

Adrian HOLHOȘ

Curs de
Matematici speciale



U.T. PRESS
CLUJ-NAPOCA, 2018
ISBN 978-606-737-294-6



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Prof.dr. Alexandru Mitrea

Copyright © 2018 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-294-6

Cuprins

Prefață	v
1 Ecuatii diferențiale de ordinul întâi	1
1.1 Noțiuni introductive	1
1.2 Ecuatii diferențiale de ordinul întâi integrabile	3
1.3 Modelarea matematică	5
1.4 Alte ecuații de ordinul întâi integrabile	10
1.5 Existență, unicitate și stabilitate	17
1.6 Exerciții	25
2 Ecuatii diferențiale de ordin superior	29
2.1 Ecuatii diferențiale pentru care se poate reduce ordinul	29
2.2 Ecuatii diferențiale liniare de ordin superior	33
2.3 Ecuatii diferențiale liniare cu coeficienți constanți	40
2.4 Ecuatii diferențiale Euler	47
2.5 Exerciții	50
3 Integrarea ecuațiilor prin serii de puteri	52
3.1 Metoda seriilor de puteri	52
3.2 Ecuația lui Bessel	54
3.3 Ecuatii reductibile la ecuația lui Bessel	63
3.4 Exerciții	67
4 Sisteme de ecuații diferențiale	71
4.1 Sisteme normale	71
4.2 Sisteme liniare cu coeficienți constanți	72
4.3 Sisteme simetrice	87
4.4 Exerciții	89
5 Ecuatii cu derivate parțiale	92
5.1 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi	92
5.2 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul doi	96
5.3 Exerciții	109
6 Numere complexe	112
6.1 Operații cu numere complexe	112
6.2 Topologia planului complex	116

6.3	Funcții elementare	118
6.4	Exerciții	121
7	Derivata și integrala unei funcții complexe	123
7.1	Funcții olomorfe	123
7.2	Reprezentări conforme	127
7.3	Funcții omografice	129
7.4	Definiția integralei unei funcții complexe	131
7.5	Formulele lui Cauchy	133
7.6	Exerciții	135
8	Teorema reziduurilor	137
8.1	Serii de puteri	137
8.2	Serii Laurent	140
8.3	Puncte singulare	143
8.4	Teorema reziduurilor	144
8.5	Aplicații ale Teoremei reziduurilor	148
8.6	Exerciții	149
9	Transformata Laplace	152
9.1	Definiția transformatei Laplace	152
9.2	Proprietăți ale transformatei Laplace	154
9.3	Inversa transformatei Laplace	166
9.4	Exerciții	168
	Bibliografie	169

Prefață

Această carte se adresează studenților din anul întâi de la universitățile tehnice și conține materia predată la disciplina Matematici Speciale la Facultatea de Inginerie Electrică.

Materialul este structurat în nouă capitole și conține noțiuni teoretice și exerciții aplicative din trei domenii: ecuații diferențiale, analiză complexă și transformata Laplace. La începutul fiecărui capitol sunt prezentate noțiunile și rezultatele teoretice necesare, care sunt însoțite de exemple și aplicații. La sfârșitul fiecărui capitol sunt date câteva exerciții pentru fixarea noțiunilor teoretice însoțite de indicații de rezolvare.

Am consultat cursuri predate mai demult de colegi dar și materiale predate la alte universități din țară și din străinătate. Sper ca lucrurile prezentate în această carte să fie de folos studenților, colegilor și tuturor celor interesați de matematică și de aplicațiile acesteia.

Doresc să mulțumesc frumos domnului profesor Alexandru Mitrea pentru observațiile și sugestiile care au dus la o îmbunătățire a conținutului și a prezentării acestui material.

Cluj-Napoca,

Aprilie 2018

Autorul

Capitolul 1

Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

1.1 Noțiuni introductive

1.1 Definiție. Se numește **ecuație diferențială** o ecuație care conține derivate ale unei funcții necunoscute. Dacă funcția necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, ecuația se numește **ecuație diferențială ordinară** sau simplu **ecuație diferențială**, iar dacă funcția necunoscută depinde de mai multe variabile se numește **ecuație cu derivate parțiale**.

1.2 Notație. Deoarece în numeroase aplicații variabila independentă este timpul, vom nota, în cele mai multe cazuri, cu t variabila independentă. Funcțiile necunoscute le vom nota cu x, y, z , etc. Derivatele funcției necunoscute le vom nota cu $x', x'', \dots, x^{(n)}$ sau cu $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}$ pentru a pune în evidență variabila independentă. În fizică și mecanică se folosesc uneori notațiile \dot{x} și \ddot{x} pentru derivatele lui x de ordinul unu și doi (unde timpul este variabila independentă).

1.3 Definiție. **Ordinul unei ecuații** este ordinul cel mai mare al derivatelor funcției necunoscute, care apar în ecuație.

1.4 Observație. O ecuație diferențială de ordinul n are forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Dacă reușim să explicităm pe $x^{(n)}$ în funcție de celelalte variabile, adică

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

atunci, spunem că am adus ecuația (1.1) la **forma normală**.

În particular, ecuațiile diferențiale de ordinul întâi sunt de forma $F(t, x, x') = 0$ sau de forma $x' = f(t, x)$.

1.5 Definiție. Dacă ecuația diferențială (1.1) se poate scrie sub forma

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

atunci ecuația se numește **liniară**.

1.6 Exemplu.

$x''' + \sqrt{t}x' + \cos t x = e^t$ este o ecuație diferențială liniară de ordinul trei

$y'y^2 = 5t$ este o ecuație diferențială neliniară de ordinul întâi

$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 4u''_{t^2}$ este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi

1.7 Definiție. Se numește **soluție** a ecuației diferențiale (1.1) orice funcție derivabilă $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, cu proprietatea că

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \text{pentru orice } t \in I.$$

1.8 Definiție. Prin **soluție generală** a ecuației diferențiale (1.1) se înțelege o soluție $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ de forma

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

unde $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care depinde efectiv de n constante arbitrare C_1, C_2, \dots, C_n .

Prin **soluție particulară** a ecuației diferențiale (1.1) se înțelege o soluție care se obține din soluția generală dând valori particulare constantelor C_1, C_2, \dots, C_n . Prin **soluție singulară** a ecuației diferențiale (1.1) se înțelege o soluție care nu poate fi obținută din soluția generală printr-o particularizare a constantelor C_1, C_2, \dots, C_n .

1.9 Definiție. Determinarea soluției unei ecuații diferențiale se numește **integrare a ecuației diferențiale**.

1.10 Definiție. Graficul unei soluții a unei ecuații diferențiale se numește **curbă integrală**.

1.11 Exemplu. Ecuația diferențială neliniară de ordinul întâi $x = tx' + (x')^2$ are soluția generală $x(t) = Ct + C^2$. Într-adevăr,

$$x - tx' - (x')^2 = Ct + C^2 - tC - C^2 = 0.$$

Printre soluțiile particulare ale ecuației, sunt și funcțiile $x_1(t) = -3t + 9$, $x_2(t) = -2t + 4$, $x_3(t) = -t + 1$, $x_4(t) = 0$, $x_5(t) = t + 1$, $x_6(t) = 2t + 4$, $x_7(t) = 3t + 9$, pentru că se obțin din soluția generală pentru $C = -3$, $C = -2$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$, respectiv $C = 3$. Curbele integrale corespunzătoare sunt drepte. Ele sunt desenate cu roșu în Figura 1.1. Ecuația are și soluția $x(t) = -t^2/4$, pentru că

$$x - tx' - (x')^2 = -\frac{t^2}{4} - t \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) - \left(-\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = 0.$$

Se observă că această soluție este singulară pentru că ea reprezintă o funcție de gradul doi și nu se poate obține din soluția generală, care este o funcție de gradul întâi. În Figura 1.1, curba integrală corespunzătoare soluției singulare, este parabola desenată cu negru, care este înfășurătoarea familiei de drepte $x = Ct + C^2$ (este tangentă la fiecare dreaptă din familie).

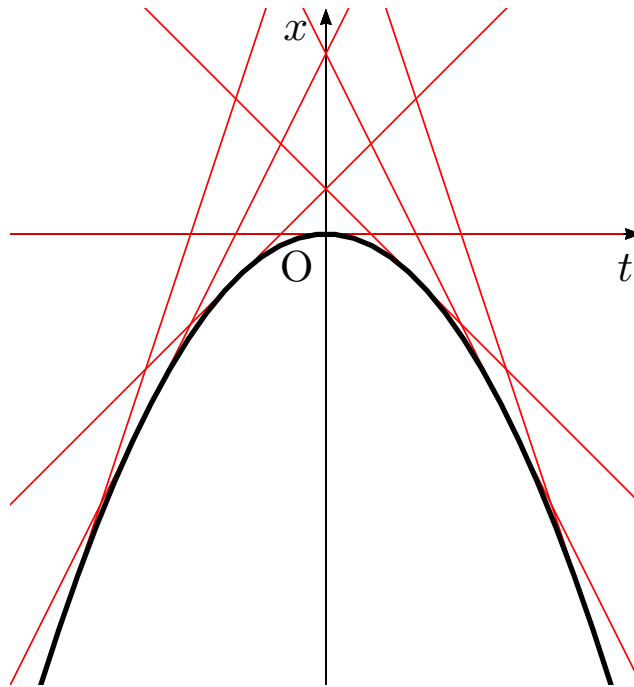


Figura 1.1: Câteva dintre curbele integrale ale ecuației $x = tx' + (x')^2$

1.12 Definiție. Prin **problema lui Cauchy** relativ la ecuația diferențială (1.1) se înțelege determinarea unei soluții particulare $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ a ecuației (1.1) astfel încât fiind date $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ și $t_0 \in I$ să avem

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad x''(t_0) = x_2, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Aceste relații se numesc **condiții inițiale**.

1.2 Ecuații diferențiale de ordinul întâi integrabile

Ecuațiile diferențiale de ordinul întâi au forma generală normală $x' = f(t, x)$. Vom studia în continuare câteva cazuri particulare.

Primitiva unei funcții

Cel mai simplu exemplu de ecuație diferențială de ordinul întâi este ecuația

$$x' = f(t), \tag{1.2}$$

unde $f \in C(I)$, iar $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid. Soluția unei astfel de ecuații se numește **primitivă** a funcției f și se notează $\int f(t) dt$.

În continuare, redăm primitivele funcțiilor mai des întâlnite.

$$\int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, t \in I \subset (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C, \quad t \in I \subset \mathbb{R}^*$$

$$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C, \quad a \neq 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2 - a^2} dt = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| + C, \quad a \neq 0, t \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + a^2} \right) + C, \quad a \neq 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - a^2} \right| + C, \quad a > 0, t \in I \subset \mathbb{R} \setminus [-a, a]$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{a} + C, \quad a > 0, t \in I \subset (-a, a)$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.13 Exemplu. Să se rezolve problema lui Cauchy

$$x' = \sqrt{t^2 + 4}, \quad x(0) = 2.$$

Prin integrare prin părți obținem

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \sqrt{t^2 + 4} dt = \int t' \cdot \sqrt{t^2 + 4} dt = t\sqrt{t^2 + 4} - \int t \left(\sqrt{t^2 + 4} \right)' dt \\ &= t\sqrt{t^2 + 4} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 4}} dt = t\sqrt{t^2 + 4} - \int \frac{t^2 + 4 - 4}{\sqrt{t^2 + 4}} dt \\ &= t\sqrt{t^2 + 4} - \int \sqrt{t^2 + 4} dt + 4 \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt \\ &= t\sqrt{t^2 + 4} - x(t) + 4 \ln(t + \sqrt{t^2 + 4}). \end{aligned}$$

Obținem soluția generală

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[t\sqrt{t^2 + 4} + 4 \ln(t + \sqrt{t^2 + 4}) \right] + C.$$

Condiția inițială ne arată că $2 = x(0) = 2 \ln 2 + C$, de unde $C = 2(1 - \ln 2)$. Soluția problemei lui Cauchy este:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[t\sqrt{t^2 + 4} + 4 \ln(t + \sqrt{t^2 + 4}) \right] + 2(1 - \ln 2).$$

Ecuții cu variabile separabile

1.14 Definiție. *Ecuția diferențială de ordinul întâi*

$$x' = g(t) \cdot h(x) \quad (1.3)$$

unde $g \in C(I)$, $h \in C(J)$ și $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sunt intervale nevide, se numește **ecuație cu variabile separabile**.

O astfel de ecuație se rezolvă scriind formal:

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x)$$

de unde (deși $\frac{dx}{dt}$ nu este o fracție), pentru $x \in J_1$ unde J_1 este un subinterval al lui J pentru care $h(x) \neq 0$, avem

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t) dt$$

Prin integrare rezultă

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t) dt$$

Soluția se obține în forma implicită $H(x) = G(t) + C$, unde $H(x)$ este o primitivă a funcției $1/h(x)$, iar $G(t)$ este o primitivă a funcției $g(t)$.

1.15 Observație. Dacă ecuația $h(x) = 0$ are rădăcina x_0 atunci $x = x_0$ este soluție singulară a ecuației (1.3). Într-adevăr, fiindcă $x' = 0$ se vede că relația (1.3) este identic verificată de funcția constantă $x(t) = x_0$.

1.16 Exemplu. Să se integreze ecuația $x' = ax$, unde a este un parametru real.

Observăm că $x = 0$ este soluție a ecuației. Dacă $x \neq 0$ putem separa variabilele

$$x' = ax \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = ax \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = a dt \Leftrightarrow \ln |x| = at + C \Leftrightarrow |x| = e^{at+C} \Leftrightarrow x = \pm e^{at+C}.$$

Notând $C_1 = \pm e^C \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ obținem $x = C_1 e^{at}$. Înglobând și soluția $x = 0$ obținem $x(t) = C_1 e^{at}$, $C_1 \in \mathbb{R}$ soluția generală a ecuației considerate.

1.3 Modelarea matematică

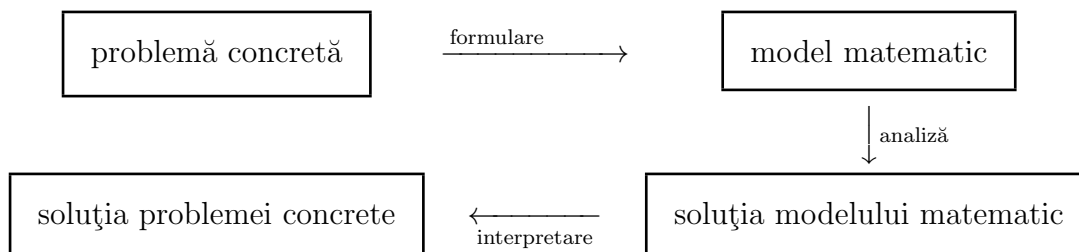
Pentru că derivata $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ unei funcții x este viteza cu care cantitatea $x = x(t)$ se schimbă în raport cu variabila independentă t , este natural ca relații în care apar derivate să descrie schimbările din univers. Astfel, procesele dinamice întâlnite în natură și studiate în științe (fizică, chimie, biologie, economie, etc.) se modelează folosind ecuații diferențiale.

1.17 Definiție. *Numim model matematic problema matematică atașată unei probleme concrete din lumea reală. Procesul prin care ajungem de la problema concretă la problema matematică se numește modelare matematică.*

Modelarea matematică implică cel puțin trei pași:

1. formularea unei probleme sau situații din realitate în termeni matematici, obținându-se astfel un model matematic;
2. analiza sau soluționarea problemei matematice;
3. interpretarea rezultatelor matematice obținute în contextul din lumea reală.

Acest proces poate fi descris astfel:



Un model trebuie să răspundă la două cerințe:

- a. să fie suficient de complex și detaliat pentru a putea descrie cât mai bine problema reală;
- b. să fie suficient de simplu pentru a putea fi analizat matematic.

Dacă modelul este prea complex, analiza lui este prea dificilă și nu poate fi făcută, iar dacă modelul este prea simplu rezultatele pot fi lipsite de relevanță. Un model adecvat surprinde într-un mod simplu caracteristicile esențiale ale problemei concrete studiate.

1.18 Exemplu (Dinamica populației). Fie P_0 numărul de indivizi ai unei populații (oameni, insecte, bacterii, etc.) la momentul de timp t_0 . Se cere să se determine numărul indivizilor acestei populații la momentul de timp $t \geq t_0$.

Fie $P(t)$ numărul de indivizi la momentul de timp t . Presupunem că rata natalității α și mortalității β sunt constante. Aceste rate arată numărul de nașteri/decese per individ per unitatea de timp.

Într-o perioadă scurtă de timp Δt au loc, aproximativ, $\alpha P(t)\Delta t$ nașteri și $\beta P(t)\Delta t$ decese. Variația populației în această perioadă de timp este

$$\Delta P \approx (\alpha - \beta)P(t)\Delta t.$$

Obținem

$$P'(t) = \frac{dP}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t).$$

Notând $k = \alpha - \beta$ obținem modelul

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

model studiat în 1798 de Thomas Robert Malthus.

Integrând ecuația cu variabile separabile se obține soluția

$$P(t) = C \cdot e^{kt}.$$

Folosind condiția inițială rezultă $P_0 = Ce^{kt_0}$ de unde $P(t) = P_0e^{k(t-t_0)}$, pentru $t \geq t_0$.

Să presupunem că o populație de bacterii Escherichia Coli se dublează tot la 20 de minute. Niște măsurători de laborator făcute în cadrul unui experiment arată că erau la un moment dat 1,2 milioane de bacterii per ml de volum. Câte bacterii vor fi după o jumătate de oră, dacă se mențin condițiile existente?

Fie t timpul măsurat în minute. Avem $P(t_0) = P_0 = 1,2 \cdot 10^6$. Din condiția de multiplicare $P(t_0 + 20) = 2P(t_0)$ obținem $P_0e^{k(t_0+20-t_0)} = 2P_0$, adică $e^{20k} = 2$, de unde $k = \ln 2/20$. Astfel, după o jumătate de oră numărul de bacterii este

$$P(30 + t_0) = P_0e^{\frac{\ln 2}{20} \cdot 30} = 1,2 \cdot 10^6 \cdot 2\sqrt{2} \approx 3,4 \text{ milioane.}$$

Un alt model în dinamica populațiilor a fost studiat de belgianul Pierre Verhulst în 1838. El a precizat că populația unei țări nu poate crește nelimitat ca în modelul lui Malthus din cauza condițiilor de mediu. El a adăugat ipoteza că rata de creștere k , scade proporțional cu efectivul atins de populație. Astfel se obține modelul logistic:

$$\begin{cases} P'(t) = (k - aP(t)) \cdot P(t), & k > 0, a > 0 \\ P(t_0) = P_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Soluția acestei probleme Cauchy se obține tot prin separarea variabilelor.

$$\frac{dP}{P(k - aP)} = dt \iff \frac{1}{k} \left(\frac{dP}{P} + \frac{a \cdot dP}{k - aP} \right) = t + \ln C' \iff \ln P - \ln(k - aP) = \ln C + kt.$$

De aici rezultă

$$\frac{P}{k - aP} = C \cdot e^{kt} \iff P = \frac{kCe^{kt}}{1 + aCe^{kt}}.$$

Folosind condiția inițială avem $P_0 = kCe^{kt_0}/(1 + aCe^{kt_0})$. Valoarea constantei este $C = \frac{P_0e^{-kt_0}}{k - aP_0}$. Astfel, populația la momentul de timp $t \geq t_0$ va fi

$$P(t) = \frac{kP_0}{(k - aP_0)e^{-k(t-t_0)} + aP_0}.$$

El a notat că populația Belgiei în 1815 a fost 3 494 985, în 1824 a fost 3 816 249, iar în 1833 a fost 4 142 257. Să verificăm conform acestui model care este populația în 1900, 1915 și în 2009.

Fie $t_0 = 1815$ și $P_0 = 3 494 985$. Pentru a afla parametrii a și k rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} P_1 = \frac{kP_0}{(k - aP_0)e^{-k(t_1-t_0)} + aP_0} \\ P_2 = \frac{kP_0}{(k - aP_0)e^{-k(t_2-t_0)} + aP_0} \end{cases}$$

Fiindcă $t_1 - t_0 = 9$ și $t_2 - t_0 = 18$, eliminând pe a din cele două ecuații, rezultă

$$\frac{\frac{P_0}{P_1} - e^{-9k}}{1 - e^{-9k}} = \frac{\frac{P_0}{P_2} - e^{-18k}}{1 - e^{-18k}}.$$

Obținem

$$k = -\frac{1}{9} \ln \left(\frac{P_0}{P_2} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_1 - P_0} \right) \approx 0,01725033$$

$$aP_0 = k \cdot \frac{P_0}{P_1} \cdot \frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2} \approx 0,00715177$$

În tabelul de mai jos avem estimările conform modelului lui Malthus și Verhulst și erorile relative.

An	P reală	P prognozată	Malthus	P prognozată	Verhulst
1815	3 494 985	3 494 985	—	3 494 985	—
1824	3 816 249	3 816 249	—	3 816 249	—
1833	4 142 257	4 167 044	0,59 %	4 142 257	—
1820	3 645 894	3 669 972	0,66 %	3 672 655	0,73 %
1845	4 800 861	4 685 435	2,40 %	4 577 613	-4,65 %
1900	6 719 000	8 019 397	19,35 %	6 358 094	-5,37 %
1915	7 697 000	9 285 259	20,63 %	6 735 519	-12,49 %
2009	10 755 000	23 263 866	116,30 %	8 030 811	-25,32 %

Populația maximă conform modelului lui Verhulst este

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{k}{a} \approx 8\,430\,029.$$

Această valoare a fost depășită în realitate, după cum reiese și din tabel.

1.19 Exemplu (Dezintegrarea substanțelor radioactive). S-a stabilit experimental că o substanță radioactivă se dezintegrează cu o viteză proporțională cu cantitatea de substanță existentă. Notând cu $X(t)$ cantitatea de substanță existentă la momentul de timp t și cu $-k$, unde $k > 0$, coeficientul de proporționalitate, legea dezintegrării radioactive se scrie

$$X'(t) = -kX(t).$$

Obținem același model ca cel al dinamicii populației cu 0 nașteri și k decese. Soluția acestei ecuații este $X(t) = Ce^{-kt}$.

Metoda de datare cu carbon ^{14}C se bazează pe această lege a dezintegrării. Această metodă a fost introdusă de Willard Libby și echipa sa în 1947 (pentru care a primit premiul Nobel pentru chimie în 1960) și poate fi descrisă astfel: Carbonul există natural sub forma a trei izotopi: ^{12}C , ^{13}C și ^{14}C , primii doi stabili și al treilea radioactiv, în următoarele proporții: ^{12}C - 98,89%, ^{13}C - 1,11%, ^{14}C - 0,0000000010%. Astfel, pentru un singur atom de ^{14}C din natură există aproximativ 1 000 000 000 000 atomi de carbon ^{12}C . Carbonul 14 este produs în atmosferă din azot sub influența razelor solare. El se amestecă cu oxigenul din atmosferă formând CO_2 . Prin procesul de fotosinteză carbonul ^{14}C este asimilat de plante. Prin hrănirea cu plante animalele încorporează în organismul lor ^{14}C . Când animalele sau plantele mor, pentru că nu mai există schimb de carbon cu mediul, cantitatea de carbon 14 existentă în ele se diminuează. Carbonul 14 prin dezintegrare formează înapoi azotul. După o perioadă de aproximativ 5730 de ani cantitatea de carbon 14 se înjumătățește. Măsurând cantitatea de carbon ^{14}C existentă în planta sau animalul mort, obținem informații care ne permit calcularea datei când a murit. Să presupunem că începem să socotim timpul t de la moartea organismului

și notăm cu $X(t)$ cantitatea de carbon ^{14}C existentă în acel organism la momentul t . Datorită legii de dezintegrare a substanțelor radioactive deducem că $X(t) = Ce^{-kt}$. Constanta C se determină din

$$C = X(0)$$

și din faptul că $X(0)$ reprezintă cantitatea de carbon 14 existentă în organism în momentul morții acestuia. Știind că raportul r dintre cantitatea de carbon ^{14}C și carbon ^{12}C rămâne aproximativ constant, măsurând cantitatea c de carbon 12 existentă în organism în momentul descoperirii sale, obținem

$$X(0) = r \cdot c.$$

Folosind perioada de înjumătățire putem deduce valoarea constantei k :

$$\frac{1}{2}X(0) = X(0)e^{-k \cdot 5730}$$

de unde

$$k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,000120968.$$

Notând cu T momentul descoperirii, avem $X(T) = X(0)e^{-kT}$ și deci

$$T = -\frac{1}{k} \ln \frac{X(T)}{X(0)} \approx -8266,64 \cdot \ln \frac{X(T)}{rc}$$

ceea ce ne arată cât timp s-a scurs de la moartea acelui organism.

Metoda poate fi folosită pentru a data rămășițele unui organism viu sau orice conține carbon, dar nu pentru datarea rocilor și metalelor. Cea mai controversată datare cu carbon 14 a fost cea din 1988 când Vaticanul a permis datarea giulgiului din Torino. Se crede că această pânză ar fi fost folosită la înmormântarea lui Hristos. Fibrele din bucata luată pentru a fi datată din celebra pânza de in conțin între 91,6% și 93% din cantitatea originală de carbon ^{14}C . Aceste cantități corespund perioadelor

$$T = -8266,64 \cdot \ln 0,93 \approx 600$$

$$T = -8266,64 \cdot \ln 0,916 \approx 725.$$

Fiindcă testul a fost făcut în 1988, bucata de pânză datează din perioada 1263-1388. Răspunsul oficial a plasat-o între 1260 și 1390. Deși nimeni nu contestă validitatea datării cu carbon 14, mulți contestă procedura folosită pentru datarea acestei pânze. Unii spun că bucata de pânză analizată ar fi fost adăugată la giulgiu ulterior (cândva în perioada medievală). Alții spun că bucata analizată ar fi fost contaminată și astfel rezultatele testului cu carbon 14 nu sunt relevante.

1.20 Observație. Pentru o problemă dată se pot construi mai multe modele cu diferite grade de fidelitate (vezi două dintre modelele dinamicii populațiilor). Să observăm că un model poate



Figura 1.2: Stânga: imaginea feței de pe giulgiul din Torino. Dreapta: negativul imaginii

servi la mai multe scopuri. Modelul malthusian al creșterii populației și legea dezintegrării substanțelor radioactive sunt modelate de ecuația

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R} \text{ constantă.}$$

Acest model poate fi folosit și în economie pentru calcularea dobânzii compusă continuu și în farmacie, pentru cantitatea de substanțe din medicamente aflată în sânge la un moment dat.

1.4 Alte ecuații de ordinul întâi integrabile

Ecuatii omogene

1.21 Definiție. *Se numește ecuație diferențială omogenă o ecuație de forma*

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right),$$

unde $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid și $f(y) \neq y$, pentru orice $y \in I$.

Această ecuație se rezolvă prin schimbarea de funcție

$$y = \frac{x}{t}.$$

Avem $x' = (t \cdot y)' = y + t \cdot y'$. Ecuația care se obține

$$y + t \cdot y' = f(y)$$

este cu variabile separabile. Nu ne rămâne decât să integrăm această ecuație și apoi să revenim la variabilele inițiale.

1.22 Exemplu. Să se integreze ecuația $tx' = x + \sqrt{x^2 + t^2}$.

Pentru $t > 0$ aducem ecuația la forma

$$x' = \frac{x}{t} + \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1},$$

care este o ecuație omogenă. Notăm $y = x/t$. Avem $x = ty$ și

$$y + ty' = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{dt}{t} \iff \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \ln t + C.$$

Dacă dorim soluția în forma explicită folosim funcția sinus hiperbolic $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ și avem

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) &= \frac{y + \sqrt{y^2 + 1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}}{2} = \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1} + y^2 + 1 - 1}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})} \\ &= \frac{2y(y + \sqrt{y^2 + 1})}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})} = y. \end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $y = \operatorname{sh}(C + \ln t)$, adică $x(t) = t \operatorname{sh}(C + \ln t)$, pentru $t > 0$. Dar aceasta este echivalent cu

$$x(t) = t \cdot \frac{e^{C + \ln t} - e^{-C - \ln t}}{2} = t \cdot \frac{e^C t - e^{-C} \frac{1}{t}}{2} = \frac{1}{2} (e^C t^2 - e^{-C}).$$

Dacă $t < 0$ ecuația inițială se rescrie

$$x' = \frac{x}{t} - \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1},$$

care prin aceeași substituție ca și pentru cazul de mai sus ne dă $y = \operatorname{sh}(C' - \ln(-t))$. Obținem soluția $x(t) = \frac{1}{2} (e^{-C'} t^2 - e^{C'})$, pentru $t < 0$. Pentru $C' = -C$, obținem soluția generală pe \mathbb{R}

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(e^C t^2 - \frac{1}{e^C} \right).$$

Ecuatii reducibile la ecuații omogene

1.23 Definiție. Se numește **ecuație diferențială reducibilă la ecuație omogenă** o ecuație de forma

$$x' = f \left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma} \right),$$

unde $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sunt constante reale și $f \in C(I)$, I un interval real nevid.

Pentru integrarea acestor ecuații considerăm cazurile:

I. $a\beta - b\alpha \neq 0$. În acest caz, datorită condiției puse, sistemul

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$$

are soluție unică, pe care o notăm (t_0, x_0) . Făcând schimbarea de variabilă și de funcție

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases}$$

și ținând cont că $x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds} = y'$, rezultă ecuația omogenă

$$y' = f\left(\frac{as + by + at_0 + bx_0 + c}{\alpha s + \beta y + \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma}\right) = f\left(\frac{as + by}{\alpha s + \beta y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{s}}{\alpha + \beta\frac{y}{s}}\right).$$

II. $a\beta - b\alpha = 0$. Notând cu $\lambda = \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ și notând $y = \alpha t + \beta x$ se obține ecuația cu variabile separabile

$$y' = \alpha + \beta x' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda y + c}{y + \gamma}\right).$$

1.24 Exemplu. Să se integreze ecuația $x' = \frac{2(x+2)^2}{(x+t-1)^2}$.

Soluția sistemului

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

este $(t_0, x_0) = (3, -2)$. Notăm $s = t - 3$ și $y = x + 2$, obținem

$$y' = \frac{2y^2}{(y+s)^2} = \frac{2\left(\frac{y}{s}\right)^2}{\left(\frac{y}{s} + 1\right)^2}.$$

Notăm $z = \frac{y}{s}$. Rezultă

$$z + sz' = \frac{2z^2}{(1+z)^2} \iff sz' = \frac{2z^2 - z - 2z^2 - z^3}{(1+z)^2} = -\frac{z(1+z^2)}{(z+1)^2}.$$

Separăm variabilele și obținem

$$\frac{(1+z)^2 dz}{z(1+z^2)} = -\frac{ds}{s} \iff \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}\right) dz = -\frac{ds}{s} \iff \ln z + 2 \operatorname{arctg} z = -\ln s + C.$$

Revenim la variabilele inițiale și obținem soluția în forma implicită

$$\ln(x+2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{t-3} = C.$$

Soluția singulară se obține din $z = 0$, adică $x(t) = -2$.

1.25 Exemplu. Să se integreze $x' = \sin(t-x)$.

Notăm $y = t - x$. Rezultă $y' = 1 - x' = 1 - \sin y$. Separăm variabilele și obținem

$$\frac{dy}{1 - \sin y} = dt \iff t + C = \int \frac{dy}{1 - \sin y}.$$

Facem schimbarea de variabile $z = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$. Rezultă

$$t + C = \int \frac{1}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{z^2 + 1} dz = 2 \int \frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{2}{z-1} = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{y}{2} - 1} = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{t-x}{2} - 1}.$$

Avem $\operatorname{tg} \frac{x-t}{2} + 1 = \frac{2}{t+C}$, de unde $x(t) = t + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{t+C} - 1\right)$. Soluțiile singulare ale ecuației se obțin din $\sin y = 1$. Avem $y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, adică $x(t) = t - 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Ecuatii liniare

1.26 Definiție. Se numește **ecuație liniară de ordinul întâi** o ecuație de forma

$$x' + p(t)x = q(t),$$

unde $p, q \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid.

O ecuație liniară se rezolvă înmulțind ecuația cu $e^{\int p(t) dt}$ și privind membrul stâng al ecuației ca derivata unui produs

$$x'(t)e^{\int p(t) dt} + x(t)p(t)e^{\int p(t) dt} = q(t)e^{\int p(t) dt} \iff \left(x(t) \cdot e^{\int p(t) dt}\right)' = q(t)e^{\int p(t) dt}.$$

Integrând se obține

$$x(t) \cdot e^{\int p(t) dt} = \int q(t)e^{\int p(t) dt} dt + C \iff x(t) = e^{-\int p(t) dt} \left(\int q(t)e^{\int p(t) dt} dt + C \right).$$

O altă metodă de rezolvare este următoarea: se rezolvă mai întâi ecuația liniară omogenă, adică $x' + p(t)x = 0$, care este o ecuație cu variabile separabile. Se obține soluția ecuației omogene $x = Ce^{-\int p(t) dt}$. Pentru a găsi soluția ecuației neomogene folosim **metoda variației constantei (Lagrange)**: căutăm soluția generală sub forma $x = C(t)e^{-\int p(t) dt}$, unde $C(t)$ este o funcție necunoscută în variabila t .

1.27 Exemplu. Să se integreze ecuația $x' - 2tx = 2te^{t^2}$.

Avem $p(t) = -2t$. Înmulțim toată ecuația cu $e^{\int p(t) dt} = e^{-t^2}$. Se obține

$$x'e^{-t^2} - 2te^{-t^2}x = 2t \iff \left(x \cdot e^{-t^2}\right)' = 2t \iff x \cdot e^{-t^2} = t^2 + C \iff x(t) = (t^2 + C)e^{t^2}.$$

O altă rezolvare este următoarea: se rezolvă mai întâi ecuația $x' - 2tx = 0$. Avem

$$x' = 2tx \iff \frac{dx}{x} = 2tx \iff \frac{dx}{x} = 2t dt \iff \ln x = t^2 + \ln C \iff x = Ce^{t^2}.$$

Căutăm acum o soluție de forma $x = C(t) \cdot e^{t^2}$. Înlocuind în ecuația neomogenă

$$x'(t) - 2tx(t) = 2te^{t^2} \iff C'(t)e^{t^2} + C(t)e^{t^2}2t - 2tC(t)e^{t^2} = 2te^{t^2} \iff C'(t) = 2t \iff C(t) = t^2 + C.$$

Soluția generală a ecuației liniare va fi $x = (t^2 + C)e^{t^2}$.

Ecuatii Bernoulli

1.28 Definiție. Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, o ecuație de forma

$$x' + p(t)x = q(t)x^\alpha, \tag{1.6}$$

unde $p, q \in C(I)$, I interval nevid din \mathbb{R} , se numește **ecuație Bernoulli**.

1.29 Observație. Pentru $\alpha = 0$ ecuația (1.6) este o ecuație liniară, iar pentru $\alpha = 1$, ea se reduce la o ecuație cu variabile separabile.

Pentru $\alpha > 0$ ecuația de tip Bernoulli admite soluția $x(t) = 0$, $t \in I$. Considerând un subinterval $I_1 \subseteq I$ unde $x(t) \neq 0$, $t \in I_1$, prin substituția $y = x^{1-\alpha}$, ecuația (1.6) se transformă într-o ecuație liniară.

O altă metodă de rezolvare este metoda variației constantei: se rezolvă mai întâi ecuația liniară omogenă, adică $x' + p(t)x = 0$, care are soluția $x = Ce^{-\int p(t)dt}$. Pentru a găsi soluția ecuației neomogene căutăm soluția generală sub forma $x = C(t)e^{-\int p(t)dt}$, unde $C(t)$ este o funcție necunoscută în variabila t .

1.30 Exemplu. Să se integreze ecuația $2x' \sin t + x \cos t = x^3 \sin^2 t$.

Soluția singulară a ecuației este $x = 0$. Pentru a găsi soluția generală notăm $y = x^{-2}$ de unde $x = y^{-\frac{1}{2}}$. Avem

$$-y^{-\frac{3}{2}} \cdot y' \sin t + y^{-\frac{1}{2}} \cos t = y^{-\frac{3}{2}} \sin^2 t \iff y' - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot y = -\sin t.$$

Avem

$$e^{\int \frac{-\cos t}{\sin t} dt} = e^{-\ln \sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Ecuația se scrie

$$\left(y \cdot \frac{1}{\sin t} \right)' = -1 \iff y \cdot \frac{1}{\sin t} = C - t \iff y = (C - t) \sin t \iff x^{-2} = (C - t) \sin t.$$

Obținem soluțiile generale

$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(C - t) \sin t}}.$$

Pentru a determina soluția ecuației cu metoda variației constantei, rezolvăm mai întâi ecuația $2x' \sin t + x \cos t = 0$. Avem

$$2x' \sin t = -x \cos t \iff \frac{dx}{x} = \frac{-\cos t}{2 \sin t} \iff \ln x = -\frac{1}{2} \ln \sin t + \ln C \iff x = \frac{C}{\sqrt{\sin t}}.$$

Căutăm soluția sub forma $x = \frac{C(t)}{\sqrt{\sin t}}$. Înlocuim în ecuația dată inițial și după niște calcule se ajunge la ecuația $2C'(t) = C^3(t)$, care este cu variabile separabile.

$$2C' = C^3 \iff -2 \frac{dC}{C^3} = -dt \iff C^{-2} = -t + C \iff C(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{C - t}}.$$

Soluția ecuației Bernoulli este $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{(C-t) \sin t}}$.

Ecuatii Riccati

1.31 Definiție. O ecuație Riccati este o ecuație de forma

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

unde $a, b, c \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid.

Putem rezolva o astfel de ecuație doar dacă cunoaștem o soluție particulară x^* a acesteia. Notând

$$x = x^* + \frac{1}{y}$$

se obține o ecuație cu funcția necunoscută y care va fi o ecuație liniară.

1.32 Exemplu. Să se integreze ecuația $x' - 2tx + x^2 = 5 - t^2$, știind că admite o soluție de forma $x^* = at + b$.

Pentru că x^* este soluție avem

$$a - 2t(at + b) + a^2t^2 + 2abt + b^2 = 5 - t^2$$

de unde $a = 1$ și $b = \pm 2$. Notăm $x = t \pm 2 + \frac{1}{y}$. Rezultă ecuația cu variabile separabile

$$y' = \pm 4y + 1 \iff \frac{dy}{\pm 4y + 1} = dt \iff \pm \frac{1}{4} \ln \left(y \pm \frac{1}{4} \right) = t + C \iff y = e^{\pm 4(t+C)} \mp \frac{1}{4}.$$

Așadar

$$x = t \pm 2 + \frac{4}{4e^{\pm 4(t+C)} \mp 1}.$$

Ecuatii cu diferențiala totală exactă

1.33 Definiție. O ecuație cu diferențiala totală exactă este o ecuație de forma

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

unde $P, Q \in C^1(D)$, $D = I \times J$, I, J intervale reale nevide, astfel încât există o funcție $U(x, y) \in C^2(D)$ cu proprietatea că $U'_x = P$ și $U'_y = Q$.

Soluția unei astfel de ecuații este dată în forma implicită $U(x, y) = C$.

Condiția ca o ecuație de forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ să fie cu diferențială totală exactă este ca $P'_y = Q'_x$. Dacă această condiție este verificată, ne rămâne de aflat funcția U . Aceasta se poate determina cu formula

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$$

sau

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt,$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este ales arbitrar.

1.34 Exemplu. Să se integreze ecuația $(6xy - 2y^3) dx + (3x^2 - 6xy^2) dy = 0$.

Notăm $P(x, y) = 6xy - 2y^3$ și $Q(x, y) = 3x^2 - 6xy^2$. Verificăm dacă ecuația dată este cu diferențiala totală exactă. Trebuie ca $P'_y = Q'_x$. Avem $P'_y = 6x - 6y^2 = Q'_x$. Determinăm acum funcția U . Alegem $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Avem

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt = \int_0^y (3x^2 - 6xt^2) dt = 3x^2 \cdot t \Big|_0^y - 2x \cdot t^3 \Big|_0^y = 3x^2y - 2xy^3.$$

Soluția ecuației date este $3x^2y - 2xy^3 = C$.

Ecuatii Lagrange

1.35 Definiție. O ecuație Lagrange este o ecuație de forma

$$x = t\varphi(x') + \psi(x'),$$

$\varphi, \psi \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid. Pentru funcția particulară $\varphi(u) = u$, ecuația se numește ecuație Clairaut.

Pentru a rezolva astfel de ecuații facem schimbarea de funcție $p = x'$. Obținem relația $x = t\varphi(p) + \psi(p)$. Derivăm în raport cu t relația și obținem

$$p = \varphi(p) + t\varphi'(p) \cdot p' + \psi'(p) \cdot p'.$$

Deci

$$\frac{dp}{dt} \cdot (t\varphi'(p) + \psi'(p)) = p - \varphi(p).$$

Schimbăm rolurile lui t și p . Rezultă ecuația liniară

$$t\varphi'(p) + \psi'(p) = (p - \varphi(p)) \frac{dt}{dp}.$$

1.36 Exemplu. Să se integreze ecuația $x = 2tx' + \sin x'$.

Notăm $x' = p$. Se obține $x = 2tp + \sin p$, iar prin derivare $p = 2p + 2tp' + \cos p \cdot p'$, care este echivalentă cu $p'(2t + \cos p) = -p$. Dacă $p = 0$ atunci soluția singulară a ecuației este $x = 0$.

Dacă $p \neq 0$ atunci

$$\frac{dp}{dt} \cdot (2t + \cos p) = -p \iff -p \frac{dt}{dp} = 2t + \cos p \iff t' + \frac{2}{p}t = -\frac{\cos p}{p}.$$

Înmulțim ecuația cu

$$e^{\int \frac{2}{p} dp} = e^{2 \ln p} = p^2$$

și obținem

$$(t \cdot p^2)' = -p \cos p,$$

adică

$$t \cdot p^2 = - \int p \cos p dp = -(p \sin p + \cos p + C).$$

Obținem soluția parametrică a ecuației

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{p^2}(p \sin p + \cos p + C) \\ x = 2tp + \sin p = -\frac{2}{p}(p \sin p + \cos p + C) + \sin p. \end{cases}$$

1.37 Exemplu. Să se integreze ecuația $x = tx' + (x')^2$.

Această ecuație este o ecuație Clairaut. Notăm $x' = p$. Avem $x = tp + p^2$. Prin derivare rezultă $p = p + tp' + 2pp'$, adică $p'(t + 2p) = 0$.

Dacă $p' = 0$, atunci $p = C$ și obținem soluția generală $x = tC + C^2$.

Dacă $t + 2p = 0$, avem $t = -2p$ și $x = tp + p^2 = -2p^2 + p^2 = -p^2$. Prin eliminarea parametrului p avem $p = -t/2$ și $x = -(-t/2)^2 = -t^2/4$, care este soluția singulară a ecuației.

1.5 Existența, unicitatea și stabilitatea soluțiilor ecuației diferențiale de ordinul întâi

Existența și unicitatea soluțiilor

În secțiunile precedente au fost studiate câteva clase de ecuații de ordinul întâi pentru care, cel puțin din punct de vedere teoretic, se poate determina efectiv soluția generală. În general, pentru o ecuație dată, nu se poate determina nici măcar o soluție particulară. De aceea este foarte important să se demonstreze existența soluțiilor, pentru ca apoi aceste soluții să fie determinate prin metode numerice.

1.38 Teoremă (Teorema lui Picard de existență și unicitate a soluțiilor). *Fie ecuația diferențială de ordinul întâi*

$$x' = f(t, x),$$

unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe domeniul $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ care verifică o condiție Lipschitz în raport cu x , adică există $L > 0$ astfel încât

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad \text{pentru orice } (t, x) \in D \text{ și } (t, y) \in D.$$

Atunci există $h > 0$ și există o unică funcție derivabilă $\varphi : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică proprietățile

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Demonstrație. Problema este echivalentă cu ecuația integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du.$$

Într-adevăr, dacă x satisface $x' = f(t, x)$ și $x(t_0) = x_0$ atunci prin integrare între t_0 și t obținem ecuația integrală de mai sus. Reciproc, dacă x satisface ecuația integrală atunci dacă facem $t = t_0$ obținem $x(t_0) = x_0$, iar prin derivare (f este continuă) obținem $x'(t) = f(t, x(t))$.

Pentru rezolvarea ecuației integrale folosim metoda aproximațiilor succesive a lui Emile Picard. Considerăm șirul de funcții (φ_n) definit prin relația de recurență

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u)) du, \quad n = 1, 2, \dots \quad \varphi_0(t) = x_0.$$

Fie $M = \max_{(t,x) \in D} |f(t, x)|$ și $h = \min(a, \frac{b}{M})$.

I. Demonstrăm prin inducție că pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ avem

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq b.$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$ inegalitatea este adevărată. Pentru pasul de inducție

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u)) du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(u, \varphi_{n-1}(u))| du \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t du \right| = M \cdot |t - t_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b. \end{aligned}$$

II. Demonstrăm că șirul (φ_n) este uniform convergent pe $[t_0 - h, t_0 + h]$. Considerăm seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n - \varphi_{n-1}$, care are ca șir al sumelor parțiale (S_n) tocmai șirul $(\varphi_n - x_0)$. Într-adevăr,

$$S_n = \varphi_1 - x_0 + \varphi_2 - \varphi_1 + \cdots + \varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi_n - x_0.$$

Vom arăta că această serie este uniform convergentă, ceea ce va demonstra că $(\varphi_n - x_0)$ este uniform convergent, deci și (φ_n) este uniform convergent. Pentru aceasta demonstrăm prin inducție că

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^n}{n!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Pentru $n = 1$ avem

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(u, x_0) du \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t du \right| = M \cdot |t - t_0| = \frac{M}{L} \cdot \frac{L|t - t_0|}{1!}.$$

Pentru pasul de inducție avem

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(u, \varphi_n(u)) - f(u, \varphi_{n-1}(u))] du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \cdot |\varphi_n(u) - \varphi_{n-1}(u)| du \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|u - t_0|)^n}{n!} du \right| \\ &= \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Din inegalitatea demonstrată rezultă că

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Și pentru că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} = e^{Lh} - 1$, seria cu termenul general din membrul drept al inegalității de mai sus este convergentă și conform criteriului lui Weierstrass obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)$ este uniform convergentă pe $[t_0 - h, t_0 + h]$.

III. Demonstrăm că $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ este soluție a problemei Cauchy considerate. Treccem la limită în egalitatea

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u)) du$$

și obținem datorită uniform convergenței șirului (φ_n) că

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u)) \, du.$$

IV. Demonstrăm unicitatea soluției obținute. Presupunem că ecuația integrală mai are o soluție $\psi = \psi(t)$, adică

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \psi(u)) \, du.$$

Demonstrăm prin inducție că

$$|\varphi_n(t) - \psi(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Prin trecere la limită va rezulta că $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq 0$, pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, adică $\varphi(t) = \psi(t)$, de unde rezultă unicitatea soluției.

Pentru $n = 0$ avem

$$|\varphi_0(t) - \psi(t)| = |\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(u, \psi(u)) \, du \right| \leq M \cdot |t - t_0|.$$

Pentru pasul de inducție

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(u, \varphi_n(u)) - f(u, \psi(u))] \, du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \cdot |\varphi_n(u) - \psi(u)| \, du \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|u - t_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \, du \right| = \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

□

1.39 Observație. Metoda aproximațiilor succesive a lui Picard folosită în demonstrație constituie și o metodă de rezolvare a problemei Cauchy date. Fiecare termen al șirului (φ_n) reprezintă o soluție aproximativă a problemei, cu eroarea estimată prin

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ pentru orice } t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

1.40 Observație. Intervalul de existența a unei soluții poate fi mai mare în realitate, decât intervalul garantat de teoremă.

1.41 Exemplu. Fie problema Cauchy $x' = tx^2$, $x(1) = 2$. Această ecuație cu variabile separabile are soluția

$$x(t) = \frac{2}{2 - t^2}, \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Funcția $f(t, x) = tx^2$ este continuă și lipschitziană pe $D = [1 - a, 1 + a] \times [2 - b, 2 + b]$ pentru orice $a, b > 0$ finite. Să vedem care este intervalul maxim pe care este garantată existența soluției conform teoremei. Avem

$$M = \max_{(t,x) \in D} tx^2 = (1 + a)(2 + b)^2.$$

De aici

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{(1+a)(2+b)^2} \leq \frac{1}{8(1+a)},$$

pentru că $8b \leq (2+b)^2$, pentru orice b . Valoarea maximă a lui

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{1}{8(1+a)}\right)$$

se obține când $a = \frac{1}{8(1+a)}$ adică $a = \frac{\sqrt{6}-2}{4} \approx 0,112$. Teorema garantează existența soluției pentru $t \in [1-a, 1+a] \approx [0,887, 1,112]$. De fapt, soluția există pentru $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \approx (-1,414, 1,414)$.

1.42 Observație. Dacă funcția $f(t, x)$ din teoremă nu este lipschitziană în raport cu x , atunci ecuația poate să aibă mai multe soluții.

1.43 Exemplu. Să se studieze existența soluțiilor ecuației $x' = \sqrt{|x|}$ cu condiția inițială $x(0) = 0$.

Observăm că $x = 0$ este soluție a problemei Cauchy date.

Să considerăm acum cazul când $x > 0$. Ecuația cu variabile separabile are soluția

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \iff 2\sqrt{x} = t - C \iff x = \frac{(t-C)^2}{4}.$$

Pentru $C_1 \geq 0$ funcția

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-C_1)^2}{4}, & t \geq C_1 \\ 0, & t < C_1 \end{cases}$$

este soluție a ecuației inițiale.

În cazul $x < 0$ avem

$$\frac{dx}{\sqrt{-x}} = dt \iff -2\sqrt{-x} = t - C \iff x = -\frac{(t-C)^2}{4}.$$

Pentru $C_2 \leq 0$ funcția

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{(t-C_2)^2}{4}, & t \leq C_2 \\ 0, & t > C_2 \end{cases}$$

este soluție a ecuației inițiale.

Așadar, ecuația are o infinitate de soluții, care sunt de forma

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-C_1)^2}{4}, & t \geq C_1 \\ 0, & t \in (C_2, C_1) \\ -\frac{(t-C_2)^2}{4}, & t \leq C_2 \end{cases} \quad C_2 \leq 0 \leq C_1$$

Faptul că nu are soluție unică se datorează faptului că funcția $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ nu este lipschitziană în jurul originii, pentru că

$$\sup_{x \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \sup_{x \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

1.44 Observație. Dacă funcția $f(t, x)$ din teoremă nu este continuă în raport cu t , atunci ecuația poate să aibă mai multe soluții sau să nu aibă nici o soluție.

1.45 Exemplu. Să se studieze existența soluțiilor problemei Cauchy $tx' = 2x$, $x(0) = x_0$.

Prin separarea variabilelor obținem soluția generală $x = Ct^2$. Dacă $x_0 = 0$ atunci problema are o infinitate de soluții. Dacă $x_0 \neq 0$ atunci problema nu are nici o soluție. Acest lucru se datorează faptului că $f(t, x) = \frac{2x}{t}$ nu este continuă în $t = 0$.

Stabilitatea soluțiilor

1.46 Observație. Am văzut care sunt condițiile de existență a unei soluții pentru ecuația diferențială de ordinul întâi. Ne interesează acum următoarea problemă: dacă perturbări mici ale ecuației sau ale condițiilor inițiale conduc la perturbări mici ale soluției. Pentru a studia acest lucru demonstrăm mai întâi următorul rezultat.

1.47 Lema (Lema lui Gronwall). *Fie $\alpha, \beta, v : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ funcții continue cu proprietatea că*

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(u)v(u) du, \quad \text{pentru orice } t \in [a, b].$$

Atunci

$$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{\int_u^t \beta(s) ds} du.$$

Demonstrație. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(t) = e^{-\int_a^t \beta(u) du} \int_a^t \beta(u)v(u) du.$$

Funcția g este o funcție derivabilă cu proprietatea că $g(a) = 0$ și

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-\int_a^t \beta(u) du} \beta(t)v(t) - \beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u) du} \int_a^t \beta(u)v(u) du \\ &= \beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u) du} \cdot \left(v(t) - \int_a^t \beta(u)v(u) du \right) \leq \alpha(t)\beta(t)e^{-\int_a^t \beta(u) du}. \end{aligned}$$

Folosind definiția lui g și inegalitatea obținută rezultă

$$\begin{aligned} \int_a^t \beta(u)v(u) du &= e^{\int_a^t \beta(u) du} \cdot g(t) = e^{\int_a^t \beta(u) du} \int_a^t g'(u) du \\ &\leq e^{\int_a^t \beta(u) du} \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{-\int_a^u \beta(s) ds} du = \int_a^t \alpha(u)\beta(u)e^{\int_u^t \beta(s) ds} du. \end{aligned}$$

□

1.48 Teoremă (Teorema de dependență de date). *Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue pe domeniul $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Funcția f verifică o condiție Lipschitz în raport cu a doua variabilă, adică există $L > 0$ astfel încât*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad \text{pentru orice } (t, x) \in D \text{ și } (t, y) \in D.$$

Fie x și y funcții cu proprietățile

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)), & x(t_0) &= x_0, \\y'(t) &= g(t, y(t)), & y(t_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Atunci

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1)$$

unde

$$M = \sup_{(t,x) \in D} |f(t, x) - g(t, x)|.$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) \, du - y_0 - \int_{t_0}^t g(u, y(u)) \, du \right| \\&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t |f(u, x(u)) - g(u, y(u))| \, du \right| \\&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t |f(u, x(u)) - f(u, y(u))| + |f(u, y(u)) - g(u, y(u))| \, du \right| \\&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t L \left(|x(u) - y(u)| + \frac{M}{L} \right) \, du \right|.\end{aligned}$$

Aplicăm Lema lui Gronwall pentru $v = |x(t) - y(t)| + \frac{M}{L}$, $\alpha = |x_0 - y_0| + \frac{M}{L}$ și $\beta = L$

$$|x(t) - y(t)| + \frac{M}{L} \leq |x_0 - y_0| + \frac{M}{L} + \left| \int_{t_0}^t \left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L} \right) L e^{L(t-u)} \, du \right|.$$

Presupunem $t > t_0$. Atunci

$$\left| \int_{t_0}^t e^{L(t-u)} \, du \right| = \int_{t_0}^t e^{L(t-u)} \, du = \frac{e^{L(t-u)}}{-L} \Big|_{t_0}^t = \frac{1}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1)$$

și

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L} \right) (e^{L|t-t_0|} - 1) \\&= |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).\end{aligned}$$

Dacă $t < t_0$ atunci

$$\left| \int_{t_0}^t e^{L(t-u)} \, du \right| = \int_t^{t_0} e^{L(t-u)} \, du = \frac{e^{L(t-u)}}{-L} \Big|_t^{t_0} = \frac{1}{L} (1 - e^{L(t-t_0)}) = \frac{1}{L} (1 - e^{-L|t-t_0|})$$

și pentru că $2 - e^{-a} \leq e^a$, pentru orice a , va rezulta că

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \left(|x_0 - y_0| + \frac{M}{L} \right) (1 - e^{-L|t-t_0|}) \\&\leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).\end{aligned}$$

□

1.49 Observație. Dacă f coincide cu g atunci $M = 0$ și inegalitatea din teoremă devine

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|}.$$

Să observăm că dacă $|x_0 - y_0|$ este o cantitate suficient de mică și t se află într-un interval finit atunci și diferența $|x(t) - y(t)|$ este mică. În plus, dacă $x_0 = y_0$ atunci x și y coincid ceea ce ne arată, într-un alt mod, unicitatea soluției problemei Cauchy.

1.50 Definiție. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ și $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ecuația

$$x' = f(t, x) \tag{1.7}$$

este **stabilă Hyers-Ulam** dacă există $c_f > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice funcție derivabilă y care verifică

$$|y'(t) - f(t, y(t))| \leq \varepsilon, \quad \text{pentru orice } t \in I \tag{1.8}$$

să existe o soluție x a ecuației (1.7) astfel încât:

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon c_f, \quad \text{pentru orice } t \in I.$$

1.51 Observație. Dacă y este soluție a inegalității (1.8) atunci y verifică

$$\left| y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right| \leq |t - t_0| \varepsilon, \quad \text{pentru orice } t \in I \text{ și } t_0 \in I.$$

Într-adevăr, dacă notăm $g(t) = y'(t) - f(t, y(t))$, atunci $|g(t)| \leq \varepsilon$. Dacă integrăm avem

$$\int_{t_0}^t g(u) du = y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du.$$

De aici rezultă că

$$\left| y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right| = \left| \int_{t_0}^t g(u) du \right| \leq \varepsilon \left| \int_{t_0}^t du \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

1.52 Teoremă (Teorema de stabilitate). Fie $I = [a, b]$ un interval compact și $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că verifică o condiție Lipschitz în cea de-a doua variabilă. Atunci ecuația (1.7) este stabilă Hyers-Ulam.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Fie y o funcție care verifică (1.8). Fie J un interval compact care-l conține pe $y(a)$. Conform Teoremei de existență există un interval compact $[a, a + h]$ și o unică funcție derivabilă $x : [a, a + h] \rightarrow J$ care verifică

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = y(a).$$

Prin integrare, obținem reprezentarea

$$x(t) = y(a) + \int_a^t f(u, x(u)) du.$$

Folosim Observația 1.51 și obținem

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(u, y(u)) \, du + y(a) + \int_a^t f(u, y(u)) \, du - x(t) \right| \\ &\leq \left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(u, y(u)) \, du \right| + \left| \int_a^t f(u, y(u)) \, du - \int_a^t f(u, x(u)) \, du \right| \\ &\leq (t-a)\varepsilon + \int_a^t |f(u, y(u)) - f(u, x(u))| \, du \\ &\leq (t-a)\varepsilon + \int_a^t L \cdot |y(u) - x(u)| \, du. \end{aligned}$$

Folosim Lema lui Gronwall și obținem

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq (t-a)\varepsilon + \int_a^t (u-a)\varepsilon L e^{L(t-u)} \, du \\ &= (t-a)\varepsilon + \varepsilon \left[- (u-a)e^{L(t-u)} \Big|_a^t + \int_a^t e^{L(t-u)} \, du \right] \\ &= \varepsilon \int_a^t e^{L(t-u)} \, du = \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(t-a)} - 1) \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{Lh} - 1). \end{aligned}$$

□

1.53 Exemplu. Fie $\varepsilon, \lambda > 0$ și fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea

$$|f'(x) - \lambda f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{pentru orice } x \geq 0.$$

Atunci există un unic $k \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - ke^{\lambda x}| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$, pentru orice $x \geq 0$.

Notăm $g(x) = f'(x) - \lambda f(x)$. Soluția acestei ecuații liniare este

$$f(x) = e^{\lambda x} \left(\int_0^x g(t) e^{-\lambda t} \, dt + f(0) \right).$$

Considerăm $k = f(0) + \int_0^\infty g(t) e^{-\lambda t} \, dt$. Acesta este un număr real pentru că

$$\left| \int_0^\infty g(t) e^{-\lambda t} \, dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| e^{-\lambda t} \, dt \leq \varepsilon \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dt = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Avem

$$\begin{aligned} |f(x) - ke^{\lambda x}| &= \left| e^{\lambda x} \left(\int_0^x g(t) e^{-\lambda t} \, dt + f(0) \right) - \left(f(0) + \int_0^\infty g(t) e^{-\lambda t} \, dt \right) e^{\lambda x} \right| \\ &\leq e^{\lambda x} \int_x^\infty |g(t)| e^{-\lambda t} \, dt \leq \varepsilon e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \Big|_x^\infty = \frac{\varepsilon}{\lambda} \end{aligned}$$

Presupunem că există și un $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - ce^{\lambda x}| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Atunci

$$\begin{aligned} |k - c| &= e^{-\lambda x} |ke^{\lambda x} - ce^{\lambda x}| = e^{-\lambda x} |ke^{\lambda x} - f(x) + f(x) - ce^{\lambda x}| \\ &\leq e^{-\lambda x} (|ke^{\lambda x} - f(x)| + |f(x) - ce^{\lambda x}|) \leq e^{-\lambda x} \cdot \frac{2\varepsilon}{\lambda}, \end{aligned}$$

inegalitate care este adevărată pentru orice $x \geq 0$. Pentru $x \rightarrow \infty$, obținem $|k - c| \leq 0$, adică $k = c$, ceea ce arată unicitatea constantei k .

1.6 Exerciții

Probleme propuse

1.1. Să se arate că $x = a \cos(\ln t) + b \sin(\ln t)$ verifică relația

$$t^2 x'' + tx' + x = 0.$$

1.2. Să se arate că $x = (t + \sqrt{t^2 - 1})^n$ verifică relația

$$(t^2 - 1)x'' + tx' - n^2 x = 0.$$

Să se găsească funcțiile x cu proprietățile

1.3. $x' = t \cdot \cos t, \quad x(\pi) = 0$

1.4. $x' = t(1 - t)^6, \quad x(1) = 0$

1.5. $x' = \frac{e^t}{2e^{2t} + 3}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$

1.6. $t^2 x' = 2 - t^3, \quad x(2) = -1$

1.7. $tx' - t^2 \ln t + 1 = 0$

1.8. $x'(x' - 1) = 2$

1.9. $x'' = te^t$

1.10. $x'' = \cos^2 t, \quad x'(0) = 0, \quad x(0) = 0$

1.11. $x'' = \sqrt{1 + t^2}, \quad x'(0) = 0, \quad x(0) = 0$

1.12. Să se rezolve problema Cauchy $tx' - x = 1, \quad x(2) = 3$.

1.13. Să se găsească funcția x care verifică proprietățile:

a) $(2 + e^t)x^2 x' = e^t, \quad x(0) = 0$

b) $x' = a^{t+x} + a^{t-x}, a > 1, \quad x(0) = 0$

c) $t\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{1 + t^2} \cdot x' = 0, \quad x(1) = 1$

1.14. Care sunt soluțiile singulare ale ecuației $2t\sqrt{1 - x^2} = x'(1 + t^2)$? Dar soluția generală?

1.15. Să se integreze ecuația $x^2 \cdot \sin t + \cos^2 t \cdot \ln x \cdot x' = 0$.

1.16. Să se integreze $txx' = 1 - t^2$.

1.17. Să se găsească soluția ecuației $(t^2 - 1)x' - x = 0$ care verifică condiția inițială $x'(0) = -1$.

1.18. Să se găsească toate soluțiile ecuației $x' = 2t(1 - x)^2$.

1.19. Să se determine soluția ecuației $x' = (k - x)x$, $x(t_0) = x_0$.

1.20. Să se integreze $x'\sqrt{2 + 2t + t^2} + (t + 1)\sqrt{1 + x^2} = 0$.

1.21. O cană cu apă la temperatura de $100^\circ C$ este adusă într-o încăpere cu temperatura constantă $25^\circ C$. Dacă după 2 minute temperatura apei este de $85^\circ C$, care va fi temperatura ei după 20 de minute?

1.22. Să se integreze

a) $(3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0$

b) $(3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0$

c) $(2x + y - 1) dx + (x - 2y + 1) dy = 0$

d) $[xye^{xy}(2 + xy) - y^2] dx + [x^2e^{xy}(1 + xy) - 2xy] dy = 0$

e) $(\sin y + y \sin x) dx + (x \cos y - \cos x) dy = 0$.

1.23. Să se integreze

a) $tx' = x + x \ln x - x \ln t$

c) $x' = \frac{x}{t} - \operatorname{tg} \frac{x}{t}$

b) $tx' = x + t \cos^2 \frac{x}{t}$

d) $tx' - x + t = 0$

1.24. Să se integreze

a) $x' = \frac{x + t}{t - x + 2}$

b) $(x + y + 1) dx + (3x + 3y - 2) dy = 0$

c) $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$

1.25. Să se rezolve problemele Cauchy:

a) $tx' + x = 5t \sin t$, $x(0) = 0$

b) $t^2 + tx' = x$, $x(2) = 1$

c) $t \ln t \cdot x' - x = 3t^3 \ln^2 t$, $x(e) = 0$

d) $tx' - x = t^3 \cos t$, $x(\pi) = 0$

1.26. Să se integreze

a) $x' + 2tx = 2tx^2$

b) $x' - 2xe^t = 2\sqrt{x}e^t$

c) $t^2x^3x' + tx^4 = 3$

d) $x' = 2x + e^{-3t}x^{-2}$

e) $txx' + x^2 = 6 \ln t$

f) $tx' + x = 4tx^4$

1.27. Să se integreze

a) $x' - x^2 + 2e^t x = e^{2t} + e^t$, cu soluția particulară $x^* = e^t$

b) $x' = -2 - x + x^2$, cu soluție particulară constantă $x^* = a$.

1.28. Să se integreze

a) $x = t(1 + x') + x'^2$

b) $x = 2tx' + \ln x'$

c) $t = \frac{x}{x'} + \frac{1}{x'^2}$

d) $y = xy' + r\sqrt{1 + y'^2}$

Indicații la problemele propuse

1.1. Se calculează mai întâi derivatele x' și x''

1.2. Se arată mai întâi că $x' = \frac{n}{\sqrt{t^2-1}} \cdot x$

1.3. $x(t) = t \sin t + \cos t + 1$

1.4. Se face schimbarea de variabilă $u = 1 - t$ sau se integrează prin părți:

$$x(t) = \frac{1}{8}(1-t)^8 - \frac{1}{7}(1-t)^7$$

1.5. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{3}}$

1.6. $x(t) = 2 - \frac{2}{t} - \frac{t^2}{2}$

1.7. $x(t) = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - \ln t + C$

1.8. Se rezolvă ecuația $y^2 - y - 2 = 0$; $x_1(t) = 2t + C$ și $x_2(t) = -t + C$

1.9. $x(t) = (t-1)e^t - e^t + C_1 t + C_2$

1.10. $x(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{8}$

1.11. $x(t) = \frac{1}{6}(1+t^2)\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \frac{1}{3}$.

1.12. $x(t) = 2t - 1$.

1.13. a) $x = \sqrt[3]{3 \ln \frac{2+e^t}{3}}$. b) $x = \log_a \operatorname{tg} \left(a^t + \frac{\pi}{4} - 1 \right)$. c) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+t^2} = 2\sqrt{2}$.

1.14. $x = \pm 1$ soluții singulare, $x = \sin(C \ln(t^2 + 1))$ soluție generală.

1.15. $\frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{\cos t} + C$

1.16. $x^2 = 2 \ln t - t^2 + C$

1.17. $x(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

1.18. $x = 1$ soluție singulară și $x = 1 - \frac{1}{t^2+C}$ soluție generală.

1.19. $x(t) = \frac{kx_0}{(k-x_0)e^{-k(t-t_0)}+x_0}$

1.20. $x = \operatorname{sh}(C - \sqrt{1+(t+1)^2})$.

1.21. Se folosește legea de răcire a lui Newton: variația temperaturii unui corp este proporțională cu diferența dintre temperatura T a corpului și temperatura M a mediului, adică

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - M).$$

Rezolvând ecuația diferențială, temperatura apei la momentul de timp t este $T(t) = M + Ce^{-kt}$. Din condiția $T(0) = 100$, rezultă $C = 75$. Din $T(2) = 85$, rezultă $-k = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{5}$. Va rezulta

$$T(20) = 25 + 75 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 33^\circ C.$$

1.22. a) ecuație cu diferențiala totală exactă cu soluția $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$.

b) $x^3y + xy^3 = C$. c) $x^2 + xy - y^2 - x + y = C$. d) $x^2ye^{xy} - y^2x = C$. e) $x \sin y - y \cos x = C$.

1.23. a) ecuație omogenă cu soluția generală $x(t) = te^{Ct}$ și $x = t$, $x = 0$ soluții singulare.

b) ecuație omogenă cu soluția generală $\operatorname{tg} \frac{x}{t} = \ln |t| + C$ și $x = t \frac{(2k+1)\pi}{2}$ soluții singulare.

c) $\sin \frac{x}{t} = \frac{C}{t}$ și $x = k\pi t$ soluții singulare d) $x = t \ln \frac{C}{t}$.

1.24. a) ecuație reductibilă la ecuație omogenă; soluția generală este

$$\operatorname{arctg} \frac{x-1}{t+1} = \ln \left(C \sqrt{(t+1)^2 + (x-1)^2} \right).$$

b) Ecuația poate fi privită ca o ecuație reductibilă la ecuații omogene. Pentru că sistemul format de ecuațiile $x + y + 1 = 0$ și $3x + 3y - 2 = 0$ este incompatibil, facem schimbarea de funcție $z = x + y$. Avem $dy = dz - dx$. Ecuația devine $(3 - 2z) dx + (3z - 2) dz = 0$. Aceasta este cu variabile separabile. Soluția este $6x + 6y + 5 \ln |2x + 2y - 3| = 4x + C$ și $2x + 2y = 3$. c) Ecuația poate fi privită și ca o ecuație cu diferențiala totală exactă cu soluția $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

1.25. a) $x = \frac{5 \sin t}{t} - 5 \cos t$ b) $x = -t^2 + \frac{5t}{2}$. c) $x = (t^3 - e^3) \ln t$ d) $x = t^2 \sin t + t \cos t + t$

1.26. a) ecuație Bernoulli cu soluția $x(t) = \frac{1}{Ce^{t^2} + 1}$ b) $x = (Ce^{e^t} - 1)^2$ c) $x = -\frac{\sqrt[4]{C+4t^3}}{t}$

d) $x = \sqrt[3]{\frac{Ce^{6t} - e^{-3t}}{3}}$ e) $x = \pm \frac{\sqrt{C+3t^2(2 \ln t - 1)}}{t}$ f) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{Ct^3 + 6t}}$

1.27. a) $x = e^t + \frac{1}{C-t}$ b) $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ și $x_1 = 2 + \frac{3}{3Ce^{-3t} - 1}$, $x_2 = -1 + \frac{3}{3Ce^{3t} + 1}$

1.28. a) ecuație Lagrange cu soluția sub forma parametrică $t = -2p + 2 + Ce^{-p}$ și $x = (-2p + 2 + c^{-p})(1 + p) + p^2$ b) $t = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$ și $x = \ln p + \frac{2C}{p} - 2$ c) ecuație Clairaut cu soluția generală $t = xC + C^2$ și soluția singulară $4t = -x^2$ d) $y = Cx + r\sqrt{1 + C^2}$ și $x^2 + y^2 = r^2$.

Capitolul 2

Ecuatii diferențiale de ordin superior

2.1 Ecuatii diferențiale pentru care se poate reduce ordinul

Ecuatii cu derivata de ordin superior cunoscută

O ecuație de forma

$$x^{(n)} = f(t),$$

$f \in C(I)$, se rezolvă prin integrarea succesivă a ecuației de n ori.

2.1 Exemplu. Să se integreze ecuația $x'' = te^t$.

Prin integrare avem

$$x' = \int te^t dt = \int t (e^t)' dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_1 = (t-1)e^t + C_1.$$

Integrând încă o dată, obținem

$$x(t) = \int (t-1)e^t + C_1 dt = \int (t-1) (e^t)' dt + \int C_1 dt = (t-1)e^t - e^t + C_1 t + C_2.$$

Ecuatii din care lipsesc funcția și primele derivate

O ecuație de forma

$$F(t, x^{(k)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

din care lipsesc x și primele $k-1$ derivate, admite micșorarea ordinului prin substituția $x^{(k)} = p$.

2.2 Exemplu. Curbura unei curbe plane în forma explicită $y = y(x)$ se exprimă cu formula

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se știe că un cerc cu raza r are curbura $\kappa = \frac{1}{r}$. Să se determine toate curbele care au curbura $\frac{1}{r}$.

Rezolvăm ecuația

$$\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Dacă notăm cu $p = y'$, obținem ecuația cu variabile separabile

$$\frac{p'}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Avem

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{r} \iff \int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x + C_1}{r}.$$

Cu substituția $p = \operatorname{tg} t$, rezultă

$$\int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = \int \cos t \, dt = \sin t = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Avem

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{x + C_1}{r} \iff \frac{p^2}{p^2 + 1} = \frac{(x + C_1)^2}{r^2} \iff p^2 = \frac{(x + C_1)^2}{r^2 - (x + C_1)^2}.$$

Rezultă

$$y' = p = \sqrt{\frac{(x + C_1)^2}{r^2 - (x + C_1)^2}} = \frac{x + C_1}{\sqrt{r^2 - (x + C_1)^2}}.$$

Notând $r^2 - (x + C_1)^2 = u$ și integrând obținem

$$y(x) = \int \frac{x + C_1}{\sqrt{r^2 - (x + C_1)^2}} \, dx = \int \frac{-1}{2\sqrt{u}} \, du = -\sqrt{u} + C_2 = C_2 - \sqrt{r^2 - (x + C_1)^2}.$$

Putem rescrie soluția în forma implicită $\sqrt{r^2 - (x + C_1)^2} = C_2 - y$ sau

$$(x + C_1)^2 + (y - C_2)^2 = r^2,$$

care este ecuația unui cerc de rază r și centru $(-C_1, C_2)$. Am obținut că cercurile de rază r sunt singurele curbe plane care au curbura constantă $\frac{1}{r}$.

Ecuatii din care lipsește variabila independentă

O ecuație de forma

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

din care lipsește variabila independentă t se poate reduce la o ecuație de ordin inferior folosind schimbarea de variabilă și de funcție $(t, x) \rightarrow (x, p)$ unde $x' = p = p(x)$. Derivatele lui x se calculează în funcție de p . De exemplu

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p = pp', \\ x''' &= \frac{dx''}{dt} = \frac{dx''}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(pp') \cdot p = (pp'' + p'^2)p. \end{aligned}$$

2.3 Exemplu. Să se integreze ecuația $(x'')^2 - 2x'x''' + 1 = 0$.

Observăm că este o ecuație din care lipsește și x și t . Notăm $y = x'$ și obținem ecuația $y'^2 - 2yy'' + 1 = 0$ din care lipsește variabila independentă t . Notăm $p = y'$ și considerăm pe y ca variabilă independentă. Atunci $y'' = p \frac{dp}{dy} = pp'$. Ecuația revine la $p^2 - 2ypp' + 1 = 0$ care este cu variabile separabile. Obținem

$$p' = \frac{p^2 + 1}{2py} \iff \frac{2p dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y} \iff \ln(p^2 + 1) = \ln y + \ln C_1 \iff p^2 + 1 = C_1 y.$$

Prin urmare avem ecuația cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dt} = y' = p = \sqrt{C_1 y - 1} \iff \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dt \iff \frac{2\sqrt{C_1 y - 1}}{C_1} = t + C_2$$

cu soluția $y = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(t + C_2)^2$. Cum $y = x'$, soluția generală a ecuației inițiale va fi

$$x = \int \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(t + C_2)^2 dt = \frac{1}{C_1}t + \frac{C_1}{12}(t + C_2)^3 + C_3.$$

Ecuatii omogene raportate la funcție și derivatele sale

Fie ecuația

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

unde F este o funcție omogenă de grad a în variabilele $x, x', \dots, x^{(n)}$, adică

$$F(t, \alpha x, \alpha x', \dots, \alpha x^{(n)}) = \alpha^a \cdot F(t, x, x', \dots, x^{(n)}).$$

Considerând $\alpha = \frac{1}{x}$ rezultă

$$F\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \dots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = \frac{1}{x^a} \cdot F(t, x, x', \dots, x^{(n)}).$$

Așadar,

$$F\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \dots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0,$$

ecuație a cărei ordin se reduce prin substituția $u = \frac{x'}{x}$. Derivatele lui x se scriu în funcție de u .

De exemplu

$$x'' = (x')' = (xu)' = x'u + xu' \implies \frac{x''}{x} = u^2 + u'$$

$$x''' = (x'')' = (x'u + xu')' = x''u + 2x'u' + xu'' \implies \frac{x'''}{x} = u^3 + 3uu' + u''$$

2.4 Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy

$$xx'' = x'^2 + xx' + 2x^2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Notăm $F(t, x, x', x'') = xx'' - x'^2 - xx' - 2x^2t$. Aceasta este o funcție omogenă în variabilele x, x' și x'' . Într-adevăr,

$$F(t, \alpha x, \alpha x', \alpha x'') = \alpha^2 xx'' - \alpha^2 x'^2 - \alpha^2 xx' - 2\alpha^2 x^2 t = \alpha^2 F(t, x, x', x'').$$

Facem substituția $x' = xu$. Avem $x'' = x(u^2 + u')$. Înlocuind în ecuație se obține

$$x^2(u^2 + u') = x^2u^2 + x^2u + 2x^2t.$$

Din cauza condițiilor inițiale soluția căutată nu poate fi soluția singulară $x = 0$. Împărțim cu x^2 și avem

$$u^2 + u' = u^2 + u + 2t \iff u' - u = 2t.$$

Această ecuație liniară de ordinul întâi o înmulțim cu e^{-t} și obținem

$$(u \cdot e^{-t})' = 2te^{-t} \iff u \cdot e^{-t} = \int 2te^{-t} dt = -2te^{-t} + 2 \int e^{-t} dt = -2te^{-t} - 2e^{-t} + C_1.$$

Avem $u(t) = C_1 e^t - 2(t+1)$. Din condițiile inițiale $u(0) = 1$, prin urmare $1 = C_1 - 2$, adică $C_1 = 3$. Ecuația care se obține este o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{x'}{x} = 3e^t - 2(t+1) \iff \frac{dx}{x} = (3e^t - 2(t+1)) dt \iff \ln x = 3e^t - (t+1)^2 + \ln C_2.$$

Are soluția $x(t) = C_2 e^{3e^t - (t+1)^2}$. Din condiția inițială $1 = x(0) = C_2 e^2$, rezultă $C_2 = e^{-2}$. Soluția problemei Cauchy este $x(t) = e^{3e^t - (t+1)^2 - 2}$.

Ecuații omogene în t și dt

O ecuație de forma

$$F(x, tx', t^2 x'', \dots, t^n x^{(n)}) = 0$$

se rezolvă cu schimbarea de variabilă $t = e^s$. Derivatele lui x se rescriu în funcție de s . De exemplu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = x' \cdot e^s = tx' & \Rightarrow tx' &= \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) \cdot \frac{dt}{ds} = (tx')' \cdot t = t^2 x'' + tx' & \Rightarrow t^2 x'' &= \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

2.5 Exemplu. Să se integreze ecuația $tx'' = 2xx' - x'$.

Înmulțim ecuația cu t pentru a observa că $t^2 x'' = 2xtx' - tx'$ este omogenă în t și dt . Cu schimbarea de variabilă $t = e^s$ se obține

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} = 2x \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} \iff x'' = 2xx'$$

Lipsește variabila independentă s . Notăm $p(x) = x'$. Avem $x'' = pp'$. Ecuația devine $pp' = 2xp$.

Dacă $p = 0$ atunci $x = C$. Dacă $p \neq 0$ atunci ecuația $p' = 2x$ se rescrie

$$\frac{dp}{dx} = 2x \iff dp = 2x dx \iff p = x^2 + C \iff \frac{dx}{ds} = x^2 + C \iff \frac{dx}{x^2 + C} = ds.$$

Dacă $C = 0$ atunci, prin integrare, $-\frac{1}{x} = s + C_2$, de unde $x = -\frac{1}{s+C_2} = -\frac{1}{\ln t + C_2}$.

Dacă $C = C_1^2$, atunci $\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_1} = s + C_2$, de unde $x = C_1 \operatorname{tg}(C_1(\ln t + C_2))$.

Dacă $C = -C_1^2$, atunci $\frac{1}{2C_1} \ln \frac{x-C_1}{x+C_1} = s + C_2$, de unde $x = C_1 \frac{1+e^{2C_1(\ln t+C_2)}}{1-e^{2C_1(\ln t+C_2)}}$.

2.2 Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

2.6 Definiție. Se numește **ecuație diferențială liniară de ordin $n \geq 1$** o ecuație de forma

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t),$$

unde $a_1, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $f(t) = 0$, pentru orice $t \in I$, atunci ecuația este **omogenă**, iar dacă f este nenulă atunci ecuația este **neomogenă**.

Pentru a studia această ecuație introducem operatorul

$$L[x] = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x.$$

Atunci ecuația diferențială liniară de ordin superior se rescrie

$$L[x] = f(t).$$

2.7 Lema (Liniaritatea operatorului L). Fie $x_1, x_2, \dots, x_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile de ordinul n pe I și $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{R}$. Atunci

$$L[C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_mx_m] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2] + \dots + C_mL[x_m].$$

Demonstrație. Se demonstrează prin inducție. Pentru $m = 1$ folosind proprietatea $(Cf)^{(k)} = C f^{(k)}$ avem

$$L[C_1x_1] = (C_1x_1)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)(C_1x_1)' + a_n(t)C_1x_1 = C_1L[x_1].$$

Pentru $m = 2$ avem

$$\begin{aligned} L[C_1x_1 + C_2x_2] &= (C_1x_1 + C_2x_2)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1 + C_2x_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(t)(C_1x_1 + C_2x_2) \\ &= (C_1x_1)^{(n)} + a_1(t)(C_1x_1)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)(C_1x_1)' + a_n(t)C_1x_1 + \\ &\quad + (C_2x_2)^{(n)} + a_1(t)(C_2x_2)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)(C_2x_2)' + a_n(t)C_2x_2 \\ &= L[C_1x_1] + L[C_2x_2] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2]. \end{aligned}$$

Presupunem adevărată relația pentru m și o demonstrăm pentru $m + 1$.

$$\begin{aligned} L[C_1x_1 + \dots + C_{m+1}x_{m+1}] &= L[C_1x_1 + \dots + C_mx_m] + L[C_{m+1}x_{m+1}] \\ &= C_1L[x_1] + C_2L[x_2] + \dots + C_mL[x_m] + C_{m+1}L[x_{m+1}]. \end{aligned}$$

□

2.8 Teoremă (Teorema de existență și unicitate). *Fiind date funcțiile a_1, \dots, a_n, f de clasă $C(I)$ definite pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, numerele reale $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ și $t_0 \in I$ atunci există o unică funcție $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ care să verifice relațiile*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi'(t) + a_n(t)\varphi(t) = f(t), \text{ pentru orice } t \in I \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ \varphi'(t_0) = \varphi_1, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = \varphi_{n-1}. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Se transformă ecuația într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi și se folosește teorema de existență și unicitate a soluției sistemelor liniare. \square

2.9 Lema. *Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale liniare și omogene $L[x] = 0$ formează un spațiu vectorial, adică dacă x_1 și x_2 sunt soluții ale ecuației și C_1, C_2 sunt numere reale, atunci și $C_1x_1 + C_2x_2$ este soluție.*

Demonstrație. Fiindcă x_1 și x_2 sunt soluții avem $L[x_1] = 0$ și $L[x_2] = 0$. Prin urmare

$$L[C_1x_1 + C_2x_2] = C_1L[x_1] + C_2L[x_2] = 0.$$

\square

Se pune întrebarea care este dimensiunea spațiului vectorial al soluțiilor ecuației liniare omogene și care funcții formează o bază a sa. Pentru a afla răspunsul să introducem următoarele noțiuni.

2.10 Definiție. *Funcțiile $x_1, \dots, x_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numesc **liniar independente** pe I dacă din egalitatea*

$$C_1x_1 + \dots + C_mx_m = 0,$$

unde $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$, rezultă

$$C_1 = C_2 = \dots = C_m.$$

*În caz contrar, funcțiile se numesc **liniar dependente** pe I . Mai exact, funcțiile x_1, \dots, x_m sunt liniar dependente pe I dacă există m constante reale C_1, \dots, C_m nu toate zero ($C_1^2 + \dots + C_m^2 > 0$) cu proprietatea că*

$$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \dots + C_mx_m(t) = 0, \quad \text{pentru orice } t \in I.$$

2.11 Definiție. *Pentru $m \geq 2$, se numește **wronskianul** (determinantul lui Wronski) asociat funcțiilor x_1, \dots, x_m derivabile de ordinul $m - 1$ pe I , determinantul*

$$W(t) = W(x_1, \dots, x_m) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_m(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_m'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(m-1)}(t) & x_2^{(m-1)}(t) & \dots & x_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

2.12 Teoremă. Pentru $m \geq 2$, fie $x_1, \dots, x_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile de $m - 1$ ori pe I , care sunt liniar dependente pe I . Atunci wronskianul acestor funcții este nul pe I .

Demonstrație. Pentru că funcțiile x_1, \dots, x_m sunt liniar dependente rezultă că există constantele C_1, \dots, C_m nu toate nule cu proprietatea că $C_1x_1 + \dots + C_mx_m = 0$ pe I . Derivând relația de $m - 1$ ori și considerând un $t \in I$ oarecare, se obține sistemul

$$\begin{cases} C_1x_1(t) + \dots + C_mx_m(t) & = 0 \\ C_1x_1'(t) + \dots + C_mx_m'(t) & = 0 \\ \dots & \dots \\ C_1x_1^{(m-1)}(t) + \dots + C_mx_m^{(m-1)}(t) & = 0 \end{cases}$$

Considerăm sistemul de mai sus cu necunoscutele C_1, \dots, C_m . Fiindcă x_1, \dots, x_m sunt liniar dependente, știm că sistemul omogen de mai sus are și o soluție nebanală. Aceasta înseamnă că determinantul sistemului este nul. Dar determinantul sistemului este chiar wronskianul funcțiilor x_1, \dots, x_m pe punctul t . Fiindcă t a fost ales arbitrar, rezultă că $W(x_1, \dots, x_m) = 0$ pe I . \square

2.13 Teoremă. Dacă x_1, \dots, x_n sunt soluții ale ecuației $L[x] = 0$ pe I și au wronskianul nenul într-un punct $t^* \in I$, atunci x_1, \dots, x_n sunt liniar independente pe I și au wronskianul diferit de zero în orice punct din I .

Demonstrație. Presupunem că funcțiile sunt liniar dependente pe I . Atunci conform Teoremei 2.12 wronskianul este nul în orice punct din I . Acest fapt contrazice ipoteza că $W(t^*) \neq 0$. Așadar, funcțiile x_1, \dots, x_n sunt liniar independente pe I .

Presupunem prin absurd că există un punct $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) = 0$. Atunci sistemul cu necunoscutele C_1, \dots, C_n și determinantul $W(x_1, \dots, x_n)$ nul

$$\begin{cases} C_1x_1(t_0) + \dots + C_nx_n(t_0) & = 0 \\ C_1x_1'(t_0) + \dots + C_nx_n'(t_0) & = 0 \\ \dots & \dots \\ C_1x_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_nx_n^{(n-1)}(t_0) & = 0 \end{cases}$$

are o soluție nebanală. Așadar există $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n \in \mathbb{R}$ nu toate nule, care verifică relațiile de mai sus. Fie atunci funcția

$$\bar{x} = \bar{C}_1x_1 + \dots + \bar{C}_nx_n.$$

Fiind o combinație liniară a soluțiilor x_1, \dots, x_n avem $L[\bar{x}] = 0$. Pentru că nu toate constantele $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n \in \mathbb{R}$ sunt zero, rezultă că \bar{x} nu poate fi funcția nulă. Și totuși pentru funcția \bar{x} avem verificate condițiile

$$\bar{x}(t_0) = 0, \bar{x}'(t_0) = 0, \dots, \bar{x}^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Dar aceste condiții le verifică și funcția nulă $x_0 = 0$, care este o soluție a ecuației date. Pe de altă parte, Teorema de existență și unicitate ne asigură că orice problemă Cauchy are soluție

unică. Noi am obținut două soluții distincte care verifică aceeași problemă Cauchy. Aceasta este o contradicție, care rezultă în urma presupunerii făcute. Așadar wronskianul celor n soluții independente nu se anulează deloc pe I . \square

2.14 Observație. Fie x_1, \dots, x_n soluții ale ecuației $L[x] = 0$. Avem doar două posibilități:

1. funcțiile x_1, \dots, x_n sunt liniar dependente pe I și atunci $W(x_1, \dots, x_n) = 0$ pe I sau
2. funcțiile x_1, \dots, x_n sunt liniar independente pe I și atunci $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pe I .

În cele ce urmează vom demonstra că n , care este ordinul ecuației diferențiale liniare omogene $L[x] = 0$, este și dimensiunea spațiului soluțiilor acestei ecuații și orice n soluții x_1, \dots, x_n liniar independente formează o bază a acestui spațiu al soluțiilor.

2.15 Teoremă. Fie n soluții liniar independente x_1, \dots, x_n pe I ale ecuației $L[x] = 0$. Atunci orice funcție $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică $L[\varphi] = 0$ este de forma

$$\varphi = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n,$$

pentru niște constante reale C_1, \dots, C_n .

Demonstrație. Fie $t_0 \in I$ un punct oarecare. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} C_1x_1(t_0) + \dots + C_nx_n(t_0) & = \varphi(t_0) \\ C_1x_1'(t_0) + \dots + C_nx_n'(t_0) & = \varphi'(t_0) \\ \dots & \dots \\ C_1x_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_nx_n^{(n-1)}(t_0) & = \varphi^{(n-1)}(t_0). \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este wronskianul funcțiilor x_1, \dots, x_n . Pentru că aceste funcții sunt liniar independente pe I , rezultă că $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Acest lucru ne arată că sistemul are soluție unică. Cu această soluție a sistemului construim funcția

$$\psi = C_1x_1 + \dots + C_nx_n.$$

Avem

$$\psi(t_0) = C_1x_1(t_0) + \dots + C_nx_n(t_0) = \varphi(t_0)$$

și folosind celelalte relații din sistem

$$\psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \dots, \psi^{(n-1)}(t_0) = \varphi^{(n-1)}(t_0).$$

Așadar funcțiile ψ și φ verifică aceleași condiții inițiale. Ambele sunt soluții ale ecuației $L[x] = 0$. Conform teoremei de existență și unicitate cele două funcții coincid pe I . Deci,

$$\varphi = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n.$$

\square

2.16 Teoremă. *Soluția generală a ecuației liniare neomogene $L[x] = f(t)$ este*

$$x = x_0 + x_p$$

unde x_0 este soluția generală a ecuației omogene $L[x] = 0$ iar x_p este o soluție particulară oarecare a ecuației $L[x] = f(t)$.

Demonstrație. Fie x_p o soluție particulară oarecare a ecuației neomogene $L[x] = f(t)$. Dacă facem schimbarea de funcție $x = x_p + y$ atunci

$$L[y] = L[x - x_p] = L[x] - L[x_p] = f(t) - f(t) = 0,$$

ceea ce ne conduce la o ecuație omogenă $L[y] = 0$. Dacă x_0 este soluția generală a ecuației omogene atunci obținem soluția generală a ecuației neomogene sub forma $x = x_p + x_0$. \square

2.17 Observație. Cunoașterea soluției generale a ecuației neomogene se reduce la cunoașterea soluției generale a ecuației omogene și a unei soluții particulare a ecuației neomogene. Prima este asigurată de cunoașterea a n soluții liniar independente x_1, \dots, x_n . După cum vom vedea acest lucru este suficient și pentru aflarea soluției particulare a ecuației neomogene.

2.18 Teoremă. *Fie x_1, \dots, x_n soluții liniar independente ale ecuației omogene $L[x] = 0$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe I . Atunci există funcțiile $C_1(t), \dots, C_n(t)$ definite pe I astfel încât*

$$x = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$$

să fie soluție a ecuației neomogene $L[x] = f(t)$.

Demonstrație. Punem condiția ca $x = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$ să verifice ecuația neomogenă $L[x] = f(t)$. Calculăm derivata

$$x' = C_1(t)x_1'(t) + \dots + C_n(t)x_n'(t) + C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t).$$

Punem condiția $C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0$. Prin derivare

$$x'' = C_1(t)x_1''(t) + \dots + C_n(t)x_n''(t) + C_1'(t)x_1'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t).$$

Punem condiția $C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0$. Continuând în același fel

$$x^{(n-1)} = C_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(n-1)}(t) + C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t).$$

Punem condiția $C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0$. Mai derivăm o dată și avem

$$x^{(n)} = C_1(t)x_1^{(n)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(n)}(t) + C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t).$$

Înlocuind aceste derivate în ecuația $L[x] = f(t)$ se obține

$$C'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + C'_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t).$$

Ca urmare C'_1, \dots, C'_n sunt soluții ale sistemului neomogen

$$\begin{cases} C'_1(t)x_1(t) + \dots + C'_n(t)x_n(t) & = 0 \\ C'_1(t)x'_1(t) + \dots + C'_n(t)x'_n(t) & = 0 \\ \dots & \dots \\ C'_1(t)x_1^{(n-2)}(t) + \dots + C'_n(t)x_n^{(n-2)}(t) & = 0 \\ C'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) & = f(t). \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat deoarece determinantul $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pe I . Rezolvând sistemul și integrând se obțin funcțiile $C_1(t), \dots, C_n(t)$. \square

2.19 Observație. Metoda expusă mai sus se numește *metoda variației constantelor*, pentru că ”variind constantele” adică înlocuind constantele cu funcții s-a obținut o soluție particulară a ecuației omogene. Cu toate acestea, din ceea ce am demonstrat până acum, am reușit să deducem doar structura generală a ecuațiilor liniare. Nu există o metodă generală pentru găsirea soluției ecuațiilor liniare de ordin superior decât pentru câteva clase particulare de ecuații.

2.20 Exemplu. Să se rezolve ecuația $(t+1)^2\sqrt{t+1}x'' - (t+1)x' + x = t+1 - 2\sqrt{t+1}$.

Observăm că este o ecuație liniară de ordinul doi. Rezolvăm mai întâi ecuația omogenă $(t+1)^2\sqrt{t+1}x'' - (t+1)x' + x = 0$. O soluție a ecuației se observă ușor $x = t+1$. Știm că ecuația are două soluții liniar independente. Pentru a găsi cea de-a doua soluție facem schimbarea de funcție $x = (t+1)y$. Obținem ecuația

$$(t+1)^3\sqrt{t+1}y'' + 2(t+1)^2\sqrt{t+1}y' - (t+1)^2y' = 0.$$

Împărțim cu $(t+1)^2$ și notăm $y' = p$ și obținem $(t+1)\sqrt{t+1}p' = p(1 - 2\sqrt{t+1})$. Această ecuație este cu variabile separabile. Avem

$$\frac{dp}{p} = \frac{1 - 2\sqrt{t+1}}{(t+1)\sqrt{t+1}} dt \iff \ln p = -\frac{2}{\sqrt{t+1}} - 2\ln(t+1) + \ln C_1 \iff p = \frac{C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{(t+1)^2}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{(t+1)^2} dt = C_1 \int \frac{e^u}{\frac{16}{u^4}} \cdot \frac{-2}{u^3} du = -2C_1 \int e^u u du = 2C_1 e^u (1-u) + C_2 \\ &= 2C_1 e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t+1}} \right) + C_2. \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației omogene este (după o renumerotare a constantelor $C_1 := C_2$, $C_2 := 2C_1$)

$$x_0 = C_1(t+1) + C_2 e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t+1 + 2\sqrt{t+1}).$$

Cea de-a doua soluție obținută $x_2 = 2e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t + 1 + 2\sqrt{t+1})$ este linear independentă de soluția $x_1 = t + 1$ pentru că wronskianul

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t+1+2\sqrt{t+1}) \\ 1 & e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} \left(\frac{2}{\sqrt{t+1}} + 1 + \frac{2}{t+1} \right) \end{vmatrix} = 2e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} > 0.$$

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$x_p = C_1(t) \cdot (t+1) + C_2(t) \cdot e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t+1+2\sqrt{t+1}) = C_1(t) \cdot x_1 + C_2(t) \cdot x_2.$$

Derivăm și punem condiția $C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0$. Obținem $x_p' = C_1x_1' + C_2x_2'$ și

$$x_p'' = C_1'x_1' + C_2'x_2' + C_1x_1'' + C_2x_2''.$$

Înlocuim în ecuația neomogenă și avem

$$(t+1)^2\sqrt{t+1}x_p'' - (t+1)x_p' + x_p = t+1 - 2\sqrt{t+1}.$$

Ținem seama de faptul că x_1 și x_2 sunt soluții ale ecuației omogene și obținem

$$(t+1)^2\sqrt{t+1}(C_1'x_1' + C_2'x_2') = t+1 - 2\sqrt{t+1}.$$

Derivatele C_1' și C_2' verifică sistemul

$$\begin{cases} C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0 \\ C_1'x_1' + C_2'x_2' = \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}}. \end{cases}$$

Avem

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}} & x_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = -\frac{(t+1)^2 - 4(t+1)}{2(t+1)^2\sqrt{t+1}} \implies C_1 = -\sqrt{t+1} - \frac{4}{\sqrt{t+1}},$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{(t+1)^2\sqrt{t+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = \frac{(t+1-2\sqrt{t+1})e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}}}{2(t+1)\sqrt{t+1}} \implies C_2 = \sqrt{t+1} \cdot e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}}.$$

Soluția particulară va fi

$$\begin{aligned} x_p &= \left(-\sqrt{t+1} - \frac{4}{\sqrt{t+1}} \right) \cdot (t+1) + \sqrt{t+1} e^{\frac{2}{\sqrt{t+1}}} \cdot e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t+1+2\sqrt{t+1}) \\ &= 2(t+1) - 4\sqrt{t+1}. \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației neomogene va fi

$$x = x_0 + x_p = C_1(t+1) + C_2 e^{\frac{-2}{\sqrt{t+1}}} (t+1+2\sqrt{t+1}) - 4\sqrt{t+1}.$$

2.3 Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

2.21 Definiție. Se numește **ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți** o ecuație de forma

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t),$$

unde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere reale date, iar $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid.

Pentru a studia această ecuație introducem operatorul

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x.$$

Atunci ecuația diferențială liniară de ordin superior se rescrie

$$L[x] = f(t).$$

Notăm cu

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$$

polinomul caracteristic atașat lui L .

2.22 Lema. Au loc identitățile

$$L[e^{rt}] = e^{rt} P(r)$$

$$L[e^{rt} y] = e^{rt} \left(P(r)y + \frac{P'(r)}{1!} y' + \dots + \frac{P^{(n)}(r)}{n!} y^{(n)} \right).$$

Demonstrație. Prima relație se obține din a doua pentru funcția $y = 1$. Fie $x = ye^{rt}$. Calculăm derivatele lui x , folosind formula lui Leibniz:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= C_k^0 y r^k e^{rt} + C_k^1 y' r^{k-1} e^{rt} + C_k^2 y'' r^{k-2} e^{rt} + \dots + C_k^k y^{(k)} e^{rt} \\ &= e^{rt} \left(r^k y + \frac{k r^{k-1}}{1!} y' + \frac{k(k-1) r^{k-2}}{2!} y'' + \dots + \frac{k(k-1) \dots 1 r^0}{k!} y^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Avem

$$x = e^{rt} y$$

$$x' = e^{rt} \left(r y + \frac{1 r^0}{1!} y' \right)$$

$$x'' = e^{rt} \left(r^2 y + \frac{2 r}{1!} y' + \frac{2 \cdot 1 r^0}{2!} y'' \right)$$

.....

$$x^{(k)} = e^{rt} \left(r^k y + \frac{k r^{k-1}}{1!} y' + \frac{k(k-1) r^{k-2}}{2!} y'' + \dots + \frac{k(k-1) \dots 1 r^0}{k!} y^{(k)} \right)$$

.....

$$x^{(n)} = e^{rt} \left(r^n y + \frac{n r^{n-1}}{1!} y' + \frac{n(n-1) r^{n-2}}{2!} y'' + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1 r^0}{n!} y^{(n)} \right).$$

Înmulțim prima egalitate cu a_n , a doua cu a_{n-1} , ... și penultima cu a_1 și le adunăm. Vom obține relația a doua din Lemă. \square

2.23 Teoremă. *Dacă polinomul caracteristic are n rădăcini reale distincte r_1, \dots, r_n atunci soluția ecuației omogene $L[x] = 0$ este*

$$x = C_1 e^{r_1 t} + \dots + C_n e^{r_n t}.$$

Demonstrație. Fie $x_k = e^{r_k t}$, pentru $k = \overline{1, n}$. Acestea sunt soluții ale ecuației $L[x] = 0$ pentru că

$$L[x_k] = L[e^{r_k t}] = e^{r_k t} P(r_k) = e^{r_k t} \cdot 0 = 0, \quad \text{pentru orice } k = \overline{1, n}.$$

Este suficient să arătăm că acestea sunt liniar independente. Pentru aceasta calculăm wronskianul

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & \dots & e^{r_n t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & \dots & r_n e^{r_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 t} & r_2^{n-1} e^{r_2 t} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n t} \end{vmatrix}.$$

Din fiecare coloană scoatem factor comun exponențiala și obținem

$$W(x_1, \dots, x_n) = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ultimul determinant este determinantul Vandermonde al numerelor r_1, \dots, r_n a cărui valoare este $\prod_{i>j}^n (r_i - r_j)$. Fiindcă numerele r_1, \dots, r_n sunt diferite și exponențiala nu se anulează rezultă

$$W(x_1, \dots, x_n) = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)t} \prod_{i>j}^n (r_i - r_j) \neq 0.$$

Aceasta ne arată că soluțiile x_1, \dots, x_n sunt liniar independente. \square

2.24 Exemplu. Să se integreze ecuația $x'' + x' - 2x = 0$.

Ecuația caracteristică este $r^2 + r - 2 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_2 = -2$. Soluția generală a ecuației este $x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$.

2.25 Observație. Dacă $r_1 = a + bi$ este o rădăcină pentru $P(r) = 0$ atunci și conjugata $r_2 = a - bi$ este rădăcină a polinomului P . Scriem cei doi termeni corespunzători din soluția generală

$$x_{1,2} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Soluția $x_{1,2}$ este complexă cu constantele C_1, C_2 numere complexe. Totuși putem înlocui această soluție complexă cu una reală. Vom alege constantele astfel încât $x_{1,2}$ să fie reală. Trecând la conjugate avem

$$x_{1,2} = \bar{x}_{1,2} = \bar{C}_1 e^{\bar{r}_1 t} + \bar{C}_2 e^{\bar{r}_2 t} = \bar{C}_1 e^{r_2 t} + \bar{C}_2 e^{r_1 t}.$$

Așadar $\bar{C}_2 = C_1$. Cu notația $A = C_1 + \bar{C}_1 \in \mathbb{R}$ și $B = i(C_1 - \bar{C}_1) \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{(a+bi)t} + \bar{C}_1 e^{(a-bi)t} \\ &= C_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt) + \bar{C}_1 e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \\ &= e^{at} [(C_1 + \bar{C}_1) \cos bt + (iC_1 - i\bar{C}_1) \sin bt] \\ &= e^{at} (A \cos bt + B \sin bt). \end{aligned}$$

2.26 Exemplu. Să se integreze ecuația $x''' - 8x = 0$.

Ecuția caracteristică este $r^3 - 8 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$ și $r_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Soluția generală a ecuației este $x = C_1 e^{2t} + e^{-t}(C_2 \cos \sqrt{3}t + C_3 \sin \sqrt{3}t)$.

2.27 Teoremă. Dacă r_1 este rădăcină multiplă de ordinul $p \geq 2$ a polinomului caracteristic P atunci $e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{p-1} e^{r_1 t}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației $L[x] = 0$.

Demonstrație. Fiindcă r_1 este rădăcină multiplă de ordinul $p \geq 2$ a ecuației $P(r) = 0$ avem $P(r_1) = 0, P'(r_1) = 0, \dots, P^{(p-1)}(r_1) = 0$ și $P^{(p)}(r_1) \neq 0$. Fie $x_k = t^k e^{r_1 t}$, cu $0 \leq k \leq p-1$. Avem

$$L[x_k] = e^{r_1 t} \left[P(r_1) t^k + \dots + \frac{P^{(p-1)}(r_1)}{(p-1)!} (t^k)^{(p-1)} + \frac{P^{(p)}(r_1)}{p!} (t^k)^{(p)} + \dots + \frac{P^{(n)}(r_1)}{n!} (t^k)^{(n)} \right]$$

Primii p termeni din paranteză sunt zero datorită derivatelor lui P , iar restul termenilor sunt zero datorită derivatelor lui t^k . Așadar $L[x_k] = 0$, pentru orice k cu valori de la 0 la $p-1$. Aceasta ne arată că x_k sunt soluții. Pentru a arăta că sunt liniar independente pornim de la egalitatea

$$C_0 e^{r_1 t} + C_1 t e^{r_1 t} + \dots + C_{p-1} t^{p-1} e^{r_1 t} = 0.$$

Împărțim cu $e^{r_1 t} \neq 0$ și obținem că polinomul $C_0 + C_1 t + \dots + C_{p-1} t^{p-1}$ ia valoarea zero pentru orice t , ceea ce înseamnă că polinomul este nul, adică $C_0 = C_1 = \dots = C_{p-1} = 0$. Aceasta ne arată că funcțiile x_k sunt liniar independente. \square

2.28 Teoremă. Dacă r_1, \dots, r_s sunt rădăcinile polinomului caracteristic cu ordinele de multiplicitate p_1, \dots, p_s atunci soluția generală a ecuației $L[x] = 0$ se scrie sub forma

$$x = P_1(t) e^{r_1 t} + \dots + P_s(t) e^{r_s t},$$

unde P_1, \dots, P_s sunt polinoame cu gradele $p_1 - 1, \dots, p_s - 1$.

Demonstrație. Dacă r_1 este rădăcină de ordinul p_1 a polinomului caracteristic atunci $P_1(t) e^{r_1 t}$ este soluție a ecuației $L[x] = 0$, conform teoremei precedente, unde P_1 este un polinom de grad $p_1 - 1$. Rămâne să demonstrăm că $e^{r_1 t}, \dots, t^{p_1-1} e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, t^{p_2-1} e^{r_2 t}, \dots, e^{r_s t}, \dots, t^{p_s-1} e^{r_s t}$ sunt liniar independente. Presupunem că

$$P_1(t) e^{r_1 t} + P_2(t) e^{r_2 t} + \dots + P_{s-1}(t) e^{r_{s-1} t} + P_s(t) e^{r_s t} = 0.$$

Demonstrăm că P_1, \dots, P_s sunt nule.

Împărțim cu e^{rst} și derivăm de p_s ori. Ultimul termen dispare și avem

$$Q_1(t)e^{(r_1-r_s)t} + \dots + Q_{s-1}(t)e^{(r_{s-1}-r_s)t} = 0, \quad (2.1)$$

unde Q_1, \dots, Q_{s-1} sunt polinoame de grade ca și P_1, \dots, P_{s-1} și sunt identic nule dacă polinoamele corespunzătoare P_1, \dots, P_{s-1} sunt identic nule. Într-adevăr, să observăm că, de exemplu

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= e^{-(r_1-r_s)t} \frac{d^{p_s}}{dt^{p_s}} (P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}) \\ &= C_{p_s}^0 P_1(t)(r_1 - r_s)^{p_s} + C_{p_s}^1 P_1'(t)(r_1 - r_s)^{p_s-1} + \dots + C_{p_s}^{p_s} P_1^{(p_s)}(t). \end{aligned}$$

Fiindcă $r_1 - r_s \neq 0$ rezultă că Q_1 are același grad ca și P_1 . Mai mult, dacă Q_1 este identic zero atunci derivata de ordinul p_s a produsului $P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}$ este identic zero, adică $P_1(t) \cdot e^{(r_1-r_s)t}$ este un polinom de grad cel mult $p_s - 1$. Dar acest lucru este posibil doar dacă P_1 este identic zero.

Revenind la egalitatea (2.1) dacă împărțim cu $e^{(r_{s-1}-r_s)t}$ și derivăm de p_{s-1} se obține

$$R_1(t)e^{(r_1-r_{s-1})t} + \dots + R_{s-2}(t)e^{(r_{s-2}-r_{s-1})t} = 0,$$

unde R_1, \dots, R_{s-2} sunt polinoame de grade ca și Q_1, \dots, Q_{s-2} și sunt identic nule dacă polinoamele corespunzătoare Q_1, \dots, Q_{s-2} sunt identic nule.

Repetând acest procedeu obținem

$$S_1(t)e^{(r_1-r_2)t} = 0.$$

De aici deducem că S_1 este polinomul nul, dar asta înseamnă că R_1 este nul, de unde Q_1 este nul, ceea ce implică faptul că P_1 este nul.

Analog obținem că P_2, P_3, \dots, P_s sunt nule. Cu aceasta teorema este demonstrată. \square

2.29 Observație. În cazul în care $r_1 = a + bi$ este o rădăcină complexă de ordinul p a polinomului caracteristic, atunci \bar{r}_1 este de asemenea o rădăcină de ordinul p . Soluția reală corespunzătoare acestora este

$$x = e^{at} \left[(A_0 + A_1 t + \dots + A_{p-1} t^{p-1}) \cos bt + (B_0 + B_1 t + \dots + B_{p-1} t^{p-1}) \sin bt \right].$$

2.30 Exemplu. Să se integreze ecuația $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 6x'' - 4x' + x = 0$.

Ecuația caracteristică atașată este $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = (r - 1)^4 = 0$. Aceasta are rădăcina multiplă $r_{1,2,3,4} = 1$. Soluția generală a ecuației este

$$x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3) e^t.$$

2.31 Exemplu. Să se integreze ecuația $x^{(5)} - x^{(4)} + 2x^{(3)} - 2x'' + x' - x = 0$.

Ecuția caracteristică atașată este $r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0$. Aceasta are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_{2,3} = i$ și $r_{4,5} = -i$. Soluția generală a ecuației este

$$x = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t) \cos t + (C_4 + C_5 t) \sin t.$$

2.32 Observație. Dacă avem de rezolvat o ecuație liniară neomogenă cu coeficienți constanți $L[x] = f(t)$ putem folosi metoda variației constantelor. Dacă funcția din membrul al doilea are o formă specială putem folosi și următoarea metodă. Dacă

$$f(t) = e^{at}[Q(t) \cos bt + R(t) \sin bt]$$

unde Q, R sunt polinoame de grad cel mult m , atunci dacă $r = a + bi$ este rădăcină de ordinul $s \geq 0$ a ecuației caracteristice $P(r) = 0$ atunci ecuația neomogenă $L[x] = f(t)$ are o soluție particulară de forma

$$x_p = t^s e^{at}[S(t) \cos bt + T(t) \sin bt]$$

unde S și T sunt polinoame de grad cel mult m , ale căror coeficienți se determină prin identificare.

2.33 Exemplu. Să se integreze ecuația $x'' + x = \sin t$.

Rezolvăm mai întâi ecuația omogenă: $x'' + x = 0$. Ecuția caracteristică este $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Soluția ecuației omogene este $x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Funcția din membrul drept al ecuației neomogene este $f(t) = \sin t$. Aceasta înseamnă că $a = 0$ și $b = 1$, $Q(t) = 0$ și $R(t) = 1$. Pentru că $r = a + bi = i$ este o rădăcină simplă a ecuației caracteristice luăm $s = 1$. Polinoamele Q, R sunt de grad cel mult 0. Considerăm pe $S(t) = A$ și $T(t) = B$ polinoame de grad cel mult 0 în forma cea mai generală. Soluția particulară se caută sub forma

$$x_p = t(A \cos t + B \sin t).$$

Avem

$$x'_p = A \cos t + B \sin t + t(-A \sin t + B \cos t)$$

$$x''_p = -2A \sin t + 2B \cos t + t(-A \cos t - B \sin t).$$

Înlocuind în ecuație rezultă

$$\sin t = x''_p + x_p = -2A \sin t + 2B \cos t.$$

Prin identificarea coeficienților $1 = -2A$ și $0 = 2B$, deci $x_p = -\frac{1}{2}t \cos t$. Soluția generală a ecuației neomogene este

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2}t \cos t.$$

2.34 Teoremă. Dacă x_i sunt soluții ale ecuațiilor $L[x] = f_i(t)$, $i = \overline{1, s}$ atunci funcția $x = x_1 + \dots + x_s$ este soluție a ecuației $L[x] = f_1(t) + \dots + f_s(t)$.

Demonstrație. Folosind liniaritatea operatorului avem

$$L[x] = L[x_1 + \dots + x_s] = L[x_1] + \dots + L[x_s] = f_1(t) + \dots + f_s(t).$$

□

2.35 Exemplu. Să se integreze ecuația $x'' + 2x' + x = 1 + t^2 + 4te^t$.

Rezolvăm ecuația omogenă $x'' + 2x' + x = 0$. Ecuația caracteristică este $r^2 + 2r + 1 = 0$, cu rădăcina dublă $r_{1,2} = -1$. Soluția ecuației omogene este $x_0 = (C_1 + C_2t)e^{-t}$. Pentru a rezolva ecuația neomogenă notăm $f_1(t) = 1 + t^2$ și $f_2(t) = te^t$.

Soluția particulară corespunzătoare ecuației $x'' + 2x' + x = 1 + t^2$ este de forma $x_1 = At^2 + Bt + C$, căci $a = 0$, $b = 0$, $Q(t) = 1 + t^2$ și $s = 0$ fiindcă $r = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. Prin derivare rezultă

$$1 + t^2 = x_1'' + 2x_1' + x_1 = 2A + 2(2At + B) + At^2 + Bt + C = At^2 + t(4A + B) + 2A + 2B + C.$$

Prin identificarea coeficienților avem $A = 1$, $B = -4$ și $C = 7$. Deci $x_1 = t^2 - 4t + 7$.

Soluția particulară corespunzătoare ecuației $x'' + 2x' + x = 4te^t$ o căutăm de forma $x_2 = (At + B)e^t$, căci $a = 1$, $b = 0$, $Q(t) = 4t$ și $s = 0$ fiindcă $r = 1$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. Prin derivare rezultă

$$4te^t = x_2'' + 2x_2' + x_2 = e^t(At + B + 2A) + 2e^t(At + B + A) + e^t(At + B) = e^t(4At + 4B + 4A).$$

Prin identificarea coeficienților avem $A = 1$, $B = -1$. Obținem $x_2 = e^t(t - 1)$.

Soluția ecuației neomogene $x'' + 2x' + x = 1 + t^2 + 4te^t$ este

$$x = x_0 + x_1 + x_2 = (C_1 + C_2t)e^{-t} + t^2 - 4t + 7 + e^t(t - 1).$$

2.36 Exemplu (Circuitul electric RLC). Considerăm un circuit electric format dintr-o rezistență de 1 ohm legată în serie cu o bobină de 0,05 henri, un condensator cu capacitatea de $2/1010$ farazi și o sursă electromotoare care generează o tensiune de $E(t)$ volți la momentul de timp t . Dacă notăm cu $Q(t)$ sarcina electrică a condensatorului în coulombi la momentul t și $I(t)$ intensitatea curentului în amperi a circuitului, atunci evoluția curentului în circuit se face pe baza legii lui Kirchhoff

$$L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t).$$

Ținând cont de relația $Q'(t) = I(t)$ și derivând se obține ecuația diferențială

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t).$$

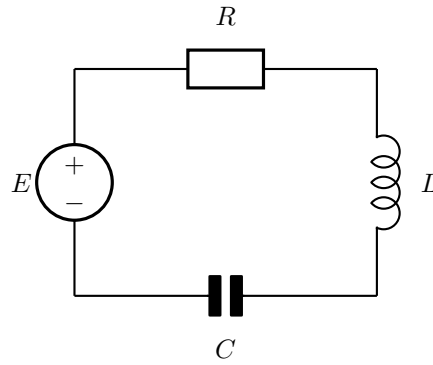


Figura 2.1: Circuitul RLC

Dacă sursa este o baterie de 12 volți să se afle intensitatea curentului în circuit după 0,01 secunde știind că la momentul inițial $I(0) = 0 = Q(0)$.

Tensiunea fiind constantă avem $E'(t) = 0$. Ecuația diferențială este

$$\frac{1}{20}I'' + I' + 550I = 0.$$

Ecuația caracteristică este $r^2 + 20r + 10100 = 0$, care are rădăcinile $r_1 = -10 + 100i$ și $r_2 = -10 - 100i$. Soluția va fi

$$I(t) = e^{-10t}(A \cos 100t + B \sin 100t).$$

Din condițiile inițiale avem

$$I(0) = A = 0$$

$$I'(0) = -10A + 100B = \frac{E(0)}{L} = 240$$

Avem $A = 0$ și $B = 2,4$. Se obține

$$I(t) = 2,4 e^{-10t} \sin 100t.$$

Pentru $t = 0,01$ avem $I(0) = 2,4 \cdot e^{-0,1} \cdot \sin 1 \approx 1,82$ amperi.

Dacă circuitul este legat la o sursă de curent alternativ de 220 volți și 50 hertzi, care va fi intensitatea după 0,01 secunde?

În cazul curentului alternativ $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Avem $E_0 = 220$ și $\omega = 2\pi \cdot 50 \approx 314$ radiani pe secundă. Avem ecuația diferențială

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t \iff I'' + 20I' + 10100I = 4400\omega \cos \omega t$$

Trebuie să determinăm o soluție particulară de forma $I_p = C \cos \omega t + D \sin \omega t$. Avem

$$I_p'' + 20I_p' + 10100I_p = \cos \omega t(-C\omega^2 + 20D\omega + 10100C) + \sin \omega t(-D\omega^2 - 20C\omega + 10100D).$$

Prin identificarea coeficienților obținem

$$C = \frac{4400\omega(10100 - \omega^2)}{(10100 - \omega^2)^2 + 400\omega^2}$$

$$D = \frac{88000\omega^2}{(10100 - \omega^2)^2 + 400\omega^2}$$

Cu acești coeficienți determinați soluția generală va fi

$$I(t) = e^{-10t}(A \cos 100t + B \sin 100t) + C \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Din condițiile inițiale

$$I(0) = A + C = 0$$

$$I'(0) = -10A + 100B + \omega D = \frac{E(0)}{L} = 0$$

obținem $A = -C$ și $B = (-D\omega - 10C)/100$. Intensitatea curentului la momentul $t = 0,01$ este

$$I(0,01) = e^{-0,1} \left(-C \cos 1 - \frac{D\omega + 10C}{100} \sin 1 \right) + C \cos(0,01\omega) + D \sin(0,01\omega) \approx -239.$$

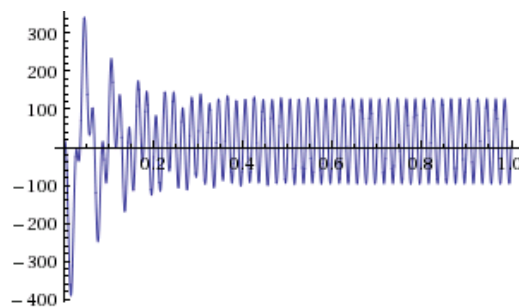


Figura 2.2: Intensitatea curentului în circuit în cel de-al doilea caz

2.4 Ecuații diferențiale Euler

2.37 Definiție. Se numește **ecuație diferențială Euler** o ecuație de forma

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t),$$

unde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere reale.

Metoda 1 de rezolvare. Pentru a studia această ecuație facem substituția $t = e^s$ și introducem operatorul $S = \frac{d}{ds}$. Vom avea

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = x' \cdot e^s = t x' \quad \Rightarrow \quad t x' = \frac{dx}{ds} = Sx$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) \cdot \frac{dt}{ds} = (t x')' \cdot t = t^2 x'' + t x' \quad \Rightarrow \quad t^2 x'' = S(S-1)x$$

Demonstrăm prin inducție că

$$t^n x^{(n)} = S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)x.$$

Presupunem relația adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$. Avem

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= (x^{(n)})'_t = (S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)x \cdot t^{-n})'_t \\ &= (S(S-1)\dots(S-n+1)x)'_t \cdot t^{-n} + S(S-1)\dots(S-n+1)x \cdot (-n)t^{-n-1} \\ &= (S(S-1)\dots(S-n+1)x)'_s \cdot s'_t \cdot t^{-n} - S(S-1)\dots(S-n+1)x \cdot nt^{-n-1} \\ &= S^2(S-1)\dots(S-n+1)x \cdot t^{-n-1} - S(S-1)\dots(S-n+1)x \cdot nt^{-n-1} \end{aligned}$$

Obținem

$$t^{n+1}x^{(n+1)} = S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)(S-n)x.$$

Înlocuind aceste relații în ecuația Euler se obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți.

Metoda 2 de rezolvare. Căutăm soluții sub forma $x = t^r$, rezolvând ecuația omogenă. Rezultă o ecuație caracteristică în r . Dacă $r = r_1$ este soluție reală a ecuației caracteristice atunci $x = C_1 t^{r_1}$ este soluție a ecuației diferențiale. Dacă $r = a \pm bi$ sunt soluții ale ecuației caracteristice atunci $x = t^a(A \cos(b \ln t) + B \sin(b \ln t))$ este soluție a ecuației lui Euler. Dacă $r = r_2$ este o soluție multiplă de ordin s atunci $x = t^{r_2}(C_0 + C_1 \ln t + \dots + C_{s-1} \ln^{s-1} t)$ este soluție. Pentru ecuația neomogenă, dacă

$$f(t) = t^a[Q(\ln t) \cos(b \ln t) + R(\ln t) \sin(b \ln t)]$$

unde Q, R sunt polinoame de grad cel mult m , atunci dacă $r = a + bi$ este rădăcină de ordinul $s \geq 0$ a ecuației caracteristice $P(r) = 0$ atunci ecuația neomogenă $L[x] = f(t)$ are o soluție particulară de forma

$$x_p = (\ln t)^s t^a [S(\ln t) \cos(b \ln t) + T(\ln t) \sin(b \ln t)]$$

unde S și T sunt polinoame de grad cel mult m , ale căror coeficienți se determină prin identificare.

2.38 Observație. La fel se tratează o **ecuație Euler generalizată**, care este de forma

$$(at + b)^n x^{(n)} + a_1(at + b)^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(at + b)x' + a_n x = f(at + b),$$

unde $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere reale.

2.39 Exemplu. Să se rezolve ecuația $t^3 x''' + 2tx' - 2x = t \ln t$.

Metoda 1 de rezolvare Facem schimbarea de variabilă $t = e^s$. Avem

$$[S(S-1)(S-2) + 2S - 2]x = se^s.$$

Ecuția caracteristică a ecuației omogene este $r(r-1)(r-2) + 2(r-1) = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i$. Soluția ecuației omogene este $x = C_1 e^s + e^s (C_2 \cos s + C_2 \sin s)$. Căutăm soluția particulară sub forma $x_p = se^s(As + B)$. Înlocuind în ecuație avem

$$\frac{d^3 x_p}{ds^3} - 3 \frac{d^2 x_p}{ds^2} + 4 \frac{dx_p}{ds} - 2x_p = se^s.$$

Prin identificarea coeficienților rezultă $A = 1/2$ și $B = 0$. Soluția generală va fi

$$x = C_1 e^s + e^s (C_2 \cos s + C_2 \sin s) + \frac{1}{2} s^2 e^s.$$

Revenind în variabila t soluția se scrie

$$x = C_1 t + t [C_2 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)] + \frac{1}{2} t \ln^2 t.$$

Metoda 2 de rezolvare Căutăm soluții sub forma $x = t^r$. Rezolvăm întâi ecuația omogenă. Rezultă ecuația $r(r-1)(r-2) + 2r - 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_{2,3} = 1 \pm i$. Soluția ecuației omogene este $x_o = C_1 t + t(C_2 \cos \ln t + C_3 \sin \ln t)$. Observăm că $f(t) = t \ln t$ este de forma $f(t) = t^a [Q(\ln t) \cos(b \ln t) + R(\ln t) \sin(b \ln t)]$ cu $a = 1$, $b = 0$ și Q polinom de gradul 1. Pentru că $r = a + bi = 1$ este rădăcină de ordinul 1 a ecuației caracteristice, soluția particulară are forma $x_p = \ln t \cdot t(A \ln t + B)$. Înlocuind în ecuație rezultă prin identificare $A = 1/2$ și $B = 0$. Soluția generală ecuației Euler este

$$x = x_o + x_p = C_1 t + t [C_2 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)] + \frac{1}{2} t \ln^2 t.$$

2.40 Exemplu (Încovoierea unei plăci circulare subțiri încastrată pe periferie, încărcată uniform). Linia de încovoiere a unui diametru mic, pentru încovoieri mici este dată de

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + kx^3 = 0, \quad k > 0,$$

unde $\varphi = \arctg(-\frac{dy}{dx})$, este unghiul dintre normala în punctul (x, y) și axa OY . Soluția particulară este $\varphi_p = \frac{1}{8} kx^3$. Ecuția caracteristică este $r(r-1) + r - 1 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$. Soluția generală este $\varphi = C_1 x + C_2 x^{-1} - \frac{1}{8} kx^3$. Condițiile inițiale $\varphi = 0$, pentru $x=0$ (în mijloc) și pentru $x = R$ (la margine). Avem $C_1 = \frac{1}{8} kR^3$ și $C_2 = 0$. Prin urmare $\varphi = \frac{1}{8} kx(R^2 - x^2)$. Încovoierea y pentru abscisa x se obține prin integrarea

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

deci

$$y(x) = - \int_R^x \operatorname{tg} \left[\frac{1}{8} ku(R^2 - u^2) \right] du,$$

deoarece y trebuie să se anuleze pentru $x = \pm R$. Cum φ ia numai valori mici pentru încovoieri slabe, putem dezvolta în serie pe $\operatorname{tg} \varphi$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 + \dots$$

și avem

$$y = \frac{1}{32} k(R^2 - x^2)^2 + \frac{1}{61440} k^3 (R^2 - x^2)^4 (4x^2 + R^2) + \dots$$

2.5 Exerciții

Probleme propuse

2.1. Să se integreze ecuațiile:

$$a) x'' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$b) tx^{(5)} - x^{(4)} = 0$$

$$c) x' = tx'' - (x'')^2$$

$$d) x'' = \sqrt{1+x'^2}$$

$$e) tx'' = x' + t^2$$

$$f) 2x'' = \frac{x'}{t} + \frac{t}{x'}$$

2.2. Să se integreze

$$a) 3x'' - 2x' - 8x = 0$$

$$b) x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = 0$$

$$c) 4x'' - 8x' + 5x = 0$$

$$d) x^{(3)} + 6x'' + 11x' + 6x = 0$$

$$e) x^{(4)} - 4x^{(3)} + 13x'' = 2e^t$$

$$f) x^{(3)} + x'' + 2x' + 2x = te^t$$

$$g) x^{(5)} - 2x^{(3)} + x' = 2$$

$$h) x'' + 2x' + 2 = 0$$

$$i) x'' - 4x' + 5x = e^{-t} \sin 2t$$

$$j) x^{(3)} - x'' - x' + x = \cos t$$

$$k) x'' + x' - 2x = \operatorname{ch} t$$

$$l) x'' + x' = t^2 - e^{-t} + e^t$$

2.3. Să se integreze ecuațiile:

$$a) t^2 x'' + tx' - x = 2$$

$$b) (2t+1)^2 x'' - (2t+1)x' - 4x = \ln(2t+1)$$

$$c) (t-2)^2 x'' - 3(t-2)x' + 4x = t$$

Indicații la problemele propuse

2.1. Ecuații diferențiale pentru care se poate reduce ordinul

$$a) x = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C_1 t + C_2.$$

$$b) x = C_1 t^5 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5$$

$$c) x = \frac{t^2 C_1}{2} - C_1^2 t + C_2 \text{ și } x = \frac{t^3}{12} + C_1$$

$$d) x = \operatorname{ch}(t + C_1) + C_2$$

$$e) x = \frac{t^3}{3} + \frac{C_1 t^2}{2} + C_2$$

$$f) 2x = (t + C_1) \sqrt{t(t + 2C_1)} - C_1^2 \ln(t + C_1 + \sqrt{t(t + 2C_1)}) + C_2.$$

2.2. Ecuații liniare cu coeficienți constanți

$$a) x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-\frac{4}{3}t}$$

$$b) x = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$$

$$c) x = e^t \left(C_1 \cos \frac{t}{2} + C_2 \sin \frac{t}{2} \right)$$

d) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$

e) $x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} \cos 3t + C_4 e^{2t} \sin 3t + \frac{1}{5} e^t$

f) $x = C_1 e^{-t} + C_2 \cos \sqrt{2}t + C_3 \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{1}{6}t - \frac{7}{36}\right) e^t$

g) $x = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t + C_4 e^{-t} + C_5 t e^{-t} + 2t$

h) $x = C_1 + C_2 e^{-2t} - t$

i) $x = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t + e^{-t} \left(\frac{1}{15} \cos 2t + \frac{1}{30} \sin 2t\right)$

j) $x = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t} + \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t$

k) $x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} t e^t - \frac{1}{4} e^{-t}$

l) $x = C_1 + C_2 e^{-t} + t e^{-t} + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{3} t^3 - t^2 + 2t.$

2.3. Ecuații Euler a) $x = C_1 t + C_2 \frac{1}{t} - 2$

b) $x = C_1 (2t + 1)^2 + C_2 \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - \frac{1}{4} \ln(2t + 1) + \frac{3}{8}$

c) $x = (t - 2)^2 (C_1 + C_2 \ln(t - 2)) + t - \frac{3}{2}.$

Capitolul 3

Integrarea ecuațiilor diferențiale prin serii

3.1 Metoda seriilor de puteri

În general, ecuațiile liniare cu coeficienți variabili nu pot fi integrate folosind un algoritm asemănător ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți. În acest caz se folosește metoda seriilor de puteri. Se presupune că soluția este dezvoltabilă în serie de puteri, adică se poate scrie sub forma

$$x(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Reamintim cele mai uzuale proprietăți ale seriilor de puteri:

1) suma a două serii $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ și $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ este

$$f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

2) înmulțirea cu o constantă

$$a \cdot f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot a_n t^n$$

3) identitatea a două serii

$$f(t) = g(t), \text{ pentru orice } t \iff a_n = b_n, \text{ pentru orice } n \geq 0$$

4) schimbarea de indice $k = n + r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{k=r}^{\infty} a_{k-r} t^{k-r}$$

5) diferențiabilitatea termen cu termen

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

Dându-se ecuația diferențială, se caută soluția sub forma unei serii de puteri. Se folosesc proprietățile seriilor de puteri și se obțin niște relații de recurență pentru coeficienții c_n . Din aceste relații, se determină coeficienții c_n . Metoda este utilă în special pentru ecuațiile liniare de ordinul doi.

3.1 Exemplu. Să rezolvăm ecuația $x'' + x = 0$.

Căutăm soluția sub forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Atunci $x'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2}$. Avem

$$x'' + x = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Cu schimbarea de indice $n - 2 = m$, rezultă

$$x'' + x = \sum_{m=0}^{\infty} [c_m + c_{m+2}(m+2)(m+1)]t^m = 0,$$

adică $c_m + c_{m+2}(m+2)(m+1) = 0$. Luând pe m să fie par, relația de recurență între coeficienți devine

$$c_{2k+2} = \frac{-c_{2k}}{(2k+2)(2k+1)}.$$

Dând valori lui k

$$c_2 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}, \quad c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!}, \quad c_6 = \frac{-c_4}{6 \cdot 5} = \frac{-c_0}{6!}, \quad \dots \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}.$$

Pentru $m = 2k - 1$

$$c_{2k+1} = \frac{-c_{2k-1}}{(2k+1)2k},$$

de unde

$$c_3 = \frac{-c_1}{3 \cdot 2}, \quad c_5 = \frac{-c_3}{5 \cdot 3} = \frac{c_1}{5!}, \quad c_7 = \frac{-c_5}{7 \cdot 6} = \frac{-c_1}{7!}, \quad \dots \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}.$$

Înlocuind, soluția se scrie

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\ &= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + \dots \right) + c_1 \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right) \\ &= c_0 \cos t + c_1 \sin t. \end{aligned}$$

3.2 Ecuația lui Bessel

3.2 Definiție. Se numește **ecuația lui Bessel** o ecuație diferențială de forma

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0,$$

unde $\nu \geq 0$ este un număr real, iar $x = x(t) \in C^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid.

3.3 Observație. Soluțiile ecuației lui Bessel se numesc **funcții Bessel** sau **funcții cilindrice**. Ele modelează propagarea căldurii și a electricității într-un cilindru.

Căutăm soluția ecuației lui Bessel sub forma unei serii de puteri generalizate

$$x(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Înlocuind în ecuație avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t^{n+r+2} - \nu^2 t^{n+r}) = 0.$$

Această relație este echivalentă cu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)t^{n+r} + c_n (n+r)t^{n+r} - c_n \nu^2 t^{n+r} = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r+2}$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+r)^2 - \nu^2] t^{n+r} = - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^{n+r}, \quad \text{pentru orice } t.$$

Egalând coeficienții obținem sistemul

$$\begin{cases} c_0(r^2 - \nu^2) = 0 \\ c_1[(r+1)^2 - \nu^2] = 0 \\ c_n[(r+n)^2 - \nu^2] = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Presupunând $c_0 \neq 0$ prima condiție ne conduce la ecuația $r^2 - \nu^2 = 0$ cu soluțiile $r_1 = \nu$ și $r_2 = -\nu$. Vom determina în continuare soluția x_1 a ecuației lui Bessel corespunzătoare rădăcinii $r_1 = \nu$.

A doua relație se scrie $c_1(2\nu + 1) = 0$. Pentru că $\nu \geq 0$ rezultă $c_1 = 0$ și înlocuind în cea de-a treia relație a sistemului deducem că $c_{2k+1} = 0$, pentru orice k număr natural. Ceilalți coeficienți se obțin din relația

$$c_{2k} \cdot 4k(\nu + k) = -c_{2k-2}, \quad k \geq 1.$$

Dând valori lui k de la 1 până la n și înmulțind toate aceste egalități, rezultă

$$c_2 \cdots c_{2n} \cdot 4^n \cdot n! \cdot (\nu + 1) \cdots (\nu + n) = (-1)^n \cdot c_0 \cdot c_2 \cdots c_{2n-2}$$

adică

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (\nu + 1) \cdots (\nu + n)} = \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(\nu + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

Notând $c_0 = \frac{A}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ se obține soluția

$$x_1(t) = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Soluția x_1 este produsul dintre o constantă arbitrară A și funcția

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}$$

numită **funcția lui Bessel de speța întâi și ordin ν** .

Calculând raza de convergență a seriei din formula lui J_ν obținem

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1) \cdot 2^{2n+\nu}} \cdot \frac{(n+1)! \cdot \Gamma(\nu + n + 2) \cdot 2^{2n+2+\nu}}{(-1)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4(n+1)(n+1+\nu) = \infty. \end{aligned}$$

Dar pentru că ν este real, domeniul de definiție al funcției J_ν este numai $(0, \infty)$.

Vom determina, acum, soluția x_2 corespunzătoare soluției $r_1 = -\nu$. Trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} c_1(1 - 2\nu) = 0 \\ c_n \cdot n(n - 2\nu) = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Avem următoarele cazuri posibile:

Cazul I Constanta $2\nu \notin \mathbb{Z}$. Soluția se găsește urmând pașii făcuți în găsirea soluției x_1 .

Obținem

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (1 - \nu) \cdots (n - \nu)}$$

și

$$x_2(t) = B J_{-\nu}(t) = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n - \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}.$$

Cele două soluții x_1 și x_2 ale ecuației lui Bessel sunt liniar independente pentru că wronskianul

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} J_\nu(t) & J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi t}$$

este diferit de zero. Într-adevăr, scriind că x_1 și x_2 sunt soluții ale ecuației lui Bessel

$$t^2 x_1''(t) + t x_1'(t) + (t^2 - \nu^2) x_1(t) = 0$$

$$t^2 x_2''(t) + t x_2'(t) + (t^2 - \nu^2) x_2(t) = 0$$

înmulțind prima relație cu $-x_2(t)$ și a doua cu $x_1(t)$ și adunându-le, se obține

$$t^2 [x_1(t) \cdot x_2''(t) - x_2(t) \cdot x_1''(t)] + t [x_1(t) \cdot x_2'(t) - x_2(t) \cdot x_1'(t)] = 0.$$

Ținând cont că $W(t) = x_1(t) \cdot x_2'(t) - x_2(t) \cdot x_1'(t)$ se obține ecuația

$$t \cdot W'(t) + W(t) = 0 \iff (t \cdot W(t))' = 0,$$

cu soluția generală $W(t) = C/t$. Ne rămâne să determinăm valoarea constantei ce corespunde soluțiilor J_ν și $J_{-\nu}$. Din dezvoltările în serie

$$\begin{aligned} J_\nu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu - \frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2+\nu} + \dots \\ J_{-\nu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} - \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2-\nu} + \dots \\ J'_\nu(t) &= \frac{\nu}{2 \cdot \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} - \frac{2+\nu}{2 \cdot \Gamma(\nu+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1+\nu} + \dots \\ J'_{-\nu}(t) &= \frac{-\nu}{2 \cdot \Gamma(1-\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu-1} - \frac{2-\nu}{2 \cdot \Gamma(2-\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\nu} + \dots \end{aligned}$$

se obține

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot [J_\nu(t) \cdot J'_{-\nu}(t) - J'_\nu(t) \cdot J_{-\nu}(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{-\nu}{2 \cdot \Gamma(1-\nu)} \cdot 4 = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi},$$

pentru că $\Gamma(\nu+1) = \nu \cdot \Gamma(\nu)$ și $\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(1-\nu) = \pi / \sin \pi\nu$.

Pentru că ν nu este număr întreg, constanta C este nenulă și astfel este demonstrată independența soluțiilor J_ν și $J_{-\nu}$. Ecuația lui Bessel fiind o ecuație liniară de ordinul doi, are în acest caz, soluția generală

$$x(t) = AJ_\nu(t) + BJ_{-\nu}(t).$$

Cazul II Constanta $2\nu \in \mathbb{Z}$, dar $\nu \notin \mathbb{Z}$. În acest caz $2\nu = 2p + 1$, cu $p \in \mathbb{Z}$. Sistemul ce trebuie rezolvat este

$$\begin{cases} -2p \cdot c_1 = 0 \\ c_n \cdot n(n - 2p - 1) = -c_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Pentru $n = 2p + 1$ rezultă $c_{2p-1} = 0$ și luând pe rând $n = 2p - 1, 2p - 3, \dots, 3$ se obține $c_{2p-3} = c_{2p-5} = \dots = c_1 = 0$.

Scriind a doua ecuație a sistemului pentru indicii $2p + 3, 2p + 5, \dots, 2n + 1$

$$\begin{aligned} c_{2p+3} \cdot (2p+3)2 &= -c_{2p+1} \\ c_{2p+5} \cdot (2p+5)4 &= -c_{2p+3} \\ &\dots\dots\dots \\ c_{2n+1} \cdot (2n+1)(2n-2p) &= -c_{2n-1} \end{aligned}$$

și înmulțind membru cu membru aceste egalități obținem

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-p} c_{2p+1}}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2p) \cdot (2p+3) \cdot (2p+5) \cdots (2n+1)}.$$

Luând $c_{2p+1} = \frac{D}{2^{p+\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(p+\frac{3}{2})}$ se obține

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-p} D}{2^{2n-p+\frac{1}{2}} \cdot (n-p)! \cdot \Gamma(n+\frac{3}{2})}, \quad \text{pentru } n \geq p.$$

Pentru a determina coeficienții cu indice par scriem a doua ecuație a sistemului pentru indicii $2, 4, \dots, 2n$

$$c_2 \cdot 2(1-2p) = -c_0$$

$$c_4 \cdot 4(3-2p) = -c_2$$

.....

$$c_{2n} \cdot 2n(2n-2p-1) = -c_{2n-2}$$

și înmulțim egalitățile membru cu membru. După simplificări rezultă

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (1-2p) \cdot (3-2p) \cdots (2n-2p-1)}.$$

Alegând $c_0 = \frac{B}{2^{-p-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}-p)}$ obținem

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n B}{2^{2n-p-\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot \Gamma(n-p+\frac{1}{2})}, \quad \text{pentru } n \geq 0.$$

Scriem soluția ecuației

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t^{-p-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n-p+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n-p-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n-p+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B}{n! \cdot \Gamma(n-p+\frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^{n-p} D}{(n-p)! \cdot \Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p+\frac{1}{2}} + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m D}{m! \cdot \Gamma(m+p+\frac{3}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p+\frac{1}{2}} + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t) \\ &= D \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t) + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t). \end{aligned}$$

Fiindcă $\nu = p + \frac{1}{2}$ avem $x_1(t) = A \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t)$. Fiindcă $J_{p+\frac{1}{2}}$ și $J_{-p-\frac{1}{2}}$ sunt liniar independente (vezi cazul I), notând $A_1 = A + D$ soluția ecuației lui Bessel $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ se scrie

$$x(t) = A_1 \cdot J_{p+\frac{1}{2}}(t) + B \cdot J_{-p-\frac{1}{2}}(t).$$

Cazul III Constanta ν este nulă. Ecuația lui Bessel în acest caz este

$$tx'' + x' + t \cdot x = 0.$$

Prima soluție este $x_1(t) = A \cdot J_0(t)$. Căutăm a doua soluție sub forma

$$x_2(t) = \ln t \cdot J_0(t) + y(t).$$

Înlocuind în ecuația lui Bessel avem

$$t \left[\ln t \cdot J_0''(t) + \frac{2J_0'(t)}{t} - \frac{J_0(t)}{t^2} + y''(t) \right] + \ln t \cdot J_0'(t) + \frac{J_0(t)}{t} + y'(t) + t [\ln t \cdot J_0(t) + y(t)] = 0.$$

Pentru că J_0 este soluție, rezultă

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) + 2J_0'(t) = 0.$$

Căutăm soluția acestei ecuații sub forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Știind că

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

obținem

$$t \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^{n-1} + t \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = 0.$$

Schimbând indicii de însumare, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n d_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)d_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} t^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = 0.$$

De aici se obține sistemul

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_{2n-1} + (2n+1)^2 d_{2n+1} = 0, & n \geq 1 \\ d_{2n-2} + (2n)^2 d_{2n} + \frac{(-1)^n n}{(n!)^2 \cdot 2^{2n-2}} = 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Folosind primele două condiții se observă că $d_3 = 0$ și inductiv $d_{2n+1} = 0$, pentru $n \geq 0$. Pentru coeficienții cu indici pari avem $d_2 = -\frac{d_0}{4} + \frac{1}{4}$ și inductiv

$$d_{2n} = \frac{(-1)^n d_0}{(n!)^2 2^{2n}} - \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Obținem

$$y(t) = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

și în final

$$x_2(t) = \ln t \cdot J_0(t) + d_0 J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Știind că și în acest caz valoarea wronskianului este C/t , rămâne să calculăm valoarea constantei C .

$$\begin{aligned} W(J_0, x_2) &= \begin{vmatrix} J_0(t) & J_0(t) \cdot \ln t + d_0 J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \\ J_0'(t) & J_0'(t) \cdot \ln t + \frac{1}{t} \cdot J_0(t) + d_0 J_0'(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} J_0(t) & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \\ J_0'(t) & \frac{1}{t} \cdot J_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Rezultă $C = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot W(J_0, x_2) = \lim_{t \rightarrow 0} J_0^2(t) = 1$. Și în acest caz soluțiile sunt liniar independente. După o rearanjare a termenilor soluția ecuației lui Bessel este

$$x(t) = A J_0(t) + B \ln t \cdot J_0(t) - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Cazul IV Constanta ν este număr întreg diferit de zero. Fie $\nu = p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (p+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}$$

și

$$J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p}.$$

Fiindcă $\lim_{n \rightarrow k} 1/\Gamma(-p+n+1) = 0$, pentru k de la 0 până la $p-1$, avem

$$\begin{aligned} J_{-p}(t) &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+p}}{(m+p)! \cdot \Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p} \\ &= (-1)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+p)! \cdot m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p} = (-1)^p \cdot J_p(t). \end{aligned}$$

Acest lucru ne arată că J_p și J_{-p} sunt liniar dependente când p este întreg.

Pentru a găsi cea de-a doua soluție a ecuației lui Bessel folosim metoda lui Hankel. Pentru ν neîntreg J_ν și $J_{-\nu}$ sunt soluții ale ecuației lui Bessel, deci și

$$Y_\nu(t) = \frac{\cos \nu \pi \cdot J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi}$$

este o soluție a ecuației lui Bessel. Pentru cazul când $\nu = p$ este întreg această expresie este o nedeterminare de tip $0/0$ și aplicăm regula lui l'Hospital.

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{\cos \nu \pi \cdot J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{-\pi \cdot \sin \nu \pi \cdot J_\nu(t)}{\pi \cdot \cos \nu \pi} + \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{\cos \nu \pi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t)}{\pi \cos \nu \pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) \Big|_{\nu=p} - (-1)^p \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \Big|_{\nu=p} \right]. \end{aligned}$$

Demonstrăm că $Y_p(t)$ este o soluție a ecuației lui Bessel. Pentru aceasta derivăm în raport cu ν ecuația lui Bessel cu J_ν și $J_{-\nu}$ ca soluții.

$$t^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right) + t \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right) + (t^2 - \nu^2) \cdot \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - 2\nu \cdot J_\nu = 0$$

și

$$t^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) + t \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) + (t^2 - \nu^2) \cdot \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - 2\nu \cdot J_{-\nu} = 0.$$

Înmulțim a doua egalitate cu $-\cos \nu\pi$ și adunăm cele două egalități. Cu notația

$$U_\nu(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - \cos \nu\pi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right]$$

se obține

$$t^2 \cdot \frac{d^2 U_\nu}{dt^2} + t \cdot \frac{dU_\nu}{dt} + (t^2 - \nu^2) \cdot U_\nu - \frac{2\nu}{\pi} \cdot (J_\nu - \cos \nu\pi \cdot J_{-\nu}) = 0.$$

Trecând la limită pentru $\nu \rightarrow p$ se obține

$$t^2 \cdot \frac{d^2 Y_p}{dt^2} + t \cdot \frac{dY_p}{dt} + (t^2 - p^2) \cdot Y_p = 0,$$

ceea ce ne arată că Y_p este soluție a ecuației lui Bessel. Pentru că

$$W(J_\nu, Y_\nu) = \begin{vmatrix} J_\nu(t) & \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \cdot J_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \cdot J'_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin \nu\pi} \begin{vmatrix} J_\nu(t) & J_{-\nu}(t) \\ J'_\nu(t) & J'_{-\nu}(t) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi t} \neq 0,$$

rezultă că, prin trecere la limită cu $\nu \rightarrow p$, și soluțiile J_p și Y_p sunt liniar independente.

Vom determina, acum expresia lui Y_p . Să observăm că

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2n} \right] \\ &= J_\nu(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2} \right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{-\Gamma'(n + \nu + 1)}{\Gamma^2(n + \nu + 1)}. \end{aligned}$$

Folosim formula¹

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = H_m - \gamma,$$

¹Aceasta se poate demonstra pornind de la egalitatea $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Logaritmăm și apoi derivăm și obținem relația de recurență $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Rezultă

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{m} + \frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{\Gamma'(m-1)}{\Gamma(m-1)} = \dots = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Știind că $\Gamma(1) = 1$ rămâne de arătat că $\Gamma'(1) = -\gamma$. Pornind de la egalitatea

$$\Gamma(b) - B(a, b) = \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b) \cdot b}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}$$

rezultă prin trecere la limită cu $b \rightarrow 0$ că

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} (\Gamma(b) - B(a, b)) = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^\infty x^{b-1} \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right) dx = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) \frac{dx}{x}$$

unde $H_0 = 0$ și $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, $m \geq 1$ sunt numere armonice și γ este limita șirului $(H_n - \ln n)$, numită constanta lui Euler sau constanta lui Euler-Mascheroni. Obținem

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) \right|_{\nu=p} &= J_p(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} \cdot \left(-\frac{H_{n+p} - \gamma}{(n+p)!}\right) \\ &= \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_p(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{n+p}}{n! \cdot (n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

Analog

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) = -J_{-\nu}(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \cdot \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)}.$$

Folosind formulele²

$$\lim_{\nu \rightarrow p} \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)} = \begin{cases} \frac{H_{n-p}-\gamma}{(n-p)!}, & n \geq p \\ (-1)^{p-n} \cdot (p-n-1)!, & n < p, \end{cases}$$

Pentru $a = 1$ această egalitate se scrie $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) \frac{dx}{x}$. Scăzând cele două relații și făcând schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{1+x}$ avem

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right) \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt = \int_0^1 (1-t^{a-1}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (t^n - t^{a+n-1}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a+m-1}\right). \end{aligned}$$

Integrând în raport cu a între 1 și 2 rezultă

$$\int_1^2 \left(\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right) da = \ln \Gamma(a) \Big|_1^2 - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} a \Big|_1^2 = \ln \Gamma(2) - \ln \Gamma(1) - \Gamma'(1) = -\Gamma'(1)$$

și

$$\int_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a+m-1}\right) da = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m}\right) = \gamma$$

pentru că

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln \frac{m+1}{m} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^n [\ln(m+1) - \ln m] = H_n - \ln(n+1) \rightarrow \gamma.$$

²Pentru cazul când $n < p$ egalitatea se obține cu ajutorul formulei $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Într-adevăr $\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)} = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(\nu-n) \cdot \sin(\nu-n)\pi$ și

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{\Gamma'(n-\nu+1)}{\Gamma^2(n-\nu+1)} &= \lim_{\nu \rightarrow p} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)}\right)' = \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{1}{\pi} \cdot (\Gamma(\nu-n) \cdot \sin(\nu-n)\pi)' \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma'(p-n) \sin(p-n)\pi + \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(p-n) \cdot \pi \cos(p-n)\pi \\ &= \Gamma(p-n) \cdot \cos(p-n)\pi = (p-n-1)! \cdot (-1)^{p-n}. \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right|_{\nu=p} &= (-1)^{p+1} J_p(t) \cdot \ln \frac{t}{2} + (-1)^p \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} \\ &\quad + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} \cdot \frac{H_{n-p} - \gamma}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Făcând o schimbare de indice în ultima sumă rezultă

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right|_{\nu=p} &= (-1)^{p+1} \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_p(t) + (-1)^p \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} \\ &\quad + (-1)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_m}{(m+p)! \cdot m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+p} \end{aligned}$$

În final

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{\nu}(t) \right|_{\nu=p} - (-1)^p \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right|_{\nu=p} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_p(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n+p})}{n! \cdot (n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}. \end{aligned}$$

În cazul $p = 0$, urmând același procedeu, se ajunge la

$$Y_0(t) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_0(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Cu aceasta am demonstrat

3.4 Teoremă. Soluția generală a ecuației lui Bessel

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0, \quad t > 0, \quad \text{cu parametrul } \nu \in \mathbb{R}$$

este

$$x(t) = A \cdot J_{\nu}(t) + B \cdot J_{-\nu}(t), \quad \text{dacă } \nu \notin \mathbb{Z}$$

unde J_{ν} este funcția Bessel de speța întâi

$$J_{\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Dacă $\nu = p \in \mathbb{Z}$ atunci $J_{-\nu}$ se înlocuiește cu funcția Bessel de speța a doua

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{t}{2}\right) \cdot J_p(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n+p})}{n! \cdot (n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}. \end{aligned}$$

3.3 Ecuatii reductibile la ecuația lui Bessel

În continuare, prezentăm câteva tipuri de ecuații care se reduc la ecuația lui Bessel prin schimbarea variabilei sau a funcției necunoscute.

Tip A Ecuația

$$t^2 x'' + tx' + (b^2 t^2 - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuația lui Bessel prin schimbarea de variabilă $u = bt$, $b \neq 0$. Pentru cazul când $b = 0$ ecuația este de tip Euler.

3.5 Exemplu. Să se integreze ecuația $t^2 x'' + tx' + (4t^2 - 2)x = 0$.

Facem schimbarea de variabilă $u = 2t$. Avem

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot 2 \\ x'' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(2 \frac{dx}{du} \right) = 2 \frac{d}{du} \left(\frac{dx}{du} \right) \cdot \frac{du}{dt} = 4 \frac{d^2 x}{du^2} \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația inițială obținem

$$\frac{u^2}{4} \cdot 4 \frac{d^2 x}{du^2} + \frac{u}{2} \cdot 2 \frac{dx}{du} + (u^2 - 2)x = 0$$

care este ecuația lui Bessel pentru $\nu = \sqrt{2}$ și are soluția

$$x(t) = AJ_{\sqrt{2}}(u) + BJ_{-\sqrt{2}}(u) = AJ_{\sqrt{2}}(2t) + BJ_{-\sqrt{2}}(2t).$$

Tip B Ecuația

$$t^2 x'' + atx' + (b^2 t^2 - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuația de tip A prin schimbarea de funcție $x = t^{\frac{1-a}{2}} y$.

3.6 Exemplu. Să se integreze ecuația $tx'' + (2p+1)x' + tx = 0$.

Facem schimbarea de funcție $x = t^{-p} \cdot y$. Avem $x' = -pt^{-p-1}y + t^{-p}y'$ și $x'' = p(p+1)t^{-p-2}y - 2pt^{-p-1}y' + t^{-p}y''$. Atunci ecuația devine

$$p(p+1)t^{-p-1}y - 2pt^{-p}y' + t^{-p+1}y'' - p(2p+1)t^{-p-1}y + (2p+1)t^{-p}y' + t^{-p+1}y = 0.$$

Înmulțind toată ecuația cu t^{p+1} obținem

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - p^2)y = 0$$

care are soluția generală $y(t) = AJ_p(t) + BY_p(t)$, deci

$$x(t) = A \cdot t^{-p} \cdot J_p(t) + B \cdot t^{-p} \cdot Y_p(t).$$

Tip C Ecuația

$$t^2 x'' + atx' + (b^2 t^m - c^2)x = 0$$

se reduce la ecuația de tip B prin schimbarea de variabilă $t^m = u^2$.

3.7 Exemplu (Ecuția lui Airy). Să se integreze ecuația $x'' + 9k^2tx = 0$.

Înmulțind cu t^2 rezultă $t^2x'' + 9k^2t^3x = 0$. Notăm $t^3 = u^2$. Avem

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}$$

$$x'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{du} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{9}{4} t + \frac{dx}{du} \cdot \frac{3}{4} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Ecuția devine

$$u^2 \frac{d^2x}{du^2} + \frac{u}{3} \frac{dx}{du} + 4k^2u^2x = 0.$$

Cu schimbarea de funcție $x = u^{\frac{1}{3}}y$ rezultă

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}y + u^{\frac{1}{3}} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -\frac{2}{9} u^{-\frac{5}{3}}y + \frac{2}{3} u^{-\frac{2}{3}} \frac{dy}{du} + u^{\frac{1}{3}} \frac{d^2y}{du^2}.$$

Ecuția se reduce la

$$u^2y'' + uy' + \left(4k^2u^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = 2ku$ avem

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dv} \cdot 2k$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = 4k^2 \frac{d^2y}{dv^2}$$

Ecuția se transformă în

$$v^2 \frac{d^2y}{dv^2} + v \frac{dy}{dv} + \left(v^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0$$

cu soluția $y(v) = AJ_{\frac{1}{3}}(v) + BJ_{-\frac{1}{3}}(v)$. Ecuția inițială are soluția

$$x(t) = \sqrt{t} \left[A \cdot J_{\frac{1}{3}}(2kt\sqrt{t}) + B \cdot J_{-\frac{1}{3}}(2kt\sqrt{t}) \right].$$

3.8 Exemplu. Ca și o aplicație practică să determinăm când o vergea verticală, cu densitatea uniformă, liberă la un capăt și incastrată la celălalt se îndoiește datorită propriei greutate. Fie $x = 0$ la capătul liber al vergelei și fie $x = L > 0$ la bază. Fie $\theta(x)$ unghiul deviației vergelei în punctul x . Din teoria elasticității se știe că

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \lambda \theta = 0,$$

unde $\lambda = \frac{g\rho}{EI}$, g fiind accelerația gravitațională, ρ densitatea vergelei, E modulul lui Young de elasticitate al materialului din care e făcută vergeaua și I momentul de inerție în secțiune transversală. Din motive fizice sunt verificate următoarele condiții:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0,$$

pentru că nu există îndoire la capătul liber al vergelei și nu există deviere la capătul fix.

Conform calculelor din exemplul anterior, soluția generală a ecuației este

$$\theta(x) = \sqrt{x} \left[A \cdot J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\lambda} \cdot x \sqrt{x} \right) + B \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\lambda} \cdot x \sqrt{x} \right) \right].$$

Pentru a aplica condițiile inițiale, ținem cont de dezvoltările

$$J_{\frac{1}{3}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1+1/3)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1/3} = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2+\frac{1}{3}} + \dots$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1-1/3)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1/3} = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2-\frac{1}{3}} + \dots$$

și obținem

$$\theta(x) = \frac{A\lambda^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{4}{3})} \left(x - \frac{\lambda}{12}x^4 + \dots \right) + \frac{B3^{\frac{1}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})} \left(1 - \frac{\lambda}{6}x^3 + \dots \right)$$

Condiția $\theta'(0) = 0$ ne arată că $A = 0$. Avem

$$\theta(x) = B\sqrt{x} \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\lambda} \cdot x \sqrt{x} \right).$$

Condiția $\theta(L) = 0$ ne dă $J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot L^{\frac{3}{2}}) = 0$. Vergeaua se va îndoii dacă $t = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \cdot L^{\frac{3}{2}}$ este soluție a ecuației $J_{-\frac{1}{3}}(t) = 0$. Funcția $J_{-\frac{1}{3}}$ are o infinitate de zerouri pe $(0, \infty)$. Prima rădăcină pozitivă este $t_1 \approx 1,86635$. Vergeaua va începe să se îndoiească pentru o lungime a vergelei mai mare decât:

$$L_1 = \left(\frac{3t_1}{2\sqrt{\lambda}} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,986 \cdot \left(\frac{EI}{g\rho} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tip D Ecuația

$$x'' + ax' + (b^2 e^{mt} - c^2)x = 0$$

se reduce la o ecuație de tip C prin schimbarea de variabilă $e^t = u$.

3.9 Exemplu. Să se integreze ecuația $x'' + (e^{2t} - a^2)x = 0$.

Notăm $e^t = u$. Avem

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot e^t = \frac{dx}{du} \cdot u$$

$$x'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{du} \cdot e^t \right) = \frac{d^2x}{du^2} \cdot e^{2t} + \frac{dx}{du} \cdot e^t = \frac{d^2x}{du^2} \cdot u^2 + \frac{dx}{du} \cdot u.$$

Ecuația se transformă în

$$u^2 \frac{d^2x}{du^2} + u \frac{dx}{du} + (u^2 - a^2)x = 0$$

cu soluția $x(u) = AJ_a(u) + BY_a(u)$ și deci

$$x(t) = A \cdot J_a(e^t) + B \cdot Y_a(e^t).$$

Tip E Ecuația de tip Riccati

$$bx' = at^n + x^2$$

se transformă într-o ecuație de tip C prin schimbarea de funcție $x = -\frac{b}{y} \cdot y'$.

3.10 Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy $x' = t^2 + x^2$, $x(0) = 0$.

Prin schimbarea de funcție $x = -y'/y$, avem

$$\begin{aligned} y' &= -xy \\ y'' &= -xy' - x'y = x^2y - y(t^2 + x^2) = -yt^2 \end{aligned}$$

Am ajuns la ecuația $y'' + t^2y = 0$ care este echivalentă cu $t^2y'' + t^4y = 0$ care este de tip C. Notăm $u = t^2$. Avem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot 2t \\ y'' &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot 4t^2 + \frac{dy}{du} \cdot 2 \end{aligned}$$

Ecuația devine

$$u^2 \cdot \frac{d^2y}{du^2} + \frac{u}{2} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{u^2}{4} \cdot y = 0.$$

Cu schimbarea de funcție $y = u^{\frac{1}{4}} \cdot z$ avem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1} \cdot z + u^{\frac{1}{4}} \cdot z' \\ \frac{d^2y}{du^2} &= -\frac{3}{9}u^{\frac{1}{4}-2} \cdot z + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{4}-1} \cdot z' + u^{\frac{1}{4}} \cdot z'' \end{aligned}$$

Ecuația devine

$$u^2 z'' + uz' + \left(\frac{u^2}{4} - \frac{1}{16} \right) z = 0.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = 2v$ ecuația se scrie

$$v^2 z'' + vz' + \left(v^2 - \frac{1}{16} \right) z = 0,$$

cu soluția $z = A \cdot J_{1/4}(v) + B \cdot J_{-1/4}(v)$. Soluția inițială este

$$y(t) = \sqrt{t} \cdot \left[A \cdot J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{2} \right) + B \cdot J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{2} \right) \right].$$

Pentru a obține pe $x = -y'/y$ calculăm derivata lui y . Să observăm că

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{t} \cdot J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n + \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n + \frac{1}{4}} \cdot (t^{4n+1})' \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n + \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n + \frac{1}{4}} \cdot 4 \left(n + \frac{1}{4}\right) \cdot t^{4n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n + \frac{1}{4})} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n + \frac{1}{4} - 1} \cdot t^{4n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n + 1 - \frac{3}{4})} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n - \frac{3}{4}} \cdot t^{2(2n - \frac{3}{4})} \cdot t^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \cdot J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) \\
 \left(\sqrt{t} \cdot J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n - \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n - \frac{1}{4}} \cdot (t^{4n})' \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n - \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n - \frac{1}{4}} \cdot 4n \cdot t^{4n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)! \cdot \Gamma(n - \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n - \frac{1}{4} - 1} \cdot t^{4(n-1)+3} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! \cdot \Gamma(m + 1 + \frac{3}{4})} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m + \frac{3}{4}} \cdot t^{2(2m + \frac{3}{4})} \cdot t^{\frac{3}{2}} = -t^{\frac{3}{2}} \cdot J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Deducem că

$$x(t) = t \cdot \frac{BJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) - AJ_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}{AJ_{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) + BJ_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Pentru că $x(0) = -\frac{2A\Gamma(\frac{3}{4})}{B\Gamma(\frac{1}{4})}$ și $x(0) = 0$ rezultă $A = 0$ și

$$x(t) = t \cdot \frac{J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

3.4 Exerciții

Probleme propuse

3.1. Să se aplice metoda seriilor de puteri pentru integrarea ecuației

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + n(n + 1)x = 0.$$

Polinomul de grad n care este soluție a acestei ecuații se numește **polinomul lui Legendre**.

3.2. Să se arate că $(J_0(t))' = -J_1(t)$.

3.3. Să se demonstreze relația $(t^\nu J_\nu(t))' = t^\nu J_{\nu-1}(t)$.

3.4. Să se explicitizeze $J_{\frac{1}{2}}(t)$ și $J_{-\frac{1}{2}}(t)$.

3.5. Să se determine soluțiile ecuațiilor

$$a) t^2x'' - tx' + (1 + t^2)x = 0$$

$$b) tx'' + 5x' + tx = 0$$

$$c) tx'' - x' + 36t^3x = 0$$

$$d) t^2x'' - 5tx' + (8 + t)x = 0$$

$$e) 36t^2x'' + 60tx' + (9t^3 - 5)x = 0$$

$$f) 16t^2x'' + 24tx' + (1 + 144t^3)x = 0$$

$$g) t^2x'' + 3tx' + (1 + t^2)x = 0$$

$$h) 4t^2x'' - 12tx' + (15 + 16t)x = 0$$

$$i) 16t^2x'' - (5 - 144t^3)x = 0$$

$$j) 2t^2x'' - 3tx' - 2(14 - t^5)x = 0$$

$$k) x'' + t^4x = 0$$

$$l) x'' + 4t^3x = 0$$

$$m) tx'' + 2x' + tx = 0$$

$$n) t^4x'' + 25x = 0$$

Indicații la problemele propuse

3.1. Căutăm soluția sub forma $x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{m+r}$. Se obțin relațiile

$$c_0 r(r-1) = 0,$$

$$c_1(r+1)r = 0,$$

$$c_{m+2} = \frac{(m+r-n)(m+r+n+1)}{(m+r+1)(m+r+2)} c_m.$$

Presupunând că $c_0 \neq 0$ și $c_1 \neq 0$ se obține $r = 0$ și

$$c_{2k+2} = \frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+1)(2k+2)} c_{2k}, \quad c_{2k+3} = \frac{(2k+1-n)(2k+2+n)}{(2k+2)(2k+3)} c_{2k+1}, \quad k \geq 0.$$

Atunci

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{n(n-2) \cdots (n-2k+2)(n+1)(n+3) \cdots (n+2k-1)}{(2k)!} c_0$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{(n-1)(n-3) \cdots (n-2k+1)(n+2)(n+4) \cdots (n+2k)}{(2k+1)!} c_1.$$

și ecuația are două soluții independente

$$x_1(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-2) \cdots (n-2k+2)(n+1)(n+3) \cdots (n+2k-1)}{(2k)!} t^{2k}$$

$$x_2(t) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-1)(n-3) \cdots (n-2k+1)(n+2)(n+4) \cdots (n+2k)}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Dacă n este par atunci x_1 este polinom de grad n , iar x_2 este o serie infinită. Dacă n este impar, atunci x_2 este polinom de grad n , iar x_1 este o serie infinită.

3.2. Avem

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

și

$$(J_0(t))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1}.$$

Cu schimbarea de indice $n - 1 = m$ rezultă

$$J_0'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} = -J_1(t).$$

3.3. Avem

$$\begin{aligned} (t^\nu J_\nu(t))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \frac{t^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n + \nu)\Gamma(\nu + n)} \frac{2(n + \nu)t^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu + n)} \frac{t^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}} = t^\nu J_{\nu-1}(t). \end{aligned}$$

3.4. Avem

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t \quad J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

Într-adevăr,

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

Dar

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dots = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n + 1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} = \frac{(2n + 1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}. \end{aligned}$$

Atunci

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} t^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$$

și

$$J_{-\frac{1}{2}}(t) = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(t)\right)' = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

3.5. Prin schimbări de variabile și de funcții se ajunge la ecuația lui Bessel.

a) B, $x = ty$, $x(t) = t[AJ_0(t) + BY_0(t)]$ b) B, $x = t^{-1}y$, $x = t^{-1}[AJ_1(t) + BY_1(t)]$

c) C, $u = t^2$, B, $x = ty$, A, $v = 3u$,

$$x(t) = t \left[AJ_{\frac{1}{2}}(3t^2) + BJ_{-\frac{1}{2}}(3t^2) \right] = C \sin(3t^2) + D \cos(3t^2)$$

d) C, $u = \sqrt{t}$, B, $x = t^3y$, A, $v = 2u$, $x(t) = t^3 [AJ_2(2\sqrt{t}) + BY_2(2\sqrt{t})]$

e) C, $u = t\sqrt{t}$, B, $x = t^{-\frac{1}{3}}y$, A, $v = \frac{1}{3}u$, $x(t) = t^{-\frac{1}{3}} \left[AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + BJ_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) \right]$.

f) C, $u = t\sqrt{t}$, B, $x = t^{-\frac{1}{4}}y$, A, $v = 2u$, $x(t) = t^{-\frac{1}{4}} \left[AJ_0\left(2t^{\frac{3}{2}}\right) + BY_0\left(2t^{\frac{3}{2}}\right) \right]$.

g) B, $x = t^{-1}y$, $x(t) = t^{-1}[AJ_0(t) + BY_0(t)]$.

- h) C, $u = \sqrt{t}$, B, $x = t^2y$, A, $v = 4u$, $x(t) = t^2 \left[AJ_1 \left(4t^{\frac{1}{2}} \right) + BY_1 \left(4t^{\frac{1}{2}} \right) \right]$.
- i) C, $u = t\sqrt{t}$, B, $x = t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v = 2u$, $x(t) = At^{-\frac{1}{4}} \sin(2t\sqrt{t}) + Bt^{-\frac{1}{4}} \sin(2t\sqrt{t})$.
- j) C, $u = t^2\sqrt{t}$, B, $x = t^{-\frac{1}{4}}y$, A, $v = \frac{2}{5}u$, $x(t) = t^{-\frac{1}{4}} \left[AJ_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right) + BJ_{-\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right) \right]$.
- k) C, $u = t^3$, B, $x = t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v = \frac{1}{3}u$, $x(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[AJ_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{3}t^3 \right) + BJ_{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{3}t^3 \right) \right]$.
- l) C, $u = t^2\sqrt{t}$, B, $x = t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v = \frac{4}{5}u$, $x(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[AJ_{\frac{1}{5}} \left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} \right) + BJ_{-\frac{1}{5}} \left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} \right) \right]$.
- m) B, $x = t^{-1}y$, $x(t) = t^{-1} [A \sin t + B \cos t]$.
- n) C, $u = t^{-1}$, B, $x = t^{\frac{1}{2}}y$, A, $v = 5u$, $x(t) = t [A \sin \frac{5}{t} + B \cos \frac{5}{t}]$.

Capitolul 4

Sisteme de ecuații diferențiale

4.1 Sisteme normale

4.1 Definiție. Se numește **sistem normal** un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

unde $x_1, \dots, x_n \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nevid, iar f_1, \dots, f_n sunt funcții definite pe $I \times \mathbb{R}^n$.

4.2 Exemplu (Modelul pradă-prădător sau Ecuațiile Lotka-Volterra). Acest model a fost propus inițial în 1910 de A. Lotka în studiul reacțiilor chimice, iar apoi independent a fost studiat de matematicianul V. Volterra în anii 1920 în analiza statistică a tipurilor de pești din Marea Adriatică. Fie $x(t)$ numărul populației pradă la momentul de timp t și $y(t)$ numărul prădătorilor. Pentru a obține un model cât mai simplu facem următoarele presupuneri:

1. în absența prădătorilor, populația pradă crește cu rata $dx/dt = ax$, $a > 0$.
2. în absența pradei, populația prădătorilor scade cu rata $dy/dt = -by$, $b > 0$.

3. când ambele populații sunt prezente, consumul pradei de către prădători duce la o scădere în x proporțională cu xy (adică $-pxy$, $p > 0$) și o creștere în y proporțională cu xy (adică qxy , $q > 0$); motivul pentru care am luat proporționalitate cu produsul dintre x și y este următorul: dacă oricare din populații se dublează, frecvența întâlnirilor dintre populații se dublează, iar dacă ambele populații se dublează, numărul întâlnirilor crește de patru ori.

Se obține sistemul

$$\begin{cases} x' = ax - pxy \\ y' = -by + qxy. \end{cases}$$

4.3 Definiție. Se numește **soluție** a sistemului normal pe intervalul I o funcție vectorială $X = (x_1, \dots, x_n)$ ce verifică egalitățile

$$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{pentru orice } i \text{ de la } 1 \text{ la } n \text{ și orice } t \in I.$$

4.4 Definiție. Se numește **problemă Cauchy** cerința determinării unei soluții a sistemului care verifică condițiile inițiale:

$$x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad t_0 \in I, \quad \text{și } x_{i,0} \in \mathbb{R}.$$

4.5 Observație. Pentru un vector de funcții $x_i \in C^1(I)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{definim} \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \int X dt = \begin{bmatrix} \int x_1(t) dt \\ \dots \\ \int x_n(t) dt \end{bmatrix}.$$

Sistemul se poate scrie sub formă vectorială

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \quad \text{cu condiția inițială } X(t_0) = X_0.$$

4.6 Teoremă (Teoremă de existență și unicitate). *Dacă funcțiile $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe $D = \{(t, x_1, \dots, x_n) \mid t \in [t_0 - a, t_0 + a], x_i \in [x_{i,0} - b_i, x_{i,0} + b_i]\}$ și lipschitziene în raport cu x_1, \dots, x_n pe D atunci există o unică soluție a problemei Cauchy*

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \quad \text{cu condiția inițială } X(t_0) = X_0.$$

definită pe intervalul $[t_0 - h, t_0 + h]$ unde $h = \min(a, b_i/M)$ cu $M = \max |f_i(t, x_1, \dots, x_n)|$.

Demonstrație. Demonstrația este analogă cu cea din cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi. □

4.7 Observație. O ecuație de ordin superior $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Deci teorema de existență și unicitate pentru sisteme se aplică și unei astfel de ecuații.

4.2 Sisteme liniare cu coeficienți constanți

Un sistem liniar cu coeficienți constanți se poate scrie sub forma matriceală:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

unde A este o matrice de $n \times n$ cu elemente numere reale, iar F este o matrice coloană de $n \times 1$, care are ca și elemente, funcțiile $f_i(t) \in C(I)$ definite pe un interval real nevid I .

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Dacă $F = 0$, atunci sistemul este liniar omogen.

Vom prezenta în continuare trei metode de rezolvare: prima, metoda eliminării succesive a funcțiilor necunoscute, a doua, metoda vectorilor și valorilor proprii, iar a treia metoda matriceală. Vom descrie pe scurt cele trei metode și le vom ilustra prin câteva exemple.

Metoda eliminării succesive a necunoscutelor

Această metodă constă în a obține o ecuație diferențială liniară de ordinul n pentru una din funcțiile necunoscute ale sistemului prin eliminarea celorlalte necunoscute.

4.8 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Derivăm prima ecuație și obținem

$$x'' = x' + 3y' + 2e^t = 10x + 6y + 7e^t + 3e^{-2t}.$$

Eliminăm pe y , înmulțind prima ecuație a sistemului cu -2 și adunând la relația obținută anterior. Rezultă ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți:

$$x'' - 2x' - 8x = 3e^t + 3e^{-2t},$$

care are soluția generală

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2} t e^{-2t}.$$

Din prima ecuație a sistemului, se obține

$$y = \frac{1}{3}(x' - x - 2e^t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t + \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-2t}.$$

4.9 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Metoda I

Eliminăm funcțiile y și z . Pentru aceasta, rescriem prima ecuație $4x - x' = y + 2z$. Prin derivare, avem

$$4x' - x'' = y' + 2z' = 2x + y - 2z + 2(x - y + z) = 4x - y.$$

Mai derivăm încă o dată relația obținută

$$4x'' - x''' = 4x' - (2x + y - 2z) = 4x' - 2x - y + 2z.$$

Rezolvăm sistemul în necunoscutele y și z

$$\begin{cases} y + 2z = 4x - x' \\ -y = 4x' - x'' - 4x \\ -y + 2z = 4x'' - x''' - 4x' + 2x \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

este 2. Pentru a avea un sistem compatibil, rangul matricei extinse este tot 2, adică determinantul ei de ordinul 3 este zero. Obținem ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x - x' \\ -1 & 0 & 4x' - x'' - 4x \\ -1 & 2 & 4x'' - x''' - 4x' + 2x \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Ecuația caracteristică este $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. Folosind schema lui Horner obținem

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & \\ 3 & 1 & 0 & & \end{array}$$

rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ și $r_3 = 3$. Atunci $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. Folosind relația $y = 4x + x'' - 4x'$ rezultă $y = C_1e^t + C_3e^{3t}$, iar din $2z = 3x' - x''$ se obține $z = C_1e^t + C_2e^{2t}$.

Metoda II

Eliminăm funcțiile x și z . Pentru aceasta, rescriem a doua ecuație $y' - y = 2x - 2z$. Prin derivare, avem

$$y'' - y' = 2x' - 2z' = 2(4x - y - 2z) - 2(x - y + 2) = 6x - 6z.$$

Derivând încă o dată, se obține

$$y''' - y'' = 18x - 18z.$$

Rezolvăm sistemul în necunoscutele x și z

$$\begin{cases} 2x - 2z = y' - y \\ 6x - 6z = y'' - y' \\ 18x - 18z = y''' - y'' \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -6 \\ 18 & -18 \end{bmatrix}$$

este 1. Pentru a avea un sistem compatibil, rangul matricei extinse este tot 1, adică determinantul ei de ordinul 3 este zero și toți minorii de ordinul 2 sunt de asemenea zero. Obținem ecuațiile

$$\begin{vmatrix} 2 & y' - y \\ 6 & y'' - y' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & y' - y \\ 18 & y''' - y'' \end{vmatrix} = 0$$

adică $y'' - 4y' + 3y = 0$ și $y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$. Ecuațiile caracteristice sunt $r^2 - 4r + 3 = 0$ și $r^3 - r^2 - 9r + 9 = 0$. Prima ecuație are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 3$, iar cea de-a doua rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 3$ și $r_3 = -3$. Rădăcinile comune sunt $r_1 = 1$ și $r_2 = 3$. Atunci $y = C_1 e^t + C_3 e^{3t}$. Folosind faptul că $2x - 2z = y' - y = 2C_3 e^{3t}$ în prima ecuație a sistemului rezultă ecuația $x' - 2x = C_3 e^{3t} - C_1 e^t$. Rezolvând această ecuație liniară neomogenă găsim soluția $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} + C_1 e^t$. În final, din $x - z = C_3 e^{3t}$ obținem $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Metoda valorilor și vectorilor proprii

Rezolvăm întâi sistemul omogen $X' = AX$. Căutăm soluția sub forma

$$X = v e^{rt}, \quad (4.1)$$

unde v este o matrice coloană de $n \times 1$ cu elemente numere reale. Atunci $X' = r v e^{rt} = rX$. Sistemul $X' = AX$ este echivalent cu sistemul algebric

$$(A - rI_n)v = O_n. \quad (4.2)$$

Acest sistem are soluții nebanale, dacă $\det(A - rI_n) = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt valorile proprii ale matricei A , notate r_1, \dots, r_n . Considerăm spațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii r_i

$$V_i = \{ v \mid (A - r_i I_n)v = O_n \}, \quad i \in \{ 1, \dots, n \}.$$

Avem mai multe cazuri posibile.

I. Matricea A are valori proprii numere reale distincte. Pentru fiecare valoare proprie r_i se calculează vectorul propriu corespunzător v_i , rezolvând sistemul (4.2) pentru $r = r_i$. Dimensiunea fiecărui spațiu V_i este 1, deci $V_i = C_i v_i$, unde C_i este o variabilă reală, iar componentele vectorului propriu v_i sunt numere reale fixe. Soluția sistemului de ecuații diferențiale corespunzătoare valorii proprii r_i este $X = C_i v_i e^{r_i t}$. Soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale este

$$X = C_1 v_1 e^{r_1 t} + \dots + C_n v_n e^{r_n t}.$$

II. Matricea A are două valori proprii complex conjugate $r_{1,2} = a \pm bi$ cu ordinul 1 de multiplicitate. Atunci vectorii proprii corespunzători, sunt vectori conjugați $v_{1,2} = p \pm iq$, unde p, q sunt vectori coloană de numere reale. Pentru că $Y_1 = v_1 e^{r_1 t}$ și $Y_2 = v_2 e^{r_2 t}$ sunt soluții, atunci

și $X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = \operatorname{Re} Y_1$ și $X_2 = -\frac{i}{2}(Y_1 - Y_2) = \operatorname{Im} Y_1$ vor fi soluții. Așadar, corespunzător valorilor proprii $r_{1,2}$, la soluția generală a sistemului se adaugă

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^{at} (p \cos bt - q \sin bt) + C_2 e^{at} (q \cos bt + p \sin bt).$$

III. Matricea A are o valoare proprie reală $r = r_i$ care se repetă de $m \geq 2$ ori. Fie d dimensiunea spațiului V_i . În general avem $1 \leq d \leq m$. Dacă $m = d$ atunci din spațiul V_i se pot alege vectorii proprii liniari independenți v_1, \dots, v_m . La soluția sistemului de ecuații diferențiale, corespunzător valorii proprii r_i , se adaugă soluția

$$X_i = (C_1 v_1 + \dots + C_m v_m) e^{rt}.$$

Dacă $d < m$, fie $k = m - d$. Atunci din spațiul V_i se pot alege d vectori proprii liniari independenți, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d astfel încât v_d să aibă proprietatea că sistemul $(A - r_i I_n)v = v_d$ este compatibil. Soluția sistemului $(A - r_i I_n)v = v_d$ este primul vector asociat v_{d+1} . Vectori asociați $v_{d+2}, \dots, v_{d+k} = v_m$ se determină rezolvând, pe rând, sistemele $(A - r_i I_n)v_{d+2} = v_{d+1}, \dots, (A - r_i I_n)v_{d+k} = v_{d+k-1}$. La soluția sistemului se adaugă soluția

$$\begin{aligned} X_i = & (C_1 v_1 + \dots + C_d v_d) e^{rt} + C_{d+1} (v_{d+1} + t v_d) e^{rt} + C_{d+2} \left(v_{d+2} + t v_{d+1} + \frac{t^2}{2!} v_d \right) e^{rt} + \dots \\ & + C_{d+k} \left(v_{d+k} + v_{d+k-1} t + \dots + \frac{t^k}{k!} v_d \right) e^{rt}. \end{aligned}$$

IV. Matricea A are două valori proprii complexe conjugate care se repetă de $m \geq 2$ ori. În acest caz se consideră partea reală și imaginară a soluțiilor obținute la cazul III.

Fie X_o soluția ecuației omogene $X' = AX$. Procedând ca și în cazul ecuațiilor liniare neomogene, se determină o soluție particulară X_p . Soluția generală a sistemului $X' = AX + F$ este $X = X_o + X_p$.

4.10 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A se determină rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} 1-r & 3 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Rădăcinile ecuației sunt $r_1 = -2$ și $r_2 = 4$. Înlocuind $r = -2$ în sistemul $(A - rI_2)v = 0$, unde v este vectorul coloană $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, obținem $3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\beta = -\alpha$. Luând $\alpha = C_1$, rezultă vectorul propriu corespunzător și deci soluția corespunzătoare

$$X_1 = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pentru $r = 4$ sistemul (4.2) se reduce la $-3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\alpha = \beta$. Luând $\alpha = C_2$, rezultă

$$X_2 = C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluția sistemului omogen este

$$X_o = X_1 + X_2 = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a rezolva sistemul neomogen, descompunem pe F într-o formă convenabilă:

$$F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Soluția particulară X_{p_1} o alegem de forma

$$X_{p_1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^t.$$

Înlocuind în sistemul inițial se obține $A = -\frac{1}{3}$ și $B = -\frac{2}{3}$. Soluția X_{p_2} se caută de forma

$$X_{p_2} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \end{bmatrix} e^{-2t},$$

deoarece -2 este valoare proprie. Înlocuind în sistemul neomogen $X' = AX + F$ se obține $A = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ și $B + D = -\frac{1}{6}$. Putem alege $B = 0$ și $D = -\frac{1}{6}$ (altfel se renotează $C_1 := C_1 + B$ și se ajunge la aceeași formă a rezultatului). Soluția generală a sistemului va fi

$$X = X_o + X_{p_1} + X_{p_2} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} e^{-2t} \begin{bmatrix} 3t \\ -3t + 1 \end{bmatrix}.$$

4.11 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X.$$

Căutăm soluția sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^{rt}.$$

Prin derivare $X' = rX$. Atunci $X' = AX$ este echivalent cu $rX = AX$ adică $(A - rI_3)X = O_3$. Sistemul acesta omogen are soluții nebanale dacă $\det(A - rI_3) = 0$. Soluțiile acestei ecuații

reprezintă valorile proprii ale matricei A . Determinăm acum valorile proprii ale matricei A rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 & -2 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 1 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând a doua coloană la prima avem

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & -2 \\ 3-r & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = (3-r) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = (3-r) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-r & 0 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix}.$$

Obținem $(3-r)(2-r)(1-r) = 0$, cu soluțiile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ și $r_3 = 3$. Vectorul propriu corespunzător lui r_1 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător lui r_2 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_2 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iar vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se obține din sistemul

$$(A - r_3 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4.12 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y - 3z \\ y' = -x - 2y - 3z \\ z' = 3x + 15y + 12z. \end{cases}$$

Determinăm valorile proprii ale matricei sistemului, rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ -1 & -2-r & -3 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = 0.$$

Scăzând primele două linii, se obține

$$\begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ 3-r & -3+r & 0 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = (r-3) \begin{vmatrix} 2-r & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = (r-3) \begin{vmatrix} -3-r & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 15 & 12-r \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă ecuația $(r-3)(r^2-9r+18)=0$ cu rădăcinile $r_{1,2}=3$ și $r_3=6$. Determinăm vectorii proprii corespunzători valorilor $r_{1,2}$ din

$$(A-r_1I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 5\beta - 3\gamma = 0 \\ -\alpha - 5\beta - 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 9\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -5\beta - 3\gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se obține din sistemul

$$(A-r_3I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha - 5\beta - 3\gamma = 0 \\ -\alpha - 8\beta - 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + 15\beta + 6\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma = -3\alpha \\ \alpha = \beta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4.13 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 5x - y + 4z \\ z' = 5x + y + 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei A , rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} -2-r & -1 & 1 \\ 5 & -1-r & 4 \\ 5 & 1 & 2-r \end{vmatrix} = 0.$$

Scădem din linia a treia, linia a doua și adunăm a doua coloană la a treia:

$$\begin{vmatrix} -2-r & -1 & 1 \\ 5 & -1-r & 4 \\ 0 & 2+r & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-r & -1 & 0 \\ 5 & -1-r & 3-r \\ 0 & 2+r & 0 \end{vmatrix} = (3-r)(2+r)^2 = 0.$$

Obținem soluțiile $r_1 = -2$, $r_2 = -2$ și $r_3 = 3$. Căutăm doi vectori corespunzători valorii duble $r_1 = r_2 = -2$. Avem

$$(A-r_1I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 5\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = \gamma \\ \beta = -\alpha \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Fiindcă am obținut un singur vector propriu, determinăm vectorul asociat rezolvând sistemul

$$(A-r_1I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \gamma = 1 \\ 5\alpha + \beta + 4\gamma = -1 \\ 5\alpha + \beta + 4\gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = \gamma - 1 \\ \gamma = -\alpha \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se determină din

$$(A - r_3 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha - 4\beta + 4\gamma = 0 \\ 5\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = \gamma \\ \alpha = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.14 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 2y + z \\ z' = 4x + y - 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale matricei, rezolvând ecuația

$$0 = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 4 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 0 & -1-r & -1-r \end{vmatrix} = -(1+r) \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -3-r & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Obținem ecuația $(r+1)(r^2+2r+1)=0$, cu rădăcinile $r_1 = r_2 = r_3 = -1$. Căutăm trei vectori corespunzători valorii triple $r_{1,2,3} = -1$. Avem

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = -2\alpha \\ \gamma = 2\alpha \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primul vector asociat se determină din

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = -2 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = -2\alpha + 1 \\ \gamma = 2\alpha - 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Primul vector asociat este $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Al doilea vector asociat se obține din sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = -2\alpha \\ \gamma = 2\alpha + 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluția generală a sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

4.15 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = 3x - y + 3z \\ z' = 8x - 8y + 10z. \end{cases}$$

Determinăm valorile proprii ale matricei sistemului, rezolvând ecuația

$$0 = \begin{vmatrix} -3-r & 5 & -5 \\ 3 & -1-r & 3 \\ 8 & -8 & 10-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-r & 2-r & -2+r \\ 3 & 2-r & 0 \\ 8 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r)^3.$$

Matricea sistemului are valoarea proprie triplă $r_{1,2,3} = 2$. Aflăm vectorii corespunzători rezolvând mai întâi sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha + 5\beta - 5\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 8\alpha - 8\beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta - \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alegem acum un vector propriu din cei doi vectori obținuți. Fie de exemplu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Cel de-al doilea vector propriu îl alegem încât sistemul

$$(A - r_1 I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

să fie compatibil. Avem

$$\begin{cases} -5\alpha_1 + 5\beta_1 - 5\gamma_1 = \beta - \gamma \\ 3\alpha_1 - 3\beta_1 + 3\gamma_1 = \beta \\ 8\alpha_1 - 8\beta_1 + 8\gamma_1 = \gamma. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil dacă este respectată condiția $3\gamma = 8\beta$. Scriind

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\beta}{3} \\ \beta \\ \frac{8\beta}{3} \end{bmatrix} = \frac{\beta}{3} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

obținem ce de-al doilea vector propriu $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$. Vectorul asociat îl găsim rezolvând sistemul

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha + 5\beta - 5\gamma = -5 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 3 \\ 8\alpha - 8\beta + 8\gamma = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta - \gamma + 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluția sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \left(t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

4.16 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z \\ y' = x - 4y + 9z \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii, rezolvând ecuația

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 4-r & -5 & 7 \\ 1 & -4-r & 9 \\ -4 & 0 & 5-r \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -4-r & 9 \end{vmatrix} + (5-r) \begin{vmatrix} 4-r & -5 \\ 1 & -4-r \end{vmatrix} \\ &= -4(-45 + 28 + 7r) + (5-r)(r^2 - 16 + 5). \end{aligned}$$

Obținem ecuația $-r^3 + 5r^2 - 17r + 13 = 0$. Folosind schema lui Horner obținem

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 5 & -17 & 13 \\ 1 & -1 & 4 & -13 & 0 \end{array}$$

soluția $r_1 = 1$ și ecuația $-r^2 + 4r - 13 = 0$, cu soluțiile $r_2 = 2 + 3i$ și $r_3 = 2 - 3i$. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_1 se determină din

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 5\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - 5\beta + 9\gamma = 0 \\ -4\alpha + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorii proprii pentru r_2 și r_3 îi căutăm rezolvând sistemul

$$(A - r_2 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 3i)\alpha - 5\beta + 7\gamma = 0 & \alpha = \delta(3 - 3i) \\ \alpha - (6 + 3i)\beta + 9\gamma = 0 & \beta = \delta(5 - 3i) \\ -4\alpha + (3 - 3i)\gamma = 0 & \gamma = 4\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vector propriu pentru r_2 este $\begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix}$. Pentru că r_3 este conjugata valorii proprii r_2 și vectorul propriu corespunzător va fi conjugatul celuilalt, și anume $\begin{bmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{bmatrix}$. Putem scrie soluția sub forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix} + C_3 e^{(2-3i)t} \begin{bmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dar, făcând înmulțirea

$$\begin{aligned} e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix} &= e^{2t} (\cos 3t + i \sin 3t) \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{2t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + i \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

și considerând partea reală și imaginară, soluția se rescrie

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \left(\cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \left(\cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right).$$

Metoda matriceală

Pentru o matrice A de $n \times n$ numere reale și un număr $t \in \mathbb{R}$ definim

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Să observăm că

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \dots = A \left(I_n + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) = A e^{At}.$$

Atunci scriind sistemul neomogen sub forma $X' - AX = F$ și înmulțind la stânga această egalitate cu matricea nesingulară e^{-At} obținem

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} X) = e^{-At} F.$$

Prin integrare

$$e^{-At} X = \int_0^t e^{-Au} F \, du + X_0, \quad \text{unde } X_0 = X \Big|_{t=0}.$$

Soluția generală a sistemului neomogen este

$$X = e^{At} \left[\int_0^t e^{-Au} F \, du \right] + e^{At} X_0.$$

În particular, soluția sistemului omogen este

$$X_o = e^{At} X_0.$$

Totul revine la a calcula matricea exponențială e^{At} . Să observăm că puterea k a matricei A se calculează utilizând forma Jordan $A = PJP^{-1}$:

$$A^k = A \cdot A \cdots A = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} \cdots PJP^{-1} = PJ^k P^{-1}.$$

Cu această reprezentare a matricei A^k avem

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k \cdot P^{-1} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}.$$

Cu ajutorul acesteia, soluția sistemului omogen este

$$X_o = P e^{Jt} C,$$

unde $C = P^{-1} X_0$. Soluția sistemului neomogen se scrie

$$X = X_o + P e^{Jt} \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, du.$$

4.17 Exemplu. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t F_1 + e^{-2t} F_2.$$

Matricea A se poate scrie

$$A = PJP^{-1}, \quad \text{unde} \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Avem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Soluția ecuației omogene este

$$X_o = Pe^{Jt}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Pentru a obține soluția neomogenă, scriem

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, du &= \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} (e^u F_1 + e^{-2u} F_2) \, du \\ &= \int_0^t e^{-Ju} e^u \, du \cdot P^{-1} F_1 + \int_0^t e^{-Ju} e^{-2u} \, du \cdot P^{-1} F_2 \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3u} & 0 \\ 0 & e^{3u} \end{bmatrix} \, du \cdot P^{-1} F_1 + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-6u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \, du \cdot P^{-1} F_2 \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 - e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} - 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 - e^{-6t} & 0 \\ 0 & 6t \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -e^{-6t} & 0 \\ 0 & 6t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + D, \quad D = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția particulară este

$$\begin{aligned} X_p &= Pe^{Jt} \int_0^t e^{-Ju} P^{-1} F \, du = \frac{1}{6} P \begin{bmatrix} -e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} P \begin{bmatrix} -e^{-6t} & 0 \\ 0 & 6te^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Pe^{Jt} D \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3e^{-3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-6t} \\ -6te^{-2t} \end{bmatrix} + Pe^{Jt} D \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 + 6t \\ 1 - 6t \end{bmatrix} e^{-2t} + Pe^{Jt} D. \end{aligned}$$

Soluția generală a sistemului este

$$X = X_o + X_p = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-2t} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

unde $E_1 = C_1 + D_1 = C_1 + \frac{7}{12}$ și $E_2 = C_2 + D_2 - \frac{1}{12} = C_2 - \frac{1}{4}$.

4.18 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X.$$

Folosind calculele de la metoda II de rezolvare avem

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizând formula $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, adevărată pentru orice $z \in \mathbb{C}$, obținem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Notând $P^{-1} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$ obținem

$$X = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot X_0 = P \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.19 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 5x - y + 4z \\ z' = 5x + y + 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Folosind calculele

de la metoda II de rezolvare avem

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad J^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Utilizând formula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{n!} = ze^z$, obținem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-2)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Notând $P^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$ obținem

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{3t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

4.20 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 2y + z \\ z' = 4x + y - 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avem

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Soluția este $X = Pe^{Jt}C$, adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

4.21 Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z \\ y' = x - 4y + 9z \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avem

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos 3t & e^{2t} \sin 3t \\ 0 & -e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Soluția este $X = Pe^{Jt}C$, adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{3t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{3t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right).$$

4.3 Sisteme simetrice

4.22 Definiție. Un sistem simetric este un sistem scris sub forma

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_{n+1})} = \dots = \frac{dx_{n+1}}{f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})},$$

unde f_1, \dots, f_{n+1} nu se anulează simultan pentru $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pentru rezolvarea sistemului se caută integrale prime.

4.23 Definiție. Se numește **integrală primă** a sistemului simetric, o funcție F neconstantă ce ia valori constante pe orice soluție a sistemului, adică

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = C.$$

Pentru a rezolva sistemul simetric este nevoie de determinarea a n integrale prime independente, adică F_1, \dots, F_n cu proprietatea că există n variabile (de exemplu x_1, \dots, x_n) astfel încât determinantul

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să nu se anuleze. Teoretic aceasta înseamnă că din integralele prime respective se pot exprima variabilele x_1, \dots, x_n în funcție de x_{n+1} .

Pentru a determina integrale prime folosim următoarele metode:

1. dacă două rapoarte depind doar de două necunoscute (eventual după simplificări) ele reprezintă o ecuație de ordinul întâi care se rezolvă;

2. dacă dintr-o integrală primă se poate exprima o necunoscută în funcție de celelalte, se ajunge uneori la cazul anterior;

3. se fac combinații integrabile de forma

$$\frac{dx_1}{f_1} = \dots = \frac{dx_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{g_1 dx_1 + \dots + g_{n+1} dx_{n+1}}{g_1 f_1 + \dots + g_{n+1} f_{n+1}}$$

cu proprietatea că $g_1 f_1 + \dots + g_{n+1} f_{n+1} = 0$ și $g_1 dx_1 + \dots + g_{n+1} dx_{n+1} = d\omega$. Va rezulta că $d\omega = 0$ adică $\omega(x_1, \dots, x_{n+1}) = C$ și astfel am obținut o integrală primă.

4.24 Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y}.$$

Ultimele două rapoarte ne arată că $-y dy = z dz$. Integrând se obține $-y^2/2 = z^2/2 + C_1$. După o redenumire a constantei obținem $y^2 + z^2 = C_1$. Aceasta este prima integrală primă. Amplificând cu z al doilea raport și cu y al treilea raport și adunându-le se obține

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{z dy + y dz}{z^2 - y^2}.$$

După simplificarea numitorului avem $dx = z dy + y dz = d(z \cdot y)$, de unde $x = zy + C_2$. Am găsit și cea de-a doua integrală primă: $x - yz = C_2$.

Soluția sistemului este

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = C_1, \\ x - yz = C_2. \end{cases}$$

4.25 Exemplu. Să se integreze sistemul simetric

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

Adunând toate trei rapoartele și scăzând din primul raport celelalte rapoarte rezultă:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dx-dz}{z-x}.$$

Ultimile două rapoarte prin integrare ne dau $x - y = C_1(x - z)$, iar din penultimele deducem

$$\frac{d(x+y+z)}{(x+y+z)} = -2 \frac{d(x-y)}{x-y} \Rightarrow \ln(x+y+z) = -2 \ln(x-y) + \ln C_2 \Rightarrow x+y+z = \frac{C_2}{(x-y)^2}.$$

Soluția sistemului este

$$\begin{cases} \frac{x-y}{x-z} = C_1, \\ (x-y)^2(x+y+z) = C_2. \end{cases}$$

4.26 Exemplu. Să se rezolve următorul sistem normal aducându-l sub forma simetrică

$$\begin{cases} y' = y(y+z) \\ z' = z(y+z). \end{cases}$$

Forma simetrică a sistemului este

$$\frac{dy}{y(y+z)} = \frac{dz}{z(y+z)} = dx.$$

Din primele două rapoarte avem $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Prin integrare $\ln y = \ln z + \ln C_1$, adică $y = zC_1$.

Înlocuind pe y obținem

$$\frac{dz}{z(y+z)} = \frac{dz}{z^2(C_1+1)} = dx.$$

Integrând, avem $-\frac{1}{z(C_1+1)} = x - C_2$. Rezultă a doua integrală primă $x + \frac{1}{y+z} = C_2$.

Soluția sistemului este

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = C_1, \\ x + \frac{1}{y+z} = C_2. \end{cases}$$

4.4 Exerciții

Probleme propuse

4.1. Să se integreze sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 3x - y + e^t + 3 \end{cases}$$

4.2. Să se integreze sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 3z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + 3y - z. \end{cases}$$

4.3. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 3x - 2y - 3z \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$$

4.4. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = x + 4y + z \\ y' = 5x + 6y + 3z \\ z' = -9x - 12y - 5z. \end{cases}$$

4.5. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 5x + 6y - 3z \\ y' = -x + z \\ z' = x + 2y + z. \end{cases}$$

4.6. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y - 7z \\ y' = 2x + 5y - 5z \\ z' = 3x + 8y - 8z. \end{cases}$$

4.7. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z. \end{cases}$$

4.8. Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}.$$

4.9. Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{xz^{p-1}} = \frac{dy}{yz^{p-1}} = \frac{dz}{-(x^p + y^p)}.$$

4.10. Să se rezolve sistemul simetric

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Indicații la problemele propuse

4.1. $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^t$ și $y = -3C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}$.

4.2. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.4. Avem

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \left(t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

4.5. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \left(t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

4.6. Avem

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(t^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

4.7. Avem

$$J = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2i & -2i & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_2 e^t \left(\cos 2t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.8. $\frac{x}{z} = C_1$ și $x^2 + y^2 = C_2$. 4.9. $\frac{x}{y} = C_1$ și $x^p + y^p + z^p = C_2$.

4.10. $\frac{y}{x} = C_1$ și $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2$.

Capitolul 5

Ecuatii cu derivate parțiale

5.1 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi

5.1 Notatie. Vom folosi notația z'_x pentru derivata parțială a funcției z în raport cu x . În unele cursuri se folosește notația $\frac{\partial z}{\partial x}$ sau z_x în loc de z'_x .

Ecuatii liniare și omogene

5.2 Definiție. Se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă** o egalitate de forma

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \cdot z'_{x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n) \cdot z'_{x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \cdot z'_{x_n} = 0$$

unde $X_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și există cel puțin un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $X_i(x_1, \dots, x_n)$ să fie diferit de zero pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

Pentru a rezolva această ecuație atașăm sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Putem presupune în continuare că X_1 este diferită de funcția nulă.

5.3 Teoremă. Fie $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ o integrală primă a sistemului simetric atașat. Atunci $z = G(x_1, \dots, x_n)$ este o soluție a ecuației cu derivate parțiale.

Demonstrație. Deoarece $X_1 \neq 0$, putem considera în sistemul simetric pe x_1 ca variabilă independentă. Avem

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1}.$$

Pentru că G este o integrală primă a sistemului simetric atașat atunci este verificată relația $G(x_1, \dots, x_n) = C$, unde C este o constantă. Derivând în raport cu x_1 rezultă

$$G'_{x_1} + G'_{x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + G'_{x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1} = 0.$$

5.6 Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$(x - z) \cdot u'_x + (y - z) \cdot u'_y + 2z \cdot u'_z = 0.$$

Rezolvăm sistemul simetric

$$\frac{dx}{x - z} = \frac{dy}{y - z} = \frac{dz}{2z}.$$

Avem

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dx - dy}{x - y} = \frac{dx + dy + 2dz}{x + y + 2z},$$

de unde $2 \ln(x - y) = \ln z + \ln C_1$, ceea ce ne arată că $(x - y)^2 = zC_1$. Prima integrală primă este $\frac{(x-y)^2}{z} = C_1$. Pe de altă parte, avem $2 \ln(x + y + 2z) = \ln z + \ln C_2$, adică $(x + y + 2z)^2 = zC_2$, ceea ce ne dă a doua integrală primă a sistemului: $\frac{(x+y+2z)^2}{z} = C_2$. Soluția ecuației cu derivate parțiale este

$$u = F\left(\frac{(x - y)^2}{z}, \frac{(x + y + 2z)^2}{z}\right),$$

unde F este o funcție oarecare ce admite derivate parțiale de ordinul întâi. De exemplu, dacă $F(t, s) = t^2 - s$, atunci

$$u = \frac{(x - y)^4}{z^2} - \frac{(x + y + 2z)^2}{z}.$$

5.7 Definiție. Problema Cauchy pentru ecuația

$$\sum_{i=0}^n X_i(x_1, \dots, x_n) \cdot z'_{x_i} = 0$$

este problema determinării acelei soluții a ecuației care pentru o valoare fixată a uneia dintre variabile să spunem $x_i = a \in \mathbb{R}$ se reduce la o funcție dată

$$z(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Se mai spune că se caută suprafața integrală $z = F(x_1, \dots, x_n)$ care conține curba

$$\begin{cases} z = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ x_i = a. \end{cases}$$

5.8 Exemplu. Să se găsească soluția ecuației $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + xy \cdot u'_z = 0$ ce corespunde condiției $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$.

Sistemul simetric atașat este $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$. Din primele două rapoarte rezultă $x = yC_1$. Ținând cont de prima integrală primă, din ultimile două rapoarte rezultă $yC_1 dy = dz$. De aici $\frac{C_1 y^2}{2} = z + C_2$, adică $xy - 2z = C_2$. Pentru a afla soluția ce corespunde condiției inițiale rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = yC_1 \\ xy - 2z = C_2 \\ z = 0 \\ u = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Avem $xy = C_2$ și $x = yC_1$ de unde $x^2 = C_1 C_2$ și $C_2 = y^2 C_1$. Obținem $u = C_1 C_2 + \frac{C_2}{C_1}$. Rezultă soluția

$$u = \frac{x}{y}(xy - 2z) + \frac{y}{x}(xy - 2z) = x^2 + y^2 - 2z \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Ecuatii cvasiliniare

5.9 Definiție. Se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară** o ecuație de forma

$$X_1(x_1, \dots, x_n, z) \cdot z'_{x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, z) \cdot z'_{x_n} = X_{n+1}(x_1, \dots, x_n, z).$$

unde $X_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ și există $i \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât X_i să nu se anuleze pe D .

5.10 Teoremă. Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este dată implicit de ecuația

$$F(G_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, G_n(x_1, \dots, x_n, z)) = 0,$$

unde G_1, \dots, G_n sunt integrale prime ale sistemului

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X_{n+1}}.$$

Demonstrație. Căutăm soluția în forma implicită $V(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, unde V este o funcție ce urmează a fi determinată și care are derivate parțiale de ordinul întâi astfel încât V'_z nu se anulează.

Avem $V'_{x_i} + V'_z \cdot z'_{x_i} = 0$, pentru orice i de la 1 la n . De aici

$$z'_{x_i} = -\frac{V'_{x_i}}{V'_z}.$$

Înlocuind aceste relații în ecuația cu derivate parțiale ce trebuie rezolvată rezultă

$$X_1 \cdot V'_{x_1} + \dots + X_n \cdot V'_{x_n} + X_{n+1} \cdot V'_z = 0.$$

Această ecuație omogenă are soluția

$$V = F(G_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, G_n(x_1, \dots, x_n, z))$$

unde G_1, \dots, G_n sunt integrale prime ale sistemului simetric atașat

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X_{n+1}}.$$

Așadar soluția ecuației cu derivate parțiale cvasiliniară este dată în formă implicită de

$$F(G_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, G_n(x_1, \dots, x_n, z)) = 0.$$

□

5.11 Exemplu. Să se integreze $x \cdot z'_x + (xz + y) \cdot z'_y = z$. Să se scrie soluția generală a ecuației și apoi suprafața integrală ce se sprijină pe curba $x + y = 2z$, $xz = 1$.

Atașăm sistemul simetric

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xz + y} = \frac{dz}{z}.$$

Din primul și ultimul raport deducem că $\ln x = \ln z + \ln C_1$, adică $\frac{x}{z} = C_1$. Din egalitatea $\frac{dz}{z} = \frac{z dx - dy + x dz}{xz - y}$ rezultă $\ln z = \ln(xz - y) - C_2$. A doua integrală primă este $\frac{xz - y}{z} = C_2$. Soluția generală a ecuației este dată în forma implicită de ecuația suprafeței

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{xz - y}{z}\right) = 0.$$

Pentru a determina suprafața ce se sprijină pe curba $x + y = 2z$, $xz = 1$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = zC_1 \\ xz - y = zC_2 \\ x + y = 2z \\ xz = 1. \end{cases}$$

Din a doua și a treia relație $xz + x = zC_2 + 2z$ și înlocuind și prima egalitate și simplificând cu z rezultă $x = C_2 - C_1 + 2$. Din prima și ultima relație obținem $x^2 = C_1$. Va rezulta că $(C_2 - C_1 + 2)^2 = C_1$. Ecuația suprafeței căutate este

$$\left(\frac{xz - y}{z} - \frac{x}{z} + 2\right)^2 = \frac{x}{z} \iff (xz - x - y + 2z)^2 = xz.$$

5.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi

5.12 Notăție. Vom folosi notațiile

z''_{x^2} pentru derivarea de două ori a funcției z în raport cu x

z''_{xy} pentru derivarea funcției z mai întâi în raport cu x și apoi în raport cu y

În unele cursuri se folosesc notațiile

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Aducerea la forma canonică a ecuațiilor cvasiliniare

5.13 Definiție. Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniară o ecuație de forma

$$a(x, y)z''_{x^2} + b(x, y)z''_{xy} + c(x, y)z''_{y^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad (5.1)$$

unde $z = z(x, y)$ este funcția necunoscută, a, b, c trei funcții definite pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și F o funcție definită pe un domeniu din $D \times \mathbb{R}^3$.

5.14 Definiție. Următoarele forme ale ecuației cu derivate parțiale (5.1) le numim **forme canonice**

$$z''_{xy} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \text{formă canonică hiperbolică}$$

$$z''_{x^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \text{formă canonică parabolică}$$

$$z''_{x^2} + z''_{y^2} + F(x, y, z, z'_x, z'_y) = 0 \quad \text{formă canonică eliptică.}$$

5.15 Definiție. Ecuația

$$a dy^2 - b dx dy + c dx^2 = 0$$

atașată ecuației cu derivate parțiale (5.1) se numește **ecuație caracteristică**. Dacă $a \neq 0$, această ecuație este echivalentă cu ecuația de gradul al doilea

$$a (y')^2 - by' + c = 0.$$

5.16 Teoremă. Orice ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniară poate fi adusă la una din cele trei forme canonice.

Demonstrație. Se caută o schimbare de variabile $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$ astfel încât funcția $z(x, y) = Z(u(x, y), v(x, y))$ să verifice o ecuație în formă canonică. Calculăm derivatele lui z

$$z'_x = Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x$$

$$z'_y = Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y$$

$$z''_{x^2} = Z''_{u^2} \cdot (u'_x)^2 + 2Z''_{uv} \cdot u'_x \cdot v'_x + Z''_{v^2} \cdot (v'_x)^2 + Z'_u \cdot u''_{x^2} + Z'_v \cdot v''_{x^2}$$

$$z''_{xy} = Z''_{u^2} \cdot u'_x \cdot u'_y + Z''_{xy} (u'_x \cdot v'_y + u'_y \cdot v'_x) + Z''_{v^2} \cdot v'_x \cdot v'_y + Z'_u \cdot u''_{xy} + Z'_v \cdot v''_{xy}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{u^2} \cdot (u'_y)^2 + 2Z''_{uv} \cdot u'_y \cdot v'_y + Z''_{v^2} \cdot (v'_y)^2 + Z'_u \cdot u''_{y^2} + Z'_v \cdot v''_{y^2}$$

și înlocuim în ecuație, rezultând ecuația

$$AZ''_{u^2} + BZ''_{uv} + CZ''_{v^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0,$$

unde

$$A = a (u'_x)^2 + bu'_x u'_y + c (u'_y)^2$$

$$B = 2au'_x v'_x + b(u'_x v'_y + u'_y v'_x) + 2cu'_y v'_y$$

$$C = a (v'_x)^2 + bv'_x v'_y + c (v'_y)^2$$

iar în G fiind cuprinși toți termenii care nu conțin derivate parțiale de ordinul doi. Să observăm că A și C au formă comună. Să considerăm ecuația

$$a (\varphi'_x)^2 + b\varphi'_x \varphi'_y + c (\varphi'_y)^2 = 0, \quad a \neq 0.$$

(Dacă $a = 0$ se schimbă rolul lui y cu cel al lui x și se consideră $c(\varphi'_y)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + a(\varphi'_x)^2 = 0$, cu $c \neq 0$. Dacă și $c = 0$ ecuația este în forma canonică hiperbolică, după o împărțire cu b .) Ecuația se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{a} \left[a\varphi'_x + \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})\varphi'_y}{2} \right] \cdot \left[a\varphi'_x + \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac})\varphi'_y}{2} \right] = 0.$$

Ea se descompune în două ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogene

$$2a\varphi'_x + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})\varphi'_y = 0 \quad \text{și} \quad 2a\varphi'_x + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})\varphi'_y = 0.$$

Sistemele simetrice atașate sunt

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{și} \quad \frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Obținem ecuațiile diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

care se pot restrânge în ecuația caracteristică

$$a(y')^2 - by' + c = 0.$$

După semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$ se disting trei cazuri:

Cazul I $\Delta > 0$. În acest caz ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică are 2 soluții distincte

$$y' = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{și} \quad y' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dacă integrăm aceste ecuații obținem două relații pe care le putem scrie sub forma $\varphi_1(x, y) = C_1$ și $\varphi_2(x, y) = C_2$. Acestea verifică

$$2a(\varphi_1)'_x + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})(\varphi_1)'_y = 0 \quad \text{și} \quad 2a(\varphi_2)'_x + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})(\varphi_2)'_y = 0.$$

Rezultă că

$$\frac{(\varphi_1)'_x}{(\varphi_1)'_y} = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \neq -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(\varphi_2)'_x}{(\varphi_2)'_y}$$

ceea ce ne arată că

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a} (\varphi_1)'_y (\varphi_2)'_y \neq 0.$$

Dacă notăm $u = \varphi_1(x, y)$ și $v = \varphi_2(x, y)$ atunci $A = C = 0$ și ecuația devine

$$BZ''_{uv} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0.$$

Prin împărțire cu $B = -\frac{\Delta}{a} (\varphi_1)'_y (\varphi_2)'_y \neq 0$ obținem forma canonică hiperbolică.

Cazul II $\Delta = 0$. În acest caz ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică are soluția dublă $y' = \frac{b}{2a}$. Această relație integrată se scrie $\varphi(x, y) = C_1$. Dacă notăm $u = x$ și $v = \varphi(x, y)$ obținem $A = a$ și $C = 0$, iar $B = 2a\varphi'_x + b\varphi'_y$. Să observăm că $B = 0$. Într-adevăr, din faptul că $\Delta = 0$, avem $c = \frac{b^2}{4a}$. Înlocuind în $a(\varphi'_x)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + c(\varphi'_y)^2 = 0$ obținem

$$a(\varphi'_x)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + \frac{b^2}{4a}(\varphi'_y)^2 = 0 \Leftrightarrow 4a^2(\varphi'_x)^2 + 4ab\varphi'_x\varphi'_y + b^2(\varphi'_y)^2 = 0 \Leftrightarrow (2a\varphi'_x + b\varphi'_y)^2 = 0,$$

adică $2a\varphi'_x + b\varphi'_y = 0$. Fiindcă $B = 0$ ecuația cvasiliniară are forma

$$aZ''_{u^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0$$

și prin împărțire cu a se obține forma canonică.

Cazul III $\Delta < 0$. În acest caz ecuația este de tip eliptic. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt complexe și conjugate și după integrare obținem integrale prime de forma

$$\varphi_1(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \quad \text{și} \quad \varphi_2(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y).$$

Din faptul că φ_1 verifică ecuația $a(\varphi'_x)^2 + b\varphi'_x\varphi'_y + c(\varphi'_y)^2 = 0$ rezultă

$$a(\alpha'_x + i\beta'_x)^2 + b(\alpha'_x + i\beta'_x)(\alpha'_y + i\beta'_y) + c(\alpha'_y + i\beta'_y)^2 = 0$$

adică

$$a[\alpha_x'^2 - \beta_x'^2] + b(\alpha'_x\alpha'_y - \beta'_x\beta'_y) + c[\alpha_y'^2 - \beta_y'^2] + i[2a\alpha'_x\beta'_x + b(\alpha'_x\beta'_y + \alpha'_y\beta'_x) + 2c\alpha'_y\beta'_y] = 0$$

ceea ce ne arată că

$$\begin{aligned} a(\alpha'_x)^2 + b\alpha'_x\alpha'_y + c(\alpha'_y)^2 &= a(\beta'_x)^2 + b\beta'_x\beta'_y + c(\beta'_y)^2 \\ 2a\alpha'_x\beta'_x + b(\alpha'_x\beta'_y + \alpha'_y\beta'_x) + 2c\alpha'_y\beta'_y &= 0. \end{aligned}$$

Dacă notăm $u = \alpha(x, y)$ și $v = \beta(x, y)$ atunci relațiile anterioare ne arată că $A = C$ și $B = 0$. Ecuația devine

$$AZ''_{u^2} + AZ''_{v^2} + G(u, v, Z, Z'_u, Z'_v) = 0$$

de unde prin împărțire cu $A \neq 0$ se ajunge la forma canonică. Dacă $A = 0$ ecuația caracteristică ar avea rădăcini reale și aceasta ar fi o contradicție. \square

5.17 Exemplu. Să se aducă ecuația $x^2 z''_{x^2} + y^2 z''_{y^2} = 0$ la forma canonică.

Ecuația caracteristică este $x^2 (y')^2 + y^2 = 0$. Pentru că $\Delta = -4x^2 y^2 < 0$ ecuația este de tip eliptic. Avem

$$y'^2 = -\frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm i \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y \pm i \ln x = C.$$

Alegem $u = \ln y$ și $v = \ln x$ și scriem $z(x, y) = Z(u, v)$. Rezultă

$$z'_x = Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x = Z'_v \cdot \frac{1}{x}$$

$$z'_y = Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y = Z'_u \cdot \frac{1}{y}$$

$$z''_{x^2} = Z''_{v^2} \cdot \frac{1}{x^2} - Z'_v \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{u^2} \cdot \frac{1}{y^2} - Z'_u \cdot \frac{1}{y^2}$$

Ecuția $x^2 z''_{x^2} + y^2 z''_{y^2} = 0$ devine $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} - Z'_u - Z'_v = 0$.

5.18 Exemplu. Să se aducă la forma canonică ecuația $y^2 z''_{x^2} + 2xy z''_{xy} + x^2 z''_{y^2} = 0$.

Ecuția caracteristică este $y^2 y'^2 - 2xy y' + x^2 = 0$ cu $\Delta = 0$. Ecuția este de tip parabolic.

Avem

$$(yy' - x)^2 = 0 \Leftrightarrow yy' - x = 0 \Leftrightarrow y dy = x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C.$$

Alegem $u = x$ și $v = y^2 - x^2$ și notând $z(x, y) = Z(u, v)$ avem

$$z'_x = Z'_u + Z'_v \cdot (-2x)$$

$$z'_y = Z'_v \cdot 2y$$

$$z''_{x^2} = Z''_{u^2} - Z''_{uv} \cdot 4x + Z''_{v^2} \cdot 4x^2 - 2Z'_v$$

$$z''_{xy} = Z''_{uv} \cdot 2y - 4xy Z''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{v^2} \cdot 4y^2 + 2Z'_v.$$

Ecuția $y^2 z''_{x^2} + 2xy z''_{xy} + x^2 z''_{y^2} = 0$ devine

$$y^2 Z''_{u^2} - 4xy^2 Z''_{uv} + 4x^2 y^2 Z''_{v^2} - 2y^2 Z'_v + 4xy^2 Z''_{uv} - 8x^2 y^2 Z''_{v^2} + 4x^2 y^2 Z''_{v^2} + 2x^2 Z'_v = 0,$$

adică $y^2 Z''_{u^2} - 2(y^2 - x^2) Z'_v = 0$. Aceasta se rescrie $(v + u^2) Z''_{u^2} - 2v Z'_v = 0$. Forma canonică va fi

$$Z''_{u^2} - \frac{2v}{v + u^2} Z'_v = 0.$$

Aducerea la forma cea mai simplă a ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți

Fie ecuația liniară cu coeficienți constanți

$$az''_{x^2} + 2bz''_{xy} + cz''_{y^2} + dz'_x + ez'_y + fz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Am văzut că ecuația poate fi adusă la una dintre următoarele trei forme

$$Z''_{uv} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

$$Z''_{u^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

$$Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$$

Teorema următoare ne arată că aceste ecuații pot fi aduse la o formă simplificată.

5.19 Teoremă (Reducerea la forma cea mai simplă). *Cu ajutorul schimbării de funcție*

$$Z(u, v) = e^{\alpha u + \beta v} W(u, v),$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alese potrivit, ecuațiile pot fi aduse la formele cele mai simple

$$W''_{uv} + F_1 W = 0$$

$$W''_{u^2} + E W'_v = 0 \quad \text{sau} \quad W''_{u^2} + F_1 W = 0$$

$$W''_{u^2} + W''_{v^2} + F_2 W = 0.$$

Demonstrație. Exprimăm pe Z și derivatele sale cu ajutorul lui W . Avem

$$Z'_u = e^{\alpha u + \beta v} (\alpha W + W'_u)$$

$$Z'_v = e^{\alpha u + \beta v} (\beta W + W'_v)$$

$$Z''_{u^2} = e^{\alpha u + \beta v} (\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2})$$

$$Z''_{v^2} = e^{\alpha u + \beta v} (\beta^2 W + 2\beta W'_v + W''_{v^2})$$

$$Z''_{uv} = e^{\alpha u + \beta v} (\alpha\beta W + \beta W'_u + \alpha W'_v + W''_{uv}).$$

I. Cazul ecuației de tip hiperbolic. Înlocuind ceea ce am calculat mai sus în ecuația $Z''_{uv} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ rezultă

$$e^{\alpha u + \beta v} (\alpha\beta W + \beta W'_u + \alpha W'_v + W''_{uv}) + D e^{\alpha u + \beta v} (\alpha W + W'_u) + E e^{\alpha u + \beta v} (\beta W + W'_v) + F e^{\alpha u + \beta v} W = 0.$$

După ce împărțim cu exponențiala și ordonăm după derivatele parțiale avem

$$W''_{uv} + (\beta + D)W'_u + (\alpha + E)W'_v + (\alpha\beta + \alpha D + \beta E + F)W = 0.$$

Alegând $\alpha = -E$ și $\beta = -D$ coeficientul lui W devine $F_1 = F - ED$ și am adus astfel ecuația la forma cea mai simplă. Să observăm că nu puteam pune condițiile $\beta + D = 0$ și $\alpha\beta + \alpha D + \beta E + F = 0$ pentru că am fi avut $\beta = -D$ și $-ED + F = 0$ iar a doua relație nu mai conține necunoscuta și în general este incompatibilă.

II. Cazul ecuației de tip parabolic. După schimbarea de funcție anunțată în enunț, ecuația $Z''_{u^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ devine (după simplificare și ordonarea termenilor)

$$W''_{u^2} + (2\alpha + D)W'_u + E W'_v + (\alpha^2 + \alpha D + \beta E + F)W = 0.$$

Punem condiția ca $2\alpha + D = 0$ și $\alpha^2 + \alpha D + \beta E + F = 0$. Există două cazuri: 1) $E \neq 0$. Sistemul este compatibil cu soluția $\alpha = -D/2$ și $\beta = (F - D^2/4)/E$ și se ajunge astfel la prima formă simplă. 2) $E = 0$. În acest caz β nu apare în ecuație și alegem $\alpha = -D/2$ și $F_1 = F - D^2/4$ și obținem a doua formă simplă.

III. Cazul ecuației de tip eliptic. Ecuația $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + DZ'_u + EZ'_v + FZ = 0$ se transformă în

$$W''_{u^2} + W''_{v^2} + (2\alpha + D)W'_u + (2\beta + E)W'_v + (\alpha^2 + \beta^2 + D\alpha + E\beta + F)W = 0.$$

Alegem $\alpha = -D/2$ și $\beta = -E/2$ și obținem forma cea mai simplă a ecuației cu $F_1 = F - (D^2 + E^2)/4$. Se pot alege și altfel coeficienții obținându-se $W''_{u^2} + W''_{v^2} + E_1W'_v = 0$ sau $W''_{u^2} + W''_{v^2} + D_1W'_u = 0$. \square

5.20 Exemplu. Să se determine soluția ecuației $4z''_{x^2} + 8z''_{xy} + 4z''_{y^2} + 12z'_x + 12z'_y + 9z = 0$.

Ecuația caracteristică este $4y'^2 - 8y' + 4 = 0$. Discriminantul ecuației de gradul doi este $\Delta = 0$. Soluția dublă a ecuației este $y' = 1$, care prin integrare ne dă $y = x + C_1$. Notăm $u = x$ și $v = y - x$.

$$\begin{aligned} z'_x &= Z'_u - Z'_v \\ z'_y &= Z'_v \\ z''_{x^2} &= Z''_{u^2} - 2Z''_{uv} + Z''_{v^2} \\ z''_{xy} &= Z''_{uv} - Z''_{v^2} \\ z''_{y^2} &= Z''_{v^2}. \end{aligned}$$

Ecuația devine $4Z''_{u^2} + 12Z'_u + 9Z = 0$. Pentru a o aduce la forma cea mai simplă scriem $Z(u, v) = e^{\alpha u + \beta v} W(u, v)$. Avem

$$\begin{aligned} Z'_u &= e^{\alpha u + \beta v} (\alpha W + W'_u) \\ Z''_{u^2} &= e^{\alpha u + \beta v} (\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2}). \end{aligned}$$

Ecuația se transformă în $4W''_{u^2} + (8\alpha + 12)W'_u + (4\alpha^2 + 12\alpha + 9)W = 0$. Alegem $\alpha = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$. Atunci ecuația se scrie $W''_{u^2} = 0$. Integrând rezultă $W'_u = f(v)$. Dacă mai integrăm o dată obținem $W(u, v) = uf(v) + g(v)$. Așadar, $Z(u, v) = e^{-\frac{3u}{2}} [uf(v) + g(v)]$. Soluția ecuației inițiale este

$$z(x, y) = e^{-\frac{3x}{2}} [xf(y-x) + g(y-x)].$$

5.21 Exemplu. Să se determine soluția ecuației $3z''_{x^2} - 5z''_{xy} - 2z''_{y^2} + 3z'_x + z'_y = 0$.

Ecuația caracteristică este $3y'^2 + 5y' - 2 = 0$. Discriminantul ecuației de gradul doi este $\Delta = 49$. Soluțiile ecuației sunt $y' = -2$ și $y' = 1/3$. Prin integrare rezultă $y = -2x + C_1$ și

$3y = x + C_2$. Notăm $u = y + 2x$ și $v = 3y - x$ și $z(x, y) = Z(u, v)$. Avem

$$z'_x = Z'_u \cdot u'_x + Z'_v \cdot v'_x = 2Z'_u - Z'_v$$

$$z'_y = Z'_u \cdot u'_y + Z'_v \cdot v'_y = Z'_u + 3Z'_v$$

$$z''_{x^2} = 4Z''_{u^2} - 4Z''_{uv} + Z''_{v^2}$$

$$z''_{xy} = 2Z''_{u^2} + 5Z''_{uv} - 3Z''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = Z''_{u^2} + 6Z''_{uv} + 9Z''_{v^2}.$$

Ecuția devine $Z''_{uv} - \frac{1}{7}Z'_u = 0$. Notăm $w = Z'_u$. Avem $w'_v - \frac{1}{7}w = 0$. Această ecuație diferențială liniară de ordinul întâi are soluția $w = Ce^{\frac{v}{7}}$. Constanta nu depinde de v dar poate depinde de u și atunci luăm $w = f(u)e^{\frac{v}{7}}$. Integrând după u se obține $Z(u, v) = e^{\frac{v}{7}}F(u) + g(v)$. Soluția generală a ecuației inițiale este

$$z(x, y) = e^{\frac{3y-x}{7}} [F(y + 2x) + G(3y - x)].$$

5.22 Exemplu. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuația $z''_{x^2} - z''_{xy} + 5z''_{y^2} + z'_x = 0$.

Ecuția caracteristică este $y'^2 + y' + 5 = 0$, cu $\Delta = -19$. Soluțiile acestei ecuații sunt $y' = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$. Rezultă $y = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}x + C$, adică $2y + x \pm ix\sqrt{19} = C$. Notăm $u = 2y + x$ și $v = x\sqrt{19}$. Avem

$$z'_x = Z'_u + Z'_v \cdot \sqrt{19}$$

$$z'_y = Z'_u \cdot 2$$

$$z''_{x^2} = Z''_{u^2} + 2\sqrt{19}Z''_{uv} + 19Z''_{v^2}$$

$$z''_{xy} = 2Z''_{u^2} + 2\sqrt{19}Z''_{uv}$$

$$z''_{y^2} = 4Z''_{u^2}.$$

Ecuția devine $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + \frac{1}{19}Z'_u + \frac{1}{\sqrt{19}}Z'_v = 0$. Scriem $Z(u, v) = e^{\alpha u + \beta v}W(u, v)$. Avem

$$Z'_u = e^{\alpha u + \beta v}(\alpha W + W'_u)$$

$$Z'_v = e^{\alpha u + \beta v}(\beta W + W'_v)$$

$$Z''_{u^2} = e^{\alpha u + \beta v}(\alpha^2 W + 2\alpha W'_u + W''_{u^2})$$

$$Z''_{v^2} = e^{\alpha u + \beta v}(\beta^2 W + 2\beta W'_v + W''_{v^2}).$$

Cu acestea ecuația se scrie

$$W''_{u^2} + W''_{v^2} + (2\alpha + \frac{1}{19})W'_u + (2\beta + \frac{1}{\sqrt{19}})W'_v + (\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha}{19} + \frac{\beta}{\sqrt{19}})W = 0.$$

Alegem $\alpha = -\frac{1}{38}$ și $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{19}}$. Ecuția se transformă în $W''_{u^2} + W''_{v^2} - \frac{5}{19}W = 0$.

Ecuatiile fizicii matematice

Ecuatii de tip hiperbolic

1. **Oscilațiile libere ale unei coarde vibrante finite (Ecuația undelor).** Presupunem că o coardă de lungime ℓ este fixată la extremitățile ei și vibrează în planul XOZ . Coordonata z este funcție de x și de momentul de timp t și satisface ecuația

$$z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2}.$$

Condițiile la limită sunt

$$z(0, t) = z(\ell, t) = 0,$$

ele exprimând faptul că la capete coarda este fixată. Condițiile inițiale sunt

$$z(x, 0) = f(x), \quad \text{și} \quad z'_t(x, 0) = g(x)$$

și ele ne dau poziția $f(x)$ și viteza $g(x)$ a punctului de abscisă x la momentul inițial $t = 0$.

2. **Oscilațiile întreținute ale unei coarde vibrante finite.** În condițiile de mai sus, dacă asupra coardei acționează forțe exterioare atunci ecuația devine

$$z''_{t^2} - \nu^2 \cdot z''_{x^2} = h(x, t).$$

Condițiile la limită se păstrează

$$z(0, t) = z(\ell, t) = 0,$$

și de asemenea condițiile inițiale

$$z(x, 0) = f(x), \quad \text{și} \quad z'_t(x, 0) = g(x).$$

3. **Oscilațiile libere ale unei coarde vibrante infinite.** Dacă coarda este infinită, ecuația rămâne aceeași

$$z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2}$$

și condițiile inițiale

$$z(x, 0) = f(x), \quad \text{și} \quad z'_t(x, 0) = g(x).$$

4. **Ecuația telegrafistilor.** Oscilațiile electrice în conductori conduc la ecuația

$$i''_{x^2} = CLi''_{t^2} + (CR + GL)i'_t + GRi$$

unde i este intensitatea curentului în conductor, C și G sunt capacitatea și conductanța de scăpări raportate la unitatea de lungime, R și L rezistența și inductanța conductorului. O ecuație analoagă are loc și pentru tensiune.

Ecuatii de tip parabolic

1. **Ecuatia caldurii în bara finită.** Distribuția temperaturii u într-o bară de lungime ℓ , depinde de abscisa x și timpul t și verifică ecuația

$$a^2 u''_{x^2} = u'_t.$$

Se presupune că cele două capete ale barei sunt menținute la temperatura 0, deci au loc condițiile la limită

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0,$$

și se cunoaște distribuția temperaturii în bară la momentul $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x).$$

2. **Ecuatia caldurii în bara infinită.** Distribuția temperaturii u într-o bară infinită verifică aceeași ecuație

$$a^2 u''_{x^2} = u'_t$$

și condiția inițială

$$u(x, 0) = f(x).$$

Ecuatii de tip eliptic

1. **Ecuatia lui Laplace.** Ecuatia lui Laplace în plan este

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

și în spațiu

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0.$$

Soluțiile ecuației lui Laplace se numesc **funcții armonice**. Două dintre cele mai importante soluții sunt $\frac{1}{r}$ în spațiu și $\ln r$ în plan, unde r este lungimea vectorului de poziție ($r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ în spațiu și $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ în plan). Am notat cu Δ operatorul lui Laplace.

2. **Ecuatia lui Poisson** Ecuatia de ordinul doi neomogenă

$$\Delta u = f.$$

Problema lui Dirichlet este rezolvarea ecuației lui Poisson cunoscând valorile pe frontiera C a unui domeniu D :

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_C = g. \end{cases}$$

Problema lui Neumann este rezolvarea ecuației lui Poisson cunoscând valorile derivatei în direcția normalei la frontieră:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_C = g. \end{cases}$$

Alte ecuații

1. **Ecuațiile Navier-Stokes** Ecuațiile Navier-Stokes descriu mișcarea unui fluid în \mathbb{R}^n (cu $n = 2$ sau $n = 3$). Vectorul vitezei $u(r, t) = (u_i(r, t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ și presiunea $p(r, t) \in \mathbb{R}$ sunt definite într-un punct $r \in \mathbb{R}^n$ și la momentul de timp $t \geq 0$. Ecuațiile sunt

$$(u_i)'_t + \sum_{j=1}^n u_j \cdot (u_i)'_{x_j} = \nu \Delta u_i - p'_{x_i} + f_i(r, t), \quad r \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i)'_{x_i} = 0, \quad r \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

$$u(r, 0) = g(r), \quad r \in \mathbb{R}^n$$

unde $f(r)$ este dat, $f_i(r, t)$ sunt componentele unei forțe externe (de exemplu: gravitația), $\nu > 0$ este vâscozitatea fluidului și $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ este operatorul lui Laplace în variabilele spațiale.

2. **Ecuația lui Burger** Această ecuație care provine din ecuațiile lui Navier-Stokes modelează unde-șoc (de exemplu valuri care se sparg) și are ecuația

$$u'_t + u \cdot u'_x = \nu \cdot u''_{x^2},$$

unde u este viteza fluidului și ν vâscozitatea. Dacă vâscozitatea este neglijată $\nu = 0$ atunci ecuația devine

$$u'_t + u \cdot u'_x = 0.$$

3. **Ecuația lui Schrödinger.** În cadrul mecanicii cuantice, în studiul comportării electronilor funcția de undă Ψ satisface

$$i\hbar \Psi'_t(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(r, t) + V(r) \Psi(r, t)$$

unde i este unitatea imaginară, \hbar constanta lui Planck, $r = (x, y, z)$ poziția particulei în spațiu, V este energia potențială a particulei, m masa particulei, iar Δ este operatorul lui Laplace.

Metoda separării variabilelor

Această metodă a fost dezvoltată de Daniel Bernoulli și sistematizată de Fourier și este aplicabilă pentru unele tipuri de ecuații cu derivate parțiale pentru aflarea de soluții particulare sub forma unor serii Fourier. Vom exemplifica această metodă pentru ecuația undelor și ecuația căldurii.

Ecuația undelor

Vom rezolva problema

$$\begin{cases} z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2} \\ z(0, t) = z(\ell, t) = 0 \\ z(x, 0) = f(x), z'_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

căutând soluția sub forma

$$z(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Aceasta ne conduce la $X(x)T''(t) = \nu^2 X''(x)T(t)$ sau $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}$. Fiecare din aceste rapoarte este egal cu o constantă, să spunem C (aceasta rezultă din faptul că dacă derivăm egalitatea în raport cu x atunci primul raport derivat este egal cu 0, deci are valoare constantă).

Obținem sistemul

$$\begin{cases} X''(x) - C \cdot X(x) = 0 \\ T''(t) - C\nu^2 \cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Condițiile la limită ne dau $X(0) = X(\ell) = 0$. Să rezolvăm ecuația diferențială liniară de ordinul doi $X''(x) - C \cdot X(x) = 0$. După valoarea constantei C distingem trei cazuri:

1. $C = \lambda^2$. Soluția este $X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ iar condițiile la limită ne dau $C_1 + C_2 = 0$ și $C_1 e^{\lambda \ell} + C_2 e^{-\lambda \ell} = 0$, care ne conduc la $C_1 = C_2 = 0$ și deci $X(x) = 0$.

2. $C = 0$. Soluția este $X(x) = C_1 x + C_2$ iar condițiile la limită ne dau $C_2 = 0$ și $C_1 \ell + C_2 = 0$, care ne conduc la $C_1 = C_2 = 0$, care ne dau din nou soluția nulă $X(x) = 0$.

3. $C = -\lambda^2$. Soluția este $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Condițiile la limită $C_1 = 0$ și $C_1 \cos \lambda \ell + C_2 \sin \lambda \ell = 0$ ne dau soluții nebanale dacă $\lambda \ell = n\pi$, deci pentru șirul $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$. Se obțin soluțiile $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, pentru $n = 1, 2, \dots$. Ecuația a doua $T''(t) + \lambda_n^2 \nu^2 T(t) = 0$ are soluția generală $T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi \nu}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi \nu}{\ell} t$. Înseamnă că ecuația are soluțiile particulare $z_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ și pentru că ecuația este liniară se poate aplica metoda suprapunerii soluțiilor, rezultând că

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi \nu}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi \nu}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

este soluție. Vom determina constantele A_n și B_n din condițiile inițiale. Se impun condițiile

$$\begin{aligned} f(x) &= z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \\ g(x) &= z'_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi \nu}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \end{aligned}$$

Dezvoltând în serie de sinusuri pe $(0, \ell)$ funcțiile f și g avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, & f_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, & g_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx. \end{aligned}$$

Prin identificare se obține

$$A_n = f_n \quad \text{și} \quad B_n = \frac{\ell}{n\pi \nu} g_n.$$

Soluția problemei corzii vibrante finite este

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos \frac{n\pi \nu}{\ell} t + \frac{\ell}{n\pi \nu} g_n \sin \frac{n\pi \nu}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

5.23 Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} z''_{t^2} - z''_{x^2} = 0 \\ z(0, t) = z(2, t) = 0 \\ z(x, 0) = 1 - |x - 1|, \quad z'_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Avem $\nu = 1$, $\ell = 2$, $g_n = 0$ iar f_n se determină din

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx = \int_0^2 (1 - |x - 1|) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx \\ &= \int_0^1 x \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx + \int_1^2 (2 - x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx \\ &= -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx - \frac{2(2-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Se obține soluția

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

Ecuția căldurii

Rezolvăm problema

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \cdot u''_{x^2} \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

căutând soluția sub forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Aceasta ne conduce la $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$ sau $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = C$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} X''(x) - C \cdot X(x) = 0 \\ T'(t) - Ca^2 \cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Condițiile la limită ne dau $X(0) = X(\ell) = 0$. Să rezolvăm ecuația diferențială liniară de ordinul doi $X''(x) - C \cdot X(x) = 0$. Ca și în cazul ecuației undelor (vezi calculele) se obțin soluțiile $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ pentru $C = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$. A doua ecuație devine

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{\ell^2} T(t) = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{\ell^2} t}.$$

Fiindcă $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ sunt soluții, iar ecuația căldurii este liniară atunci și

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

este soluție, în condițiile în care seria este convergentă și derivabilă de două ori termen cu termen. Din condiția inițială avem

$$f(x) = z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Dezvoltând funcția f în serie de sinusuri și identificând coeficienții se obține

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx.$$

5.24 Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} u'_t = 9u''_{x^2} \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin \pi x + 2 \sin 3\pi x. \end{cases}$$

Avem $a = 3$ și $\ell = 3$. Coeficienții A_n se obțin prin identificare din relația

$$\sin \pi x + 2 \sin 3\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{3} x.$$

Rezultă $A_3 = 1$ și $A_9 = 2$, iar restul coeficienților sunt nuli. Soluția va fi

$$u(x, t) = e^{-9\pi^2 t} \sin \pi x + 2e^{-81\pi^2 t} \sin 3\pi x.$$

5.3 Exerciții

Probleme propuse

5.1. Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$(y + z) \cdot u'_x + (x + z) \cdot u'_y + (x + y) \cdot u'_z = 0.$$

5.2. Să se determine funcția u care are proprietățile

$$x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + (x - y) \cdot u'_z = 0, \quad u(x, y, 1) = x + y.$$

5.3. Să se determine soluția generală a ecuației

$$xy \cdot u'_x - y^2 \cdot u'_y + (1 + x^2) \cdot u'_z = 0,$$

iar apoi soluția care verifică $u(1, y, z) = y + z$.

5.4. Să se determine soluția generală a ecuației

$$z \cdot z'_x - z \cdot z'_y = y - x.$$

5.5. Să se determine soluția generală a ecuației

$$z \cdot z'_x + (z^2 - x^2) \cdot z'_y + x = 0.$$

Care este suprafața integrală care se sprijină pe curba $y = x^2$, $z = 2x$?

5.6. Să se determine soluția generală a ecuației

$$x \cdot z'_x + (xz + y) \cdot z'_y = z.$$

Care este suprafața integrală care se sprijină pe curba $x + y = 2z$, $xz = 1$?

5.7. Să se aducă la forma canonică ecuația $y^2 \cdot z''_{x^2} + x^2 \cdot z''_{y^2} + x \cdot z'_x = 0$.

5.8. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuația

$$z''_{x^2} + 2z''_{xy} + 5z''_{y^2} + 4z'_x - 12z'_y = 0.$$

5.9. Să se aducă la forma cea mai simplă ecuația $z''_{xy} - 3z''_{y^2} + z'_x = 0$.

5.10. Să se determine soluția generală a ecuației $z''_{x^2} - 2z''_{xy} - 3z''_{y^2} = 0$.

5.11. Să se determine soluția generală a ecuației $z''_{x^2} + z''_{y^2} - 2z''_{xy} = 0$.

5.12. Să se determine soluția generală a ecuației

$$z''_{x^2} + 4z''_{xy} + 4z''_{y^2} - 9z'_x - 18z'_y + 18z = 0.$$

5.13. Să se rezolve problema mixtă

$$z''_t = z''_{x^2}, \quad z(0, t) = z(5, t) = 0, \quad z(x, 0) = \sin \pi x, \quad z'_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{5}.$$

5.14. Să se rezolve problema mixtă

$$u'_t = 4u''_{x^2}, \quad u(0, t) = u(6, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x + \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Indicații la problemele propuse

5.1. $u = F\left(\frac{x-y}{x-z}, \frac{y-z}{x-z}\right)$.

5.2. Două integrale prime sunt $\frac{x}{y} = C_1$ și $x - y - z = C_2$. Din condițiile $z = 1$ și $u = x + y$ rezultă $u = \frac{(C_2+1)(C_1+1)}{C_1-1}$, adică $u = \frac{(x-y-z+1)(x+y)}{x-y}$.

5.3. Două integrale prime sunt $xy = C_1$ și $xyz - x - \frac{x^3}{3} = C_2$. Soluția generală este

$$u = F\left(xy, xyz - x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Din $x = 1$ și $u = y + z$ rezultă $u = C_1 + \frac{3C_2+4}{3C_1}$, adică $u = xy + \frac{3xyz-3x-x^3+4}{3xy}$.

5.4. Două integrale prime sunt $x + y = C_1$ și $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Soluția generală a ecuației este descrisă implicit de ecuația $F(x + y, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

5.5. Două integrale prime sunt $x^2 + z^2 = C_1$, $y - xz = C_2$. Din condițiile date se obține $5C_2 + C_1 = 0$, adică $x^2 + z^2 + 5(y - xz) = 0$.

5.6. Două integrale prime sunt $\frac{x}{z} = C_1$, $\frac{xz-y}{z} = C_2$. Obținem relația $C_1 = (2 + C_2 - C_1)^2$, de unde rezultă $xz = (2z + xz - x - y)^2$.

5.7. $u = y^2$, $v = x^2$, $Z''_{u^2} + Z''_{v^2} + \frac{1}{2u}Z'_u + (\frac{1}{2v} + \frac{1}{2u})Z'_v = 0$.

5.8. $u = y - x$, $v = 2x$, $\alpha = 1/2$ și $\beta = -1$, $W''_{u^2} + W''_{v^2} - 5W = 0$.

5.9. Se schimbă rolul lui x cu y . Obținem ecuația $-3(x')^2 - x' = 0$, de unde $u = x$, $v = 3x + y$, $\alpha = -3$, $\beta = -1$, $W''_{uv} - 3W = 0$.

5.10. $u = 3x + y$, $v = y - x$, $Z''_{uv} = 0$, $z(x, y) = F(3x + y) + G(y - x)$.

5.11. $u = x$, $v = y + x$, $Z''_{u^2} = 0$, $z(x, y) = xf(y + x) + g(y + x)$.

5.12. $u = x$, $v = y - 2x$, $Z''_{u^2} - 9Z'_u + 18Z = 0$, $z = f(y - 2x)e^{3x} + g(y - 2x)e^{6x}$.

5.13. $\nu = 1$, $\ell = 5$, $z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi t}{5} + B_n \sin \frac{n\pi t}{5}) \sin \frac{n\pi x}{5}$, $A_5 = 1$, $B_1 = 5/\pi$.

5.14. $a = 2$, $\ell = 6$, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{n\pi x}{6}$, $A_3 = 1$, $A_6 = 1$.

Capitolul 6

Numere complexe

6.1 Operații cu numere complexe

6.1 Definiție. Mulțimea \mathbb{R}^2 a tuturor perechilor ordonate de numere reale, pe care o înzestram cu operațiile de adunare și înmulțire

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

formează un corp comutativ numit **corpul numerelor complexe**, pe care îl vom nota cu \mathbb{C} . Elementele lui \mathbb{C} se numesc **numere complexe**.

6.2 Notăție. Observăm că $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ și $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$ ceea ce ne justifică faptul că mulțimea $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ este un subcorp al lui \mathbb{C} care este izomorf cu mulțimea numerelor reale \mathbb{R} . Acest lucru ne arată că putem face identificarea dintre perechea $(a, 0)$ și numărul real a .

Astfel, orice număr complex îl putem scrie

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b(0, 1).$$

Vom nota, așa cum se obișnuiește, perechea $(0, 1)$ cu i . Fiindcă $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ avem $i^2 = -1$, iar acesta este motivul pentru care uneori se folosește notația $i = \sqrt{-1}$. Așadar numărul complex $z = (a, b)$ se scrie

$$z = a + bi.$$

Această formă o vom numi **forma algebrică** a numărului complex. Numerele reale a și b se numesc **partea reală** și **partea imaginară** a numărului complex z și vom nota

$$\operatorname{Re} z = a \quad \text{și} \quad \operatorname{Im} z = b.$$

6.3 Observație. Numerele complexe pot fi reprezentate de punctele unui plan. Fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex numit **afixul** punctului. Astfel punctul de coordonate

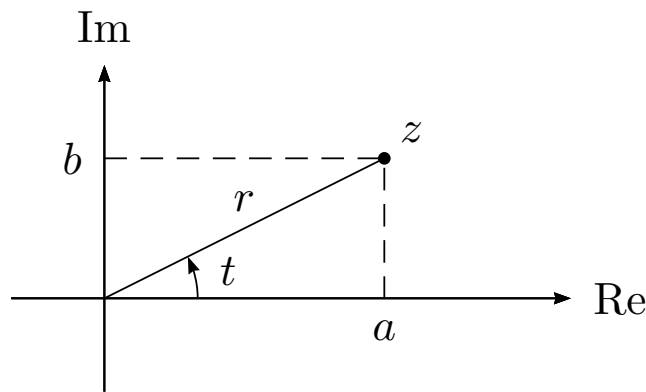


Figura 6.1: Reprezentarea numărului complex $z = a + bi = r(\cos t + i \sin t)$

(a, b) are afixul $z = a + bi$. Punctele de pe axa orizontală au afixele numere reale și de aceea axa orizontală se va numi **axa reală**. Axa verticală se va numi **axă imaginară**, pe ea fiind reprezentate numerele pur imaginare ib .

6.4 Observație. Fie M punctul care are afixul $z = a + ib$. Distanța de la origine la punctul M o vom nota cu r , iar unghiul pe care vectorul OM îl face cu partea pozitivă a axei reale, măsurat în radiani în sens invers acelor de ceasornic îl vom nota cu t . Fiecare punct din plan poate fi localizat știind mărimile r și t numite **coordonate polare**. Avem relațiile de legătură între coordonatele carteziene și coordonatele polare

$$a = r \cos t$$

$$b = r \sin t.$$

Obținem **forma trigonometrică** a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$, căci

$$z = a + bi = r \cos t + ir \sin t = r(\cos t + i \sin t).$$

Numărul r se numește **modulul** numărului complex z și notează $|z|$. Avem

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Numărul t se numește **argumentul** numărului complex z și se notează $\text{Arg } z$. Să observăm că datorită periodicității funcției $\cos t$ și $\sin t$ argumentul poate fi determinat abstractie făcând de un multiplu întreg de 2π . Avem

$$t = \text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & a < 0. \end{cases}$$

Pentru cazul în care $a = 0$ avem $t = \pi/2$ dacă $b > 0$ și $t = -\pi/2$ dacă $b < 0$. Pentru numărul complex $z = 0$ ($a = 0$ și $b = 0$) argumentul t este nedeterminat. Valoarea argumentului din

intervalul $[0, 2\pi)$ se notează $\arg z$ și se numește valoare principală a argumentului. În general avem $\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Valoarea principală a argumentului se determină astfel:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & (a, b) \text{ în cadranul 1} \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & (a, b) \text{ în cadranele 2 și 3} \\ 2\pi + \arctg \frac{b}{a}, & (a, b) \text{ în cadranul 4.} \end{cases}$$

6.5 Exemplu. Mai jos sunt câteva exemple de numere complexe scrise în formă algebrică și trigonometrică

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0 \\ -2 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) \\ i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ -3i &= 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ 1 + 2i &= \sqrt{5} [\cos(\arctg 2) + i \sin(\arctg 2)] \\ -2 + 2i &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ 1 - i &= \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

6.6 Observație. Deoarece $|z_1|, |z_2|$ și $|z_1 + z_2|$ sunt laturile unui triunghi are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

numită inegalitatea triunghiului. Ca o consecință are loc și

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_2 - z_1|.$$

6.7 Observație. Scrierea sub forma trigonometrică este avantajoasă când efectuăm operații de înmulțire cu numere complexe. Aceasta pentru că dacă

$$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$$

atunci

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)]. \end{aligned}$$

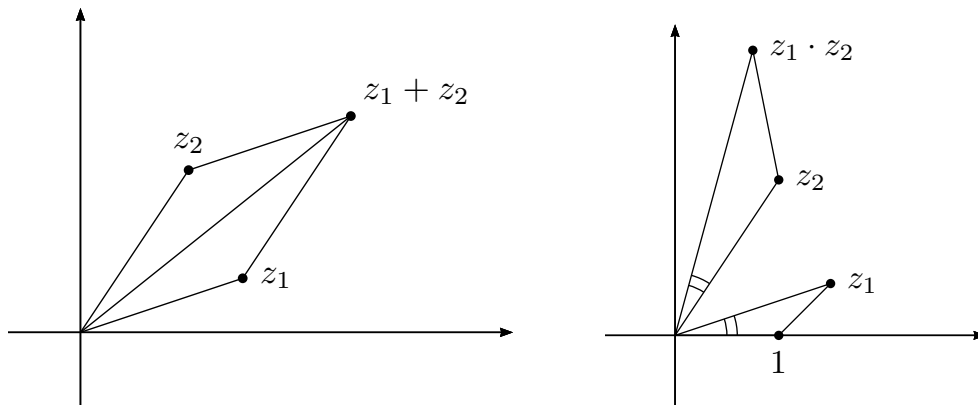


Figura 6.2: Adunarea și înmulțirea numerelor complexe

Astfel când se înmulțesc două numere complexe, modulul produsului este produsul modulelor, iar argumentul produsului este suma argumentelor:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Prin înmulțire repetată se obține formula $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$. În particular pentru $r = 1$ rezultă formula lui Moivre

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

6.8 Exemplu. Să se calculeze $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.

Scriem pe $z = 1 + i\sqrt{3}$ în forma trigonometrică. Avem $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ și $\text{Arg } z = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\begin{aligned} z^{100} &= |z|^{100} \left(\cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \right) = 2^{100} \left[\cos \left(32\pi + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(32\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2^{100} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2^{100} \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2^{99}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

6.9 Exemplu. Trecând la argumente în egalitatea $(1 + ix)(1 + iy) = 1 - xy + i(x + y)$ deducem formula $\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$ și în particular $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

6.10 Definiție. Conjugatul numărului complex $z = a + bi$ este numărul complex

$$\bar{z} = a - bi.$$

6.11 Propoziție. *Principalele proprietăți legate de conjugatul unui număr sunt*

- a) $\overline{\overline{z}} = z$
 b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
 c) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2}$
 d) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
 e) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

6.12 Exemplu. Să se demonstreze că $|1 - z_1 \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

Vom folosi proprietățile conjugatului și avem

$$\begin{aligned} |1 - z_1 \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - z_1 \overline{z_2}) \overline{1 - z_1 \overline{z_2}} - (z_1 - z_2) \overline{z_1 - z_2} \\ &= (1 - z_1 \overline{z_2})(1 - \overline{z_1} z_2) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= 1 - \overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} \cdot \overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2} \\ &= 1 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ &= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2). \end{aligned}$$

6.13 Observație. Pentru a împărți numărul z_1 la $z_2 \neq 0$ determinăm numărul complex z astfel încât $z_1 = z_2 \cdot z$. Înmulțind cu conjugatul lui z_2 avem

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}$$

iar în formă trigonometrică acesta se scrie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)].$$

6.2 Topologia planului complex

6.14 Observație. Să observăm că funcția $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

este o metrică pe \mathbb{C} . Topologia indusă de această metrică este topologia pe care o vom adopta pe \mathbb{C} .

6.15 Notație. Discul deschis cu centrul în a și de rază r va fi notat

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

iar discul închis cu centrul în a și de rază r va fi notat

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

6.16 Definiție. O mulțime $G \subset \mathbb{C}$ se numește **deschisă** dacă pentru orice $z \in G$ există un număr real $r > 0$ astfel încât $D(z, r) \subset G$.

O mulțime $F \subset \mathbb{C}$ se numește **închisă** dacă complementara ei $\mathbb{C} \setminus F$ este o mulțime deschisă.

O submulțime $A \subset \mathbb{C}$ se numește **mărginită** dacă există $M > 0$ astfel încât $|z| < M$ pentru orice $z \in A$.

O mulțime închisă și mărginită se numește **compactă**.

6.17 Definiție. Un șir de numere complexe (z_n) este **convergent** dacă există un număr complex z cu proprietatea că șirul de numere reale $d_n = |z_n - z|$ este convergent la 0. Numărul z se va numi limita șirului (z_n) și vom scrie $z_n \rightarrow z$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Un șir se va numi **divergent** dacă nu este convergent.

6.18 Propoziție. Un șir de numere complexe $z_n = a_n + ib_n$ converge la numărul complex $z = a + ib$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Demonstrație. Folosind inegalitățile

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z| \\ |b_n - b| &\leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z| \end{aligned}$$

deducem cu ajutorul teoremei cleștelui că dacă $z_n \rightarrow z$ atunci $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow b$.

Invers, dacă $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow b$ atunci șirul

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$$

converge la zero. □

6.19 Exemplu. Să considerăm șirul $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, unde z este un număr complex. Să calculăm limita acestui șir.

Fie $z = a + bi$. Avem $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$. Deoarece $1 + \frac{a}{n} \rightarrow 1$ putem presupune că $1 + \frac{a}{n} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Forma trigonometrică a numărului complex $1 + z/n$ este

$$1 + \frac{z}{n} = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2} (\cos t_n + i \sin t_n)$$

unde $t_n = \arctg \frac{b}{a+n}$. Deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2\frac{a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)} = e^a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot t_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nb}{a+n} \left(\frac{\arctg \frac{b}{a+n}}{\frac{b}{a+n}}\right) = b \end{aligned}$$

va rezulta că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| (\cos nt_n + i \sin nt_n) = e^a (\cos b + i \sin b).$$

6.3 Funcții elementare

6.20 Definiție. Funcția exponențială $\exp(z)$ sau e^z se definește prin

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

pentru orice număr complex $z = a + bi$.

6.21 Observație. Pentru $a = 0$ obținem **formula lui Euler** $e^{ib} = \cos b + i \sin b$. Pentru $-b$ aceasta se scrie $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$. De aici se obțin formulele lui Euler

$$\begin{aligned}\cos b &= \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ \sin b &= \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.\end{aligned}$$

Formula lui Euler ne permite să scriem orice număr complex în **forma exponențială**

$$z = |z|e^{i \arg z}.$$

De exemplu, este adevărată formula $1 = e^{2\pi i}$.

6.22 Observație. Să mai observăm că funcția exponențială astfel definită verifică proprietatea obișnuită a funcției exponențiale $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. De aici rezultă relația $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ ceea ce ne arată că funcția exponențială este periodică de perioadă $2\pi i$.

6.23 Exemplu. O expresie care apare mult în inginerie este următoarea

$$a \cos \lambda t + b \sin \lambda t = A \cos(\lambda t - \phi), \quad \text{unde } a + bi = Ae^{i\phi}.$$

Pentru a demonstra aceasta să observăm că

$$\begin{aligned}a \cos \lambda t + b \sin \lambda t &= \operatorname{Re} [(a - bi) \cdot (\cos \lambda t + i \sin \lambda t)] \\ &= \operatorname{Re} (Ae^{-i\phi} \cdot e^{i\lambda t}) = \operatorname{Re} (Ae^{i(\lambda t - \phi)}) \\ &= A \cos(\lambda t - \phi).\end{aligned}$$

6.24 Definiție. Definim funcțiile **sinus și cosinus** pe \mathbb{C}

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.\end{aligned}$$

și funcțiile **sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic** pe \mathbb{C}

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}.\end{aligned}$$

6.25 Observație. Din definiția funcțiilor trigonometrice și a celor hiperbolice rezultă

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z & \cos iz &= \operatorname{ch} z \\ \operatorname{sh} iz &= i \sin z & \sin iz &= -i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Formulele cu \sin și \cos din cazul real rămân adevărate. De exemplu

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \cdot \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}}{4i} \\ &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \end{aligned}$$

Dar există unele proprietăți ale funcțiilor \sin și \cos care sunt adevărate pe \mathbb{R} fără să fie adevărate și pe \mathbb{C} : funcțiile \sin și \cos sunt mărginite pe \mathbb{R} , dar pe \mathbb{C} sunt nemărginite. Într-adevăr, pentru că $\lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{ch} b = \infty$ și $\cos ib = \operatorname{ch} b$ rezultă \cos este nemărginită. Din $\lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{sh} b = \infty$ și $\sin ib = -i \operatorname{sh} b$ rezultă \sin este nemărginită.

6.26 Definiție. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ un număr complex. Numim **logaritm** al lui z orice soluție a ecuației

$$e^w = z.$$

6.27 Propoziție. Mulțimea soluțiilor ecuației $e^w = z$, unde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ este

$$\operatorname{Log} z = \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \}.$$

Demonstrație. Scriind numărul z în forma exponențială $z = re^{it}$ și $w = u + iv$ în forma algebrică avem

$$e^u e^{iv} = e^{u+iv} = e^w = z = re^{it},$$

de unde rezultă $e^u = r$ și $v = t + 2k\pi$, adică $u = \ln r = \ln |z|$ și $v = \arg z + 2k\pi$. \square

6.28 Observație. Spre deosebire de cazul real, unde un număr pozitiv are un singur logaritm, în cazul complex un număr nenul are o infinitate de logaritmi. Astfel în complex funcția Log este o funcție multivocă (adică asociază unui singur număr complex o mulțime de numere complexe). Funcția obținută pentru o valoare fixată a lui k se numește **ramură** sau **determinare** a funcției $\operatorname{Log} z$. Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ se numește ramură principală și se notează

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

unde $\arg z$ ia valori în intervalul $[0, 2\pi)$.

Funcțiile multivoce nu mai pot fi privite în același fel în care sunt privite funcțiile univoce. De exemplu să presupunem că obligăm variabila z să descrie un cerc cu centrul în origine în

sens trigonometric. Să observăm că atunci când variabila ajunge de unde a plecat argumentul ei a crescut cu 2π . Deși am ajuns în același punct din plan valoarea funcției este diferită.

Pentru a corecta această problemă să presupunem că facem o "tăietură" în planul complex în partea pozitivă a axei reale de la punctul $z = 0$ până la $z = \infty$ și convenim ca variabila z să nu poată trece peste această tăietură. În acest fel se sacrifică continuitatea funcției, pentru că în puncte apropiate situate de o parte și alta a tăieturii valorile funcției diferă prin $2\pi i$. Pentru a înlătura și acest neajuns să considerăm în locul planului variabilei complexe z o suprafață formată din mai multe plane complexe suprapuse câte unul pentru fiecare ramură a funcției. Lipim tăieturile acestor plane astfel încât marginea inferioară a fiecărui plan este lipită de marginea superioară a planului precedent și marginea superioară este lipită la marginea inferioară a planului următor. În cazul unei funcții cu un număr finit de ramuri, marginea superioară a ultimului plan este lipită de marginea inferioară a primului plan. În acest fel am obținut o suprafață continuă.

6.29 Exemplu. Să vedem în cazul complex cât este $\ln(-1)$?

Modulul numărului $z = -1$ este $|z| = 1$ iar argumentul $\arg z = \pi$. Atunci

$$\operatorname{Log}(-1) = \{ \ln 1 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \} = \{ i\pi(2k + 1), k \in \mathbb{Z} \}.$$

6.30 Definiție. Funcția **putere** se definește cu ajutorul logaritmului în felul următor: pentru $z, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \cdot \operatorname{Log} z}.$$

6.31 Observație. Dacă α este număr rațional de forma $\alpha = p/q$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$ și $q > 1$ atunci funcția z^α este multivocă: unei valori fixate a lui z îi corespund q valori diferite. Dacă α nu este rațional atunci funcția putere are o infinitate de ramuri. De exemplu

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Log}(-1)} = e^{\frac{1}{2} i(\pi + 2k\pi)} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \{-i, i\}.$$

Acest lucru explică pe de o parte de ce $\sqrt{-1}$ nu este cea mai bună notație pentru i , iar pe de altă parte explică paradoxul $1 = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$. De fapt, datorită faptului că funcția putere este multivocă proprietăți ale puterilor care aveau loc în cazul real nu au loc în general în cazul complex: de exemplu $z^\alpha \cdot w^\alpha \neq (z \cdot w)^\alpha$ și $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha \cdot \beta}$.

6.32 Exemplu. Cât este i^i ?

Conform definiției $i^i = e^{i \cdot \operatorname{Log} i}$. Pentru a vedea cât este $\operatorname{Log} i$ să vedem cât este modulul și argumentul lui $z = i$. Avem $|z| = 1$ și $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că

$$\operatorname{Log} i = \{ \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) \} = \{ i\frac{\pi}{2}(4k + 1) \} \text{ și}$$

$$i^i = e^{i \cdot \operatorname{Log} i} = e^{i \cdot (i\frac{\pi(4k+1)}{2})} = \left\{ e^{-\frac{\pi(4k+1)}{2}}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Am obținut că i^i este o mulțime de numere reale.

6.33 Exemplu. Să se rezolve ecuația $\cos z = -2$ în \mathbb{C} .

În mulțimea numerelor reale această ecuație nu are nici o soluție, dar în mulțimea numerelor complexe are o infinitate. Să arătăm lucrul acesta. Pornind de la egalitatea $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ și notând $w = e^{iz}$ obținem ecuația $w^2 + 4w + 1 = 0$. Cele două soluții ale ecuației sunt $w_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. Luând pe rând avem $e^{iz} = -2 + \sqrt{3}$. Rezultă $iz \in \text{Log}(-2 + \sqrt{3}) = \{ \ln|-2 + \sqrt{3}| + i(\arg(-2 + \sqrt{3}) + 2k\pi) \}$. Înmulțind cu $-i$ se obține prima infinitate de soluții

$$z \in \left\{ -i \ln(2 - \sqrt{3}) + \pi(2k + 1), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Analog pentru cazul $e^{iz} = -2 - \sqrt{3}$ se obține

$$z \in \left\{ -i \ln(2 + \sqrt{3}) + \pi(2k + 1), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Reuniunea celor două mulțimi obținute constituie soluția ecuației date.

6.4 Exerciții

Probleme propuse

6.1. Să se determine partea reală și imaginară a numerelor complexe:

a) $z = e^{2+i\frac{7\pi}{6}}$

b) $z = (-1 + i\sqrt{3})^{2015}$

c) $z = \frac{\cos i}{3 - i}$

d) $z = \text{ch} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{3\pi}{4} \right)$

e) $z = (1 - i)^{1+i}$.

f) $z = (-1)^i$

6.2. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuațiile:

a) $z^3 = 1$

b) $z^4 = 1$

c) $z^3 = i$

d) $z^{2n+1} - 1 = 0$

e) $(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$

f) $\sqrt{3} \sin z + i \cos z = 1$

g) $\sin z = -2$.

6.3. Să se reprezinte în planul complex mulțimea punctelor z care verifică:

a) $z^{10} - 1 = 0$

b) $\text{Im}(z - 2i + 1) = 0$

c) $\arg(z + 3i) = \frac{\pi}{6}$

d) $|z + i| = 2$.

e) $\text{Re} \frac{z - i}{z + i} = 0$

f) $\text{Re} \frac{z - i}{z + i} = 1$

g) $\text{Re} \frac{z - i}{z + i} = \frac{1}{2}$

h) $|z - i| < 1$

i) $\left| \frac{z}{1 - z} \right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

j) $\left| \frac{z - i}{z + 2} \right| < 1$.

6.4. Să se demonstreze identitatea paralelogramului

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

pentru orice două numere complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Indicații la problemele propuse

6.1. a) $z = -\frac{e^2}{2}(\sqrt{3} + i)$ b) $z = -2^{2014}(1 + i\sqrt{3})$ c) $z = \frac{3(e^2+1)}{20e} + i\frac{e^2+1}{20e}$ d) $z = -\frac{3}{4} + \frac{i}{4}$ e) $z = \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{4} - 2k\pi} [\cos(\frac{7\pi}{4} + \ln\sqrt{2}) + i\sin(\frac{7\pi}{4} + \ln\sqrt{2})]$, $k \in \mathbb{Z}$ f) $z = e^{-\pi(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$

6.2. a) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ b) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$ c) $z_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ $z_3 = -i$ d) $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ e) $z_k = i \operatorname{ctg} \frac{\pi(2k+1)}{2n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ f) $z_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ și $z_k = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ g) Soluția în \mathbb{C} este $z_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$

6.3. a) $z_k = e^{2k\pi i/10}$, $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ sunt vârfurile unui decagon regulat centrat în origine. b) dreapta $y = 2$ c) dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$ d) cerc cu centru în $-i$ și rază 2 e) cercul unitate $x^2 + y^2 = 1$ f) dreapta $y = -1$ g) cerc cu centru în $(0, 1)$ și rază 2 h) interiorul cercului cu centru i și rază 1 i) exteriorul cercului cu centru $(-1, 0)$ și rază $\sqrt{2}$ j) semiplanul $2x + 2y + 3 > 0$.

6.4. Folosim proprietățile conjugatului

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{z_1 + z_2} + (z_1 - z_2)\overline{z_1 - z_2} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} \\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2. \end{aligned}$$

Capitolul 7

Derivata și integrala unei funcții complexe

7.1 Funcții olomorfe

7.1 Definiție. O funcție $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definită pe o mulțime deschisă $G \subset \mathbb{C}$ este **derivabilă** într-un punct $z \in G$ dacă există și este finită limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Această limită se numește **derivata** funcției f în z și se notează $f'(z)$.

7.2 Observație. O funcție $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivabilă într-un punct se mai numește **monogenă** în acel punct. Această denumire de funcție monogenă se folosește uneori pentru a face distincția dintre o funcție complexă de variabilă complexă care este derivabilă și o funcție complexă de variabilă reală derivabilă. Când se dorește această distincție, denumirea de funcție derivabilă este rezervată funcțiilor complexe de variabilă reală.

7.3 Definiție. O funcție $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ este **olomorfă** într-un punct $z \in G$ dacă există un disc $D(z, r) \subset G$ astfel încât f să fie derivabilă în orice punct al discului $D(z, r)$. Spunem că f este olomorfă pe mulțimea D dacă f este olomorfă în fiecare punct al mulțimii D . Cu alte cuvinte f este olomorfă pe D dacă f este olomorfă pe o mulțime deschisă G care conține mulțimea D .

7.4 Notăție. Mulțimea funcțiilor olomorfe pe mulțimea D se notează $\mathcal{H}(D)$.

7.5 Teoremă. Fie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ și $z = x + iy \in G$ și fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ unde u și v sunt funcții reale de variabile reale definite pe G .

Dacă f este derivabilă în z atunci funcțiile u și v au derivate parțiale în punctul (x, y) și sunt satisfăcute **condițiile Cauchy-Riemann**

$$u'_x = v'_y \quad \text{și} \quad u'_y = -v'_x.$$

Reciproc, dacă u și v sunt funcții diferentiabile în punctul (x, y) și sunt satisfăcute condițiile Cauchy-Riemann atunci f este derivabilă în $x + iy$.

Demonstrație. Dacă f este derivabilă în punctul $z = x + iy$ atunci există limita și este finită

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Fie $h = h_1 + ih_2$. Atunci

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y)}{h_1 + ih_2} + i \frac{v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)}{h_1 + ih_2}.$$

Dacă luăm $h_2 = 0$ și $h_1 \rightarrow 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + i \frac{v(x+h_1, y) - v(x, y)}{h_1} \right).$$

Acest lucru ne arată că există și sunt finite limitele

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h_1, y) - u(x, y)}{h_1} \quad \text{și} \quad \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x+h_1, y) - v(x, y)}{h_1}.$$

Dar aceasta înseamnă că există și sunt finite u'_x și v'_x și avem

$$f'(z) = u'_x + iv'_x.$$

Dacă luăm $h_1 = 0$ și $h_2 \rightarrow 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+h_2) - u(x, y)}{ih_2} + i \frac{v(x, y+h_2) - v(x, y)}{ih_2} \right).$$

Acest lucru ne arată că există și sunt finite limitele

$$\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h_2) - u(x, y)}{h_2} \quad \text{și} \quad \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h_2) - v(x, y)}{h_2}.$$

Dar aceasta înseamnă că există și sunt finite u'_y și v'_y și avem

$$f'(z) = -iu'_y + v'_y.$$

Egalând acum $u'_x + iv'_x = f'(z) = -iu'_y + v'_y$ se obțin condițiile Cauchy-Riemann.

Să presupunem acum că u și v sunt diferențiabile în punctul (x, y) și sunt verificate condițiile Cauchy-Riemann. Din definiția diferențiabilității funcțiilor u și v avem

$$\begin{aligned} u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) &= u'_x \cdot h_1 + u'_y \cdot h_2 + \alpha_1(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \\ v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y) &= v'_x \cdot h_1 + v'_y \cdot h_2 + \alpha_2(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \end{aligned}$$

unde α_1 și α_2 sunt funcții cu proprietatea că

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \alpha_1(x, y, h_1, h_2) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \alpha_2(x, y, h_1, h_2) = 0.$$

Putem scrie

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y)}{h_1 + ih_2} + i \frac{v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)}{h_1 + ih_2} \\
 &= \frac{u'_x \cdot h_1 + u'_y \cdot h_2 + i(v'_x \cdot h_1 + v'_y \cdot h_2)}{h_1 + ih_2} + \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)|h|}{h_1 + ih_2} \\
 &= \frac{u'_x \cdot (h_1 + ih_2) + v'_x \cdot (-h_2 + ih_1)}{h_1 + ih_2} + \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)|h|}{h_1 + ih_2} \\
 &= u'_x + iv'_x + (\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot \frac{|h|}{h}.
 \end{aligned}$$

Din faptul că

$$\left| (\alpha_1(x, y, h_1, h_2) + i\alpha_2(x, y, h_1, h_2)) \cdot \frac{|h|}{h} \right| \leq |\alpha_1(x, y, h_1, h_2)| + |\alpha_2(x, y, h_1, h_2)| \rightarrow 0$$

rezultă că limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

există și este egală cu

$$f'(z) = u'_x + iv'_x.$$

□

7.6 Exemplu. Să se arate că funcția $f(z) = e^z$ este olomorfa pe \mathbb{C} și $(e^z)' = e^z$.

Pentru $z = x + iy$ avem $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. Dacă scriem $f = u + iv$ atunci prin identificare $u(x, y) = e^x \cos y$ și $v(x, y) = e^x \sin y$. Pentru că au loc egalitățile $u'_x = e^x \cos y = v'_y$ și $u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$, condițiile Cauchy-Riemann sunt verificate pentru orice punct (x, y) , ceea ce ne arată că f este olomorfa pe \mathbb{C} . Derivata funcției f va fi

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

7.7 Exemplu. Funcția $f(z) = |z|^2$ este diferențiabilă în $z = 0$ dar nu este olomorfa în nici un punct.

Dacă scriem $f = u + iv$ avem $u(x, y) = x^2 + y^2$ și $v(x, y) = 0$ ceea ce ne arată că $u'_x = 2x$, $v'_y = 0$, $u'_y = 2y$ și $v'_x = 0$. Condițiile Cauchy-Riemann sunt verificate doar în punctul $(0, 0)$, ceea ce ne arată că f este derivabilă în $z = 0$ fără să fie olomorfa.

7.8 Observație. Dacă f este derivabilă într-un punct z atunci derivata $f'(z)$ poate fi exprimată prin oricare din următoarele formule

$$f'(z) = u'_x + iv'_x$$

$$f'(z) = v'_y - iu'_y$$

$$f'(z) = u'_x - iu'_y$$

$$f'(z) = v'_y + iv'_x.$$

7.9 Observație. Înlocuind $x = (z + \bar{z})/2$ și $y = (z - \bar{z})/(2i)$ obținem

$$f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Aceasta ne arată că putem privi funcția f ca funcție de variabilele independente z și \bar{z} . Dacă u și v au derivate parțiale de ordinul întâi atunci

$$\begin{aligned} f'_z &= \frac{1}{2}u'_x + \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x - \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}(u'_x - v'_y) + \frac{i}{2}(u'_y + v'_x) \\ f'_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}u'_x - \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x + \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}(u'_x + v'_y) + \frac{i}{2}(v'_x - u'_y). \end{aligned}$$

Dacă f este derivabilă în z atunci

$$f'_{\bar{z}} = 0 \quad \text{și} \quad f'_z = f'(z).$$

7.10 Observație. Deoarece definiția derivabilității unei funcții complexe într-un punct este aceeași ca și în cazul real, toate regulile de derivare din cazul real rămân adevărate și în cazul funcțiilor de variabilă complexă. Astfel de exemplu $(z^2)' = 2z$.

7.11 Observație. Dacă f este o funcție derivabilă și $f = u + iv$ atunci u și v sunt funcții armonice. Pentru demonstrație vom presupune că u și v au derivate parțiale de ordinul al doilea mixte continue (se va vedea mai târziu că această presupunere nu este o restricție). Derivând condițiile Cauchy-Riemann, prima în raport cu x și a doua în raport cu y obținem $u''_{x^2} = v''_{yx}$ și $u''_{y^2} = -v''_{xy}$. Adunând aceste relații și ținând cont că derivatele mixte sunt egale rezultă

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

ceea ce ne arată că u este funcție armonică. La fel se arată că $v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0$.

7.12 Observație. Dacă f este olomorfă pe o mulțime G deschisă și se cunoaște partea reală sau partea imaginară atunci f este perfect determinată făcând abstracție de o constantă.

7.13 Exemplu. Să se determine funcția olomorfă f pentru care $\text{Im } f = 3x^2y - y^3 - x$.

Fie $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x$. Se poate arăta că v este armonică. Derivata funcției f este

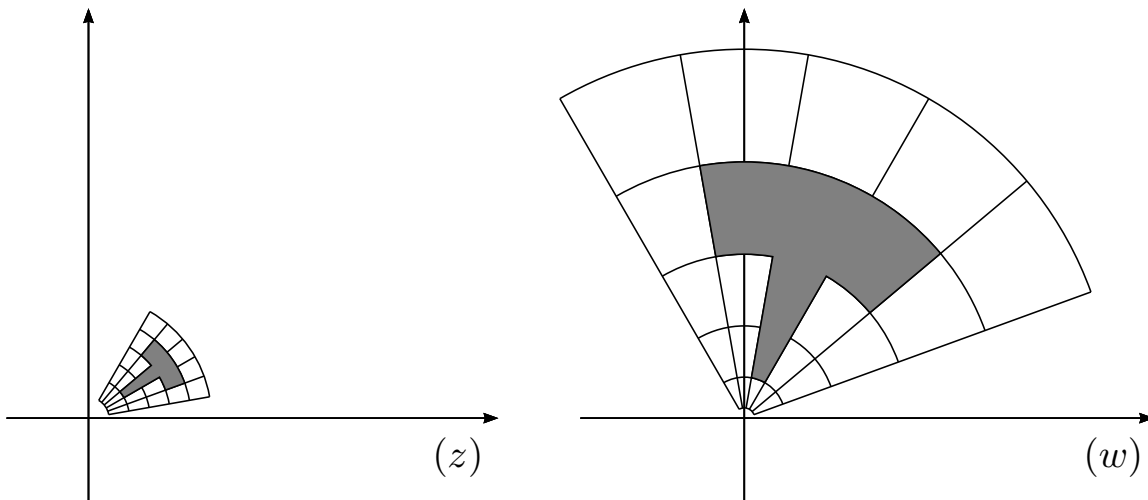
$$f'(z) = v'_y + iv'_x = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy - 1).$$

Luând $x = z$ și $y = 0$ rezultă $f'(z) = 3z^2 - i$. Prin integrare $f(z) = z^3 - iz + C$.

7.14 Exemplu. Să se determine funcția olomorfă f pentru care $\text{Re } f = \varphi(x^2 + y^2)$, unde φ este o funcție de două ori derivabilă.

Fie $u = \varphi(x^2 + y^2)$. Avem $u'_x = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x$ și $u'_y = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y$. Derivatele de ordinul doi sunt $u''_{x^2} = \varphi''(x^2 + y^2) \cdot 4x^2 + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2$ și $u''_{y^2} = \varphi''(x^2 + y^2) \cdot 4y^2 + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2$. Pentru că u este armonică rezultă că $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$. Aceasta revine la

$$4(x^2 + y^2) \cdot \varphi''(x^2 + y^2) + 4\varphi'(x^2 + y^2) = 0.$$

Figura 7.1: Reprezentarea funcției $w = z^2$

Notând $r = x^2 + y^2$ rezultă ecuația diferențială $r \cdot \varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$. Dacă notăm cu $\psi(r) = \varphi'(r)$ obținem ecuația liniară de ordinul întâi $\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r) = 0$. Înmulțind toată egalitatea cu $e^{\int \frac{1}{r} dr} = e^{\ln r} = r$ obținem

$$(r \cdot \psi(r))' = 0 \iff \psi(r) = \frac{C_1}{r} \iff \varphi(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Am obținut că $u(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$. Derivata funcției f este

$$f'(z) = u'_x - iu'_y = \frac{C_1 2x}{x^2 + y^2} - i \frac{C_1 2y}{x^2 + y^2} = \frac{2C_1}{z}.$$

Rezultă prin integrare $f(z) = 2C_1 \operatorname{Log} z + C$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$ și $C \in \mathbb{C}$.

7.2 Reprezentări conforme

7.15 Observație. Pentru a reprezenta o funcție $w = f(z)$ vom folosi două planuri: planul variabilei z , notat (z) și planul valorilor funcției (w) . De exemplu, funcția $w = z^2$ este reprezentată în Figura 7.1.

7.16 Observație. Pentru a vedea care este interpretarea geometrică a derivatei fie (C) un arc de curbă în planul variabilei (z) și fie punctul $M(x_0, y_0)$ pe acest arc. Vom nota cu (Γ) imaginea curbei prin transformarea $w = f(z)$ și $N(u_0, v_0)$ imaginea punctului M . Dacă $f'(z_0) \neq 0$ atunci din definiția derivatei

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|$$

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)] = \beta - \alpha,$$

unde α este unghiul pe care-l face tangenta în punctul M la arcul (C) cu axa reală a planului (z) , iar β este unghiul pe care-l face tangenta în punctul N la arcul (Γ) cu axa reală a planului (w) .

Modulul derivatei se numește coeficient de deformare și este factorul de proporționalitate cu care se transformă elementele de arc într-o vecinătate a punctului considerat.

Argumentul derivatei este unghiul cu care se rotește în sens direct tangenta la o curbă în punctul considerat. Atât coeficientul de dilatare cât și unghiul de rotație sunt independente de curba considerată. În punctele în care $f'(z) = 0$, interpretarea geometrică nu se mai poate face deoarece în aceste puncte argumentul derivatei este nedeterminat.

7.17 Definiție. O transformare $w = f(z)$ se numește **conformă** în punctul z dacă păstrează unghiul a două curbe oarecare ce trec prin punctul considerat. Transformarea este conformă pe un domeniu dacă este conformă în fiecare punct al domeniului.

7.18 Teoremă. O funcție olomorvă $f(z)$ definește o transformare conformă în toate punctele în care derivata este nenulă.

Demonstrație. Fie z un punct în care $f'(z) \neq 0$. Fie (C_1) și (C_2) două curbe netede ce trec prin punctul M de afix z . Fie α_1 și α_2 unghiurile pe care le fac tangentele la aceste curbe în punctul M cu axa reală a planului (z) . Fie (Γ_1) și (Γ_2) imaginile curbelor (C_1) și (C_2) prin transformarea $w = f(z)$ și fie β_1 și β_2 unghiurile pe care le fac tangentele la aceste curbe în punctul N de afix $w = f(z)$ cu axa reală a planului (w) .

Conform interpretării derivatei avem $\arg f'(z) = \beta_1 - \alpha_1$ și $\arg f'(z) = \beta_2 - \alpha_2$ de unde rezultă $\beta_2 - \alpha_2 = \beta_1 - \alpha_1$, adică $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, ceea ce ne arată că unghiul dintre tangentele la curbele (C_1) și (C_2) este același cu unghiul dintre tangentele la curbele (Γ_1) și (Γ_2) . \square

7.19 Definiție. O funcție olomorvă și injectivă pe un domeniu D se numește funcție **univalentă** pe D .

7.20 Observație. Pentru o funcție univalentă $f(z)$ și $z_2 \neq z_1$ avem $\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \neq 0$. Rezultă că $f'(z) \neq 0$, pentru orice z din domeniu, ceea ce ne arată că o funcție univalentă realizează o transformare conformă.

7.21 Definiție. Fiind date domeniile D și Δ o funcție f se numește **reprezentare conformă** dacă f este univalentă și $f(D) = \Delta$.

7.22 Definiție. Domeniile D și Δ se numesc **conform echivalente** dacă există o reprezentare conformă a domeniului D pe Δ .

7.23 Definiție. O mulțime se numește **simplu conexă** (fără găuri) dacă oricare ar fi o curbă simplă, închisă, situată în domeniu atunci întreg domeniul mărginit de această curbă face parte din domeniu.

7.24 Teoremă (Teorema lui Riemann). Orice domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$ este conform echivalent cu discul unitate $D(0, 1)$.

7.3 Funcții omografice

7.25 Definiție. Se numește funcție **omografică** transformarea

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

7.26 Observație. Funcția omografică este olomorvă în $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Derivata

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

ne arată că această funcție este o reprezentare conformă pe $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Ea poate fi extinsă dacă definim $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ și $f(\infty) = \frac{a}{c}$ în cazul $c \neq 0$ și $f(\infty) = \infty$ dacă $c = 0$.

Funcția omografică mai este numită transformare Möbius, transformare liniar-fracționară, circulară sau biliniară.

7.27 Observație. În plan ecuația generală a unui cerc este $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$. Dacă $A = 0$ se obține ecuația unei drepte. Trecând la variabilă complexă ecuația devine

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0 \iff Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} - i\frac{C}{2}\right)z + \left(\frac{B}{2} + i\frac{C}{2}\right)\bar{z} + D = 0.$$

Notând $\frac{B}{2} + i\frac{C}{2} = E$ obținem ecuația cercului în complex $Az\bar{z} + \bar{E}z + Ez + D = 0$, $A, D \in \mathbb{R}$ și $E \in \mathbb{C}$.

7.28 Teoremă. Funcția omografică transformă un cerc într-un cerc sau o dreaptă și o dreaptă într-o dreaptă sau un cerc.

Demonstrație. Inversând funcția omografică avem

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad \text{și} \quad \bar{z} = \frac{-\bar{d}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} - \bar{a}}.$$

Dacă înlocuim în ecuația cercului $Az\bar{z} + \bar{E}z + Ez + D = 0$, $A, D \in \mathbb{R}$, $E \in \mathbb{C}$ obținem

$$A(-dw + b)(-\bar{d}\bar{w} + \bar{b}) + \bar{E}(-dw + b)(\bar{c}\bar{w} - \bar{a}) + E(-\bar{d}\bar{w} + \bar{b})(cw - a) + D(cw - a)(\bar{c}\bar{w} - \bar{a}) = 0.$$

Va rezulta $\alpha w\bar{w} + \beta w + \gamma\bar{w} + \delta = 0$ unde

$$\alpha = A\bar{d}\bar{d} - \bar{E}d\bar{c} - E\bar{d}c + Dc\bar{c}$$

$$\beta = -A\bar{d}\bar{b} + \bar{E}d\bar{a} + E\bar{c}\bar{b} - Dc\bar{a}$$

$$\gamma = -A\bar{d}b + \bar{E}\bar{c}b + E\bar{d}a - D\bar{c}a$$

$$\delta = A\bar{b}\bar{b} - \bar{E}\bar{b}\bar{a} - E\bar{b}a + D\bar{a}\bar{a}.$$

Deoarece $\alpha = \bar{\alpha}$ și $\delta = \bar{\delta}$ rezultă $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$. Pentru că $\beta = \bar{\gamma}$ am obținut ecuația unui cerc în planul (w). Dacă $\alpha = 0$ avem ecuația unei drepte. \square

7.29 Observație. Cazuri particulare de funcții omografice sunt:

1. **translația** $w = z + a$
2. **rotația** $w = e^{it} \cdot z$, $t \in \mathbb{R}$
3. **omotetia** $w = a \cdot z$, $a \in \mathbb{R}$
4. **inversiunea** $w = \frac{1}{z}$.

Orice funcție omografică se compune dintr-o succesiune de transformări particulare. Dacă $c \neq 0$ atunci

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})}$$

se compune din

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c}.$$

Dacă $c = 0$ atunci $w = \frac{az+b}{d}$ se compune din $z_1 = \frac{a}{d} \cdot z$ și $w = z_1 + \frac{b}{d}$.

7.30 Definiție. Biraportul a patru numere z_1, z_2, z_3 și z_4 se definește prin

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

7.31 Teoremă. Transformarea omografică păstrează biraportul a patru puncte.

Demonstrație. Dacă notăm $w_i = \frac{az_i+b}{cz_i+d}$ atunci

$$w_1 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \quad w_2 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}.$$

Rezultă

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{(z_1 - z_3)(cz_2 + d)}{(z_2 - z_3)(cz_1 + d)}.$$

Analog

$$\frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4} = \frac{(z_1 - z_4)(cz_2 + d)}{(z_2 - z_4)(cz_1 + d)}.$$

Obținem $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. □

7.32 Observație. O funcție omografică este determinată dacă se cunosc imaginile a trei puncte distincte prin această transformare. Transformarea este definită de

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

7.33 Exemplu. Să se determine funcția omografică care transformă punctele $z_1 = 1$, $z_2 = i$ și $z_3 = \infty$ în $w_1 = i$, $w_2 = 0$ și $w_3 = -1$.

Forma generală a transformării este $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Din faptul că $f(i) = 0$ rezultă $ai + b = 0$ adică $b = -ia$. Din $f(\infty) = -1$ rezultă $a/c = -1$, adică $c = -a$. Avem de asemenea $f(1) = i$, adică $a + b = i(c + d)$ și folosind relațiile deja obținute ultima egalitate este echivalentă cu $a - ia = -ia + id$, adică $d = -ia$. Funcția omografică este

$$f(z) = \frac{az - ia}{-az - ia} = \frac{-z + i}{z + i}.$$

7.34 Exemplu. În ce se transformă mulțimea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$ prin transformarea $w = \frac{1-z}{1+z}$?

Soluție 1. Avem

$$\begin{array}{c|ccccc} z & 1 & i & -1 & 0 & \infty \\ \hline w & 0 & -i & \infty & 1 & -1. \end{array}$$

Cercul $|z| = 1$ se transformă în dreapta $\operatorname{Re} w = 0$. Pentru că imaginea originii este punctul $w = 1$ discul $|z| < 1$ se transformă în semiplanul $\operatorname{Re} w > 0$.

Imaginea dreptei $\operatorname{Re} z = 0$ este cercul $|w| = 1$. Dacă parcurgem dreapta în sensul în care în stânga dreptei se va afla semiplanul $\operatorname{Re} z < 0$ atunci în stânga cercului $|w| = 1$ parcurs în sensul acelor de ceasornic se află regiunea $|w| > 1$.

În concluzie, regiunea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$ se transformă în regiunea

$$\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0, |w| > 1\}.$$

Soluție 2. Din $w = \frac{1-z}{1+z}$ rezultă $z = \frac{1-w}{1+w}$. Atunci $|z| < 1$ este echivalent cu $|1-w| < |1+w|$ de unde $(u-1)^2 + v^2 < (u+1)^2 + v^2$ sau $u > 0$, deci $\operatorname{Re} w > 0$.

Relația $\operatorname{Re} z < 0$ este echivalentă cu $z + \bar{z} < 0$ de unde $\frac{1-w}{1+w} + \frac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}} < 0$ care este echivalentă cu $2 - 2w \cdot \bar{w} < 0$ adică $|w| > 1$. În concluzie mulțimea D se transformă în

$$\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0, |w| > 1\}.$$

7.4 Definiția integralei unei funcții complexe

7.35 Definiție. Fie C o curbă netedă pe porțiuni și fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține imaginea curbei C . Spunem că f este integrabilă pe C dacă există

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

7.36 Observație. Existența integralei unei funcții de variabilă complexă rezultă din existența a două integrale curbiliniile reale. Dacă parametrizarea curbei este

$$C : \quad z = z(t), \quad t \in [a, b]$$

atunci integrala se poate calcula prin

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt.$$

Din definiție rezultă următoarele proprietăți ale integralei complexe:

$$\begin{aligned}\int_{AB} f(z) dz &= - \int_{BA} f(z) dz \\ \int_C [af(z) + bg(z)] dz &= a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz \\ \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz \\ \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \int_C |f(z)| ds \leq \sup_{z \in C} |f(z)| \cdot \ell_C,\end{aligned}$$

unde ds este elementul de arc și ℓ_C este lungimea curbei C . Vom demonstra ultima proprietate.

Fie $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ o parametrizare a curbei C . Avem

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt \right|.$$

Fie θ argumentul numărului complex $\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$. Atunci

$$\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt \right| \cdot e^{i\theta}.$$

Folosind inegalitatea $\operatorname{Re} z \leq |z|$ rezultă

$$\begin{aligned}\left| \int_C f(z) dz \right| &= e^{-i\theta} \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \cdot f(z(t)) \cdot z'(t)] dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} \cdot f(z(t)) \cdot z'(t)| dt = \int_a^b |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt.\end{aligned}$$

Dacă $z(t) = x(t) + iy(t)$ atunci $|z'(t)| dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = ds$. Ținând cont de faptul că lungimea curbei se exprimă prin $\ell_C = \int_C ds$ obținem proprietatea menționată.

7.37 Exemplu. Să se calculeze $\int_C (z - a)^n dz$, unde C este cercul cu centrul în a și de rază r , parcurs în sens direct, iar n este un număr întreg.

O reprezentare în \mathbb{C} a cercului $|z - a| = r$ este

$$z(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Avem $z'(t) = ire^{it}$ și prin urmare

$$\int_C (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Dacă $n = -1$ obținem

$$\int_C \frac{1}{z - a} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

iar pentru $n \neq -1$ avem

$$\int_C (z - a)^n dz = ir^{n+1} \left. \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

7.5 Formulele lui Cauchy

7.38 Teoremă (Teorema lui Cauchy). *Fie C o curbă simplă, închisă și netedă pe porțiuni. Dacă f este olomorfă pe domeniul mărginit de curba C și integrabilă pe curba C atunci*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Avem

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Aplicând formula lui Green pentru cele două integrale curbilini rezultă

$$\int_C f(z) dz = - \iint_D (v'_x + u'_y) dx dy + i \iint_D (u'_x - v'_y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de curba C . Folosind condițiile Cauchy-Riemann obținem $\int_C f(z) dz = 0$. \square

7.39 Observație. Fie D un domeniu și C_1 și C_2 două curbe închise situate în acest domeniu. Dacă f este o funcție olomorfă în domeniul mărginit de cele două curbe atunci

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

curbele fiind la fel orientate.

Fie $A \in C_1$ și $B \in C_2$. Fie Γ curba închisă formată din arcul de curbă de pe C_1 parcurs de la A până la A în sens direct, la care adăugăm segmentul AB parcurs de la A la B , apoi arcul de pe C_2 parcurs în sens invers de la B până la B și apoi segmentul BA parcurs de la B la A . Funcția f fiind olomorfă pe interiorul acestei curbe Γ rezultă $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Pe de altă parte, folosind aditivitatea integralei

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz.$$

Cu aceasta observația făcută este demonstrată.

7.40 Teoremă (Formula integrală a lui Cauchy). *Fie f o funcție olomorfă în domeniul simplu conex D și fie C o curbă simplă, închisă și netedă pe porțiuni din D , care înconjoară un punct de afix a . Atunci*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Demonstrație. Punctul a este în interiorul domeniului mărginit de curba C deci există un disc $D(a, r)$ inclus în acest domeniu. Fie $\varepsilon < r$ un număr real pozitiv. Deoarece funcția $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă pe domeniul mărginit de curba C și cercul $|z-a| = \varepsilon$, conform observației precedente rezultă

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Pentru că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{1}{z-a} dz = f(a)2\pi i,$$

rămâne de arătat că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0.$$

Dar

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \varepsilon e^{it}) - f(a)}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon i e^{it} dt \right| \\ &\leq 2\pi \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi)} |f(a + \varepsilon e^{it}) - f(a)|. \end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \rightarrow 0$ și ținând cont de continuitatea funcției f rezultă că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, 2\pi)} |f(a + \varepsilon e^{it}) - f(a)| = 0,$$

ceea ce demonstrează formula lui Cauchy. □

7.41 Observație. Formula integrală a lui Cauchy ne arată că dacă f este o funcție olomorvă pe un domeniu D atunci cunoașterea valorilor funcției pe o curbă închisă este suficientă pentru a determina valoarea ei în orice punct din domeniul mărginit de această curbă.

7.42 Teoremă (Formula lui Cauchy pentru derivată). *Fie f o funcție olomorvă în interiorul și pe frontiera curbei simple, închise și netede pe porțiuni C . Atunci există derivata de orice ordin a funcției f într-un punct a interior domeniului mărginit de curba C și*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $n = 0$ formula este adevărată. Presupunem formula adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$. Punctul a fiind interior doemniului mărginit de curbă există un disc $D(a, r)$ inclus în acest domeniu. Fie $h \in \mathbb{C}$ astfel încât $|h| < r$. Avem

$$f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(z) \left[\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \right] dz.$$

Demonstrăm că

$$F(h) = \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}} dz$$

ține la zero atunci când h tinde la zero și cu aceasta teorema este demonstrată. Funcția $F(h)$ se poate scrie

$$F(h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(z) \cdot \left[\frac{(z-a)^{n+1} - (z-a-h)^{n+1}}{h(z-a-h)^{n+1}(z-a)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z-a)^{n+2}} \right] dz.$$

Folosind faptul că

$$\begin{aligned}
 & \frac{w^{n+1} - v^{n+1}}{(w-v)v^{n+1}w^{n+1}} - \frac{n+1}{w^{n+2}} \\
 &= \frac{w^n + w^{n-1}v + \dots + v^n}{v^{n+1}w^{n+1}} - \frac{n+1}{w^{n+2}} \\
 &= \frac{w^{n+1} + w^n v + \dots + wv^n - (n+1)v^{n+1}}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
 &= \frac{(w^{n+1} - v^{n+1}) + (w^n v - v^{n+1}) + \dots + (wv^n - v^{n+1})}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
 &= (w-v) \cdot \frac{(w^n + w^{n-1}v + \dots + v^n) + v(w^{n-1} + w^{n-2}v + \dots + v^{n-1}) + \dots + v^n}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
 &= (w-v) \cdot \frac{w^n + 2w^{n-1}v + 3w^{n-2}v^2 + \dots + (n+1)v^n}{v^{n+1}w^{n+2}}
 \end{aligned}$$

și considerând $\delta = \min_{z \in C} (|z - a - h|, |z - a|) > 0$ rezultă

$$|F(h)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C |f(z)| \cdot |h| \cdot \frac{1 + 2 + \dots + (n+1)}{\delta^{n+3}} ds \leq \frac{(n+2)!}{4\pi\delta^{n+3}} \ell_C \sup_{z \in C} |f(z)| \cdot |h|.$$

De aici rezultă $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = 0$. □

7.43 Observație. Formula lui Cauchy pentru derivate ne arată că o funcție olomorfă pe o mulțime deschisă are derivate de orice ordin pe acea mulțime.

7.6 Exerciții

Probleme propuse

7.1. Să se determine funcția olomorfă f pentru care:

- $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 2x$, $z = x + iy$, $f(i) = 2i - 1$
- $\operatorname{Re} f(z) = \varphi(x^2 - y^2)$
- $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y + \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1$
- $\operatorname{Im} f(z) = \varphi(xy)$.

7.2. Să se determine funcția omografică care transformă punctele:

- $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ în $w_1 = \infty, w_2 = i, w_3 = 0$
- $z_1 = 1, z_2 = -i, z_3 = \infty$ în $w_1 = \infty, w_2 = 1, w_3 = -i$
- $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$ în $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$.

7.3. Să se determine imaginea domeniului D prin transformarea $w = f(z)$

a) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$

b) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, $f(z) = \frac{z}{z-1}$

c) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, $f(z) = \frac{z+2}{2z+1}$.

7.4. Să se calculeze:

a) $\int_0^\pi e^{it} dt$

b) $\int_{|z|=2} (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz$

7.5. Folosind formulele lui Cauchy să se calculeze:

a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$

b) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$

c) $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz$

Indicații la problemele propuse

7.1. a) $f(z) = z^2 + 2z$ b) $f(z) = cz^2 + C_1$ c) $f(z) = e^z - 1/z + 2 - e$ d) $f(z) = cz^2 + c_1$

7.2. a) $w = \frac{z+1}{1-z}$ b) $w = -i \cdot \frac{z+1}{z-1}$ c) $w = -1/z$

7.3. a) $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0\}$ b) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w - \frac{4}{3}| > \frac{2}{3}\}$ c) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.

7.4. a) $2i$ b) 0

7.5. a) πi b) π/e c) $\pi i/2$.

Capitolul 8

Teorema reziduurilor

8.1 Serii de puteri

Seriile de numere complexe se definesc ca și seriile de numere reale.

8.1 Definiție. Fie (z_n) un șir de numere complexe. Construim șirul sumelor parțiale

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n.$$

Perechea de șiruri (z_n, s_n) se numește **serie** cu termenul general z_n . Dacă șirul (s_n) este convergent atunci seria este **convergentă** și limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

se va numi **suma seriei**. Vom folosi aceeași notație $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ și pentru a desemna seria (z_n, s_n) . Dacă seria de numere reale pozitive

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

este convergentă atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ se numește **absolut convergentă**.

8.2 Definiție. Fie (a_n) un șir de numere complexe și a un număr complex. Se numește **serie de puteri** centrată în a seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

8.3 Observație. Notând $w = z - a$ seria devine centrată în origine. Pentru $z = a$ seria este convergentă.

8.4 Teoremă (Teorema lui Abel). Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ este convergentă într-un punct $z_0 \neq a$ atunci ea este absolut convergentă în discul $|z - a| < |z_0 - a|$ și uniform convergentă în orice disc $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$.

Demonstrație. Fiindcă z_0 este un punct de convergență al seriei rezultă că termenul general al seriei converge la zero, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_0 - a)^n = 0$. De aici deducem că $(a_n(z_0 - a)^n)$ este un șir mărginit: există $M > 0$ astfel încât $|a_n| |z_0 - a|^n < M$. Fie z un punct oarecare din discul $|z - a| < |z_0 - a|$. Atunci

$$|a_n| |z - a|^n \leq |a_n| |z_0 - a|^n \cdot \left(\frac{|z - a|}{|z_0 - a|} \right)^n < M \cdot \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n = Mq^n$$

unde $q = |z - a|/|z_0 - a| < 1$. Seria cu termenul general Mq^n fiind convergentă, rezultă că seria cu termenul general $a_n(z - a)^n$ este absolut convergentă.

Dacă z aparține discului $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$ atunci $q \leq r/|z_0 - a|$. Fiindcă acest raport nu depinde de z și fiindcă $r/|z_0 - a| < 1$ atunci conform criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcții, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ va fi uniform convergentă. \square

8.5 Definiție. Fiind dată seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ se numește **rază de convergență** numărul R definit prin

$$R = \sup \left\{ |z - a| : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z - a|^n \text{ este convergentă} \right\}.$$

8.6 Observație. Raza de convergență ne arată că în interiorul cercului $|z - a| = R$ seria este absolut convergentă și în exterior divergentă. În punctele de pe cerc seria poate fi convergentă sau divergentă. Dacă seria este convergentă doar în punctul $z = a$ atunci $R = 0$, dacă seria este convergentă în tot planul complex atunci $R = \infty$. Pentru calculul razei de convergență utilizăm formulele

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{sau} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

dacă limitele există.

8.7 Exemplu. Să considerăm seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, care are raza de convergență $R = 1$. Suma parțială

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

prin înmulțire cu z și apoi scăzută din ea ne dă

$$s_n - zs_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - (z + z^2 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}.$$

Pentru că $z^{n+1} \rightarrow 0$ când $|z| < 1$ rezultă $s_n(1 - z) \rightarrow 1$, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

8.8 Teoremă (Teorema lui Taylor). Dacă f este o funcție olomorvă în discul $D(a, r)$ atunci există o unică serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad \text{pentru orice } z \text{ din discul } |z - a| < r.$$

Fie C este cercul $|z - a| = \rho$ și $0 < \rho < r$. Atunci coeficienții seriei sunt dați de

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du.$$

Demonstrație. Fie z un punct din discul $D(a, r)$. Notăm $r_0 = |z - a|$ și alegem un $\rho > 0$ cu proprietatea că $r_0 < \rho < r$. Conform formulei lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

Pentru că $\frac{|z-a|}{\rho} = \frac{r_0}{\rho} < 1$ avem

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - a - (z - a)} = \frac{1}{u - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{u - a} \right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen și obținem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du.$$

Ținând cont de formulele lui Cauchy pentru derivate avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

8.9 Observație. Seriile Taylor în complex au aceeași formă ca și în real. Astfel

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

dezvoltări valabile pentru orice $z \in \mathbb{C}$. De asemenea

$$\begin{aligned} \ln(1 + z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \\ (1 + z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

dezvoltări valabile pentru $|z| < 1$, pentru ramurile uniforme ale funcțiilor pentru care $\ln(1) = 0$ și $1^\alpha = 1$.

8.10 Observație. Produsul a două serii se calculează prin

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Pentru a demonstra aceasta fie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{și} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Folosind regula de derivare a lui Leibniz

$$(f(z) \cdot g(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(z) \cdot g^{(n-k)}(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z)}{(n-k)!}.$$

Pentru $z = 0$ obținem

$$c_n = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

8.11 Exemplu. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului 0 funcția

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+z}.$$

Avem

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Folosind regula de înmulțire a seriilor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ unde

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

8.2 Serii Laurent

8.12 Definiție. Se numește **serie Laurent** centrată în a o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

8.13 Observație. Pentru a determina domeniul de convergență scriem seria sub forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

prima serie din membrul drept numindu-se **partea tayloriană** iar cea de-a doua **partea principală** a seriei Laurent.

Partea tayloriană este convergentă în discul $|z - a| < R$, unde R este raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$. Dacă notăm $1/(z - a)$ cu w atunci obținem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ cu raza de convergență R_1 . Ea va fi convergentă pe mulțimea $|w| < R_1$. Cu notația $r = 1/R_1$, partea principală a seriei Laurent este convergentă pentru $|z - a| > r$. Dacă $r < R$ atunci seria Laurent este convergentă în coroana circulară

$$D(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}.$$

8.14 Teoremă (Teorema lui Laurent). *Fie f o funcție olomorfă în $D(a, r, R)$. Atunci pentru orice z din coroana circulară*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n,$$

unde coeficienții a_n se pot calcula cu formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du,$$

C fiind un cerc $|z - a| = \rho$ cu $r < \rho < R$.

Demonstrație. Fie z un punct de pe cercul $|z - a| = \rho$ cu $r < \rho < R$. Atunci există numerele R_1 și R_2 cu proprietatea că $r < R_1 < \rho < R_2 < R$. Fie C_1 cercul $|z - a| = R_1$ și C_2 cercul $|z - a| = R_2$. Atunci din formula integrală a lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(u)}{u - z} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

Dacă $u \in C_2$ avem $\frac{|z-a|}{|u-a|} = \frac{\rho}{R_2} < 1$ și putem scrie

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - a - (z - a)} = \frac{1}{u - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{u - a}\right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen și obținem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \int_{C_2} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du.$$

Dacă $u \in C_1$ avem $\frac{|u-a|}{|z-a|} = \frac{R_1}{\rho} < 1$ și

$$\begin{aligned} \frac{1}{u - z} &= \frac{-1}{z - u} = \frac{-1}{z - a - (u - a)} = \frac{-1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u-a}{z-a}} \\ &= \frac{-1}{z - a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{u - a}{z - a}\right)^m = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - a)^n}{(u - a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Prin integrare obținem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z} du = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-a)^n \int_{C_1} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du.$$

Pentru că funcțiile $\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}$ sunt olomorfe pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ pe coroana $D(a, r, R)$ putem scrie

$$\int_{C_1} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du = \int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du = \int_{C_2} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du.$$

Din toate aceste relații obținem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du.$$

□

8.15 Observație. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcții olomorfe într-o coroană circulară este unică. Într-adevăr, să presupunem că

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad z \in D(a, r, R).$$

Atunci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(u-a)^{n+1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (u-a)^k du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_C \frac{1}{(u-a)^{n-k+1}} du = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 2\pi i, & k = n \end{cases} = b_n. \end{aligned}$$

Această observație ne permite să dezvoltăm în serie Laurent funcții complicate folosind dezvoltări în serii Taylor cunoscute.

8.16 Exemplu. Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}$. Să se dezvolte în serie Laurent

- în coroana $1 < |z| < 3$
- pe mulțimea $|z| > 3$
- în discul punctat $0 < |z-1| < 2$.

Funcția f se poate scrie

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3},$$

cu $A = -1/2$ și $B = 1/2$. Folosind formula seriei geometrice avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad |z| < 3 \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Atunci dezvoltarea de la a) este

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad 1 < |z| < 3.$$

Pentru punctul b) dezvoltarea lui $1/(z-1)$ rămâne valabilă, dar

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Atunci dezvoltarea pe mulțimea de la b) este

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Scriem

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n,$$

și obținem

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2.$$

8.3 Puncte singulare

8.17 Definiție. Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numește **punct singular** al funcției f dacă orice disc $D(a, r)$ conține puncte în care funcția f este olomorvă și puncte în care funcția f nu este olomorvă. Punctul a este **punct singular izolat** dacă f este olomorvă în cel puțin un disc punctat $D(a, r) \setminus \{a\}$. Dacă f nu este olomorvă în nici un disc punctat cu centrul în a atunci a se numește **punct singular neizolat**.

8.18 Observație. Conform Teoremei lui Laurent în jurul unui punct singular izolat funcția f se poate dezvolta în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

8.19 Definiție. Fie a un punct singular izolat al funcției f .

a) dacă partea principală a seriei Laurent într-un disc punctat în a este nulă atunci a se numește **punct singular eliminabil**;

b) dacă partea principală a seriei Laurent conține un număr finit de termeni, adică f se scrie sub forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

atunci punctul a se numește **pol de ordinul m** ;

c) dacă partea principală are o infinitate de termeni atunci a se numește **punct singular esențial izolat**.

8.20 Exemplu. a) Punctul $z = 0$ este pentru funcția $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ un punct singular eliminabil, pentru că dezvoltarea în serie Laurent este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad |z| > 0,$$

partea principală fiind nulă. Observăm că $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. În general, dacă $z = a$ este punct singular eliminabil atunci există și este finită limita $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

b) Punctul $z = 0$ este pentru funcția $f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}$ pol de ordin 3 pentru că

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\sin z} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z} + \frac{1}{3} + \frac{13z}{90} + \dots \end{aligned}$$

c) Punctul $z = 0$ este punct singular esențial izolat al funcției $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, pentru că partea principală a seriei Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

are o infinitate de termeni.

d) Punctul $z = 0$ este punct singular neizolat pentru funcția $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Într-adevăr, punctele $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ sunt poli simpli și pentru că $z_k \rightarrow 0$ când $k \rightarrow \infty$ rezultă că în orice disc centrat în origine există o infinitate de puncte singulare ale funcției f .

8.4 Teorema reziduurilor

8.21 Definiție. Fie a un punct singular izolat al funcției f . Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

se numește **reziduu funcției f relativ la punctul singular a** și se notează

$$a_{-1} = \text{Rez}(f, a).$$

8.22 Observație. Coeficientul a_{-1} joacă un rol special între coeficienții seriei Laurent, deoarece

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz \iff \int_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}(f, a).$$

Această formulă permite calculul unei integrale pe o curbă închisă (în particular un cerc) care conține în domeniul mărginit de ea un punct singular izolat, prin cunoașterea reziduului funcției f relativ la punctul singular.

8.23 Teoremă (Teorema reziduurilor a lui Cauchy). *Fie f o funcție olomorvă în interiorul domeniului mărginit de curba simplă, închisă și orientată pozitiv C , cu excepția punctelor singulare a_1, a_2, \dots, a_m . Atunci*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Rez}(f, a_k).$$

Demonstrație. Încercuim fiecare punct a_k cu câte un cerc C_k cu rază suficient de mică astfel încât domeniile mărginite de C_k să fie disjuncte și conținute în domeniul mărginit de C . Atunci din teorema lui Cauchy

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Rez}(f, a_k).$$

□

8.24 Observație. Dacă a este un pol simplu iar funcția f se scrie $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ cu g și h olomorfe în jurul punctului singular și $g(a) \neq 0$, atunci reziduul funcției f se calculează prin

$$\operatorname{Rez}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Într-adevăr, din dezvoltarea

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots, \quad \text{cu } a_{-1} \neq 0$$

obținem egalitatea $(z-a) \cdot g(z) = h(z) \cdot [a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots]$. Pentru $z = a$ se obține $h(a) = 0$. Derivând se obține

$$g(z) + (z-a) \cdot g'(z) = h'(z) \cdot [a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots] + h(z) \cdot [a_0 + 2a_1(z-a) + \dots].$$

Pentru $z = a$ obținem $g(a) = h'(a) \cdot a_{-1}$. Din faptul că $g(a) \neq 0$, rezultă că $h'(a) \neq 0$ și $\operatorname{Rez}(f, a) = g(a)/h'(a)$.

8.25 Observație. Dacă a este pol de ordinul m pentru funcția f atunci

$$\operatorname{Rez}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Acest lucru se poate demonstra plecând de la dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + h(z)$$

unde h este o funcție olomorvă în jurul punctului a . Atunci

$$[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1)! + [(z-a)^m h(z)]^{(m-1)}.$$

Punctul singular a fiind rădăcină multiplă de ordin cel puțin m pentru $(z-a)^m h(z)$ avem

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^m h(z)]^{(m-1)} = 0.$$

Ținând cont de această limită și egalitatea anterioară observația făcută este demonstrată.

8.26 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=6} \frac{dz}{z(e^z-1)}.$$

Punctele singulare ale funcției $f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$ se obțin egalând numitorul cu 0. Ecuația $e^z - 1 = 0$ are soluțiile $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta înseamnă că $z = 0$ este pol de ordinul doi, iar $z_k = 2k\pi i$, $k \neq 0$ poli de ordinul 1. Dorim să vedem care din aceste puncte se găsesc în interiorul discului dat. Punem condiția $|2k\pi i + i| < 6$. Aceasta este echivalent cu $|2k\pi + 1| < 6$, adică $-6 < 2k\pi + 1 < 6$. De aici $k \in (-\frac{7}{2\pi}, \frac{5}{2\pi}) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.

Folosind Teorema reziduurilor avem

$$\int_{|z+i|=6} \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i (Rez(f, -2\pi i) + Rez(f, 0)).$$

Punctul $z = -2\pi i$ este pol simplu și se calculează prin

$$Rez(f, -2\pi i) = \lim_{z \rightarrow -2\pi i} \frac{1}{(z(e^z-1))'} = \lim_{z \rightarrow -2\pi i} \frac{1}{e^z - 1 + ze^z} = -\frac{1}{2\pi i}.$$

Punctul $z = 0$ este pol dublu și atunci se calculează cu formula

$$\begin{aligned} Rez(f, 0) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{e^z-1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2(e^z-1)e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z}{2(e^z-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{2e^z} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Valoarea integralei va fi

$$\int_{|z+i|=6} \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2\pi i} - \frac{1}{2} \right) = -1 - \pi i.$$

8.27 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} dz.$$

Funcția $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}$ are punctele singulare 0, -1, -2. Pentru că $|0+i| = 1 < 2$, $|-1+i| = \sqrt{2} < 2$ și $|-2+i| = \sqrt{5} > 2$, doar 0 și -1 se găsesc în interiorul cercului $|z+i| = 2$.

Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} dz = 2\pi i \cdot [Rez(f, 0) + Rez(f, -1)].$$

Punctul $z = -1$ este pol simplu și $z = 0$ este punct singular esențial izolat. Avem

$$\operatorname{Rez}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pentru a obține reziduul funcției relativ la origine desfacem în fracții simple

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2},$$

cu $A = 1$ și $B = -1$ și obținem

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+2}.$$

Acum dezvoltăm în serie Laurent fiecare din cele două fracții. Ținem cont de

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}, \quad |z| > 0 \\ \frac{1}{z+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1 \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2 \end{aligned}$$

și obținem

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} - \dots\right), \end{aligned}$$

dezvoltare valabilă în coroana circulară $0 < |z| < 1$. Coeficientul lui $1/z$ din această dezvoltare va fi

$$\operatorname{Rez}(f, 0) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\right) - \left(\frac{1}{1!2} - \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} - \dots\right).$$

Ținând cont de faptul că

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots = 1 - e^{-x}$$

rezultă

$$\operatorname{Rez}(f, 0) = 1 - e^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}.$$

Valoarea integralei este

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} dz = \frac{2\pi i}{\sqrt{e}}.$$

8.5 Aplicații ale Teoremei reziduurilor

Teorema reziduurilor se poate folosi la calculul unor integrale reale.

8.28 Exemplu. Să se calculeze

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{5 - 3 \cos x} dx.$$

Folosind formula $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ integrala este echivalentă cu

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos nx}{5 - 3 \cos x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{2nxi}}{5 - 3 \cos x} dx.$$

Notăm $z = e^{ix}$. Când x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, variabila z parcurge cercul $|z| = 1$. Avem $dz = ie^{ix} dx$, de unde $dx = \frac{dz}{iz}$. Funcția cosinus se poate rescrie $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$. Cu acestea avem de calculat

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{5 - 3 \frac{z^2 + 1}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz} = \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{10z - 3z^2 - 3} dz.$$

Ecuatia $-3z^2 + 10z - 3 = 0$ are rădăcinile $z_1 = 3$ și $z_2 = 1/3$. Singurul punct singular al funcției de sub integrală situat în interiorul cercului $|z| = 1$ este $z_2 = 1/3$ care este un pol simplu. Aplicând Teorema reziduurilor rezultă

$$I = \operatorname{Re} \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Rez} \left(\frac{1 - z^{2n}}{10z - 3z^2 - 3}, \frac{1}{3} \right) = \operatorname{Re} 2\pi \frac{1 - z^{2n}}{10 - 6z} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{2n}} \right).$$

8.29 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Datorită parității funcției de sub integrală avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Considerăm conturul $C = C_R \cup L_R$ format din semicercul C_R din semiplanul $\operatorname{Im} z > 0$ al cercului $|z| = R$ parcurs în sens trigonometric și segmentul L_R ce unește punctele $-R$ și R de pe axa reală. Se alege R suficient de mare încât toate punctele singulare ale funcției $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z^2 + 1)^2}$ să fie în interiorul conturului C . Doar polul dublu $z = i$ aparține interiorului lui C . Conform Teoremei reziduurilor rezultă

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(f, i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} ((z - i)^2 \cdot f(z))' = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{e^{i\pi z}}{(z + i)^2} \right)' \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{i\pi e^{i\pi z} (z + i)^2 - e^{i\pi z} 2(z + i)}{(z + i)^4} = \frac{\pi(\pi + 1)e^{-\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Dar

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{L_R} f(z) dz = \int_0^{\pi} f(Re^{it}) \cdot iRe^{it} dt + \int_{-R}^R f(t) dt.$$

Pentru că

$$|f(Re^{it})| = \left| \frac{e^{i\pi Re^{it}}}{(R^2 e^{2it} + 1)^2} \right| = \frac{e^{-\pi R \sin t}}{|R^2 e^{2it} + 1|^2} \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

rezultă că

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})| \cdot R dt \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2}.$$

Trecând la limită cu $R \rightarrow \infty$ rezultă $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ și atunci

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

În concluzie,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi(\pi + 1)e^{-\pi}}{4}.$$

8.30 Observație. Metoda descrisă în exemplul anterior poate fi aplicată integralelor de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{sau} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} R(x) dx, \quad \omega > 0$$

unde P, Q sunt polinoame cu gradul lui P mai mic sau egal cu 2 decât gradul lui Q și R este o funcție absolut integrabilă pe \mathbb{R} . Dacă f este funcția de sub integrală din ambele cazuri atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Rez}(f, z_k),$$

unde z_k sunt punctele singulare ale funcției f situate în semiplanul superior. Presupunem că punctele singulare ale funcției f nu se găsesc pe axa reală.

8.6 Exerciții

Probleme propuse

8.1. Să se dezvolte în serie Taylor, în jurul punctelor indicate, următoarele funcții, precizând și mulțimea de valabilitate:

$$a) f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}, \quad z_0 = 0$$

$$b) f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = i$$

8.2. Să se dezvolte în serie Laurent, pe mulțimile indicate, următoarele funcții:

$$a) f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad |z| > 0$$

$$b) f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}, \quad |z| > 0$$

$$c) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 6}, \quad 0 < |z - 2| < 5$$

$$d) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 6}, \quad |z - 2| > 5$$

$$e) f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad |z| > 1$$

$$f) f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 0 < |z| < 1$$

$$g) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad |z| < 1$$

$$h) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$i) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad |z| > 2$$

$$j) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad 0 < |z - 1| < 3$$

$$k) f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad |z - 1| > 3$$

8.3. Să se determine punctele singulare și să se precizeze natura acestora, pentru următoarele funcții:

$$a) f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z+1)^5}$$

$$b) f(z) = \frac{z}{e^{2z} - 1}$$

$$c) f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+1)}$$

$$d) f(z) = \frac{z^4 e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$$

$$e) f(z) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}$$

8.4. Să se calculeze reziduul funcțiilor în punctul indicat:

$$a) f(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 3}, \quad z = -1$$

$$b) f(z) = \frac{\operatorname{ch} \pi z}{z^4 - 1}, \quad z = i$$

$$c) f(z) = \frac{\cos z}{e^z + 1}, \quad z = \pi i$$

$$d) f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3(z+1)}, \quad z = 0$$

$$e) f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z^2 + 1)^2}, \quad z = i$$

$$f) f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^3}, \quad z = 1$$

$$g) f(z) = (z^2 + 1)^2 \sin \frac{1}{z}, \quad z = 0$$

8.5. Să se calculeze integralele:

$$a) \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2(2z - \pi)} dz$$

$$b) \int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

$$c) \int_{|z|=3} \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z-1)} dz$$

$$d) \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z^2 + 1)^2} dz$$

Indicații la problemele propuse

8.1.

$$a) f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{3^n} \right] z^n, \quad |z| < 1$$

$$b) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (z-i)^n, \quad |z-i| < 1$$

8.2.

$$a) f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$$b) f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots$$

$$c) f(z) = -\frac{1}{25} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (z-2)^n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \cdot (z-2) - \dots$$

$$d) f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{5}{(z-2)^3} + \frac{5^2}{(z-2)^4} - \frac{5^3}{(z-2)^5} + \dots$$

$$e) f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots$$

$$f) f(z) = \frac{1}{z} - (1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$$

$$g) f(z) = -\frac{1}{3}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots\right)$$

$$h) f(z) = \frac{1}{3z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots\right)$$

$$i) f(z) = \frac{1}{3z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{3z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \dots\right)$$

$$j) f(z) = \frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{3^2} - \frac{(z-1)^3}{3^3} + \dots\right)$$

$$k) f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3}{(z-1)^3} + \frac{3^2}{(z-1)^4} - \frac{3^3}{(z-1)^5} + \dots$$

8.3. a) $z = 0$ pol triplu și $z = -1$ pol de ordinul 5 b) $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}^*$ poli simpli și $z = 0$ punct eliminabil c) $z = -1$ pol simplu și $z = 0$ pol simplu d) $z = 1$ pol dublu și $z = 0$ punct singular esențial izolat e) $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ poli simpli și $z = 0$ punct singular neizolat

8.4. a) $z = -1$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f, -1) = \frac{-1}{2}$ b) $z = i$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f, i) = \frac{-i}{4}$ c) $z = \pi i$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f, \pi i) = -\operatorname{ch} \pi$ d) $z = 0$ pol simplu, $\operatorname{Rez}(f, 0) = 1$ e) $z = i$ pol dublu, $\operatorname{Rez}(f, i) = \frac{\pi+i}{4}$ f) $z = 1$ pol triplu, $\operatorname{Rez}(f, 1) = 1$ g) $z = 0$ punct esențial izolat, $\operatorname{Rez}(f, 0) = 1 - \frac{2}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{27}{40}$

8.5.

$$a) 2\pi i [\operatorname{Rez}(f, \frac{\pi}{2}) + \operatorname{Rez}(f, 0)] = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{4i}{\pi} - 2i$$

$$b) 2\pi i [\operatorname{Rez}(f, 0) + \operatorname{Rez}(f, 1)] = 2\pi i(1 + 0) = 2\pi i$$

$$c) 2\pi i [\operatorname{Rez}(f, 0) + \operatorname{Rez}(f, 1)] = 2\pi i(-1 + \operatorname{ctg} 1)$$

$$d) 2\pi i \operatorname{Rez}(f, i) = \frac{\pi}{2e}.$$

Capitolul 9

Transformata Laplace

9.1 Definiția transformatei Laplace

9.1 Definiție. Funcția F de variabilă complexă definită prin

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (9.1)$$

se numește **transformata Laplace** a funcției f .

9.2 Notăție. Transformata Laplace a funcției f se mai notează și

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),$$

unde \mathcal{L} este operatorul care transformă funcțiile originale f în funcții imagine F .

9.3 Observație. Pentru ca transformata Laplace să existe trebuie ca integrala improprie din relația (9.1) să fie convergentă, adică limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

trebuie să existe și să fie finită. În continuare, studiem în ce condiții această integrală este convergentă.

9.4 Definiție. O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește **original** dacă are următoarele proprietăți:

(i) $f(t) = 0$, pentru orice $t < 0$.

(ii) pe orice interval mărginit, funcția f este continuă cu excepția unui număr finit de puncte, în care limitele laterale ale funcției există și sunt finite.

(iii) există constantele $M > 0$, $\sigma \geq 0$, astfel încât

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}, \quad \text{pentru orice } t \geq 0.$$

9.5 Notăție. Mulțimea funcțiilor originale se notează cu Ω .

9.6 Exemplu. Funcția lui Heaviside H definită prin

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

este o funcție originală.

9.7 Observație. Pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, funcția $H \cdot f$ verifică proprietatea (i). De aceea, în continuare toate funcțiile f se presupun înmulțite cu H fără a scrie aceasta în mod explicit.

9.8 Observație. O funcție care verifică proprietatea (ii) se numește continuă pe porțiuni. O astfel de condiție ne asigură integrabilitatea funcției $e^{-st}f(t)$ pe orice interval $[0, x]$, $x > 0$. Pentru o astfel de funcție f există un șir strict crescător de puncte (t_n) , $t_n \in [0, \infty)$, $n \geq 0$, cu $t_0 = 0$ și un șir de funcții $(f_n(t))$, $f_k : [t_{k-1}, t_k) \rightarrow \mathbb{C}$ continue pe (t_{k-1}, t_k) astfel încât $f|_{[t_{k-1}, t_k)} = f_k$. Este adevărată reprezentarea

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k)] f_k(t).$$

Aceasta rezultă din următoarea proprietate a funcției lui Heaviside

$$H(t - a) - H(t - b) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b) \\ 0, & t \notin [a, b). \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă t aparține unui interval $[t_{i-1}, t_i)$, atunci $H(t - t_{i-1}) - H(t - t_i) = 1$ și $H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k) = 0$, $k \neq i$. Deci $\sum_{k=1}^{\infty} [H(t - t_{k-1}) - H(t - t_k)] f_k(t) = f_i(t) = f(t)$.

De exemplu, funcția parte întreagă $f(t) = [t]$, unde $[t] = n$, pentru $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, se scrie

$$[t] = \sum_{k=0}^{\infty} [H(t - k) - H(t - k - 1)] k.$$

9.9 Exemplu. Orice polinom este o funcție originală. Într-adevăr, dacă p este un polinom de gradul n , $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$, atunci, pe baza observației că $t \leq e^{t/e}$, pentru orice $t \geq 0$, avem

$$|p(t)| \leq K e^{\frac{tn}{e}}, \text{ pentru orice } t \geq 0, \text{ unde } K = (n+1) \cdot \max(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0).$$

9.10 Observație. Orice funcție care verifică proprietatea (iii) se numește de tip exponențial. Constanta σ se numește indice de creștere. Pentru o funcție dată f , infimumul indicilor de creștere σ se numește abscisă de convergență și se notează cu $\sigma_0 = \sigma_0(f)$. Pentru un polinom p de gradul n am văzut că $\sigma = n/e$ este un indice de creștere. Dar orice $\sigma > 0$ este un indice de creștere, pentru că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|p(t)|}{e^{\sigma t}} = 0.$$

Așadar, $\sigma_0(p) = 0$. Desigur că $\sigma = 0$ nu este indice de creștere pentru p .

Dacă funcția f este mărginită atunci $\sigma = \sigma_0(f) = 0$. În particular, $\sigma_0(H) = 0$.

Funcția $f(t) = e^{t^{1+a}}$, $a > 0$, nu este de tip exponențial, pentru că $f(t)/e^{\sigma t}$ este nemărginită pentru orice $\sigma > 0$. Aceasta rezultă din

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^{1+a}}}{e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^{1+a} - \sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(t^a - \sigma)} = +\infty.$$

9.11 Teoremă (Teorema de existență). *Fie $f \in \Omega$ o funcție original cu abscisa de convergență σ_0 . Atunci transformata Laplace a funcției f există pentru orice $s \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.*

Demonstrație. Fie $s = \sigma + i\omega$, unde $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ cu $\sigma > \sigma_0$. Atunci există σ_1 un indice de creștere a funcției f astfel încât $\sigma > \sigma_1 > \sigma_0$. Astfel, există $M > 0$ astfel încât:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_1 t}, \text{ pentru orice } t \geq 0.$$

Fie $x > 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^x |e^{-st}| |f(t)| dt = \int_0^x e^{-\sigma t} |f(t)| dt \leq \int_0^x e^{-\sigma t} M e^{\sigma_1 t} dt \\ &\leq M \int_0^x e^{-t(\sigma - \sigma_1)} dt = -\frac{M}{\sigma - \sigma_1} (e^{-x(\sigma - \sigma_1)} - 1) \leq \frac{M}{\sigma - \sigma_1}. \end{aligned}$$

Aceasta ne arată că integrala $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ este convergentă și în plus

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \frac{M}{\sigma - \sigma_1}. \quad (9.2)$$

Așadar, transformata Laplace a funcției f există în condițiile date în teoremă. \square

9.12 Exemplu. Să calculăm transformata Laplace a funcției lui Heaviside H .

$$\mathcal{L}\{H(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad \text{pentru } s \text{ cu } \operatorname{Re} s > 0.$$

Fiindcă funcția constantă $f(t) = 1$, coincide cu funcția lui Heaviside pe $[0, \infty)$, avem

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}. \quad (9.3)$$

9.2 Proprietăți ale transformatei Laplace

9.13 Teoremă (Teorema imaginii la infinit). *Dacă $f \in \Omega$, atunci transformata Laplace F satisface*

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} F(s) = 0. \quad (9.4)$$

Demonstrație. Inegalitatea (9.2) se rescrie $|F(s)| \leq M/(\operatorname{Re} s - \sigma_1)$. Prin trecere la limită se obține afirmația din enunț. \square

9.14 Teoremă (Liniaritatea transformatei Laplace). Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și pentru orice $f, g \in \Omega$ avem

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}. \quad (9.5)$$

Demonstrație. Arătăm mai întâi că Ω este spațiu vectorial peste \mathbb{C} . Fie $f, g \in \Omega$. Atunci există $\sigma_1 \geq 0$ și $\sigma_2 \geq 0$ astfel încât $|f(t)| \leq M_f \cdot e^{\sigma_1 t}$ și $|g(t)| \leq M_g \cdot e^{\sigma_2 t}$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ are ca indice de creștere $\max(\sigma_1, \sigma_2)$, pentru că

$$|\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)| \leq |\alpha| \cdot |f(t)| + |\beta| \cdot |g(t)| \leq (|\alpha| M_f + |\beta| M_g) \cdot e^{\max(\sigma_1, \sigma_2)t}, \quad t \geq 0.$$

Relația (9.5) rezultă din liniaritatea integralei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}. \end{aligned}$$

□

9.15 Teoremă (Teorema deplasării). Fie $f \in \Omega$. Atunci

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a), \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a + \sigma_0(f). \quad (9.6)$$

Demonstrație. Avem

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a).$$

□

9.16 Exemplu. Fie $a \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{1\}(s - a) = \frac{1}{s - a}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \quad (9.7)$$

Folosind liniaritatea transformatei avem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (9.8)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (9.9)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{sh } \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{\omega t}\} - \mathcal{L}\{e^{-\omega t}\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.\end{aligned}\quad (9.10)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{ch } \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-\omega t}\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega}\right) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.\end{aligned}\quad (9.11)$$

9.17 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcțiilor $f(t) = e^{at} \sin bt$, $g(t) = e^{at} \cos bt$. Folosind formulele (9.6), (9.8) și (9.9) obținem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} &= \frac{b}{(s - a)^2 + b^2} \\ \mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} &= \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}.\end{aligned}$$

9.18 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcției $f(t) = \text{ch } 2t \cos 3t$. Folosind formulele (9.6) și (9.9) obținem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{ch } 2t \cos 3t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \cos 3t\right\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{2t} \cos 3t\} + \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 9} + \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9}\right) = \frac{s^3 + 5s}{s^4 + 10s^2 + 169}.\end{aligned}$$

9.19 Teoremă (Teorema de unicitate a lui Lerch). *Fie $f, g \in \Omega$ continue. Dacă $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ atunci $f = g$.*

Demonstrație. Fie $h \in \Omega$ definită prin $h(t) = f(t) - g(t)$. Conform ipotezei $\mathcal{L}\{h\} = 0$. Demonstrăm că $h(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$. Putem presupune în continuare că h este o funcție reală. (dacă h este complexă avem $\mathcal{L}\{\text{Re } h\} = 0$ și $\mathcal{L}\{\text{Im } h\} = 0$; va rezulta că $\text{Re } h = 0$ și $\text{Im } h = 0$, adică $h = 0$).

Fie $\sigma > \sigma_0(h)$ un indice de creștere a funcției h și $s = \sigma + n$, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Atunci,

folosind formula de integrare prin părți

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \int_0^\infty e^{-nt} \cdot e^{-\sigma t} h(t) dt \\ &= e^{-nt} \int_0^t e^{-\sigma u} h(u) du \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-nt} \left(\int_0^t e^{-\sigma u} h(u) du \right) dt \\ &= n \int_0^\infty e^{-nt} \left(\int_0^t e^{-\sigma u} h(u) du \right) dt. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\int_0^\infty e^{-nt} \varphi(t) dt = 0, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

unde $\varphi(t) = \int_0^t e^{-\sigma u} h(u) du$. Cu schimbarea de variabilă $x = e^{-t}$, obținem

$$\int_0^1 x^{n-1} \varphi \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Funcția $\psi(x) = \varphi \left(\ln \frac{1}{x} \right)$ este continuă pe $[0, 1]$, cu $\psi(0+) = 0 = \psi(1)$. Într-adevăr,

$$\lim_{x \searrow 0} \psi(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} h(u) du = \mathcal{L}\{h\}(\sigma) = 0.$$

Am obținut că

$$\int_0^1 x^{n-1} \psi(x) dx = 0, \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

De aici rezultă că

$$\int_0^1 p(x) \cdot \psi(x) dx = 0, \quad \text{pentru orice polinom } p.$$

Fie $p_n(x)$ un polinom de gradul n care aproximează uniform funcția continuă $\psi(x)$. De exemplu, putem considera polinoamele lui Bernstein:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \psi \left(\frac{k}{n} \right).$$

Pentru orice $\epsilon > 0$, există un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ cu $|p_{n_\epsilon}(x) - \psi(x)| < \epsilon$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Într-adevăr, funcția ψ fiind continuă pe $[0, 1]$ este uniform continuă, deci pentru $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că $|\psi(t) - \psi(x)| < \epsilon/2$, pentru orice $|t - x| < \delta$. Tot din faptul că ψ este continuă pe $[0, 1]$ rezultă că ψ este mărginită, adică există $M > 0$ cu proprietatea că $|\psi(t)| \leq M$, pentru orice $t \in [0, 1]$. Vom avea pentru orice x și t cu proprietatea $|t - x| \geq \delta$

$$|\psi(t) - \psi(x)| \leq |\psi(t)| + |\psi(x)| \leq 2M \cdot 1 \leq 2M \cdot \frac{(t-x)^2}{\delta^2}.$$

Așadar,

$$|\psi(t) - \psi(x)| < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}, \quad \text{pentru orice } t, x \in [0, 1].$$

Folosind formula binomului lui Newton următoarele relații sunt adevărate

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= (x+1-x)^n = 1 \\
\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k &= nx \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = nx \\
\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k^2 &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} [k(k-1) + k] \\
&= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + nx \\
&= n(n-1)x^2 + nx = n^2x^2 + nx(1-x).
\end{aligned}$$

Folosind aceste relații

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - \psi(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[\psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x) \right] \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left| \psi\left(\frac{k}{n}\right) - \psi(x) \right| \\
&< \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \right] \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (k^2 - 2nx \cdot k + n^2x^2) \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} [n^2x^2 + nx(1-x) - 2nx \cdot nx + n^2x^2] \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \leq \epsilon, \quad \text{pentru } n > \left\lfloor \frac{M}{\epsilon\delta^2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$\int_0^1 [\psi(x)]^2 dx = \int_0^1 \psi(x) \cdot [\psi(x) - p_{n_\epsilon}(x)] dx \leq \epsilon \int_0^1 |\psi(x)| dx, \quad \text{pentru orice } \epsilon > 0.$$

Facem $\epsilon \rightarrow 0$. Vom avea $\int_0^1 \psi^2(x) dx = 0$, ceea ce implică pe baza continuității lui ψ că $\psi(x) = 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Rezultă că $\varphi(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$. Prin derivare, $e^{-\sigma t} h(t) = 0$. Obținem $h(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$. \square

9.20 Teoremă (Derivarea originalului). *Dacă $f \in \Omega$ este continuă și $f' \in \Omega$ atunci*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+), \quad \text{Re } s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f')), \quad (9.12)$$

unde $f(0+) = \lim_{t \searrow 0} f(t)$ și $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Demonstrație. Integrând prin părți, avem

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0+),$$

pentru că $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$, deoarece pentru $s = \sigma + i\omega$ cu $\sigma > \sigma_0(f)$ există un indice de creștere σ_1 a funcției f astfel încât $\sigma > \sigma_1 > \sigma_0(f)$ și

$$|f(t)e^{-st}| \leq M \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot e^{-\sigma t} = M e^{-(\sigma - \sigma_1)t},$$

iar $\lim_{t \rightarrow \infty} M e^{-(\sigma - \sigma_1)t} = 0$. □

9.21 Observație. Dacă $f, f' \in \Omega$ și f are un punct de discontinuitate a , atunci

$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0+) - e^{-as}[f(a+) - f(a-)].$$

Aceasta se demonstrează scriind

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^a e^{-st} f'(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

și apoi integrând prin părți fiecare integrală.

9.22 Teoremă. Dacă $f, f', \dots, f^{(n)}$ sunt funcții original continue și există și sunt finite $\lim_{t \searrow 0} f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0+)$, pentru orice $k = 0, 1, \dots, n-1$, atunci

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+), \quad (9.13)$$

pentru $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f'), \dots, \sigma_0(f^{(n)}))$.

Demonstrație. Se arată prin inducție matematică. Pentru $n = 1$ avem relația (9.12). Pentru pasul de inducție se folosește relația $\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = s \cdot \mathcal{L}\{f^{(n)}\} - f^{(n)}(0+)$. □

9.23 Exemplu. Relația (9.13) este foarte importantă în rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Spre exemplu, să rezolvăm ecuația

$$x'' + x = \sin 2t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Aplicând operatorul Laplace ecuației diferențiale avem succesiv

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'' + x\} &= \mathcal{L}\{\sin 2t\} \\ s^2 X - sx(0) - x'(0) + X &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ X(s^2 + 1) - 2s - 1 &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ X &= \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{2s + 1}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Descompunând în fracții simple

$$\frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{2s + 1}{s^2 + 1} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1},$$

cu $A = 0$, $B = -2/3$, $C = 2$ și $D = 5/3$. Putem scrie

$$\begin{aligned} X &= \frac{-\frac{2}{3}}{s^2 + 4} + \frac{2s + \frac{5}{3}}{s^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{2}{s^2 + 4} + 2 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{3} \mathcal{L} \{ \sin 2t \} + 2 \mathcal{L} \{ \cos t \} + \frac{5}{3} \mathcal{L} \{ \sin t \} \\ &= \mathcal{L} \left\{ -\frac{1}{3} \sin 2t + 2 \cos t + \frac{5}{3} \sin t \right\} \end{aligned}$$

Pe baza proprietății de unicitate rezultă soluția ecuației diferențiale

$$x(t) = 2 \cos t + \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t.$$

9.24 Teoremă (Integrarea originalului). *Fie $f \in \Omega$. Atunci*

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{pentru } \operatorname{Re} s > \sigma_0(f). \quad (9.14)$$

Demonstrație. Fie $g(t) = \int_0^t f(u) du$. Atunci $g'(t) = f(t)$ și $g(0) = 0$. Demonstrăm că g este o funcție original. Dacă σ este un indice de creștere a funcției f și $\sigma \neq 0$, avem

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(u)| du \leq M \int_0^t e^{\sigma u} du = \frac{M e^{\sigma u}}{\sigma} \Big|_0^t \leq \frac{M e^{\sigma t}}{\sigma}.$$

Dacă $\sigma = 0$ atunci $|f(t)| \leq M$ și $|g(t)| \leq Mt \leq M \cdot e^{\frac{t}{e}}$. Avem

$$\mathcal{L} \{ f(t) \} = F(s) = \mathcal{L} \{ g'(t) \} = s \mathcal{L} \{ g(t) \} - g(0) = s \mathcal{L} \{ g(t) \}.$$

□

9.25 Exemplu. Avem

$$\mathcal{L} \{ t^n \} = \mathcal{L} \left\{ n \int_0^t u^{n-1} du \right\} = \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L} \{ t^{n-1} \} = \dots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L} \{ 1 \} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Am obținut formula

$$\mathcal{L} \{ t^n \} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (9.15)$$

9.26 Teoremă (Derivarea imaginii). *Transformata Laplace F a unei funcții original f este olomorvă și*

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L} \{ (-t)^n f(t) \} (s). \quad (9.16)$$

Demonstrație. Demonstrăm că F este olomorvă în semiplanul $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$. Fie $h \in \mathbb{C}$ și $\sigma > \sigma_0(f)$ un indice de creștere astfel încât $\operatorname{Re} s > \sigma$ și $\operatorname{Re}(s+h) > \sigma$.

Dacă f este de tip exponențial atunci și $t \cdot f(t)$ este de tip exponențial. Avem

$$\frac{F(s+h) - F(s)}{h} + \int_0^\infty te^{-st} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-st} (e^{-ht} - 1 + ht) f(t) dt.$$

Pornind de la egalitatea

$$e^{-ht} - 1 + ht = h^2 t^2 \int_0^1 (1-u) e^{-htu} du$$

și folosind inegalitatea $1 - e^{-x} \leq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leq t^2 |h|^2 \int_0^1 e^{-ut \operatorname{Re} h} du = t^2 |h|^2 \frac{1 - e^{-t \operatorname{Re} h}}{t \operatorname{Re} h} \leq t^2 |h|^2.$$

Obținem

$$\left| \frac{F(s+h) - F(s)}{h} + \int_0^\infty te^{-st} f(t) dt \right| \leq M |h| \int_0^\infty t^2 e^{-t(\operatorname{Re} s - \sigma)} dt = \frac{2M|h|}{(\operatorname{Re} s - \sigma)^3}.$$

Trecând la limită cu $h \rightarrow 0$ obținem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \int_0^\infty e^{-st} (-t f(t)) dt,$$

ceea ce demonstrează că F este olomorvă și în plus $F'(s) = \mathcal{L}\{-t f(t)\}(s)$.

Fiindcă F este olomorvă, atunci ea are derivate de orice ordin. Derivând de n ori relația

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

se obține

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^n f(t) dt = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s).$$

□

9.27 Observație. Faptul că F este olomorvă ne permite să calculăm transformata Laplace a unei funcții originale f cunoscând doar transformata Laplace pentru s aparținând axei reale. Într-adevăr, folosind teorema identității funcțiilor olomorfe, dacă F este transformata Laplace a lui f pe intervalul real $(\sigma_0(f), \infty)$ atunci F va fi transformata Laplace pentru $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$.

Să exemplificăm importanța acestui rezultat, generalizând rezultatul (9.15). Vom calcula $\mathcal{L}\{t^a\}$, pentru orice $a > -1$. Fie $s > 0$ un număr real. Prin schimbarea de variabilă $st = x$ avem

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.$$

Considerând acum pe s ca variabilă complexă obținem

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1, \operatorname{Re} s > 0. \quad (9.17)$$

9.28 Exemplu. Să aflăm funcția original a transformatei Laplace $F(s) = \operatorname{arctg} \frac{3}{s+2}$. Prin derivare avem

$$F'(s) = \frac{\frac{-3}{(s+2)^2}}{\frac{9}{(s+2)^2} + 1} = -\frac{3}{(s+2)^2 + 9}.$$

Pentru că

$$\mathcal{L}\{-e^{-2t} \sin 3t\} = -\frac{3}{(s+2)^2 + 9},$$

și folosind $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)$, avem $-tf(t) = -e^{-2t} \sin 3t$. Așadar

$$f(t) = e^{-2t} \frac{\sin 3t}{t}.$$

9.29 Exemplu. Să determinăm soluția pe $[0, \infty)$ a ecuației $tx'' + 2x' = t^2$, care satisface $x(0) = 0$ și este mărginită în vecinătatea originii.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Fie $a = x'(0) \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{L}\{x''\} = s^2X - sx(0) - a = s^2X - a$ și

$$\mathcal{L}\{tx''\} = -(s^2X - a)' = -2sX - s^2X'.$$

Pentru că $\mathcal{L}\{x'\} = sX - x(0) = sX$ și $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$ rezultă

$$-2sX - s^2X' + 2sX = \frac{2}{s^3},$$

adică $X' = -\frac{2}{s^5}$. De aici $X = \frac{1}{2s^4} + C$. Dar C trebuie să fie 0 pentru că $X(\infty) = 0$, vezi (9.4).

Pentru că $\mathcal{L}\{t^3/12\} = \frac{1}{2s^4}$ obținem $x = \frac{1}{12}t^3$.

9.30 Teoremă (Integrarea imaginii). Dacă $\frac{f(t)}{t} \in \Omega$ atunci

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u) du, \quad \text{pentru } \operatorname{Re} s > \sigma_0(f(t)/t). \quad (9.18)$$

Demonstrație. Notăm $G(s) = \mathcal{L}\{f(t)/t\}(s)$. Aplicând (9.16) pentru $n = 1$, avem $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)/t\} = -G'(s)$. Integrând, obținem

$$\int_s^a F(u) du = \int_s^a -G'(u) du = G(s) - G(a).$$

Pentru că $\lim_{a \rightarrow \infty} G(a) = 0$, vezi (9.4), avem

$$\int_s^\infty F(u) du = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_s^a F(u) du = G(s) - \lim_{a \rightarrow \infty} G(a) = G(s).$$

□

9.31 Exemplu. Să se calculeze valoarea integralei $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

Avem

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(0) = \int_0^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(u) du = \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{arctg} u \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

9.32 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcției

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du.$$

Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \frac{1}{s} \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(u) du = \frac{1}{s} \int_s^\infty \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{s} \operatorname{arctg} u \Big|_s^\infty = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

9.33 Teoremă (Transformata funcțiilor periodice). Fie $f \in \Omega$ o funcție periodică cu perioada T . Atunci

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (9.19)$$

Demonstrație. Avem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(u+kT)} f(u) du = \int_0^T e^{-su} f(u) du \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}.$$

Folosind suma seriei geometrice $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT} = 1/(1 - e^{-sT})$ se obține rezultatul din teoremă. \square

9.34 Exemplu. Să calculăm $\mathcal{L}\{|\sin \omega t|\}$, $\omega > 0$. Funcția $f(t) = |\sin \omega t|$ are perioada $T = \frac{\pi}{\omega}$. Folosind formula

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{ae^{at} \sin bt - be^{at} \cos bt}{a^2 + b^2}$$

și (9.19) obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{|\sin \omega t|\} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{s\pi}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} |\sin \omega t| dt = \frac{1}{1 - e^{-\frac{s\pi}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \sin \omega t dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{s\pi}{\omega}}} \frac{-se^{-st} \sin \omega t - \omega e^{-st} \cos \omega t}{\omega^2 + s^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}. \end{aligned}$$

9.35 Teoremă (Teorema întârzierii). Fie $a > 0$ și $f \in \Omega$. Atunci, pentru $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (9.20)$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

\square

9.36 Definiție. Produsul de convoluție a două funcții f și g este funcția definită prin

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du.$$

9.37 Observație. Dacă $f, g \in \Omega$ atunci

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Să mai observăm că $f \star g \in \Omega$. Într-adevăr, dacă $|f(t)| \leq M_f e^{\sigma_1 t}$ și $|g(t)| \leq M_g e^{\sigma_2 t}$ atunci

$$\begin{aligned} |(f \star g)(t)| &\leq \int_0^t |f(u)||g(t-u)| du \\ &\leq M_f M_g e^{\sigma_2 t} \int_0^t e^{(\sigma_1 - \sigma_2)u} du \leq \begin{cases} M_f M_g e^{\sigma_1 t} / (\sigma_1 - \sigma_2), & \sigma_1 > \sigma_2 \\ M_f M_g e^{(\sigma_1 + 1/\epsilon)t}, & \sigma_1 = \sigma_2 \\ M_f M_g e^{\sigma_2 t} / (\sigma_2 - \sigma_1), & \sigma_1 < \sigma_2. \end{cases} \end{aligned}$$

9.38 Teoremă (Transformata produsului de convoluție). Fie $f, g \in \Omega$. atunci

$$\mathcal{L}\{f \star g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}. \quad (9.21)$$

Demonstrație. Folosind observația că

$$(f \star g)(t) = \int_0^{\infty} f(u)g(t-u) du$$

avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^{\infty} f(u)g(t-u) du \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} f(u) \left(\int_0^{\infty} e^{-st} g(t-u) dt \right) du \\ &= \int_0^{\infty} f(u) \cdot \mathcal{L}\{g(t-u)\}(s) du \\ &= \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s) du = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s). \end{aligned}$$

□

9.39 Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Atunci $s^2 X - as - b + \omega^2 X = \mathcal{L}\{f\}$. Avem

$$X = \frac{as + b}{s^2 + \omega^2} + \mathcal{L}\{f\} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} = a\mathcal{L}\{\cos \omega t\} + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\} + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\}.$$

Soluția ecuației este

$$x = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du.$$

9.40 Teoremă (Transformata seriilor de puteri generalizate). Fie $\alpha > 0$ și f o funcție care are următoarea dezvoltare

$$f(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \geq 0$$

cu proprietatea că există și este finită $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n!} = L$. Atunci există transformata Laplace a lui f și aceasta se calculează prin

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{s^{n+\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} s > L.$$

Demonstrație. Raza seriei de puteri este $R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, ceea ce ne arată că f este corect definită pentru orice $t \geq 0$. Mai mult, f este o funcție original. Din condiția pusă asupra șirului a_n deducem că există $M > 0$ astfel încât $|a_n|n! < M^n$, pentru orice $n \geq 0$. Avem

$$|f(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|n! \cdot \frac{t^n}{n!} < e^{Mt}, \quad t \geq 0.$$

Pentru că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n^\alpha n!} = 1$, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|\Gamma(n + \alpha + 1)} = L \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n^\alpha n!}} \cdot \sqrt[n]{n^\alpha} = L,$$

ceea ce arată că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+\alpha+1}}$ este convergentă pentru $|s| > L$. Integrând membru cu membru, obținem

$$\mathcal{L}\{f\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}\{t^{n+\alpha}\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{s^{n+\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} s > L.$$

□

9.41 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcției $f(t) = J_0(2\sqrt{t})$. Avem

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n,$$

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. Transformata Laplace a lui f este

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{-1}{s}\right)^n = \frac{e^{-1/s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

9.42 Exemplu. Să se calculeze transformata Laplace a funcției $f(t) = \sin 2\sqrt{t}$. Dezvoltarea în serie a funcției f este

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{\frac{2n+1}{2}}, \quad \text{cu } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}} = 0.$$

Transformata Laplace a funcției f este

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}{s^{n+1+1/2}} \\ &= \frac{1}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{s^n (2n+1)!} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{s^n 2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^n n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s}} e^{-\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

9.43 Exemplu. Să rezolvăm ecuația diferențială cu diferențe $x'(t) + x(t-1) = t^3$, știind că $x(t) = 0$, pentru $t \leq 0$.

Fie $X = \mathcal{L}\{x\}$. Atunci $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX - x(0) = sX$ și $\mathcal{L}\{x(t-1)\} = e^{-s}X$. Avem

$$\begin{aligned} X &= \frac{6}{s^4(s+e^{-s})} = \frac{6}{s^5(1+e^{-s}/s)} = \frac{6}{s^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^n} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+5}} \\ &= 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)!} \mathcal{L}\{(t-n)^{n+4} H(t-n)\}. \end{aligned}$$

Atunci

$$x(t) = 6 \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \frac{(t-n)^{n+4}}{(n+4)!}.$$

9.3 Inversa transformatei Laplace

Se pune problema găsirii funcției original f când se cunoaște funcția imagine F . Pentru aceasta se folosește transformata inversă a lui Laplace, notată \mathcal{L}^{-1} . Avem

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

9.44 Teoremă. *Avem*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

pentru orice transformate F și G și pentru orice constante a și b .

Demonstrație. Rezultă din liniaritatea transformatei Laplace. □

Folosind această proprietate, descompunem transformata F în expresii a căror funcții original le cunoaștem și utilizând Teorema de unicitate a lui Lerch obținem funcția original f .

9.45 Exemplu. Să se calculeze

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-s-6}\right\}.$$

Originalul	Imaginea	Originalul	Imaginea
$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at}t$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at} \operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$
$e^{at}t^b$	$\frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}$	$e^{at} \operatorname{ch} bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$

Figura 9.1: Dicționar de transformate Laplace

Avem

$$\frac{s+1}{s^2-s-6} = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3}.$$

Eliminând numitorul rezultă $s+1 = A(s-3) + B(s+2)$. Dând valori lui s se obține

$$\begin{aligned} s=3 &\implies 4 = 5B \implies B = \frac{4}{5} \\ s=-2 &\implies -1 = -5A \implies A = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Acum putem calcula transformata Laplace inversă

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2-s-6} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{5}}{s+2} + \frac{\frac{4}{5}}{s-3} \right\} = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{4}{5}e^{3t}.$$

9.46 Exemplu. Să se calculeze

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2-3s}{s^2+2s+5} \right\}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2-3s}{s^2+2s+5} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5-3(s+1)}{(s+1)^2+4} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)^2+4} \right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right\} \\ &= \frac{5}{2}e^{-t} \sin 2t - 3e^{-t} \cos 2t. \end{aligned}$$

9.4 Exerciții

Probleme propuse

9.1. Să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcții:

$$a) f(t) = (t^5 + 1)^2 e^{-t}$$

$$b) f(t) = e^{-3t} \sin^2 t$$

$$c) f(t) = \operatorname{sh} 2t \cos 5t$$

$$d) f(t) = (t + 3) \sin 2t$$

$$e) f(t) = t e^{-5t} \cos t$$

$$f) f(t) = t \operatorname{sh} 2t$$

9.2. Să se determine funcția f care are transformata Laplace:

$$a) F(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$b) F(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}$$

$$c) F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$d) F(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$e) F(s) = \frac{s}{(s-1)^2(s^2+1)}$$

$$f) F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Indicații la problemele propuse

9.1. a) $F(s) = \frac{10!}{(s+1)^{11}} + \frac{2 \cdot 5!}{(s+1)^6} + \frac{1}{s+1}$ b) $F(s) = \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$ c) $F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+25}$ d) $F(s) = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' + 3 \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{6s^2+4s+24}{(s^2+4)^2}$ e) $F(s) = \frac{(s+5)^2-1}{((s+5)^2+1)^2}$ f) $F(s) = \frac{4s}{(s^2-4)^2}$

9.2. a) $f(t) = e^t - \cos t$ b) $f(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t$ c) $f(t) = -e^{-t} + e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t$
 d) $f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t$ e) $f(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2} \sin t$ f) $f(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2}t \cos t$

Bibliografie

- [1] N. Boboc, I. Colojoară, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a. Elemente de analiză matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
- [2] I. Crivei, *Matematici speciale*, Editura Fundației pentru Studii Europene, Cluj-Napoca, 2006.
- [3] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 6 edition, 2007.
- [4] G. M. Fihtenholtz, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. 2, Editura Tehnică, București, 1964.
- [5] I. Gavrea, *Calcul integral și ecuații diferențiale*, Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.
- [6] N. Ghircoiașiu, F. Tomuța, V. Indrei, I. Corovei, *Curs de matematici speciale*, vol II, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1981.
- [7] C. Iancu, *Modelare matematică. Teme speciale*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2002.
- [8] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*, Edition Mir, Moscou, 1981, (traducere din rusă în limba franceză).
- [9] K. Miller, *An introduction to advanced complex calculus*, Dover Publications, New York, 1970.
- [10] P. J. Nahin, *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* , Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [11] G. Opreș, *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1988.
- [12] G. Opreș, L. Blaga, V. Indrei, V. Selinger, *Matematici speciale*, vol. 2, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1989.
- [13] D. Popa, I. Rașa, *Hyers-Ulam stability of some differential equations and differential operators*, Handbook of Functional Equations, T. M. Rassias (ed.), Springer Optimization and Its Applications 96, 2014, 301–322.

- [14] E. Rogai, *Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale*, Editura Tehnică, București, 1965.
- [15] I. A. Rus, *Ulam stability of ordinary differential equations*, *Studia Univ. "Babeș-Bolyai", Mathematica*, **54** (2009), no. 4, 125–133.
- [16] S. Toader, G. Toader, *Matematici speciale*, vol 1, U. T. Press, Cluj-Napoca, 2009.
- [17] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, *Correspondance mathematique et physique*, vol. 10, 1838, 113–121.
- [18] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [19] http://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_14_dating_of_the_Shroud_of_Turin