Mihaela BERCHEŞAN (Miholca)

ECUAŢII DIFERENŢIALE

Editura UTPRESS
Cluj-Napoca, 2018
ISBN 978-606-737-332-5

Editura U.T. PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Ş.l. Holhoş Adrian
Ş.l. Todea Cosmin

ISBN 978-606-737-332-5

Cuprins

Introducere

Studiul ecuaţiilor diferenţiale formează obiectul unui capitol foarte important al matematicii, atât datorită nenumăratelor aplicaţii din diverse domenii, cât şi datorită aparatului matematic necesar rezolvării lor.
În culegerea de faţă, abordăm doar o parte din acest domeniu al matematicii care studiază ecuaţiile diferenţiale.
Ne-am propus ca aceasta să fie utilă în primul rând studenţilor dar şi profesorilor, în efortul lor de a prezenta exerciţii cât mai variate în cadrul seminarului de Matematici Speciale.
Ceea ce deosebeşte o ecuaţie diferenţială de o ecuaţie algebrică este faptul că necunoscuta nu este un număr, ci o funcţie. Fenomenele din natură şi societate au un caracter dinamic, ele fiind procese evolutive în timp, conform unor legi proprii. Modelarea matematică a unui fenomen dinamic revine la a stabili ecuaţiile matematice corespunzătoare, ecuaţii care sunt ecuaţii diferenţiale.
Culegerea este structurată în 5 capitole astfel:
Capitolul I prezintă noţiuni de bază: noţiunea de funcţie de o singură variabilă, funcţie explicită, funcţie implicită. Am insistat în acest capitol pe ideea de domeniu al unei funcţii.
Capitolul II stabileşte noţiunile de soluţie explicită şi soluţie implicită ale unei ecuaţii diferenţiale. De asemenea, stabilim ce înseamnă soluţie generală, soluţie particulară şi soluţie singulară a unei ecuaţii diferenţiale.
În Capitolul III, studiem câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale de ordinul I, fiecare cu metoda sa de rezolvare. Pentru fiecare tip de ecuaţie avem propuse exerciţii şi soluţiile corespunzătoare.
În Capitolul IV, propunem exerciţii diverse, rezolvate şi nerezolvate pentru ecuaţii de ordin superior cu coeficienţi constanţi, omogene şi neomogene.
Capitolul V prezintă un instrument util în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, transformata Laplace. Acest operator, împreună cu inversul său, dispune de proprietăţi interesante şi utile în rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii şi nu numai.

Mulţumiri

Doresc să mulţumesc colegilor mei, S.l. Holhoş Adrian şi S.l. Todea Cosmin pentru citirea manuscrisului şi pentru sugestiile şi observaţiile făcute pe marginea lui, care au dus la îmbunătăţirea conţinutului şi prezentării acestuia.

Cluj-Napoca
Noiembrie 2018 Autoarea

Capitolul 1

Elemente de bază

1.1 Noţiunea de funcţie. Funcţie implicită. Funcţie implicită. Funcţii elementare

1.1.1 Funcţii explicite

În această secţiune vrem să reamintim noţiunea de funcţie. Ştim că dacă două variabile sunt dependente una de alta în aşa fel încât valoarea uneia este unic determinată de o valoare a celeilalte, spunem că prima este funcţie de a doua.
Cu ajutorul a câtorva exemple, vom arăta că felul în care este exprimată relaţia dintre cele două, este mai puţin important. Important este ca dependenţa uneia de cealaltă să nu fie ambiguă, adică atunci când una ia o valoare, cealaltă să fie unic determinată de aceasta.
Exemplele următoare au rolul de a prezenta câteva modalităţi în care două variabile depind una de cealaltă.

Exemplu 1.1.1. *Fie R raza unui cerc iar A aria sa. Relaţia dintre cele două se exprimă astfel*

$$A = \pi R^2; \tag{1.1}$$

şi se înţelege că R este variabila independentă iar A este cea care depinde de R. Relaţia (1.1) îl defineşte pe A ca funcţie de R. Şi totuşi, relaţia nu este exactă. Pentru $R = -2$, aria este A iar aria nu există dacă raza *este negativă. Prin urmare, scrierea corectă este:*

$$A = \pi R^2,\ R \geq 0;$$

Exemplu 1.1.2. *Relaţia dintre două variabile mai poate fi exprimată astfel*

$$y = x^2,\ 0 \leq x \leq 2, \tag{1.2}$$

$$y = 2,\ \ -2 \leq x \leq -1.$$

Aceste două ecuaţii îl definesc pe y funcţie de x pentru intervalele precizate.

Exemplele de mai sus au rolul de a demonstra că pentru a defini o funcţie nu este esenţial ca între cele două să poată fi stabilită o ecuaţie. Ceea ce este important e ca pentru fiecare valoare a variabilei independente să existe o singură valoare a variabilei dependente de ea.

Definiţie 1.1.3. *Dacă fiecărei valori a variabilei independente x care aparţine unei anumite mulţimi E, îi corespunde o singură valoare a variabilei dependente y, spunem că variabila dependentă y este o funcţie de variabila independentă x, pe mulţimea E.*

Mulţimea E se numeşte **domeniu** iar mulţimea în care ia valori variabila dependentă, se numeşte **imaginea** funcţiei y.

Observaţie 1.1.4. *Pe parcursul prezentării noastre, ne vom referi la o formulă ca şi cum ar fi o funcţie. De exemplu, vom înţelege că relaţia*

$$y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1],$$

defineşte o funcţie şi citim "y este funcţie de x".

Observaţie 1.1.5. *O relaţie de felul $y = \frac{x}{1-x}$ este neclară deoarece nu precizează domeniul în care variabila independentă ia valori.*

1.1.2 Funcţii implicite

Să considerăm o relaţie între variabilele x şi y dată de formula

$$x + y^2 = 4 \tag{1.1}$$

Este relaţia de mai sus o funcţie? Pentru $x > 4$, formula nu va determina o valoare a lui y. Pentru a exista o valoare a lui y, e necesar ca $x \leq 4$. În aceste condiţii

$$y = \pm\sqrt{4 - x}, \ x \leq 4.$$

Dacă relaţia dintre x şi y o scriem în acest fel, observăm că valoarea lui y nu este unic determinată, prin urmare această scriere nu defineşte o funcţie. Obţinem, de exemplu, următoarele funcţii:

$$y = \sqrt{4 - x}, \ x \leq 4,$$

$$y = -\sqrt{4 - x}, \ x \leq 4.$$

Alegând relaţia $x^2 + y^2 = -4$, ne punem întrebarea dacă aceasta defineşte o funcţie? Observăm cu uşurinţă faptul că nu există valori x şi y pentru care aceasta să fie satisfăcută.
De fiecare dată când între x şi y există o relaţie de forma (1.1), vom scrie simbolic

$$f(x, y) = 0$$

şi vom spune că y este o **funcţie implicită** de x, înţelegând că y nu este neapărat o funcţie explicită, vizibilă, de x, dar că implicit există o funcţie $y = g(x)$ care verifică $f(x, y) = 0$.

Definiţie 1.1.1. *Relaţia $f(x, y) = 0$ îl defineşte y implicit în funcţie de x pe un interval I, dacă există cel puţin o funcţie $g(x)$ definită pe I astfel încât*

$$f(x, g(x)) = 0, \ \textit{pentru orice } x \in I.$$

Exemplu 1.1.2. *Să demonstrăm că*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

definește pe y ca o funcție de x pe intervalul $-2 \le x \le 2$. *Alegând, de exemplu, una din funcțiile:*

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2},\ -2 \le x \le 2,$$

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2},\ -2 \le x \le 2,$$

observăm că

$$f(x, g(x)) = x^2 + (\pm\sqrt{4 - x^2})^2 - 4 = 0.$$

Prin urmare, Definiția 1.1.1 este verificată.

În situații mai complexe, funcțiile y care determină o curbă nu se pot afla explicit. Totuși, orice curbă fiind determinată de mai multe funcții, putem afla derivata sa într-un anume punct dat.
De exemplu, ne propunem să aflăm $\frac{dy}{dx}$ pentru $\sin y + y = x$. Singura posibilitate este de a aplica diferențierea implicită.

$$\sin y + y = x \iff \frac{d}{dx}(\sin y + y) = \frac{dx}{dx} \iff cosy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1$$

și rezultă

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\cos y + 1}.$$

Vom încheia această secțiune reamintind care sunt funcțiile elementare. Acestea sunt constantele și:

(i) funcția putere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$;

(ii) funcția radical $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{Z}$ impar și $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{Z}$ par;

(iii) funcția exponențială $f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f(x) = e^x$;

(iv) funcția logaritmică $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$;

(iv) funcțiile trigonometrice: $\sin x, \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\operatorname{tg} x : \mathbb{R} \backslash \{\frac{(2k+1)\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ctg} x : \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$;

(v) funcţiile inverse celor trigonometrice: $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ etc.

(vi) toate funcţiile care se obţin prin compunerea celor de mai sus, de exemplu: $\ln(\cos x), e^{\arcsin x}$ etc.

(vii) toate funcţiile care se obţin cu ajutorul operaţiilor de adunare, scădere, înmulţire, împărţire a tuturor funcţiilor descrise mai sus, de exemplu: $(\arcsin x)^2 + \frac{e^x + x}{\sqrt{2x}}$.

1.1.3 Exerciţii

(1) Definiţi aria A unui pătrat ca o funcţie de latura sa l. Care este variabila independentă şi care este cea dependentă? Desenaţi graficul şi arătaţi cum depinde aria de latura sa, pentru valori ale laturii cuprinse între 0 şi 3.

(2) În anumite condiţii, relaţia dintre presiunea unui gaz şi volumul său poate fi exprimată astfel $pV^{\frac{3}{2}} = 1$. Exprimaţi fiecare variabilă în funcţie de cealaltă.

(3) Explicaţi diferenţa dintre funcţia

$$y = \ln x, \ x > 0 \ \text{ şi } \ \text{funcţia}$$

$$y = \ln x, \ 1 \le x \le e^2.$$

(4) Fie $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2}, x \neq 0$. Calculaţi $f(1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2x+1)$.

(5) Care este diferenţa dintre funcţia de mai sus şi expresia $g(x) = x - 1$?

(6) Determinaţi domeniul D pentru care fiecare formulă defineşte o funcţie de x.
(a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (b) $y = \sqrt{-(x^2 + 1)}$
(c) $y = \frac{x-2}{x-2}$ (d) $y = x(x - 1)$.

(7) Fie relaţia implicită între funcţia y şi argumentul său x, $x^2 + y^2 - 2xy^2 = 0$. Obţinem $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2y^2 - 4xy\frac{dy}{dx} = 0$. Mai mult,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{y - 4xy}, \quad y \neq 4xy. \tag{1.2}$$

Explicaţi ce înseamnă (1.2) din punct de vedere geometric.

(8) Considerând relaţia $x^2 + y^2 + 4 = 0$, explicaţi de ce procedând ca şi în problema anterioară, rezultatul este fără sens.

(9) Presupunând că y este o funcţie de x, $\frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3} = x^2y^4$, aflaţi $y' = \frac{dy}{dx}$.

(10) Aflaţi funcţia implicită determinată de relaţia

$$\sqrt{x^2 - y^2} + \arccos\frac{x}{y} = 0, \quad y \neq 0.$$

(11) Explicaţi de ce relaţia

$$\sqrt{x^2 - y^2} + \arcsin\frac{x}{y} = 0, \quad y \neq 0,$$

nu defineşte o funcţia implicită de x.

1.1.4 Soluţii

Ex.**6.** (a) $D =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$; ($b$) $D = \emptyset$; (c) $D = \mathbb{R}$; (d) $D = \mathbb{R}$.

Ex.**10.** Funcţia $y = x, x \in \mathbb{R}$.

Ex.**11.** Din primul termen rezultă că $|x| \geq |y|$. Din definiţia funcţiei arcsin avem că $|x| \leq |y|$. Dar funcţiile $y = |x|$ sau $y = -|x|$ nu verifcă relaţia dată. În concluzie, relaţia de mai sus nu defineşte o funcţie de x.

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I

2.1 Soluţiile unei ecuaţii diferenţiale. Soluţii explicite. Soluţii implicite.

Se numeşte **ecuaţie diferenţială ordinară**, o relaţie de forma

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \tag{2.1}$$

între variabila independentă $x \in I$ şi funcţia $y \in C^n(I), I \subseteq \mathbb{R}$, unde $F : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Ecuaţia (2.1) se mai scrie:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Câteva exemple:

(a) $\frac{dy}{dx} + y = 0$.

(b) $y' = e^x$.

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{1-x^2}$.

(d) $xy^{(4)} + 2y'' + (xy')^5 = x^3$.

şi, în final, ecuaţia lui Bessel:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0,$$

unde n^2 este o constantă.

Ordinul unei ecuaţii diferenţiale este egal cu ordinul celei mai mari derivate care apare în ecuaţie.

Dacă F este o funcţie liniară în variabilele $y, y', ..., y^{(n)}$, adică:

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y^{(')}+a_n(x)y+f(x),$$

atunci ecuaţia se numeşte **diferenţială liniară**. Toate exemplele de mai sus sunt de ecuaţii diferenţiale liniare, spre deosebire de ecuaţia

$$yy'+y=f(x),$$

care se observă uşor că nu este liniară.

Definiţie 2.1.1. *O funcţie $f\in C^n(I), I\subseteq\mathbb{R}$ care verifică*

$$F(x,f(x),f^{'}(x),...,f^{(n)}(x))=0,$$

se numeşte ***soluţie*** *a ecuaţiei diferenţiale (2.1).*

Exemplu 2.1.2. *Să verificăm că funcţia*

$$y=\ln x+c,\ x>0, \tag{2.2}$$

este soluţie a ecuaţiei $y'=\frac{1}{x}$. Să observăm că domeniul ecuaţiei este de asemenea $x>0$, la fel cu cel al funcţiei. Derivând funcţia (2.2) şi înlocuind derivata în ecuaţie, este clar că obţinem identitate pentru orice $x>0$.

Exemplu 2.1.3. *Să verificăm acum că funcţia*

$$y=\operatorname{tg}x-x,\ x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}, \tag{2.3}$$

este soluţie a ecuaţiei $y'=(x+y)^2$. Să observăm că domeniul ecuaţiei este de $\mathbb{R}$, pe când cel al funcţiei este mai restrictiv. Derivând funcţia

(2.3) avem $y' = \sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$ *şi înlocuind în ecuaţie*

$$\operatorname{tg}^2 x = (x + \operatorname{tg} x - x)^2,$$

şi asta doar pentru valorile din domeniul funcţiei y, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplu 2.1.4. *O altă situaţie interesantă este cea în care o funcţie este definită pe un interval şi este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale doar pe un subinterval.*
Să considerăm funcţia $y = |x|$ *definită pe întreg* $\mathbb{R}$. *Ea nu este derivabilă în* $x = 0$. *Satisface ecuaţia* $y' = 1$ *pe intervalul* $x > 0$ *şi ecuaţia* $y' = -1$ *pe intervalul* $x < 0$. *În schimb, pe orice interval care conţine* $x = 0$, *ea nu este soluţie a nici unei ecuaţii diferenţiale.*

În situaţia în care funcţia y verifică o relaţie de forma $f(x, y) = 0$, fără a putea fi găsită în mod explicit, este mai greu a verifica dacă ea este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale.

Definiţie 2.1.5. *Spunem că o relaţie de forma* $f(x, y) = 0$ *defineşte o* ***soluţie implicită*** *a ecuaţiei*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.4}$$

pe intervalul I, *dacă:*

(1) există o funcţie $g(x)$ *definită pe* I *astfel încât* $f(x, g(x)) = 0$ *pentru orice* $x \in I$ *şi*

(2) g *verifică (2.4), adică*

$$F(x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) = 0, \text{ pentru orice } x \in I.$$

Exemplu 2.1.6. *Verificaţi dacă relaţia*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0, \tag{2.5}$$

defineşte o soluţie implicită a ecuaţiei

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0,$$

pe intervalul $I = (-4, 4)$.
Pe intervalul ales, relaţia (2.5) defineşte, de exemplu, două funcţii, şi anume

$$g(x) = \sqrt{16 - x^2} \text{ şi } g(x) = -\sqrt{16 - x^2}.$$

O alegem pe prima din cele două şi avem $y' = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$*. Prin urmare,*

$$F(x, g(x), g'(x)) = \sqrt{16 - x^2}\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} + x = 0,$$

iar concluzia este că relaţia (2.5) defineşte o soluţie implicită a ecuaţiei (2.5).

2.1.1 Exerciţii

1. Demonstraţi că funcţiile din coloana dreaptă sunt soluţii ale ecuaţiilor din coloana stângă. Precizaţi şi intervalul pe care acestea sunt soluţii.

(a)	$xy' = 2y$	$y = x^2$.
(b)	$(1 + x^2)y' = xy$	$y = \sqrt{1 + x^2}$.
(c)	$xy' + y = y^2$	$y = \frac{2}{x+2}$.
(d)	$y'' - y = 0$	$y = ae^x + be^{-x}$.
(e)	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

2. Verificaţi dacă ecuaţiile din dreapta determină o funcţie implicită de x. În acest caz, verificaţi dacă sunt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale din stânga.

(a)	$y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$	$y^2 - 1 = (x + 2)^2$.
(b)	$e^{x-y} + e^{y-x}\frac{dy}{dx} = 0$	$e^{2y} + e^{2x} = 1$.
(c)	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$.

3. Verificaţi care dintre următoarele ecuaţii sunt liniare şi care sunt neliniare:

(a) $xy' + y = e^x$.

(b) $y'' + y' + y = 0$

(c) $\sin y + x \cos y' = 0.$

(d) $e^y y'' + x^3 = 0.$

2.1.2 Soluţii

1. (a) $x \neq 0$; (b) $x \in \mathbb{R}$; (c) $x \neq 0, -2$; (d) $x \in \mathbb{R}$; (e) $x \in]-1, 1[$.

2. (a) Fiecare din funcţiile $y = \sqrt{(x+2)^2 + 1}$, $y = -\sqrt{(x+2)^2 + 1}$ este o funcţie implicită de x, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi verifică ecuaţia dată; (b) Funcţia $y = \frac{1}{2} \ln(1 - e^{2x})$, $x \neq 0$ defineşte o funcţie de x şi verifică ecuaţia dată; (c) Relaţia nu defineşte o funcţie de x.

3. (a) liniară; (b) liniară; (c) neliniară; (d) neliniară.

2.2 Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale. Soluţie particulară. Condiţii iniţiale

Să considerăm următoarea ecuaţie diferenţială:

$$y' = e^x.$$

Integrând în raport cu x obţinem $y = e^x + c$, unde c este o constantă arbitrară. Considerând acum ecuaţia:

$$y'' = e^x,$$

este clar că integrând de două ori, vom obţine $y = e^x + c_1 x + c_2$.
S-ar putea trage concluzia de aici că, dacă ecuaţia are un anumit ordin, soluţia ei va conţine un număr de constante egal cu ordinul acesteia. Şi totuşi, considerând ecuaţia:

$$(y''') + y = 0,$$

se observă uşor că ea admite doar soluţia $y = 0$. Un alt exemplu. Fie:

$$(y' - 2y)(y' - 3y) = 0,$$

ecuaţie care are soluţia:

$$(y - c_1 e^{2x})(y - c_2 e^{3x}) = 0,$$

care conţine două constante arbitrare în loc de una, cât e gradul ei. Şi totuşi, marea masă a ecuaţiilor pe care le vom studia, respectă această regulă.

Definiţie 2.2.1. *Familia de funcţii $y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ se numeşte o* ***soluţie generală*** *a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n,*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

dacă pentru orice alegere a constantelor $c_i, i = \overline{1,n}$ *funcţia* f *verifică*

$$F(x, f, f', f'', ..., f^{(n)}) = 0.$$

Exemplu 2.2.2. *Demonstraţi că familia de funcţii*

$$f(x, c_1, c_2) = 2x + 3 + c_1e^x + c_2e^{2x},$$

este soluţie generală a ecuaţiei diferenţiale

$$F(x, y, y', y'') = y'' - 3y' + 2y - 4x = 0.$$

Fixăm $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *şi considerăm funcţia*

$$y(x) = 2x + 3 + c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

Derivatele sale sunt:

$$y' = 2 + c_1e^x + 2c_2e^{2x} \text{ şi}$$

$$y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x}.$$

Substituind expresiile derivatelor y', y'' *şi a funcţiei* y *în* F*, avem:*

$$F(x, y, y', y'') = c_1e^x+4c_2e^{2x}-3(2+c_1e^x+2c_2e^{2x})+2(2x+3+c_1e^x+c_2e^{2x})-4x = 0,$$

prin urmare, familia de funcţii $y = f(x, c_1, c_2)$ *este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date.*

Un alt exerciţiu interesant este următorul:

Exemplu 2.2.3. *Aflaţi ecuaţia diferenţială a cărei soluţie generală este:*

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x^2. \tag{2.1}$$

Deoarece soluţia generală are 2 parametri, ştim că ecuaţia pe care o *căutăm este de ordinul 2. Derivăm de două ori şi avem:*

$$\begin{cases} y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x + 2x \\ y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x + 2. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul în raport cu c_1 şi c_2 şi înlocuind în (2.1), obţinem ecuaţia căutată.

$$y'' = x^2 - y + 2.$$

Definiţie 2.2.4. *O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte* ***soluţie particulară*** *dacă ea se obţine din soluţia generală prin particularizarea constantelor.*

Exemplu 2.2.5. *Să considerăm, de exemplu, următoarea ecuaţie:*

$$y = xy' + (y')^2.$$

Această ecuaţie are ca soluţie generală familia

$$y = xc + c^2. \tag{2.2}$$

Şi totuşi, această ecuaţie are ca soluţie şi următoarea funcţie:

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

care nu se poate obţine din (2.2) prin particularizarea constantei c. O astfel de soluţie o numim ***soluţie singulară***.

Exemplu 2.2.6. *Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale:*

$$yy' = (y+1)^2 \tag{2.3}$$

şi soluţia particulară care verifică $y(2) = 0$.

Soluţie. *Pentru $y \neq -1$, putem separa variabilele şi avem:*

$$\int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int dx, \ y \neq -1.$$

După integrare:

$$\frac{1}{(y+1)} + \ln|y+1| = x + c,\ y \neq -1, \tag{2.4}$$

relaţie care reprezintă soluţie generală a ecuaţiei date. Pentru a determina soluţia particulară, substituim în (2.4) $x = 2$ *şi* $y = 0$. *Se obţine* $c = -1$. *Prin urmare, soluţia particulară este:*

$$\frac{1}{(y+1)} + \ln|y+1| = x - 1,\ y \neq -1,$$

Observaţie 2.2.7. *Funcţia* $y = -1$ *este o soluţia singulară a ecuaţiei (2.3), soluţie care nu se poate obţine din soluţia (2.4) pentru o valoare particulară a lui* c.

Exemplu 2.2.8. *Se ştie că un corp se mişcă după următoarea regulă:*

$$y = 8t^2 + c_1 t + c_2, \tag{2.5}$$

ecuaţie care reprezintă mişcarea corpului în funcţie de timpul t. *Mai ştim şi că acest corp se afla la timpul* $t = 0$ *la o distanţă* $x = 10m$ *faţă de origine şi că se mişcă cu o viteză de* $v = 20m/s$. *Ne propunem acum să aflăm legea(soluţia particulară) după care se mişcă acest corp.*

Soluţie. *Ţinând cont de (2.5), deducem că viteza corpului are legea:*

$$v = 16t + c_1.$$

O condiţie iniţială este $v(0) = 20$ *iar de aici rezultă* $c_1 = 20$. *Cealaltă condiţie este* $y(0) = 10$ *şi din ea rezultă* $c_2 = 10$. *În concluzie, soluţia particulară a problemei este*

$$y = 8t^2 + 20t + 10.$$

2.2.1 Exerciţii

1. Demonstraţi că funcţiile din stânga sunt soluţii ale ecuaţiilor din dreapta:

(a)	$y = c_1x + c_2e^{-x} + \frac{x^3}{3}$	$y^{''} - y' - x^2 - 2x = 0.$
(b)	$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + 2e^x$	$y^{''} + 3y' + 2y - 12e^x = 0.$
(c)	$y = e^x(c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \frac{x^3}{6})$	$y''' - 3y^{''} + 3y' - y - e^x = 0.$

2. Determinaţi ecuaţia diferenţială a cărei soluţie este dată mai jos:

(a) $y = cx + c^3$

(b) $y = c_1e^{c_2x}$.

(c) $x^2 - cy + c^2 = 0$

(d) $y = \frac{c}{x} + x^3$.

(e) $y = c_1 \cos 3x + c_2 sin3x$

(f) $\ln y = c_1x^2 + c_2$.

(g) $y = x\,\mathrm{tg}(x + c)$

(h) $y = a(1 - \cos x)$.

3. Aflaţi ecuaţia diferenţială a cărei soluţie este:

(a) O familie de cercuri cu rază fixată care au centrele pe axa Ox.

(b) O familie de drepte tangente parabolei $y = 2x$.

(c) O familie de parabole care au focarul în origine şi vârful pe axa Ox.

(d) O familie de cercuri cu raza variabilă, din planul xOy.

(e) O familie de soluţii cu 1 parametru a ecuaţiei diferenţiale $y' = y$, care verifică condiţia iniţială $y(3) = 1$.

2.2.2 Soluţii

2. *(a)* $y = xy' + (y')^3$; *(b)* $yy^{''} = (y')^2$; *(c)* $x^2(y')^2 - 2xyy' + 4x^2 = 0$; *(d)* $y'x = 4x^3 - y$; *(e)* $y^{''} + 9y = 0$; *(f)* $xyy^{''} - yy' - x(y')^2 = 0$;
(g) $xy' = x^2 + y^2 + y$; *(h)* $(1 - \cos x)y' = y \sin x$.

3. *(a)* $y = (yy')^2 + y^2 = a^2$; *(b)* $2x(y')^2 - 2yy' + 1 = 0$; *(c)* $2xy' = y$; *(d)* $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y^{''})^2$; *(e)* $y = ce^x; y = e^{x-3}$.

Capitolul 3

Tipuri speciale de ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Primele ecuaţii diferenţiale de ordinul I au fost rezolvate în secolul al $XVII$-lea, odată cu apariţia calculului integral:

$$y' = f(x),$$

unde $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este o funcţie continuă. Soluţia acestei ecuaţii este dată de:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

unde $y_0 = f(x_0),\ x_0 \in I$.

3.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Definiţie 3.1.1. *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială cu variabile separabile**, *o ecuaţie de forma:*

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

unde $f : I \to \mathbb{R}$ şi $g : J \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue.

Atunci soluţia generală a acestei ecuaţii este:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c,$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

Exemplu 3.1.2. *Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$3x^2dx - 9y^2dy = 0.$$

Soluţie. *Ecuaţia fiind cu variabilele separate, putem integra şi avem:*

$$x^3 - 3y^3 = c.$$

Exemplu 3.1.3. *Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$x\sqrt{1-y}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

Verificaţi dacă ecuaţia are şi soluţii singulare.
Soluţie. *Să remarcăm faptul că ecuaţia este definită pentru* $y \leq 1$ *şi* $-1 \leq x \leq 1$. *Pentru* $x \neq \pm 1$ *şi* $y \neq 1$, *obţinem:*

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = 0, \ \ -1 < x < 1, \ y < 1.$$

Integrând rezultă:

$$\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = c, \ \ -1 < x < 1, \ y < 1, \tag{3.1}$$

care reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date.
Remarcăm faptul că funcţia $y = 1, -1 \leq x \leq 1$, *verifică ecuaţia dată şi nu poate fi obţinută din (3.1), prin urmare, ea este soluţia singulară.*

Exemplu 3.1.4. *Aflaţi soluţia particulară a ecuaţiei:*

$$xy^2dx + (1-x)dy = 0,$$

pentru care $y(2) = 1$.
Soluţie. *Pentru* $x \neq 1$ *şi* $y \neq 0$, *obţinem:*

$$\frac{xdx}{1-x} + y^{-2}dy = 0, \ x \neq 1, \ y \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$(\frac{1}{1-x} - 1)dx + y^{-2}dy = 0,\ x \neq 1,\ y \neq 0,$$

de unde:

(3.2)
$$\ln \mid 1-x \mid + x + \frac{1}{y} = c,\ x \neq 1,\ y \neq 0.$$

care reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date.
Înlocuind $x = 2$ şi $y = 1$ in (3.2), rezultă $c = 3$, adică soluţia particulară este:

$$\ln \mid 1-x \mid + x + \frac{1}{y} = 3,\ x \neq 1,\ y \neq 0.$$

3.1.1 Exerciţii

1. Determinaţi soluţia generală a fiecarei ecuaţii date mai jos. Precizaţi domeniul lui x pentru care acestea sunt soluţii.

(a) $(y^2 + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0.$

(b) $(x - 1)\cos y dy = 2x \sin y dx.$

(c) $e^{y^2}(x^2 + 2x + 1)dx + (xy + y)dy = 0.$

(d) $\frac{dy}{dx} = -\sin x.$

(e) $\frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x.$

(f) $y' = x^2 + \sin x.$

(g) $e^{x+1} \operatorname{tg} y dx + \cos y dy = 0.$

2. Determinaţi soluţia particulară a următoarelor probleme.

(a) $(1 - x)dy = x(y + 1)dx, \quad y(0) = 0.$

(b) $ydy + xdx = 3xy^2dx, \quad y(2) = 1.$

(c) $dy = e^{x+y}dx, \quad y(0) = 0.$

(d) $xy' - 2\sqrt{y} \ln x = 0, \quad y(e) = 1.$

(e) $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{\sin 2x}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 1.$

(f) $y' = 3(ye^x)^3, \quad y(0) = 1.$

(g) $(1+x)e^y y' = 1, \quad y(0) = y_0.$

3.1.2 Soluţii

1. (a) $\arctan y = \arctan x + c, c$ constantă arbitrară;
(b) $\sin y = (x-1)^2 e^{2x+c}, x \neq 1, y \neq n\pi$. Soluţia singulară este $y = n\pi$.
(c) $x^2 + 2x = e^{-y^2} + c, x \neq -1$; (d) $y = \cos x + c$;
(e) $y \cos x = c, y \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. Soluţia singulară este $y = 0$.
(f) $y = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$.
(g) $e^{x+1} + \ln(\csc y - \operatorname{ctg} y) + \cos y = c, y \neq n\pi$. Soluţia singulară este $y = n\pi$.

2. (a) $\arctan y = \arctan x + c, c$ constantă arbitrară;
(b) $\sin y = (x-1)^2 e^{2x+c}, x \neq 1, y \neq n\pi$. Soluţia particulară este $y = n\pi$.
(c) $x^2 + 2x = e^{-y^2} + c, x \neq -1$; (d) $y = \cos x + c$;
(e) $y \cos x = c, y \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. Soluţia particulară este $y = 0$.
(f) $y = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$.
(g) $e^{x+1} + \ln(\csc y - \operatorname{ctg} y) + \cos y = c, y \neq n\pi$. Soluţia particulară este $y = n\pi$.

3.2 Ecuaţii omogene

Definiţie 3.2.1. *O funcţie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se numeşte* **omogenă de ordin** n *dacă:*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

unde $t > 0$*, iar* n *este o constantă.*

Definiţie 3.2.2. *Dacă funcţiile* $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt fiecare omogene de ordin* n*, atunci ecuaţia:*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3.1}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul I cu coeficienţi omogeni**.

Teoremă 3.2.3. *Dacă în ecuaţia (3.1), unde funcţiile* $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt fiecare omogene de ordin* n*, facem substituţiile* $y = ux, dy = udx + xdu$*, aceasta se transformă într-una cu variabile separabile.*

Observaţie 3.2.4. *Dacă funcţiile* $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt fiecare omogene de ordin* n*, substituţiile* $x = uy, dx = udy + ydu$*, transformă de asemenea ecuaţia (3.1) într-una cu variabile separabile.*

Exemplu 3.2.5. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$(\sqrt{x^2 - y^2} + y)dx - xdy = 0.$$

Precizaţi şi soluţiile singulare.

Soluţie. Condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească x, y pentru a satisface ecuaţia dată sunt $|\frac{y}{x}| \leq 1,\ x \neq 0$. Folosind substituţiile $y = ux, dy = udx + xdu$, ecuaţia devine:

$$(\sqrt{x^2 - u^2x^2} + ux)dx - x(udx + xdu) = 0,\ |u = \frac{y}{x}| \leq 1,\ x \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$|x|(\sqrt{1 - u^2} + ux)dx - x(udx + xdu) = 0,\ |u = \frac{y}{x}| \leq 1,\ x \neq 0.$$

Împărţind cu x, devine:

$$(\pm\sqrt{1 - u^2} + u)dx - (udx + xdu) = 0,\ |u = \frac{y}{x}| \leq 1,\ x \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\pm\sqrt{1-u^2} - xdu = 0, \ |u = \frac{y}{x}| \leq 1, \ x \neq 0.$$

Dacă $u \neq \pm 1$, putem separa variabilele astfel:

$$\frac{dx}{x} = \pm\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \ |u = \frac{y}{x}| < 1, \ x \neq 0.$$

După integrare,

$$\ln x = \arcsin u + c, \ |u| < 1, \ x > 0,$$

$$-\ln(-x) = \arcsin u + c, \ |u| < 1, \ x < 0.$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei este:

$$\ln x = \arcsin\frac{y}{x} + c, \ |\frac{y}{x}| < 1, \ x > 0,$$

$$-\ln(-x) = \arcsin\frac{y}{x} + c, \ |\frac{y}{x}| < 1, \ x < 0.$$

Verificând în ecuaţie, se observă uşor că funcţiile $y = \pm x$ sunt soluţii singulare ale ecuaţiei date.

Observaţie 3.2.6. *Dacă scriem ecuaţia (3.1) sub forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = F(x,y),$$

atunci faptul că funcţiile P, Q sunt fiecare omogene de ordin n este echivalent cu a spune că F este omogenă de ordin 0. Aşadar, ecuaţia omogenă poate fi scrisă, echivalent, astfel:

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}).$$

3.2.1 Exerciţii

1. Determinaţi soluţia generală a fiecărei ecuaţii date mai jos. Precizaţi domeniul lui x pentru care acestea sunt soluţii şi puneţi în evidenţă şi soluţiile singulare.

(a) $y^2dx + (x\sqrt{y^2-y^2} - xy)dy = 0.$

(b) $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

(c) $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x})dy = 0$.

(d) $(xe^{\frac{y}{x}} - y\sin\frac{y}{x})dx + x\sin\frac{y}{x}dy = 0$.

(e) $xy' = x + y + xe^{\frac{y}{x}}$.

(f) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$.

(g) $2xyy' = x^2 + 3y^2$.

2. Determinaţi soluţia particulară care satisface condiţia iniţială dată, pentru fiecare problemă de mai jos.

(a) $y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0,\ y(1) = 0$.

(b) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0,\ y(1) = 1$.

(c) $y' = \frac{4xy - y^2}{2x^2},\ y(1) = 1$.

(d) $(xe^{\frac{y}{x}} + y)dx = xdy,\ y(1) = 0$.

(e) $y' = \frac{2x+y}{4x-y},\ y(1) = 1$.

(f) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy},\ y(-1) = 0$.

(g) $y' = \frac{y}{x - 2\sqrt{yx}},\ y(1) = 1$.

3.2.2 Soluţii

1. *(a)* $c(y + \sqrt{y^2 - x^2}) = xy, y^2 > x^2$, c constantă arbitrară;
(b) $y = ce^{-2\sqrt{1-x/y}}, y > 0, x < y$; $y = ce^{2\sqrt{1-x/y}}, y < 0, x > y$, c constantă arbitrară;
(c) $y\sin\frac{y}{x} = c$, c constantă arbitrară;
(d) $\ln x^2 - e^{-y/x}(\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}) = c$, c constantă arbitrară;
(e) $y = 2x\arctan cx$, c constantă arbitrară;
(f) $x^2 + y^2 - cx = 0$, c constantă arbitrară; *(g)* $y^2 = cx - 1$, c constantă arbitrară nenulă.

2. *(a)* $\ln x - \cos\frac{y}{x} + 1 = 0$; *(b)* $x = e^{x/y-1}$; *(c)* $y(x) = \frac{2x^2}{x+1}$;
(d) $\ln x + e^{-y/x} = 1$; *(e)* $y = x$;
(f) $y^2 = x^2 + x$,; *(g)* $\sqrt{\frac{y}{x}} - \ln\frac{y}{x} = \ln x$.

3.3 Ecuaţii reductibile la omogene

Vom studia ecuaţiile de forma:

$$y(x) = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}),$$

şi care pot fi reduse la cele omogene.
***Cazul** I* Sistemul:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

este compatibil determinat.
Metoda I. Dacă sistemul este compatibil determinat, determinăm soluţia acestuia (x_0, y_0) şi facem translaţia:

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

ţinând cont de asemenea că $dx = du$ şi $dy = dv$. Ecuaţia se transformă într-una omogenă:

$$v = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v},$$

care se rezolvă făcând substituţia $p = \frac{v}{u}$.

Exemplu 3.3.1. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$y' = f(\frac{2y - x + 5}{2x - y + 4}).$$

Soluţie *Rezolvăm sistemul care este compatibil nedeterminat:*

$$\begin{cases} 2y - x + 5 = 0, \\ 2x - y + 4 = 0, \end{cases}$$

cu soluţia $(-1, 2)$. *Translaţia este:*

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v + 2. \end{cases}$$

Ecuaţia omogenă care se obţine este $v = \frac{-u+2v}{2u-v}$. Dăm factor comun forţat la numitor şi numărător pe u. Se obţine:

$$v' = \frac{-1+2\frac{v}{u}}{2-\frac{v}{u}}. \tag{3.1}$$

Notăm $p = \frac{v}{u}$, $p = p(u)$ de unde $v = pu$ şi $v' = p'u + p$. Înlocuind în ecuaţia (3.1) avem:

$$p'u + p = \frac{-1+2p}{2-p},\ p \neq 2.$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile:

$$\frac{2-p}{p^2-1}dp = \frac{1}{u}du,\ p \neq 2, p \neq \pm 1.$$

După integrare avem:

$$\ln|\frac{p-1}{p+1}| - \frac{1}{2}\ln|p^2-1| = \ln|u| + \ln|c|,\ p \neq 2, p \neq \pm 1, u \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\ln|\frac{p-1}{\sqrt{p^2-1}(p+1)}| = \ln|uc|,\ p \neq 2, p \neq \pm 1, u \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{p-1}{\sqrt{p^2-1}(p+1)} = \pm uc,\ p \neq 2, p \neq \pm 1, u \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{(p-1)^{\frac{1}{2}}}{(p+1)^{\frac{3}{2}}} = \pm uc,\ p \neq 2, p \neq \pm 1, u \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{p-1}{(p+1)^3} = u^2 c,\ p \neq 2, p \neq \pm 1, u \neq 0.$$

Revenind la notaţiile iniţiale $p = \frac{y-2}{x+1}$, $u = x+1$, obţinem soluţia generală a ecuaţiei date:

$$\frac{\frac{y-2}{x+1}-1}{(\frac{y-2}{x+1}+1)^3} = c,\ x \neq -1,\ y-x-3 \neq 0,\ y+x\pm 1 \neq 0,\ y-2x-4 \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3} = c,\ x \neq -1,\ y-x-3 \neq 0,\ y+x\pm 1 \neq 0,\ y-2x-4 \neq 0.$$

Soluţiile $y-x-3 = 0$, $y+x\pm 1 = 0$şi $y-2x-4 = 0$ reprezintă soluţiile

singulare ale ecuaţiei date.
Metoda *II* Notăm:

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1, \\ v = a_2x + b_2y + c_2. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{cases} du = a_1dx + b_1dy, \\ dv = a_2dx + b_2dy. \end{cases}$$

Determinăm dx şi dy în funcţie de du şi dv. Substituim u, v, du, dv în ecuaţia dată şi obţinem una omogenă.

Exemplu 3.3.2. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$(2x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0.$$

Soluţie Notăm:

$$\begin{cases} u = 2x - y + 1, \\ v = x + y. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{cases} du = 2dx - dy, \\ dv = dx + dy. \end{cases}$$

şi

$$dx = \frac{du + dv}{3}, \ dy = -\frac{du - 2dv}{3}.$$

Înlocuim u, v, du, dv în ecuaţia dată şi obţinem:

$$u\frac{du + dv}{3} - v\frac{du - 2dv}{3} = 0 \iff$$

$$(u - v)du + (u + 2v)du = 0, \tag{3.2}$$

care este o ecuaţie omogenă. Notăm $t = \frac{u}{v}$. Avem $u = tv$, de unde

$du = tdv + vdt$. Substituind în (3.2):

$$(tv - v)(tdv + vdt) + (tv + 2v)dv = 0 \Longleftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{1-t}{t^2+2}dt,\ v \neq 0.$$

Soluţia ultimei ecuaţii este:

$$\ln|v| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} = c,\ v \neq 0$$

echivalent cu

$$\ln[v^2(t^2+2)] - \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} = c,\ v \neq 0.$$

Revenind la notaţiile iniţiale:

$$t = \frac{u}{v} = \frac{2x - y + 1}{x+y},\ x + y \neq 0.$$

avem:

$$\ln[(2x - y + 1)^2 + 2(x+y)^2] - \sqrt{2}\arctan\frac{2x - y + 1}{\sqrt{2}(x+y)} = c,\ x + y \neq 0.$$

Cazul *II* Sistemul:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat sau incompatibil. În acest caz, aplicăm metoda a II-a descrisă mai sus.

Exemplu 3.3.3. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)dy = 0.$$

Soluţie Notăm:

$$u = x + y - 1.$$

Rezultă:

$$du = dx + dy,$$

şi obţinem:

$$dx = du - dy \text{ şi } 2x + 2y - 3 = 2u - 1. \tag{3.3}$$

Înlocuind (3.3) în ecuaţia dată, obţinem o ecuaţie cu variabile separabile:

$$u(du - dy) + (2u - 1)dy = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{u}{1-u} du = dy, \ u \neq 1.$$

Soluţia generală este:

$$-u - \ln|u - 1| = y + c, \ u \neq 1.$$

iar în notaţiile iniţiale :

$$x + y - 1 + \ln|x + y - 2| + y = c, \ x + y \neq 2. \tag{3.4}$$

Soluţia $x + y - 1 = 0$ este, de asemenea o soluţie a ecuaţiei date care nu se poate obţine din (3.4), prin urmare este o soluţie singulară.

Exemplu 3.3.4. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 2)dy = 0.$$

Soluţie Împărţind ecuaţia la $x+y+1 \neq 0$, avem o ecuaţie cu variabile separabile:

$$dx + 2dy = 0, \ x + y + 1 \neq 0 \Longleftrightarrow dx = -2dy, \ x + y + 1 \neq 0.$$

Soluţia generală este:

$$x + 2y = c, \ x + y + 1 \neq 0.$$

Soluţia singulară este $x + y + 1 = 0$.

3.3.1 Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

(a) $y' = -\frac{3x+3y-1}{x+y+1}$.

(b) $(4x+6y+4) - 3(6x+9y-2)y' = 0$.

(c) $(3x+2y+1)dx - (3x+2y-1)dy = 0$.

(d) $(x+2y)dx + (y-1)dy = 0$.

(e) $(x+y-1)dx - (x-y-1)dy = 0$.

(f) $(x-2y+5)dx + (2x-y+4)dy = 0$.

(g) $(x+y)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

2. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

(a) $(y+7)dx + (2x+y+3)dy = 0,\ y(1) = 0$.

(b) $(x+y+2)dx - (x-y-4)dy = 0,\ y(1) = 0$.

(c) $(3x+2y+3)dx - (x+2y-1)dy = 0,\ y(-2) = 1$.

3.3.2 Soluţii

1. *(a)* $\frac{1}{2}(y+x) - \ln(x+y-1) = x + c$, c constantă arbitrară;
(b) $3(2x+3y) - \ln(2x+3y)^2 - 8x = c$, c constantă arbitrară;
(c) $\ln(15x+10y-1) + \frac{5}{2}(x-y) = c$, c constantă arbitrară;
(d) $\frac{x+2}{x+y+1} + \ln(x+y+1) = c$, c constantă arbitrară;
(e) $(x-1)^2 + y^2 = ce^{2\arctan y/(x-1)}$, c constantă arbitrară;
(f) $c(x+y-1)^3 = y - x - 3$, c constantă arbitrară;
(g) $x + 2y + \ln(x+y-1) = c$.

2. *(a)* $(y+7)^2(3x+y+1) = 128$;
(b) $\ln[(x-1)^2 + (y+3)^2] + 2\arctan\frac{x-1}{y+3} = 2\ln 3$;
(c) $(2x+2y+1)(3x-2y+9)^4 = -1$.

3.4 Ecuaţii cu diferenţială totală exactă

Definiţie 3.4.1. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un domeniu şi* $P, Q : D \to \mathbb{R}$. *Ecuaţia diferenţială:*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3.1}$$

se numeşte **ecuaţie cu diferenţială totală exactă** *dacă există o funcţie* $U : D \to \mathbb{R}$, *unde* D *este un domeniu, astfel încât:*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ şi } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3.1) este:

$$U(x,y) = c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Teoremă 3.4.2. *O condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia (3.1) să fie cu diferenţială totală exactă este:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

unde $\partial P(x,y)/\partial y, \partial Q(x,y)/\partial x : D \to \mathbb{R}$ *există şi sunt continue pe domeniul* D.
În aceste condiţii:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy, \tag{3.2}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$.

Observaţie 3.4.3. *De asemenea, funcţia* U *poate fi determinată de:*

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

Exemplu 3.4.4. *Arătaţi că ecuaţia următoare este cu diferenţială totală* *exactă şi determinaţi soluţia generală:*

$$(x - 2xy + e^y)dx + (y - x^2 + xe^y) = 0.$$

Soluţie *Să observăm că* $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *şi* $P(x,y) = x - 2xy + e^y$, $Q(x,y) = y - x^2 + xe^y$. *De asemenea:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2x + e^y.$$

Prin urmare, ecuaţia este cu diferenţială totală exactă şi:

$$U(x,y) = \int_0^x (x - 2xy + e^y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy \Longrightarrow$$

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} - x^2y + xe^y + \frac{y^2}{2}.$$

Soluţia generală este:

$$\frac{x^2}{2} - x^2y + xe^y + \frac{y^2}{2} = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu 3.4.5. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$\cos y dx - (x \sin y - y^2)dy = 0.$$

Soluţie *Să verificăm dacă este cu diferenţială totală exactă.*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\sin y.$$

Fără a folosi formula (3.2), să determinăm soluţia generală. Are loc:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \cos y.$$

Integrând în raport cu x, avem:

$$U(x,y) = \int \cos y dx = x \cos y + C(y). \tag{3.3}$$

De asemenea:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = -x\sin y + y^2. \tag{3.4}$$

Din (3.3), obţinem:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x\sin y + C^{'}(y). \tag{3.5}$$

Din (3.4) şi (3.1) rezultă:

$$C^{'}(y) = y^2 \Longrightarrow C(y) = \frac{y^3}{3}.$$

Prin urmare, $U(x,y) = x\cos y + \frac{y^3}{3}$*, iar soluţia generală a ecuaţiei este:*

$$x\cos y + \frac{y^3}{3} = c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu 3.4.6. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$\sin y dx + x\cos y dy = 0.$$

Soluţie *Se poate observa destul de uşor că membrul stâng al ecuaţiei este diferenţiala unei funcţii, şi anume:*

$$d(x\sin y) = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei este:

$$x\sin y = c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu 3.4.7. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

La fel ca şi în exerciţiul precedent, membrul stâng al ecuaţiei este diferenţiala *unei funcţii, şi anume:*

$$d(\sqrt{x^2+y^2}) = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei este:

$$\sqrt{x^2+y^2} = c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

3.4.1 Factor integrant

Definiţie 3.4.1. *Să presupunem că avem o ecuaţie care nu este cu diferenţială totală exactă:*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Dacă funcţia $\mu : D \to \mathbb{R}$ este în aşa fel încât ecuaţia:

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

este cu diferenţială totală exactă:

$$\frac{\partial \mu P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q(x,y)}{\partial x}, \tag{3.1}$$

numim funcţia μ, factor integrant.

Observaţie 3.4.2. *Teoretic, orice ecuaţie diferenţială admite un factor integrant. Din păcate, nu există metode generale pentru determinarea unui factor integrant pentru orice ecuaţie. În continuare, vom trata câteva cazuri particulare în care un factor integrant poate fi găsit.*

Cazul I $\mu = \mu(x)$

Dacă $\mu = \mu(x)$, din relaţia (3.1) obţinem:

$$\mu(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \mu(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}.$$

De aici, avem:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{Q(x,y)}dx. \tag{3.2}$$

Dacă expresia din dreapta este funcţie de x:

$$F(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{Q(x,y)},$$

integrând relaţia (3.2) avem:

$$\mu(x) = e^{\int F(x)dx},$$

care este un factor integrant al ecuaţiei date.

Exemplu 3.4.3. *Determinaţi un factor integrant pentru ecuaţia următoare şi determinaţi familia de soluţii:*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0. \tag{3.3}$$

Soluţie *Să observăm că:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y \text{ şi } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = y.$$

De asemenea, avem că expresia:

$$F(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{1}{x},$$

prin urmare există un factor integrant funcţie de $\mu = \mu(x)$ astfel încât:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x}dx.$$

Obţinem $\mu(x) = x$. Înmulţind ecuaţia (3.3) cu x:

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0,$$

ea devine o diferenţială totală exactă cu familia de soluţii:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} = c,\ c \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow 3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Cazul II $\mu = \mu(y)$
Dacă $\mu = \mu(y)$, din relaţia (3.1) obţinem:

$$\mu(y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \mu(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + P(x,y)\frac{d\mu(y)}{dy}.$$

Rezultă:

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{P(x,y)}dy. \tag{3.4}$$

Dacă expresia din dreapta este funcţie de y:

$$F(y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{P(x,y)},$$

atunci integrând relaţia (3.4) avem:

$$\mu(y) = e^{\int F(y)dy},$$

care este un factor integrant al ecuaţiei date.

Exemplu 3.4.4. *Determinaţi un factor integrant pentru ecuaţia următoare şi determinaţi familia de soluţii:*

$$xydx + (1 + x^2)dy = 0. \tag{3.5}$$

Soluţie *Să observăm că ecuaţia nu este cu diferenţială totală exactă:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = x \ \text{şi}\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x.$$

Expresia:

$$F(y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{P(x,y)} = \frac{1}{y}.$$

Un factor integrant este:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y.$$

Înmulţind ecuaţia (3.5) cu y:

$$xy^2 dx + (1 + x^2) y dy = 0,$$

ea devine cu diferenţială totală exactă iar soluţia generală este:

$$x^2 y^2 + y^2 = c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Cazul III $\mu = \mu(xy)$

Dacă $\mu = \mu(xy)$, din relaţia (3.1) obţinem:

(3.6)

$$\mu(xy) \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + P(x,y) \frac{\partial \mu(xy)}{\partial y} = \mu(xy) \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + Q(x,y) \frac{\partial \mu(xy)}{\partial x}.$$

Să notăm în continuare $u = xy$. Ţinând cont de faptul că:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{d\mu}{du} \tag{3.7}$$

şi

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{d\mu}{du}$$

din relaţia (3.11) rezultă:

$$\frac{d\mu(u)}{\mu(u)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)}{yQ(x,y) - xP(x,y)} du. \tag{3.8}$$

Dacă expresia din dreapta este funcţie de u:

$$F(u) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)}{yQ(x,y) - xP(x,y)},$$

integrând relaţia (3.8) avem:

$$\mu(u) = e^{\int F(u) du},$$

care este un factor integrant al ecuaţiei date, unde $u = xy$.

Exemplu 3.4.5. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0.$$

Soluţie *Să observăm că:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3y^2 + 2xy + 1 \text{ şi } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 1.$$

De asemenea,

$$F(u) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)}{yQ(x,y) - xP(x,y)} = -\frac{3}{u}.$$

Un factor integrant este:

$$\mu(u) = e^{\int -\frac{3}{u}du},$$

adică:

$$\mu(u) = u^{-3}.$$

Înmulţind ecuaţia dată cu $1/(xy)^3$, *obţinem o ecuaţie cu diferenţială totală exactă:*

$$(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2})dx + (\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2x} + \frac{1}{y^3x^2})dy = 0.$$

Funcţia U *a cărei diferenţială este expresia de mai sus este:*

$$U(x,y) = \int_1^x (\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2y} + \frac{1}{t^3y^2})dt + \int_1^y (\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3})dt,$$

adică:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2x^2y^2} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{2}.$$

Soluţia generală este:

$$\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} - 5 = c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Cazul IV $\mu = \mu(x/y)$

Dacă $\mu = \mu(x/y)$, să notăm cu $u = x/y$. Din relaţia (3.1) obţinem:

$$\mu(u)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + P(x,y)\frac{\partial \mu(u)}{\partial y} = \mu(u)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \mu(u)}{\partial x}. \tag{3.9}$$

Avem acum:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{du} \cdot \frac{1}{y}$$

şi

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{du} \cdot (-\frac{x}{y^2})$$

iar împreună cu relaţia (3.11) rezultă:

$$\frac{d\mu(u)}{\mu(u)} = \frac{y^2[\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)]}{yQ(x,y) + xP(x,y)}du. \tag{3.10}$$

Dacă expresia din dreapta este funcţie de u:

$$F(u) = \frac{y^2[\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)]}{yQ(x,y) + xP(x,y)},$$

integrând relaţia (3.12) avem:

$$\mu(u) = e^{\int F(u)du},$$

care este un factor integrant al ecuaţiei date, unde $u = x/y$.

Exemplu 3.4.6. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$3ydx - xdy = 0.$$

Soluţie *Să observăm că:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3 \text{ } \c{s}i \text{ } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -1.$$

De asemenea,

$$F(u) = \frac{2y^2}{xy} = 2\frac{y}{x} = \frac{2}{u}.$$

Un factor integrant este:

$$\mu(u) = e^{\int \frac{2}{u} du} = u^2 = \frac{x^2}{y^2},$$

Înmulţind ecuaţia dată cu $\frac{x^2}{y^2}$*, obţinem o ecuaţie cu diferenţială totală exactă:*

$$3\frac{x^2}{y}dx - \frac{x^3}{y^2}dy = 0.$$

Funcţia U *a cărei diferenţială este expresia de mai sus este:*

$$U(x,y) = \int_0^x 3\frac{t^2}{y}dt = \frac{x^3}{y}.$$

Soluţia generală este:

$$\frac{x^3}{y} = c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Cazul V $\mu = \mu(y/x)$

Dacă $\mu = \mu(y/x)$, să notăm cu $u = y/x$. Din relaţia (3.1) obţinem:

$$\mu(u)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + P(x,y)\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{1}{x} = \mu(u)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{d\mu}{du}\cdot(\frac{-y}{x^2}). \tag{3.11}$$

Mai departe:

$$\frac{d\mu(u)}{\mu(u)} = \frac{x^2[\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)]}{yQ(x,y) + xP(x,y)}du. \tag{3.12}$$

Dacă expresia din dreapta este funcţie de u:

$$F(u) = \frac{x^2[\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)]}{yQ(x,y) + xP(x,y)},$$

integrând relaţia (3.12) avem:

$$\mu(u) = e^{\int F(u)du},$$

care este un factor integrant al ecuaţiei date, unde $u = y/x$.

Exemplu 3.4.7. *Verificaţi dacă următoarea ecuaţie este cu factor inte-*

grant şi determinaţi soluţia generală:

$$ydx - 3xdy = 0.$$

Soluţie *Avem:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 \text{ şi } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -3.$$

Expresia:

$$F(u) = \frac{x^2[\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)]}{yQ(x,y) + xP(x,y)} = \frac{2x}{y} = \frac{2}{u},$$

este funcţie de u. Un factor integrant este:

$$\mu(u) = e^{\int F(u)du} = u^2 = \frac{x^2}{y^2},$$

iar ecuaţia:

$$\frac{x^2}{y}dx - 3\frac{x^3}{y^2}dy = 0.$$

are familia de soluţii:

$$\frac{x^3}{3y} = c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

3.4.2 Exerciţii

1. *Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale şi, dacaă e cazul, determinaţi factorul integrant corespunzător:*

(a) $(y^2 + 12x^2y)dx + (2xy + 4x^3)dy = 0.$

(b) $(x^4y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0.$

(c) $y' = -\frac{x\sin y + y\sin y}{x\cos y - y\sin y}.$

(d) $(e^x\sin y + e^{-y})dx - (xe^{-y} - e^x\cos y)dy = 0.$

(e) $(x^2 + y\cos x)dx + (y^3 + \sin x)dy = 0.$

(f) $\frac{xy+1}{y}dx + \frac{2y-x}{y^2}dy = 0.$

(g) $3(x+y)^2dx + x(3y+2x)dy = 0.$

(h) $y' = -\frac{1-x^2y}{x^2(y-x)}$.

(i) $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$.

3.4.3 Soluţii

1. (a) $4x^3y + xy^2 = c, c$ constantă arbitrară;
(b) $x^4y + xy^4 - cxy = -3, c$ constantă arbitrară; factorul integrant este $\frac{1}{x^2y^2}$;
(c) $e^x[(x-1)\sin y + y\cos y] = c, c$ constantă arbitrară; factorul integrant este e^x;
(d) $e^x \sin y + xe^{-y} = c, c$ constantă arbitrară;
(e) $4x^3 + 3y^4 + 12y\sin x = c, c$ constantă arbitrară;
(f) $x^2 + \frac{2x}{y} + 4\ln y = c, c$ constantă arbitrară;
(g) $6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = c, c$ constantă arbitrară; factorul integrant este x;
(h) $\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} = c, c$ constantă arbitrară; factorul integrant este $\frac{1}{x^2}$;
(i) $2xe^{x-y} + y^2 = c, c$ constantă arbitrară; factorul integrant este e^{-y}.

3.5 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul I

Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul I au multe aplicaţii teoretice şi practice. Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul I este:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

unde funcţiile a_1 şi a_0 sunt continue pe intervalul $0 \leq x \leq b$, $a_1(0) \neq 0$. Prin urmare, există $\beta > 0$ astfel încât $a_1(0) \neq 0$ pentru orice $0 \leq x \leq \beta$. Împărţind relaţia la a_1, avem:

$$y' + p(x)y = r(x), \ p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}, \ r(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)},$$

p, r funcţii continue pe intervalul $0 \leq x \leq \beta$.
Dacă notăm $Ly = \frac{dy}{dx} + p(x)y$, să observăm că acest operator este liniar:

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = \frac{d}{dx}(c_1y_1 + c_2y_2) + p(c_1y_1 + c_2y_2) =$$

$$= c_1(\frac{dy_1}{dx} + py_1) + c_2(\frac{dy_2}{dx} + py_2) =$$
$$= c_1Ly_1 + c_2Ly_2,$$

unde c_1, c_2 sunt constante arbitrare. Ecuaţia $y' + p(x)y = r(x), r(x) \neq 0$, se numeşte ***neomogenă***, iar $y' + p(x)y = 0$ se numeşte ecuaţia ***omogenă*** ataşată.
Să demonstrăm că dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei omogene iar y_2 este orice soluţie a ecuaţiei neomogene, familia $y = cy_1 + y_2$ este soluţia generală a ecuaţiei neomogene.

$$L(c_1y_1 + y_2) = (c_1Ly_1 + Ly_2) = r(x),$$

deoarece $Ly_1 = 0$ şi $Ly_2 = r$.

Teoremă 3.5.1. *Fie p, r funcţii reale continue pe intervalul $0 \leq x \leq \beta$. Atunci problema iniţială:*

$$y' + p(x)y = r(x), \ y(0) = y_0, \tag{3.1}$$

are soluţie unică pe $0 \leq x \leq \beta$*, dată de*

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(t)dt}(y_0 + \int_0^x r(t)e^{\int_0^x p(t)dt}). \tag{3.2}$$

Demonstraţie Să considerăm ecuaţia omogenă:

$$y' + p(x)y = 0,$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile, adică:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Integrând pe intervalul $0 \leq x \leq \beta$, obţinem:

$$\ln|y| - \ln|y(0)| = -\int_0^x p(t)dt,$$

sau

$$\mid \frac{y}{y_0} \mid = e^{-\int_0^x p(t)dt}.$$

Fie

$$y_1 = e^{-\int_0^x p(t)dt}.$$

Se observă uşor că y_1 este o soluţie a ecuaţiei omogene, continuă şi diferenţiabilă astfel încât $y_1(0) = 1$. Prin urmare, am demonstrat existenţa soluţiei ecuaţiei omogene.
Acum să demonstrăm existenţa soluţiei y_2 a ecuaţiei neomogene. Fie:

$$P(x) = e^{\int_0^x p(t)dt}$$

Multiplicând relaţia

$$y_2' + p(x)y_2 = r(x)$$

cu factorul integrant P, avem

$$Py_2' + Ppy_2 = rP \iff \frac{d}{dx}(Py_2) = rP.$$

Integrând,

$$Py_2 = \int_0^x r(t)P(t)dt \text{ iar } y_2 = \frac{1}{P(x)}\int_0^x r(t)P(t)dt,$$

care este o soluţie a ecuaţiei neomogene. Deoarece $y_1(0) = 1$ şi $y_2(0) = 0$, funcţia $y = y_0 y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei considerate. Adică:

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(t)dt}(y_0 + \int_0^x r(t)e^{\int_0^x p(t)dt}).$$

Pentru a demonstra că y este soluţie unică a problemei iniţiale, să folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există două soluţii, notate u şi v. Adică $u' + p(x)u = r(x)$, $u(0) = y_0$ şi $v' + p(x)v = r(x)$, $v(0) = y_0$. Fie $w = u - v$, care este soluţie a ecuaţiei omogene.

$$w' + p(x)w = 0,\ w(0) = 0.$$

Din definiţia funcţiei P, deducem că $P(x) > 0,\ \forall\ 0 \leq x \leq \beta$. De asemenea,

$$Pw' + Ppw = 0, \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(wP) = 0,$$

ceea ce implică faptul că $wP = C$. Din $w(0)P(0) = 0$ rezultă că $wP \equiv 0$, adică $w = u - v \equiv 0, (P(x) > 0\ \forall\ 0 \leq x \leq \beta)$.
Teorema este demonstrată.

Observaţie 3.5.2. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul I (3.1) este dată de (3.2) şi fiecare soluţie particulară este obţinută din aceasta.*

Exemplu 3.5.3. *Rezolvaţi problema cu condiţia iniţială:*

$$y' + \frac{1}{1-x}y = 1 - x,\ y(0) = 1,\ 0 \leq x < 1.$$

Soluţie.

$$P(x) = e^{\int_0^x \frac{1}{1-t}dt} = e^{-\ln|1-x|} = \frac{1}{1-x}.$$

Înmulţind ecuaţia dată cu P, obţinem:

$$\frac{1}{1-x}y' + \frac{1}{(1-x)^2}y = 1 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{y}{1-x}) = 1.$$

Rezultă:

$$\frac{y}{1-x} = x + c \Longleftrightarrow y = x(1-x) + c(1-x),$$

unde c este o constantă arbitrară. Din condiţia iniţială rezultă că $c = 1$, adică soluţia problemei date este:

$$y = 1 - x^2.$$

Exemplu 3.5.4. *Determinaţi o soluţie a ecuaţiei $xy' + \alpha y = 0$, α constantă reală, continuă pe domeniul $x \geq 0$ şi care verifică condiţia iniţială $y(0) = y_0$.*

Soluţie. Ecuaţia se transformă în $y' + \frac{\alpha}{x}y = 0$, unde $P(x) = \frac{\alpha}{x}$, care pe domeniul $x \geq 0$ nu este continuă (nu este continuă în 0). Prin urmare, Teorema 3.5.1 nu se poate aplica. Şi totuşi, înmulţind cu factorul integrant x^α, avem:

$$y'x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(yx^\alpha) = 0.$$

Rezultă $y = cx^{-\alpha}$, unde c este o constantă arbitrară.
Dacă $\alpha = 0$, atunci unica soluţie a problemei date este $y = y_0$. Dacă $\alpha < 0$, soluţiile tind la 0 dacă $x \to 0$. E nevoie ca $y_0 = 0$, dar şi în această situaţie nu avem soluţie unică deoarece c este o constantă arbitrară. Ultima situaţie, $\alpha > 0$, ne conduce la concluzia că nu avem soluţii continue în $x = 0$ decât dacă $c = 0$, adică soluţia problemei în acest caz este $y = 0$.

Exemplu 3.5.5. *Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei*

$$y' - 2xy = e^{x^2}. \tag{3.3}$$

Soluţie. *Un factor integrant pentru ecuaţia de mai sus este*

$$P(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}.$$

Înmulţind ecuaţia dată cu acesta, avem:

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 1 \Longleftrightarrow d(e^{-x^2}y) = 1,$$

iar după integrare,

$$e^{-x^2}y = x + c \Longleftrightarrow y = e^{x^2}(x + c),$$

reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (3.1).

3.5.1 Exerciţii

1. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul I:

(a) $xy' + y = x^3$.

(b) $y' + y\cos x = e^{2x}$.

(c) $\operatorname{tg} x y' - y = \operatorname{tg}^2 x$.

(d) $xy' - y = x^2 \sin x$.

(e) $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{x^2+1} = 1$.

(f) $y' + y \operatorname{tg} x = 2\cos^2 x$.

(g) $y' + 2xy = x^3$.

(h) $y' + 2y = 3e^{-2x}$.

(i) $x' + 2xy = e^{-y^2}$. Indicaţie: fie $x = x(y)$.

(j) $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$.

3.5.2 Soluţii

1. (a) $4xy = x^4 + c, c$ o constantă arbitrară;
(b) $y = e^{-\sin x}(c + \int e^{2x+\sin x} dx)$;
(c) $y = \sin x[\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] + c \sin x$; (d) $y = x(c - \cos x)$;
(e) $y = (\arctan x + c)(x^2 + 1)$; (f) $y = \sin 2x + c \cos x$;
(g) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$; (h) $y = 3xe^{-2x} + ce^{-2x}$; (i) $x = e^{-y^2}(y + c)$;
(j) $y = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2 \cos x}$.

3.6 Ecuaţii Bernoulli

O altă categorie de ecuaţii diferenţiale de ordinul I sunt ecuaţiile Bernoulli, după numele matematicianului elveţian Daniel Bernoulli 1700-1782. Forma lor generală este:

$$y' + p(x)y = r(x)y^{\alpha}, \;\; \alpha \neq 0, 1, \tag{3.1}$$

unde p, r funcţiile sunt continue pe intervalul $0 \leq x \leq \beta$.

Observaţie 3.6.1. *Observăm că dacă $\alpha = 1$, atunci ecuaţia este diferenţială liniară de ordinul I. Dacă $\alpha = 0$, ecuaţia se transformă într-una cu variabile separabile.*

Înmulţind ecuaţia (3.1) cu termenul $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, avem:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)y^{1-\alpha}p(x) = (1-\alpha)r(x) \Longleftrightarrow$$

$$d(y^{1-\alpha}) + (1-\alpha)y^{1-\alpha}p(x) = (1-\alpha)r(x).$$

Notând $y^{1-\alpha} = u$, ecuaţia de mai sus se transformă într-una liniară:

$$u' + (1-\alpha)up(x) = (1-\alpha)r(x).$$

Exemplu 3.6.2. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}. \tag{3.2}$$

Soluţie. *Ecuaţia este de tip Bernoulli cu $\alpha = -3$. Notăm $y^4 = u$ şi rezultă $4y^3y' = u'$. Înmulţind ecuaţia (3.2) cu $4y^3$, obţinem:*

$$4y^3y' + 4xy^4 = x \Longleftrightarrow u' + 4xu = 4x.$$

Un factor integrant al acestei ecuaţii diferenţiale liniare este $P(x) =$ $= e^{\int 4xdx} = e^{2x^2}$. Înmulţind ecuaţia:

$$u' + 4xu = 4x$$

cu acesta, obţinem:

$$e^{2x^2}u' + 4xe^{2x^2}u = 4xe^{2x^2} \Longleftrightarrow d(e^{2x^2}u) = 4xe^{2x^2}.$$

Integrând ultima relaţie, rezultă soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare:

$$e^{2x^2}u = \int 4xe^{2x^2}dx \Longleftrightarrow e^{2x^2}u = e^{2x^2} + c.$$

Revenind la funcţia iniţială, soluţia ecuaţiei Bernoulli este:

$$e^{2x^2}y^4 = e^{2x^2} + c \Longrightarrow y^4 = 1 + ce^{-2x^2}$$

3.6.1 Exerciţii

1 Aflaţi soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale Bernoulli:

(a) $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.

(b) $xy' + xy^2 - y = 0$.

(c) $x^2(x-1)y - x(x-2)y - y^2 = 0$.

(d) $y' + 4xy = x\sqrt{y}$.

(e) $xy' + y + 3y^2x\ln x = 0, x > 0$.

(f) $xy' + y = y^2\ln x, x > 0$.

(g) $y' - \frac{y}{x} = xy^{-2}$.

2 Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy:

(a) $(1-x^3)y' - 2y(1+x) = y^{\frac{5}{2}}$, $y(0) = \frac{3}{4}$.

(b) $xy' + y + x^2y^2 = 0$, $y(1) = 1$.

(c) $2\cos x dy = (y\sin x - y^3)dx$, $y(0) = 1$.

(d) $y' = \frac{2}{x}y + \frac{1}{2x^2}y^2$, $y(1) = 1$.

(e) $y' = y(y+1)\cos x$, $y(0) = 1$.

3.6.2 Soluţii

Ex.**1** (a) $1-2y(1+\ln x)=cxy, c$ o constantă arbitrară;
(b) $y=\frac{2x}{x^2+c}, y=0$;
(c) $y=\frac{x^2}{(x-1)c+1}$; (d) $y=(\frac{1}{4}+ce^{-x^2})^2$;
(e) $y=\frac{1}{x(\frac{3}{2}+\ln^2 x)}$; (f) $y\ln x+y+cxy=1$;
(g) $y=\sqrt[3]{cx^3-3x^2}$.

Ex.**2** (a) $y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4(1+x+x^2)}+\frac{c(1-x)^2}{1+x+x^2}$;
(b) $y=-\frac{1}{x}+2$; (c) $\sec x=y^2(\operatorname{tg} x+1)$; (d) $y=\frac{2x^2}{3-x}$; (e) $y=\frac{1}{e^{-\sin x}-1}$.

3.7 Ecuaţii Riccati

Ecuaţiile diferenţiale de tipul:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \ p, q, r \in C(I),$$

se numesc ***ecuaţii Riccati***, după matematicianului veneţian Jacopo Francisco Riccati 1676-1754.

Observaţie 3.7.1. *(1) Dacă cunoaştem o soluţie particulară y_1 a acestei ecuaţii, cu schimbarea de funcţie $y = y_1 + z$, aceasta se transformă într-una Bernoulli.*

(2) Dacă facem schimbarea de funcţie $y = y_1 + \frac{1}{z}$, aceasta se transformă într-una liniară de ordinul I sau cu variabile separabile.

(3) Dacă cunoaştem două soluţii particulare y_1, y_2 ale acestei ecuaţii, cu schimbarea de funcţie $z = \frac{y-y_1}{y-y_2}$, aceasta se transformă într-una cu variabile separabile.

Exemplu 3.7.2. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$y' = 2xy - y^2 + 5 - x^2$$

Soluţie *Căutăm soluţii particulare de formă polinomialaă $y_1 = ax + b$ şi după înlocuirea în ecuaţie obţinem $y_1 = x + 2$. Facem substituţia*

$$y = x + 2 + z,$$

şi ajungem la o ecuaţie cu variabilele separabile:

$$\frac{dz}{4z + z^2} = -dx,$$

care după integrare ne conduce la:

$$z(x) = \frac{4ce^{-4x}}{ce^{-4x} - 1} \Longrightarrow y(x) = x + 2 + \frac{4ce^{-4x}}{ce^{-4x} - 1}.$$

Exemplu 3.7.3. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$x^2(y' + y^2) = a(xy - 1),\ y_1 = \frac{a}{x},\ y_2 = \frac{1}{x},\ a \in \mathbb{R}.$$

Soluţie *Folosim substituţia* $z = \frac{y-y_1}{y-y_2} \Longleftrightarrow z = \frac{y-\frac{a}{x}}{y-\frac{1}{x}}$. *Rezultă* $y = \frac{\frac{1}{x}(z-a)}{z-1}$.
După derivare:

$$y' = \frac{(-\frac{1}{x^2}(z-a) + \frac{1}{x}z')(z-1) - \frac{1}{x}(z-a)z'}{(z-1)^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia dată ajungem la:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1-a}{x}dx \Longrightarrow z = cx^{1-a}.$$

Soluţia generală este:

$$y = \frac{a - cx^{1-a}}{x(1-cx^{1-a})}.$$

3.7.1 Exerciţii

Rezolvaţi următoarele ecuaţii Riccati:

(a) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$, $y(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$, $y(x) = x$.

(c) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$, $y(x) = -x^2$.

(d) $y' = -y^2 \sin x + 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y(x) = \frac{1}{\cos x}$.

(e) $y' = 2\operatorname{tg} x \sec x - y^2 \sin x$, $y(x) = \sec x$.

3.7.2 Soluţii

Ex.**1** (a) $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{cx^3-x}$, c constantă arbitrară;
(b) $y = x + \frac{2x}{cx^2-1}$, c constantă arbitrară;
(c) $y = -x^2 + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c}$, c constantă arbitrară;
(d) $y = \frac{6\cos 2x+6}{-\cos 3x-\cos x+12c}$, c constantă arbitrară;
(e) $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{c-\cos^3 x}$, c constantă arbitrară.

3.8 Ecuaţii diferenţiale Clairaut şi Lagrange

Definiţie 3.8.1. *O ecuaţie diferenţială de forma:*

$$y = xy' + q(y'), \tag{3.1}$$

unde $q : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, **se numeşte ecuaţie Clairaut**.

Observaţie 3.8.2. *Ecuaţia (3.1) admite ca soluţie generală, familia de funcţii:*

$$y = xc + q(c),\ \ c \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

şi mai are o soluţie singulară care nu se poate obţine din (3.2):

$$\begin{cases} x = -q'(p) \\ y = -pq'(p) + q(p),\ \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplu 3.8.3. *Rezolvaţi ecuaţia:*

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

Soluţie *Notăm $y' = p,\ p = p(x)$ şi obţinem:*

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2}.$$

Derivăm în raport cu x relaţia anterioară şi:

$$p = p + xp' + \frac{pp'}{\sqrt{1 + p^2}}$$

de unde:

$$p'(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}) = 0.$$

Dacă $p' = 0$ atunci $p = c,\ c \in \mathbb{R}$ şi $y' = c,\ c \in \mathbb{R}$, de unde soluţia generală:

$$y = xc + \sqrt{1 + c^2},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Din $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, *obţinem soluţia singulară:*

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}, \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiţie 3.8.4. *O ecuaţie diferenţială de forma:*

$$y = xr(y') + q(y'), \tag{3.3}$$

unde $p, q : I \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii derivabile,* **se numeşte ecuaţie Lagrange**.

Observaţie 3.8.5. *Pentru a rezolva (3.3), notăm* $y' = p$ *şi derivăm egalitatea* $y = xr(p) + q(p)$. *Considerînd* x *funcţie de* p, *obţinem:*

$$x(p) = \frac{r'(p)}{p - r(p)} x(p) + \frac{q(y')}{p - r(p)}, \ r(p) \neq p. \tag{3.4}$$

După rezolvarea ecuaţiei diferenţiale liniare (3.4), avem familia cu 1 *parametru* $x = x(p, c)$, $p, c \in \mathbb{R}$. *Soluţia generală a ecuaţiei (3.3) este dată parametric astfel:*

$$\begin{cases} x = x(p, c) \\ y = x(p, c)r(p) + q(p), \ p \in \mathbb{R}, \ r(p) \neq p, p, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dacă p_i *sunt soluţiile ecuaţiei* $r(p) = p$, *atunci ecuaţia (3.3) admite şi soluţiile singulare:*

$$y = xr(p_i) + q(p_i).$$

Exemplu 3.8.6. *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$y = x(y')^2 + 2(y')^3.$$

Notăm $y' = p$ *şi derivăm egalitatea*

$$y = xp^2 + 2p^3, \tag{3.5}$$

de unde $p = p^2 + 2xpp' + 6p^2p'$. *Avem:*

$$p' = \frac{p - p^2}{2xp + 6p^2}.$$

Considerând x *funcţie de* p, *rezultă:*

$$x' = \frac{2xp + 6p^2}{p - p^2},\ p \neq 0, 1 \Longrightarrow$$

$$x' - 2x\frac{p}{p - p^2} = \frac{6p^2}{p - p^2},\ p \neq 0, 1, \tag{3.6}$$

o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I. Un factor integrant este:

$$\int \frac{2p}{p^2 - p} = \ln(p - 1)^2,\ p \neq 0, 1.$$

Înmulţim ecuaţia (3.6) cu $e^{\ln(p-1)^2} = (p - 1)^2$ *şi avem:*

$$x'(p-1)^2 + 2(p-1)x = 6p(1-p),\ p \neq 0, 1 \Longrightarrow (x(p-1)^2)' = 6p(1-p),\ p \neq 0, 1.$$

Obţinem:

$$x = \frac{1}{(p - 1)^2}(3p^2 - 2p^3 + c),\ p \neq 0, 1.$$

Înlocuim x *în (3.5) şi soluţia generală se prezintă în formă parametrică astfel:*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(p-1)^2}(3p^2 - 2p^3 + c) \\ y = \frac{p^2}{(p-1)^2}(3p^2 - 2p^3 + c) + 2p^3,\ p \neq 0, 1. \end{cases}$$

Ecuaţia dată mai admite şi soluţiile singulare $y = 0$ *şi* $y = x + 2$.

3.8.1 Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii Clairaut şi Lagrange:

(a) $y = x(y')^2 + 2(y')^3$.

(b) $yy' + x(y')^2 + 1 = 0$.

(c) $y + e^{y'} = xy'$.

(d) $y + xy' = 2y' - 1$.

(e) $y - 2xy' = \sin y'$.

(f) $y = xy' - \ln y'$.

(g) $y = x(y')^2 - y$.

(h) $y = y'(\sin y' + x)$.

(i) $y = xy' + \sqrt{1 + y'}$.

(j) $(y')^2 + 2xy' + 2y = 0$.

3.8.2 Soluţii

1. (a) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + c; \\ y = p^2 + 2p^3, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară. Soluţiile singulare sunt $y = 0$ şi $y = x + 2$.
(b) $y = x + \frac{2x}{cx^2 - 1}$;
(c) Soluţia generală este $y = cx - e^c, c$ o constantă arbitrară. Soluţia singulară este:

$$\begin{cases} x = p \\ y = p \ln p - p, \;\; p > 0. \end{cases}$$

(d) $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{3c - \cos^3 x}$;
(e) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} - \frac{\sin p}{p} - \frac{\cos p}{p^2} \\ y = \frac{2}{p}(c - \cos p) - \sin p, \;\; p \neq 0, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară. Soluţia singulară este $y = 0$.
(f) Soluţia generală este $y = cx - \ln \mid c \mid, c$ o constantă arbitrară. Soluţia

singulară este:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} \\ y = 1 - \ln p, \ p > 0. \end{cases}$$

(g) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \frac{c+\ln p}{p-1} \\ y = \frac{p^2(c+\ln p)}{p-1} - p, \ p > 0, p \neq 1, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară. Soluţiile singulare sunt $y = 0$ şi $y = x - 1$.
(h) Soluţia generală este $y = cx + c \sin c$, c o constantă arbitrară. Soluţia singulară este:

$$\begin{cases} x = -\sin p - p \cos p \\ y = -p^2 \cos p, \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Soluţia generală este $y = cx + \sqrt{1+c}$, c o constantă arbitrară. Soluţia singulară este:

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(j) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \frac{c}{\sqrt{p}} - \frac{p}{3} \\ y = -c\sqrt{p} - \frac{p^2}{6}, \ p > 0, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară. Soluţia singulară este $y = 0$.

3.9 Ecuaţii de forma $y = f(x, y')$

Vom studia în continuare ecuaţiile de forma $y = f(x, y')$, unde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y = y(x)$. Notăm $y' = p$ şi deci $y = f(x, p)$. Rezultă $dy = pdx$, adică:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = pdx. \tag{3.1}$$

Relaţia (3.1) ne conduce la ecuaţia diferenţială explicită:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{p - \frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Exemplu 3.9.1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$y = (y')^2 e^{y'}.$$

Notăm $y' = p$ *şi urmează* $y = p^2 e^p$. *De aici* $dy = e^p(2p + p^2)dp$, *adică* $e^p(2p + p^2)dp = pdx$. *Rezultă ecuatia diferenţială cu variabilele separate:*

$$dx = e^p(2 + p)dp.$$

După integrare:

$$x = e^p + pe^p + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Soluţia ecuaţiei date se prezintă în formă parametrică astfel:

$$\begin{cases} x = e^p + pe^p + c, \\ y = p^2 e^p, \ \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.9.1 Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii:

(a) $x(1 + (y')^2) = 1$;

(b) $x = yy' + \ln y'$;

(c) $x = \sin y' + \ln y'$.

3.9.2 Soluţii

1. (a) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2+1} \\ y = -2p + 2\arctan p + c, \;\; p \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară.

(b) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c + \arcsin p) + \ln p \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}(c + \arcsin p), \;\; p \in]-1, 1[, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară.

(c) Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x = \sin p + \ln p \\ y = p \sin p + \cos p + p + c, \;\; p > 0, \end{cases}$$

c o constantă arbitrară.

Capitolul 4

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Definiţie 4.0.1. *O ecuaţie diferenţială de forma:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordin** n*, unde* $a_n, a_{n-1}, ...a_0, f$ *sunt funcţii continue nenule pe intervalul* I*.*

Definiţie 4.0.2. *Ecuaţia diferenţială de forma:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4.2}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin** n*.*

Teoremă 4.0.3. *Dacă* $a_n, a_{n-1}, ...a_0, f$ *sunt funcţii continue nenule pe intervalul* I *atunci ecuaţia (4.1) admite o soluţie unică*

$$y = y(x)$$

care satisface condiţiile iniţiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ ,...,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1},$$

unde $x_0 \in I$ *iar* $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ *sunt constante.*

Definiţie 4.0.4. *O mulţime de funcţii nenule* $y_1, y_2, ..., y_n$ *definite pe acelaşi interval* I *se numesc* **liniar dependente** *dacă există constantele* $c_1, c_2, ..., c_n$ *nu toate* 0 *astfel încât:*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \ \forall x \in I.$$

Dacă nu există astfel de constante, funcţiile $y_1, y_2, ..., y_n$ *se numesc* **liniar independente.**

Exemplu 4.0.5. *Mulţimea de funcţii:*

$$e^x, 0, \sin x, 1,$$

este liniar dependentă luând setul de constante $0, c_1, 0, 0$.

Teoremă 4.0.6. *Dacă* $a_n, a_{n-1}, ...a_0, f$ *sunt funcţii continue nenule pe intervalul* I *atunci ecuaţia (4.2) admite* n *soluţii liniar independente* $y_1, y_2, ..., y_n$. *Combinaţia liniară:*

$$y_o(x) = c_n y_n(x) + c_{n-1} y_{n-1}(x) + ... + c_1 y_1(x), \tag{4.3}$$

unde $c_1, c_2, ..., c_n$ *sunt constante arbitrare, este de asemenea o soluţie a ecuaţiei (4.2). De fapt, este soluţia generală a ecuaţiei (4.2).*

Teoremă 4.0.7. *Dacă* y_p *este o soluţie particulară a ecuaţiei (4.1), atunci:*

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x),$$

este soluţia generală a ecuaţiei (4.1).

Observaţie 4.0.8. *Familia de soluţii (4.3) este de fapt soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (4.2). Orice soluţie particulară este obţinută din aceasta.*

4.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi omogene

În această secţiune vom trata ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogene. Aceste ecuaţii au forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.1}$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt constante, $a_n \neq 0$.
Ne propunem să determinăm soluţiile de forma $y = e^{rx}$ ale acestei ecuaţii. Deoarece $y^{(n)} = r^n e^{rx}$ pentru orice $n \in \mathbb{R}$, înlocuind în ecuaţia (4.1) fiecare derivată, după împărţirea cu $e^{rx} \neq 0$, avem:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0,$$

ecuaţie care se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei date. Determinând cele n soluţii ale ecuaţiei de mai sus, vom putea determina soluţiile ecuaţiei (4.1). Pentru fiecare situaţie vom considera un exemplu.

Exemplu 4.1.1. *Determinaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare omogene:*

$$y''' + y'' - 6y' = 0.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică ataşată este:*

$$r^3 + r^2 - 6r = 0 \Longleftrightarrow r(r^2 + r - 6) = 0,$$

şi are soluţiile $r = 0$, $r = -3$ şi $r = 2$, reale şi distincte. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}.$$

Exemplu 4.1.2. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare omogene:*

$$y^{(4)} + 4y''' + y'' - 4y' - 2y = 0.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este:*

$$r^4 + 4r^3 - 4r - 2 = 0 \Longleftrightarrow r^4 - 1 + 4r(r^2 - 1) + r^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(r^2-1)(r^2+1)+4r(r^2-1)+r^2-1 = 0 \Longleftrightarrow (r-1)(r+1)(r^2+4r+2) = 0.$$

Rădăcinile acestei ultime ecuaţii sunt:

$$r = 1,\ r = -1,\ r = -2 - \sqrt{2},\ r = -2 + \sqrt{2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{(-2-\sqrt{2})x} + c_4 e^{(-2+\sqrt{2})x}.$$

Exemplu 4.1.3. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare omogene:*

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este:*

$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \Longleftrightarrow (r-2)(r^2 + 2r + 4) - 6r(r-2) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(r-2)(r^2 - 4r + 4) = 0 \Longleftrightarrow (r-2)^3 = 0,$$

rădăcina $r = 2$ *fiind multiplă de ordinul* 3. *În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x}.$$

Exemplu 4.1.4. *Aflaţi soluţia particulară a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare omogene:*

$$y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este:*

$$r^2 - 2r + 5 = 0,$$

cu rădăcinile $r = 1 + 2i$ şi $r = 1 - 2i$. În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$$y(x) = c_1 e^{(1+2i)x} + c_1 e^{(1-2i)x} = c_1 e^x(\cos 2x + i\sin 2x) + c_2 e^x(\cos(-2x) + i\sin(-2x)),$$

de unde, renotând constantele $c_1 + c_2$ şi $ic_1 - ic_2$ respectiv tot cu c_1 şi c_2, avem soluţia generală a ecuaţiei date:

$$y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x.$$

Soluţia particulară se obţine rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4, \end{cases}$$

unde:

$$y'(x) = c_1 e^x \cos 2x - 2c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \sin 2x + 2c_2 e^x \cos 2x.$$

Avem:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y'(0) = c_1 + 2c_2 = 4 \end{cases}$$

Prin urmare $c_1 = 2$ şi $c_2 = 1$, soluţia particulară fiind:

$$y(x) = 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x.$$

4.1.1 Exerciţii

1. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

(a) $y''' + y'' - 6y' = 0$.

(b) $y^{(4)} - 2y'' = 0$.

(c) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$.

(d) $y^{(4)} - y''' - 4y'' + 4y' = 0$.

(e) $y^{(4)} = 0$.

(f) $y'' - y' + y = 0$.

(g) $y'' + 2y' - y = 0$.

(h) $y''' - 3y' - 2y = 0$.

(i) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2. Să se determine soluţia particulară a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

(a) $y'' = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1$.

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

(c) $3y''' + 5y'' + y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

(d) $y'' - 4y' + 20y = 0,\ y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 1$.

4.1.2 Soluţii

1. *(a)* $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x},\ c_1, c_2, c_3$ constante arbitrare;
(b) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{\sqrt{2}x} + c_4e^{-\sqrt{2}x},\ c_1, c_2, c_3, c_4$ constante arbitrare;
(c) $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4x \sin x + c_4x \cos x,\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ constante arbitrare;
(d) $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x},\ c_1, c_2, c_3, c_4$ constante arbitrare;
(e) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3,\ c_1, c_2, c_3, c_4$ constante arbitrare;
(f) $y = e^{x/2}(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}),\ c_1, c_2,$ constante arbitrare;
(g) $y = c_1e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2e^{(-1-\sqrt{2})x},\ c_1, c_2,$ constante arbitrare;
(h) $y = c_1e{-}x + c_2xe^{-x} + c_3e^{-2x},\ c_1, c_2, c_3$ constante arbitrare;
(i) $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x},\ c_1, c_2$ constante arbitrare.

2. *(a)* $y = 3 - x$; *(b)* $y = (1 + 3x)e^{-2x}$; *(c)* $y = \frac{9}{16}e^{x/3} + (\frac{x}{4} - \frac{9}{16})e^{-x}$; *(d)* $y = \frac{1}{4}e^{2x-\pi} \sin 4x$.

4.2 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene

I. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi

În această secţiune vom determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene cu coeficienţi constanţi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \ a_n \neq 0, \ f(x) \neq 0. \tag{4.1}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x),$$

unde y_p este o soluţie a ecuaţiei neomogene pe care o vom determina folosind ***metoda coeficienţilor nedeterminaţi.*** Această metodă poate fi aplicată doar dacă f conţine termeni care au un număr finit de derivate liniar independente. Acest lucru conduce la faptul că f trebuie să conţină termeni de forma $a, x^k, e^{ax}, \sin ax, \cos ax$ şi combinaţii ale acestora, unde a, k sunt constante.

De exemplu, dacă f conţine termenul x^3, acesta are un număr finit de derivate liniar independente, şi anume: $3x^2, 6x, 6$. Dacă luăm şi 0, mulţimea $3x^2, 6x, 6, 0$ nu mai este liniar independentă.

Cazul I

Primul caz pe care îl vom trata este acela în care $f(x)$ are în scrierea sa termeni care nu apar în scrierea soluţiei ecuaţiei omogene.

Exemplu 4.2.1. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:*

$$y'' + y' + y = x^2.$$

Soluţie *Rezolvăm prima dată ecuaţia omogenă:*

$$y'' + y' + y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este:

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *şi* $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. *În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Să observăm că $f(x) = x^2$ *nu are termeni de acelaşi fel cu cei din soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene. Prin urmare, soluţia particulară o vom considera ca o combinaţie liniară a termenilor* $x^2, x, 1$ *(*x^2 *şi derivatele sale împreună cu care formează o mulţime liniar independentă):*

$$y_p(x) = a + bx + cx^2.$$

Obţinem:

$$\begin{cases} y_p' = b + 2cx \\ y_p'' = 2c \end{cases}$$

Fiind y_p *soluţie a ecuaţiei ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene, înlocuind în aceasta obţinem:*

$$2c + b + 2cx + a + bx + cx^2 = x^2.$$

Identificând coeficienţii avem următorul sistem:

$$\begin{cases} c = 1 \\ 2c + b = 0 \\ 2c + a + b = 0, \end{cases}$$

cu soluţia $a = 0, b = -2, c = 1$. *Prin urmare, soluţia particulară a ecuaţiei este:*

$$y_p(x) = -2x + x^2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} x - 2x + x^2.$$

Exemplu 4.2.2. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constantţi:*

$$y^{(4)} - 2y'' + y = x - \sin x.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare a ecuaţiei omogene este:*

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = -1, r_4 = -1$. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x)e^{x} + (c_3 + c_4 x)e^{-x}.$$

Să observăm că $f(x) = x - \sin x$ *nu are termeni de acelaşi fel cu cei din soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene. Prin urmare, soluţia particulară o vom considera ca o combinaţie liniară a termenilor* $x, 1, \sin x, \cos x$ *(*x *şi derivatele sale împreună cu care formează o mulţime liniar independentă şi* $\sin x$ *care împreună cu* $\cos x$ *formează o mulţime liniar independentă):*

$$y_p(x) = a + bx + c \sin x + d \cos x.$$

Obţinem:

$$\begin{cases} y_p'' = -c \sin x - d \cos x \\ y_p^{(4)} = c \sin x + d \cos x. \end{cases}$$

Fiind y_p *soluţie a ecuaţiei ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene, înlocuind în aceasta obţinem:*

$$a + bx + 4c \sin x + 4d \cos x = x - \sin x.$$

Identificând coeficienţii avem $a = 0, b = 1, c = -\frac{1}{4}, d = 0$. *Prin urmare,* *soluţia particulară a ecuaţiei este:*

$$y_p(x) = x - \frac{1}{4}\sin x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-x} + x - \frac{1}{4}\sin x.$$

Cazul II

Cazul al doilea are în vedere situaţia în care $f(x)$ are în scrierea sa termeni $u(x)$ care apar în scrierea soluţiei ecuaţiei omogene de $x^k, k \geq 0$, ori (excepţie făcând o constantă). În această situaţie, y_p va conţine o combinaţie liniară de $x^{k+1}u(x)$ şi derivatele sale cu care formează o mulţime liniar independentă. Dacă apar în $f(x)$ şi termeni care nu se regăsesc în y_p, vom proceda ca şi în cazul I.

Exemplu 4.2.3. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constantţi:*

$$y'' + y' - 6y = x + e^{2x}.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei omogene este:*

$$r^2 + r - 6 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = -3$ *şi* $r_2 = 2$. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Să observăm că $f(x) = x + e^{2x}$ *are termeni de acelaşi fel cu cei din soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene, respectiv* e^{2x} *apare în scrierea ei de* x^0 *ori. Termenul* xe^{2x} *are derivatele sale liniar independente* xe^{2x}, e^{2x}, *dintre care* e^{2x} *apare deja în scrierea soluţiei particulare. Pe de altă parte,* x *nu apare în soluţia ecuaţiei omogene(cazul* I*). Prin urmare, soluţia particulară o vom considera ca o combinaţie liniară a termenilor*

$x, 1$ şi xe^{2x}, adică:

$$y_p(x) = a + bx + cxe^{2x}.$$

Derivăm:

$$\begin{cases} y_p' = b + ce^{2x} + 2cxe^{2x} \\ y_p'' = 2ce^{2x} + 2ce^{2x} + 4cxe^{2x}. \end{cases}$$

Înlocuind y_p, y_p' şi y_p'' în ecuaţie, avem:

$$5ce^{2x}+b+6cxe^{2x}-6a-6bx-6cxe^{2x} = x+e^{2x} \Longleftrightarrow 5ce^{2x}-6bx+b-6a = x+e^{2x}$$

Identificând coeficienţii rezultă $a = -\frac{1}{36}, b = -\frac{1}{6}, c = \frac{1}{5}$. Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este:

$$y_p(x) = -\frac{1}{36} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{5}xe^{2x}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{36} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{5}xe^{2x}.$$

Exemplu 4.2.4. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:*

$$y'' + y = \sin^3 x.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare a ecuaţiei omogene este:*

$$r^2 + 1 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = -i$ şi $r_2 = i$. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Funcţia $f(x) = \sin^3 x$ se poate transforma astfel:

$$f(x) = (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3 = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{-8i} + 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{8i} = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$

Observăm că $\sin x$ *apare în scrierea funcţiei* $f(x)$ *de* x^0 *ori. Termenul* $x \sin x$ *are derivatele liniar independente* $\sin x, x\sin x, x\cos x$*, dintre care* $\sin x$ *apare deja în scrierea soluţiei particulare. Pe de altă parte,* $\sin 3x$ *nu apare în scrierea soluţiei ecuaţiei omogene(cazul I). Prin urmare, soluţia particulară o vom considera ca o combinaţie liniară a termenilor* $\sin 3x, \cos 3x$ *şi* $x \sin x$*, adică:*

$$y_p(x) = a\cos 3x + b\sin 3x + cx\sin x + dx\cos x.$$

Derivăm:

$$\begin{cases} y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x + c\sin x + cx\cos x + d\cos x - dx\sin x, \\ y_p'' = 9a\cos 3x - 9b\sin 3x + 2c\cos x - cx\sin x - 2d\sin x - dx\cos x. \end{cases}$$

Înlocuind y_p, y_p' *şi* y_p'' *în ecuaţie, avem:*

$$10a\cos 3x - 8b\sin 3x + 2c\cos x - 2d\sin x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$

Identificând coeficienţii rezultă $a = 0, b = \frac{1}{32}, c = 0$ *şi* $d = -\frac{3}{8}$*. Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este:*

$$y_p(x) = \frac{1}{32}\sin 3x - \frac{3}{8}x + \frac{1}{5}x\cos x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{32}\sin 3x - \frac{3}{8}x + \frac{1}{5}x\cos x.$$

Cazul III

Vom prezenta acum situaţia în care $f(x)$ îndeplineşte următoarele condiţii:

(a) ecuaţia caracteristică are cel puţin o rădăcină multiplă r;

(b) funcţia $f(x)$ conţine un termen $u(x)$ care apare de x^k ori, unde $u(x)$ a fost obţinută din rădăcina multiplă r.

În aceast caz, y_p va conţine o combinaţie liniară de $x^{k+r}u(x)$ şi derivatele sale cu care formează o mulţime liniar independentă, eliminând totuşi termenii care apare în y_0. Dacă apar în $f(x)$ şi termeni care nu se regăsesc în y_p, vom proceda ca şi în cazul I.

Exemplu 4.2.5. *Aflaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constantţi:*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare a ecuaţiei omogene este:*

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0,$$

cu rădăcina $r = 1$ *multiplă de ordin* 3. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x.$$

Să observăm că $f(x) = e^x$ *are termenul de acelaşi fel cu cei din soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene şi* e^x *apare în scrierea lui* $f(x)$ *de* x^0 *ori. Termenul* x^3e^{2x} *are derivatele liniar independente* e^x, xe^x *şi* x^2e^x, *care* e^x, xe^x *şi* x^2e^x *apar deja în scrierea soluţiei particulare. Prin urmare, soluţia particulară o vom considera de forma:*

$$y_p(x) = ax^3e^x.$$

Derivatele:

$$\begin{cases} y_p' = 3ax^2e^x + ax^3e^x \\ y_p'' = 6axe^x + 6ax^2e^x + ax^3e^x \\ y_p''' = 6ae^x + 18axe^x + 9ax^2e^x + ax^3e^x. \end{cases}$$

Înlocuind y_p, y_p', y_p'' *şi* y_p''' *în ecuaţie, avem:*

$$6ae^x = e^x,$$

de unde $a = \frac{1}{6}$.

Soluţia particulară este:

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y_p(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Exemplu 4.2.6. *Aflaţi soluţia următoarei probleme particulare:*

$$y'' - 5y' + 6y = e^x(2x - 3),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei omogene este:*

$$r^2 - 5r + 3r + 6 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = 3$ *şi* $r_2 = 2$. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}.$$

Să observăm că $y_0(x)$ *nu are termeni la fel cu cei ai lui* $f(x) = e^x(2x-3)$. *Termenul* $e^x(2x-3)$ *are derivatele liniar independente* e^x *şi* xe^x. *Aşadar, soluţia particulară o vom considera de forma:*

$$y_p(x) = axe^x + be^x.$$

Derivatele:

$$\begin{cases} y_p' = ae^x + axe^x + be^x, \\ y_p'' = 2ae^x + axe^x + be^x. \end{cases}$$

Înlocuind y_p, y_p' *şi* y_p'' *în ecuaţia neomogenă, avem:*

$$(-3a + 2b)e^x + 2axe^x = 2xe^x - 3e^x,$$

de unde

$$\begin{cases} -3a + 2b = -3 \\ 2a = 2, \end{cases}$$

cu soluţia $(a, b) = (1, 0)$. *Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este:*

$$y_p(x) = xe^x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + xe^x.$$

Pentru a afla funcţia particulară care verifică condiţiile $y(0) = 1$ *şi* $y'(0) = 3$ *calculăm derivata lui* $y(x)$*:*

$$y'(x) = 3c_1e^{3x} + 2c_2e^x + xe^x + e^x.$$

Din $y(0) = 1$ *rezultă* $c_1 + c_2 = 1$ *şi din* $y'(0) = 1$ *avem* $3c_1 + 2c_2 = 2$. *Obţinem* $c_1 = 0$ *şi* $c_2 = 1$. *Soluţia problemei particulare este:*

$$y(x) = e^{2x} + xe^x.$$

4.2.1 Exerciţii

1. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 12e^x$.

(b) $y'' + 3y' + 2y = \sin x$.

(c) $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^x + 2\sin x$.

(d) $y'' + y' = x + \sin 2x$.

(e) $y'' - 3y' = 2e^{2x}\sin x$.

(f) $y'' + y' = \sin x + e^{-x}$.

(g) $y'' + y' = \sin 2x \cdot \sin x$.

(h) $y'' - 2y' - 8y = 9xe^x + 10e^{-x}$.

(i) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$.

2. Să se determine soluţia următoarelor probleme particulare de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

(a) $y'' - 5y' - 6y = e^{3x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

(b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

(c) $y''' - 2y'' + y' = 2e^x + 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0.$

(d) $y'' - y' - 2y = 5\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

(e) $y'' + 9y = 8\cos x,\ y(\pi/2) = -1,\ y'(\pi/2) = 1.$

4.2.2 Soluţii

1. *(a)* $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 2e^x, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x), c_1, c_2$ constante arbitrare;
(c) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 4 + e^x\frac{1}{5}(\sin x - 3\cos x), c_1, c_2$ constante arbitrare;
(d) $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{10}(2\sin 2x + \cos 2x), c_1, c_2$ constante arbitrare;
(e) $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{e^{2x}}{5}(3\sin x + \cos x), c_1, c_2$ constante arbitrare;
(f) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(g) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + 4 + \frac{x}{4}\sin x + \frac{\cos 3x}{16}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(h) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - xe^x - 2e^{-2x}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(i) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{x^4e^{-x}}{12}, c_1, c_2$ constante arbitrare.

2. *(a)* $y = \frac{10}{21}e^{6x} + \frac{45}{28}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{3x};$
(b) $y = \frac{1}{6}(-10e^{2x} + 15e^x + e^{-x};$
(c) $y = x^2 + 4x + 4 + (x^2 - 4)e^x;$
(d) $y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x;$
(e) $y = \cos x + \frac{2}{3}\cos 3x + \sin 3x.$

II. Metoda variaţiei constantei

Să considerăm din nou ecuaţia neomogenă:

$$(4.2)\qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x),\ \ a_n \neq 0,$$

unde $f(x) \neq 0, \forall x \in I$ şi f este continuă pe acest interval. Această metodă poate fi folosită şi atunci când f nu are un număr finit de derivate liniar independente.

Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt n rădăcini liniar independente ale ecuaţiei omogene, atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene este:

$$(4.3)\qquad y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + ... + u_n y_n,$$

unde $u_1, u_2, ..., u_n$ sunt funcţii de x, determinate din sistemul:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + ... + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + ... + u_n' y_n'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1' y_1^{(n)} + u_2' y_2^{(n)} + ... + u_n' y_n^{(n)} = \frac{f(x)}{a_n}. \end{cases}$$

Exemplu 4.2.7. *Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:*

$$(4.4)\qquad y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}.$$

Să observăm că funcţia $\sin e^{-x}$ *are un număr infinit de derivate liniar independente, prin urmare, nu poate fi rezolvată cu metoda anterioară.*

Soluţie *Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei omogene este:*

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = 1$ *şi* $r_2 = 2$. *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:*

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Să obserăm că $y_1 = e^x$ *şi* $y_2 = e^{2x}$ *sunt liniar independente, adică:*

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vom determina soluţia particulară $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ *a ecuaţiei neomogene, unde* u_1, u_2 *sunt funcţii ce depind de* x *şi pe care le vom determina din sistemul:*

$$\begin{cases} u_1'e^x + u_2'e^{2x} = 0 \\ u_1'e^x + 2u_2'e^{2x} = \sin e^{-x}. \end{cases}$$

Scăzând din a doua relaţie din sistem pe prima, avem:

$$u_2'e^{2x} = \sin e^{-x} \Longleftrightarrow u_2' = e^{-2x} \sin e^{-x}.$$

Prin urmare:

$$u_2(x) = \int e^{-2x} \sin e^{-x} dx.$$

Notăm $e^{-x} = u$ *şi avem* $-e^{-x}dx = du$*. Integrala devine:*

$$u_2 = -\int u \sin u du = \int u(\cos u)' du = u \cos u - \int \cos u = u \cos u - \sin u.$$

Obţinem:

$$u_2(x) = e^{-x} \cos e^{-x} - \sin e^{-x}.$$

Înlocuind $u_2' = e^{-2x} \sin e^{-x}$ *în prima relaţie din sistem, rezultă:*

$$u_1' = -e^{-x} \sin e^{-x},$$

adică $u_1(x) = -\int e^{-x} \sin e^{-x} dx$*. Făcând din nou notaţia* $e^{-x} = u$*, avem:*

$$u_1 = \int \sin u du = -\cos u \Longrightarrow u_1(x) = -\cos e^{-x}.$$

Precizăm că am determinat funcţiile u_1, u_2 *particulare, luând în calculul integralelor constanta* 0*. Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este:*

$$y_p = -e^x \cos e^{-x} + (e^{-x} \cos e^{-x} - \sin e^{-x})e^{2x} \Longrightarrow y_p = -e^{2x} \sin e^{-x}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}.$$

4.2.3 Exerciţii

1. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene:

(a) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.

(b) $y'' + y = \sin^2 x$.

(c) $y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-x}$.

(d) $y'' + y = 4x \sin x$.

(e) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

(f) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

(g) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$.

(h) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

4.2.4 Soluţii

1. *(a)* $y = \frac{1}{4} x^4 e^{-x}(2 \ln x - 3) + (c_1 + c_2 x)e^{-x}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(b) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{6} \cos 2x + \frac{1}{2}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(c) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \cos e^{-x}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(d) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x^2 \cos x + x \sin x, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(e) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - 2, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(f) $y = (\frac{1}{4} \ln(\cos 2x) + c_1) \cos 2x + (\frac{1}{2} x + c_2) \sin 2x, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(g) $y = [-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + c_1]e^x + (\arctan e^x + c_2)e^{2x}, c_1, c_2$ constante arbitrare;
(h) $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + x \ln x), c_1, c_2$ constante arbitrare.

Capitolul 5

Transformata Laplace

În această secţiune vom studia transformata Laplace care are numeroase aplicaţii. Ramura matematicii care studiază proprietăţile transformatelor integrale, printre care şi transformata Laplace, se numeşte Calcul Operatorial. Transformata Laplace este o metodă alternativă care poate fi aplicată pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale studiate în capitolul anterior.

Vom defini o clasă de funcţii, clasa funcţiilor original, notată cu O şi fiecărei funcţii din O îi vom asocia transformata ei Laplace care este o funcţie imagine şi face parte din mulţimea funcţiilor imagine, I.

Definiţie 5.0.1. *Se numeşte funcţie original funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *care îndeplineşte condiţiile:*

(i) $f(t) = 0, \quad \forall t > 0$*;*

(ii) pentru orice interval finit, f *are un număr finit de discontinuităţi iar în punctele de discontinuitate există limite laterale finite;*

(iii) există $M > 0$ *şi* $s \in \mathbb{R}$ *astfel încât:*

$$| f(t) |< Me^{st}. \tag{5.1}$$

Observaţie 5.0.2. *Dacă relaţia (5.1) are loc pentru orice* $s \in \mathbb{R}$*, atunci va fi satisfăcută pentru orice* $\sigma \in \mathbb{C}$ *cu* $Re\ \sigma > s$*. Notăm cu:*

$$s_0 = inf\{s \in \mathbb{R} :| f(t) |< Me^{st},\ t > 0\}.$$

Această margine inferioară se numeşte ***indice de creştere*** *sau* ***abscisă de convergenţă****.*

Exemplu 5.0.3. *Funcţia* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită:*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

se numeşte funcţia lui Heaviside şi este o funcţie original cu $s_0 = 0$*.*

Definiţie 5.0.4. *Fie* f *o funcţie original cu abscisa de convergenţă* s_0*. Fie* $D = \{s \in C : Re\ s \geq s_0\}$*. Funcţia* $F : D \to \mathbb{C}$*,*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.2}$$

se numeşte ***transformata Laplace*** *a funcţiei* f *şi se notează*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Teoremă 5.0.5. *Fie* f *o funcţie original cu abscisa de convergenţă* s_0 *şi* $D = \{s \in C : Re\ s \geq s_0\}$*. Atunci pentru orice* $s \in D$*, integrala improprie (5.2) este absolut convergentă.*

Teoremă 5.0.6. *Funcţia* F *este o funcţie olomorfă pe domeniul său de definiţie şi derivata sa se calculează:*

$$F^{'}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))dt.$$

5.1 Proprietăţi ale operatorului Laplace

(1) $\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ (operatorul Laplace este liniar);

(2) $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}(\frac{s}{a})$ (schimbarea de scară);

(3) $\mathcal{L}\{e^{at}f(at)\}(s) = F(s-a)$ (translaţia în complex);

(4) $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a))\}(s) = e^{-sa}F(s)$ (translaţia la dreapta în real;

(5) $\mathcal{L}\{f^{'}(t)\}(s) = sF(s) - f(+0)$, unde $f(+0) = \lim_{t\searrow 0} f(t)$ (derivarea originalului);

(6) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^nF(s)-s^{n-1}f(+0)-s^{n-2}f^{'}(+0)-...-f^{(n-1)}(+0)$;

(7) $\mathcal{L}\{(-t)^nf(t)\}(s) = F^{(n)}(s)$ (derivarea transformatei);

(8) $\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\}(s) = \frac{F(s)}{s}$ (integrarea originalului);

(9) $\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(s)$ (integrarea transformatei);

(10) $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(+0)$ (teorema valorii iniţiale);

(11) $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ (teorema valorii finale);

(12) $\mathcal{L}\{(f{*}g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$, unde $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$ iar $(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$ este convoluţia funcţiilor f şi g.

Exemplu 5.1.1. *Să determinăm transformata Laplace a funcţiei* $f(t) = (\sin t)u(t)$, *unde* u *este funcţia lui Heaviside.*
Soluţie. *Avem conform definiţiei:*

$$\mathcal{L}\{(\sin t)u(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t dt. \tag{5.1}$$

Ştim că:

$$\begin{cases} \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{cases}$$

Înlocuind în (5.1) obţinem:

$$\mathcal{L}\{(\sin t)u(t)\}(s) = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{-st}(e^{it} - e^{-it})dt = \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{2i(s-i)} - \frac{1}{2i(s+i)} = \frac{1}{s^2+1}, \ \mathit{Re}\ s > 0.$$

În mod asemănător,

$$\mathcal{L}\{(\cos t)u(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}, \ \mathit{Re}\ s > 0.$$

Exemplu 5.1.2. *Să determinăm transformata Laplace a funcţiei $f(t) = sin\omega t\ u(t)$, unde u este funcţia lui Heaviside.*
Soluţie. *Ţinând cont de proprietatea* (2) *şi de (5.2), avem*

$$\mathcal{L}\{(\sin \omega t)u(t)\}(s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{(\sin t)(u(t)\}(\frac{s}{\omega}) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Se deduce uşor următorul **tabel de transformate**:

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^r	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
$t^r e^{at}$	$\frac{\Gamma(r+1)}{(s-a)^{r+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

Exemplu 5.1.3. *Să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcţii:*

(1) $f(t) = (t-a)^2 u(t-a)$;

(2) $f(t) = t^2 u(t-a)$;

(3) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$;

(4) $f(t) = \frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$*;*

(5) $f(t) = t \sinh at$*, unde* $\sinh t = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$.

Soluţii. (1) *Având în vedere proprietatea* (4) *şi tabelul de mai sus rezultă că* $\mathcal{L}\{(t-a)^2 u(t-a)\}(s) = e^{-sa}\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2e^{-sa}}{s^3}$.
(2) *Deoarece* $t^2 = (t-a)^2 + 2a(t-a) + a^2$*, aplicând aceleaşi proprietăţi ca mai sus, avem* $\mathcal{L}\{t^2 u(t-a)\}(s) = \mathcal{L}\{(t-a)^2 + 2a(t-a) + a^2\}(s) =$
$= e^{-sa}(\mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2a\mathcal{L}\{t\}(s) + a^2\mathcal{L}\{1\}(s)) = e^{-sa}(\frac{2}{s^3} + 2a\frac{1}{s^2} + a^2\frac{1}{s})$.
(3) *Folosind* (9) *avem* $\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty \frac{1}{1+u^2} = \arctan u|_s^\infty =$

$= \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$.
(4) *Asemănător cu exerciţiul* (3)*,* $\mathcal{L}\{\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}\}(s) = \int_s^\infty (\frac{2u}{u^2+a^2} -$
$- \frac{2u}{u^2+b^2})du = \ln(u^2 + a^2)|_s^\infty - \ln(u^2 + b^2)|_s^\infty = \ln \frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$.
(5) $\mathcal{L}\{t \sinh at\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}t(e^{at} - e^{-at})\}(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) - \mathcal{L}\{te^{-at}\}(s)) =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(s-a)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+a)^2}$.

5.2 Inversa transformatei Laplace

Problema care se pune în continuare este de a determina funcţia original dacă se cunoaşte funcţia imagine, iar rezolvarea sa se bazează pe faptul că între mulţimea originalelor şi mulţimea imaginilor există o corespondenţă biunivocă.
Dacă $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, atunci $f(t)$ se numeşte inversa transformatei Laplace sau originalul funcţiei imaginare $F(s)$ şi se notează:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Exemplu 5.2.1. (1) *Dacă* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s}$ *atunci* $u(t) = f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t)$*. Analog, dacă* $\mathcal{L}\{(\sin t)u(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$ *atunci avem că* $(\sin t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}(t)$.

Exemplu 5.2.2. *Să se determine originalele funcţiilor de mai jos, utilizând tabelul:*

(1) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\}(t) = e^{3t}u(t)$;

(2) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2s-3}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2(s-\frac{3}{2})}\}(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}u(t)$;

(3) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+3^2}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{3(s^2+3^2)}\}(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+3^2}\}(t) = \frac{1}{3}(\sin 3t)u(t)$;

(4) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}(t) = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2!}{s^3}\}(t) = t^2u(t)$;

(5) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4!}{(s-2)^3}\}(t) = e^{2t}t^4u(t)$.

Exemplu 5.2.3. *Să se determine originalele funcţiilor de mai jos, utilizând descompunerea în fracţii simple:*

(1) $F(s) = \frac{4s-5}{s^2-s-2}$;
Să descompunem fracţia în fracţii simple:

$$F(s) = \frac{4s-5}{(s+1)(s-2)} = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s-2}.$$

Prin urmare,
$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s-5}{s^2-s-2}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s+1}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}(t) = 3e^{-t}u(t) +$
$+ e^{2t}u(t)$.

(2) $F(s) = \frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}$;
Fracţia descompusă în fracţii simple:

$$F(s) = \frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{1}{s+1} - 4\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{s-3}.$$

Avem:
$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}(t) - 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^4}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{(s+1)^3}\}(t)+$

$+ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s-3}\}(t) = e^{-t}u(t) - 4te^{-t}u(t) + \frac{3}{2}t^2e^{-t}u(t) + 2e^{3t}u(t)$.

(3) $F(s) = \frac{3s^3+s^2+12s+2}{(s-3)(s+1)^3}$.
Aşadar, $F(s) = \frac{3s^3+s^2+12s+2}{(s-3)(s+1)^3} = \frac{3s-1}{s^2+1} + \frac{2}{s+2}$.

Prin urmare, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3s^3+s^2+12s+2}{(s-3)(s+1)^3}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3s-1}{s^2+1}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+2}\}(t) =$
$= \mathcal{L}^{-1}\{3\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}(t) = 3(\cos t)u(t) - (\sin t)u(t)+$
$+2e^{-2t}u(t)$.

5.3 Aplicaţii ale operatorului Laplace

Transformata Laplace se arată deosebit de utilă în rezolvarea ecuaţiilor. Fie ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t).$$

Ne propunem să aflăm soluţia ecuaţiei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, ..., x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Exemplu 5.3.1. *Să se afle soluţia ecuaţiei:*

$$x''(t) + x(t) = (\cos t)u(t),\ t > 0,$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 0$*,* $x'(0) = 1$*.*

Soluţie. Aplicăm operatorul Laplace ecuaţiei şi ţinem cont de următoarele:
$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$,
$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2 X(s) - sx(+0) - x'(+0) = s^2 X(s) - 1$,
$\mathcal{L}\{(\cos t)u(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$.
Ecuaţia operaţională este:

$$(s^2 + 1)X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + 1,$$

adică $X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}$.
Ştim că $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}(t)$. Aplicând proprietatea (12) avem $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}\}(t) = (\sin t)u(t)*$

$* (\cos t)u(t)(t) = \int_0^t (\sin u)(\cos(t-u))du = (\frac{1}{2} t \sin t)u(t)$.
Soluţia ecuaţiei este $x(t) = (\frac{1}{2} \sin t)u(t) + (\sin t)u(t)$.

Exemplu 5.3.2. *Să se afle soluţia ecuaţiei:*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}u(t).$$

Soluţie. Aplicăm operatorul Laplace ecuaţiei şi ţinem cont de următoarele:
$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$,

$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x'(+0)$,
$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(+0) - x'(+0)$,
$\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = \frac{1}{s+1}$. Ecuaţia operaţională este:

$$(s^2 - 3s + 2)X(s) - sx(+0) - x' + 3x(+0) = \frac{1}{p+1},$$

de unde,
$X(s) = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)} + x(+0)\frac{p}{(p-1)(p-2)} + (x'(+0) + 3x(+0))\frac{1}{(p-1)(p-2)}$.
După descompunerea în fracţii simple:
$X(s) = (-\frac{1}{2}+2x(+0)+x'(+0))\frac{1}{p-1}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}+(\frac{1}{3}+5x(+0)+3x'(+0))\frac{1}{p-2} =$
$= c_1\frac{1}{p-1} + c_2\frac{1}{p-2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+1}$.
Originalul lui $X(s)$ este:
$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = c_1\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p-1}\}(t)+c_2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p-2}\}(t)+\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p+1}\}(t) =$
$= c_1e^tu(t) + c_2e^{2t}u(t) + \frac{1}{6}e^{-t}u(t)$.

5.3.1 Exerciţii

1. Determinaţi transformata Laplace a următoarelor funcţii:

(a) $f(t) = x\cosh at$;

(b) $f(t) = t\cos at$;

(c) $f(t) = te^{at}$;

(d) $f(t) = t^2e^{at}$;

(e) $f(t) = \frac{e^{-2t}-1}{t}\sin 3t$.

2. Determinaţi originalul ştiind că transformata Laplace este:

(a) $F(s) = \frac{2s-5}{p^2-9}$;

(b) $F(s) = \frac{12}{4-3s} + \frac{p+1}{p^{\frac{3}{4}}}$;

(c) $F(s) = \frac{2s^2+s+4}{s^4+s^3+2s^2-s+3}$;

(d) $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}$;

(e) $F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2)^2}$.

3. Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale cu coeficienţi constanţi:

(a) $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;

(b) $x''' - 2x'' + x' = 2e^t + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$;

(c) $x'' + x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;

(d) $x'' - 5x' - 6x = e^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$;

(e) $x'' + x = 2\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

(f) $x''' - 2x'' - x' + 2x = 5\sin 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$;

(g) $x'' + 4x = \sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5.3.2 Soluţii

1. (a) $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$; (b) $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$; (c) $\frac{1}{(s-a)^2}$; (d) $\frac{2}{(s-a)^3}$.

2. (a) $f(t) = 2\cosh t - \frac{5}{3}\sinh t$; (b) $f(t) = -4e^{\frac{4t}{3}} + \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} + \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{4}{3})}$;
(c) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$;
(d) $f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$; (e) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t\sin t$.

3. (a) $x(t) = (1+3t)e^{-2t}u(t)$;
(b) $x(t) = (t^2+4t+4)u(t) + (t^2-4)e^t u(t)$;
(c) $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t) + e^{-\frac{t}{2}}\frac{7\sqrt{3}}{3}(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t) + (t^2-2t)u(t)$;
(d) $x(t) = \frac{10}{21}e^{6t}u(t) + \frac{45}{28}e^{-t}u(t) - \frac{1}{12}e^{3t}u(t)$;
(e) $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t)u(t) + (\sin t)u(t)$;
(f) $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{5}{12}e^{2t}u(t) + \frac{1}{4}(\cos 2t)u(t) + \frac{1}{4}(\sin 2t)u(t)$;
(g) $x(t) = \frac{1}{6}(\cos t)u(t) + \frac{5}{6}(\cos 2t)u(t) - \frac{1}{8}t(\sin t)u(t)$.

Bibliografie

[1] Arnold, V.I., *Ecuaţii diferentţiale ordinare*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[2] Barbu, V., *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[3] Brânzescu, V., Stănăşilă, O., *Matematici speciale-teorie, exemple, aplicaţii*, Editura All Educational, Bucureşti, 1998.

[4] Cîmpean, D.S., *An introduction to advanced mathematics*, Editura Mediamira, 2010.

[5] Chiriţă, S., *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[6] Coddington, S.A., Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw Hill, New York, 1955.

[7] Corduneanu, C., *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Universitatea Al.I.Cuza, Iaşi, 1971.

[8] Crăciun, I., *Capitole de matematici speciale*, Editura PIM, Iaşi, 2007.

[9] Demidovitch, B., *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique*, Editions Mir, Moscow, 1972.

[10] Dettman, J. W., *Introduction to Linear Algebra and Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[11] Fihtenholt, G.M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[12] Haimovici, A., *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[13] Hărăguş, D., *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.

[14] Holhoş, A., *Curs de matematici speciale*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2018.

[15] Ionescu, D., V., *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[16] Lungu, N., Dumitraş, D.E., Ile, V., *Matematici aplicate în inginerie*, Editura Digital Data Cluj, 2007.

[17] Marian, D., Blaga, L., *Differential equations-Theory and Problems*, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2014.

[18] Micula, Gh., Pavel, P., *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1989.

[19] Mirică, St., *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Universităţii, Bucureşti, 1999.

[20] Pavel, G., Tomuţa, I., Gavrea, I., *Matematici speciale-aplicaţii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[21] Popa, D., Todea, C-C., *Special mathematics. Problems*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2014.

[22] Popoviciu, N., *Matematici speciale. Teorie şi aplicaţii.*, vol. I, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1995.

[23] Redheffer, R., *Differential Equations-Theory and Applications*, Jones and Bartelett Publishers, Boston, 1991.

[24] Rogai, E., *Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

[25] Reghiş, M., Topuzu, P., *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura Mirton, 2000.

[26] Rudner, V., Nicolescu, C., *Probleme de matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[27] Rus, I.A., *Ecuaţii diferenţiale şi integrale. Întrebări de control*, Litografa Universităţii Cluj-Napoca, 1975.

[28] Rus, I.A., Pavel, P., Micula, Gh., *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale şi cu derivate partţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[29] Stoica, C., *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale prin exerciţii şi probleme*, Editura Mirton, Timişoara, 2004.

[30] Tihonov, M., Samarski, A.A., *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Tehnică, 1956.

[31] Tenenbaum, M., Pollard, H., *Ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.

[32] Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[33] Yosida, K., *Équations différentielles et intégrales*, Dunod, Paris, 1971.