p^2+1} = \frac{(x+C_1)^2}{r^2} \Longleftrightarrow p^2 = \frac{(x+C_1)^2}{r^2-(x+C_1)^2}.$$

Rezultă

$$y' = p = \sqrt{\frac{(x+C_1)^2}{r^2-(x+C_1)^2}} = \frac{x+C_1}{\sqrt{r^2-(x+C_1)^2}}.$$

Notând $r^2 - (x+C_1)^2 = u$ şi integrând obţinem

$$y(x) = \int \frac{x+C_1}{\sqrt{r^2-(x+C_1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -\sqrt{u} + C_2 = C_2 - \sqrt{r^2-(x+C_1)^2}.$$

Putem rescrie soluţia în forma implicită $\sqrt{r^2-(x+C_1)^2} = C_2 - y$ sau

$$(x+C_1)^2 + (y-C_2)^2 = r^2,$$

care este ecuaţia unui cerc de rază r şi centru $(-C_1, C_2)$. Am obţinut că cercurile de rază r sunt singurele curbe plane care au curbura constantă $\frac{1}{r}$.

Ecuaţii din care lipseşte variabila independentă

O ecuaţie de forma

$$F\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$$

din care lipseşte variabila independentă t se poate reduce la o ecuaţie de ordin inferior folosind schimbarea de variabilă şi de funcţie $(t,x) \to (x,p)$ unde $x' = p = p(x)$. Derivatele lui x se calculează în funcţie de p. De exemplu

$$x'' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot p = pp',$$
$$x''' = \frac{\mathrm{d}x''}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x''}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pp') \cdot p = (pp'' + p'^2)p.$$

2.3 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $(x'')^2 - 2x'x''' + 1 = 0$.

Observăm că este o ecuaţie din care lipseşte şi x şi t. Notăm $y = x'$ şi obţinem ecuaţia $y'^2 - 2yy'' + 1 = 0$ din care lipseşte variabila independentă t. Notăm $p = y'$ şi considerăm pe y ca variabilă independentă. Atunci $y'' = p\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}y} = pp'$. Ecuaţia revine la $p^2 - 2ypp' + 1 = 0$ care este cu variabile separabile. Obţinem

$$p' = \frac{p^2+1}{2py} \Longleftrightarrow \frac{2p\,\mathrm{d}p}{p^2+1} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \Longleftrightarrow \ln(p^2+1) = \ln y + \ln C_1 \Longleftrightarrow p^2 + 1 = C_1 y.$$

Prin urmare avem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y' = p = \sqrt{C_1 y - 1} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \frac{2\sqrt{C_1 y - 1}}{C_1} = t + C_2$$

cu soluţia $y = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(t + C_2)^2$. Cum $y = x'$, soluţia generală a ecuaţiei iniţiale va fi

$$x = \int \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(t + C_2)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{C_1}t + \frac{C_1}{12}(t + C_2)^3 + C_3.$$

Ecuaţii omogene raportate la funcţie şi derivatele sale

Fie ecuaţia

$$F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right) = 0$$

unde F este o funcţie omogenă de grad a în variabilele x, x', ..., $x^{(n)}$, adică

$$F\left(t, \alpha x, \alpha x', \ldots, \alpha x^{(n)}\right) = \alpha^a \cdot F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right).$$

Considerând $\alpha = \frac{1}{x}$ rezultă

$$F\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \ldots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = \frac{1}{x^a} \cdot F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right).$$

Aşadar,

$$F\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \ldots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0,$$

ecuaţie a cărui ordin se reduce prin substituţia $u = \frac{x'}{x}$. Derivatele lui x se scriu în funcţie de u. De exemplu

$$x'' = (x')' = (xu)' = x'u + xu' \quad \Longrightarrow \quad \frac{x''}{x} = u^2 + u'$$

$$x''' = (x'')' = (x'u + xu')' = x''u + 2x'u' + xu'' \quad \Longrightarrow \quad \frac{x'''}{x} = u^3 + 3uu' + u''$$

2.4 Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy

$$xx'' = x'^2 + xx' + 2x^2 t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Notăm $F(t,x,x',x'') = xx'' - x'^2 - xx' - 2x^2t$. Aceasta este o funcţie omogenă în variabilele x, x' şi x''. Într-adevăr,

$$F(t,\alpha x,\alpha x',\alpha x'') = \alpha^2 xx'' - \alpha^2 x'^2 - \alpha^2 xx' - 2\alpha^2 x^2 t = \alpha^2 F(t,x,x',x'').$$

Facem substituţia $x' = xu$. Avem $x'' = x(u^2 + u')$. Înlocuind în ecuaţie se obţine

$$x^2(u^2+u') = x^2u^2 + x^2u + 2x^2t.$$

Din cauza condiţiilor iniţiale soluţia căutată nu poate fi soluţia singulară $x = 0$. Împărţim cu x^2 şi avem

$$u^2 + u' = u^2 + u + 2t \Longleftrightarrow u' - u = 2t.$$

Această ecuaţie liniară de ordinul întâi o înmulţim cu e^{-t} şi obţinem

$$\left(u\cdot e^{-t}\right)' = 2te^{-t} \Longleftrightarrow u\cdot e^{-t} = \int 2te^{-t}\,\mathrm{d}t = -2te^{-t} + 2\int e^{-t}\,\mathrm{d}t = -2te^{-t} - 2e^{-t} + C_1.$$

Avem $u(t) = C_1e^t - 2(t+1)$. Din condiţiile iniţiale $u(0) = 1$, prin urmare $1 = C_1 - 2$, adică $C_1 = 3$. Ecuaţia care se obţine este o ecuaţie cu variabile separabile

$$\frac{x'}{x} = 3e^t - 2(t+1) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = 3e^t - 2(t+1)\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \ln x = 3e^t - (t+1)^2 + \ln C_2.$$

Are soluţia $x(t) = C_2e^{3e^t-(t+1)^2}$. Din condiţia iniţială $1 = x(0) = C_2e^2$, rezultă $C_2 = e^{-2}$. Soluţia problemei Cauchy este $x(t) = e^{3e^t-(t+1)^2-2}$.

Ecuaţii omogene în t şi $\mathrm{d}t$

O ecuaţie de forma

$$F(x, tx', t^2x'', \ldots, t^nx^{(n)}) = 0$$

se rezolvă cu schimbarea de variabilă $t = e^s$. Derivatele lui x se rescriu în funcţie de s. De exemplu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = x'\cdot e^s = tx' \qquad \Rightarrow \quad tx' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (tx')'\cdot t = t^2x'' + tx' \qquad \Rightarrow \quad t^2x'' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

2.5 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $tx'' = 2xx' - x'$.

Înmulţim ecuaţia cu t pentru a observa că $t^2x'' = 2xtx' - tx'$ este omogenă în t şi $\mathrm{d}t$. Cu schimbarea de variabilă $t = e^s$ se obţine

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \quad \Longleftrightarrow \quad x'' = 2xx'$$

Lipseşte variabila independentă s. Notăm $p(x) = x'$. Avem $x'' = pp'$. Ecuaţia devine $pp' = 2xp$. Dacă $p = 0$ atunci $x = C$. Dacă $p \neq 0$ atunci ecuaţia $p' = 2x$ se rescrie

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 2x \Longleftrightarrow \mathrm{d}p = 2x\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow p = x^2 + C \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x^2 + C \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^2+C} = \mathrm{d}s.$$

Dacă $C = 0$ atunci, prin integrare, $-\frac{1}{x} = s + C_2$, de unde $x = -\frac{1}{s+C_2} = -\frac{1}{\ln t + C_2}$.
Dacă $C = C_1^2$, atunci $\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_1} = s + C_2$, de unde $x = C_1 \operatorname{tg}(C_1(\ln t + C_2))$.
Dacă $C = -C_1^2$, atunci $\frac{1}{2C_1} \ln \frac{x-C_1}{x+C_1} = s + C_2$, de unde $x = C_1 \frac{1+e^{2C_1(\ln t + C_2)}}{1-e^{2C_1(\ln t + C_2)}}$.

2.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

2.6 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** $n \geq 1$ *o ecuaţie de forma*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t),$$

unde $a_1, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue pe intervalul* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Dacă* $f(t) = 0$, *pentru orice* $t \in I$, *atunci ecuaţia este* **omogenă**, *iar dacă* f *este nenulă atunci ecuaţia este* **neomogenă**.

Pentru a studia această ecuaţie introducem operatorul

$$L[x] = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x.$$

Atunci ecuaţia diferenţială liniară de ordin superior se rescrie

$$L[x] = f(t).$$

2.7 Lema (Liniaritatea operatorului L)**.** *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcţii derivabile de ordinul* n *pe* I *şi* $C_1, C_2, \ldots, C_m \in \mathbb{R}$. *Atunci*

$$L[C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_mx_m] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2] + \cdots + C_mL[x_m].$$

Demonstraţie. Se demonstrează prin inducţie. Pentru $m = 1$ folosind proprietatea $(Cf)^{(k)} = Cf^{(k)}$ avem

$$L[C_1x_1] = (C_1x_1)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)(C_1x_1)' + a_n(t)C_1x_1 = C_1L[x_1].$$

Pentru $m = 2$ avem

$$\begin{aligned} L[C_1x_1 + C_2x_2] &= (C_1x_1 + C_2x_2)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1 + C_2x_2)^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)(C_1x_1 + C_2x_2) \\ &= (C_1x_1)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)(C_1x_1)' + a_n(t)C_1x_1 + \\ &\quad + (C_2x_2)^{(n)} + a_1(t)(C_2x_2)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)(C_2x_2)' + a_n(t)C_2x_2 \\ &= L[C_1x_1] + L[C_2x_2] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2]. \end{aligned}$$

Presupunem adevărată relaţia pentru m şi o demonstrăm pentru $m + 1$.

$$\begin{aligned} L[C_1x_1 + \cdots + C_{m+1}x_{m+1}] &= L[C_1x_1 + \cdots + C_mx_m] + L[C_{m+1}x_{m+1}] \\ &= C_1L[x_1] + C_2L[x_2] + \cdots + C_mL[x_m] + C_{m+1}L[x_{m+1}]. \end{aligned}$$

$\square$

2.8 Teoremă (Teorema de existenţă şi unicitate). *Fiind date funcţiile* $a_1, \ldots, a_n, f$ *de clasă* $C(I)$ *definite pe intervalul* $I \subseteq \mathbb{R}$, *numerele reale* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ *şi* $t_0 \in I$ *atunci există o unică funcţie* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *care să verifice relaţiile*

$$\begin{cases} \varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\varphi'(t) + a_n(t)\varphi(t) = f(t), \ \textit{pentru orice } t \in I \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ \varphi'(t_0) = \varphi_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = \varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Demonstraţie. Se transformă ecuaţia într-un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi şi se foloseşte teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei sistemelor liniare. □

2.9 Lema. *Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene* $L[x] = 0$ *formează un spaţiu vectorial, adică dacă* x_1 *şi* x_2 *sunt soluţii ale ecuaţiei şi* C_1, C_2 *sunt numere reale, atunci şi* $C_1x_1 + C_2x_2$ *este soluţie.*

Demonstraţie. Fiindcă x_1 şi x_2 sunt soluţii avem $L[x_1] = 0$ şi $L[x_2] = 0$. Prin urmare

$$L[C_1x_1 + C_2x_2] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2] = 0.$$

□

Se pune întrebarea care este dimensiunea spaţiului vectorial al soluţiilor ecuaţiei liniare omogene şi care funcţii formează o bază a sa. Pentru a afla răspunsul să introducem următoarele noţiuni.

2.10 Definiţie. *Funcţiile* $x_1, \ldots x_m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *se numesc* **liniar independente** *pe* I *dacă din egalitatea*

$$C_1x_1 + \cdots + C_mx_m = 0,$$

unde $C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{R}$, *rezultă*

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_m.$$

În caz contrar, funcţiile se numesc **liniar dependente** *pe* I. *Mai exact, funcţiile* $x_1, \ldots x_m$ *sunt liniar dependente pe* I *dacă există* m *constante reale* $C_1, \ldots, C_m$ *nu toate zero* $(C_1^2 + \cdots + C_m^2 > 0)$ *cu proprietatea că*

$$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_mx_m(t) = 0, \qquad \textit{pentru orice } t \in I.$$

2.11 Definiţie. *Pentru* $m \geq 2$, *se numeşte* **wronskianul** *(determinantul lui Wronski) asociat funcţiilor* $x_1, \ldots x_m$ *derivabile de ordinul* $m - 1$ *pe* I, *determinantul*

$$W(t) = W(x_1, \ldots x_m) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_m(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_m'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(m-1)}(t) & x_2^{(m-1)}(t) & \ldots & x_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

2.12 Teoremă. *Pentru $m \geq 2$, fie $x_1, \dots x_m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii derivabile de $m-1$ ori pe I, care sunt liniar dependente pe I. Atunci wronskianul acestor funcţii este nul pe I.*

Demonstraţie. Pentru că funcţiile $x_1, \dots, x_m$ sunt liniar dependente rezultă că există constantele $C_1, \dots, C_m$ nu toate nule cu proprietatea că $C_1x_1 + \dots + C_mx_m = 0$ pe I. Derivând relaţia de $m-1$ ori şi considerând un $t \in I$ oarecare, se obţine sistemul

$$\begin{cases} C_1x_1(t) + \dots + C_mx_m(t) & = 0 \\ C_1x_1'(t) + \dots + C_mx_m'(t) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ C_1x_1^{(m-1)}(t) + \dots + C_mx_m^{(m-1)}(t) & = 0 \end{cases}$$

Considerăm sistemul de mai sus cu necunoscutele $C_1, \dots, C_m$. Fiindcă $x_1, \dots, x_m$ sunt liniar dependente, ştim că sistemul omogen de mai sus are şi o soluţie nebanală. Aceasta înseamnă că determinantul sistemului este nul. Dar determinantul sistemului este chiar wronskianul funcţiilor $x_1, \dots, x_m$ pe punctul t. Fiindcă t a fost ales arbitrar, rezultă că $W(x_1, \dots, x_m) = 0$ pe I. $\square$

2.13 Teoremă. *Dacă $x_1, \dots, x_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei $L[x] = 0$ pe I şi au wronskianul nenul într-un punct $t^* \in I$, atunci $x_1, \dots, x_n$ sunt liniar independente pe I şi au wronskianul diferit de zero în orice punct din I.*

Demonstraţie. Presupunem că funcţiile sunt liniar dependente pe I. Atunci conform Teoremei 2.12 wronskianul este nul în orice punct din I. Acest fapt contrazice ipoteza că $W(t^*) \neq 0$. Aşadar, funcţiile $x_1, \dots, x_n$ sunt liniar independente pe I.

Presupunem prin absurd că există un punct $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) = 0$. Atunci sistemul cu necunoscutele $C_1, \dots, C_n$ şi determinantul $W(x_1, \dots, x_n)$ nul

$$\begin{cases} C_1x_1(t_0) + \dots + C_nx_n(t_0) & = 0 \\ C_1x_1'(t_0) + \dots + C_nx_n'(t_0) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ C_1x_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_nx_n^{(n-1)}(t_0) & = 0 \end{cases}$$

are o soluţie nebanală. Aşadar există $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n \in \mathbb{R}$ nu toate nule, care verifică relaţiile de mai sus. Fie atunci funcţia

$$\bar{x} = \bar{C}_1x_1 + \dots + \bar{C}_nx_n.$$

Fiind o combinaţie liniară a soluţiilor $x_1, \dots, x_n$ avem $L[\bar{x}] = 0$. Pentru că nu toate constantele $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n \in \mathbb{R}$ sunt zero, rezultă că $\bar{x}$ nu poate fi funcţia nulă. Şi totuşi pentru funcţia $\bar{x}$ avem verificate condiţiile

$$\bar{x}(t_0) = 0,\ \bar{x}'(t_0) = 0, \dots,\ \bar{x}^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Dar aceste condiţii le verifică şi funcţia nulă $x_0 = 0$, care este o soluţie a ecuaţiei date. Pe de altă parte, Teorema de existenţă şi unicitate ne asigură că orice problemă Cauchy are soluţie unică. Noi am obţinut două soluţii distincte care verifică aceeaşi problemă Cauchy. Aceasta este o contradicţie, care rezultă în urma presupunerii făcute. Aşadar wronskianul celor n soluţii independente nu se anulează deloc pe I. □

2.14 Observaţie. Fie $x_1, \dots x_n$ soluţii ale ecuaţiei $L[x] = 0$. Avem doar două posibilităţi:

1. funcţiile $x_1, \dots x_n$ sunt liniar dependente pe I şi atunci $W(x_1, \dots, x_n) = 0$ pe I sau
2. funcţiile $x_1, \dots x_n$ sunt liniar independente pe I şi atunci $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pe I.

În cele ce urmează vom demonstra că n, care este ordinul ecuaţiei diferenţiale liniare omogene $L[x] = 0$, este şi dimensiunea spaţiului soluţiilor acestei ecuaţii şi orice n soluţii $x_1, \dots x_n$ liniar independente formează o bază a acestui spaţiu al soluţiilor.

2.15 Teoremă. *Fie n soluţii liniar independente $x_1, \dots, x_n$ pe I ale ecuaţiei $L[x] = 0$. Atunci orice funcţie $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ care verifică $L[\varphi] = 0$ este de forma*

$$\varphi = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n,$$

pentru nişte constante reale $C_1, \dots, C_n$.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in I$ un punct oarecare. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} C_1 x_1(t_0) + \cdots + C_n x_n(t_0) & = \varphi(t_0) \\ C_1 x_1'(t_0) + \cdots + C_n x_n'(t_0) & = \varphi'(t_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ C_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n x_n^{(n-1)}(t_0) & = \varphi^{(n-1)}(t_0). \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este wronskianul funcţiilor $x_1, \dots, x_n$. Pentru că aceste funcţii sunt liniar independente pe I, rezultă că $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Acest lucru ne arată că sistemul are soluţie unică. Cu această soluţie a sistemului construim funcţia

$$\psi = C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n.$$

Avem

$$\psi(t_0) = C_1 x_1(t_0) + \cdots + C_n x_n(t_0) = \varphi(t_0)$$

şi folosind celelalte relaţii din sistem

$$\psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ \dots, \ \psi^{(n-1)}(t_0) = \varphi^{(n-1)}(t_0).$$

Aşadar funcţiile ψ şi φ verifică aceleaşi condiţii iniţiale. Ambele sunt soluţii ale ecuaţiei $L[x] = 0$. Conform teoremei de existenţă şi unicitate cele două funcţii coincid pe I. Deci,

$$\varphi = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n.$$

□

2.16 Teoremă. *Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene* $L[x] = f(t)$ *este*

$$x = x_0 + x_p$$

unde x_0 *este soluţia generală a ecuaţiei omogene* $L[x] = 0$ *iar* x_p *este o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei* $L[x] = f(t)$.

Demonstraţie. Fie x_p o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei neomogene $L[x] = f(t)$. Dacă facem schimbarea de funcţie $x = x_p + y$ atunci

$$L[y] = L[x - x_p] = L[x] - L[x_p] = f(t) - f(t) = 0,$$

ceea ce ne conduce la o ecuaţie omogenă $L[y] = 0$. Dacă x_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogene atunci obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene sub forma $x = x_p + x_0$. $\square$

2.17 Observaţie. Cunoaşterea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene se reduce la cunoaşterea soluţiei generale a ecuaţiei omogene şi a unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene. Prima este asigurată de cunoaşterea a n soluţii liniar independente $x_1, \dots, x_n$. După cum vom vedea acest lucru este suficient şi pentru aflarea soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene.

2.18 Teoremă. *Fie* $x_1, \dots, x_n$ *soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene* $L[x] = 0$ *şi* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe* I. *Atunci există funcţiile* $C_1(t), \dots, C_n(t)$ *definite pe* I *astfel încât*

$$x = C_1(t)x_1(t) + \cdots + C_n(t)x_n(t)$$

să fie soluţie a ecuaţiei neomogene $L[x] = f(t)$.

Demonstraţie. Punem condiţia ca $x = C_1(t)x_1(t) + \cdots + C_n(t)x_n(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă $L[x] = f(t)$. Calculăm derivata

$$x' = C_1(t)x_1'(t) + \cdots + C_n(t)x_n'(t) + C_1'(t)x_1(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t).$$

Punem condiţia $C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots C_n'(t)x_n(t) = 0$. Prin derivare

$$x'' = C_1(t)x_1''(t) + \cdots + C_n(t)x_n''(t) + C_1'(t)x_1'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t).$$

Punem condiţia $C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots C_n'(t)x_n'(t) = 0$. Continuând în acelaşi fel

$$x^{(n-1)} = C_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n(t)x_n^{(n-1)}(t) + C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t).$$

Punem condiţia $C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) + \dots C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0$. Mai derivăm o dată şi avem

$$x^{(n)} = C_1(t)x_1^{(n)}(t) + \cdots + C_n(t)x_n^{(n)}(t) + C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t).$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţia $L[x] = f(t)$ se obţine

$$C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t).$$

Ca urmare $C_1', \dots C_n'$ sunt soluţii ale sistemului neomogen

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t) & = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t_0) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) & = 0 \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) & = f(t). \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat deoarece determinantul $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pe I. Rezolvând sistemul şi integrând se obţin funcţiile $C_1(t), \dots, C_n(t)$. □

2.19 Observaţie. Metoda expusă mai sus se numeşte ***metoda variaţiei constantelor***, pentru că "variind constantele" adică înlocuind constantele cu funcţii s-a obţinut o soluţie particulară a ecuaţiei omogene. Cu toate acestea, din ceea ce am demonstrat până acum, am reuşit să deducem doar structura generală a ecuaţiilor liniare. Nu există o metodă generală pentru găsirea soluţiei ecuaţiilor liniare de ordin superior decât pentru câteva clase particulare de ecuaţii.

2.20 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $(t+1)^2\sqrt{t+1}\,x'' - (t+1)x' + x = t + 1 - 2\sqrt{t+1}$.

Observăm că este o ecuaţie liniară de ordinul doi. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă $(t+1)^2\sqrt{t+1}\,x'' - (t+1)x' + x = 0$. O soluţie a ecuaţiei se observă uşor $x = t + 1$. Ştim că ecuaţia are două soluţii liniar independente. Pentru a găsi cea de-a doua soluţie facem schimbarea de funcţie $x = (t+1)y$. Obţinem ecuaţia

$$(t+1)^3\sqrt{t+1}\,y'' + 2(t+1)^2\sqrt{t+1}\,y' - (t+1)^2 y' = 0.$$

Împărţim cu $(t+1)^2$ şi notăm $y' = p$ şi obţinem $(t+1)\sqrt{t+1}\,p' = p(1 - 2\sqrt{t+1})$. Această ecuaţie este cu variabile separabile. Avem

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{1 - 2\sqrt{t+1}}{(t+1)\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t \iff \ln p = -\frac{2}{\sqrt{t+1}} - 2\ln(t+1) + \ln C_1 \iff p = \frac{C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{(t+1)^2}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = C_1 \int \frac{e^u}{\frac{16}{u^4}} \cdot \frac{-2}{u^3}\,\mathrm{d}u = -2C_1 \int e^u u\,\mathrm{d}u = 2C_1 e^u(1-u) + C_2 \\ &= 2C_1 e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t+1}}\right) + C_2. \end{aligned}$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este (după o renumerotare a constantelor $C_1 := C_2$, $C_2 := 2C_1$)

$$x_0 = C_1(t+1) + C_2 e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t + 1 + 2\sqrt{t+1}\right).$$

Cea de-a doua soluţie obţinută $x_2 = 2e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t+1+2\sqrt{t+1}\right)$ este liniar independentă de soluţia $x_1 = t+1$ pentru că wronskianul

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t+1+2\sqrt{t+1}\right) \\ 1 & e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(\frac{2}{\sqrt{t+1}}+1+\frac{2}{t+1}\right) \end{vmatrix} = 2e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} > 0.$$

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene de forma

$$x_p = C_1(t)\cdot(t+1) + C_2(t)\cdot e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t+1+2\sqrt{t+1}\right) = C_1(t)\cdot x_1 + C_2(t)\cdot x_2.$$

Derivăm şi punem condiţia $C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0$. Obţinem $x_p' = C_1x_1' + C_2x_2'$ şi

$$x_p'' = C_1'x_1' + C_2'x_2' + C_1x_1'' + C_2x_2''.$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi avem

$$(t+1)^2\sqrt{t+1}\,x_p'' - (t+1)x_p' + x_p = t+1-2\sqrt{t+1}.$$

Ţinem seama de faptul că x_1 şi x_2 sunt soluţii ale ecuaţiei omogene şi obţinem

$$(t+1)^2\sqrt{t+1}\,(C_1'x_1' + C_2'x_2') = t+1-2\sqrt{t+1}.$$

Derivatele C_1' şi C_2' verifică sistemul

$$\begin{cases} C_1'x_1 + C_2'x_2 & = 0 \\ C_1'x_1' + C_2'x_2' & = \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}}. \end{cases}$$

Avem

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}} & x_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = -\frac{(t+1)^2-4(t+1)}{2(t+1)^2\sqrt{t+1}} \implies C_1 = -\sqrt{t+1} - \frac{4}{\sqrt{t+1}},$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = \frac{(t+1-2\sqrt{t+1})e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{2(t+1)\sqrt{t+1}} \implies C_2 = \sqrt{t+1}\cdot e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}}.$$

Soluţia particulară va fi

$$\begin{aligned} x_p &= \left(-\sqrt{t+1} - \frac{4}{\sqrt{t+1}}\right)\cdot(t+1) + \sqrt{t+1}e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}}\cdot e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t+1+2\sqrt{t+1}\right) \\ &= 2(t+1) - 4\sqrt{t+1}. \end{aligned}$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x = x_0 + x_p = C_1(t+1) + C_2e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}}\left(t+1+2\sqrt{t+1}\right) - 4\sqrt{t+1}.$$

2.3 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

2.21 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi** *o ecuaţie de forma*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t),$$

unde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *sunt numere reale date, iar* $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid.*

Pentru a studia această ecuaţie introducem operatorul

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x.$$

Atunci ecuaţia diferenţială liniară de ordin superior se rescrie

$$L[x] = f(t).$$

Notăm cu

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n$$

polinomul caracteristic ataşat lui L.

2.22 Lema. *Au loc identităţile*

$$\begin{aligned} L[e^{rt}] &= e^{rt}P(r) \\ L[e^{rt}y] &= e^{rt}\left(P(r)y + \frac{P'(r)}{1!}y' + \cdots + \frac{P^{(n)}(r)}{n!}y^{(n)}\right). \end{aligned}$$

Demonstraţie. Prima relaţie se obţine din a doua pentru funcţia $y = 1$. Fie $x = ye^{rt}$. Calculăm derivatele lui x, folosind formula lui Leibniz:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= C_k^0 y r^k e^{rt} + C_k^1 y' r^{k-1} e^{rt} + C_k^2 y'' r^{k-2} e^{rt} + \cdots + C_k^k y^{(k)} e^{rt} \\ &= e^{rt}\left(r^k y + \frac{kr^{k-1}}{1!}y' + \frac{k(k-1)r^{k-2}}{2!}y'' + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1r^0}{k!}y^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} x &= e^{rt}y \\ x' &= e^{rt}\left(ry + \frac{1r^0}{1!}y'\right) \\ x'' &= e^{rt}\left(r^2 y + \frac{2r}{1!}y' + \frac{2\cdot 1r^0}{2!}y''\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(k)} &= e^{rt}\left(r^k y + \frac{kr^{k-1}}{1!}y' + \frac{k(k-1)r^{k-2}}{2!}y'' + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1r^0}{k!}y^{(k)}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= e^{rt}\left(r^n y + \frac{nr^{n-1}}{1!}y' + \frac{n(n-1)r^{n-2}}{2!}y'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1r^0}{n!}y^{(n)}\right). \end{aligned}$$

Înmulţim prima egalitate cu a_n, a doua cu a_{n-1}, ... şi penultima cu a_1 şi le adunăm. Vom obţine relaţia a doua din Lemă. □

2.23 Teoremă. *Dacă polinomul caracteristic are n rădăcini reale distincte* $r_1, \dots, r_n$ *atunci soluţia ecuaţiei omogene* $L[x] = 0$ *este*

$$x = C_1 e^{r_1 t} + \dots + C_n e^{r_n t}.$$

Demonstraţie. Fie $x_k = e^{r_k t}$, pentru $k = \overline{1, n}$. Acestea sunt soluţii ale ecuaţiei $L[x] = 0$ pentru că

$$L[x_k] = L[e^{r_k t}] = e^{r_k t} P(r_k) = e^{r_k t} \cdot 0 = 0, \quad \text{pentru orice } k = \overline{1, n}.$$

Este suficient să arătăm că acestea sunt liniar independente. Pentru aceasta calculăm wronskianul

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & \dots & e^{r_n t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & \dots & r_n e^{r_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 t} & r_2^{n-1} e^{r_2 t} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n t} \end{vmatrix}.$$

Din fiecare coloană scoatem factor comun exponenţiala şi obţinem

$$W(x_1, \dots, x_n) = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ultimul determinant este determinantul Vandermonde al numerelor $r_1, \dots, r_n$ a cărui valoare este $\prod_{i>j}^{n} (r_i - r_j)$. Fiindcă numerele $r_1, \dots, r_n$ sunt diferite şi exponenţiala nu se anulează rezultă

$$W(x_1, \dots, x_n) = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)} \prod_{i>j}^{n} (r_i - r_j) \neq 0.$$

Aceasta ne arată că soluţiile $x_1, \dots, x_n$ sunt liniar independente. □

2.24 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x'' + x' - 2x = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $r^2 + r - 2 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_2 = -2$. Soluţia generală a ecuaţiei este $x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$.

2.25 Observaţie. Dacă $r_1 = a + bi$ este o rădăcină pentru $P(r) = 0$ atunci şi conjugata $r_2 = a - bi$ este rădăcină a polinomului P. Scriem cei doi termeni corespunzători din soluţia generală

$$x_{1,2} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Soluţia $x_{1,2}$ este complexă cu constantele C_1, C_2 numere complexe. Totuşi putem înlocui această soluţie complexă cu una reală. Vom alege constantele astfel încât $x_{1,2}$ să fie reală. Trecând la conjugate avem

$$x_{1,2} = \bar{x}_{1,2} = \bar{C}_1 e^{\bar{r}_1 t} + \bar{C}_2 e^{\bar{r}_2 t} = \bar{C}_1 e^{r_2 t} + \bar{C}_2 e^{r_1 t}.$$

Aşadar $\bar{C}_2 = C_1$. Cu notaţia $A = C_1 + \bar{C}_1 \in \mathbb{R}$ şi $B = i(C_1 - \bar{C}_1) \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{(a+bi)t} + \bar{C}_1 e^{(a-bi)t} \\ &= C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt) + \bar{C}_1 e^{at}(\cos bt - i \sin bt) \\ &= e^{at}[(C_1 + \bar{C}_1)\cos bt + (iC_1 - i\bar{C}_1)\sin bt] \\ &= e^{at}(A \cos bt + B \sin bt). \end{aligned}$$

2.26 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x''' - 8x = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $r^3 - 8 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$ şi $r_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Soluţia generală a ecuaţiei este $x = C_1 e^{2t} + e^{-t}(C_2 \cos \sqrt{3}t + C_3 \sin \sqrt{3}t)$.

2.27 Teoremă. *Dacă r_1 este rădăcină multiplă de ordinul $p \geq 2$ a polinomului caracteristic P atunci $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \ldots, t^{p-1}e^{r_1 t}$ sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei $L[x] = 0$.*

Demonstraţie. Fiindcă r_1 este rădăcină multiplă de ordinul $p \geq 2$ a ecuaţiei $P(r) = 0$ avem $P(r_1) = 0, P'(r_1) = 0, \ldots, P^{(p-1)}(r_1) = 0$ şi $P^{(p)}(r_1) \neq 0$. Fie $x_k = t^k e^{r_1 t}$, cu $0 \leq k \leq p - 1$. Avem

$$L[x_k] = e^{r_1 t}\left[P(r_1)t^k + \cdots + \frac{P^{(p-1)}(r_1)}{(p-1)!}(t^k)^{(p-1)} + \frac{P^{(p)}(r_1)}{p!}(t^k)^{(p)} + \cdots + \frac{P^{(n)}(r_1)}{n!}(t^k)^{(n)}\right]$$

Primii p termeni din paranteză sunt zero datorită derivatelor lui P, iar restul termenilor sunt zero datorită derivatelor lui t^k. Aşadar $L[x_k] = 0$, pentru orice k cu valori de la 0 la $p - 1$. Aceasta ne arată că x_k sunt soluţii. Pentru a arăta că sunt liniar independente pornim de la egalitatea

$$C_0 e^{r_1 t} + C_1 t e^{r_2 t} + \ldots C_{p-1} t^{p-1} e^{r_1 t} = 0.$$

Împărţim cu $e^{r_1 t} \neq 0$ şi obţinem că polinomul $C_0 + C_1 t + \cdots + C_{p-1}t^{p-1}$ ia valoarea zero pentru orice t, ceea ce înseamnă că polinomul este nul, adică $C_0 = C_1 = \cdots = C_{p-1} = 0$. Aceasta ne arată că funcţiile x_k sunt liniar independente. □

2.28 Teoremă. *Dacă $r_1, \ldots, r_s$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic cu ordinele de multiplicitate $p_1, \ldots, p_s$ atunci soluţia generală a ecuaţiei $L[x] = 0$ se scrie sub forma*

$$x = P_1(t)e^{r_1 t} + \cdots + P_s(t)e^{r_s t},$$

unde $P_1, \ldots, P_s$ sunt polinoame cu gradele $p_1 - 1, \ldots, p_s - 1$.

Demonstraţie. Dacă r_1 este rădăcină de ordinul p_1 a polinomului caracteristic atunci $P_1(t)e^{r_1 t}$ este soluţie a ecuaţiei $L[x] = 0$, conform teoremei precedente, unde P_1 este un polinom de grad $p_1 - 1$. Rămâne să demonstrăm că $e^{r_1 t}, \ldots, t^{p_1 - 1}e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, t^{p_2 - 1}e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_s t}, \ldots, t^{p_s - 1}e^{r_s t}$ sunt liniar independente. Presupunem că

$$P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \cdots + P_{s-1}(t)e^{r_{s-1} t} + P_s(t)e^{r_s t} = 0.$$

Demonstrăm că $P_1, \dots, P_s$ sunt nule.

Împărţim cu $e^{r_s t}$ şi derivăm de p_s ori. Ultimul termen dispare şi avem

$$Q_1(t)e^{(r_1-r_s)t} + \cdots + Q_{s-1}(t)e^{(r_{s-1}-r_s)t} = 0, \tag{2.1}$$

unde $Q_1, \dots, Q_{s-1}$ sunt polinoame de grade ca şi $P_1, \dots, P_{s-1}$ şi sunt identic nule dacă polinoamele corespunzătoare $P_1, \dots, P_{s-1}$ sunt identic nule. Într-adevăr, să observăm că, de exemplu

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= e^{-(r_1-r_s)t} \frac{\mathrm{d}^{p_s}}{\mathrm{d}t^{p_s}} \left(P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}\right) \\ &= C_{p_s}^0 P_1(t)(r_1-r_s)^{p_s} + C_{p_s}^1 P_1'(t)(r_1-r_s)^{p_s-1} + \cdots + C_{p_s}^{p_s} P_1^{(p_s)}(t). \end{aligned}$$

Fiindcă $r_1 - r_s \neq 0$ rezultă că Q_1 are acelaşi grad ca şi P_1. Mai mult, dacă Q_1 este identic zero atunci derivata de ordinul p_s a produsului $P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}$ este identic zero, adică $P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}$ este un polinom de grad cel mult $p_s - 1$. Dar acest lucru este posibil doar dacă P_1 este identic zero.

Revenind la egalitatea (2.1) dacă împărţim cu $e^{(r_{s-1}-r_s)t}$ şi derivăm de p_{s-1} se obţine

$$R_1(t)e^{(r_1-r_{s-1})t} + \cdots + R_{s-2}(t)e^{(r_{s-2}-r_{s-1})t} = 0,$$

unde $R_1, \dots, R_{s-2}$ sunt polinoame de grade ca şi $Q_1, \dots, Q_{s-2}$ şi sunt identic nule dacă polinoamele corespunzătoare $Q_1, \dots, Q_{s-2}$ sunt identic nule.

Repetând acest procedeu obţinem

$$S_1(t)e^{(r_1-r_2)t} = 0.$$

De aici deducem că S_1 este polinomul nul, dar asta înseamnă că R_1 este nul, de unde Q_1 este nul, ceea ce implică faptul că P_1 este nul.

Analog obţinem că $P_2, P_3, \dots, P_s$ sunt nule. Cu aceasta teorema este demonstrată. □

2.29 Observaţie. În cazul în care $r_1 = a + bi$ este o rădăcină complexă de ordinul p a polinomului caracteristic, atunci $\bar{r}_1$ este de asemenea o rădăcină de ordinul p. Soluţia reală corespunzătoare acestora este

$$x = e^{at} \left[\left(A_0 + A_1 t + \cdots + A_{p-1}t^{p-1}\right) \cos bt + \left(B_0 + B_1 t + \cdots + B_{p-1}t^{p-1}\right) \sin bt \right].$$

2.30 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 6x'' - 4x' + x = 0$.

Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = (r-1)^4 = 0$. Aceasta are rădăcina multiplă $r_{1,2,3,4} = 1$. Soluţia generală a ecuaţiei este

$$x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3)e^t.$$

2.31 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x^{(5)} - x^{(4)} + 2x^{(3)} - 2x'' + x' - x = 0$.

Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_{2,3} = i$ şi $r_{4,5} = -i$. Soluţia generală a ecuaţiei este

$$x = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)\cos t + (C_4 + C_5 t)\sin t.$$

2.32 Observaţie. Dacă avem de rezolvat o ecuaţie liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi $L[x] = f(t)$ putem folosi metoda variaţiei constantelor. Dacă funcţia din membrul al doilea are o formă specială putem folosi şi următoarea metodă. Dacă

$$f(t) = e^{at}[Q(t)\cos bt + R(t)\sin bt]$$

unde Q, R sunt polinoame de grad cel mult m, atunci dacă $r = a + bi$ este rădăcină de ordinul $s \geq 0$ a ecuaţiei caracteristice $P(r) = 0$ atunci ecuaţia neomogenă $L[x] = f(t)$ are o soluţie particulară de forma

$$x_p = t^s e^{at}[S(t)\cos bt + T(t)\sin bt]$$

unde S şi T sunt polinoame de grad cel mult m, ale căror coeficienţi se determină prin identificare.

2.33 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x'' + x = \sin t$.

Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă: $x'' + x = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Soluţia ecuaţiei omogene este $x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Funcţia din membrul drept al ecuaţiei neomogene este $f(t) = \sin t$. Aceasta înseamnă că $a = 0$ şi $b = 1$, $Q(t) = 0$ şi $R(t) = 1$. Pentru că $r = a + bi = i$ este o rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice luăm $s = 1$. Polinoamele Q, R sunt de grad cel mult 0. Considerăm pe $S(t) = A$ şi $T(t) = B$ polinoame de grad cel mult 0 în forma cea mai generală. Soluţia particulară se caută sub forma

$$x_p = t(A\cos t + B\sin t).$$

Avem

$$x_p' = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t)$$

$$x_p'' = -2A\sin t + 2B\cos t + t(-A\cos t - B\sin t).$$

Înlocuind în ecuaţie rezultă

$$\sin t = x_p'' + x_p = -2A\sin t + 2B\cos t.$$

Prin identificarea coeficienţilor $1 = -2A$ şi $0 = 2B$, deci $x_p = -\frac{1}{2}t\cos t$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$x = x_0 + x_p = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}t\cos t.$$

2.34 Teoremă. *Dacă* x_i *sunt soluţii ale ecuaţiilor* $L[x] = f_i(t)$, $i = \overline{1, s}$ *atunci funcţia* $x = x_1 + \cdots + x_s$ *este soluţie a ecuaţiei* $L[x] = f_1(t) + \cdots + f_s(t)$.

Demonstraţie. Folosind liniaritatea operatorului avem

$$L[x] = L[x_1 + \cdots + x_s] = L[x_1] + \cdots + L[x_s] = f_1(t) + \cdots + f_s(t).$$

□

2.35 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x'' + 2x' + x = 1 + t^2 + 4te^t$.

Rezolvăm ecuaţia omogenă $x'' + 2x' + x = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 2r + 1 = 0$, cu rădăcina dublă $r_{1,2} = -1$. Soluţia ecuaţiei omogene este $x_0 = (C_1 + C_2t)e^{-t}$. Pentru a rezolva ecuaţia neomogenă notăm $f_1(t) = 1 + t^2$ şi $f_2(t) = te^t$.

Soluţia particulară corespunzătoare ecuaţiei $x'' + 2x' + x = 1 + t^2$ este de forma $x_1 = At^2 + Bt + C$, căci $a = 0$, $b = 0$, $Q(t) = 1 + t^2$ şi $s = 0$ fiindcă $r = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Prin derivare rezultă

$$1 + t^2 = x_1'' + 2x_1' + x_1 = 2A + 2(2At + B) + At^2 + Bt + C = At^2 + t(4A + B) + 2A + 2B + C.$$

Prin identificarea coeficienţilor avem $A = 1$, $B = -4$ şi $C = 7$. Deci $x_1 = t^2 - 4t + 7$.

Soluţia particulară corespunzătoare ecuaţiei $x'' + 2x' + x = 4te^t$ o căutăm de forma $x_2 = (At + B)e^t$, căci $a = 1$, $b = 0$, $Q(t) = 4t$ şi $s = 0$ fiindcă $r = 1$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Prin derivare rezultă

$$4te^t = x_2'' + 2x_2' + x_2 = e^t(At + B + 2A) + 2e^t(At + B + A) + e^t(At + B) = e^t(4At + 4B + 4A).$$

Prin identificarea coeficienţilor avem $A = 1$, $B = -1$. Obţinem $x_2 = e^t(t - 1)$.

Soluţia ecuaţiei neomogene $x'' + 2x' + x = 1 + t^2 + 4te^t$ este

$$x = x_0 + x_1 + x_2 = (C_1 + C_2t)e^{-t} + t^2 - 4t + 7 + e^t(t - 1).$$

2.36 Exemplu (Circuitul electric RLC)**.** Considerăm un circuit electric format dintr-o rezistenţă de 1 ohm legată în serie cu o bobină de 0,05 henri, un condensator cu capacitatea de 2/1010 farazi şi o sursă electromotoare care generează o tensiune de $E(t)$ volţi la momentul de timp t. Dacă notăm cu $Q(t)$ sarcina electrică a condensatorului în coulombi la momentul t şi $I(t)$ intensitatea curentului în amperi a circuitului, atunci evoluţia curentului în circuit se face pe baza legii lui Kirchhoff

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t).$$

Ţinând cont de relaţia $Q'(t) = I(t)$ şi derivând se obţine ecuaţia diferenţială

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t).$$

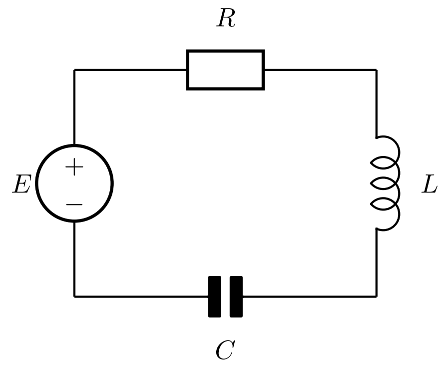

Figura 2.1: Circuitul RLC

Dacă sursa este o baterie de 12 volţi să se afle intensitatea curentului în circuit după 0,01 secunde ştiind că la momentul iniţial $I(0) = 0 = Q(0)$.

Tensiunea fiind constantă avem $E'(t) = 0$. Ecuaţia diferenţială este

$$\frac{1}{20}I'' + I' + 550I = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 20r + 10100 = 0$, care are rădăcinile $r_1 = -10 + 100i$ şi $r_2 = -10 - 100i$. Soluţia va fi

$$I(t) = e^{-10t}(A\cos 100t + B\sin 100t).$$

Din condiţiile iniţiale avem

$$\begin{aligned} I(0) &= A = 0 \\ I'(0) &= -10A + 100B = \frac{E(0)}{L} = 240 \end{aligned}$$

Avem $A = 0$ şi $B = 2,4$. Se obţine

$$I(t) = 2,4\, e^{-10t}\sin 100t.$$

Pentru $t = 0,01$ avem $I(0) = 2,4 \cdot e^{-0,1} \cdot \sin 1 \approx 1,82$ amperi.

Dacă circuitul este legat la o sursă de curent alternativ de 220 volţi şi 50 hertzi, care va fi intensitatea după 0,01 secunde?

În cazul curentului alternativ $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Avem $E_0 = 220$ şi $\omega = 2\pi \cdot 50 \approx 314$ radiani pe secundă. Avem ecuaţia diferenţială

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t \iff I'' + 20I' + 10100I = 4400\omega \cos \omega t$$

Trebuie să determinăm o soluţie particulară de forma $I_p = C\cos \omega t + D \sin \omega t$. Avem

$$I_p'' + 20I_p' + 10100I_p = \cos \omega t(-C\omega^2 + 20D\omega + 10100C) + \sin \omega t(-D\omega^2 - 20C\omega + 10100D).$$

Prin identificarea coeficienţilor obţinem

$$C = \frac{4400\omega(10100-\omega^2)}{(10100-\omega^2)^2+400\omega^2}$$

$$D = \frac{88000\omega^2}{(10100-\omega^2)^2+400\omega^2}$$

Cu aceşti coeficienţi determinaţi soluţia generală va fi

$$I(t) = e^{-10t}(A\cos 100t + B\sin 100t) + C\cos\omega t + D\sin\omega t.$$

Din condiţiile iniţiale

$$I(0) = A + C = 0$$

$$I'(0) = -10A + 100B + \omega D = \frac{E(0)}{L} = 0$$

obţinem $A = -C$ şi $B = (-D\omega - 10C)/100$. Intensitatea curentului la momentul $t = 0,01$ este

$$I(0,01) = e^{-0,1}\left(-C\cos 1 - \frac{D\omega + 10C}{100}\sin 1\right) + C\cos(0,01\omega) + D\sin(0,01\omega) \approx -239.$$

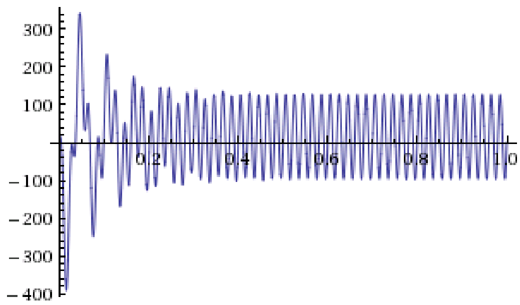

Figura 2.2: Intensitatea curentului în circuit în cel de-al doilea caz

2.4 Ecuaţii diferenţiale Euler

2.37 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială Euler** *o ecuaţie de forma*

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t),$$

unde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *sunt numere reale.*

Metoda 1 de rezolvare. Pentru a studia această ecuaţie facem substituţia $t = e^s$ şi introducem operatorul $S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$. Vom avea

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = x' \cdot e^s = tx' \qquad \Rightarrow \quad tx' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = Sx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (tx')'\cdot t = t^2x'' + tx' \qquad \Rightarrow \quad t^2x'' = S(S-1)x$$

Demonstrăm prin inducţie că

$$t^n x^{(n)} = S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)x.$$

Presupunem relaţia adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$. Avem

$$\begin{aligned}
x^{(n+1)} &= \left(x^{(n)}\right)'_t = \left(S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)x\cdot t^{-n}\right)'_t \\
&= (S(S-1)\dots(S-n+1)x)'_t \cdot t^{-n} + S(S-1)\dots(S-n+1)x\cdot(-n)t^{-n-1} \\
&= (S(S-1)\dots(S-n+1)x)'_s \cdot s'_t \cdot t^{-n} - S(S-1)\dots(S-n+1)x\cdot nt^{-n-1} \\
&= S^2(S-1)\dots(S-n+1)x\cdot t^{-n-1} - S(S-1)\dots(S-n+1)x\cdot nt^{-n-1}
\end{aligned}$$

Obţinem

$$t^{n+1}x^{(n+1)} = S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)(S-n)x.$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia Euler se obţine o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi.

Metoda 2 de rezolvare. Căutăm soluţii sub forma $x = t^r$, rezolvând ecuaţia omogenă. Rezultă o ecuaţie caracteristică în r. Dacă $r = r_1$ este soluţie reală a ecuaţiei caracteristice atunci $x = C_1 t^{r_1}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale. Dacă $r = a \pm bi$ sunt soluţii ale ecuaţiei caracteristice atunci $x = t^a(A\cos(b\ln t) + B\sin(b\ln t))$ este soluţie a ecuaţiei lui Euler. Dacă $r = r_2$ este o soluţie multiplă de ordin s atunci $x = t^{r_2}(C_0 + C_1\ln t + \dots C_{s-1}\ln^{s-1} t)$ este soluţie. Pentru ecuaţia neomogenă, dacă

$$f(t) = t^a[Q(\ln t)\cos(b\ln t) + R(\ln t)\sin(b\ln t)]$$

unde Q, R sunt polinoame de grad cel mult m, atunci dacă $r = a+bi$ este rădăcină de ordinul $s \geq 0$ a ecuaţiei caracteristice $P(r) = 0$ atunci ecuaţia neomogenă $L[x] = f(t)$ are o soluţie particulară de forma

$$x_p = (\ln t)^s t^a[S(\ln t)\cos(b\ln t) + T(\ln t)\sin(b\ln t)]$$

unde S şi T sunt polinoame de grad cel mult m, ale căror coeficienţi se determină prin identificare.

2.38 Observaţie. La fel se tratează o ***ecuaţie Euler generalizată***, care este de forma

$$(at+b)^n x^{(n)} + a_1(at+b)^{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(at+b)x' + a_n x = f(at+b),$$

unde $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere reale.

2.39 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $t^3x''' + 2tx' - 2x = t\ln t$.

Metoda 1 de rezolvare Facem schimbarea de variabilă $t = e^s$. Avem

$$[S(S-1)(S-2) + 2S - 2]x = se^s.$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene este $r(r-1)(r-2)+2(r-1)=0$ cu rădăcinile $r_1=1$, $r_{2,3}=1\pm i$. Soluţia ecuaţiei omogene este $x=C_1e^s+e^s\left(C_2\cos s+C_2\sin s\right)$. Căutăm soluţia particulară sub forma $x_p=se^s(As+B)$. Înlocuind în ecuaţie avem

$$\frac{\mathrm{d}^3x_p}{\mathrm{d}s^3}-3\frac{\mathrm{d}^2x_p}{\mathrm{d}s^2}+4\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}s}-2x_p=se^s.$$

Prin identificarea coeficienţilor rezultă $A=1/2$ şi $B=0$. Soluţia generală va fi

$$x=C_1e^s+e^s\left(C_2\cos s+C_2\sin s\right)+\frac{1}{2}s^2e^s.$$

Revenind în variabila t soluţia se scrie

$$x=C_1t+t\left[C_2\cos(\ln t)+C_2\sin(\ln t)\right]+\frac{1}{2}t\ln^2 t.$$

Metoda 2 de rezolvare Căutăm soluţii sub forma $x=t^r$. Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă. Rezultă ecuaţia $r(r-1)(r-2)+2r-2=0$ cu rădăcinile $r_1=1$ şi $r_{2,3}=1\pm i$. Soluţia ecuaţiei omogene este $x_o=C_1t+t(C_2\cos\ln t+C_3\sin\ln t)$. Observăm că $f(t)=t\ln t$ este de forma $f(t)=t^a[Q(\ln t)\cos(b\ln t)+R(\ln t)\sin(b\ln t)]$ cu $a=1$, $b=0$ şi Q polinom de gradul 1. Pentru că $r=a+bi=1$ este rădăcină de ordinul 1 a ecuaţiei caracteristice, soluţia particulară are forma $x_p=\ln t\cdot t(A\ln t+B)$. Înlocuind în ecuaţie rezultă prin identificare $A=1/2$ şi $B=0$. Soluţia generală ecuaţiei Euler este

$$x=x_o+x_p=C_1t+t\left[C_2\cos(\ln t)+C_2\sin(\ln t)\right]+\frac{1}{2}t\ln^2 t.$$

2.40 Exemplu (Încovoierea unei plăci circulare subţiri încastrată pe periferie, încărcată uniform)**.** Linia de încovoiere a unui diametru mic, pentru încovoieri mici este dată de

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}-\varphi+kx^3=0,\quad k>0,$$

unde $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, este unghiul dintre normala în punctul (x,y) şi axa OY. Soluţia particulară este $\varphi_p=\frac{1}{8}kx^3$. Ecuaţia caracteristică este $r(r-1)+r-1=0$, cu rădăcinile $r_{1,2}=\pm1$. Soluţia generală este $\varphi=C_1x+C_2x^{-1}-\frac{1}{8}kx^3$. Condiţiile iniţiale $\varphi=0$, pentru x=0 (în mijloc) şi pentru $x=R$ (la margine). Avem $C_1=\frac{1}{8}kR^3$ şi $C_2=0$. Prin urmare $\varphi=\frac{1}{8}kx(R^2-x^2)$. Încovoierea y pentru abscisa x se obţine prin integrarea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\operatorname{tg}\varphi,$$

deci

$$y(x)=-\int_R^x\operatorname{tg}\left[\frac{1}{8}ku(R^2-u^2)\right]\,\mathrm{d}u,$$

deoarece y trebuie să se anuleze pentru $x=\pm R$. Cum φ ia numai valori mici pentru încovoieri slabe, putem dezvolta în serie pe $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi=\varphi+\frac{1}{3}\varphi^3+\dots$$

şi avem

$$y=\frac{1}{32}k(R^2-x^2)^2+\frac{1}{61440}k^3(R^2-x^2)^4(4x^2+R^2)+\dots$$

2.5 Exerciţii

Probleme propuse

2.1. Să se integreze ecuaţiile:

a) $x'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

b) $tx^{(5)} - x^{(4)} = 0$

c) $x' = tx'' - (x'')^2$

d) $x'' = \sqrt{1+x'^2}$

e) $tx'' = x' + t^2$

f) $2x'' = \dfrac{x'}{t} + \dfrac{t}{x'}$

2.2. Să se integreze

a) $3x'' - 2x' - 8x = 0$

b) $x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = 0$

c) $4x'' - 8x' + 5x = 0$

d) $x^{(3)} + 6x'' + 11x' + 6x = 0$

e) $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 13x'' = 2e^t$

f) $x^{(3)} + x'' + 2x' + 2x = te^t$

g) $x^{(5)} - 2x^{(3)} + x' = 2$

h) $x'' + 2x' + 2 = 0$

i) $x'' - 4x' + 5x = e^{-t}\sin 2t$

j) $x^{(3)} - x'' - x' + x = \cos t$

k) $x'' + x' - 2x = \operatorname{ch} t$

l) $x'' + x' = t^2 - e^{-t} + e^t$

2.3. Să se integreze ecuaţiile:

a) $t^2x'' + tx' - x = 2$

b) $(2t+1)^2x'' - (2t+1)x' - 4x = \ln(2t+1)$

c) $(t-2)^2x'' - 3(t-2)x' + 4x = t$

Indicaţii la problemele propuse

2.1. Ecuaţii diferenţiale pentru care se poate reduce ordinul
a) $x = t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C_1t + C_2$.
b) $x = C_1t^5 + C_2t^3 + C_3t^2 + C_4t + C_5$
c) $x = \frac{t^2C_1}{2} - C_1^2t + C_2$ şi $x = \frac{t^3}{12} + C_1$
d) $x = \operatorname{ch}(t + C_1) + C_2$
e) $x = \frac{t^3}{3} + \frac{C_1t^2}{2} + C_2$
f) $2x = (t + C_1)\sqrt{t(t+2C_1)} - C_1^2\ln(t + C_1 + \sqrt{t(t+2C_1)}) + C_2$.
2.2. Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi
a) $x = C_1e^{2t} + C_2^{-\frac{4}{3}t}$
b) $x = e^t(C_1 + C_2t + C_3t^2)$
c) $x = e^t\left(C_1\cos\frac{t}{2} + C_2\sin\frac{t}{2}\right)$

d) $x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{-3t}$

e) $x = C_1 + C_2t + C_3e^{2t}\cos 3t + C_4e^{2t}\sin 3t + \frac{1}{5}e^t$

f) $x = C_1e^{-t} + C_2\cos\sqrt{2}t + C_3\sin\sqrt{2}t + \left(\frac{1}{6}t - \frac{7}{36}\right)e^t$

g) $x = C_1 + C_2e^t + C_3te^t + C_4e^{-t} + C_5te^{-t} + 2t$

h) $x = C_1 + C_2e^{-2t} - t$

i) $x = C_1e^{2t}\cos t + C_2e^{2t}\sin t + e^{-t}\left(\frac{1}{15}\cos 2t + \frac{1}{30}\sin 2t\right)$

j) $x = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t} + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t$

k) $x = C_1e^t + C_2e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t - \frac{1}{4}e^{-t}$

l) $x = C_1 + C_2e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t.$

2.3. Ecuaţii Euler a) $x = C_1t + C_2\frac{1}{t} - 2$

b) $x = C_1(2t+1)^2 + C_2\frac{1}{\sqrt{2t+1}} - \frac{1}{4}\ln(2t+1) + \frac{3}{8}$

c) $x = (t-2)^2(C_1 + C_2\ln(t-2)) + t - \frac{3}{2}.$

Capitolul 3

Integrarea ecuaţiilor diferenţiale prin serii

3.1 Metoda seriilor de puteri

În general, ecuaţiile liniare cu coeficienţi variabili nu pot fi integrate folosind un algoritm asemănător ecuaţiilor liniare cu coeficienţi constanţi. În acest caz se foloseşte metoda seriilor de puteri. Se presupune că soluţia este dezvoltabilă în serie de puteri, adică se poate scrie sub forma

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Reamintim cele mai uzuale proprietăţi ale seriilor de puteri:

1) suma a două serii $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ şi $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ este

$$f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

2) înmulţirea cu o constantă

$$a \cdot f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot a_n t^n$$

3) identitatea a două serii

$$f(t) = g(t), \text{ pentru orice } t \iff a_n = b_n, \text{ pentru orice } n \geq 0$$

4) schimbarea de indice $k = n + r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{k=r}^{\infty} a_{k-r} t^{k-r}$$

5) diferenţiabilitatea termen cu termen

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

Dându-se ecuaţia diferenţială, se caută soluţia sub forma unei serii de puteri. Se folosesc proprietăţile seriilor de puteri şi se obţin nişte relaţii de recurenţă pentru coeficienţii c_n. Din aceste relaţii, se determină coeficienţii c_n. Metoda este utilă în special pentru ecuaţiile liniare de ordinul doi.

3.1 Exemplu. Să rezolvăm ecuaţia $x'' + x = 0$.

Căutăm soluţia sub forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Atunci $x'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2}$. Avem

$$x'' + x = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Cu schimbarea de indice $n - 2 = m$, rezultă

$$x'' + x = \sum_{m=0}^{\infty} [c_m + c_{m+2}(m+2)(m+1)]t^m = 0,$$

adică $c_m + c_{m+2}(m+2)(m+1) = 0$. Luând pe m să fie par, relaţia de recurenţă între coeficienţi devine

$$c_{2k+2} = \frac{-c_{2k}}{(2k+2)(2k+1)}.$$

Dând valori lui k

$$c_2 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}, \quad c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!}, \quad c_6 = \frac{-c_4}{6 \cdot 5} = \frac{-c_0}{6!}, \quad \dots \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}.$$

Pentru $m = 2k - 1$

$$c_{2k+1} = \frac{-c_{2k-1}}{(2k+1)2k},$$

de unde

$$c_3 = \frac{-c_1}{3 \cdot 2}, \quad c_5 = \frac{-c_3}{5 \cdot 3} = \frac{c_1}{5!}, \quad c_7 = \frac{-c_5}{7 \cdot 6} = \frac{-c_1}{7!}, \quad \dots \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}.$$

Înlocuind, soluţia se scrie

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\ &= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \dots\right) + c_1 \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}\right) \\ &= c_0 \cos t + c_1 \sin t. \end{aligned}$$

3.2 Ecuaţia lui Bessel

3.2 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţia lui Bessel** *o ecuaţie diferenţială de forma*

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0,$$

unde $\nu \geq 0$ *este un număr real, iar* $x = x(t) \in C^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid.*

3.3 Observaţie. Soluţiile ecuaţiei lui Bessel se numesc ***funcţii Bessel*** sau ***funcţii cilindrice***. Ele modelează propagarea căldurii şi a electricităţii într-un cilindru.

Căutăm soluţia ecuaţiei lui Bessel sub forma unei serii de puteri generalizate

$$x(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Înlocuind în ecuaţie avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t^{n+r+2} - \nu^2 t^{n+r}) = 0.$$

Această relaţie este echivalentă cu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r} + c_n(n+r)t^{n+r} - c_n\nu^2 t^{n+r} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r+2}$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n[(n+r)^2 - \nu^2]t^{n+r} = -\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}t^{n+r}, \qquad \text{pentru orice } t.$$

Egalând coeficienţii obţinem sistemul

$$\begin{cases} c_0(r^2 - \nu^2) = 0 \\ c_1[(r+1)^2 - \nu^2] = 0 \\ c_n[(r+n)^2 - \nu^2] = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Presupunând $c_0 \neq 0$ prima condiţie ne conduce la ecuaţia $r^2 - \nu^2 = 0$ cu soluţiile $r_1 = \nu$ şi $r_2 = -\nu$. Vom determina în continuare soluţia x_1 a ecuaţiei lui Bessel corespunzătoare rădăcinii $r_1 = \nu$.

A doua relaţie se scrie $c_1(2\nu + 1) = 0$. Pentru că $\nu \geq 0$ rezultă $c_1 = 0$ şi înlocuind în cea de-a treia relaţie a sistemului deducem că $c_{2k+1} = 0$, pentru orice k număr natural. Ceilalţi coeficienţi se obţin din relaţia

$$c_{2k} \cdot 4k(\nu + k) = -c_{2k-2}, \quad k \geq 1.$$

Dând valori lui k de la 1 până la n şi înmulţind toate aceste egalităţi, rezultă

$$c_2 \cdots c_{2n} \cdot 4^n \cdot n! \cdot (\nu+1)\cdots(\nu+n) = (-1)^n \cdot c_0 \cdot c_2 \cdots c_{2n-2}$$

adică

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(\nu+1)\cdots(\nu+n)} = \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu+n+1)}.$$

Notând $c_0 = \frac{A}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ se obţine soluţia

$$x_1(t) = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Soluţia x_1 este produsul dintre o constantă arbitrară A şi funcţia

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}$$

numită ***funcţia lui Bessel de speţa întâi şi ordin*** ν.

Calculând raza de convergenţă a seriei din formula lui J_ν obţinem

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu+n+1) \cdot 2^{2n+\nu}} \cdot \frac{(n+1)! \cdot \Gamma(\nu+n+2) \cdot 2^{2n+2+\nu}}{(-1)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} 4(n+1)(n+1+\nu) = \infty. \end{aligned}$$

Dar pentru că ν este real, domeniul de definiţie al funcţiei J_ν este numai $(0,\infty)$.

Vom determina, acum, soluţia x_2 corespunzătoare soluţiei $r_1 = -\nu$. Trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} c_1(1-2\nu) = 0 \\ c_n \cdot n(n-2\nu) = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Avem următoarele cazuri posibile:

Cazul I Constanta $2\nu \notin \mathbb{Z}$. Soluţia se găseşte urmând paşii făcuţi în găsirea soluţiei x_1. Obţinem

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1-\nu)\dots(n-\nu)}$$

şi

$$x_2(t) = BJ_{-\nu}(t) = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}.$$

Cele două soluţii x_1 şi x_2 ale ecuaţiei lui Bessel sunt liniar independente pentru că wronskianul

$$W(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} J_\nu(t) & J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi t}$$

este diferit de zero. Într-adevăr, scriind că x_1 şi x_2 sunt soluţii ale ecuaţiei lui Bessel

$$t^2 x_1''(t) + t x_1'(t) + (t^2-\nu^2) x_1(t) = 0$$

$$t^2 x_2''(t) + t x_2'(t) + (t^2-\nu^2) x_2(t) = 0$$

înmulţind prima relaţie cu $-x_2(t)$ şi a doua cu $x_1(t)$ şi adunându-le, se obţine

$$t^2[x_1(t) \cdot x_2''(t) - x_2(t) \cdot x_1''(t)] + t[x_1(t) \cdot x_2'(t) - x_2(t) \cdot x_1'(t)] = 0.$$

Ţinând cont că $W(t) = x_1(t) \cdot x_2'(t) - x_2(t) \cdot x_1'(t)$ se obţine ecuaţia

$$t \cdot W'(t) + W(t) = 0 \Longleftrightarrow (t \cdot W(t))' = 0,$$

cu soluţia generală $W(t) = C/t$. Ne rămâne să determinăm valoarea constantei ce corespunde soluţiilor J_ν şi $J_{-\nu}$. Din dezvoltările în serie

$$\begin{aligned}
J_\nu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} - \frac{1}{\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2+\nu} + \dots \\
J_{-\nu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} - \frac{1}{\Gamma(2-\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2-\nu} + \dots \\
J_\nu'(t) &= \frac{\nu}{2 \cdot \Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} - \frac{2+\nu}{2 \cdot \Gamma(\nu+2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{1+\nu} + \dots \\
J_{-\nu}'(t) &= \frac{-\nu}{2 \cdot \Gamma(1-\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu-1} - \frac{2-\nu}{2 \cdot \Gamma(2-\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{1-\nu} + \dots
\end{aligned}$$

se obţine

$$C = \lim_{t\to 0} t \cdot \left[J_\nu(t) \cdot J_{-\nu}'(t) - J_\nu'(t) \cdot J_{-\nu}(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{-\nu}{2 \cdot \Gamma(1-\nu)} \cdot 4 = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi},$$

pentru că $\Gamma(\nu+1) = \nu \cdot \Gamma(\nu)$ şi $\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(1-\nu) = \pi / \sin \pi\nu$.

Pentru că ν nu este număr întreg, constanta C este nenulă şi astfel este demonstrată independenţa soluţiilor J_ν şi $J_{-\nu}$. Ecuaţia lui Bessel fiind o ecuaţie liniară de ordinul doi, are în acest caz, soluţia generală

$$x(t) = AJ_\nu(t) + BJ_{-\nu}(t).$$

Cazul II Constanta $2\nu \in \mathbb{Z}$, dar $\nu \notin \mathbb{Z}$. În acest caz $2\nu = 2p+1$, cu $p \in \mathbb{Z}$. Sistemul ce trebuie rezolvat este

$$\begin{cases} -2p \cdot c_1 = 0 \\ c_n \cdot n(n-2p-1) = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Pentru $n = 2p+1$ rezultă $c_{2p-1} = 0$ şi luând pe rând $n = 2p-1, 2p-3, \dots, 3$ se obţine $c_{2p-3} = c_{2p-5} = \dots = c_1 = 0$.

Scriind a doua ecuaţie a sistemului pentru indicii $2p+3, 2p+5, \dots, 2n+1$

$$c_{2p+3} \cdot (2p+3)2 = -c_{2p+1}$$

$$c_{2p+5} \cdot (2p+5)4 = -c_{2p+3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_{2n+1} \cdot (2n+1)(2n-2p) = -c_{2n-1}$$

şi înmulţind membru cu membru aceste egalităţi obţinem

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-p} c_{2p+1}}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2p) \cdot (2p+3) \cdot (2p+5) \cdots (2n+1)}.$$

Luând $c_{2p+1} = \frac{D}{2^{p+\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}$ se obţine

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-p} D}{2^{2n-p+\frac{1}{2}} \cdot (n-p)! \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}, \qquad \text{pentru } n \geq p.$$

Pentru a determina coeficienţii cu indice par scriem a doua ecuaţie a sistemului pentru indicii $2, 4, \ldots, 2n$

$$c_2 \cdot 2(1-2p) = -c_0$$
$$c_4 \cdot 4(3-2p) = -c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{2n} \cdot 2n(2n-2p-1) = -c_{2n-2}$$

şi înmulţim egalităţile membru cu membru. După simplificări rezultă

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (1-2p) \cdot (3-2p) \cdots (2n-2p-1)}.$$

Alegând $c_0 = \frac{B}{2^{-p-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}$ obţinem

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n B}{2^{2n-p-\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot \Gamma\left(n-p+\frac{1}{2}\right)}, \qquad \text{pentru } n \geq 0.$$

Scriem soluţia ecuaţiei

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= t^{-p-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n-p+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n-p-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=p}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n-p+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B}{n! \cdot \Gamma\left(n-p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^{n-p} D}{(n-p)! \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p+\frac{1}{2}} + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m D}{m! \cdot \Gamma\left(m+p+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p+\frac{1}{2}} + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t) \\
&= D \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t) + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t).
\end{aligned}$$

Fiindcă $\nu = p + \frac{1}{2}$ avem $x_1(t) = A \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t)$. Fiindcă $J_{p+\frac{1}{2}}$ şi $J_{-p-\frac{1}{2}}$ sunt liniar independente (vezi cazul I), notând $A_1 = A + D$ soluţia ecuaţiei lui Bessel $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ se scrie

$$x(t) = A_1 \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t) + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t).$$

Cazul III Constanta ν este nulă. Ecuaţia lui Bessel în acest caz este

$$tx'' + x' + t \cdot x = 0.$$

Prima soluţie este $x_1(t) = A \cdot J_0(t)$. Căutăm a doua soluţie sub forma

$$x_2(t) = \ln t \cdot J_0(t) + y(t).$$

Înlocuind în ecuaţia lui Bessel avem

$$t\left[\ln t \cdot J_0''(t) + \frac{2J_0'(t)}{t} - \frac{J_0(t)}{t^2} + y''(t)\right] + \ln t \cdot J_0'(t) + \frac{J_0(t)}{t} + y'(t) + t\left[\ln t \cdot J_0(t) + y(t)\right] = 0.$$

Pentru că J_0 este soluţie, rezultă

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) + 2J_0'(t) = 0.$$

Căutăm soluţia acestei ecuaţii sub forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Ştiind că

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

obţinem

$$t\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^{n-1} + t\sum_{n=0} d_n t^n + 2\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = 0.$$

Schimbând indicii de însumare, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n d_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}t^n + \sum_{n=1} d_{n-1}t^n + 2\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = 0.$$

De aici se obţine sistemul

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_{2n-1} + (2n+1)^2 d_{2n+1} = 0, \quad n \geq 1 \\ d_{2n-2} + (2n)^2 d_{2n} + \frac{(-1)^n n}{(n!)^2 \cdot 2^{2n-2}} = 0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Folosind primele două condiţii se observă că $d_3 = 0$ şi inductiv $d_{2n+1} = 0$, pentru $n \geq 0$. Pentru coeficienţii cu indici pari avem $d_2 = -\frac{d_0}{4} + \frac{1}{4}$ şi inductiv

$$d_{2n} = \frac{(-1)^n d_0}{(n!)^2 2^{2n}} - \frac{(-1)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Obţinem

$$y(t) = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

şi în final

$$x_2(t) = \ln t \cdot J_0(t) + d_0 J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Ştiind că şi în acest caz valoarea wronskianului este C/t, rămâne să calculăm valoarea constantei C.

$$W(J_0, x_2) = \begin{vmatrix} J_0(t) & J_0(t) \cdot \ln t + d_0 J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \\ J_0'(t) & J_0'(t) \cdot \ln t + \frac{1}{t} \cdot J_0(t) + d_0 J_0'(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} J_0(t) & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \\ J_0'(t) & \frac{1}{t} \cdot J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

Rezultă $C = \lim_{t \to 0} t \cdot W(J_0, x_2) = \lim_{t \to 0} J_0^2(t) = 1$. Şi în acest caz soluţiile sunt liniar independente. După o rearanjare a termenilor soluţia ecuaţiei lui Bessel este

$$x(t) = A J_0(t) + B \ln t \cdot J_0(t) - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Cazul IV Constanta ν este număr întreg diferit de zero. Fie $\nu = p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (p+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}$$

şi

$$J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}.$$

Fiindcă $\lim_{n \to k} 1/\Gamma(-p+n+1) = 0$, pentru k de la 0 până la $p-1$, avem

$$J_{-p}(t) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+p}}{(m+p)! \cdot \Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p}$$

$$= (-1)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+p)! \cdot m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p} = (-1)^p \cdot J_p(t).$$

Acest lucru ne arată că J_p şi J_{-p} sunt liniar dependente când p este întreg.

Pentru a găsi cea de-a doua soluţie a ecuaţiei lui Bessel folosim metoda lui Hankel. Pentru ν neîntreg J_ν şi $J_{-\nu}$ sunt soluţii ale ecuaţiei lui Bessel, deci şi

$$Y_\nu(t) = \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi}$$

este o soluţie a ecuaţiei lui Bessel. Pentru cazul când $\nu = p$ este întreg această expresie este o nedeterminare de tip 0/0 şi aplicăm regula lui l'Hospital.

$$Y_p(t) = \lim_{\nu \to p} \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi}$$

$$= \lim_{\nu \to p} \frac{-\pi \cdot \sin \nu\pi \cdot J_\nu(t)}{\pi \cdot \cos \nu\pi} + \lim_{\nu \to p} \frac{\cos \nu\pi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t)}{\pi \cos \nu\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) \Big|_{\nu=p} - (-1)^p \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \Big|_{\nu=p} \right].$$

Demonstrăm că $Y_p(t)$ este o soluţie a ecuaţiei lui Bessel. Pentru aceasta derivăm în raport cu ν ecuaţia lui Bessel cu J_ν şi $J_{-\nu}$ ca soluţii.

$$t^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) + t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) + (t^2 - \nu^2) \cdot \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - 2\nu \cdot J_\nu = 0$$

şi

$$t^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) + t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) + (t^2 - \nu^2) \cdot \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - 2\nu \cdot J_{-\nu} = 0.$$

Înmulţim a doua egalitate cu $-\cos \nu\pi$ şi adunăm cele două egalităţi. Cu notaţia

$$U_\nu(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - \cos \nu\pi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t)\right]$$

se obţine

$$t^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 U_\nu}{\mathrm{d}t^2} + t \cdot \frac{\mathrm{d}U_\nu}{\mathrm{d}t} + (t^2 - \nu^2) \cdot U_\nu - \frac{2\nu}{\pi} \cdot (J_\nu - \cos \nu\pi \cdot J_{-\nu}) = 0.$$

Trecând la limită pentru $\nu \to p$ se obţine

$$t^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 Y_p}{\mathrm{d}t^2} + t \cdot \frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}t} + (t^2 - p^2) \cdot Y_p = 0,$$

ceea ce ne arată că Y_p este soluţie a ecuaţiei lui Bessel. Pentru că

$$W(J_\nu, Y_\nu) = \begin{vmatrix} J_\nu(t) & \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \cdot J_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \cdot J'_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin \nu\pi} \begin{vmatrix} J_\nu(t) & J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi t} \neq 0,$$

rezultă că, prin trecere la limită cu $\nu \to p$, şi soluţiile J_p şi Y_p sunt liniar independente.

Vom determina, acum expresia lui Y_p. Să observăm că

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) &= \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}\right] \\ &= J_\nu(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{-\Gamma'(n+\nu+1)}{\Gamma^2(n+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Folosim formula[1]

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = H_m - \gamma,$$

[1]Aceasta se poate demonstra pornind de la egalitatea $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Logaritmăm şi apoi derivăm şi obţinem relaţia de recurenţă $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Rezultă

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{m} + \frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{\Gamma'(m-1)}{\Gamma(m-1)} = \cdots = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{1} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Ştiind că $\Gamma(1) = 1$ rămâne de arătat că $\Gamma'(1) = -\gamma$. Pornind de la egalitatea

$$\Gamma(b) - B(a,b) = \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b) \cdot b}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}$$

rezultă prin trecere la limită cu $b \to 0$ că

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \to 0} (\Gamma(b) - B(a,b)) = \lim_{b \to 0+} \int_0^\infty x^{b-1}\left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

unde $H_0 = 0$ şi $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$, $m \geq 1$ sunt numere armonice şi γ este limita şirului $(H_n - \ln n)$, numită constanta lui Euler sau constanta lui Euler-Mascheroni. Obţinem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t)\Big|_{\nu=p} &= J_p(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} \cdot \left(-\frac{H_{n+p} - \gamma}{(n+p)!}\right) \\ &= \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_p(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{n+p}}{n! \cdot (n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}\end{aligned}$$

Analog

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) = -J_{-\nu}(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \cdot \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)}.$$

Folosind formulele[2]

$$\lim_{\nu \to p} \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)} = \begin{cases} \frac{H_{n-p} - \gamma}{(n-p)!}, & n \geq p \\ (-1)^{p-n} \cdot (p-n-1)!\,, & n < p, \end{cases}$$

Pentru $a = 1$ această egalitate se scrie $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Scăzând cele două relaţii şi făcând schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{1+x}$ avem

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^{a-1}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(t^n - t^{a+n-1}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a+m-1}\right).\end{aligned}$$

Integrând în raport cu a între 1 şi 2 rezultă

$$\int_1^2 \left(\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right) \mathrm{d}a = \ln \Gamma(a)\Big|_1^2 - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} a\Big|_1^2 = \ln \Gamma(2) - \ln \Gamma(1) - \Gamma'(1) = -\Gamma'(1)$$

şi

$$\int_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a+m-1}\right) \mathrm{d}a = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m}\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m}\right) = \gamma$$

pentru că

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n} [\ln(m+1) - \ln m] = H_n - \ln(n+1) \to \gamma.$$

[2]Pentru cazul când $n < p$ egalitatea se obţine cu ajutorul formulei $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Într-adevăr $\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)} = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(\nu - n) \cdot \sin(\nu - n)\pi$ şi

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \to p} \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)} &= \lim_{\nu \to p} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)}\right)' = \lim_{\nu \to p} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\Gamma(\nu - n) \cdot \sin(\nu - n)\pi\right)' \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma'(p-n) \sin(p-n)\pi + \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(p-n) \cdot \pi \cos(p-n)\pi \\ &= \Gamma(p-n) \cdot \cos(p-n)\pi = (p-n-1)! \cdot (-1)^{p-n}.\end{aligned}$$

obţinem

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(t)\Big|_{\nu=p} = (-1)^{p+1}J_p(t)\cdot\ln\frac{t}{2} + (-1)^p\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}$$
$$+\sum_{n=p}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}\cdot\frac{H_{n-p}-\gamma}{(n-p)!}$$

Făcând o schimbare de indice în ultima sumă rezultă

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(t)\Big|_{\nu=p} = (-1)^{p+1}\left(\gamma+\ln\frac{t}{2}\right)\cdot J_p(t) + (-1)^p\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}$$
$$+(-1)^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m H_m}{(m+p)!\cdot m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p}$$

În final

$$Y_p(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\Big|_{\nu=p} - (-1)^p\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(t)\Big|_{\nu=p}\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{t}{2}\right)\cdot J_p(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n+p})}{n!\cdot(n+p)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}.$$

În cazul $p=0$, urmând acelaşi procedeu, se ajunge la

$$Y_0(t) == \frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{t}{2}\right)\cdot J_0(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Cu aceasta am demonstrat

3.4 Teoremă. *Soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel*

$$t^2x'' + tx' + (t^2-\nu^2)x = 0, \quad t>0, \quad \textit{cu parametrul } \nu\in\mathbb{R}$$

este

$$x(t) = A\cdot J_\nu(t) + B\cdot J_{-\nu}(t), \quad \textit{dacă } \nu\notin\mathbb{Z}$$

unde J_ν este funcţia Bessel de speţa întâi

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Dacă $\nu=p\in\mathbb{Z}$ atunci $J_{-\nu}$ se înlocuieşte cu funcţia Bessel de speţa a doua

$$Y_p(t) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{t}{2}\right)\cdot J_p(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n+p})}{n!\cdot(n+p)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}.$$

3.3 Ecuaţii reductibile la ecuaţia lui Bessel

În continuare, prezentăm câteva tipuri de ecuaţii care se reduc la ecuaţia lui Bessel prin schimbarea variabilei sau a funcţiei necunoscute.

Tip A Ecuaţia

$$t^2x'' + tx' + (b^2t^2 - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuaţia lui Bessel prin schimbarea de variabilă $u = bt$, $b \neq 0$. Pentru cazul când $b = 0$ ecuaţia este de tip Euler.

3.5 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $t^2x'' + tx' + (4t^2 - 2)\,x = 0$.

Facem schimbarea de variabilă $u = 2t$. Avem

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot 2$$

$$x'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem

$$\frac{u^2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} + \frac{u}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + \left(u^2 - 2\right)x = 0$$

care este ecuaţia lui Bessel pentru $\nu = \sqrt{2}$ şi are soluţia

$$x(t) = AJ_{\sqrt{2}}(u) + BJ_{-\sqrt{2}}(u) = AJ_{\sqrt{2}}(2t) + BJ_{-\sqrt{2}}(2t).$$

Tip B Ecuaţia

$$t^2x'' + atx' + (b^2t^2 - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuaţia de tip A prin schimbarea de funcţie $x = t^{\frac{1-a}{2}}y$.

3.6 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $tx'' + (2p + 1)x' + tx = 0$.

Facem schimbarea de funcţie $x = t^{-p} \cdot y$. Avem $x' = -pt^{-p-1}y + t^{-p}y'$ şi $x'' = p(p + 1)t^{-p-2}y - 2pt^{-p-1}y' + t^{-p}y''$. Atunci ecuaţia devine

$$p(p+1)t^{-p-1}y - 2pt^{-p}y' + t^{-p+1}y'' - p(2p+1)t^{-p-1}y + (2p+1)t^{-p}y' + t^{-p+1}y = 0.$$

Înmulţind toată ecuaţia cu t^{p+1} obţinem

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - p^2)y = 0$$

care are soluţia generală $y(t) = AJ_p(t) + BY_p(t)$, deci

$$x(t) = A \cdot t^{-p} \cdot J_p(t) + B \cdot t^{-p} \cdot Y_p(t).$$

Tip C Ecuaţia

$$t^2x'' + atx' + (b^2t^m - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuaţia de tip B prin schimbarea de variabilă $t^m = u^2$.

3.7 Exemplu (Ecuaţia lui Airy)**.** Să se integreze ecuaţia $x'' + 9k^2tx = 0$.

Înmulţind cu t^2 rezultă $t^2x'' + 9k^2t^3x = 0$. Notăm $t^3 = u^2$. Avem

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}$$
$$x'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} \cdot \frac{9}{4} t + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{3}{4} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Ecuaţia devine

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} + \frac{u}{3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + 4k^2u^2x = 0.$$

Cu schimbarea de funcţie $x = u^{\frac{1}{3}}y$ rezultă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}y + u^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} = -\frac{2}{9}u^{-\frac{5}{3}}y + \frac{2}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + u^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}.$$

Ecuaţia se reduce la

$$u^2y'' + uy' + \left(4k^2u^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = 2ku$ avem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \cdot 2k$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = 4k^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}v^2}$$

Ecuaţia se transformă în

$$v^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}v^2} + v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} + \left(v^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

cu soluţia $y(v) = AJ_{\frac{1}{3}}(v) + BJ_{-\frac{1}{3}}(v)$. Ecuaţia iniţială are soluţia

$$x(t) = \sqrt{t}\left[A \cdot J_{\frac{1}{3}}(2kt\sqrt{t}) + B \cdot J_{-\frac{1}{3}}(2kt\sqrt{t})\right].$$

3.8 Exemplu. Ca şi o aplicaţie practică să determinăm când o vergea verticală, cu densitatea uniformă, liberă la un capăt şi incastrată la celălalt se îndoaie datorită propriei greutăţi. Fie $x = 0$ la capătul liber al vergelei şi fie $x = L > 0$ la bază. Fie $\theta(x)$ unghiul deviaţiei vergelei în punctul x. Din teoria elasticităţii se ştie că

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\,\theta\,x = 0,$$

unde $\lambda = \frac{g\rho}{EI}$, g fiind acceleraţia gravitaţională, ρ densitatea vergelei, E modulul lui Young de elasticitate al materialului din care e făcută vergeaua şi I momentul de inerţie în secţiune transversală. Din motive fizice sunt verificate următoarele condiţii:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0,$$

pentru că nu există îndoire la capătul liber al vergelei şi nu există deviere la capătul fix.

Conform calculelor din exemplul anterior, soluţia generală a ecuaţiei este

$$\theta(x) = \sqrt{x}\left[A \cdot J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot x\sqrt{x}\right) + B \cdot J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot x\sqrt{x}\right)\right].$$

Pentru a aplica condiţiile iniţiale, ţinem cont de dezvoltările

$$J_{\frac{1}{3}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1+1/3)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1/3} = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})}\left(\frac{t}{2}\right)^{2+\frac{1}{3}} + \dots$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1-1/3)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1/3} = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})}\left(\frac{t}{2}\right)^{2-\frac{1}{3}} + \dots$$

şi obţinem

$$\theta(x) = \frac{A\lambda^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{4}{3})}\left(x - \frac{\lambda}{12}x^4 + \dots\right) + \frac{B3^{\frac{1}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})}\left(1 - \frac{\lambda}{6}x^3 + \dots\right)$$

Condiţia $\theta'(0) = 0$ ne arată că $A = 0$. Avem

$$\theta(x) = B\sqrt{x} \cdot J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot x\sqrt{x}\right).$$

Condiţia $\theta(L) = 0$ ne dă $J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot L^{\frac{3}{2}}) = 0$. Vergeaua se va îndoi dacă $t = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot L^{\frac{3}{2}}$ este soluţie a ecuaţiei $J_{-\frac{1}{3}}(t) = 0$. Funcţia $J_{-\frac{1}{3}}$ are o infinitate de zerouri pe $(0, \infty)$. Prima rădăcină pozitivă este $t_1 \approx 1,86635$. Vergeaua va începe să se îndoaie pentru o lungime a vergelei mai mare decât:

$$L_1 = \left(\frac{3t_1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,986 \cdot \left(\frac{EI}{g\rho}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tip D Ecuaţia

$$x'' + ax' + (b^2e^{mt} - c^2)x = 0$$

se reduce la o ecuaţie de tip C prin schimbarea de variabilă $e^t = u$.

3.9 Exemplu. Să se integreze ecuaţia $x'' + (e^{2t} - a^2)x = 0$.

Notăm $e^t = u$. Avem

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot e^t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot u$$

$$x'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot e^t\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} \cdot e^{2t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot e^t = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} \cdot u^2 + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot u.$$

Ecuaţia se transformă în

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} + u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + (u^2 - a^2)x = 0$$

cu soluţia $x(u) = AJ_a(u) + BY_a(u)$ şi deci

$$x(t) = A \cdot J_a(e^t) + B \cdot Y_a(e^t).$$

Tip E Ecuaţia de tip Riccati

$$bx' = at^n + x^2$$

se transformă într-o ecuaţie de tip C prin schimbarea de funcţie $x = -\frac{b}{y} \cdot y'$.

3.10 Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy $x' = t^2 + x^2$, $x(0) = 0$.

Prin schimbarea de funcţie $x = -y'/y$, avem

$$\begin{aligned} y' &= -xy \\ y'' &= -xy' - x'y = x^2 y - y(t^2 + x^2) = -yt^2 \end{aligned}$$

Am ajuns la ecuaţia $y'' + t^2 y = 0$ care este echivalentă cu $t^2 y'' + t^4 y = 0$ care este de tip C. Notăm $u = t^2$. Avem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot 2t \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} \cdot 4t^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot 2 \end{aligned}$$

Ecuaţia devine

$$u^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} + \frac{u}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + \frac{u^2}{4} \cdot y = 0.$$

Cu schimbarea de funcţie $y = u^{\frac{1}{4}} \cdot z$ avem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} &= \frac{1}{4} u^{\frac{1}{4}-1} \cdot z + u^{\frac{1}{4}} \cdot z' \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} &= -\frac{3}{9} u^{\frac{1}{4}-2} \cdot z + \frac{1}{2} u^{\frac{1}{4}-1} \cdot z' + u^{\frac{1}{4}} \cdot z''. \end{aligned}$$

Ecuaţia devine

$$u^2 z'' + uz' + \left(\frac{u^2}{4} - \frac{1}{16}\right) z = 0.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = 2v$ ecuaţia se scrie

$$v^2 z'' + vz' + \left(v^2 - \frac{1}{16}\right) z = 0,$$

cu soluţia $z = A \cdot J_{1/4}(v) + B \cdot J_{-1/4}(v)$. Soluţia iniţială este

$$y(t) = \sqrt{t} \cdot \left[A \cdot J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) + B \cdot J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right].$$

Pentru a obţine pe $x = -y'/y$ calculăm derivata lui y. Să observăm că

$$\left(\sqrt{t}\cdot J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n+\frac{1}{4}+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+\frac{1}{4}}\cdot\left(t^{4n+1}\right)'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n+\frac{1}{4}+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+\frac{1}{4}}\cdot 4\left(n+\frac{1}{4}\right)\cdot t^{4n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n+\frac{1}{4})}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+\frac{1}{4}-1}\cdot t^{4n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n+1-\frac{3}{4})}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-\frac{3}{4}}\cdot t^{2(2n-\frac{3}{4})}\cdot t^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}}\cdot J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{t}\cdot J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n-\frac{1}{4}+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-\frac{1}{4}}\cdot\left(t^{4n}\right)'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n-\frac{1}{4}+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-\frac{1}{4}}\cdot 4n\cdot t^{4n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\cdot\Gamma(n-\frac{1}{4}+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-\frac{1}{4}-1}\cdot t^{4(n-1)+3}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m!\cdot\Gamma(m+1+\frac{3}{4})}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m+\frac{3}{4}}\cdot t^{2(2m+\frac{3}{4})}\cdot t^{\frac{3}{2}} = -t^{\frac{3}{2}}\cdot J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Deducem că

$$x(t) = t\cdot\frac{BJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) - AJ_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}{AJ_{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) + BJ_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Pentru că $x(0) = -\frac{2A\Gamma(\frac{3}{4})}{B\Gamma(\frac{1}{4})}$ şi $x(0) = 0$ rezultă $A = 0$ şi

$$x(t) = t\cdot\frac{J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

3.4 Exerciţii

Probleme propuse

3.1. Să se aplice metoda seriilor de puteri pentru integrarea ecuaţiei

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0.$$

Polinomul de grad n care este soluţie a acestei ecuaţii se numeşte ***polinomul lui Legendre***.

3.2. Să se arate că $(J_0(t))' = -J_1(t)$.

3.3. Să se demonstreze relaţia $(t^\nu J_\nu(t))' = t^\nu J_{\nu-1}(t)$.

3.4. Să se expliciteze $J_{\frac{1}{2}}(t)$ şi $J_{-\frac{1}{2}}(t)$.

3.5. Să se determine soluţiile ecuaţiilor

a) $t^2x'' - tx' + (1+t^2)x = 0$

b) $tx'' + 5x' + tx = 0$

c) $tx'' - x' + 36t^3x = 0$

d) $t^2x'' - 5tx' + (8+t)x = 0$

e) $36t^2x'' + 60tx' + (9t^3 - 5)x = 0)$

f) $16t^2x'' + 24tx' + (1 + 144t^3)x = 0$

g) $t^2x'' + 3tx' + (1+t^2)x = 0$

h) $4t^2x'' - 12tx' + (15 + 16t)x = 0$

i) $16t^2x'' - (5 - 144t^3)x = 0$

j) $2t^2x'' - 3tx' - 2(14 - t^5)x = 0$

k) $x'' + t^4x = 0$

l) $x'' + 4t^3x = 0$

m) $tx'' + 2x' + tx = 0$

n) $t^4x'' + 25x = 0$

Indicaţii la problemele propuse

3.1. Căutăm soluţia sub forma $x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{m+r}$. Se obţin relaţiile

$$c_0 r(r-1) = 0,$$
$$c_1(r+1)r = 0,$$
$$c_{m+2} = \frac{(m+r-n)(m+r+n+1)}{(m+r+1)(m+r+2)} c_m.$$

Presupunând că $c_0 \neq 0$ şi $c_1 \neq 0$ se obţine $r = 0$ şi

$$c_{2k+2} = \frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+1)(2k+2)} c_{2k}, \qquad c_{2k+3} = \frac{(2k+1-n)(2k+2+n)}{(2k+2)(2k+3)} c_{2k+1}, \quad k \geq 0.$$

Atunci

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!} c_0$$
$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!} c_1.$$

şi ecuaţia are două soluţii independente

$$x_1(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!} t^{2k}$$
$$x_2(t) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Dacă n este par atunci x_1 este polinom de grad n, iar x_2 este o serie infinită. Dacă n este impar, atunci x_2 este polinom de grad n, iar x_1 este o serie infinită.

3.2. Avem

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

şi

$$(J_0(t))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1}.$$

Cu schimbarea de indice $n-1=m$ rezultă

$$J_0'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} = -J_1(t).$$

3.3. Avem

$$(t^\nu J_\nu(t))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(\nu+n+1)} \frac{t^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot(n+\nu)\Gamma(\nu+n)} \frac{2(n+\nu)t^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(\nu+n)} \frac{t^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}} = t^\nu J_{\nu-1}(t).$$

3.4. Avem

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t \qquad J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

Într-adevăr,

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

Dar

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \cdots = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}.$$

Atunci

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$$

şi

$$J_{-\frac{1}{2}}(t) = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(t)\right)' = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

3.5. Prin schimbări de variabile şi de funcţii se ajunge la ecuaţia lui Bessel.

a) B, $x=ty$, $x(t)=t\left[AJ_0(t)+BY_0(t)\right]$ b) B, $x=t^{-1}y$, $x=t^{-1}\left[AJ_1(t)+BY_1(t)\right]$

c) C, $u=t^2$, B, $x=ty$, A, $v=3u$,

$$x(t) = t\left[AJ_{\frac{1}{2}}(3t^2) + BJ_{-\frac{1}{2}}(3t^2)\right] = C\sin(3t^2) + D\cos(3t^2)$$

d) C, $u=\sqrt{t}$, B, $x=t^3y$, A, $v=2u$, $x(t)=t^3\left[AJ_2(2\sqrt{t})+BY_2(2\sqrt{t})\right]$

e) C, $u=t\sqrt{t}$, B, $x=t^{-\frac{1}{3}}y$, A, $v=\frac{1}{3}u$, $x(t)=t^{-\frac{1}{3}}\left[AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+BJ_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right]$.

f) C, $u=t\sqrt{t}$, B, $x=t^{-\frac{1}{4}}y$, A, $v=2u$, $x(t)=t^{-\frac{1}{4}}\left[AJ_0\left(2t^{\frac{3}{2}}\right)+BY_0\left(2t^{\frac{3}{2}}\right)\right]$.

g) B, $x=t^{-1}y$, $x(t)=t^{-1}\left[AJ_0\left(t\right)+BY_0\left(t\right)\right]$.

h) C, $u=\sqrt{t}$, B, $x=t^2y$, A, $v=4u$, $x(t)=t^2\left[AJ_1\left(4t^{\frac{1}{2}}\right)+BY_1\left(4t^{\frac{1}{2}}\right)\right]$.
i) C, $u=t\sqrt{t}$, B, $x=t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v=2u$, $x(t)=At^{-\frac{1}{4}}\sin(2t\sqrt{t})+Bt^{-\frac{1}{4}}\sin(2t\sqrt{t})$.
j) C, $u=t^2\sqrt{t}$, B, $x=t^{-\frac{1}{4}}y$, A, $v=\frac{2}{5}u$, $x(t)=t^{-\frac{1}{4}}\left[AJ_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)+BJ_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\right]$.
k) C, $u=t^3$, B, $x=t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v=\frac{1}{3}u$, $x(t)=t^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{3}t^3\right)+BJ_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{3}t^3\right)\right]$.
l) C, $u=t^2\sqrt{t}$, B, $x=t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v=\frac{4}{5}u$, $x(t)=t^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)+BJ_{-\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\right]$.
m) B, $x=t^{-1}y$, $x(t)=t^{-1}\left[A\sin t+B\cos t\right]$.
n) C, $u=t^{-1}$, B, $x=t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v=5u$, $x(t)=t\left[A\sin\frac{5}{t}+B\cos\frac{5}{t}\right]$.

Capitolul 4

Sisteme de ecuaţii diferenţiale

4.1 Sisteme normale

4.1 Definiţie. *Se numeşte* **sistem normal** *un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi de forma*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

unde $x_1, \ldots, x_n \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval nevid, iar* $f_1, \ldots, f_n$ *sunt funcţii definite pe* $I \times \mathbb{R}^n$.

4.2 Exemplu (Modelul pradă-prădător sau Ecuaţiile Lotka-Volterra)**.** Acest model a fost propus iniţial în 1910 de A. Lotka în studiul reacţiilor chimice, iar apoi independent a fost studiat de matematicianul V. Volterra în anii 1920 în analiza statistică a tipurilor de peşti din Marea Adriatică. Fie $x(t)$ numărul populaţiei pradă la momentul de timp t şi $y(t)$ numărul prădătorilor. Pentru a obţine un model cât mai simplu facem următoarele presupuneri:

1. în absenţa prădătorilor, populaţia pradă creşte cu rata $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ax,\ a > 0$.
2. în absenţa pradei, populaţia prădătorilor scade cu rata $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -by,\ b > 0$.
3. când ambele populaţii sunt prezente, consumul pradei de către prădători duce la o scădere în x proporţională cu xy (adică $-pxy,\ p > 0$) şi o creştere în y proporţională cu xy (adică $qxy,\ q > 0$); motivul pentru care am luat proporţionalitate cu produsul dintre x şi y este următorul: dacă oricare din populaţii se dublează, frecvenţa întâlnirilor dintre populaţii se dublează, iar dacă ambele populaţii se dublează, numărul întâlnirilor creşte de patru ori.

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} x' = ax - pxy \\ y' = -by + qxy. \end{cases}$$

4.3 Definiţie. *Se numeşte* **soluţie** *a sistemului normal pe intervalul I o funcţie vectorială $X = (x_1, \dots, x_n)$ ce verifică egalităţile*

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \qquad \textit{pentru orice } i \textit{ de la 1 la } n \textit{ şi orice } t \in I.$$

4.4 Definiţie. *Se numeşte* **problemă Cauchy** *cerinţa determinării unei soluţii a sistemului care verifică condiţiile iniţiale:*

$$x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad t_0 \in I, \; \textit{şi } x_{i,0} \in \mathbb{R}.$$

4.5 Observaţie. Pentru un vector de funcţii $x_i \in C^1(I)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \text{definim} \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \dots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \text{ şi } \int X \,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int x_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \dots \\ \int x_n(t)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

Sistemul se poate scrie sub formă vectorială

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X) \text{ cu condiţia iniţială } X(t_0) = X_0.$$

4.6 Teoremă (Teoremă de existenţă şi unicitate)**.** *Dacă funcţiile $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe $D = \{\, (t, x_1, \dots, x_n) \,|\, t \in [t_0 - a, t_0 + a],\; x_i \in [x_{i,0} - b_i, x_{i,0} + b_i] \,\}$ şi lipschitziene în raport cu $x_1, \dots, x_n$ pe D atunci există o unică soluţie a problemei Cauchy*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X) \textit{ cu condiţia iniţială } X(t_0) = X_0.$$

definită pe intervalul $[t_0 - h, t_0 + h]$ unde $h = \min(a, b_i/M)$ cu $M = \max |f_i(t, x_1, \dots, x_n)|$.

Demonstraţie. Demonstraţia este analoagă cu cea din cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi. □

4.7 Observaţie. O ecuaţie de ordin superior $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Deci teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme se aplică şi unei astfel de ecuaţii.

4.2 Sisteme liniare cu coeficienţi constanţi

Un sistem liniar cu coeficienţi constanţi se poate scrie sub forma matriceală:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + F,$$

unde A este o matrice de $n \times n$ cu elemente numere reale, iar F este o matrice coloană de $n \times 1$, care are ca şi elemente, funcţiile $f_i(t) \in C(I)$ definite pe un interval real nevid I.

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Dacă $F = 0$, atunci sistemul este liniar omogen.

Vom prezenta în continuare trei metode de rezolvare: prima, metoda eliminării succesive a funcţiilor necunoscute, a doua, metoda vectorilor şi valorilor proprii, iar a treia metoda matriceală. Vom descrie pe scurt cele trei metode şi le vom ilustra prin câteva exemple.

Metoda eliminării succesive a necunoscutelor

Această metodă constă în a obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n pentru una din funcţiile necunoscute ale sistemului prin eliminarea celorlalte necunoscute.

4.8 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Derivăm prima ecuaţie şi obţinem

$$x'' = x' + 3y' + 2e^t = 10x + 6y + 7e^t + 3e^{-2t}.$$

Eliminăm pe y, înmulţind prima ecuaţie a sistemului cu -2 şi adunând la relaţia obţinută anterior. Rezultă ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi:

$$x'' - 2x' - 8x = 3e^t + 3e^{-2t},$$

care are soluţia generală

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

Din prima ecuaţie a sistemului, se obţine

$$y = \frac{1}{3}(x' - x - 2e^t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

4.9 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Metoda I

Eliminăm funcţiile y şi z. Pentru aceasta, rescriem prima ecuaţie $4x - x' = y + 2z$. Prin derivare, avem

$$4x' - x'' = y' + 2z' = 2x + y - 2z + 2(x - y + z) = 4x - y.$$

Mai derivăm încă o dată relaţia obţinută

$$4x'' - x''' = 4x' - (2x + y - 2z) = 4x' - 2x - y + 2z.$$

Rezolvăm sistemul în necunoscutele y şi z

$$\begin{cases} y + 2z &= 4x - x' \\ -y &= 4x' - x'' - 4x \\ -y + 2z &= 4x'' - x''' - 4x' + 2x \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

este 2. Pentru a avea un sistem compatibil, rangul matricei extinse este tot 2, adică determinantul ei de ordinul 3 este zero. Obţinem ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x - x' \\ -1 & 0 & 4x' - x'' - 4x \\ -1 & 2 & 4x'' - x''' - 4x' + 2x \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. Folosind schema lui Horner obţinem

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0
2	1	-3	0	
3	1	0		

rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ şi $r_3 = 3$. Atunci $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. Folosind relaţia $y = 4x + x'' - 4x'$ rezultă $y = C_1e^t + C_3e^{3t}$, iar din $2z = 3x' - x''$ se obţine $z = C_1e^t + C_2e^{2t}$.

Metoda II

Eliminăm funcţiile x şi z. Pentru aceasta, rescriem a doua ecuaţie $y' - y = 2x - 2z$. Prin derivare, avem

$$y'' - y' = 2x' - 2z' = 2(4x - y - 2z) - 2(x - y + 2) = 6x - 6z.$$

Derivând încă o dată, se obţine

$$y''' - y'' = 18x - 18z.$$

Rezolvăm sistemul în necunoscutele x şi z

$$\begin{cases} 2x - 2z &= y' - y \\ 6x - 6z &= y'' - y' \\ 18x - 18z &= y''' - y'' \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -6 \\ 18 & -18 \end{bmatrix}$$

este 1. Pentru a avea un sistem compatibil, rangul matricei extinse este tot 1, adică determinantul ei de ordinul 3 este zero şi toţi minorii de ordinul 2 sunt de asemenea zero. Obţinem ecuaţiile

$$\begin{vmatrix} 2 & y'-y \\ 6 & y''-y' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & y'-y \\ 18 & y'''-y'' \end{vmatrix} = 0$$

adică $y'' - 4y' + 3y = 0$ şi $y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$. Ecuaţiile caracteristice sunt $r^2 - 4r + 3 = 0$ şi $r^3 - r^2 - 9r + 9 = 0$. Prima ecuaţie are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 3$, iar cea de-a doua rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ şi $r_3 = -3$. Rădăcinile comune sunt $r_1 = 1$ şi $r_2 = 3$. Atunci $y = C_1e^t + C_3e^{3t}$. Folosind faptul că $2x - 2z = y' - y = 2C_3e^{3t}$ în prima ecuaţie a sistemului rezultă ecuaţia $x' - 2x = C_3e^{3t} - C_1e^t$. Rezolvând această ecuaţie liniară neomogenă găsim soluţia $x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t} + C_1e^t$. În final, din $x - z = C_3e^{3t}$ obţinem $z = C_1e^t + C_2e^{2t}$.

Metoda valorilor şi vectorilor proprii

Rezolvăm întâi sistemul omogen $X' = AX$. Căutăm soluţia sub forma

$$X = ve^{rt}, \tag{4.1}$$

unde v este o matrice coloană de $n \times 1$ cu elemente numere reale. Atunci $X' = rve^{rt} = rX$. Sistemul $X' = AX$ este echivalent cu sistemul algebric

$$(A - rI_n)v = O_n. \tag{4.2}$$

Acest sistem are soluţii nebanale, dacă $\det(A - rI_n) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A, notate $r_1, \dots, r_n$. Considerăm spaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii r_i

$$V_i = \{\, v \mid (A - r_iI_n)v = O_n \,\}, \quad i \in \{\, 1, \dots, n \,\}.$$

Avem mai multe cazuri posibile.

I. Matricea A are valori proprii numere reale distincte. Pentru fiecare valoare proprie r_i se calculează vectorul propriu corespunzător v_i, rezolvând sistemul (4.2) pentru $r = r_i$. Dimensiunea fiecărui spaţiu V_i este 1, deci $V_i = C_iv_i$, unde C_i este o variabilă reală , iar componentele vectorului propriu v_i sunt numere reale fixe. Soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale corespunzătoare valorii proprii r_i este $X = C_iv_ie^{r_it}$. Soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale este

$$X = C_1v_1e^{r_1t} + \dots + C_nv_ne^{r_nt}.$$

II. Matricea A are două valori proprii complex conjugate $r_{1,2} = a \pm bi$ cu ordinul 1 de multiplicitate. Atunci vectorii proprii corespunzători, sunt vectori conjugaţi $v_{1,2} = p \pm iq$, unde p, q sunt vectori coloană de numere reale. Pentru că $Y_1 = v_1e^{r_1t}$ şi $Y_2 = v_2e^{r_2t}$ sunt soluţii, atunci şi $X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = \operatorname{Re} Y_1$ şi $X_2 = -\frac{i}{2}(Y_1 - Y_2) = \operatorname{Im} Y_1$ vor fi soluţii. Aşadar, corespunzător valorilor proprii $r_{1,2}$, la soluţia generală a sistemului se adaugă

$$C_1X_1 + C_2X_2 = C_1e^{at}(p\cos bt - q\sin bt) + C_2e^{at}(q\cos bt + p\sin bt).$$

III. Matricea A are o valoare proprie reală $r = r_i$ care se repetă de $m \geq 2$ ori. Fie d dimensiunea spaţiului V_i. În general avem $1 \leq d \leq m$. Dacă $m = d$ atunci din spaţiul V_i se pot alege vectorii proprii liniari independenţi $v_1, \dots, v_m$. La soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale, corespunzător valorii proprii r_i, se adaugă soluţia

$$X_i = (C_1v_1 + \cdots + C_mv_m)e^{rt}.$$

Dacă $d < m$, fie $k = m - d$. Atunci din spaţiul V_i se pot alege d vectori proprii liniari independenţi, $v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ astfel încât v_d să aibă proprietatea că sistemul $(A - r_iI_n)v = v_d$ este compatibil. Soluţia sistemului $(A - r_iI_n)v = v_d$ este primul vector asociat v_{d+1}. Vectori asociaţi $v_{d+2}, \dots, v_{d+k} = v_m$ se determină rezolvând, pe rând, sistemele $(A - r_iI_n)v_{d+2} = v_{d+1}, \dots,$ $(A - r_iI_n)v_{d+k} = v_{d+k-1}$. La soluţia sistemului se adaugă soluţia

$$X_i = (C_1v_1 + \cdots + C_dv_d)e^{rt} + C_{d+1}(v_{d+1} + tv_d)e^{rt} + C_{d+2}\left(v_{d+2} + tv_{d+1} + \frac{t^2}{2!}v_d\right)e^{rt} + \dots$$
$$+ C_{d+k}\left(v_{d+k} + v_{d+k-1}t + \cdots + \frac{t^k}{k!}v_d\right)e^{rt}.$$

IV. Matricea A are două valori proprii complexe conjugate care se repetă de $m \geq 2$ ori. În acest caz se consideră partea reală şi imaginară a soluţiilor obţinute la cazul III.

Fie X_o soluţia ecuaţiei omogene $X' = AX$. Procedând ca şi în cazul ecuaţiilor liniare neomogene, se determină o soluţie particulară X_p. Soluţia generală a sistemului $X' = AX + F$ este $X = X_o + X_p$.

4.10 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A se determină rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-r & 3 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt $r_1 = -2$ şi $r_2 = 4$. Înlocuind $r = -2$ în sistemul $(A - rI_2)v = 0$, unde v este vectorul coloană $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, obţinem $3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\beta = -\alpha$. Luând $\alpha = C_1$, rezultă vectorul propriu corespunzător şi deci soluţia corespunzătoare

$$X_1 = C_1e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pentru $r = 4$ sistemul (4.2) se reduce la $-3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\alpha = \beta$. Luând $\alpha = C_2$, rezultă

$$X_2 = C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia sistemului omogen este

$$X_o = X_1 + X_2 = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a rezolva sistemul neomogen, descompunem pe F într-o formă convenabilă:

$$F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Soluţia particulară X_{p_1} o alegem de forma

$$X_{p_1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^t.$$

Înlocuind în sistemul iniţial se obţine $A = -\frac{1}{3}$ şi $B = -\frac{2}{3}$. Soluţia X_{p_2} se caută de forma

$$X_{p_2} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \end{bmatrix} e^{-2t},$$

deoarece -2 este valoare proprie. Înlocuind în sistemul neomogen $X' = AX + F$ se obţine $A = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ şi $B + D = -\frac{1}{6}$. Putem alege $B = 0$ şi $D = -\frac{1}{6}$ (altfel se renotează $C_1 := C_1 + B$ şi se ajunge la aceeaşi formă a rezultatului). Soluţia generală a sistemului va fi

$$X = X_o + X_{p_1} + X_{p_2} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} e^{-2t} \begin{bmatrix} 3t \\ -3t + 1 \end{bmatrix}.$$

4.11 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}.$$

Căutăm soluţia sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^{rt}.$$

Prin derivare $X' = rX$. Atunci $X' = AX$ este echivalent cu $rX = AX$ adică $(A - rI_3)X = O_3$. Sistemul acesta omogen are soluţii nebanale dacă $\det(A - rI_3) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii reprezintă valorile proprii ale matricei A. Determinăm acum valorile proprii ale matricei A rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 & -2 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 1 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând a doua coloană la prima avem

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & -2 \\ 3-r & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = (3-r)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-r)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-r & 0 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix}.$$

Obţinem $(3-r)(2-r)(1-r) = 0$, cu soluţiile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ şi $r_3 = 3$. Vectorul propriu corespunzător lui r_1 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha & -\beta & -2\gamma & = 0 \\ 2\alpha & & -2\gamma & = 0 \\ \alpha & -\beta & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha = \gamma \\ \alpha = \beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător lui r_2 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_2 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iar vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se obţine din sistemul

$$(A - r_3 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4.12 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y - 3z \\ y' = -x - 2y - 3z \\ z' = 3x + 15y + 12z. \end{cases}$$

Determinăm valorile proprii ale matricei sistemului, rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ -1 & -2-r & -3 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = 0.$$

Scăzând primele două linii, se obţine

$$\begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ 3-r & -3+r & 0 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = (r-3)\begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = (r-3)\begin{vmatrix} -3-r & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă ecuaţia $(r-3)(r^2-9r+18)=0$ cu rădăcinile $r_{1,2}=3$ şi $r_3=6$. Determinăm vectorii proprii corespunzători valorilor $r_{1,2}$ din

$$(A-r_1I)\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha-5\beta-3\gamma=0\\ -\alpha-5\beta-3\gamma=0\\ 3\alpha+5\beta+9\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=-5\beta-3\gamma\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}-5\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se obţine din sistemul

$$(A-r_3I)\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\alpha-5\beta-3\gamma=0\\ -\alpha-8\beta-3\gamma=0\\ 3\alpha+15\beta+6\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\gamma=-3\alpha\\ \alpha=\beta\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=C_1e^{3t}\begin{bmatrix}-5\\1\\0\end{bmatrix}+C_2e^{3t}\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}+C_3e^{6t}\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

4.13 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases}x'=-2x-y+z\\ y'=5x-y+4z\\ z'=5x+y+2z.\end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X'=A\cdot X$, unde $A=\begin{bmatrix}-2&-1&1\\5&-1&4\\5&1&2\end{bmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei A, rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix}-2-r&-1&1\\5&-1-r&4\\5&1&2-r\end{vmatrix}=0.$$

Scădem din linia a treia, linia a doua şi adunăm a doua coloană la a treia:

$$\begin{vmatrix}-2-r&-1&1\\5&-1-r&4\\0&2+r&-2-r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2-r&-1&0\\5&-1-r&3-r\\0&2+r&0\end{vmatrix}=(3-r)(2+r)^2=0.$$

Obţinem soluţiile $r_1=-2$, $r_2=-2$ şi $r_3=3$. Căutăm doi vectori corespunzători valorii duble $r_1=r_2=-2$. Avem

$$(A-r_1I)\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\beta+\gamma=0\\ 5\alpha+\beta+4\gamma=0\\ 5\alpha+\beta+4\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=\gamma\\ \beta=-\alpha\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Fiindcă am obţinut un singur vector propriu, determinăm vectorul asociat rezolvând sistemul

$$(A-r_1I)\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\beta+\gamma=1\\ 5\alpha+\beta+4\gamma=-1\\ 5\alpha+\beta+4\gamma=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=\gamma-1\\ \gamma=-\alpha\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se determină din

$$(A - r_3 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -5\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha - 4\beta + 4\gamma = 0 \\ 5\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = \gamma \\ \alpha = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.14 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -4x - 2y + z \\ z' = 4x + y - 2z. \end{array} \right.$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale matricei, rezolvând ecuaţia

$$0 = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 4 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 0 & -1-r & -1-r \end{vmatrix} = -(1+r) \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -3-r & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Obţinem ecuaţia $(r+1)(r^2+2r+1) = 0$, cu rădăcinile $r_1 = r_2 = r_3 = -1$. Căutăm trei vectori corespunzători valorii triple $r_{1,2,3} = -1$. Avem

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = -2\alpha \\ \gamma = 2\alpha \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primul vector asociat se determină din

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \beta = 1 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = -2 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = -2\alpha + 1 \\ \gamma = 2\alpha - 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Primul vector asociat este $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right]$. Al doilea vector asociat se obţine din sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = -2\alpha \\ \gamma = 2\alpha + 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

4.15 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = 3x - y + 3z \\ z' = 8x - 8y + 10z. \end{cases}$$

Determinăm valorile proprii ale matricei sistemului, rezolvând ecuaţia

$$0 = \begin{vmatrix} -3-r & 5 & -5 \\ 3 & -1-r & 3 \\ 8 & -8 & 10-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-r & 2-r & -2+r \\ 3 & 2-r & 0 \\ 8 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r)^3.$$

Matricea sistemului are valoarea proprie triplă $r_{1,2,3} = 2$. Aflăm vectorii corespunzători rezolvând mai întâi sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha + 5\beta - 5\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 8\alpha - 8\beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta - \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alegem acum un vector propriu din cei doi vectori obţinuţi. Fie de exemplu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Cel de-al doilea vector propriu îl alegem încât sistemul

$$(A - r_1 I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

să fie compatibil. Avem

$$\begin{cases} -5\alpha_1 + 5\beta_1 - 5\gamma_1 = \beta - \gamma \\ 3\alpha_1 - 3\beta_1 + 3\gamma_1 = \beta \\ 8\alpha_1 - 8\beta_1 + 8\gamma_1 = \gamma. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil dacă este respectată condiţia $3\gamma = 8\beta$. Scriind

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\beta}{3} \\ \beta \\ \frac{8\beta}{3} \end{bmatrix} = \frac{\beta}{3} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

obţinem ce de-al doilea vector propriu $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$. Vectorul asociat îl găsim rezolvând sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha + 5\beta - 5\gamma = -5 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 3 \\ 8\alpha - 8\beta + 8\gamma = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta - \gamma + 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluţia sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \left(t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

4.16 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z \\ y' = x - 4y + 9z \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii, rezolvând ecuaţia

$$0 = \begin{vmatrix} 4-r & -5 & 7 \\ 1 & -4-r & 9 \\ -4 & 0 & 5-r \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -4-r & 9 \end{vmatrix} + (5-r) \begin{vmatrix} 4-r & -5 \\ 1 & -4-r \end{vmatrix}$$

$$= -4(-45 + 28 + 7r) + (5-r)(r^2 - 16 + 5).$$

Obţinem ecuaţia $-r^3 + 5r^2 - 17r + 13 = 0$. Folosind schema lui Horner obţinem

	-1	5	-17	13
1	-1	4	-13	0

soluţia $r_1 = 1$ şi ecuaţia $-r^2 + 4r - 13 = 0$, cu soluţiile $r_2 = 2 + 3i$ şi $r_3 = 2 - 3i$. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_1 se determină din

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 5\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - 5\beta + 9\gamma = 0 \\ -4\alpha + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma = \alpha \\ \beta = 2\alpha \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorii proprii pentru r_2 şi r_3 îi căutăm rezolvând sistemul

$$(A - r_2 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-3i)\alpha - 5\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - (6+3i)\beta + 9\gamma = 0 \\ -4\alpha + (3-3i)\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = \delta(3-3i) \\ \beta = \delta(5-3i) \\ \gamma = 4\delta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vector propriu pentru r_2 este $\left[\begin{smallmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$. Pentru că r_3 este conjugata valorii proprii r_2 şi vectorul propriu corespunzător va fi conjugatul celuilalt, şi anume $\left[\begin{smallmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$. Putem scrie soluţia sub forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix} + C_3 e^{(2-3i)t} \begin{bmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dar, făcând înmulţirea

$$e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix} = e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t) \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{2t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + i \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

şi considerând partea reală şi imaginară, soluţia se rescrie

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \left(\cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \left(\cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right).$$

Metoda matriceală

Pentru o matrice A de $n \times n$ numere reale şi un număr $t \in \mathbb{R}$ definim

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Să observăm că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{At} \right) = A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \cdots = A \left(I_n + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) = Ae^{At}.$$

Atunci scriind sistemul neomogen sub forma $X' - AX = F$ şi înmulţind la stânga această egalitate cu matricea nesingulară e^{-At} obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-At} X \right) = e^{-At} F.$$

Prin integrare

$$e^{-At} X = \int_0^t e^{-Au} F \, \mathrm{d}u + X_0, \qquad \text{unde} \qquad X_0 = X \Big|_{t=0}.$$

Soluţia generală a sistemului neomogen este

$$X = e^{At} \left[\int_0^t e^{-Au} F \, \mathrm{d}u \right] + e^{At} X_0.$$

În particular, soluţia sistemului omogen este

$$X_o = e^{At} X_0.$$

Totul revine la a calcula matricea exponenţială e^{At}. Să observăm că puterea k a matricei A se calculează utilizând forma Jordan $A = PJP^{-1}$:

$$A^k = A \cdot A \cdots A = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} \cdots PJP^{-1} = PJ^k P^{-1}.$$

Cu această reprezentare a matricei A^k avem

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k \cdot P^{-1} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}.$$

Cu ajutorul acesteia, soluţia sistemului omogen este

$$X_o = Pe^{Jt} C,$$

unde $C = P^{-1} X_0$. Soluţia sistemului neomogen se scrie

$$X = X_o + Pe^{Jt} \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, \mathrm{d}u.$$

4.17 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t F_1 + e^{-2t} F_2.$$

Matricea A se poate scrie

$$A = PJP^{-1}, \quad \text{unde} \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Avem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Soluţia ecuaţiei omogene este

$$X_o = Pe^{Jt}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Pentru a obţine soluţia neomogenă, scriem

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, \mathrm{d}u &= \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} \left(e^u F_1 + e^{-2u} F_2 \right) \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^t e^{-Ju} e^u \, \mathrm{d}u \cdot P^{-1} F_1 + \int_0^t e^{-Ju} e^{-2u} \, \mathrm{d}u \cdot P^{-1} F_2 \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3u} & 0 \\ 0 & e^{3u} \end{bmatrix} \mathrm{d}u \cdot P^{-1} F_1 + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-6u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}u \cdot P^{-1} F_2 \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 - e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} - 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 - e^{-6t} & 0 \\ 0 & 6t \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -e^{-6t} & 0 \\ 0 & 6t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + D, \quad D = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Soluţia particulară este

$$\begin{aligned}
X_p = Pe^{Jt} \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, \mathrm{d}u &= \frac{1}{6} P \begin{bmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} P \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 0 \\ 0 & 6te^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Pe^{Jt} D \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3e^t \\ e^t \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -6te^{-2t} \end{bmatrix} + Pe^{Jt} D \\
&= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 + 6t \\ 1 - 6t \end{bmatrix} e^{-2t} + Pe^{Jt} D.
\end{aligned}$$

Soluţia generală a sistemului este

$$X = X_o + X_p = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-2t} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

unde $E_1 = C_1 + D_1 = C_1 + \frac{7}{12}$ şi $E_2 = C_2 + D_2 - \frac{1}{12} = C_2 - \frac{1}{4}$.

4.18 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}.$$

Folosind calculele de la metoda II de rezolvare avem

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizând formula $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, adevărată pentru orice $z \in \mathbb{C}$, obţinem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Notând $P^{-1} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$ obţinem

$$X = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot X_0 = P \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.19 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 5x - y + 4z \\ z' = 5x + y + 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Folosind calculele de la metoda II de rezolvare avem

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad J^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Utilizând formula $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{n!}=ze^z$, obţinem

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-2)^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^n}{n!}(-2)^{n-1} & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-2)^n & 0\\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}3^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}.$$

Notând $P^{-1}X_0=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}$ obţinem

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}\\ -C_1e^{-2t}-C_2e^{-2t}-C_2te^{-2t}+C_3e^{3t}\\ -C_1e^{-2t}-C_2te^{-2t}+C_3e^{3t}\end{bmatrix}.$$

4.20 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases}x'=x+y\\ y'=-4x-2y+z\\ z'=4x+y-2z.\end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X'=A\cdot X$, unde

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Avem

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t}\\ 0 & e^{-t} & te^{-t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}.$$

Soluţia este $X=Pe^{Jt}C$, adică

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=C_1e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}+C_2e^{-t}\left(t\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)+C_3e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

4.21 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases}x'=4x-5y+7z\\ y'=x-4y+9z\\ z'=-4x+5z.\end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X'=A\cdot X$, unde

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Avem

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 2\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix},\quad e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\sin 3t\\ 0 & -e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t\end{bmatrix}.$$

Soluţia este $X=Pe^{Jt}C$, adică

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=C_1e^t\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+C_2\left(e^{2t}\cos 3t\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}+e^{3t}\sin 3t\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}\right)+C_3\left(e^{2t}\cos 3t\begin{bmatrix}-3\\-3\\0\end{bmatrix}+e^{3t}\sin 3t\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}\right).$$

4.3 Sisteme simetrice

4.22 Definiţie. Un sistem simetric *este un sistem scris sub forma*

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1,\ldots,x_{n+1})} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1,\ldots,x_{n+1})} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{f_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})},$$

unde $f_1,\ldots,f_{n+1}$ *nu se anulează simultan pentru* $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pentru rezolvarea sistemului se caută integrale prime.

4.23 Definiţie. *Se numeşte* **integrală primă** *a sistemului simetric, o funcţie* F *neconstantă ce ia valori constante pe orice soluţie a sistemului, adică*

$$F(x_1,\ldots,x_{n+1}) = C.$$

Pentru a rezolva sistemul simetric este nevoie de determinarea a n integrale prime independente, adică $F_1,\ldots F_n$ cu proprietatea că există n variabile (de exemplu $x_1,\ldots,x_n$) astfel încât determinantul

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să nu se anuleze. Teoretic aceasta înseamnă că din integralele prime respective se pot exprima variabilele $x_1,\ldots,x_n$ în funcţie de x_{n+1}.

Pentru a determina integrale prime folosim următoarele metode:

1. dacă două rapoarte depind doar de două necunoscute (eventual după simplificări) ele reprezintă o ecuaţie de ordinul întâi care se rezolvă;

2. dacă dintr-o integrală primă se poate exprima o necunoscută în funcţie de celelalte, se ajunge uneori la cazul anterior;

3. se fac combinaţii integrabile de forma

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{g_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + g_{n+1}\,\mathrm{d}x_{n+1}}{g_1 f_1 + \cdots + g_{n+1} f_{n+1}}$$

cu proprietatea că $g_1 f_1 + \cdots + g_{n+1} f_{n+1} = 0$ şi $g_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + g_{n+1}\,\mathrm{d}x_{n+1} = \mathrm{d}\omega$. Va rezulta că $d\omega = 0$ adică $\omega(x_1,\ldots,x_{n+1}) = C$ şi astfel am obţinut o integrală primă.

4.24 Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2 - y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{-y}.$$

Ultimele două rapoarte ne arată că $-y\,\mathrm{d}y = z\,\mathrm{d}z$. Integrând se obţine $-y^2/2 = z^2/2 + C_1$. După o redenumire a constantei obţinem $y^2 + z^2 = C_1$. Aceasta este prima integrală primă. Amplificând cu z al doilea raport şi cu y al treilea raport şi adunându-le se obţine

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2 - y^2} = \frac{z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z}{z^2 - y^2}.$$

După simplificarea numitorului avem $\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z \cdot y)$, de unde $x = zy + C_2$. Am găsit şi cea de-a doua integrală primă: $x - yz = C_2$.

Soluţia sistemului este

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = C_1, \\ x - yz = C_2. \end{cases}$$

4.25 Exemplu. Să se integreze sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y}.$$

Adunând toate trei rapoartele şi scăzând din primul raport celelalte rapoarte rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{2(x+y+z)} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{y-x} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}z}{z-x}.$$

Ultimile două rapoarte prin integrare ne dau $x - y = C_1(x - z)$, iar din penultimele deducem

$$\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)} = -2\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} \Rightarrow \ln(x+y+z) = -2\ln(x-y) + \ln C_2 \Rightarrow\ x+y+z = \frac{C_2}{(x-y)^2}.$$

Soluţia sistemului este

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x-z} = C_1, \\ (x-y)^2(x+y+z) = C_2. \end{cases}$$

4.26 Exemplu. Să se rezolve următorul sistem normal aducându-l sub forma simetrică

$$\begin{cases} y' = y(y+z) \\ z' = z(y+z). \end{cases}$$

Forma simetrică a sistemului este

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y+z)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(y+z)} = \mathrm{d}x.$$

Din primele două rapoarte avem $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$. Prin integrare $\ln y = \ln z + \ln C_1$, adică $y = zC_1$. Înlocuind pe y obţinem

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(y+z)} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2(C_1+1)} = \mathrm{d}x.$$

Integrând, avem $-\frac{1}{z(C_1+1)} = x - C_2$. Rezultă a doua integrală primă $x + \frac{1}{y+z} = C_2$.

Soluţia sistemului este

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = C_1, \\ x + \dfrac{1}{y+z} = C_2. \end{cases}$$

4.4 Exerciţii

Probleme propuse

4.1. Să se integreze sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 3x - y + e^t + 3 \end{cases}$$

4.2. Să se integreze sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 3z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + 3y - z. \end{cases}$$

4.3. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 3x - 2y - 3z \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$$

4.4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = x + 4y + z \\ y' = 5x + 6y + 3z \\ z' = -9x - 12y - 5z. \end{cases}$$

4.5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 5\,x + 6y - 3z \\ y' = -x \qquad\quad + z \\ z' = \quad x + 2y + z. \end{cases}$$

4.6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y - 7z \\ y' = 2x + 5y - 5z \\ z' = 3x + 8y - 8z. \end{cases}$$

4.7. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z. \end{cases}$$

4.8. Să se integreze sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{-x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{yz}.$$

4.9. Să se integreze sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz^{p-1}} = \frac{\mathrm{d}y}{yz^{p-1}} = \frac{\mathrm{d}z}{-(x^p + y^p)}.$$

4.10. Să se rezolve sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{2xz} = \frac{\mathrm{d}y}{2yz} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Indicaţii la problemele propuse

4.1. $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^t$ şi $y = -3C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} + \frac{3}{2}$.

4.2. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} + C_3e^t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.4. Avem

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{2t}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} + C_3e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

4.5. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

4.6. Avem

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2e^{-t}\left(t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + C_3e^{-t}\left(t^2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

4.7. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2i & -2i & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_2 e^t \left(\cos 2t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.8. $\frac{x}{z} = C_1$ şi $x^2 + y^2 = C_2$. **4.9.** $\frac{x}{y} = C_1$ şi $x^p + y^p + z^p = C_2$.
4.10. $\frac{y}{x} = C_1$ şi $\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = C_2$.

Capitolul 5

Ecuaţii cu derivate parţiale

5.1 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

5.1 Notaţie. Vom folosi notaţia z'_x pentru derivata parţială a funcţiei z în raport cu x. În unele cursuri se foloseşte notaţia $\frac{\partial z}{\partial x}$ sau z_x în loc de z'_x.

Ecuaţii liniare şi omogene

5.2 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă** *o egalitate de forma*

$$X_1(x_1,\dots,x_n)\cdot z'_{x_1}+X_2(x_1,\dots,x_n)\cdot z'_{x_2}+\cdots+X_n(x_1,\dots,x_n)\cdot z'_{x_n}=0$$

unde $X_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue pe un domeniu* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *şi există cel puţin un indice* $i \in \{1,\dots,n\}$ *astfel încât* $X_i(x_1,\dots,x_n)$ *să fie diferit de zero pentru orice* $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

Pentru a rezolva această ecuaţie ataşăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}.$$

Putem presupune în continuare că X_1 este diferită de funcţia nulă.

5.3 Teoremă. *Fie* $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *o integrală primă a sistemului simetric ataşat. Atunci* $z = G(x_1,\dots,x_n)$ *este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale.*

Demonstraţie. Deoarece $X_1 \neq 0$, putem considera în sistemul simetric pe x_1 ca variabilă independentă. Avem

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=\frac{X_2}{X_1},\quad \dots,\quad \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1}=\frac{X_n}{X_1}.$$

Pentru că G este o integrală primă a sistemului simetric ataşat atunci este verificată relaţia $G(x_1,\dots,x_n)=C$, unde C este o constantă. Derivând în raport cu x_1 rezultă

$$G'_{x_1}+G'_{x_2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}+\cdots+G'_{x_n}\cdot\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1}=0.$$

De aici, obţinem

$$G'_{x_1} + G'_{x_2} \cdot \frac{X_2}{X_1} + \cdots + G'_{x_n} \cdot \frac{X_n}{X_1} = 0,$$

ceea ce, după o înmulţire cu X_1, ne arată că G este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$X_1 \cdot z'_{x_1} + X_2 \cdot z'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot z'_{x_n} = 0.$$

□

5.4 Teoremă. *Fie $F : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care are derivate parţiale de ordinul întâi pe $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ şi fie $G_1, \ldots, G_{n-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $n-1$ integrale prime ale sistemului simetric ataşat. Atunci*

$$z = F(G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale.

Demonstraţie. Avem

$$z'_{x_k} = F'_{G_1} \cdot (G_1)'_{x_k} + \cdots + F'_{G_{n-1}} \cdot (G_{n-1})'_{x_k}$$

pentru orice k de la 1 la n şi

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot z'_{x_k} = \sum_{k=1} X_k \left(\sum_{i=1}^{n-1} F'_{G_i} \cdot (G_i)'_{x_k} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} F'_{G_i} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (G_i)'_{x_k} \right) = 0$$

pentru că G_i sunt integrale prime şi conform teoremei anterioare sunt şi soluţii ale ecuaţiei, adică $\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (G_i)'_{x_k} = 0$. □

5.5 Teoremă. *Fie $G_1, \ldots, G_{n-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $n-1$ integrale prime independente ale sistemului simetric ataşat ecuaţiei cu derivate parţiale. Atunci orice soluţie a ecuaţiei este de forma*

$$z = F(G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Demonstraţie. Fie z o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale. Fiindcă şi $G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt soluţii ale ecuaţiei, se obţine sistemul

$$\begin{cases} X_1 \cdot z'_{x_1} + X_2 \cdot z'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot z'_{x_n} = 0 \\ X_1 \cdot (G_1)'_{x_1} + X_2 \cdot (G_1)'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot (G_1)'_{x_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1 \cdot (G_{n-1})'_{x_1} + X_2 \cdot (G_{n-1})'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot (G_{n-1})'_{x_n} = 0. \end{cases}$$

Fiindcă există cel puţin o funcţie X_i care nu se anulează, sistemul are soluţie nebanală. Aceasta înseamnă că determinantul său este identic nul, adică

$$\frac{D(z, G_1, \ldots, G_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

Aceasta înseamnă că funcţiile $z, G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt funcţional dependente. Fiindcă integralele prime $G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt independente, relaţia de dependenţă se poate scrie

$$z = F(G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}).$$

□

5.6 Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x - z) \cdot u'_x + (y - z) \cdot u'_y + 2z \cdot u'_z = 0.$$

Rezolvăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - z} = \frac{\mathrm{d}y}{y - z} = \frac{\mathrm{d}z}{2z}.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}z}{2z} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x - y} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}z}{x + y + 2z},$$

de unde $2\ln(x-y) = \ln z + \ln C_1$, ceea ce ne arată că $(x-y)^2 = zC_1$. Prima integrală primă este $\frac{(x-y)^2}{z} = C_1$. Pe de altă parte, avem $2\ln(x + y + 2z) = \ln z + \ln C_2$, adică $(x + y + 2z)^2 = zC_2$, ceea ce ne dă a doua integrală primă a sistemului: $\frac{(x+y+2z)^2}{z} = C_2$. Soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale este

$$u = F\left(\frac{(x - y)^2}{z}, \frac{(x + y + 2z)^2}{z}\right),$$

unde F este o funcţie oarecare ce admite derivate parţiale de ordinul întâi. De exemplu, dacă $F(t, s) = t^2 - s$, atunci

$$u = \frac{(x - y)^4}{z^2} - \frac{(x + y + 2z)^2}{z}.$$

5.7 Definiţie. *Problema Cauchy pentru ecuaţia*

$$\sum_{i=0}^{n} X_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot z'_{x_i} = 0$$

este problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei care pentru o valoare fixată a uneia dintre variabile să spunem $x_i = a \in \mathbb{R}$ *se reduce la o funcţie dată*

$$z(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{x+1}, \ldots, x_n).$$

Se mai spune că se caută suprafaţa integrală $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ *care conţine curba*

$$\begin{cases} z = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ x_i = a. \end{cases}$$

5.8 Exemplu. Să se găsească soluţia ecuaţiei $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + xy \cdot u'_z = 0$ ce corespunde condiţiei $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$.

Sistemul simetric ataşat este $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$. Din primele două rapoarte rezultă $x = yC_1$. Ţinând cont de prima integrală primă, din ultimile două rapoarte rezultă $yC_1\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$. De aici $\frac{C_1 y^2}{2} = z + C_2$, adică $xy - 2z = C_2$. Pentru a afla soluţia ce corespunde condiţiei iniţiale rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = yC_1 \\ xy - 2z = C_2 \\ z = 0 \\ u = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Avem $xy = C_2$ şi $x = yC_1$ de unde $x^2 = C_1C_2$ şi $C_2 = y^2C1$. Obţinem $u = C_1C_2 + \frac{C_2}{C_1}$. Rezultă soluţia

$$u = \frac{x}{y}(xy - 2z) + \frac{y}{x}(xy - 2z) = x^2 + y^2 - 2z \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Ecuaţii cvasiliniare

5.9 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară** *o ecuaţie de forma*

$$X_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot z'_{x_1}+\cdots+X_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot z'_{x_n}=X_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,z).$$

unde $X_i : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ şi există $i \in \{1,\ldots,n\}$ astfel încât X_i să nu se anuleze pe D.

5.10 Teoremă. *Soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară este dată implicit de ecuaţia*

$$F(G_1(x_1,\ldots,x_n,z),\ldots,G_n(x_1,\ldots,x_n,z))=0,$$

unde $G_1,\ldots,G_n$ sunt integrale prime ale sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}z}{X_{n+1}}.$$

Demonstraţie. Căutăm soluţia în forma implicită $V(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)=0$, unde V este o funcţie ce urmează a fi determinată şi care are derivate parţiale de ordinul întâi astfel încât V'_z nu se anulează.

Avem $V'_{x_i}+V'_z\cdot z'_{x_i}=0$, pentru orice i de la 1 la n. De aici

$$z'_{x_i}=-\frac{V'_{x_i}}{V'_z}.$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia cu derivate parţiale ce trebuie rezolvată rezultă

$$X_1\cdot V'_{x_1}+\cdots+X_n\cdot V'_{x_n}+X_{n+1}\cdot V'_z=0.$$

Această ecuaţie omogenă are soluţia

$$V=F(G_1(x_1,\ldots,x_n,z),\ldots,G_n(x_1,\ldots,x_n,z))$$

unde $G_1,\ldots,G_n$ sunt integrale prime ale sistemului simetric ataşat

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}z}{X_{n+1}}.$$

Aşadar soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale cvasiliniară este dată în formă implicită de

$$F(G_1(x_1,\ldots,x_n,z),\ldots,G_n(x_1,\ldots,x_n,z))=0.$$

□

5.11 Exemplu. Să se integreze $x \cdot z'_x + (xz + y) \cdot z'_y = z$. Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei şi apoi suprafaţa integrală ce se sprijină pe curba $x + y = 2z,\ xz = 1$.

Ataşăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{xz + y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Din primul şi ultimul raport deducem că $\ln x = \ln z + \ln C_1$, adică $\frac{x}{z} = C_1$. Din egalitatea $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{z\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z}{xz - y}$ rezultă $\ln z = \ln(xz - y) - C_2$. A doua integrală primă este $\frac{xz-y}{z} = C_2$. Soluţia generală a ecuaţiei este dată în forma implicită de ecuaţia suprafeţei

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{xz - y}{z}\right) = 0.$$

Pentru a determina suprafaţa ce se sprijină pe curba $x + y = 2z,\ xz = 1$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = zC_1 \\ xz - y = zC_2 \\ x + y = 2z \\ xz = 1. \end{cases}$$

Din a doua şi a treia relaţie $xz + x = zC_2 + 2z$ şi înlocuind şi prima egalitate şi simplificând cu z rezultă $x = C_2 - C_1 + 2$. Din prima şi ultima relaţie obţinem $x^2 = C_1$. Va rezulta că $(C_2 - C_1 + 2)^2 = C_1$. Ecuaţia suprafeţei căutate este

$$\left(\frac{xz - y}{z} - \frac{x}{z} + 2\right)^2 = \frac{x}{z} \Longleftrightarrow (xz - x - y + 2z)^2 = xz.$$

5.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi

5.12 Notaţie. Vom folosi notaţiile

z''_{x^2} pentru derivarea de două ori a funcţiei z în raport cu x

z''_{xy} pentru derivarea funcţiei z mai întâi în raport cu x şi apoi în raport cu y

În unele cursuri se folosesc notaţiile

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Aducerea la forma canonică a ecuaţiilor cvasiliniare

5.13 Definiţie. *Se numeşte* **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi cvasiliniară** *o ecuaţie de forma*

$$a(x, y)z''_{x^2} + b(x, y)z''_{xy} + c(x, y)z''_{y^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \tag{5.1}$$

unde $z = z(x, y)$ este funcţia necunoscută, a, b, c trei funcţii definite pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi F o funcţie definită pe un domeniu din $D \times \mathbb{R}^3$.

5.14 Definiţie. *Următoarele forme ale ecuaţiei cu derivate parţiale (5.1) le numim* **forme canonice**

$$z''_{xy} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \textit{formă canonică hiperbolică}$$

$$z''_{x^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \textit{formă canonică parabolică}$$

$$z''_{x^2} + z''_{y^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \textit{formă canonică eliptică.}$$

5.15 Definiţie. *Ecuaţia*

$$a\,\mathrm{d}y^2 - b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}x^2 = 0$$

ataşată ecuaţiei cu derivate parţiale (5.1) se numeşte **ecuaţie caracteristică**. *Dacă $a \neq 0$, această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia de gradul al doilea*

$$a\,(y')^2 - by' + c = 0.$$

5.16 Teoremă. *Orice ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi cvasiliniară poate fi adusă la una din cele trei forme canonice.*

Demonstraţie. Se caută o schimbare de variabile $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ astfel încât funcţia $z(x, y) = Z(u(x, y), v(x, y))$ să verifice o ecuaţie în formă canonică. Calculăm derivatele lui z

$$z'_x = Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x$$

$$z'_y = Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y$$

$$z''_{x^2} = Z''_{u^2} \cdot (u'_x)^2 + 2Z''_{uv} \cdot u'_x \cdot v'_x + Z''_{v^2} \cdot (v'_x)^2 + Z'_u \cdot u''_{x^2} + Z'_v \cdot v''_{x^2}$$

$$z''_{xy} = Z''_{u^2} \cdot u'_x \cdot u'_y + Z''_{xy}(u'_x \cdot v'_y + u'_y \cdot v'_x) + Z''_{v^2} \cdot v'_x \cdot v'_y + Z'_u \cdot u''_{xy} + Z'_v \cdot v''_{xy}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{u^2} \cdot \left(u'_y\right)^2 + 2Z''_{uv} \cdot u'_y \cdot v'_y + Z''_{v^2} \cdot \left(v'_y\right)^2 + Z'_u \cdot u''_{y^2} + Z'_v \cdot v''_{y^2}$$

şi înlocuim în ecuaţie, rezultând ecuaţia

$$AZ''_{u^2} + BZ''_{uv} + CZ''_{v^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0,$$

unde

$$A = a\,(u'_x)^2 + bu'_x u'_y + c\left(u'_y\right)^2$$

$$B = 2au'_x v'_x + b(u'_x v'_y + u'_y v'_x) + 2cu'_y v'_y$$

$$C = a\,(v'_x)^2 + bv'_x v'_y + c\left(v'_y\right)^2$$

iar în G fiind cuprinşi toţi termenii care nu conţin derivate parţiale de ordinul doi. Să observăm că A şi C au formă comună. Să considerăm ecuaţia

$$a\,(\varphi'_x)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + c\left(\varphi'_y\right)^2 = 0, \quad a \neq 0.$$

(Dacă $a = 0$ se schimbă rolul lui y cu cel al lui x şi se consideră $c\left(\varphi_y'\right)^2 + b\varphi_x'\varphi_y' + a\left(\varphi_a'\right)^2 = 0$, cu $c \neq 0$. Dacă şi $c = 0$ ecuaţia este în forma canonică hiperbolică, după o împărţire cu b.) Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{a}\left[a\varphi_x' + \frac{(b+\sqrt{b^2-4ac})\varphi_y'}{2}\right] \cdot \left[a\varphi_x' + \frac{(b-\sqrt{b^2-4ac})\varphi_y'}{2}\right] = 0.$$

Ea se descompune în două ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogene

$$2a\varphi_x' + (b+\sqrt{b^2-4ac})\varphi_y' = 0 \quad \text{şi} \quad 2a\varphi_x' + (b-\sqrt{b^2-4ac})\varphi_y' = 0.$$

Sistemele simetrice ataşate sunt

$$\frac{\mathrm{d}x}{2a} = \frac{\mathrm{d}y}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}x}{2a} = \frac{\mathrm{d}y}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Obţinem ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

care se pot restrânge în ecuaţia caracteristică

$$a\left(y'\right)^2 - by' + c = 0.$$

După semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$ se disting trei cazuri:

Cazul I $\Delta > 0$. În acest caz ecuaţia este de tip hiperbolic. Ecuaţia caracteristică are 2 soluţii distincte

$$y' = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{şi} \quad y' = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dacă integrăm aceste ecuaţii obţinem două relaţii pe care le putem scrie sub forma $\varphi_1(x,y) = C_1$ şi $\varphi_2(x,y) = C_2$. Acestea verifică

$$2a\left(\varphi_1\right)_x' + (b+\sqrt{b^2-4ac})\left(\varphi_1\right)_y' = 0 \quad \text{şi} \quad 2a\left(\varphi_2\right)_x' + (b-\sqrt{b^2-4ac})\left(\varphi_2\right)_y' = 0.$$

Rezultă că

$$\frac{\left(\varphi_1\right)_x'}{\left(\varphi_1\right)_y'} = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \neq -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\left(\varphi_2\right)_x'}{\left(\varphi_2\right)_y'}$$

ceea ce ne arată că

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \left(\varphi_1\right)_x' & \left(\varphi_1\right)_y' \\ \left(\varphi_2\right)_x' & \left(\varphi_2\right)_y' \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left(\varphi_1\right)_y'\left(\varphi_2\right)_y' \neq 0.$$

Dacă notăm $u = \varphi_1(x,y)$ şi $v = \varphi_2(x,y)$ atunci $A = C = 0$ şi ecuaţia devine

$$BZ_{uv}'' + G(u,v,Z,Z_u',Z_v') = 0.$$

Prin împărţire cu $B = -\frac{\Delta}{a}\left(\varphi_1\right)_y'\left(\varphi_2\right)_y' \neq 0$ obţinem forma canonică hiperbolică.

Cazul II $\Delta = 0$. În acest caz ecuaţia este de tip parabolic. Ecuaţia caracteristică are soluţia dublă $y' = \frac{b}{2a}$. Această relaţie integrată se scrie $\varphi(x, y) = C_1$. Dacă notăm $u = x$ şi $v = \varphi(x, y)$ obţinem $A = a$ şi $C = 0$, iar $B = 2a\varphi'_x + b\varphi'_y$. Să observăm că $B = 0$. Într-adevăr, din faptul că $\Delta = 0$, avem $c = \frac{b^2}{4a}$. Înlocuind în $a\left(\varphi'_x\right)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + c\left(\varphi'_y\right)^2 = 0$ obţinem

$$a\left(\varphi'_x\right)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + \frac{b^2}{4a}\left(\varphi'_y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 4a^2\left(\varphi'_x\right)^2 + 4ab\varphi'_x\varphi'_y + b^2\left(\varphi'_y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (2a\varphi'_x + b\varphi'_y)^2 = 0,$$

adică $2a\varphi'_x + b\varphi'_y = 0$. Fiindcă $B = 0$ ecuaţia cvasiliniară are forma

$$aZ''_{u^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0$$

şi prin împărţire cu a se obţine forma canonică.

Cazul III $\Delta < 0$. În acest caz ecuaţia este de tip eliptic. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi conjugate şi după integrare obţinem integrale prime de forma

$$\varphi_1(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \quad \text{şi} \quad \varphi_2(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y).$$

Din faptul că φ_1 verifică ecuaţia $a\left(\varphi'_x\right)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + c\left(\varphi'_y\right)^2 = 0$ rezultă

$$a(\alpha'_x + i\beta'_x)^2 + b(\alpha'_x + i\beta'_x)(\alpha'_y + i\beta'_y) + c(\alpha'_y + i\beta'_y)^2 = 0$$

adică

$$a\left[{\alpha'_x}^2 - {\beta'_x}^2\right] + b(\alpha'_x\alpha'_y - \beta'_x\beta'_y) + c\left[{\alpha'_y}^2 - {\beta'_y}^2\right] + i\left[2a\alpha'_x\beta'_x + b(\alpha'_x\beta'_y + \alpha'_y\beta'_x) + 2c\alpha'_y\beta'_y\right] = 0$$

ceea ce ne arată că

$$a\left(\alpha'_x\right)^2 + b\alpha'_x\alpha'_y + c\left(\alpha'_y\right)^2 = a\left(\beta'_x\right)^2 + b\beta'_x\beta'_y + c\left(\beta'_y\right)^2$$
$$2a\alpha'_x\beta'_x + b(\alpha'_x\beta'_y + \alpha'_y\beta'_x) + 2c\alpha'_y\beta'_y = 0.$$

Dacă notăm $u = \alpha(x, y)$ şi $v = \beta(x, y)$ atunci relaţiile anterioare ne arată că $A = C$ şi $B = 0$. Ecuaţia devine

$$AZ''_{u^2} + AZ''_{v^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0$$

de unde prin împărţire cu $A \neq 0$ se ajunge la forma canonică. Dacă $A = 0$ ecuaţia caracteristică ar avea rădăcini reale şi aceasta ar fi o contradicţie. $\square$

5.17 Exemplu. Să se aducă ecuaţia $x^2z''_{x^2} + y^2z''_{y^2} = 0$ la forma canonică.

Ecuaţia caracteristică este $x^2\left(y'\right)^2 + y^2 = 0$. Pentru că $\Delta = -4x^2y^2 < 0$ ecuaţia este de tip eliptic. Avem

$$y'^2 = -\frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm i\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \pm i\frac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \ln y \pm i\ln x = C.$$

Alegem $u = \ln y$ şi $v = \ln x$ şi scriem $z(x,y) = Z(u,v)$. Rezultă

$$z'_x = Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x = Z'_v \cdot \frac{1}{x}$$

$$z'_y = Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y = Z'_u \cdot \frac{1}{y}$$

$$z''_{x^2} = Z''_{v^2} \cdot \frac{1}{x^2} - Z'_v \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{u^2} \cdot \frac{1}{y^2} - Z'_u \cdot \frac{1}{y^2}$$

Ecuaţia $x^2 z''_{x^2} + y^2 z''_{y^2} = 0$ devine $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} - Z'_u - Z'_v = 0$.

5.18 Exemplu. Să se aducă la forma canonică ecuaţia $y^2 z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + x^2 z''_{y^2} = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $y^2 y'^2 - 2xyy' + x^2 = 0$ cu $\Delta = 0$. Ecuaţia este de tip parabolic. Avem

$$(yy' - x)^2 = 0 \Leftrightarrow yy' - x = 0 \Leftrightarrow y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C.$$

Alegem $u = x$ şi $v = y^2 - x^2$ şi notând $z(x,y) = Z(u,v)$ avem

$$z'_x = Z'_u + Z'_v \cdot (-2x)$$

$$z'_y = Z'_v \cdot 2y$$

$$z''_{x^2} = Z''_{u^2} - Z''_{uv} \cdot 4x + Z''_{v^2} \cdot 4x^2 - 2Z'_v$$

$$z''_{xy} = Z''_{uv} \cdot 2y - 4xyZ''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{v^2} \cdot 4y^2 + 2Z'_v.$$

Ecuaţia $y^2 z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + x^2 z''_{y^2} = 0$ devine

$$y^2 Z''_{u^2} - 4xy^2 Z''_{uv} + 4x^2y^2 Z''_{v^2} - 2y^2 Z'_v + 4xy^2 Z''_{uv} - 8x^2y^2 Z''_{v^2} + 4x^2y^2 Z''_{v^2} + 2x^2 Z'_v = 0,$$

adică $y^2 Z''_{u^2} - 2(y^2 - x^2)Z'_v = 0$. Aceasta se rescrie $(v + u^2)Z''_{u^2} - 2vZ'_v = 0$. Forma canonică va fi

$$Z''_{u^2} - \frac{2v}{v + u^2} Z'_v = 0.$$

Aducerea la forma cea mai simplă a ecuaţiilor liniare cu coeficienţi constanţi

Fie ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$az''_{x^2} + 2bz''_{xy} + cz''_{y^2} + dz'_x + ez'_y + fz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Am văzut că ecuaţia poate fi adusă la una dintre următoarele trei forme

$$Z''_{uv} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

$$Z''_{u^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

$$Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

Teorema următoare ne arată că aceste ecuaţii pot fi aduse la o formă simplificată.

5.19 Teoremă (Reducerea la forma cea mai simplă)**.** *Cu ajutorul schimbării de funcţie*

$$Z(u,v) = e^{\alpha u+\beta v} W(u,v),$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *alese potrivit, ecuaţiile pot fi aduse la formele cele mai simple*

$$\begin{aligned}
&W''_{uv} + F_1 W = 0 \\
&W''_{u^2} + E W'_v = 0 \quad \textit{sau} \quad W''_{u^2} + F_1 W = 0 \\
&W''_{u^2} + W''_{v^2} + F_2 W = 0.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Exprimăm pe Z şi derivatele sale cu ajutorul lui W. Avem

$$\begin{aligned}
Z'_u &= e^{\alpha u+\beta v}(\alpha W + W'_u) \\
Z'_v &= e^{\alpha u+\beta v}(\beta W + W'_v) \\
Z''_{u^2} &= e^{\alpha u+\beta v}\left(\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2}\right) \\
Z''_{v^2} &= e^{\alpha u+\beta v}\left(\beta^2 W + 2\beta W'_v + W''_{v^2}\right) \\
Z''_{uv} &= e^{\alpha u+\beta v}\left(\alpha\beta W + \beta W'_u + \alpha W'_v + W''_{uv}\right).
\end{aligned}$$

I. Cazul ecuaţiei de tip hiperbolic. Înlocuind ceea ce am calculat mai sus în ecuaţia $Z''_{uv} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ rezultă

$$e^{\alpha u+\beta v}(\alpha\beta W + \beta W'_u + \alpha W'_v + W''_{uv}) + De^{\alpha u+\beta v}(\alpha W + W'_u) + Ee^{\alpha u+\beta v}(\beta W + W'_v) + Fe^{\alpha u+\beta v} W = 0.$$

După ce împărţim cu exponenţiala şi ordonăm după derivatele parţiale avem

$$W''_{uv} + (\beta + D)W'_u + (\alpha + E)W'_v + (\alpha\beta + \alpha D + \beta E + F)W = 0.$$

Alegând $\alpha = -E$ şi $\beta = -D$ coeficientul lui W devine $F_1 = F - ED$ şi am adus astfel ecuaţia la forma cea mai simplă. Să observăm că nu puteam pune condiţiile $\beta + D = 0$ şi $\alpha\beta + \alpha D + \beta E + F = 0$ pentru că am fi avut $\beta = -D$ şi $-ED + F = 0$ iar a doua relaţie nu mai conţine necunoscuta şi în general este incompatibilă.

II. Cazul ecuaţiei de tip parabolic. După schimbarea de funcţie anunţată în enunţ, ecuaţia $Z''_{u^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ devine (după simplificare şi ordonarea termenilor)

$$W''_{u^2} + (2\alpha + D)W'_u + EW'_v + (\alpha^2 + \alpha D + \beta E + F)W = 0.$$

Punem condiţia ca $2\alpha + D = 0$ şi $\alpha^2 + \alpha D + \beta E + F = 0$. Există două cazuri: 1) $E \neq 0$. Sistemul este compatibil cu soluţia $\alpha = -D/2$ şi $\beta = (F - D^2/4)/E$ şi se ajunge astfel la prima formă simplă. 2) $E = 0$. În acest caz β nu apare în ecuatie şi alegem $\alpha = -D/2$ şi $F_1 = F - D^2/4$ şi obţinem a doua formă simplă.

III. Cazul ecuaţiei de tip eliptic. Ecuaţia $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ se transformă în

$$W''_{u^2} + W''_{v^2} + (2\alpha + D)W'_u + (2\beta + E)W'_v + (\alpha^2 + \beta^2 + D\alpha + E\beta + F)W = 0.$$

Alegem $\alpha = -D/2$ şi $\beta = -E/2$ şi obţinem forma cea mai simplă a ecuaţiei cu $F_1 = F - (D^2 + E^2)/4$. Se pot alege şi altfel coeficienţii obţinându-se $W''_{u^2} + W''_{v^2} + E_1W'_v = 0$ sau $W''_{u^2} + W''_{v^2} + D_1W'_u = 0$. □

5.20 Exemplu. Să se determine soluţia ecuaţiei $4z''_{x^2} + 8z''_{xy} + 4z''_{y^2} + 12z'_x + 12z'_y + 9z = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $4y'^2 - 8y' + 4 = 0$. Discriminantul ecuaţiei de gradul doi este $\Delta = 0$. Soluţia dublă a ecuaţiei este $y' = 1$, care prin integrare ne dă $y = x + C_1$. Notăm $u = x$ şi $v = y - x$.

$$\begin{aligned}
z'_x &= Z'_u - Z'_v \\
z'_y &= Z'_v \\
z''_{x^2} &= Z''_{u^2} - 2Z''_{uv} + Z''_{v^2} \\
z''_{xy} &= Z''_{uv} - Z''_{v^2} \\
z''_{y^2} &= Z''_{v^2}.
\end{aligned}$$

Ecuaţia devine $4Z''_{u^2} + 12Z'_u + 9Z = 0$. Pentru a o aduce la forma cea mai simplă scriem $Z(u,v) = e^{\alpha u + \beta v}W(u,v)$. Avem

$$\begin{aligned}
Z'_u &= e^{\alpha u + \beta v}(\alpha W + W'_u) \\
Z''_{u^2} &= e^{\alpha u + \beta v}\left(\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2}\right).
\end{aligned}$$

Ecuaţia se transformă în $4W''_{u^2} + (8\alpha + 12)W'_u + (4\alpha^2 + 12\alpha + 9)W = 0$. Alegem $\alpha = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$. Atunci ecuaţia se scrie $W''_{u^2} = 0$. Integrând rezultă $W'_u = f(v)$. Dacă mai integrăm o dată obţinem $W(u,v) = uf(v) + g(v)$. Aşadar, $Z(u,v) = e^{-\frac{3u}{2}}\left[uf(v) + g(v)\right]$. Soluţia ecuaţiei iniţiale este

$$z(x,y) = e^{-\frac{3x}{2}}\left[xf(y-x) + g(y-x)\right].$$

5.21 Exemplu. Să se determine soluţia ecuaţiei $3z''_{x^2} - 5z''_{xy} - 2z''_{y^2} + 3z'_x + z'_y = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $3y'^2 + 5y' - 2 = 0$. Discriminantul ecuaţiei de gradul doi este $\Delta = 49$. Soluţiile ecuaţiei sunt $y' = -2$ şi $y' = 1/3$. Prin integrare rezultă $y = -2x + C_1$ şi

$3y = x + C_2$. Notăm $u = y + 2x$ şi $v = 3y - x$ şi $z(x, y) = Z(u, v)$. Avem

$$\begin{aligned} z'_x &= Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x = 2Z'_u - Z'_v \\ z'_y &= Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y = Z'_u + 3Z'_v \\ z''_{x^2} &= 4Z''_{u^2} - 4Z''_{uv} + Z''_{v^2} \\ z''_{xy} &= 2Z''_{u^2} + 5Z''_{uv} - 3Z''_{v^2} \\ z''_{y^2} &= Z''_{u^2} + 6Z''_{uv} + 9Z''_{v^2}. \end{aligned}$$

Ecuaţia devine $Z''_{uv} - \frac{1}{7}Z'_u = 0$. Notăm $w = Z'_u$. Avem $w'_v - \frac{1}{7}w = 0$. Această ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi are soluţia $w = Ce^{\frac{v}{7}}$. Constanta nu depinde de v dar poate depinde de u şi atunci luăm $w = f(u)e^{\frac{v}{7}}$. Integrând după u se obţine $Z(u, v) = e^{\frac{v}{7}}F(u) + g(v)$. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$z(x, y) = e^{\frac{3y-x}{7}} \left[F(y + 2x) + G(3y - x)\right].$$

5.22 Exemplu. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuaţia $z''_{x^2} - z''_{xy} + 5z''_{y^2} + z'_x = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $y'^2 + y' + 5 = 0$, cu $\Delta = -19$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt $y' = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$. Rezultă $y = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}x + C$, adică $2y + x \pm ix\sqrt{19} = C$. Notăm $u = 2y + x$ şi $v = x\sqrt{19}$. Avem

$$\begin{aligned} z'_x &= Z'_u + Z'_v \cdot \sqrt{19} \\ z'_y &= Z'_u \cdot 2 \\ z''_{x^2} &= Z''_{u^2} + 2\sqrt{19}Z''_{uv} + 19Z''_{v^2} \\ z''_{xy} &= 2Z''_{u^2} + 2\sqrt{19}Z''_{uv} \\ z''_{y^2} &= 4Z''_{u^2}. \end{aligned}$$

Ecuaţia devine $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + \frac{1}{19}Z'_u + \frac{1}{\sqrt{19}}Z'_v = 0$. Scriem $Z(u, v) = e^{\alpha u + \beta v}W(u, v)$. Avem

$$\begin{aligned} Z'_u &= e^{\alpha u + \beta v}(\alpha W + W'_u) \\ Z'_v &= e^{\alpha u + \beta v}(\beta W + W'_v) \\ Z''_{u^2} &= e^{\alpha u + \beta v}\left(\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2}\right) \\ Z''_{v^2} &= e^{\alpha u + \beta v}\left(\beta^2 W + 2\beta W'_v + W''_{v^2}\right). \end{aligned}$$

Cu acestea ecuaţia se scrie

$$W''_{u^2} + W''_{v^2} + (2\alpha + \frac{1}{19})W'_u + (2\beta + \frac{1}{\sqrt{19}})W'_v + (\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha}{19} + \frac{\beta}{\sqrt{19}})W = 0.$$

Alegem $\alpha = -\frac{1}{38}$ şi $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{19}}$. Ecuaţia se transformă în $W''_{u^2} + W''_{v^2} - \frac{5}{19}W = 0$.

Ecuaţiile fizicii matematice

Ecuaţii de tip hiperbolic

1. ***Oscilaţiile libere ale unei coarde vibrante finite (Ecuaţia undelor)***. Presupunem că o coardă de lungime ℓ este fixată la extremităţile ei şi vibrează în planul XOZ. Coordonata z este funcţie de x şi de momentul de timp t şi satisface ecuaţia

$$z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2}.$$

Condiţiile la limită sunt

$$z(0,t) = z(\ell,t) = 0,$$

ele exprimând faptul că la capete coarda este fixată. Condiţiile iniţiale sunt

$$z(x,0) = f(x), \quad \text{şi} \quad z'_t(x,0) = g(x)$$

şi ele ne dau poziţia $f(x)$ şi viteza $g(x)$ a punctului de abscisă x la momentul iniţial $t = 0$.

2. ***Oscilaţiile întreţinute ale unei coarde vibrante finite***. În condiţiile de mai sus, dacă asupra coardei acţionează forţe exterioare atunci ecuaţia devine

$$z''_{t^2} - \nu^2 \cdot z''_{x^2} = h(x,t).$$

Condiţiile la limită se păstrează

$$z(0,t) = z(\ell,t) = 0,$$

şi de asemenea condiţiile iniţiale

$$z(x,0) = f(x), \quad \text{şi} \quad z'_t(x,0) = g(x).$$

3. ***Oscilaţiile libere ale unei coarde vibrante infinite***. Dacă coarda este infinită, ecuaţia rămâne aceeaşi

$$z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2}$$

şi condiţiile iniţiale

$$z(x,0) = f(x), \quad \text{şi} \quad z'_t(x,0) = g(x).$$

4. ***Ecuaţia telegrafiştilor***. Oscilaţiile electrice în conductori conduc la ecuaţia

$$i''_{x^2} = CLi''_{t^2} + (CR + GL)i'_t + GRi$$

unde i este intensitatea curentului în conductor, C şi G sunt capacitatea şi conductanţa de scăpări raportate la unitatea de lungime, R şi L rezistenţa şi inductanţa conductorului. O ecuaţie analoagă are loc şi pentru tensiune.

Ecuaţii de tip parabolic

1. ***Ecuaţia căldurii în bara finită***. Distribuţia temperaturii u într-o bară de lungime ℓ, depinde de abscisa x şi timpul t şi verifică ecuaţia

$$a^2 u''_{x^2} = u'_t.$$

Se presupune că cele două capete ale barei sunt menţinute la temperatura 0, deci au loc condiţiile la limită

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,$$

şi se cunoaşte distribuţia temperaturii în bară la momentul $t = 0$

$$u(x,0) = f(x).$$

2. ***Ecuaţia căldurii în bara infinită***. Distribuţia temperaturii u într-o bară infinită verifică aceeaşi ecuaţie

$$a^2 u''_{x^2} = u'_t$$

şi condiţia iniţială

$$u(x,0) = f(x).$$

Ecuaţii de tip eliptic

1. ***Ecuaţia lui Laplace***. Ecuaţia lui Laplace în plan este

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

şi în spaţiu

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei lui Laplace se numesc ***funcţii armonice***. Două dintre cele mai importante soluţii sunt $\frac{1}{r}$ în spaţiu şi $\ln r$ în plan, unde r este lungimea vectorului de poziţie ($r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ în spaţiu şi $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ în plan). Am notat cu Δ operatorul lui Laplace.

2. ***Ecuaţia lui Poisson*** Ecuaţia de ordinul doi neomogenă

$$\Delta u = f.$$

Problema lui Dirichlet este rezolvarea ecuaţiei lui Poisson cunoscând valorile pe frontiera C a unui domeniu D:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_C = g. \end{cases}$$

Problema lui Neumann este rezolvarea ecuaţiei lui Poisson cunoscând valorile derivatei în direcţia normalei la frontieră:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_C = g. \end{cases}$$

Alte ecuaţii

1. ***Ecuaţiile Navier-Stokes*** Ecuaţiile Navier-Stokes descriu mişcarea unui fluid în $\mathbb{R}^n$ (cu $n = 2$ sau $n = 3$). Vectorul vitezei $u(r,t) = (u_i(r,t))_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ şi presiunea $p(r,t) \in \mathbb{R}$ sunt definite într-un punct $r \in \mathbb{R}^n$ şi la momentul de timp $t \ge 0$. Ecuaţiile sunt

$$(u_i)'_t + \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot (u_i)'_{x_j} = \nu\Delta u_i - p'_{x_i} + f_i(r,t), \qquad r \in \mathbb{R}^n,\ t \ge 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i)'_{x_i} = 0, \qquad r \in \mathbb{R}^n,\ t \ge 0$$

$$u(r,0) = g(r), \qquad r \in \mathbb{R}^n$$

unde $f(r)$ este dat, $f_i(r,t)$ sunt componentele unei forţe externe (de exemplu: gravitaţia), $\nu > 0$ este vâscozitatea fluidului şi $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i}$ este operatorul lui Laplace în variabilele spaţiale.
2. ***Ecuaţia lui Burger*** Această ecuaţie care provine din ecuaţiile lui Navier-Stokes modelează unde-şoc (de exemplu valuri care se sparg) şi are ecuaţia

$$u'_t + u \cdot u'_x = \nu \cdot u''_{x^2},$$

unde u este viteza fluidului şi ν vâscozitatea. Dacă vâscozitatea este neglijată $\nu = 0$ atunci ecuaţia devine

$$u'_t + u \cdot u'_x = 0.$$

3. ***Ecuaţia lui Schrödinger***. În cadrul mecanicii cuantice, în studiul comportării electronilor funcţia de undă Ψ satisface

$$i\hbar\Psi'_t(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(r,t) + V(r)\Psi(r,t)$$

unde i este unitatea imaginară, $\hbar$ constanta lui Planck, $r = (x,y,z)$ poziţia particulei în spaţiu, V este energia potenţială a particulei, m masa particulei, iar Δ este operatorul lui Laplace.

Metoda separării variabilelor

Această metodă a fost dezvoltată de Daniel Bernoulli şi sistematizată de Fourier şi este aplicabilă pentru unele tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale pentru aflarea de soluţii particulare sub forma unor serii Fourier. Vom exemplifica această metodă pentru ecuaţia undelor şi ecuaţia căldurii.

Ecuaţia undelor

Vom rezolva problema

$$\begin{cases} z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2} \\ z(0,t) = z(\ell,t) = 0 \\ z(x,0) = f(x),\ z'_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

căutând soluţia sub forma

$$z(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Aceasta ne conduce la $X(x)T''(t) = \nu^2 X''(x)T(t)$ sau $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}$. Fiecare din aceste rapoarte este egal cu o constantă, să spunem C (aceasta rezultă din faptul că dacă derivăm egalitatea în raport cu x atunci primul raport derivat este egal cu 0, deci are valoare constantă). Obţinem sistemul

$$\begin{cases} X''(x) - C \cdot X(x) = 0 \\ T''(t) - C\nu^2 \cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Condiţiile la limită ne dau $X(0) = X(\ell) = 0$. Să rezolvăm ecuaţia diferenţială liniară de ordinul doi $X''(x) - C \cdot X(x) = 0$. După valoarea constantei C distingem trei cazuri:

1. $C = \lambda^2$. Soluţia este $X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ iar condiţiile la limită ne dau $C_1 + C_2 = 0$ şi $C_1 e^{\lambda \ell} + C_2 e^{-\lambda \ell} = 0$, care ne conduc la $C_1 = C_2 = 0$ şi deci $X(x) = 0$.

2. $C = 0$. Soluţia este $X(x) = C_1 x + C_2$ iar condiţiile la limită ne dau $C_2 = 0$ şi $C_1 \ell + C_2 = 0$, care ne conduc la $C_1 = C_2 = 0$, care ne dau din nou soluţia nulă $X(x) = 0$.

3. $C = -\lambda^2$. Soluţia este $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Condiţiile la limită $C_1 = 0$ şi $C_1 \cos \lambda \ell + C_2 \sin \lambda \ell = 0$ ne dau soluţii nebanale dacă $\lambda \ell = n\pi$, deci pentru şirul $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$. Se obţin soluţiile $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, pentru $n = 1, 2, \ldots$. Ecuaţia a doua $T''(t) + \lambda_n^2 \nu^2 T(t) = 0$ are soluţia generală $T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi\nu}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi\nu}{\ell} t$. Înseamnă că ecuaţia are soluţiile particulare $z_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$ şi pentru că ecuaţia este liniară se poate aplica metoda suprapunerii soluţiilor, rezultând că

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi\nu}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi\nu}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

este soluţie. Vom determina constantele A_n şi B_n din condiţiile iniţiale. Se impun condiţiile

$$f(x) = z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$g(x) = z'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi\nu}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Dezvoltând în serie de sinusuri pe $(0, \ell)$ funcţiile f şi g avem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad f_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad g_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x.$$

Prin identificare se obţine

$$A_n = f_n \quad \text{şi} \quad B_n = \frac{\ell}{n\pi\nu} g_n.$$

Soluţia problemei corzii vibrante finite este

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos \frac{n\pi\nu}{\ell} t + \frac{\ell}{n\pi\nu} g_n \sin \frac{n\pi\nu}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

5.23 Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} z''_{t^2} - z''_{x^2} = 0 \\ z(0,t) = z(2,t) = 0 \\ z(x,0) = 1 - |x-1|,\ z'_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Avem $\nu = 1$, $\ell = 2$, $g_n = 0$ iar f_n se determină din

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (1-|x-1|)\sin\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x - \frac{2(2-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Se obţine soluţia

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2}\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

Ecuaţia căldurii

Rezolvăm problema

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \cdot u''_{x^2} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

căutând soluţia sub forma

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t).$$

Aceasta ne conduce la $X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$ sau $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)} = C$. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} X''(x) - C\cdot X(x) = 0 \\ T'(t) - Ca^2\cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Condiţiile la limită ne dau $X(0) = X(\ell) = 0$. Să rezolvăm ecuaţia diferenţială liniară de ordinul doi $X''(x) - C\cdot X(x) = 0$. Ca şi în cazul ecuaţiei undelor (vezi calculele) se obţin soluţiile $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}x$ pentru $C = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$. A doua ecuaţie devine

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}T(t) = 0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}.$$

Fiindcă $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ sunt soluţii, iar ecuaţia căldurii este liniară atunci şi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

este soluţie, în condiţiile în care seria este convergentă şi derivabilă de două ori termen cu termen. Din condiţia iniţială avem

$$f(x) = z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Dezvoltând funcţia f în serie de sinusuri şi identificând coeficienţii se obţine

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x.$$

5.24 Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} u'_t = 9u''_{x^2} \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x + 2 \sin 3\pi x. \end{cases}$$

Avem $a = 3$ şi $\ell = 3$. Coeficienţii A_n se obţin prin identificare din relaţia

$$\sin \pi x + 2 \sin 3\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{3} x.$$

Rezultă $A_3 = 1$ şi $A_9 = 2$, iar restul coeficienţilor sunt nuli. Soluţia va fi

$$u(x,t) = e^{-9\pi^2 t} \sin \pi x + 2e^{-81\pi^2 t} \sin 3\pi x.$$

5.3 Exerciţii

Probleme propuse

5.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$(y+z) \cdot u'_x + (x+z) \cdot u'_y + (x+y) \cdot u'_z = 0.$$

5.2. Să se determine funcţia u care are proprietăţile

$$x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + (x-y) \cdot u'_z = 0, \quad u(x,y,1) = x + y.$$

5.3. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$xy \cdot u'_x - y^2 \cdot u'_y + (1+x^2) \cdot u'_z = 0,$$

iar apoi soluţia care verifică $u(1,y,z) = y + z$.

5.4. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$z \cdot z'_x - z \cdot z'_y = y - x.$$

5.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$z \cdot z'_x + (z^2 - x^2) \cdot z'_y + x = 0.$$

Care este suprafaţa integrală care se sprijină pe curba $y = x^2$, $z = 2x$?

5.6. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x \cdot z'_x + (xz + y) \cdot z'_y = z.$$

Care este suprafaţa integrală care se sprijină pe curba $x + y = 2z$, $xz = 1$?

5.7. Să se aducă la forma canonică ecuaţia $y^2 \cdot z''_{x^2} + x^2 \cdot z''_{y^2} + x \cdot z'_x = 0$.

5.8. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuaţia

$$z''_{x^2} + 2z''_{xy} + 5z''_{y^2} + 4z'_x - 12z'_y = 0.$$

5.9. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuaţia $z''_{xy} - 3z''_{y^2} + z'_x = 0$.

5.10. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $z''_{x^2} - 2z''_{xy} - 3z''_{y^2} = 0$.

5.11. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $z''_{x^2} + z''_{y^2} - 2z''_{xy} = 0$.

5.12. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$z''_{x^2} + 4z''_{xy} + 4z''_{y^2} - 9z'_x - 18z'_y + 18z = 0.$$

5.13. Să se rezolve problema mixtă

$$z''_{t^2} = z''_{x^2},\ z(0,t) = z(5,t) = 0,\ z(x,0) = \sin \pi x,\ z'_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{5}.$$

5.14. Să se rezolve problema mixtă

$$u'_t = 4u''_{x^2},\ u(0,t) = u(6,t) = 0,\ u(x,0) = \sin \pi x + \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Indicaţii la problemele propuse

5.1. $u = F\left(\frac{x-y}{x-z}, \frac{y-z}{x-z}\right)$.

5.2. Două integrale prime sunt $\frac{x}{y} = C_1$ şi $x - y - z = C_2$. Din condiţiile $z = 1$ şi $u = x + y$ rezultă $u = \frac{(C_2+1)(C_1+1)}{C_1-1}$, adică $u = \frac{(x-y-z+1)(x+y)}{x-y}$.

5.3. Două integrale prime sunt $xy = C_1$ şi $xyz - x - \frac{x^3}{3} = C_2$. Soluţia generală este

$$u = F\left(xy, xyz - x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Din $x = 1$ şi $u = y + z$ rezultă $u = C_1 + \frac{3C_2+4}{3C_1}$, adică $u = xy + \frac{3xyz-3x-x^3+4}{3xy}$.

5.4. Două integrale prime sunt $x + y = C_1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Soluţia generală a ecuaţiei este descrisă implicit de ecuaţia $F(x + y, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

5.5. Două integrale prime sunt $x^2 + z^2 = C_1$, $y - xz = C_2$. Din condiţiile date se obţine $5C_2 + C_1 = 0$, adică $x^2 + z^2 + 5(y - xz) = 0$.

5.6. Două integrale prime sunt $\frac{x}{z} = C_1$, $\frac{xz-y}{z} = C_2$. Obţinem relaţia $C_1 = (2 + C_2 - C_1)^2$, de unde rezultă $xz = (2z + xz - x - y)^2$.

5.7. $u = y^2$, $v = x^2$, $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + \frac{1}{2u}Z'_u + \left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2u}\right) Z'_v = 0$.

5.8. $u = y - x$, $v = 2x$, $\alpha = 1/2$ şi $\beta = -1$, $W''_{u^2} + W''_{v^2} - 5W = 0$.

5.9. Se schimbă rolul lui x cu y. Obţinem ecuaţia $-3(x')^2 - x' = 0$, de unde $u = x$, $v = 3x + y$, $\alpha = -3$, $\beta = -1$, $W''_{uv} - 3W = 0$.

5.10. $u = 3x + y$, $v = y - x$, $Z''_{uv} = 0$, $z(x, y) = F(3x + y) + G(y - x)$.

5.11. $u = x$, $v = y + x$, $Z''_{u^2} = 0$, $z(x, y) = xf(y + x) + g(y + x)$.

5.12. $u = x$, $v = y - 2x$, $Z''_{u^2} - 9Z'_u + 18Z = 0$, $z = f(y - 2x)e^{3x} + g(y - 2x)e^{6x}$.

5.13. $\nu = 1$, $\ell = 5$, $z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{5} + B_n \sin \frac{n\pi t}{5}\right) \sin \frac{n\pi x}{5}$, $A_5 = 1$, $B_1 = 5/\pi$.

5.14. $a = 2$, $\ell = 6$, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{n\pi x}{6}$, $A_3 = 1$, $A_6 = 1$.

Capitolul 6

Numere complexe

6.1 Operaţii cu numere complexe

6.1 Definiţie. *Mulţimea* $\mathbb{R}^2$ *a tuturor perechilor ordonate de numere reale, pe care o înzestrăm cu operaţiile de adunare şi înmulţire*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

formează un corp comutativ numit **corpul numerelor complexe***, pe care îl vom nota cu* $\mathbb{C}$*. Elementele lui* $\mathbb{C}$ *se numesc* **numere complexe***.*

6.2 Notaţie. Observăm că $(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$ şi $(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0)$ ceea ce ne justifică faptul că mulţimea $\{\,(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\,\}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ care este izomorf cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Acest lucru ne arată că putem face identificarea dintre perechea $(a,0)$ şi numărul real a.

Astfel, orice număr complex îl putem scrie

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+b(0,1).$$

Vom nota, aşa cum se obişnuieşte, perechea $(0,1)$ cu i. Fiindcă $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$ avem $i^2=-1$, iar acesta este motivul pentru care uneori se foloseşte notaţia $i=\sqrt{-1}$. Aşadar numărul complex $z=(a,b)$ se scrie

$$z=a+bi.$$

Această formă o vom numi ***forma algebrică*** a numărului complex. Numerele reale a şi b se numesc ***partea reală*** şi ***partea imaginară*** a numărului complex z şi vom nota

$$\operatorname{Re} z=a \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} z=b.$$

6.3 Observaţie. Numerele complexe pot fi reprezentate de punctele unui plan. Fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex numit ***afixul*** punctului. Astfel punctul de coordonate

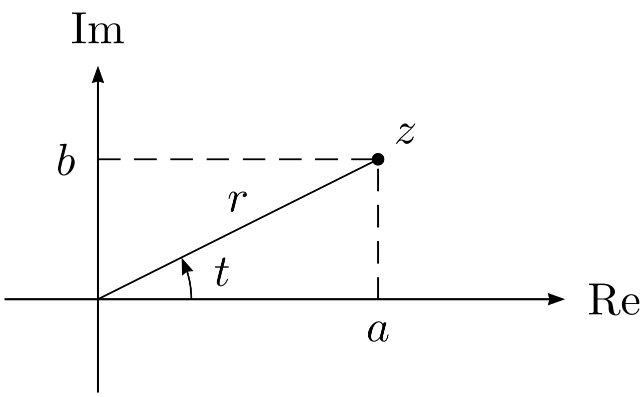

Figura 6.1: Reprezentarea numărului complex $z = a + bi = r(\cos t + i \sin t)$

(a, b) are afixul $z = a + bi$. Punctele de pe axa orizontală au afixele numere reale şi de aceea axa orizontală se va numi ***axa reală***. Axa verticală se va numi ***axă imaginară***, pe ea fiind reprezentate numerele pur imaginare ib.

6.4 Observaţie. Fie M punctul care are afixul $z = a + ib$. Distanţa de la origine la punctul M o vom nota cu r, iar unghiul pe care vectorul OM îl face cu partea pozitivă a axei reale, măsurat în radiani în sens invers acelor de ceasornic îl vom nota cu t. Fiecare punct din plan poate fi localizat ştiind mărimile r şi t numite ***coordonate polare***. Avem relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele polare

$$a = r \cos t$$
$$b = r \sin t.$$

Obţinem ***forma trigonometrică*** a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$, căci

$$z = a + bi = r \cos t + ir \sin t = r(\cos t + i \sin t).$$

Numărul r se numeşte ***modulul*** numărului complex z şi notează $|z|$. Avem

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Numărul t se numeşte ***argumentul*** numărului complex z şi se notează $\operatorname{Arg} z$. Să observăm că datorită periodicităţii funcţiei $\cos t$ şi $\sin t$ argumentul poate fi determinat abstracţie făcând de un multiplu întreg de 2π. Avem

$$t = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & a < 0. \end{cases}$$

Pentru cazul în care $a = 0$ avem $t = \pi/2$ dacă $b > 0$ şi $t = -\pi/2$ dacă $b < 0$. Pentru numărul complex $z = 0$ ($a = 0$ şi $b = 0$) argumentul t este nedeterminat. Valoarea argumentului din intervalul $[0, 2\pi)$ se notează $\arg z$ şi se numeşte valoare principală a argumentului. În general avem $\mathrm{Arg}\, z = \{ \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$. Valoarea principală a argumentului se determină astfel:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranul 1} \\ \pi + \mathrm{arctg}\, \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranele 2 şi 3} \\ 2\pi + \mathrm{arctg}\, \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranul 4.} \end{cases}$$

6.5 Exemplu. Mai jos sunt câteva exemple de numere complexe scrise în formă algebrică şi trigonometrică

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0 \\ -2 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) \\ i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ -3i &= 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ 1 + 2i &= \sqrt{5} \left[\cos(\mathrm{arctg}\, 2) + i \sin(\mathrm{arctg}\, 2) \right] \\ -2 + 2i &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ 1 - i &= \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

6.6 Observaţie. Deoarece $|z_1|, |z_2|$ şi $|z_1 + z_2|$ sunt laturile unui triunghi are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

numită inegalitatea triunghiului. Ca o consecinţă are loc şi

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_2 - z_1|.$$

6.7 Observaţie. Scrierea sub forma trigonometrică este avantajoasă când efectuăm operaţii de înmulţire cu numere complexe. Aceasta pentru că dacă

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) \\ z_2 &= r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left[\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) \right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2) \right]. \end{aligned}$$

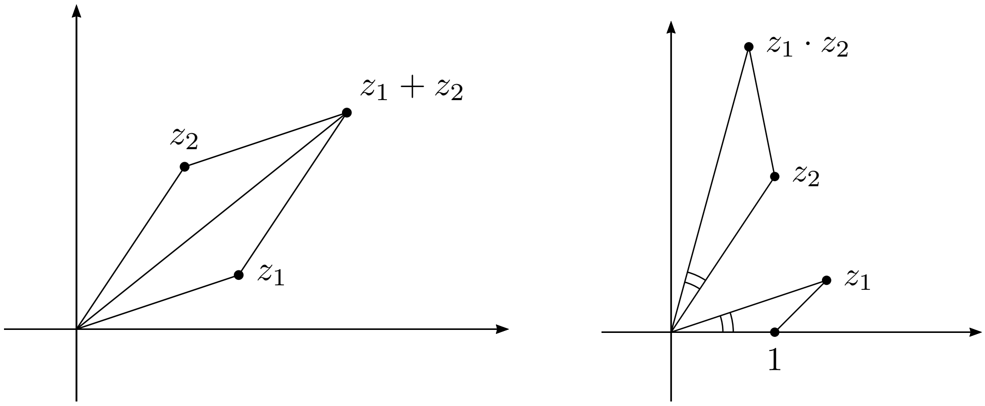

Figura 6.2: Adunarea şi înmulţirea numerelor complexe

Astfel când se înmulţesc două numere complexe, modulul produsului este produsul modulelor, iar argumentul produsului este suma argumentelor:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Prin înmulţire repetată se obţine formula $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$. În particular pentru $r = 1$ rezultă formula lui Moivre

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

6.8 Exemplu. Să se calculeze $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.

Scriem pe $z = 1 + i\sqrt{3}$ în forma trigonometrică. Avem $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ şi $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\begin{aligned} z^{100} &= |z|^{100}\left(\cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3}\right) = 2^{100}\left[\cos\left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2^{100}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 2^{100}\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{99}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

6.9 Exemplu. Trecând la argumente în egalitatea $(1+ix)(1+iy) = 1-xy+i(x+y)$ deducem formula $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ şi în particular $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

6.10 Definiţie. Conjugatul *numărului complex* $z = a + bi$ *este numărul complex*

$$\overline{z} = a - bi.$$

6.11 Propoziţie. *Principalele proprietăţi legate de conjugatul unui număr sunt*

$$
\begin{array}{lll}
a) & \overline{\overline{z}} = z & \\
b) & \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, & \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
c) & \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, & \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2} \\
d) & z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} & \\
e) & z \cdot \overline{z} = |z|^2 . &
\end{array}
$$

6.12 Exemplu. Să se demonstreze că $|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

Vom folosi proprietăţile conjugatului şi avem

$$
\begin{aligned}
|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - z_1\overline{z_2})\,\overline{1 - z_1\overline{z_2}} - (z_1 - z_2)\,\overline{z_1 - z_2} \\
&= (1 - z_1\overline{z_2})\,(1 - \overline{z_1}z_2) - (z_1 - z_2)\,(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= 1 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} \cdot \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} \\
&= 1 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\
&= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).
\end{aligned}
$$

6.13 Observaţie. Pentru a împărţi numărul z_1 la $z_2 \neq 0$ determinăm numărul complex z astfel încât $z_1 = z_2 \cdot z$. Înmulţind cu conjugatul lui z_2 avem

$$
z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{cb - ad}{c^2 + d^2}
$$

iar în formă trigonometrică acesta se scrie

$$
\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)\right].
$$

6.2 Topologia planului complex

6.14 Observaţie. Să observăm că funcţia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$
d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|
$$

este o metrică pe $\mathbb{C}$. Topologia indusă de această metrică este topologia pe care o vom adopta pe $\mathbb{C}$.

6.15 Notaţie. Discul deschis cu centrul în a şi de rază r va fi notat

$$
D(a, r) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r \,\}
$$

iar discul închis cu centrul în a şi de rază r va fi notat

$$
\overline{D}(a, r) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r \,\}.
$$

6.16 Definiţie. *O mulţime $G \subset \mathbb{C}$ se numeşte* **deschisă** *dacă pentru orice $z \in G$ există un număr real $r > 0$ astfel încât $D(z, r) \subset G$.*

O mulţime $F \subset \mathbb{C}$ se numeşte **închisă** *dacă complementara ei $\mathbb{C} \setminus F$ este o mulţime deschisă.*

O submulţime $A \subset \mathbb{C}$ se numeşte **mărginită** *dacă există $M > 0$ astfel încât $|z| < M$ pentru orice $z \in A$.*

O mulţime închisă şi mărginită se numeşte **compactă**.

6.17 Definiţie. *Un şir de numere complexe (z_n) este* **convergent** *dacă există un număr complex z cu proprietatea că şirul de numere reale $d_n = |z_n - z|$ este convergent la 0. Numărul z se va numi limita şirului (z_n) şi vom scrie $z_n \to z$ sau $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Un şir se va numi* **divergent** *dacă nu este convergent.*

6.18 Propoziţie. *Un şir de numere complexe $z_n = a_n + ib_n$ converge la numărul complex $z = a + ib$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

Demonstraţie. Folosind inegalităţile

$$|a_n - a| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z|$$

$$|b_n - b| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z|$$

deducem cu ajutorul teoremei cleştelui că dacă $z_n \to z$ atunci $a_n \to a$ şi $b_n \to b$.

Invers, dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$ atunci şirul

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$$

converge la zero. □

6.19 Exemplu. Să considerăm şirul $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, unde z este un număr complex. Să calculăm limita acestui şir.

Fie $z = a + bi$. Avem $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$. Deoarece $1 + \frac{a}{n} \to 1$ putem presupune că $1 + \frac{a}{n} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Forma trigonometrică a numărului complex $1 + z/n$ este

$$1 + \frac{z}{n} = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}\,(\cos t_n + i \sin t_n)$$

unde $t_n = \operatorname{arctg} \frac{b}{a+n}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 2\frac{a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)} = e^a$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nb}{a+n} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{b}{a+n}}{\frac{b}{a+n}}\right) = b$$

va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \,(\cos nt_n + i \sin nt_n) = e^a(\cos b + i \sin b).$$

6.3 Funcţii elementare

6.20 Definiţie. Funcţia exponenţială $\exp(z)$ *sau* e^z *se defineşte prin*

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

pentru orice număr complex $z = a + bi$.

6.21 Observaţie. Pentru $a = 0$ obţinem ***formula lui Euler*** $e^{ib} = \cos b + i \sin b$. Pentru $-b$ aceasta se scrie $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$. De aici se obţin formulele lui Euler

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$$
$$\sin b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.$$

Formula lui Euler ne permite să scriem orice număr complex în ***forma exponenţială***

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

De exemplu, este adevărată formula $1 = e^{2\pi i}$.

6.22 Observaţie. Să mai observăm că funcţia exponenţială astfel definită verifică proprietatea obişnuită a funcţiei exponenţiale $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. De aici rezultă relaţia $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ ceea ce ne arată că funcţia exponenţială este periodică de perioadă $2\pi i$.

6.23 Exemplu. O expresie care apare mult în inginerie este următoarea

$$a \cos \lambda t + b \sin \lambda t = A \cos(\lambda t - \phi), \qquad \text{unde } a + bi = Ae^{i\phi}.$$

Pentru a demonstra aceasta să observăm că

$$\begin{aligned} a \cos \lambda t + b \sin \lambda t &= \operatorname{Re}\left[(a - bi) \cdot (\cos \lambda t + i \sin \lambda t)\right] \\ &= \operatorname{Re}\left(Ae^{-i\phi} \cdot e^{i\lambda t}\right) = \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\lambda t - \phi)}\right) \\ &= A \cos(\lambda t - \phi). \end{aligned}$$

6.24 Definiţie. *Definim funcţiile* **sinus** *şi* **cosinus** *pe* $\mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

şi funcţiile **sinus hiperbolic** *şi* **cosinus hiperbolic** *pe* $\mathbb{C}$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

6.25 Observaţie. Din definiţia funcţiilor trigonometrice şi a celor hiperbolice rezultă

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z & \cos iz &= \operatorname{ch} z \\ \operatorname{sh} iz &= i \sin z & \sin iz &= -i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Formulele cu sin şi cos din cazul real rămân adevărate. De exemplu

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \cdot \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}}{4i} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin(a+b) + \sin(a-b) \right]. \end{aligned}$$

Dar există unele proprietăţi ale funcţiilor sin şi cos care sunt adevărate pe $\mathbb{R}$ fără să fie adevărate şi pe $\mathbb{C}$: funcţiile sin şi cos sunt mărginite pe $\mathbb{R}$, dar pe $\mathbb{C}$ sunt nemărginite. Într-adevăr, pentru că $\lim_{b\to\infty} \operatorname{ch} b = \infty$ şi $\cos ib = \operatorname{ch} b$ rezultă cos este nemărginită. Din $\lim_{b\to\infty} \operatorname{sh} b = \infty$ şi $\sin ib = -i \operatorname{sh} b$ rezultă sin este nemărginită.

6.26 Definiţie. *Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ un număr complex. Numim* **logaritm** *al lui z orice soluţie a ecuaţiei*

$$e^w = z.$$

6.27 Propoziţie. *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $e^w = z$, unde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ este*

$$\operatorname{Log} z = \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \}.$$

Demonstraţie. Scriind numărul z în forma exponenţială $z = re^{it}$ şi $w = u+iv$ în forma algebrică avem

$$e^u e^{iv} = e^{u+iv} = e^w = z = re^{it},$$

de unde rezultă $e^u = r$ şi $v = t + 2k\pi$, adică $u = \ln r = \ln |z|$ şi $v = \arg z + 2k\pi$. □

6.28 Observaţie. Spre deosebire de cazul real, unde un număr pozitiv are un singur logaritm, în cazul complex un număr nenul are o infinitate de logaritmi. Astfel în complex funcţia Log este o funcţie multivocă (adică asociază unui singur număr complex o mulţime de numere complexe). Funcţia obţinută pentru o valoare fixată a lui k se numeşte ***ramură*** sau ***determinare*** a funcţiei $\operatorname{Log} z$. Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ se numeşte ramură principală şi se notează

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

unde $\arg z$ ia valori în intervalul $[0, 2\pi)$.

Funcţiile multivoce nu mai pot fi privite în acelaşi fel în care sunt privite funcţiile univoce. De exemplu să presupunem că obligăm variabila z să descrie un cerc cu centrul în origine în sens trigonometric. Să observăm că atunci când variabila ajunge de unde a plecat argumentul ei a crescut cu 2π. Deşi am ajuns în acelaşi punct din plan valoarea funcţiei este diferită.

Pentru a corecta această problemă să presupunem că facem o "tăietură" în planul complex în partea pozitivă a axei reale de la punctul $z = 0$ până la $z = \infty$ şi convenim ca variabila z să nu poată trece peste această tăietură. În acest fel se sacrifică continuitatea funcţiei, pentru că în puncte apropiate situate de o parte şi alta a tăieturii valorile funcţiei diferă prin $2\pi i$. Pentru a înlătura şi acest neajuns să considerăm în locul planului variabilei complexe z o suprafaţă formată din mai multe plane complexe suprapuse câte unul pentru fiecare ramură a funcţiei. Lipim tăieturile acestor plane astfel încât marginea inferioară a fiecărui plan este lipită de marginea superioară a planului precedent şi marginea superioară este lipită la marginea inferioară a planului următor. În cazul unei funcţii cu un număr finit de ramuri, marginea superioară a ultimului plan este lipită de marginea inferioară a primului plan. În acest fel am obţinut o suprafaţă continuă.

6.29 Exemplu. Să vedem în cazul complex cât este $\ln(-1)$?

Modulul numărului $z = -1$ este $|z| = 1$ iar argumentul $\arg z = \pi$. Atunci

$$\operatorname{Log}(-1) = \{\, \ln 1 + i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\,\} = \{\, i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\,\}\,.$$

6.30 Definiţie. *Funcţia* **putere** *se defineşte cu ajutorul logaritmului în felul următor: pentru* $z, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \operatorname{Log} z}.$$

6.31 Observaţie. Dacă α este număr raţional de forma $\alpha = p/q$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$ şi $q > 1$ atunci funcţia z^{α} este multivocă: unei valori fixate a lui z îi corespund q valori diferite. Dacă α nu este raţional atunci funcţia putere are o infinitate de ramuri. De exemplu

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\cdot \operatorname{Log}(-1)} = e^{\frac{1}{2} i(\pi + 2k\pi)} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \{\, -i, i\,\}\,.$$

Acest lucru explică pe de o parte de ce $\sqrt{-1}$ nu este cea mai bună notaţie pentru i, iar pe de altă parte explică paradoxul $1 = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$. De fapt, datorită faptului că funcţia putere este multivocă proprietăţi ale puterilor care aveau loc în cazul real nu au loc în general în cazul complex: de exemplu $z^{\alpha}\cdot w^{\alpha} \neq (z\cdot w)^{\alpha}$ şi $(z^{\alpha})^{\beta} \neq z^{\alpha\cdot\beta}$.

6.32 Exemplu. Cât este i^i?

Conform definiţiei $i^i = e^{i\cdot \operatorname{Log} i}$. Pentru a vedea cât este $\operatorname{Log} i$ să vedem cât este modulul şi argumentul lui $z = i$. Avem $|z| = 1$ şi $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că
$\operatorname{Log} i = \{\, \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)\,\} = \left\{\, i\frac{\pi}{2}(4k+1)\,\right\}$ şi

$$i^i = e^{i\cdot \operatorname{Log} i} = e^{i\cdot(i\frac{\pi(4k+1)}{2})} = \left\{\, e^{-\frac{\pi(4k+1)}{2}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Am obţinut că i^i este o mulţime de numere reale.

6.33 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $\cos z = -2$ în $\mathbb{C}$.

În mulţimea numerelor reale această ecuaţie nu are nici o soluţie, dar în mulţimea numerelor complexe are o infinitate. Să arătăm lucrul acesta. Pornind de la egalitatea $\cos z = (e^{iz}+e^{-iz})/2$ şi notând $w = e^{iz}$ obţinem ecuaţia $w^2 + 4w + 1 = 0$. Cele două soluţii ale ecuaţiei sunt $w_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. Luând pe rând avem $e^{iz} = -2 + \sqrt{3}$. Rezultă $iz \in \mathrm{Log}(-2 + \sqrt{3}) = \left\{ \ln|-2+\sqrt{3}| + i(\arg(-2+\sqrt{3}) + 2k\pi) \right\}$. Înmulţind cu $-i$ se obţine prima infinitate de soluţii

$$z \in \left\{ -i\ln(2-\sqrt{3}) + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Analog pentru cazul $e^{iz} = -2 - \sqrt{3}$ se obţine

$$z \in \left\{ -i\ln(2+\sqrt{3}) + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Reuniunea celor două mulţimi obţinute constituie soluţia ecuaţiei date.

6.4 Exerciţii

Probleme propuse

6.1. Să se determine partea reală şi imaginară a numerelor complexe:

a) $z = e^{2+i\frac{7\pi}{6}}$

b) $z = (-1 + i\sqrt{3})^{2015}$

c) $z = \dfrac{\cos i}{3-i}$

d) $z = \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln 2 + i\dfrac{3\pi}{4}\right)$

e) $z = (1-i)^{1+i}$.

f) $z = (-1)^i$

6.2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:

a) $z^3 = 1$

b) $z^4 = 1$

c) $z^3 = i$

d) $z^{2n+1} - 1 = 0$

e) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$

f) $\sqrt{3}\sin z + i\cos z = 1$

g) $\sin z = -2$.

6.3. Să se reprezinte în planul complex mulţimea punctelor z care verifică:

a) $z^{10} - 1 = 0$

b) $\mathrm{Im}(z - 2i + 1) = 0$

c) $\arg(z + 3i) = \dfrac{\pi}{6}$

d) $|z + i| = 2$.

e) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-i}{z+i} = 0$

f) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-i}{z+i} = 1$

g) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{1}{2}$

h) $|z - i| < 1$

i) $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

j) $\left|\dfrac{z-i}{z+2}\right| < 1$.

6.4. Să se demonstreze identitatea paralelogramului

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

pentru orice două numere complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Indicaţii la problemele propuse

6.1. a) $z = -\frac{e^2}{2}(\sqrt{3} + i)$ b) $z = -2^{2014}(1 + i\sqrt{3})$ c) $z = \frac{3(e^2+1)}{20e} + i\frac{e^2+1}{20e}$ d) $z = -\frac{3}{4} + \frac{i}{4}$ e) $z = \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{4}-2k\pi}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ f) $z = e^{-\pi(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$

6.2. a) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ b) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$ c) $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ $z_3 = -i$ d) $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ e) $z_k = i \operatorname{ctg}\frac{\pi(2k+1)}{2n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ f) $z_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ şi $z_k = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ g) Soluţia în $\mathbb{C}$ este $z_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$

6.3. a) $z_k = e^{2k\pi i/10}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ sunt vârfurile unui decagon regulat centrat în origine. b) dreapta $y = 2$ c) dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$ d) cerc cu centru în $-i$ şi rază 2 e) cercul unitate $x^2 + y^2 = 1$ f) dreapta $y = -1$ g) cerc cu centru în $(0, 1)$ şi rază 2 h) interiorul cercului cu centru i şi rază 1 i) exteriorul cercului cu centru $(-1, 0)$ şi rază $\sqrt{2}$ j) semiplanul $2x + 2y + 3 > 0$.

6.4. Folosim proprietăţile conjugatului

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{z_1 + z_2} + (z_1 - z_2)\overline{z_1 - z_2} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} \\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .
\end{aligned}$$

Capitolul 7

Derivata şi integrala unei funcţii complexe

7.1 Funcţii olomorfe

7.1 Definiţie. *O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ definită pe o mulţime deschisă $G \subset \mathbb{C}$ este* **derivabilă** *într-un punct $z \in G$ dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Această limită se numeşte **derivata** *funcţiei f în z şi se notează $f'(z)$.*

7.2 Observaţie. O funcţie $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabilă într-un punct se mai numeşte ***monogenă*** în acel punct. Această denumire de funcţie monogenă se foloseşte uneori pentru a face distinţia dintre o funcţie complexă de variabilă complexă care este derivabilă şi o funcţie complexă de variabilă reală derivabilă. Când se doreşte această distincţie, denumirea de funcţie derivabilă este rezervată funcţiilor complexe de variabilă reală.

7.3 Definiţie. *O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ este* **olomorfă** *într-un punct $z \in G$ dacă există un disc $D(z, r) \subset G$ astfel încât f să fie derivabilă în orice punct al discului $D(z, r)$. Spunem că f este olomorfă pe mulţimea D dacă f este olomorfă în fiecare punct al mulţimii D. Cu alte cuvinte f este olomorfă pe D dacă f este olomorfă pe o mulţime deschisă G care conţine mulţimea D.*

7.4 Notaţie. Mulţimea funcţiilor olomorfe pe mulţimea D se notează $\mathcal{H}(D)$.

7.5 Teoremă. *Fie $f : G \to \mathbb{C}$ şi $z = x + iy \in G$ şi fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ unde u şi v sunt funcţii reale de variabile reale definite pe G.*

Dacă f este derivabilă în z atunci funcţiile u şi v au derivate parţiale în punctul (x, y) şi sunt satisfăcute **condiţiile Cauchy-Riemann**

$$u'_x = v'_y \quad \text{şi} \quad u'_y = -v'_x.$$

Reciproc, dacă u şi v sunt funcţii diferenţiabile în punctul (x, y) şi sunt satisfăcute condiţiile Cauchy-Riemann atunci f este derivabilă în $x + iy$.

Demonstraţie. Dacă f este derivabilă în punctul $z = x + iy$ atunci există limita şi este finită

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Fie $h = h_1 + ih_2$. Atunci

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y)}{h_1 + ih_2} + i\,\frac{v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y)}{h_1 + ih_2}.$$

Dacă luăm $h_2 = 0$ şi $h_1 \to 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_1\to 0} \left(\frac{u(x+h_1, y) - u(x,y)}{h_1} + i\,\frac{v(x+h_1, y) - v(x,y)}{h_1} \right).$$

Acest lucru ne arată că există şi sunt finite limitele

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{u(x+h_1, y) - u(x,y)}{h_1} \quad \text{şi} \quad \lim_{h_1\to 0} \frac{v(x+h_1, y) - v(x,y)}{h_1}.$$

Dar aceasta înseamnă că există şi sunt finite u'_x şi v'_x şi avem

$$f'(z) = u'_x + iv'_x.$$

Dacă luăm $h_1 = 0$ şi $h_2 \to 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_2\to 0} \left(\frac{u(x, y+h_2) - u(x,y)}{ih_2} + i\,\frac{v(x, y+h_2) - v(x,y)}{ih_2} \right).$$

Acest lucru ne arată că există şi sunt finite limitele

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{u(x, y+h_2) - u(x,y)}{h_2} \quad \text{şi} \quad \lim_{h_2\to 0} \frac{v(x, y+h_2) - v(x,y)}{h_2}.$$

Dar aceasta înseamnă că există şi sunt finite u'_y şi v'_y şi avem

$$f'(z) = -iu'_y + v'_y.$$

Egalând acum $u'_x + iv'_x = f'(z) = -iu'_y + v'_y$ se obţin condiţiile Cauchy-Riemann.

Să presupunem acum că u şi v sunt diferenţiabile în punctul (x, y) şi sunt verificate condiţiile Cauchy-Riemann. Din definiţia diferenţiabilităţii funcţiilor u şi v avem

$$u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = u'_x \cdot h_1 + u'_y \cdot h_2 + \alpha_1(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$
$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = v'_x \cdot h_1 + v'_y \cdot h_2 + \alpha_2(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

unde α_1 şi α_2 sunt funcţii cu proprietatea că

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \alpha_1(x, y, h_1, h_2) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \alpha_2(x, y, h_1, h_2) = 0.$$

Putem scrie

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)}{h_1+ih_2}+i\,\frac{v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)}{h_1+ih_2}\\ &= \frac{u'_x\cdot h_1+u'_y\cdot h_2+i(v'_x\cdot h_1+v'_y\cdot h_2)}{h_1+ih_2}+\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)|h|}{h_1+ih_2}\\ &= \frac{u'_x\cdot(h_1+ih_2)+v'_x\cdot(-h_2+ih_1)}{h_1+ih_2}+\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)|h|}{h_1+ih_2}\\ &= u'_x+iv'_x+(\alpha_1+i\alpha_2)\cdot\frac{|h|}{h}.\end{aligned}$$

Din faptul că

$$\left|(\alpha_1(x,y,h_1,h_2)+i\alpha_2(x,y,h_1,h_2))\cdot\frac{|h|}{h}\right|\leq|\alpha_1(x,y,h_1,h_2|+|\alpha_2(x,y,h_1,h_2)|\to 0$$

rezultă că limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

există şi este egală cu

$$f'(z)=u'_x+iv'_x.$$

□

7.6 Exemplu. Să se arate că funcţia $f(z)=e^z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi $(e^z)'=e^z$.

Pentru $z=x+iy$ avem $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$. Dacă scriem $f=u+iv$ atunci prin identificare $u(x,y)=e^x\cos y$ şi $v(x,y)=e^x\sin y$. Pentru că au loc egalităţile $u'_x=e^x\cos y=v'_y$ şi $u'_y=-e^x\sin y=-v'_x$, condiţiile Cauchy-Riemann sunt verificate pentru orice punct (x,y), ceea ce ne arată că f este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Derivata funcţiei f va fi

$$f'(z)=u'_x+iv'_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

7.7 Exemplu. Funcţia $f(z)=|z|^2$ este diferenţiabilă în $z=0$ dar nu este olomorfă în nici un punct.

Dacă scriem $f=u+iv$ avem $u(x,y)=x^2+y^2$ şi $v(x,y)=0$ ceea ce ne arată că $u'_x=2x$, $v'_y=0$, $u'_y=2y$ şi $v'_x=0$. Condiţiile Cauchy-Riemann sunt verificate doar în punctul $(0,0)$, ceea ce ne arată că f este derivabilă în $z=0$ fără să fie olomorfă.

7.8 Observaţie. Dacă f este derivabilă într-un punct z atunci derivata $f'(z)$ poate fi exprimată prin oricare din următoarele formule

$$f'(z)=u'_x+iv'_x$$

$$f'(z)=v'_y-iu'_y$$

$$f'(z)=u'_x-iu'_y$$

$$f'(z)=v'_y+iv'_x.$$

7.9 Observaţie. Înlocuind $x = (z + \overline{z})/2$ şi $y = (z - \overline{z})/(2i)$ obţinem

$$f(z) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right).$$

Aceasta ne arată că putem privi funcţia f ca funcţie de variabilele independente z şi $\overline{z}$. Dacă u şi v au derivate parţiale de ordinul întâi atunci

$$\begin{aligned} f'_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}u'_x + \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x - \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}\left(u'_x - v'_y\right) + \frac{i}{2}\left(u'_y + v'_y\right) \\ f'_z &= \frac{1}{2}u'_x - \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x + \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}\left(u'_x + v'_y\right) + \frac{i}{2}\left(v'_x - u'_y\right). \end{aligned}$$

Dacă f este derivabilă în z atunci

$$f'_{\overline{z}} = 0 \quad \text{şi} \quad f'_z = f'(z).$$

7.10 Observaţie. Deoarece definiţia derivabilităţii unei funcţii complexe într-un punct este aceeaşi ca şi în cazul real, toate regulile de derivare din cazul real rămân adevărate şi în cazul funcţiilor de variabilă complexă. Astfel de exemplu $(z^2)' = 2z$.

7.11 Observaţie. Dacă f este o funcţie derivabilă şi $f = u + iv$ atunci u şi v sunt funcţii armonice. Pentru demonstraţie vom presupune că u şi v au derivate parţiale de ordinul al doilea mixte continue (se va vedea mai târziu că această presupunere nu este o restricţie). Derivând condiţiile Cauchy-Riemann, prima în raport cu x şi a doua în raport cu y obţinem $u''_{x^2} = v''_{yx}$ şi $u''_{y^2} = -v''_{xy}$. Adunând aceste relaţii şi ţinând cont că derivatele mixte sunt egale rezultă

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

ceea ce ne arată că u este funcţie armonică. La fel se arată că $v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0$.

7.12 Observaţie. Dacă f este olomorfă pe o mulţime G deschisă şi se cunoaşte partea reală sau partea imaginară atunci f este perfect determinată făcând abstracţie de o constantă.

7.13 Exemplu. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care $\operatorname{Im} f = 3x^2y - y^3 - x$.

Fie $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x$. Se poate arăta că v este armonică. Derivata funcţiei f este

$$f'(z) = v'_y + iv'_x = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy - 1).$$

Luând $x = z$ şi $y = 0$ rezultă $f'(z) = 3z^2 - i$. Prin integrare $f(z) = z^3 - iz + C$.

7.14 Exemplu. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care $\operatorname{Re} f = \varphi(x^2 + y^2)$, unde φ este o funcţie de două ori derivabilă.

Fie $u = \varphi(x^2 + y^2)$. Avem $u'_x = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x$ şi $u'_y = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y$. Derivatele de ordinul doi sunt $u''_{x^2} = \varphi''(x^2 + y^2) \cdot 4x^2 + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2$ şi $u''_{y^2} = \varphi''(x^2 + y^2) \cdot 4y^2 + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2$. Pentru că u este armonică rezultă că $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$. Aceasta revine la

$$4(x^2 + y^2) \cdot \varphi''(x^2 + y^2) + 4\varphi'(x^2 + y^2) = 0.$$

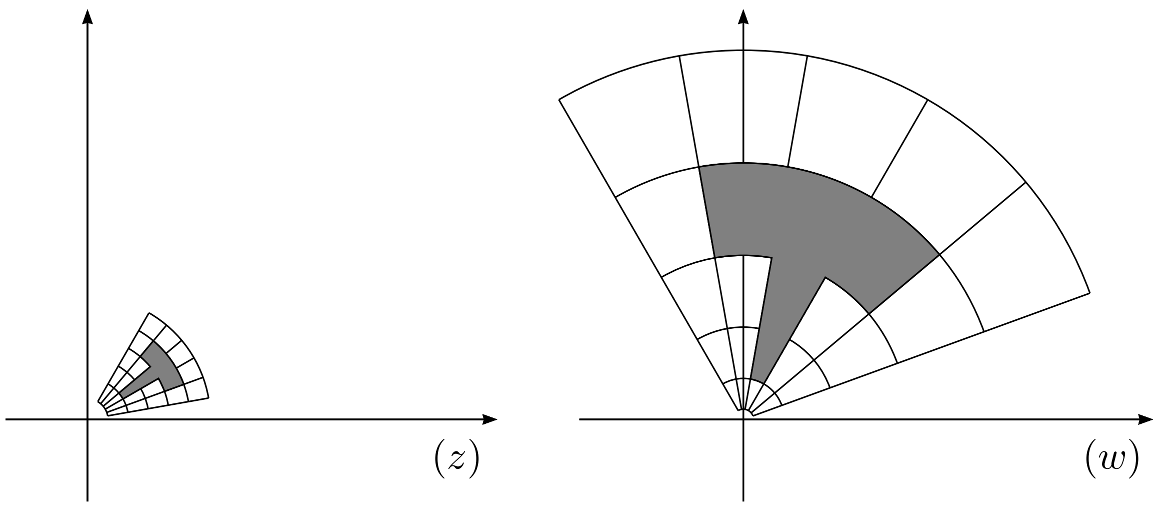

Figura 7.1: Reprezentarea funcţiei $w = z^2$

Notând $r = x^2+y^2$ rezultă ecuaţia diferenţială $r\cdot\varphi''(r)+\varphi'(r) = 0$. Dacă notăm cu $\psi(r) = \varphi'(r)$ obţinem ecuaţia liniară de ordinul întâi $\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r) = 0$. Înmulţind toată egalitatea cu $e^{\int \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r} = e^{\ln r} = r$ obţinem

$$(r \cdot \psi(r))' = 0 \iff \psi(r) = \frac{C_1}{r} \iff \varphi(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Am obţinut că $u(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$. Derivata funcţiei f este

$$f'(z) = u'_x - iu'_y = \frac{C_1 2x}{x^2 + y^2} - i\frac{C_1 2y}{x^2 + y^2} = \frac{2C_1}{z}.$$

Rezultă prin integrare $f(z) = 2C_1 \operatorname{Log} z + C$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$ şi $C \in \mathbb{C}$.

7.2 Reprezentări conforme

7.15 Observaţie. Pentru a reprezenta o funcţie $w = f(z)$ vom folosi două planuri: planul variabilei z, notat (z) şi planul valorilor funcţiei (w). De exemplu, funcţia $w = z^2$ este reprezentată în Figura 7.1.

7.16 Observaţie. Pentru a vedea care este interpretarea geometrică a derivatei fie (C) un arc de curbă în planul variabilei (z) şi fie punctul $M(x_0, y_0)$ pe acest arc. Vom nota cu (Γ) imaginea curbei prin transformarea $w = f(z)$ şi $N(u_0, v_0)$ imaginea punctului M. Dacă $f'(z_0) \neq 0$ atunci din definiţia derivatei

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right|$$

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \arg \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} [\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)] = \beta - \alpha,$$

unde α este unghiul pe care-l face tangenta în punctul M la arcul (C) cu axa reală a planului (z), iar β este unghiul pe care-l face tangenta în punctul N la arcul (Γ) cu axa reală a planului (w).

Modulul derivatei se numeşte coeficient de deformare şi este factorul de proporţionalitate cu care se transformă elementele de arc într-o vecinătate a punctului considerat.

Argumentul derivatei este unghiul cu care se roteşte în sens direct tangenta la o curbă în punctul considerat. Atât coeficientul de dilatare cât şi unghiul de rotaţie sunt independente de curba considerată. În punctele în care $f'(z) = 0$, interpretarea geometrică nu se mai poate face deoarece în aceste puncte argumentul derivatei este nedeterminat.

7.17 Definiţie. *O transformare $w = f(z)$ se numeşte* **conformă** *în punctul z dacă păstrează unghiul a două curbe oarecare ce trec prin punctul considerat. Transformarea este conformă pe un domeniu dacă este conformă în fiecare punct al domeniului.*

7.18 Teoremă. *O funcţie olomorfă $f(z)$ defineşte o transformare conformă în toate punctele în care derivata este nenulă.*

Demonstraţie. Fie z un punct în care $f'(z) \neq 0$. Fie (C_1) şi (C_2) două curbe netede ce trec prin punctul M de afix z. Fie α_1 şi α_2 unghiurile pe care le fac tangentele la aceste curbe în punctul M cu axa reală a planului (z). Fie (Γ_1) şi (Γ_2) imaginile curbelor (C_1) şi (C_2) prin transformarea $w = f(z)$ şi fie β_1 şi β_2 unghiurile pe care le fac tangentele la aceste curbe în punctul N de afix $w = f(z)$ cu axa reală a planului (w).

Conform interpretării derivatei avem $\arg f'(z) = \beta_1 - \alpha_1$ şi $\arg f'(z) = \beta_2 - \alpha_2$ de unde rezultă $\beta_2 - \alpha_2 = \beta_1 - \alpha_1$, adică $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, ceea ce ne arată că unghiul dintre tangentele la curbele (C_1) şi (C_2) este acelaşi cu unghiul dintre tangentele la curbele (Γ_1) şi (Γ_2). □

7.19 Definiţie. *O funcţie olomorfă şi injectivă pe un domeniu D se numeşte funcţie* **univalentă** *pe D.*

7.20 Observaţie. Pentru o funcţie univalentă $f(z)$ şi $z_2 \neq z_1$ avem $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \neq 0$. Rezultă că $f'(z) \neq 0$, pentru orice z din domeniu, ceea ce ne arată că o funcţie univalentă realizează o transformare conformă.

7.21 Definiţie. *Fiind date domeniile D şi Δ o funcţie f se numeşte* **reprezentare conformă** *dacă f este univalentă şi $f(D) = \Delta$.*

7.22 Definiţie. *Domeniile D şi Δ se numesc* **conform echivalente** *dacă există o reprezentare conformă a domeniului D pe Δ.*

7.23 Definiţie. *O mulţime se numeşte* **simplu conexă** *(fără găuri) dacă oricare ar fi o curbă simplă, închisă, situată în domeniu atunci întreg domeniul mărginit de această curbă face parte din domeniu.*

7.24 Teoremă (Teorema lui Riemann)**.** *Orice domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$ este conform echivalent cu discul unitate $D(0,1)$.*

7.3 Funcţii omografice

7.25 Definiţie. *Se numeşte funcţie* **omografică** *transformarea*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0.$$

7.26 Observaţie. Funcţia omografică este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Derivata

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

ne arată că această funcţie este o reprezentare conformă pe $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Ea poate fi extinsă dacă definim $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ şi $f(\infty) = \frac{a}{c}$ în cazul $c \neq 0$ şi $f(\infty) = \infty$ dacă $c = 0$.

Funcţia omografică mai este numită transformare Möbius, transformare liniar-fracţionară, circulară sau biliniară.

7.27 Observaţie. În plan ecuaţia generală a unui cerc este $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$. Dacă $A = 0$ se obţine ecuaţia unei drepte. Trecând la variabilă complexă ecuaţia devine

$$Az\overline{z} + B\frac{z+\overline{z}}{2} + C\frac{z-\overline{z}}{2i} + D = 0 \iff Az\overline{z} + \left(\frac{B}{2} - i\frac{C}{2}\right)z + \left(\frac{B}{2} + i\frac{C}{2}\right)\overline{z} + D = 0.$$

Notând $\frac{B}{2} + i\frac{C}{2} = E$ obţinem ecuaţia cercului în complex $Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$, $A, D \in \mathbb{R}$ şi $E \in \mathbb{C}$.

7.28 Teoremă. *Funcţia omografică transformă un cerc într-un cerc sau o dreaptă şi o dreaptă într-o dreaptă sau un cerc.*

Demonstraţie. Inversând funcţia omografică avem

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad \text{şi} \quad \overline{z} = \frac{-\overline{d}\,\overline{w}+\overline{b}}{\overline{c}\,\overline{w}-\overline{a}}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia cercului $Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$, $A, D \in \mathbb{R}$, $E \in \mathbb{C}$ obţinem

$$A(-dw+b)(-\overline{d}\,\overline{w}+\overline{b}) + \overline{E}(-dw+b)(\overline{c}\,\overline{w}-\overline{a}) + E(-\overline{d}\,\overline{w}+\overline{b})(cw-a) + D(cw-a)(\overline{c}\,\overline{w}-\overline{a}) = 0.$$

Va rezulta $\alpha w\overline{w} + \beta w + \gamma\overline{w} + \delta = 0$ unde

$$\alpha = Ad\overline{d} - \overline{E}d\overline{c} - E\overline{d}c + Dc\overline{c}$$

$$\beta = -Ad\overline{b} + \overline{E}d\overline{a} + Ec\overline{b} - Dc\overline{a}$$

$$\gamma = -A\overline{d}b + \overline{E}\,\overline{c}b + E\overline{d}a - D\overline{c}a$$

$$\delta = Ab\overline{b} - \overline{E}b\overline{a} - E\overline{b}a + Da\overline{a}.$$

Deoarece $\alpha = \overline{\alpha}$ şi $\delta = \overline{\delta}$ rezultă $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$. Pentru că $\beta = \overline{\gamma}$ am obţinut ecuaţia unui cerc în planul (w). Dacă $\alpha = 0$ avem ecuaţia unei drepte. $\square$

7.29 Observaţie. Cazuri particulare de funcţii omografice sunt:

1. ***translaţia*** $w = z + a$
2. ***rotaţia*** $w = e^{it} \cdot z$, $t \in \mathbb{R}$
3. ***omotetia*** $w = a \cdot z$, $a \in \mathbb{R}$
4. ***inversiunea*** $w = \frac{1}{z}$.

Orice funcţie omografică se compune dintr-o succesiune de transformări particulare. Dacă $c \neq 0$ atunci

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})}$$

se compune din

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot z_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c}.$$

Dacă $c = 0$ atunci $w = \frac{az+b}{d}$ se compune din $z_1 = \frac{a}{d} \cdot z$ şi $w = z_1 + \frac{b}{d}$.

7.30 Definiţie. Biraportul *a patru numere z_1, z_2, z_3 şi z_4 se defineşte prin*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

7.31 Teoremă. *Transformarea omografică păstrează biraportul a patru puncte.*

Demonstraţie. Dacă notăm $w_i = \frac{az_i+b}{cz_i+d}$ atunci

$$w_1 - w_3 = \frac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} \quad w_2 - w_3 = \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}.$$

Rezultă

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{(z_1-z_3)(cz_2+d)}{(z_2-z_3)(cz_1+d)}.$$

Analog

$$\frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4} = \frac{(z_1-z_4)(cz_2+d)}{(z_2-z_4)(cz_1+d)}.$$

Obţinem $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. □

7.32 Observaţie. O funcţie omografică este determinată dacă se cunosc imaginile a trei puncte distincte prin această transformare. Transformarea este definită de

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

7.33 Exemplu. Să se determine funcţia omografică care transformă punctele $z_1 = 1$, $z_2 = i$ şi $z_3 = \infty$ în $w_1 = i$, $w_2 = 0$ şi $w_3 = -1$.

Forma generală a transformării este $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Din faptul că $f(i) = 0$ rezultă $ai + b = 0$ adică $b = -ia$. Din $f(\infty) = -1$ rezultă $a/c = -1$, adică $c = -a$. Avem de asemenea $f(1) = i$, adică $a+b = i(c+d)$ şi folosind relaţiile deja obţinute ultima egalitate este echivalentă cu $a - ia = -ia + id$, adică $d = -ia$. Funcţia omografică este

$$f(z) = \frac{az - ia}{-az - ia} = \frac{-z+i}{z+i}.$$

7.34 Exemplu. În ce se transformă mulţimea $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \operatorname{Re} z < 0 \}$ prin transformarea $w = \frac{1-z}{1+z}$?

Soluţie 1. Avem

z	1	i	-1	0	∞
w	0	$-i$	∞	1	-1.

Cercul $|z| = 1$ se transformă în dreapta $\operatorname{Re} w = 0$. Pentru că imaginea originii este punctul $w = 1$ discul $|z| < 1$ se transformă în semiplanul $\operatorname{Re} w > 0$.

Imaginea dreptei $\operatorname{Re} z = 0$ este cercul $|w| = 1$. Dacă parcurgem dreapta în sensul în care în stânga dreptei se va afla semiplanul $\operatorname{Re} z < 0$ atunci în stânga cercului $|w| = 1$ parcurs în sensul acelor de ceasornic se află regiunea $|w| > 1$.

În concluzie, regiunea $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \operatorname{Re} z < 0 \}$ se transformă în regiunea

$$\Delta = \{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0,\ |w| > 1 \}.$$

Soluţie 2. Din $w = \frac{1-z}{1+z}$ rezultă $z = \frac{1-w}{1+w}$. Atunci $|z| < 1$ este echivalent cu $|1 - w| < |1 + w|$ de unde $(u - 1)^2 + v^2 < (u + 1)^2 + v^2$ sau $u > 0$, deci $\operatorname{Re} w > 0$.
Relaţia $\operatorname{Re} z < 0$ este echivalentă cu $z + \overline{z} < 0$ de unde $\frac{1-w}{1+w} + \frac{1-\overline{w}}{1+\overline{w}} < 0$ care este echivalentă cu $2 - 2w \cdot \overline{w} < 0$ adică $|w| > 1$. În concluzie mulţimea D se transformă în

$$\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0,\ |w| > 1 \}.$$

7.4 Definiţia integralei unei funcţii complexe

7.35 Definiţie. *Fie C o curbă netedă pe porţiuni şi fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o funcţie definită pe un domeniu ce conţine imaginea curbei C. Spunem că f este integrabilă pe C dacă există*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_C u(x, y)\,\mathrm{d}x - v(x, y)\,\mathrm{d}y + i \int_C v(x, y)\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

7.36 Observaţie. Existenţa integralei unei funcţii de variabilă complexă rezultă din existenţa a două integrale curbilinii reale. Dacă parametrizarea curbei este

$$C : \quad z = z(t),\ t \in [a, b]$$

atunci integrala se poate calcula prin

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Din definiţie rezultă următoarele proprietăţi ale integralei complexe:

$$\int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{BA} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_C [af(z) + bg(z)]\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_C g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1\cup C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\;\mathrm{d}s \le \sup_{z\in C}|f(z)|\cdot \ell_C,$$

unde $\mathrm{d}s$ este elementul de arc şi ℓ_C este lungimea curbei C. Vom demonstra ultima proprietate. Fie $z = z(t),\ t \in [a, b]$ o parametrizare a curbei C. Avem

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Fie θ argumentul numărului complex $\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci

$$\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t\right|\cdot e^{i\theta}.$$

Folosind inegalitatea $\operatorname{Re} z \le |z|$ rezultă

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\cdot f(z(t))\cdot z'(t)\right]\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b \left|e^{-i\theta}\cdot f(z(t))\cdot z'(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dacă $z(t) = x(t) + iy(t)$ atunci $|z'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$. Ţinând cont de faptul că lungimea curbei se exprimă prin $\ell_C = \int_C \mathrm{d}s$ obţinem proprietatea menţionată.

7.37 Exemplu. Să se calculeze $\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, unde C este cercul cu centrul în a şi de rază r, parcurs în sens direct, iar n este un număr întreg.

O reprezentare în $\mathbb{C}$ a cercului $|z - a| = r$ este

$$z(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi).$$

Avem $z'(t) = ire^{it}$ şi prin urmare

$$\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n e^{int}\cdot ire^{it}\,\mathrm{d}t = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $n = -1$ obţinem

$$\int_C \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}t = 2\pi i,$$

iar pentru $n \ne -1$ avem

$$\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = ir^{n+1}\left.\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

7.5 Formulele lui Cauchy

7.38 Teoremă (Teorema lui Cauchy). *Fie C o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni. Dacă f este olomorfă pe domeniul mărginit de curba C şi integrabilă pe curba C atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Demonstraţie. Avem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_C v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Aplicând formula lui Green pentru cele două integrale curbilinii rezultă

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \left(v'_x + u'_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D \left(u'_x - v'_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul mărginit de curba C. Folosind condiţiile Cauchy-Riemann obţinem $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

7.39 Observaţie. Fie D un domeniu şi C_1 şi C_2 două curbe închise situate în acest domeniu. Dacă f este o funcţie olomorfă în domeniul mărginit de cele două curbe atunci

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

curbele fiind la fel orientate.

Fie $A \in C_1$ şi $B \in C_2$. Fie Γ curba închisă formată din arcul de curbă de pe C_1 parcurs de la A până la A în sens direct, la care adăugăm segmentul AB parcurs de la A la B, apoi arcul de pe C_2 parcurs în sens invers de la B până la B şi apoi segmentul BA parcurs de la B la A. Funcţia f fiind olomorfă pe interiorul acestei curbe Γ rezultă $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Pe de altă parte, folosind aditivitatea integralei

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{AB} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Cu aceasta observaţia făcută este demonstrată.

7.40 Teoremă (Formula integrală a lui Cauchy). *Fie f o funcţie olomorfă în domeniul simplu conex D şi fie C o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni din D, care înconjoară un punct de afix a. Atunci*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Demonstraţie. Punctul a este în interiorul domeniului mărginit de curba C deci există un disc $D(a,r)$ inclus în acest domeniu. Fie $\varepsilon < r$ un număr real pozitiv. Deoarece funcţia $z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă pe domeniul mărginit de curba C şi cercul $|z-a| = \varepsilon$, conform observaţiei precedente rezultă

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Pentru că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)2\pi i,$$

rămâne de arătat că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dar

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)}{\varepsilon e^{it}}\cdot \varepsilon i e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le 2\pi \cdot \sup_{t\in[0,2\pi)} \left|f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$ şi ţinând cont de continuitatea funcţiei f rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,2\pi)} \left|f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)\right| = 0,$$

ceea ce demonstrează formula lui Cauchy. □

7.41 Observaţie. Formula integrală a lui Cauchy ne arată că dacă f este o funcţie olomorfă pe un domeniu D atunci cunoaşterea valorilor funcţiei pe o curbă închisă este suficientă pentru a determina valoarea ei în orice punct din domeniul mărginit de această curbă.

7.42 Teoremă (Formula lui Cauchy pentru derivată)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în interiorul şi pe frontiera curbei simple, închise şi netede pe porţiuni C. Atunci există derivata de orice ordin a funcţiei f într-un punct a interior domeniului mărginit de curba C şi*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 0$ formula este adevărată. Presupunem formula adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$. Punctul a fiind interior doemniului mărginit de curbă există un disc $D(a, r)$ inclus în acest domeniu. Fie $h \in \mathbb{C}$ astfel încât $|h| < r$. Avem

$$f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right]\mathrm{d}z.$$

Demonstrăm că

$$F(h) = \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}}\,\mathrm{d}z$$

tinde la zero atunci când h tinde la zero şi cu aceasta teorema este demonstrată. Funcţia $F(h)$ se poate scrie

$$F(h) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C f(z)\cdot\left[\frac{(z-a)^{n+1} - (z-a-h)^{n+1}}{h(z-a-h)^{n+1}(z-a)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z-a)^{n+2}}\right]\mathrm{d}z.$$

Folosind faptul că

$$\begin{aligned}
&\frac{w^{n+1}-v^{n+1}}{(w-v)v^{n+1}w^{n+1}}-\frac{n+1}{w^{n+2}}\\
&=\frac{w^n+w^{n-1}v+\cdots+v^n}{v^{n+1}w^{n+1}}-\frac{n+1}{w^{n+2}}\\
&=\frac{w^{n+1}+w^nv+\cdots+wv^n-(n+1)v^{n+1}}{v^{n+1}w^{n+2}}\\
&=\frac{(w^{n+1}-v^{n+1})+(w^nv-v^{n+1})+\cdots+(wv^n-v^{n+1})}{v^{n+1}w^{n+2}}\\
&=(w-v)\cdot\frac{(w^n+w^{n-1}v+\cdots+v^n)+v(w^{n-1}+w^{n-2}v+\dots v^{n-1})+\cdots+v^n}{v^{n+1}w^{n+2}}\\
&=(w-v)\cdot\frac{w^n+2w^{n-1}v+3w^{n-2}v^2+\cdots+(n+1)v^n}{v^{n+1}w^{n+2}}
\end{aligned}$$

şi considerând $\delta=\min_{z\in C}(|z-a-h|\,,|z-a|)>0$ rezultă

$$|F(h)|\leq\frac{n!}{2\pi}\int_C|f(z)|\cdot|h|\cdot\frac{1+2+\cdots+(n+1)}{\delta^{n+3}}\,\mathrm{d}s\leq\frac{(n+2)!}{4\pi\delta^{n+3}}\ell_C\sup_{z\in C}|f(z)|\cdot|h|.$$

De aici rezultă $\lim_{h\to 0}F(h)=0$. □

7.43 Observaţie. Formula lui Cauchy pentru derivate ne arată că o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă are derivate de orice ordin pe acea mulţime.

7.6 Exerciţii

Probleme propuse

7.1. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care:

a) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+2x,\ z=x+iy,\ f(i)=2i-1$

b) $\operatorname{Re} f(z)=\varphi(x^2-y^2)$

c) $\operatorname{Im} f(z)=e^x\sin y+\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=1$

d) $\operatorname{Im} f(z)=\varphi(xy)$.

7.2. Să se determine funcţia omografică care transformă punctele:

a) $z_1=1,z_2=i,z_3=-1$ în $w_1=\infty,w_2=i,w_3=0$

b) $z_1=1,z_2=-i,z_3=\infty$ în $w_1=\infty,w_2=1,w_3=-i$

c) $z_1=\infty,z_2=i,z_3=0$ în $w_1=0,w_2=i,w_3=\infty$.

7.3. Să se determine imaginea domeniului D prin transformarea $w = f(z)$

a) $D = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \}, \ f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

b) $D = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 2 \}, \ f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

c) $D = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1 \}, \ f(z) = \dfrac{z+2}{2z+1}.$

7.4. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} (z^2 + z \cdot \overline{z})\,\mathrm{d}z$

7.5. Folosind formulele lui Cauchy să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}$

Indicaţii la problemele propuse

7.1. a) $f(z) = z^2 + 2z$ b) $f(z) = cz^2 + C_1$ c) $f(z) = e^z - 1/z + 2 - e$ d) $f(z) = cz^2 + c_1$

7.2. a) $w = \frac{z+1}{1-z}$ b) $w = -i \cdot \frac{z+1}{z-1}$ c) $w = -1/z$

7.3. a) $\{ w \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} w > 0 \}$ b) $\left\{ w \in \mathbb{C} \,|\, \left|w - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3} \right\}$ c) $\{ w \in \mathbb{C} \,|\, |w| < 1 \}$.

7.4. a) $2i$ b) 0

7.5. a) πi b) π/e c) $\pi i/2$.

Capitolul 8

Teorema reziduurilor

8.1 Serii de puteri

Seriile de numere complexe se definesc ca şi seriile de numere reale.

8.1 Definiţie. *Fie (z_n) un şir de numere complexe. Construim şirul sumelor parţiale*

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n.$$

Perechea de şiruri (z_n, s_n) se numeşte **serie** *cu termenul general z_n. Dacă şirul (s_n) este convergent atunci seria este* **convergentă** *şi limita*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

se va numi **suma seriei**. *Vom folosi aceeaşi notaţie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ şi pentru a desemna seria (z_n, s_n). Dacă seria de numere reale pozitive*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

este convergentă atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ se numeşte **absolut convergentă**.

8.2 Definiţie. *Fie (a_n) un şir de numere complexe şi a un număr complex. Se numeşte* **serie de puteri** *centrată în a seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

8.3 Observaţie. Notând $w = z - a$ seria devine centrată în origine. Pentru $z = a$ seria este convergentă.

8.4 Teoremă (Teorema lui Abel). *Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ este convergentă într-un punct $z_0 \neq a$ atunci ea este absolut convergentă în discul $|z-a| < |z_0 - a|$ şi uniform convergentă în orice disc $|z-a| \leq r < |z_0 - a|$.*

Demonstraţie. Fiindcă z_0 este un punct de convergenţă al seriei rezultă că termenul general al seriei converge la zero, adică $\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n = 0$. De aici deducem că $(a_n(z_0-a)^n)$ este un şir mărginit: există $M>0$ astfel încât $|a_n|\,|z_0-a|^n < M$. Fie z un punct oarecare din discul $|z-a|<|z_0-a|$. Atunci

$$|a_n|\,|z-a|^n \le |a_n|\,|z_0-a|^n \cdot \left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n < M\cdot\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = Mq^n$$

unde $q=|z-a|/|z_0-a|<1$. Seria cu termenul general Mq^n fiind convergentă, rezultă că seria cu termenul general $a_n(z-a)^n$ este absolut convergentă.

Dacă z aparţine discului $|z-a|\le r<|z_0-a|$ atunci $q\le r/|z_0-a|$. Fiindcă acest raport nu depinde de z şi fiindcă $r/|z_0-a|<1$ atunci conform criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcţii, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ va fi uniform convergentă. □

8.5 Definiţie. *Fiind dată seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *se numeşte* **rază de convergenţă** *numărul* R *definit prin*

$$R=\sup\left\{|z-a| \,:\, \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z-a|^n \quad \textit{este convergentă}\right\}.$$

8.6 Observaţie. Raza de convergenţă ne arată că în interiorul cercului $|z-a|=R$ seria este absolut convergentă şi în exterior divergentă. În punctele de pe cerc seria poate fi convergentă sau divergentă. Dacă seria este convergentă doar în punctul $z=a$ atunci $R=0$, dacă seria este convergentă în tot planul complex atunci $R=\infty$. Pentru calculul razei de convergenţă utilizăm formulele

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{sau} \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

dacă limitele există.

8.7 Exemplu. Să considerăm seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, care are raza de convergenţă $R=1$. Suma parţială

$$s_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n$$

prin înmulţire cu z şi apoi scăzută din ea ne dă

$$s_n - zs_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n-(z+z^2+\cdots+z^{n+1}) = 1-z^{n+1}.$$

Pentru că $z^{n+1}\to 0$ când $|z|<1$ rezultă $s_n(1-z)\to 1$, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

8.8 Teoremă (Teorema lui Taylor)**.** *Dacă* f *este o funcţie olomorfă în discul* $D(a,r)$ *atunci există o unică serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *astfel încât*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \textit{pentru orice } z \textit{ din discul } |z-a|<r.$$

Fie C este cercul $|z-a|=\rho$ şi $0<\rho<r$. Atunci coeficienţii seriei sunt daţi de

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Demonstraţie. Fie z un punct din discul $D(a,r)$. Notăm $r_0=|z-a|$ şi alegem un $\rho>0$ cu proprietatea că $r_0<\rho<r$. Conform formulei lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u.$$

Pentru că $\frac{|z-a|}{|u-a|} = \frac{r_0}{\rho} < 1$ avem

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \frac{1}{u-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen şi obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Ţinând cont de formulele lui Cauchy pentru derivate avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

8.9 Observaţie. Seriile Taylor în complex au aceeaşi formă ca şi în real. Astfel

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\operatorname{sh} z = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$\operatorname{ch} z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$$

dezvoltări valabile pentru orice $z\in\mathbb{C}$. De asemenea

$$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad \alpha\in\mathbb{C},$$

dezvoltări valabile pentru $|z|<1$, pentru ramurile uniforme ale funcţiilor pentru care $\ln(1)=0$ şi $1^\alpha=1$.

8.10 Observaţie. Produsul a două serii se calculează prin

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Pentru a demonstra aceasta fie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{şi} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Folosind regula de derivare a lui Leibniz

$$(f(z) \cdot g(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(z) \cdot g^{(n-k)}(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z)}{(n-k)!}.$$

Pentru $z = 0$ obţinem

$$c_n = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

8.11 Exemplu. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului 0 funcţia

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+z}.$$

Avem

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Folosind regula de înmulţire a seriilor $f(z) = \sum_{n=0} c_n z^{2n}$ unde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

8.2 Serii Laurent

8.12 Definiţie. *Se numeşte* **serie Laurent** *centrată în a o serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

8.13 Observaţie. Pentru a determina domeniul de convergenţă scriem seria sub forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

prima serie din membrul drept numindu-se ***partea tayloriană*** iar cea de-a doua ***partea principală*** a seriei Laurent.

Partea tayloriană este convergentă în discul $|z-a|<R$, unde R este raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Dacă notăm $1/(z-a)$ cu w atunci obţinem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ cu raza de convergenţă R_1. Ea va fi convergentă pe mulţimea $|w|<R_1$. Cu notaţia $r=1/R_1$, partea principală a seriei Laurent este convergentă pentru $|z-a|>r$. Dacă $r<R$ atunci seria Laurent este convergentă în coroana circulară

$$D(a,r,R)=\{\, z\in\mathbb{C} \,|\, r<|z-a|<R\,\}\,.$$

8.14 Teoremă (Teorema lui Laurent)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în $D(a,r,R)$. Atunci pentru orice z din coroana circulară*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

unde coeficienţii a_n se pot calcula cu formula

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u,$$

C fiind un cerc $|z-a|=\rho$ cu $r<\rho<R$.

Demonstraţie. Fie z un punct de pe cercul $|z-a|=\rho$ cu $r<\rho<R$. Atunci există numerele R_1 şi R_2 cu proprietatea că $r<R_1<\rho<R_2<R$. Fie C_1 cercul $|z-a|=R_1$ şi C_2 cercul $|z-a|=R_2$. Atunci din formula integrală a lui Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u.$$

Dacă $u\in C_2$ avem $\frac{|z-a|}{|u-a|}=\frac{\rho}{R_2}<1$ şi putem scrie

$$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a-(z-a)}=\frac{1}{u-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}}=\frac{1}{u-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen şi obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Dacă $u\in C_1$ avem $\frac{|u-a|}{|z-a|}=\frac{R_1}{\rho}<1$ şi

$$\frac{1}{u-z}=\frac{-1}{z-u}=\frac{-1}{z-a-(u-a)}=\frac{-1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{u-a}{z-a}}$$
$$=\frac{-1}{z-a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{u-a}{z-a}\right)^m=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Prin integrare obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Pentru că funcţiile $\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}$ sunt olomorfe pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ pe coroana $D(a,r,R)$ putem scrie

$$\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{C}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Din toate aceste relaţii obţinem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

□

8.15 Observaţie. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii olomorfe într-o coroană circulară este unică. Într-adevăr, să presupunem că

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n, \quad z \in D(a,r,R).$$

Atunci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{(u-a)^{n+1}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(u-a)^k\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\int_C\frac{1}{(u-a)^{n-k+1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\cdot\begin{cases}0, & k\neq n\\ 2\pi i, & k=n\end{cases} = b_n. \end{aligned}$$

Această observaţie ne permite să dezvoltăm în serie Laurent funcţii complicate folosind dezvoltări în serii Taylor cunoscute.

8.16 Exemplu. Fie $f : \mathbb{C}\setminus\{1,3\} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}$. Să se dezvolte în serie Laurent

a) în coroana $1 < |z| < 3$

b) pe mulţimea $|z| > 3$

c) în discul punctat $0 < |z-1| < 2$.

Funcţia f se poate scrie

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3},$$

cu $A = -1/2$ şi $B = 1/2$. Folosind formula seriei geometrice avem

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n, \quad |z| < 3$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Atunci dezvoltarea de la a) este

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n, \quad 1 < |z| < 3.$$

Pentru punctul b) dezvoltarea lui $1/(z-1)$ rămâne valabilă, dar

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Atunci dezvoltarea pe mulţimea de la b) este

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Scriem

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n,$$

şi obţinem

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2.$$

8.3 Puncte singulare

8.17 Definiţie. *Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte* **punct singular** *al funcţiei f dacă orice disc $D(a,r)$ conţine puncte în care funcţia f este olomorfă şi puncte în care funcţia f nu este olomorfă. Punctul a este* **punct singular izolat** *dacă f este olomorfă în cel puţin un disc punctat $D(a,r) \setminus \{a\}$. Dacă f nu este olomorfă în nici un disc punctat cu centrul în a atunci a se numeşte* **punct singular neizolat**.

8.18 Observaţie. Conform Teoremei lui Laurent în jurul unui punct singular izolat funcţia f se poate dezvolta în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

8.19 Definiţie. *Fie a un punct singular izolat al funcţiei f.*

a) dacă partea principală a seriei Laurent într-un disc punctat în a este nulă atunci a se numeşte **punct singular eliminabil***;*

b) dacă partea principală a seriei Laurent conţine un număr finit de termeni, adică f se scrie sub forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

atunci punctul a se numeşte **pol de ordinul** *m;*

c) dacă partea principală are o infinitate de termeni atunci a se numeşte **punct singular esenţial izolat**.

8.20 Exemplu. a) Punctul $z = 0$ este pentru funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ un punct singular eliminabil, pentru că dezvoltarea în serie Laurent este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad |z| > 0,$$

partea principală fiind nulă. Observăm că $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. În general, dacă $z = a$ este punct singular eliminabil atunci există şi este finită limita $\lim_{z\to a} f(z)$.

b) Punctul $z = 0$ este pentru funcţia $f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}$ pol de ordin 3 pentru că

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\sin z} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} \\
&= \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z} + \frac{1}{3} + \frac{13z}{90} + \dots
\end{aligned}$$

c) Punctul $z = 0$ este punct singular esenţial izolat al funcţiei $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, pentru că partea principală a seriei Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

are o infinitate de termeni.

d) Punctul $z = 0$ este punct singular neizolat pentru funcţia $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Într-adevăr, punctele $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ sunt poli simpli şi pentru că $z_k \to 0$ când $k \to \infty$ rezultă că în orice disc centrat în origine există o infinitate de puncte singulare ale funcţiei f.

8.4 Teorema reziduurilor

8.21 Definiţie. *Fie a un punct singular izolat al funcţiei f. Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

se numeşte **reziduul funcţiei** *f relativ la punctul singular a şi se notează*

$$a_{-1} = Rez(f, a).$$

8.22 Observaţie. Coeficientul a_{-1} joacă un rol special între coeficienţii seriei Laurent, deoarece

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot Rez(f, a).$$

Această formulă permite calculul unei integrale pe o curbă închisă (în particular un cerc) care conţine în domeniul mărginit de ea un punct singular izolat, prin cunoaşterea reziduului funcţiei f relativ la punctul singular.

8.23 Teoremă (Teorema reziduurilor a lui Cauchy)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în interiorul domeniului mărginit de curba simplă, închisă şi orientată pozitiv C, cu excepţia punctelor singulare $a_1, a_2, \dots a_m$. Atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Rez(f, a_k).$$

Demonstraţie. Încercuim fiecare punct a_k cu câte un cerc C_k cu rază suficient de mică astfel încât domeniile mărginite de C_k să fie disjuncte şi conţinute în domeniul mărginit de C. Atunci din teorema lui Cauchy

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Rez(f, a_k).$$

□

8.24 Observaţie. Dacă a este un pol simplu iar funcţia f se scrie $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ cu g şi h olomorfe în jurul punctului singular şi $g(a) \neq 0$, atunci reziduul funcţiei f se calculează prin

$$Rez(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Într-adevăr, din dezvoltarea

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots, \qquad \text{cu } a_{-1} \neq 0$$

obţinem egalitatea $(z-a)\cdot g(z) = h(z)\cdot[a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots]$. Pentru $z = a$ se obţine $h(a) = 0$. Derivând se obţine

$$g(z) + (z-a)\cdot g'(z) = h'(z)\cdot[a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots] + h(z)\cdot[a_0 + 2a_1(z-a) + \dots].$$

Pentru $z = a$ obţinem $g(a) = h'(a)\cdot a_{-1}$. Din faptul că $g(a) \neq 0$, rezultă că $h'(a) \neq 0$ şi $Rez(f, a) = g(a)/h'(a)$.

8.25 Observaţie. Dacă a este pol de ordinul m pentru funcţia f atunci

$$Rez(f, a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Acest lucru se poate demonstra plecând de la dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + h(z)$$

unde h este o funcţie olomorfă în jurul punctului a. Atunci

$$[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1)! + [(z-a)^m h(z)]^{(m-1)}.$$

Punctul singular a fiind rădăcină multiplă de ordin cel puţin m pentru $(z-a)^m h(z)$ avem

$$\lim_{z\to a}[(z-a)^m h(z)]^{(m-1)} = 0.$$

Ţinând cont de această limită şi egalitatea anterioară observaţia făcută este demonstrată.

8.26 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=6} \frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)}.$$

Punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$ se obţin egalând numitorul cu 0. Ecuaţia $e^z - 1 = 0$ are soluţiile $z_k = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. Aceasta înseamnă că $z = 0$ este pol de ordinul doi, iar $z_k = 2k\pi i,\ k \neq 0$ poli de ordinul 1. Dorim să vedem care din aceste puncte se găsesc în interiorul discului dat. Punem condiţia $|2k\pi i + i| < 6$. Aceasta este echivalent cu $|2k\pi + 1| < 6$, adică $-6 < 2k\pi + 1 < 6$. De aici $k \in \left(-\frac{7}{2\pi}, \frac{5}{2\pi}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.

Folosind Teorema reziduurilor avem

$$\int_{|z+i|=6} \frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)} = 2\pi i \left(Rez(f, -2\pi i) + Rez(f, 0)\right).$$

Punctul $z = -2\pi i$ este pol simplu şi se calculează prin

$$Rez(f, -2\pi i) = \lim_{z\to -2\pi i} \frac{1}{(z(e^z-1))'} = \lim_{z\to -2\pi i} \frac{1}{e^z - 1 + ze^z} = -\frac{1}{2\pi i}.$$

Punctul $z = 0$ este pol dublu şi atunci se calculează cu formula

$$\begin{aligned} Rez(f, 0) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{e^z-1}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z-1)^2} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2(e^z-1)e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{-z}{2(e^z-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{-1}{2e^z} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Valoarea integralei va fi

$$\int_{|z+i|=6} \frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2\pi i} - \frac{1}{2}\right) = -1 - \pi i.$$

8.27 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z.$$

Funcţia $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}$ are punctele singulare $0, -1, -2$. Pentru că $|0 + i| = 1 < 2$, $|-1+i| = \sqrt{2} < 2$ şi $|-2+i| = \sqrt{5} > 2$, doar 0 şi -1 se găsesc în interiorul cercului $|z+i| = 2$. Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot [Rez(f, 0) + Rez(f, -1)].$$

Punctul $z = -1$ este pol simplu şi $z = 0$ este punct singular esenţial izolat. Avem

$$Rez(f, -1) = \lim_{z \longrightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pentru a obţine reziduul funcţiei relativ la origine desfacem în fracţii simple

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2},$$

cu $A = 1$ şi $B = -1$ şi obţinem

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+2}.$$

Acum dezvoltăm în serie Laurent fiecare din cele două fracţii. Ţinem cont de

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}, \quad |z| > 0$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2$$

şi obţinem

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots\right) \cdot \left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right)$$
$$- \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} - \dots\right),$$

dezvoltare valabilă în coroana circulară $0 < |z| < 1$. Coeficientul lui $1/z$ din această dezvoltare va fi

$$Rez(f, 0) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\right) - \left(\frac{1}{1!\,2} - \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} - \dots\right).$$

Ţinând cont de faptul că

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots = 1 - e^{-x}$$

rezultă

$$Rez(f, 0) = 1 - e^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}.$$

Valoarea integralei este

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{\sqrt{e}}.$$

8.5 Aplicaţii ale Teoremei reziduurilor

Teorema reziduurilor se poate folosi la calculul unor integrale reale.

8.28 Exemplu. Să se calculeze

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{5 - 3\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind formula $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ integrala este echivalentă cu

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos nx}{5 - 3\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{2nxi}}{5 - 3\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Notăm $z = e^{ix}$. Când x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, variabila z parcurge cercul $|z| = 1$. Avem $\mathrm{d}z = ie^{ix}\,\mathrm{d}x$, de unde $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. Funcţia cosinus se poate rescrie $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$. Cu acestea avem de calculat

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{5 - 3\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{10z - 3z^2 - 3}\,\mathrm{d}z.$$

Ecuaţia $-3z^2 + 10z - 3 = 0$ are rădăcinile $z_1 = 3$ şi $z_2 = 1/3$. Singurul punct singular al funcţiei de sub integrală situat în interiorul cercului $|z| = 1$ este $z_2 = 1/3$ care este un pol simplu. Aplicând Teorema reziduurilor rezultă

$$I = \mathrm{Re}\,\frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot Rez\left(\frac{1 - z^{2n}}{10z - 3z^2 - 3}, \frac{1}{3}\right) = \mathrm{Re}\,2\pi\, \frac{1 - z^{2n}}{10 - 6z}\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right).$$

8.29 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Datorită parităţii funcţiei de sub integrală avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Considerăm conturul $C = C_R \cup L_R$ format din semicercul C_R din semiplanul $\mathrm{Im}\, z > 0$ al cercului $|z| = R$ parcurs în sens trigonometric şi segmentul L_R ce uneşte punctele $-R$ şi R de pe axa reală. Se alege R suficient de mare încât toate punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z^2+1)^2}$ să fie în interiorul conturului C. Doar polul dublu $z = i$ aparţine interiorului lui C. Conform Teoremei reziduurilor rezultă

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \cdot Rez(f, i) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left((z-i)^2 \cdot f(z)\right)' = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{(z+i)^2}\right)' \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{i\pi e^{i\pi z}(z+i)^2 - e^{i\pi z}2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{\pi(\pi+1)e^{-\pi}}{2}.\end{aligned}$$

Dar

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} f(Re^{it}) \cdot iRe^{it}\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pentru că

$$\left|f(Re^{it})\right| = \left|\frac{e^{i\pi Re^{it}}}{(R^2e^{2it}+1)^2}\right| = \frac{e^{-\pi R\sin t}}{|R^2e^{2it}+1|^2} \le \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

rezultă că

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^\pi \left|f(Re^{it})\right|\cdot R\,\mathrm{d}t \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}.$$

Trecând la limită cu $R\to\infty$ rezultă $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ şi atunci

$$\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

În concluzie,

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(\pi+1)e^{-\pi}}{4}.$$

8.30 Observaţie. Metoda descrisă în exemplul anterior poate fi aplicată integralelor de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}R(x)\,\mathrm{d}x, \quad \omega>0$$

unde P, Q sunt polinoame cu gradul lui P mai mic sau egal cu 2 decât gradul lui Q şi R este o funcţie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Dacă f este funcţia de sub integrală din ambele cazuri atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0} Rez(f, z_k),$$

unde z_k sunt punctele singulare ale funcţiei f situate în semiplanul superior. Presupunem că punctele singulare ale funcţiei f nu se găsesc pe axa reală.

8.6 Exerciţii

Probleme propuse

8.1. Să se dezvolte în serie Taylor, în jurul punctelor indicate, următoarele funcţii, precizând şi mulţimea de valabilitate:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z-3}, \quad z_0 = 0$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z_0 = i$

8.2. Să se dezvolte în serie Laurent, pe mulţimile indicate, următoarele funcţii:

a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}, \quad |z| > 0$

b) $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}, \quad |z| > 0$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-6}, \quad 0 < |z-2| < 5$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-6}, \quad |z-2| > 5$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}, \quad |z| > 1$

f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}, \quad 0 < |z| < 1$

g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}, \quad |z| < 1$

h) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}, \quad 1 < |z| < 2$

i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}, \quad |z| > 2$

j) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}, \quad 0 < |z-1| < 3$

k) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}, \quad |z-1| > 3$

8.3. Să se determine punctele singulare şi să se precizeze natura acestora, pentru următoarele funcţii:

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3(z+1)^5}$

b) $f(z) = \dfrac{z}{e^{2z}-1}$

c) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z+1)}$

d) $f(z) = \dfrac{z^4 e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$

e) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$

8.4. Să se calculeze reziduul funcţiilor în punctul indicat:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4z+3}, \ z = -1$

b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch}\pi z}{z^4-1}, \ z = i$

c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{e^z+1}, \ z = \pi i$

d) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3(z+1)}, \ z = 0$

e) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}, \ z = i$

f) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^3}, \ z = 1$

g) $f(z) = (z^2+1)^2 \sin\dfrac{1}{z}, \ z = 0$

8.5. Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2(2z-\pi)}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$

Indicaţii la problemele propuse

8.1.

$$a) f(z) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n - \frac{1}{3^n}\right] z^n, \quad |z| < 1$$

$$b) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1}(z-i)^n, \quad |z-i| < 1$$

8.2.

$$a)\ f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$$b)\ f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots$$

$$c)\ f(z) = -\frac{1}{25}\sum_{n=-1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n (z-2)^n = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\cdot(z-2) - \dots$$

$$d)\ f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{5}{(z-2)^3} + \frac{5^2}{(z-2)^4} - \frac{5^3}{(z-2)^5} + \dots$$

$$e)\ f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots$$

$$f)\ f(z) = \frac{1}{z} - (1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$$

$$g)\ f(z) = -\frac{1}{3}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots\right)$$

$$h)\ f(z) = \frac{1}{3z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots\right)$$

$$i)\ f(z) = \frac{1}{3z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{3z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \dots\right)$$

$$j)\ f(z) = \frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{3^2} - \frac{(z-1)^3}{3^3} + \dots\right)$$

$$k)\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3}{(z-1)^3} + \frac{3^2}{(z-1)^4} - \frac{3^3}{(z-1)^5} + \dots$$

8.3. a) $z=0$ pol triplu şi $z=-1$ pol de ordinul 5 b) $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}^*$ poli simpli şi $z=0$ punct eliminabil c) $z=-1$ pol simplu şi $z=0$ pol simplu d) $z=1$ pol dublu şi $z=0$ punct singular esenţial izolat e) $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ poli simpli şi $z=0$ punct singular neizolat

8.4. a) $z=-1$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f,-1) = \frac{-1}{2}$ b) $z=i$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f,i) = \frac{-i}{4}$ c) $z=\pi i$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f,\pi i) = -\operatorname{ch}\pi$ d) $z=0$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f,0)=1$ e) $z=i$ pol dublu, $\operatorname{Rez}(f,i) = \frac{\pi+i}{4}$ f) $z=1$ pol triplu, $\operatorname{Rez}(f,1)=1$ g) $z=0$ punct esenţial izolat, $\operatorname{Rez}(f,0) = 1 - \frac{2}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{27}{40}$

8.5.

$$a)\ 2\pi i[\operatorname{Rez}(f,\frac{\pi}{2}) + \operatorname{Rez}(f,0)] = 2\pi i\left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{4i}{\pi} - 2i$$

$$b)\ 2\pi i[\operatorname{Rez}(f,0) + \operatorname{Rez}(f,1)] = 2\pi i(1+0) = 2\pi i$$

$$c)\ 2\pi i[\operatorname{Rez}(f,0) + \operatorname{Rez}(f,1)] = 2\pi i(-1 + \operatorname{ctg} 1)$$

$$d)\ 2\pi i \operatorname{Rez}(f,i) = \frac{\pi}{2e}.$$

Capitolul 9

Transformata Laplace

9.1 Definiţia transformatei Laplace

9.1 Definiţie. *Funcţia F de variabilă complexă definită prin*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{9.1}$$

se numeşte **transformata Laplace** *a funcţiei f.*

9.2 Notaţie. Transformata Laplace a funcţiei f se mai notează şi

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s),$$

unde $\mathcal{L}$ este operatorul care transformă funcţiile original f în funcţii imagine F.

9.3 Observaţie. Pentru ca transformata Laplace să existe trebuie ca integrala improprie din relaţia (9.1) să fie convergentă, adică limita

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

trebuie să existe şi să fie finită. În continuare, studiem în ce condiţii această integrală este convergentă.

9.4 Definiţie. *O funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numeşte* **original** *dacă are următoarele proprietăţi:*

(i) $f(t) = 0$, pentru orice $t < 0$.

(ii) pe orice interval mărginit, funcţia f este continuă cu excepţia unui număr finit de puncte, în care limitele laterale ale funcţiei există şi sunt finite.

(iii) există constantele $M > 0$, $\sigma \geq 0$, astfel încât

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}, \qquad \textit{pentru orice } t \geq 0.$$

9.5 Notaţie. Mulţimea funcţiilor original se notează cu Ω.

9.6 Exemplu. Funcţia lui Heaviside H definită prin

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

este o funcţie original.

9.7 Observaţie. Pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, funcţia $H \cdot f$ verifică proprietatea (i). De aceea, în continuare toate funcţiile f se presupun înmulţite cu H fără a scrie aceasta în mod explicit.

9.8 Observaţie. O funcţie care verifică proprietatea (ii) se numeşte continuă pe porţiuni. O astfel de condiţie ne asigură integrabilitatea funcţiei $e^{-st}f(t)$ pe orice interval $[0, x]$, $x > 0$. Pentru o astfel de funcţie f există un şir strict crescător de puncte (t_n), $t_n \in [0, \infty)$, $n \geq 0$, cu $t_0 = 0$ şi un şir de funcţii $(f_n(t))$, $f_k : [t_{k-1}, t_k) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue pe (t_{k-1}, t_k) astfel încât $f|_{[t_{k-1}, t_k)} = f_k$. Este adevărată reprezentarea

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k)] f_k(t).$$

Aceasta rezultă din următoarea proprietate a funcţiei lui Heaviside

$$H(t - a) - H(t - b) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b) \\ 0, & t \notin [a, b). \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă t aparţine unui interval $[t_{i-1}, t_i)$, atunci $H(t - t_{i-1}) - H(t - t_i) = 1$ şi $H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k) = 0$, $k \neq i$. Deci $\sum_{k=1}^{\infty} [H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k)] f_k(t) = f_i(t) = f(t)$.

De exemplu, funcţia parte întreagă $f(t) = \lfloor t \rfloor$, unde $\lfloor t \rfloor = n$, pentru $t \in [n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, se scrie

$$\lfloor t \rfloor = \sum_{k=0}^{\infty} [H(t - k) - H(t - k - 1)] k.$$

9.9 Exemplu. Orice polinom este o funcţie original. Într-adevăr, dacă p este un polinom de gradul n, $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$, atunci, pe baza observaţiei că $t \leq e^{t/e}$, pentru orice $t \geq 0$, avem

$$|p(t)| \leq K e^{\frac{tn}{e}}, \text{ pentru orice } t \geq 0, \text{ unde } K = (n + 1) \cdot \max(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0).$$

9.10 Observaţie. Orice funcţie care verifică proprietatea (iii) se numeşte de tip exponenţial. Constanta σ se numeşte indice de creştere. Pentru o funcţie dată f, infimumul indicilor de creştere σ se numeşte abscisă de convergenţă şi se notează cu $\sigma_0 = \sigma_0(f)$. Pentru un polinom p de gradul n am văzut că $\sigma = n/e$ este un indice de creştere. Dar orice $\sigma > 0$ este un indice de creştere, pentru că

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|p(t)|}{e^{\sigma t}} = 0.$$

Aşadar, $\sigma_0(p) = 0$. Desigur că $\sigma = 0$ nu este indice de creştere pentru p.

Dacă funcţia f este mărginită atunci $\sigma = \sigma_0(f) = 0$. În particular, $\sigma_0(H) = 0$.

Funcţia $f(t) = e^{t^{1+a}}$, $a > 0$, nu este de tip exponenţial, pentru că $f(t)/e^{\sigma t}$ este nemărginită pentru orice $\sigma > 0$. Aceasta rezultă din

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^{1+a}}}{e^{\sigma t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^{1+a}-\sigma t} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t^a-\sigma)} = +\infty.$$

9.11 Teoremă (Teorema de existenţă). *Fie $f \in \Omega$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă σ_0. Atunci transformata Laplace a funcţiei f există pentru orice $s \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.*

Demonstraţie. Fie $s = \sigma + i\omega$, unde $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ cu $\sigma > \sigma_0$. Atunci există σ_1 un indice de creştere a funcţiei f astfel încât $\sigma > \sigma_1 > \sigma_0$. Astfel, există $M > 0$ astfel încât:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_1 t}, \text{ pentru orice } t \geq 0.$$

Fie $x > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^x \left|e^{-st}\right| |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-\sigma t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x e^{-\sigma t} M e^{\sigma_1 t}\,\mathrm{d}t \\ &\leq M \int_0^x e^{-t(\sigma-\sigma_1)}\,\mathrm{d}t = -\frac{M}{\sigma-\sigma_1}\left(e^{-x(\sigma-\sigma_1)} - 1\right) \leq \frac{M}{\sigma-\sigma_1}.\end{aligned}$$

Aceasta ne arată că integrala $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă şi în plus

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{\sigma-\sigma_1}. \tag{9.2}$$

Aşadar, transformata Laplace a funcţiei f există în condiţiile date în teoremă. □

9.12 Exemplu. Să calculăm transformata Laplace a funcţiei lui Heaviside H.

$$\mathcal{L}\{H(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad \text{pentru } s \text{ cu } \operatorname{Re} s > 0.$$

Fiindcă funcţia constantă $f(t) = 1$, coincide cu funcţia lui Heaviside pe $[0, \infty)$, avem

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}. \tag{9.3}$$

9.2 Proprietăţi ale transformatei Laplace

9.13 Teoremă (Teorema imaginii la infinit). *Dacă $f \in \Omega$, atunci transformata Laplace F satisface*

$$\lim_{\operatorname{Re} s\to\infty} F(s) = 0. \tag{9.4}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (9.2) se rescrie $|F(s)| \leq M/(\operatorname{Re} s - \sigma_1)$. Prin trecere la limită se obţine afirmaţia din enunţ. □

9.14 Teoremă (Liniaritatea transformatei Laplace)**.** *Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *şi pentru orice* $f, g \in \Omega$ *avem*

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f + \beta g\right\} = \alpha \mathcal{L}\left\{f\right\} + \beta \mathcal{L}\left\{g\right\}. \tag{9.5}$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că Ω este spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$. Fie $f, g \in \Omega$. Atunci există $\sigma_1 \geq 0$ şi $\sigma_2 \geq 0$ astfel încât $|f(t)| \leq M_f \cdot e^{\sigma_1 t}$ şi $|g(t)| \leq M_g \cdot e^{\sigma_2 t}$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ are ca indice de creştere $\max(\sigma_1, \sigma_2)$, pentru că

$$|\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)| \leq |\alpha| \cdot |f(t)| + |\beta| \cdot |g(t)| \leq (|\alpha| M_f + |\beta| M_g) \cdot e^{\max(\sigma_1, \sigma_2) t}, \quad t \geq 0.$$

Relaţia (9.5) rezultă din liniaritatea integralei

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\alpha f + \beta g\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \mathcal{L}\left\{f\right\} + \beta \mathcal{L}\left\{g\right\}.\end{aligned}$$

□

9.15 Teoremă (Teorema deplasării)**.** *Fie* $f \in \Omega$*. Atunci*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\}(s) = F(s-a), \qquad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a + \sigma_0(f). \tag{9.6}$$

Demonstraţie. Avem

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(s-a).$$

□

9.16 Exemplu. Fie $a \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\}(s-a) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \tag{9.7}$$

Folosind liniaritatea transformatei avem

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{9.8}$$
$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}. \tag{9.9}$$
$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh}\omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{\omega t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-\omega t}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}. \tag{9.10}$$
$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}\omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{\omega t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-\omega t}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2}. \tag{9.11}$$

9.17 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiilor $f(t) = e^{at}\sin bt$, $g(t) = e^{at}\cos bt$. Folosind formulele (9.6), (9.8) şi (9.9) obţinem

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$
$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

9.18 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \operatorname{ch} 2t\cos 3t$. Folosind formulele (9.6) şi (9.9) obţinem

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch} 2t\cos 3t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cos 3t\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cos 3t\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos 3t\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right) = \frac{s^3+5s}{s^4+10s^2+169}.$$

9.19 Teoremă (Teorema de unicitate a lui Lerch)**.** *Fie $f, g \in \Omega$ continue. Dacă $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ atunci $f = g$.*

Demonstraţie. Fie $h \in \Omega$ definită prin $h(t) = f(t) - g(t)$. Conform ipotezei $\mathcal{L}\{h\} = 0$. Demonstrăm că $h(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$. Putem presupune în continuare că h este o funcţie reală. (dacă h este complexă avem $\mathcal{L}\{\operatorname{Re} h\} = 0$ şi $\mathcal{L}\{\operatorname{Im} h\} = 0$; va rezulta că $\operatorname{Re} h = 0$ şi $\operatorname{Im} h = 0$, adică $h = 0$).

Fie $\sigma > \sigma_0(h)$ un indice de creştere a funcţiei h şi $s = \sigma + n$, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Atunci, folosind formula de integrare prin părţi

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty e^{-nt} \cdot e^{-\sigma t} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-nt} \int_0^t e^{-\sigma u} h(u)\,\mathrm{d}u \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-nt} \left(\int_0^t e^{-\sigma u} h(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\
&= n \int_0^\infty e^{-nt} \left(\int_0^t e^{-\sigma u} h(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Rezultă că

$$\int_0^\infty e^{-nt} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

unde $\varphi(t) = \int_0^t e^{-\sigma u} h(u)\,\mathrm{d}u$. Cu schimbarea de variabilă $x = e^{-t}$, obţinem

$$\int_0^1 x^{n-1} \varphi\left(\ln \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Funcţia $\psi(x) = \varphi\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ este continuă pe $[0, 1]$, cu $\psi(0+) = 0 = \psi(1)$. Într-adevăr,

$$\lim_{x \searrow 0} \psi(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} h(u)\,\mathrm{d}u = \mathcal{L}\left\{h\right\}(\sigma) = 0.$$

Am obţinut că

$$\int_0^1 x^{n-1} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

De aici rezultă că

$$\int_0^1 p(x) \cdot \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{pentru orice polinom } p.$$

Fie $p_n(x)$ un polinom de gradul n care aproximează uniform funcţia continuă $\psi(x)$. De exemplu, putem considera polinoamele lui Bernstein:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \psi\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pentru orice $\epsilon > 0$, există un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ cu $|p_{n_\epsilon}(x) - \psi(x)| < \epsilon$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Într-adevăr, funcţia ψ fiind continuă pe $[0, 1]$ este uniform continuă, deci pentru $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că $|\psi(t) - \psi(x)| < \epsilon/2$, pentru orice $|t - x| < \delta$. Tot din faptul că ψ este continuă pe $[0, 1]$ rezultă că ψ este mărginită, adică există $M > 0$ cu proprietatea că $|\psi(t)| \leq M$, pentru orice $t \in [0, 1]$. Vom avea pentru orice x şi t cu proprietatea $|t - x| \geq \delta$

$$|\psi(t) - \psi(x)| \leq |\psi(t)| + |\psi(x)| \leq 2M \cdot 1 \leq 2M \cdot \frac{(t - x)^2}{\delta^2}.$$

Aşadar,

$$|\psi(t) - \psi(x)| < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}, \qquad \text{pentru orice } t, x \in [0, 1].$$

Folosind formula binomului lui Newton următoarele relaţii sunt adevărate

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1\\
&\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k = nx \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = nx\\
&\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}[k(k-1)+k]\\
&\qquad\qquad = n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2}(1-x)^{n-k} + nx\\
&\qquad\qquad = n(n-1)x^2 + nx = n^2x^2 + nx(1-x).
\end{aligned}
$$

Folosind aceste relaţii

$$
\begin{aligned}
|p_n(x) - \psi(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right|\\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[\psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x)\right] \right|\\
&\le \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|\psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x)\right|\\
&< \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]\\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (k^2 - 2nx \cdot k + n^2x^2)\\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2}[n^2x^2 + nx(1-x) - 2nx \cdot nx + n^2x^2]\\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \le \epsilon, \quad \text{pentru } n > \left\lfloor \frac{M}{\epsilon\delta^2} \right\rfloor.
\end{aligned}
$$

Va rezulta că

$$
\int_0^1 [\psi(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \psi(x) \cdot [\psi(x) - p_{n_\epsilon}(x)] \,\mathrm{d}x \le \epsilon \int_0^1 |\psi(x)| \,\mathrm{d}x, \quad \text{pentru orice } \epsilon > 0.
$$

Facem $\epsilon \to 0$. Vom avea $\int_0^1 \psi^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ceea ce implică pe baza continuităţii lui ψ că $\psi(x) = 0$, pentru orice $x \in [0,1]$. Rezultă că $\varphi(t) = 0$, pentru orice $t \ge 0$. Prin derivare, $e^{-\sigma t}h(t) = 0$. Obţinem $h(t) = 0$, pentru orice $t \ge 0$. □

9.20 Teoremă (Derivarea originalului)**.** *Dacă $f \in \Omega$ este continuă şi $f' \in \Omega$ atunci*

$$
\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+), \qquad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f')), \tag{9.12}
$$

unde $f(0+) = \lim_{t\searrow 0} f(t)$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Demonstraţie. Integrând prin părţi, avem

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = \left. e^{-st} f(t)\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = sF(s) - f(0+),$$

pentru că $\lim_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-st} = 0$, deoarece pentru $s = \sigma + i\omega$ cu $\sigma > \sigma_0(f)$ există un indice de creştere σ_1 a funcţiei f astfel încât $\sigma > \sigma_1 > \sigma_0(f)$ şi

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le M \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot e^{-\sigma t} = Me^{-(\sigma-\sigma_1)t},$$

iar $\lim_{t\to\infty} Me^{-(\sigma-\sigma_1)t} = 0$. $\square$

9.21 Observaţie. Dacă $f, f' \in \Omega$ şi f are un punct de discontinuitate a, atunci

$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0+) - e^{-as}[f(a+) - f(a-)].$$

Aceasta se demonstrează scriind

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^a e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

şi apoi integrând prin părţi fiecare integrală.

9.22 Teoremă. *Dacă $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sunt funcţii original continue şi există şi sunt finite $\lim_{t\searrow 0} f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0+)$, pentru orice $k = 0, 1\ldots, n-1$, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+), \tag{9.13}$$

pentru $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f'), \ldots, \sigma_0(f^{(n)}))$.

Demonstraţie. Se arată prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ avem relaţia (9.12). Pentru pasul de inducţie se foloseşte relaţia $\mathcal{L}\left\{f^{(n+1)}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} - f^{(n)}(0+)$. $\square$

9.23 Exemplu. Relaţia (9.13) este foarte importantă în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. Spre exemplu, să rezolvăm ecuaţia

$$x'' + x = \sin 2t, \qquad x(0) = 2,\ x'(0) = 1.$$

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Aplicând operatorul Laplace ecuaţiei diferenţiale avem succesiv

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x'' + x\} &= \mathcal{L}\{\sin 2t\} \\
s^2 X - sx(0) - x'(0) + X &= \frac{2}{s^2+4} \\
X(s^2+1) - 2s - 1 &= \frac{2}{s^2+4} \\
X &= \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{2s+1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Descompunând în fracţii simple

$$\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{2s+1}{s^2+1} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1},$$

cu $A = 0$, $B = -2/3$, $C = 2$ şi $D = 5/3$. Putem scrie

$$\begin{aligned} X &= \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+4} + \frac{2s+\frac{5}{3}}{s^2+1} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{2}{s^2+4} + 2\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3}\frac{1}{s^2+1} \\ &= -\frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin 2t\} + 2\mathcal{L}\{\cos t\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}\{\sin t\} \\ &= \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{3}\sin 2t + 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t\right\} \end{aligned}$$

Pe baza proprietăţii de unicitate rezultă soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t.$$

9.24 Teoremă (Integrarea originalului)**.** *Fie* $f \in \Omega$. *Atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(s)}{s}, \qquad \textit{pentru } \operatorname{Re} s > \sigma_0(f). \tag{9.14}$$

Demonstraţie. Fie $g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$. Atunci $g'(t) = f(t)$ şi $g(0) = 0$. Demonstrăm că g este o funcţie original. Dacă σ este un indice de creştere a funcţiei f şi $\sigma \neq 0$, avem

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(u)|\,\mathrm{d}u \le M\int_0^t e^{\sigma u}\,\mathrm{d}u = \left.\frac{Me^{\sigma u}}{\sigma}\right|_0^t \le \frac{Me^{\sigma t}}{\sigma}.$$

Dacă $\sigma = 0$ atunci $|f(t)| \le M$ şi $|g(t)| \le Mt \le M \cdot e^{\frac{t}{e}}$. Avem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

□

9.25 Exemplu. Avem

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \mathcal{L}\left\{n\int_0^t u^{n-1}\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{n}{s}\cdot\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \cdots = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\dots\cdot\frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Am obţinut formula

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{9.15}$$

9.26 Teoremă (Derivarea imaginii)**.** *Transformata Laplace F a unei funcţii original f este olomorfă şi*

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s). \tag{9.16}$$

Demonstraţie. Demonstrăm că F este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$. Fie $h \in \mathbb{C}$ şi $\sigma > \sigma_0(f)$ un indice de creştere astfel încât $\operatorname{Re} s > \sigma$ şi $\operatorname{Re}(s+h) > \sigma$.

Dacă f este de tip exponenţial atunci şi $t \cdot f(t)$ este de tip exponenţial. Avem

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} + \int_0^\infty te^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-st}(e^{-ht}-1+ht)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pornind de la egalitatea

$$e^{-ht}-1+ht = h^2t^2\int_0^1 (1-u)e^{-htu}\,\mathrm{d}u$$

şi folosind inegalitatea $1-e^{-x} \le x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă

$$\left|e^{-ht}-1+ht\right| \le t^2|h|^2\int_0^1 e^{-ut\operatorname{Re} h}\,\mathrm{d}u = t^2|h|^2\frac{1-e^{-t\operatorname{Re} h}}{t\operatorname{Re} h} \le t^2|h|^2.$$

Obţinem

$$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} + \int_0^\infty te^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M|h|\int_0^\infty t^2e^{-t(\operatorname{Re} s-\sigma)}\,\mathrm{d}t = \frac{2M|h|}{(\operatorname{Re} s-\sigma)^3}.$$

Trecând la limită cu $h \to 0$ obţinem

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))\,\mathrm{d}t,$$

ceea ce demonstrează că F este olomorfă şi în plus $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)$.

Fiindcă F este olomorfă, atunci ea are derivate de orice ordin. Derivând de n ori relaţia

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

se obţine

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s).$$

□

9.27 Observaţie. Faptul că F este olomorfă ne permite să calculăm transformata Laplace a unei funcţii original f cunoscând doar transformata Laplace pentru s aparţinând axei reale. Într-adevăr, folosind teorema identităţii funcţiilor olomorfe, dacă F este transformata Laplace a lui f pe intervalul real $(\sigma_0(f), \infty)$ atunci F va fi transformata Laplace pentru $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$.

Să exemplificăm importanţa acestui rezultat, generalizând rezultatul (9.15). Vom calcula $\mathcal{L}\{t^a\}$, pentru orice $a > -1$. Fie $s > 0$ un număr real. Prin schimbarea de variabilă $st = x$ avem

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st}t^a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.$$

Considerând acum pe s ca variabilă complexă obţinem

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1,\ \operatorname{Re} s > 0. \tag{9.17}$$

9.28 Exemplu. Să aflăm funcţia original a transformatei Laplace $F(s) = \operatorname{arctg}\frac{3}{s+2}$. Prin derivare avem

$$F'(s) = \frac{\frac{-3}{(s+2)^2}}{\frac{9}{(s+2)^2}+1} = -\frac{3}{(s+2)^2+9}.$$

Pentru că

$$\mathcal{L}\left\{-e^{-2t}\sin 3t\right\} = -\frac{3}{(s+2)^2+9},$$

şi folosind $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)$, avem $-tf(t) = -e^{-2t}\sin 3t$. Aşadar

$$f(t) = e^{-2t}\frac{\sin 3t}{t}.$$

9.29 Exemplu. Să determinăm soluţia pe $[0,\infty)$ a ecuaţiei $tx'' + 2x' = t^2$, care satisface $x(0) = 0$ şi este mărginită în vecinătatea originii.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Fie $a = x'(0) \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{L}\{x''\} = s^2X - sx(0) - a = s^2X - a$ şi

$$\mathcal{L}\{tx''\} = -(s^2X - a)' = -2sX - s^2X'.$$

Pentru că $\mathcal{L}\{x'\} = sX - x(0) = sX$ şi $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$ rezultă

$$\cancel{-2sX} - s^2X' + \cancel{2sX} = \frac{2}{s^3},$$

adică $X' = -\frac{2}{s^5}$. De aici $X = \frac{1}{2s^4} + C$. Dar C trebuie să fie 0 pentru că $X(\infty) = 0$, vezi (9.4). Pentru că $\mathcal{L}\{t^3/12\} = \frac{1}{2s^4}$ obţinem $x = \frac{1}{12}t^3$.

9.30 Teoremă (Integrarea imaginii)**.** *Dacă* $\frac{f(t)}{t} \in \Omega$ *atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \textit{pentru } \operatorname{Re} s > \sigma_0(f(t)/t). \tag{9.18}$$

Demonstraţie. Notăm $G(s) = \mathcal{L}\{f(t)/t\}(s)$. Aplicând (9.16) pentru $n = 1$, avem $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)/t\} = -G'(s)$. Integrând, obţinem

$$\int_s^a F(u)\,\mathrm{d}u = \int_s^a -G'(u)\,\mathrm{d}u = G(s) - G(a).$$

Pentru că $\lim_{a\to\infty} G(a) = 0$, vezi (9.4), avem

$$\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{a\to\infty}\int_s^a F(u)\,\mathrm{d}u = G(s) - \lim_{a\to\infty} G(a) = G(s).$$

□

9.31 Exemplu. Să se calculeze valoarea integralei $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Avem

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(0) = \int_0^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arctg} u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

9.32 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \frac{1}{s}\int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{s}\operatorname{arctg} u\Big|_s^\infty = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right) = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

9.33 Teoremă (Transformata funcţiilor periodice)**.** *Fie $f \in \Omega$ o funcţie periodică cu perioada T. Atunci*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.19}$$

Demonstraţie. Avem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T e^{-s(u+kT)}f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T e^{-su}f(u)\,\mathrm{d}u\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ksT}.$$

Folosind suma seriei geometrice $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT} = 1/(1-e^{-sT})$ se obţine rezultatul din teoremă. □

9.34 Exemplu. Să calculăm $\mathcal{L}\{|\sin\omega t|\}$, $\omega > 0$. Funcţia $f(t) = |\sin\omega t|$ are perioada $T = \frac{\pi}{\omega}$. Folosind formula

$$\int e^{at}\sin bt\,\mathrm{d}t = \frac{ae^{at}\sin bt - be^{at}\cos bt}{a^2+b^2}$$

şi (9.19) obţinem

$$\mathcal{L}\{|\sin\omega t|\} = \frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\,|\sin\omega t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}\,\frac{-se^{-st}\sin\omega t - \omega e^{-st}\cos\omega t}{\omega^2+s^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}.$$

9.35 Teoremă (Teorema întârzierii)**.** *Fie $a > 0$ şi $f \in \Omega$. Atunci, pentru* $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{9.20}$$

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,\mathrm{d}u\\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,\mathrm{d}u = e^{-as}\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}.\end{aligned}$$

□

9.36 Definiţie. Produsul de convoluţie *a două funcţii* f *şi* g *este funcţia definită prin*

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

9.37 Observaţie. Dacă $f, g \in \Omega$ atunci

$$(f \star g)(t) = \int_{0}^{t} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

Să mai observăm că $f \star g \in \Omega$. Într-adevăr, dacă $|f(t)| \le M_f e^{\sigma_1 t}$ şi $|g(t)| \le M_g e^{\sigma_2 t}$ atunci

$$\begin{aligned}
|(f \star g)(t)| &\le \int_0^t |f(u)||g(t-u)|\,\mathrm{d}u \\
&\le M_f M_g e^{\sigma_2 t} \int_0^t e^{(\sigma_1-\sigma_2)u}\,\mathrm{d}u \le \begin{cases} M_f M_g e^{\sigma_1 t}/(\sigma_1-\sigma_2), & \sigma_1 > \sigma_2 \\ M_f M_g e^{(\sigma_1+1/e)t}, & \sigma_1 = \sigma_2 \\ M_f M_g e^{\sigma_2 t}/(\sigma_2-\sigma_1), & \sigma_1 < \sigma_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

9.38 Teoremă (Transformata produsului de convoluţie)**.** *Fie* $f, g \in \Omega$. *atunci*

$$\mathcal{L}\{f \star g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}. \tag{9.21}$$

Demonstraţie. Folosind observaţia că

$$(f \star g)(t) = \int_0^{\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} f(u)\left(\int_0^{\infty} e^{-st}g(t-u)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} f(u)\cdot\mathcal{L}\{g(t-u)\}(s)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} f(u)e^{-su}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s)\,\mathrm{d}u = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s).
\end{aligned}$$

□

9.39 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Atunci $s^2X - as - b + \omega^2 X = \mathcal{L}\{f\}$. Avem

$$X = \frac{as+b}{s^2+\omega^2} + \mathcal{L}\{f\}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2} = a\mathcal{L}\{\cos\omega t\} + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\} + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{\sin\omega t\}.$$

Soluţia ecuaţiei este

$$x = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + \int_0^t f(u)\sin\omega(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

9.40 Teoremă (Transformata seriilor de puteri generalizate)**.** *Fie* $\alpha > 0$ *şi* f *o funcţie care are următoarea dezvoltare*

$$f(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \geq 0$$

cu proprietatea că există şi este finită $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n!} = L$. *Atunci există transformata Laplace a lui* f *şi aceasta se calculează prin*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} s > L.$$

Demonstraţie. Raza seriei de puteri este $R = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, ceea ce ne arată că f este corect definită pentru orice $t \geq 0$. Mai mult, f este o funcţie original. Din condiţia pusă asupra şirului a_n deducem că există $M > 0$ astfel încât $|a_n| n! < M^n$, pentru orice $n \geq 0$. Avem

$$|f(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n! \cdot \frac{t^n}{n!} < e^{Mt}, \quad t \geq 0.$$

Pentru că $\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n^\alpha n!} = 1$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \Gamma(n+\alpha+1)} = L \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n^\alpha n!}} \cdot \sqrt[n]{n^\alpha} = L,$$

ceea ce arată că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+\alpha+1}}$ este convergentă pentru $|s| > L$. Integrând membru cu membru, obţinem

$$\mathcal{L}\{f\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}\left\{t^{n+\alpha}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} s > L.$$

□

9.41 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f(t) = J_0(2\sqrt{t})$. Avem

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n,$$

cu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. Transformata Laplace a lui f este

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{-1}{s}\right)^n = \frac{e^{-1/s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

9.42 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \sin 2\sqrt{t}$. Dezvoltarea în serie a funcţiei f este

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{\frac{2n+1}{2}}, \quad \text{cu } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!}} = 0.$$

Transformata Laplace a funcţiei f este

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}{s^{n+1+1/2}} \\ &= \frac{1}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{s^n (2n+1)!} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{s^n 2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^n n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} e^{-\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

9.43 Exemplu. Să rezolvăm ecuaţia diferenţială cu diferenţe $x'(t) + x(t-1) = t^3$, ştiind că $x(t) = 0$, pentru $t \le 0$.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Atunci $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX - x(0) = sX$ şi $\mathcal{L}\{x(t-1)\} = e^{-s}X$. Avem

$$\begin{aligned} X &= \frac{6}{s^4(s+e^{-s})} = \frac{6}{s^5(1+e^{-s}/s)} = \frac{6}{s^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^n} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+5}} \\ &= 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)!} \mathcal{L}\left\{(t-n)^{n+4} H(t-n)\right\}. \end{aligned}$$

Atunci

$$x(t) = 6 \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \frac{(t-n)^{n+4}}{(n+4)!}.$$

9.3 Inversa transformatei Laplace

Se pune problema găsirii funcţiei original f când se cunoaşte funcţia imagine F. Pentru aceasta se foloseşte transformata inversă a lui Laplace, notată $\mathcal{L}^{-1}$. Avem

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

9.44 Teoremă. *Avem*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

pentru orice transformate F şi G şi pentru orice constante a şi b.

Demonstraţie. Rezultă din liniaritatea transformatei Laplace. □

Folosind această proprietate, descompunem transformata F în expresii a căror funcţii original le cunoaştem şi utilizând Teorema de unicitate a lui Lerch obţinem funcţia original f.

9.45 Exemplu. Să se calculeze

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-s-6}\right\}.$$

Originalul	Imaginea
$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$e^{at}t$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}t^b$	$\dfrac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}$

Originalul	Imaginea
$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\,\mathrm{sh}\,bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at}\,\mathrm{ch}\,bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

Figura 9.1: Dicţionar de transformate Laplace

Avem

$$\frac{s+1}{s^2-s-6}=\frac{s+1}{(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}.$$

Eliminând numitorul rezultă $s+1=A(s-3)+B(s+2)$. Dând valori lui s se obţine

$$\begin{aligned} s=3 &\Longrightarrow \quad 4=5B \quad \Longrightarrow B=\frac{4}{5}\\ s=-2 &\Longrightarrow \quad -1=-5A \quad \Longrightarrow A=\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Acum putem calcula transformata Laplace inversă

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-s-6}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{s+2}+\frac{\frac{4}{5}}{s-3}\right\}=\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{4}{5}e^{3t}.$$

9.46 Exemplu. Să se calculeze

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-3s}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-3s}{s^2+2s+5}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5-3(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\}\\ &=\frac{5}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}-3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}\\ &=\frac{5}{2}e^{-t}\sin 2t-3e^{-t}\cos 2t. \end{aligned}$$

9.4 Exerciţii

Probleme propuse

9.1. Să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcţii:

a) $f(t) = (t^5 + 1)^2 e^{-t}$ *b)* $f(t) = e^{-3t} \sin^2 t$

c) $f(t) = \operatorname{sh} 2t \cos 5t$ *d)* $f(t) = (t+3) \sin 2t$

e) $f(t) = t e^{-5t} \cos t$ *f)* $f(t) = t \operatorname{sh} 2t$

9.2. Să se determine funcţia f care are transformata Laplace:

a) $F(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}$ *b)* $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+4)}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ *d)* $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s^2+1)}$

e) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2(s^2+1)}$ *f)* $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

Indicaţii la problemele propuse

9.1. a) $F(s) = \frac{10!}{(s+1)^11} + \frac{2\cdot 5!}{(s+1)^6} + \frac{1}{s+1}$ b) $F(s) = \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$ c) $F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+25}$ d) $F(s) = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' + 3 \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{6s^2+4s+24}{(s^2+4)^2}$ e) $F(s) = \frac{(s+5)^2-1}{((s+5)^2+1)^2}$ f) $F(s) = \frac{4s}{(s^2-4)^2}$
9.2. a) $f(t) = e^t - \cos t$ b) $f(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$ c) $f(t) = -e^{-t} + e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t$ d) $f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$ e) $f(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sin t$ f) $f(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$

Bibliografie

[1] N. Boboc, I. Colojoară, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a. Elemente de analiză matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

[2] I. Crivei, *Matematici speciale*, Editura Fundaţiei pentru Studii Europene, Cluj-Napoca, 2006.

[3] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 6 edition, 2007.

[4] G. M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. 2, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[5] I. Gavrea, *Calcul integral şi ecuaţii diferenţiale*, Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.

[6] N. Ghircoiaşiu, F. Tomuţa, V. Indrei, I. Corovei, *Curs de matematici speciale*, vol II, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1981.

[7] C. Iancu, *Modelare matematică. Teme speciale*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2002.

[8] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires, Edition Mir, Moscou, 1981, (traducere din rusă în limba franceză).

[9] K. Miller, *An introduction to advanced complex calculus*, Dover Publications, New York, 1970.

[10] P. J. Nahin, *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, 1998.

[11] G. Opriş, *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1988.

[12] G. Opriş, L. Blaga, V. Indrei, V. Selinger, *Matematici speciale*, vol. 2, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1989.

[13] D. Popa, I. Raşa, *Hyers-Ulam stability of some differential equations and differential operators*, Handbook of Functional Equations, T. M. Rassias (ed.), Springer Optimization and Its Applications 96, 2014, 301–322.

[14] E. Rogai, Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

[15] I. A. Rus, *Ulam stability of ordinary differential equations*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, **54** (2009), no. 4, 125–133.

[16] S. Toader, G. Toader, *Matematici speciale*, vol 1, U. T. Press, Cluj-Napoca, 2009.

[17] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance mathematique et physique, vol. 10, 1838, 113–121.

[18] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1966.

[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_14_dating_of_the_Shroud_of_Turin