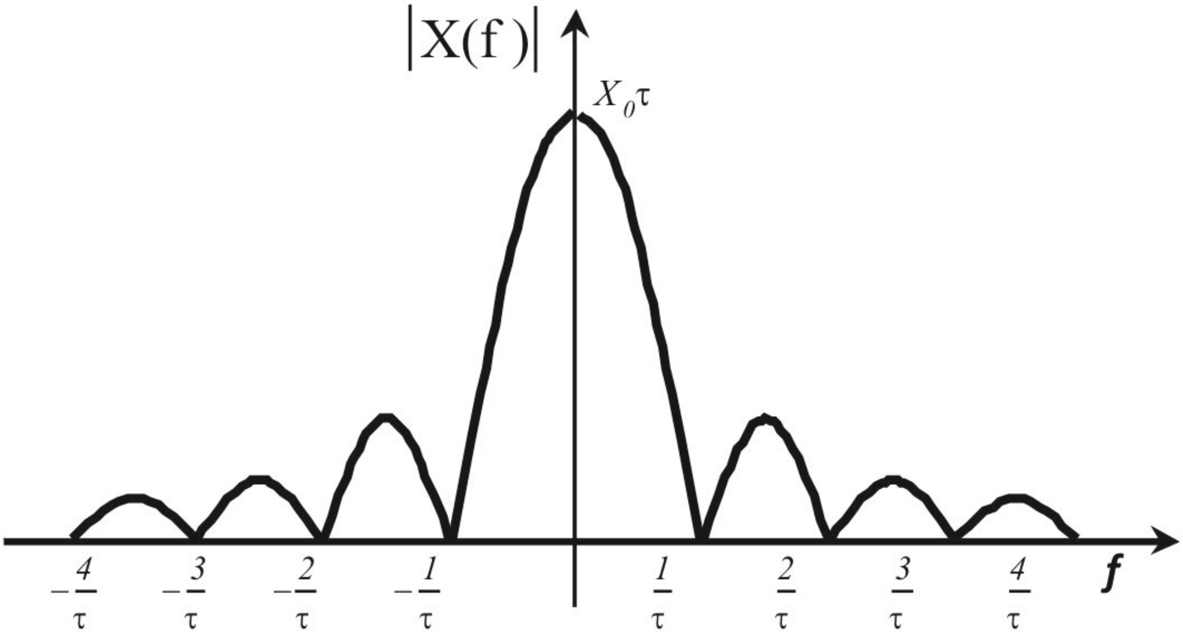
IOANA SĂRĂCUŢ
ERWIN SZOPOS
VICTOR POPESCU

TEORIA SEMNALELOR

Culegere de probleme

Ediţia a 2-a



UTPRESS
Cluj-Napoca, 2020
ISBN 978-606-737-478-0

IOANA SĂRĂCUŢ ERWIN SZOPOS
VICTOR POPESCU

TEORIA SEMNALELOR

Culegere de probleme
Ediţia a 2-a

UTPRESS
Cluj-Napoca, 2020
ISBN 978-606-737-478-0

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: ing. Călin Câmpean

ISBN 978-606-737-478-0

P R E F A Ț Ă

Această culegere de probleme se adresează studenților din anul II ai Facultății de Electronică, Telecomunicații şi Tehnologia Informației din cadrul Universității Tehnice din Cluj-Napoca.

Cele cinci capitole ale culegerii prezintă aplicații ale disciplinei predate în semestrul I al anului universitar II la cursul de „*Teoria Semnalelor*”: „*Noțiuni introductive*”, „*Analiza spectrală a semnalelor*”, „*Sisteme analogice liniare şi invariante în timp*”, „*Semnale eşantionate*” şi „*Semnale modulate*”.

Fiecare capitol al culegerii cuprinde trei părți:

- *Breviar teoretic* – aici sunt prezentate principalele noțiuni teoretice, relații şi definiții necesare la rezolvarea problemelor din capitolul respectiv;
- *Enunțuri* – cuprinde enunțurile problemelor propuse spre rezolvare;
- *Indicații şi soluții* – aici sunt date soluțiile finale la toate problemele, iar la unele probleme sunt prezentate şi rezolvările parțiale sau complete.

În speranța că această culegere de probleme va contribui la acumularea şi aprofundarea cunoştințelor dobândite la cursul de „*Teoria semnalelor*”, aşteptăm cu interes sugestiile şi observațiile cititorilor.

Cluj-Napoca, iunie 2010
Autorii

C U P R I N S

Capitolul 1
NOŢIUNI INTRODUCTIVE

1.1. Breviar teoretic

Transformări elementare în domeniul timp

➢ Transformarea $x(t) \to x(-t)$ se numeşte *reflexia (inversiunea)* semnalului $x(t)$. Un exemplu de reflexie a unui semnal este ilustrat în *Figura 1.1*.

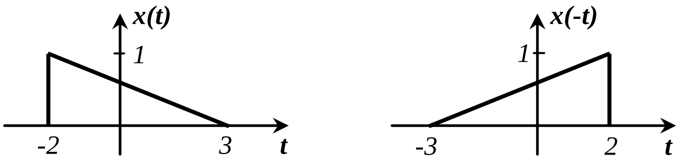


Figura 1.1

➢ Transformarea $x(t) \to x(at)$ reprezintă *compresia* semnalului $x(t)$ pentru $a > 1$, sau *dilatarea* semnalului pentru $a < 1$. În *Figura 1.2* este ilustrat un exemplu, în care semnalul $x(t)$ (stânga) este pe rând *comprimat* (mijloc) şi apoi *dilatat* (dreapta).

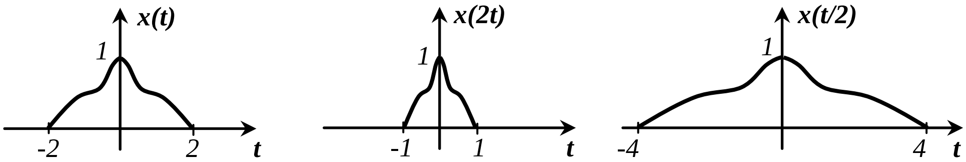


Figura 1.2

➢ Transformarea $x(t) \to x(t \pm t_0)$ reprezintă *întârzierea*, respectiv *avansarea* semnalului $x(t)$.

În exemplu din *Figura 1.3*, semnalul $x(t+2)$ este *avansat* faţă de $x(t)$, iar $x(t-2)$ este *întârziat* faţă de acelaşi $x(t)$.

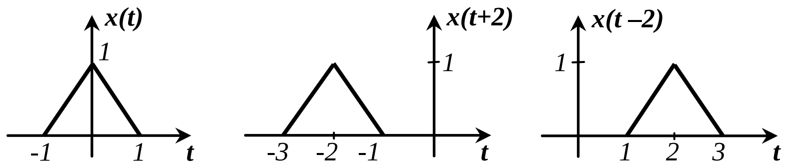


Figura 1.3

Semnale armonice (sinusoidale)

Un semnal *armonic* are expresia generală:

$$x(t) = X \cdot cos(2\pi ft + \varphi) \tag{1.1}$$

unde: X este *amplitudinea* [V, A], f este *frecvenţa* [Hz], iar φ reprezintă *faza iniţială* [rad]. *Figura 1.4* arată graficul în timp al un semnal armonic, cu fază iniţială pozitivă. Mărimea t_0 reprezintă faza iniţială exprimată în secunde: $t_0 = \dfrac{\varphi}{2\pi f}$.

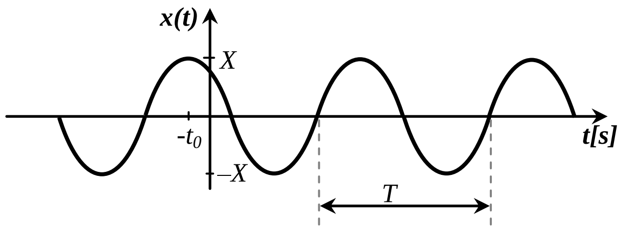


Figura 1.4

Un semnal $x(t)$ se numeşte *periodic* dacă există $T > 0$, astfel încât $x(t+T) = x(t)$ **,** $\forall t \in \mathbf{R}$. Un semnal armonic este periodic, iar perioada sa este inversul frecvenţei:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \ [s] \tag{1.2}$$

unde ω este *frecvenţa unghiulară* (*pulsaţia*) [rad/s].

Numere complexe

Forma carteziană a unui număr complex z este:

$$z = a + jb \tag{1.3}$$

unde *a* este partea reală a lui *z*, iar *b* este partea imaginară a lui *z*. În reprezentarea în planul complex, *a* şi *b* reprezintă *coordonatele carteziene* ale numărului *z*.

Forma polară a unui număr complex este:

$$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi} \tag{1.4}$$

unde *r* este modulul numărului *z*, iar φ este argumentul numărului complex:. În reprezentarea în planul complex, *r* şi φ reprezintă *coordonatele polare* ale lui *z*.

Relaţiile de legătură forma carteziană şi cea polară sunt următoarele:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, \text{ dacă } a > 0 \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, \text{ dacă } a < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

cu observaţia că pentru argumentul φ convenim să considerăm determinarea principală, deci: $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Ca şi aplicaţii la numere complexe, există de asemenea şi *relaţiile lui Euler*:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}\right) \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2j}\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2. Enunţuri

P1.1. Fie semnalul $x(t)$ din *Figura P1.1*. Trasaţi graficele următoarelor semnale:

(a) $x(t+2)$; **(b)** $x(-t)$;
(c) $0.5x(t-3)$; **(d)** $2x(2t+1)$;
(e) $x(1-t)$; **(f)** $-x(0.5t)$.

P1.2. Aceleaşi cerinţe ca la problema *P1.1*, dar pentru semnalul $x(t)$ din *Figura P1.2*.

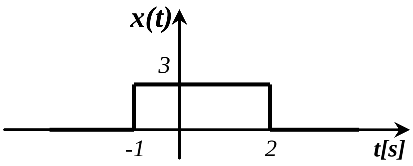


Figura P1.1

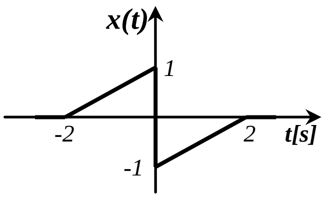


Figura P1.2

P1.3. Trasaţi graficele semnalelor:

$$y_1(t) = x(-t) + x(t+2)$$
$$y_2(t) = 2x(2t+1) - x(-t).$$

unde $x(t)$ este semnalul ilustrat în *Figura P1.1*.

P1.4. Fie semnalele din *Figura P1.4*. Exprimaţi $x(t)$ şi $y(t)$ în funcţie de $z(t)$.

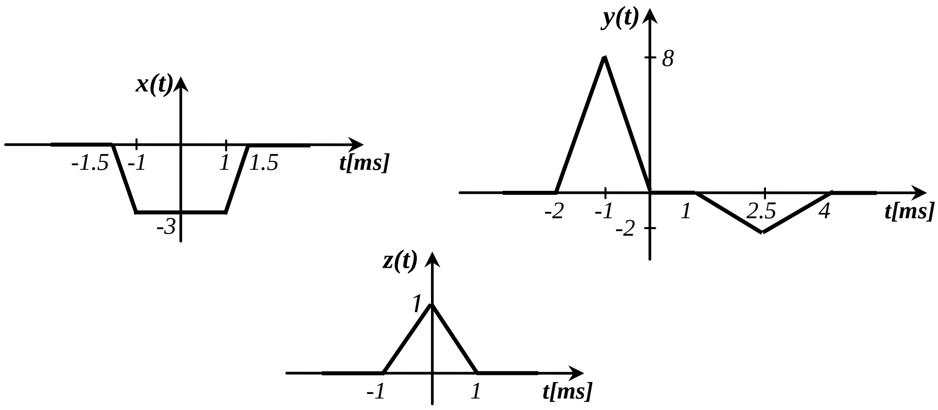


Figura P1.4

P1.5. Trasaţi graficele următoarelor semnale:

(a) $x(t) = cos\left(40\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$; **(b)** $x(t) = 3cos\left(500\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

(c) $x(t) = 4cos\left(10^3 \pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

P1.6. Scrieţi expresiile analitice ale semnalelor $x_1(t)$, $x_2(t)$ şi $x_3(t)$, având graficele din *Figura P1.6.*

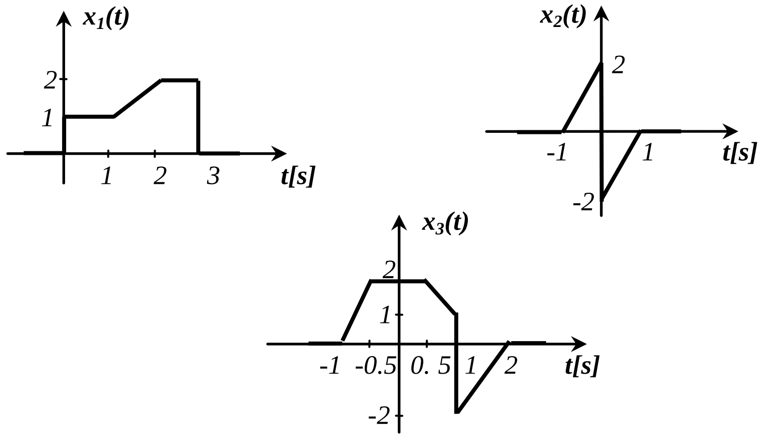


Figura P1.6

P1.7. Se consideră un număr complex z_0, având coordonatele polare (r_0, θ_0) şi coordonatele carteziene (a,b), $a,b>0$. Se mai consideră următoarele numere complexe:

$$z_1 = r_0 \cdot e^{-j\theta_0} \;;\; z_2 = r_0 \cdot e^{j(-\theta_0+\pi)} \;;\; z_3 = r_0 ;\; z_4 = r_0 \cdot e^{j(\theta_0+2\pi)} \;;\; z_5 = r_0 \cdot e^{j(\theta_0+\pi)}$$

(a) Determinaţi coordonatele carteziene ale numerelor z_0, …, z_5, în funcţie de a şi b.

(b) Reprezentaţi în planul complex numerele z_0, …, z_5, pentru $r_0 = 2$ şi $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, apoi pentru $r_0 = 1$ şi $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

P1.8. Determinaţi modulul şi argumentul următoarelor numere complexe:

(a) $z = \dfrac{3+4j}{1-2j}$; **(b)** $z = 3e^{j4\pi} + 2e^{j7\pi}$; **(c)** $z = 4e^{j\frac{\pi}{6}+1}$; **(d)** $z = \dfrac{j(2+j)}{(1+j)(2-j)}$;

(e) $z = (1-j)^9$; **(f)** $z = 2j$; **(g)** $z = -4j$; **(h)** $z = \dfrac{8e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1-j}$.

P1.9. Exprimaţi următoarele numere complexe în forma polară:

$$z_1 = 2 + j\sqrt{3}\ ;\ z_2 = \frac{1+j}{2+3j}\ ;\ z_3 = (1+j)^n$$

P1.10. Exprimaţi următoarele numere complexe în forma carteziană:

$$z_1 = e^{2j\frac{\pi}{3}}\ ;\ z_2 = e^{j\frac{\pi}{3}} + 2e^{2j\frac{\pi}{3}};\ z_3 = \sqrt{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\ .$$

P1.11. Scrieţi expresiile analitice ale semnalelor având graficele din *Figura P1.11*.

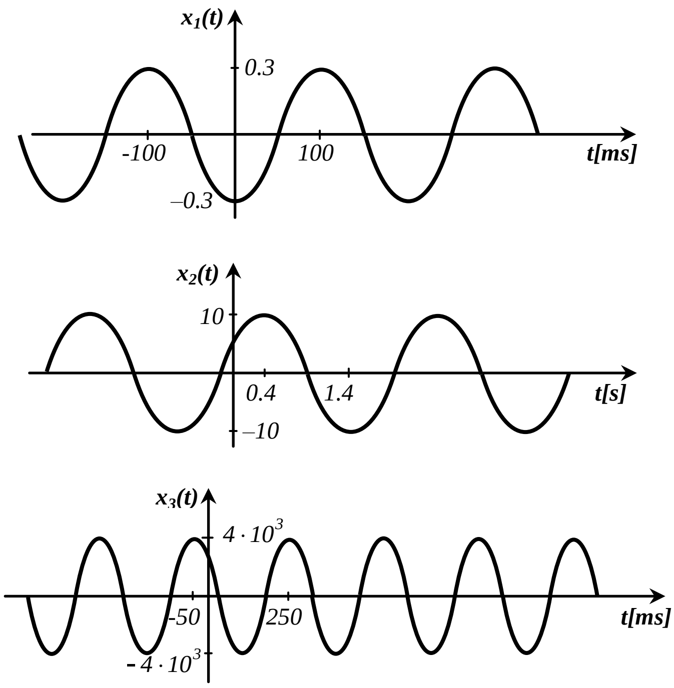


Figura P1.11

1.3. Indicaţii şi soluţii

S1.1. Vezi *Figura S1.1, (a) – (f)* .

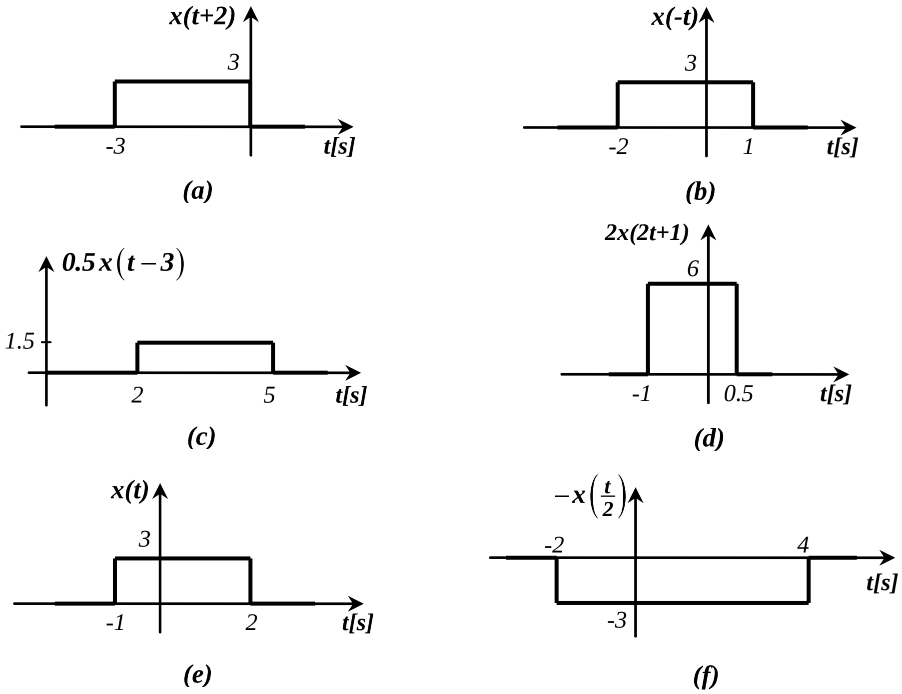


Figura S1.1

S1.2. Vezi *Figura S1.2, (a) – (f)* .

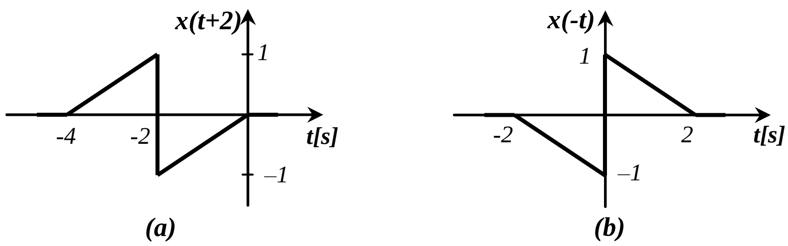


Figura S1.2, (a)-(b)

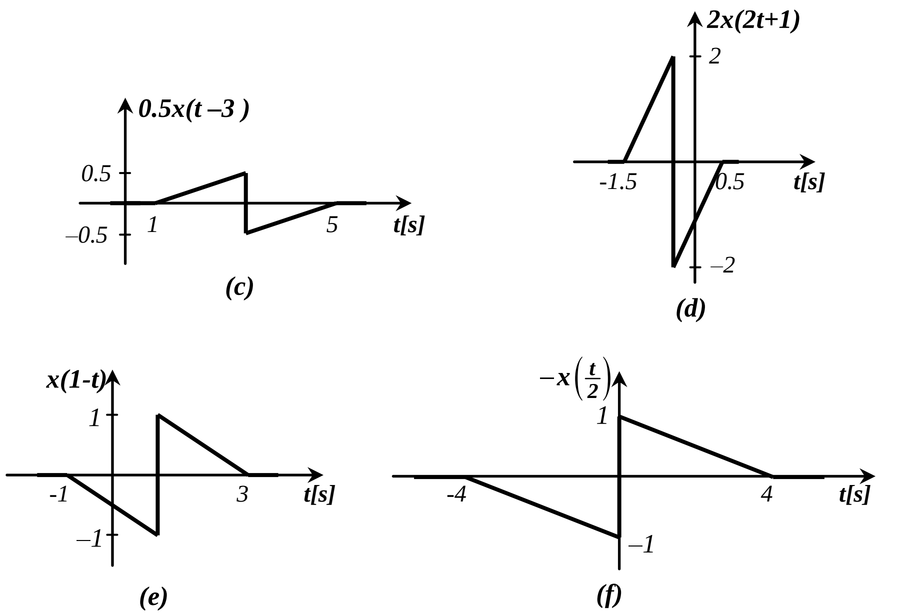


Figura S1.2, (c)-(f)

S1.3. Vezi *Figura S1.3.*

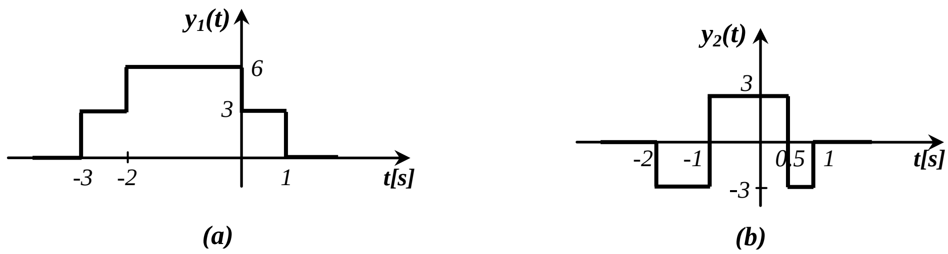


Figura S1.3

S1.4. $x(t) = -\frac{9}{2} \cdot z\left(\frac{t}{1.5}\right) + 1.5 \cdot z(t)$; $y(t) = 8 \cdot z(t+1) - 2 \cdot z\left(\frac{t}{1.5} - \frac{5}{3}\right)$

S1.5. Vezi *Figura S1.5, (a) – (c)*

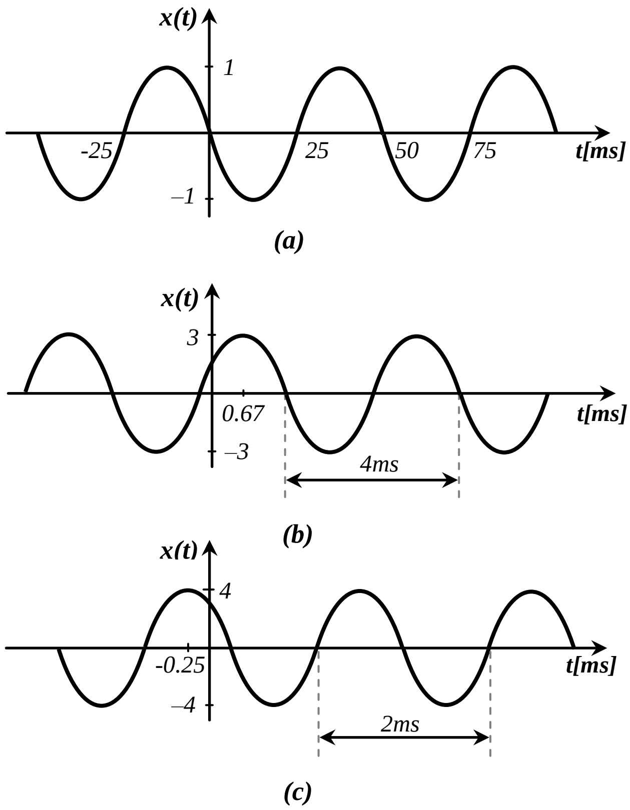
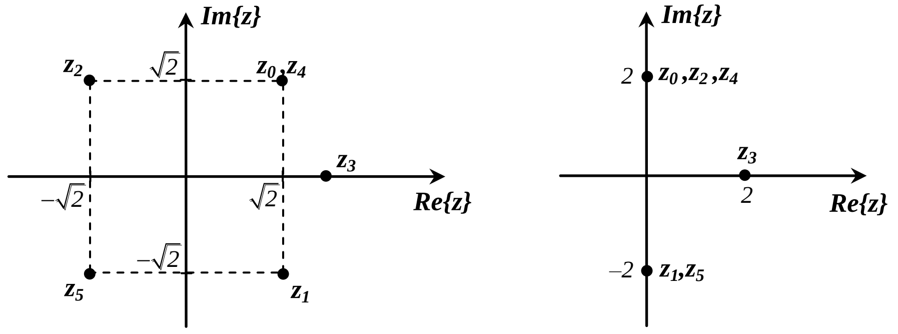


Figura S1.5

S1.6. $x_1(t)=\begin{cases} 1, & t\in(0,1) \\ t, & t\in[1,2) \\ 2, & t\in[2,3) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$; $x_2(t)=\begin{cases} 2t+2, & t\in[-1,0) \\ [-2,2], & t=0 \\ 2t-2, & t\in(0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

$$x_3(t)=\begin{cases} 4t+4, & t\in[-1,-0.5) \\ 2, & t\in[-0.5,0.5) \\ -2t+3, & t\in[0.5,1) \\ 2t-4, & t\in(1,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} .$$

S1.7. (a) $z_1:(a,-b)$; $z_2:(-a,b)$; $z_3:\left(\sqrt{a^2+b^2},0\right)$; $z_4:(a,b)$; $z_5:(-a,-b)$; **(b)** vezi *Figura S1.7*.



(a) *(b)*

Figura S1.7

S1.8. (a) $|z|=\sqrt{5}$; $arg\{z\}=arctg\frac{4}{3}+arctg2$; **(b)** $|z|=1$; $arg\{z\}=0$; **(c)** $|z|=4e$; $arg\{z\}=\frac{\pi}{6}$; **(d)** $|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $arg\{z\}=\frac{\pi}{4}+2arctg0.5$; **(e)** $|z|=16\sqrt{2}$; $arg\{z\}=-\frac{9\pi}{4}$; **(f)** $|z|=2$; $arg\{z\}=\frac{\pi}{2}$; **(g)** $|z|=4$; $arg\{z\}=-\frac{\pi}{2}$; **(h)** $|z|=4\sqrt{2}$; $arg\{z\}=-\frac{\pi}{12}$.

S1.9. $z_1=\sqrt{7}\cdot e^{j\,arctg\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $z_2=\sqrt{\frac{2}{13}}\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}-arctg1.5\right)}$; $z_1=\ \sqrt{2}^{\ n}\cdot e^{j\frac{n\pi}{4}}$.

S1.10. $z_1=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=-\frac{1}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\ 1-j$.

S1.11. $x_1(t)=0.3cos(10\pi t+\pi)$; $x_2(t)=10cos\left(\pi t-\frac{2\pi}{5}\right)$; $x_3(t)=4\cdot 10^3\,cos\left(\frac{\pi}{150}t+\frac{\pi}{3}\right)$.

Capitolul 2
ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR

2.1. Breviar teoretic

Semnale periodice

Fie $x(t)$ un semnal periodic de perioadă $T = \frac{1}{f_1}$, unde f_1 se numeşte *frecvenţa fundamentală*. Analiza spectrală a semnalului $x(t)$ se face cu ajutorul *seriei Fourier armonice* (SFA), scrisă într-una din cele trei forme ale sale: trigonometrică, complexă sau armonică.

- forma *trigonometrică*:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot cos(2\pi n f_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot sin(2\pi n f_1 t) \qquad \textbf{(2.1)}$$

unde A_0 reprezintă componenta continuă:

$$A_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_T x(t)\,dt \qquad \textbf{(2.2)}$$

iar coeficienţii C_n şi S_n se pot determina cu relaţiile:

$$C_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot cos(2\pi n f_1 t)\,dt$$
$$S_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot sin(2\pi n f_1 t)\,dt \qquad \textbf{(2.3)}$$

- forma *complexă*:

$$x(t) = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi n f_1 t} \qquad \textbf{(2.4)}$$

unde A_{nc} se numesc *coeficienţii complecşi* ai SFA sau *coeficienţii Fourier*, şi se pot determina cu expresia:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_1 t} dt \tag{2.5}$$

- forma *armonică*:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n) \tag{2.6}$$

unde $A_n = |A_{nc}|$ şi $\varphi_n = arg\{A_{nc}\}$.

Spectrul unui semnal înseamnă reprezentarea amplitudinilor şi a fazelor iniţiale în funcţie de frecvenţă (*spectrul de amplitudini*, respectiv *spectrul de faze*). Amplitudinile *liniilor spectrale* din spectrul de amplitudini sunt date de coeficienţii $A_n = |A_{nc}|$, iar cele din spectrul de faze – de coeficienţii $\varphi_n = arg\{A_{nc}\}$, unde $n = 1,2,3,...$. Frecvenţele la care se găsesc componentele spectrale sunt multipli ai frecvenţei fundamentale (nf_1).

Notăm prin scrierea simbolică: $x(t) \leftrightarrow A_{nc}$ faptul că semnalul $x(t)$ are coeficienţii complecşi A_{nc}.

Au loc următoarele *proprietăţi* ale coeficienţilor A_{nc}:

- *teorema liniarităţii*:

$$\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \leftrightarrow \alpha \cdot A_{nc1} + \beta \cdot A_{nc2} \tag{2.7}$$

unde $x_1(t) \leftrightarrow A_{nc1}$ şi $x_2(t) \leftrightarrow A_{nc2}$, iar semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ au *aceeaşi* perioadă.

- *teorema întârzierii*:

$$x(t \pm \tau) \leftrightarrow A_{nc} \cdot e^{\pm j2\pi n f_1 \tau} \tag{2.8}$$

- *teorema modulării:*

$$x(t) \cdot e^{\pm j2\pi f_0 t} = A_0 \cdot e^{\pm j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi(nf_1 \pm f_0)t} \tag{2.9}$$

• *teorema derivării*:

$$x'(t) \leftrightarrow A_{nc} \cdot (j2\pi nf_1) \qquad \textbf{\textit{(2.10)}}$$

• *teorema integrării*:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow A_{nc} \cdot \frac{1}{j2\pi nf_1} \qquad \textbf{\textit{(2.11)}}$$

Puterea unui semnal periodic, se poate determina în domeniul *timp*:

$$P = \frac{1}{T}\int_{T} x^2(t)\,dt \qquad \textbf{\textit{(2.12)}}$$

sau în domeniul *frecvenţă*:

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \qquad \textbf{\textit{(2.13)}}$$

Valoarea efectivă a unui semnal periodic se determină cu relaţia:

$$X_{ef} = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{T} x^2(t)\,dt} \qquad \textbf{\textit{(2.14)}}$$

<u>Semnale aperiodice</u>

Analiza spectrală a semnalelor aperiodice se face folosind *transformata Fourier*:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt \qquad \textbf{\textit{(2.15)}}$$

Transformata Fourier inversă are expresia:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot e^{j2\pi ft}df \qquad \textbf{\textit{(2.16)}}$$

Proprietăţile transformatei Fourier:

- *liniaritatea:*

$$x_1(t)+x_1(t) \quad \leftrightarrow \quad X_1(f)+X_2(f) \tag{2.17}$$

- *întârzierea în timp:*

$$x(t \pm t_0) \quad \leftrightarrow \quad e^{\pm j2\pi f t_0} \cdot X(f) \tag{2.18}$$

- *întârzierea în frecvenţă:*

$$e^{\pm j2\pi f_0 t} \cdot x(t) \quad \leftrightarrow \quad X(f \mp f_0) \tag{2.19}$$

- *derivarea în timp:*

$$x'(t) \quad \leftrightarrow \quad j2\pi f \cdot X(f) \tag{2.20}$$

- *comprimarea în timp:*

$$x(\alpha t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|\alpha|} \cdot X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \tag{2.21}$$

- *integrarea în timp:*

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) + \pi \cdot X(0)\delta(f) \tag{2.22}$$

- *teorema simetriei:*

Dacă $x(t) \leftrightarrow X(f)$, atunci $X(t) \leftrightarrow x(-f)$. **(2.23)**

- *produsul de convoluţie:*

$$x(t) \otimes y(t) \quad \leftrightarrow \quad X(f) \cdot Y(f) \tag{2.24}$$

- *înmulţirea a două semnale:*

$$x(t) \cdot y(t) \quad \leftrightarrow \quad X(f) \otimes Y(f) \tag{2.25}$$

Fie $x(t)$ un semnal *aperiodic* şi $x_T(t)$ un semnal *periodic*, obţinut prin repetarea lui $x(t)$ cu perioada *T*. Dacă $x(t) \leftrightarrow X(f)$ şi $x_T(t) \leftrightarrow A_{nc}$, atunci are loc relaţia:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot X\left(\frac{n}{T}\right) \qquad \textbf{\textit{(2.26)}}$$

Energia unui semnal aperiodic pentru un *interval de timp* (t_1, t_2) se determină cu relaţia:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt \qquad \textbf{\textit{(2.27)}}$$

Energia totală a unui semnal aperiodic se poate determina în *timp*:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt \qquad \textbf{\textit{(2.28)}}$$

sau în *frecvenţă*:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 df = 2\int_{0}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 df \qquad \textbf{\textit{(2.29)}}$$

Semnalele ideale „treaptă unitate” şi „impuls unitate”

Semnalul treaptă unitate (Heaviside) se defineşte astfel:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } t \geq 0 \\ 0, \text{ pentru } t < 0 \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(2.30)}}$$

Semnalul impuls unitate (Dirac) se defineşte astfel:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \text{ pentru } t = 0 \\ 0, \text{ pentru } t \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(2.31)}}$$

Semnalul delta periodic se defineşte astfel:

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \qquad \textbf{(2.32)}$$

Există următoarele relaţii între semnalele treaptă unitate şi impuls unitate:

$$\gamma(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \qquad \textbf{(2.33)}$$

$$\delta(t)=\frac{d\gamma(t)}{dt} \qquad \textbf{(2.34)}$$

Alte proprietăţi ale impulsului Dirac sunt:

$$x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0) \qquad \textbf{(2.35)}$$

$$x(t)\otimes\delta(t-t_0)=x(t-t_0) \qquad \textbf{(2.36)}$$

2.2. Enunţuri

P2.1. Se consideră semnalul:

$$x(t)=2-4\cos\left(3.2\cdot10^3\pi t-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(6.4\cdot10^3\pi t\right)-0.8\cos\left(8\cdot10^3\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

(a) Determinaţi perioada semnalului.
(b) Reprezentaţi spectrul unilateral şi cel bilateral al semnalului.
(c) Determinaţi puterea semnalului.

P2.2. Pentru următoarele semnale, determinaţi perioada, reprezentaţi spectrul unilateral şi precizaţi ce armonici sunt prezente în spectru:

(a) $x(t)=2\cos\left(80\pi t+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+1.2\cos\left(240\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$

(b) $x(t)=20+10\cos\left(1800\pi t-\frac{\pi}{4}\right)-15\cos(2400\pi t)+10\cos(3600\pi t)$

(c) $x(t)=\sum_{n=0}^{5}(2n+1)(-1)^n \cos\left(n\cdot 10^3\pi t+\frac{n\pi}{5}\right)$

(d) $x(t)=1+0.2\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)-0.6\cos\left(400\pi t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(500\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$

(e) $x(t)=5-5\cos\left(4.2\cdot 10^3\pi t\right)+7\cos\left(5.6\cdot 10^3\pi t+\frac{\pi}{4}\right)-2.5\cos\left(7\cdot 10^3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

P2.3. Se consideră semnalul:

$$x(t)=1+2\cos\left(k\pi t-\frac{\pi}{5}\right)+3\cos\left(2400\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

(a) Determinaţi parametrul k astfel încât spectrul semnalului să conţină armonica a treia şi armonica a patra.
(b) Pentru k determinat la punctul *(a)*, determinaţi perioada semnalului şi reprezentaţi spectrul său bilateral.

P2.4. Se consideră spectrele ilustrate în *Figura P2.4.* Determinaţi expresiile şi puterile semnalelor corespunzătoare.

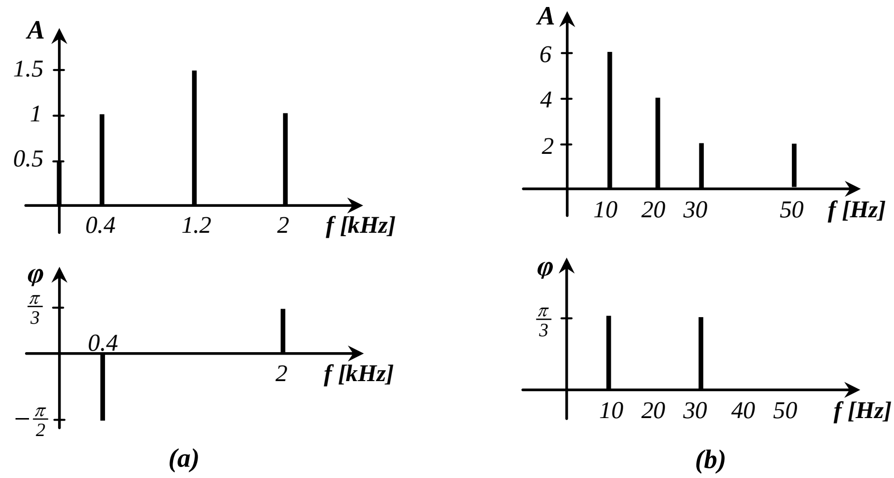


Figura P2.4

P2.5. Fie semnalul periodic cu perioada *10 ms*:

$$x(t)=-0.7\cos\left(4a\pi t+\frac{\pi}{6}\right)-1.4\cos\left(2b\pi t-\frac{\pi}{3}\right).$$

(a) Determinaţi *a* şi *b* astfel încât spectrul semnalului să conţină fundamentala şi armonica a *4*-a.
(b) Pentru *a* şi *b* având valorile determinate la punctul *(a)*, reprezentaţi spectrul semnalului.

P2.6. Un semnal are spectrul ilustrat în *Figura P2.6*. Determinaţi expresia şi puterea semnalului.

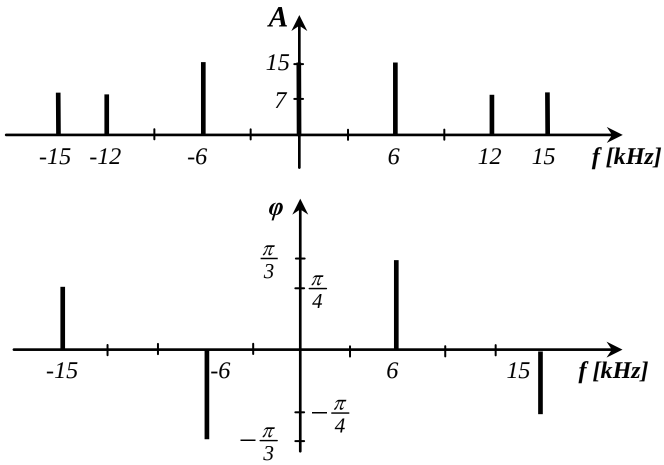


Figura P2.6

P2.7. Fie semnalul:

$$x(t) = cos\left(600\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 2cos(a\pi t) + 3cos(b\pi t + \pi)$$

unde $a, b \in \boldsymbol{R}_+$ şi $a < b$.

(a) Determinaţi *a* şi *b* astfel încât spectrul semnalului să conţină armonicile a *2*-a, a *3*-a şi a *5*-a.
(b) Pentru *a* şi *b* având valorile determinate la punctul *(a),* calculaţi perioada semnalului şi reprezentaţi spectrul său.

P2.8. Se consideră semnalul:

$$x(t) = 0.8 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-0.5} \cdot cos(4000\pi nt)$$

Determinaţi banda ocupată de semnal, dacă banda este definită:

(a) la *3dB* în raport cu componenta de amplitudine maximă;
(b) la *6dB* în raport cu componenta de amplitudine maximă.

P2.9. (a) Determinaţi coeficienţii A_{ncx} ai SFA ai semnalului $x(t)=cos(200\pi t)$ şi coeficienţii A_{ncy} ai SFA ai semnalului $y(t)=sin(200\pi t)$.

(b) Se consideră coeficienţii SFA: $A_{ncz}=A_{ncx}\cdot A_{ncy}$. Determinaţi semnalul corespunzător $z(t)$ care are coeficienţii SFA A_{ncz}.

(c) Se consideră semnalul $w(t)=x(t)\cdot y(t)$. Determinaţi coeficienţii SFA.

P2.10. Determinaţi coeficienţii A_{nc} ai SFA pentru semnalul:

$$x(t)=A sin(\omega_0 t)+B cos(3\omega_0 t)+C cos(5\omega_0 t+\varphi)$$

P2.11. Determinaţi spectrul semnalului derivat $x'(t)$, dacă semnalul $x(t)$ are spectrul ilustrat în *Figura P2.11*.

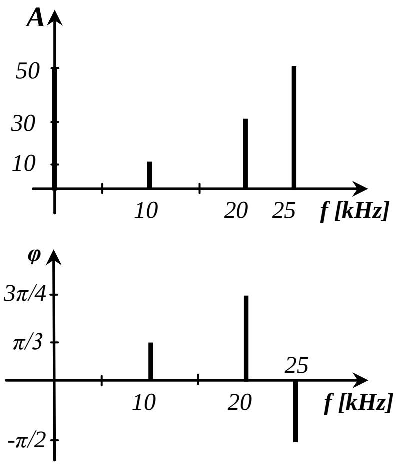


Figura P2.11

P2.12. Determinaţi spectrul semnalului integrat $\int x(\tau)d\tau$, dacă semnalul $x(t)$ are spectrul ilustrat în *Figura P2.12*.

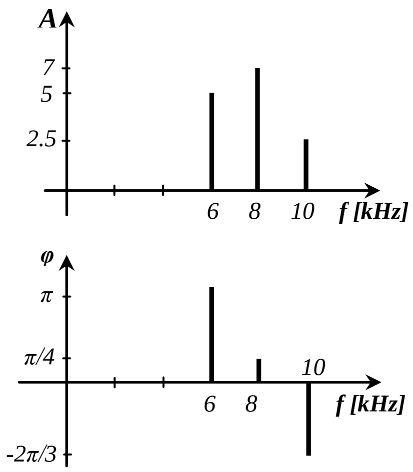


Figura P2.12

P2.13. Se consideră semnalul dreptunghiular periodic ilustrat în *Figura P2.13.*

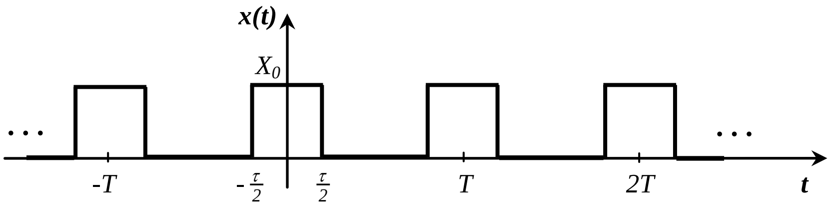


Figura P2.13.

(a) Determinaţi expresia spectrului semnalului.

(b) Reprezentaţi graficul semnalului în domeniul timp în cazurile particulare când factorul de umplere este *50%* şi respectiv *25%*.

(c) Pentru cazul particular când factorul de umplere este de *50%,* reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *7*-a.

(d) Pentru cazul particular când factorul de umplere este de *25%,* reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *7*-a.

P2.14. Se consideră semnalul periodic din *Figura P2.14.*

(a) Determinaţi expresia generală a coeficienţilor complecşi folosind metoda delta-periodic.

(b) Determinaţi expresia generală a coeficienţilor complecşi fără a folosi metoda delta-periodic.

(c) Reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *5*-a.

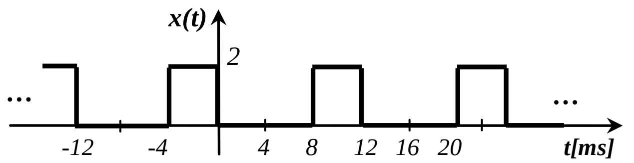


Figura P2.14

P2.15. Se consideră semnalul periodic din *Figura P2.15*.

(a) Determinaţi expresia generală a coeficienţilor complecşi ai semnalului $x(t)$ prin două metode.

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *5*-a.

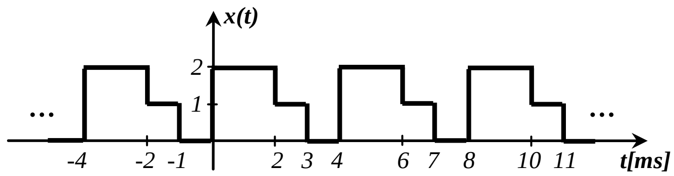


Figura P2.15

P2.16. Se consideră semnalul triunghiular periodic din *Figura P2.16*.

(a) Determinaţi expresia spectrului semnalului.

(b) Pentru cazul particular când factorul de umplere este de *50%*, reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *7*-a .

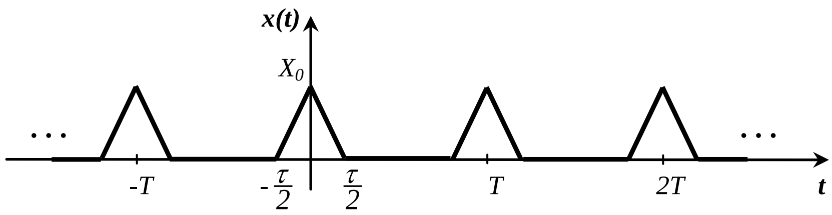


Figura P2.16

P2.17. Se consideră semnalul periodic din *Figura P2.17*.

(a) Determinaţi expresia generală a coeficienţilor complecşi ai semnalului prin două metode.

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a *5*-a.

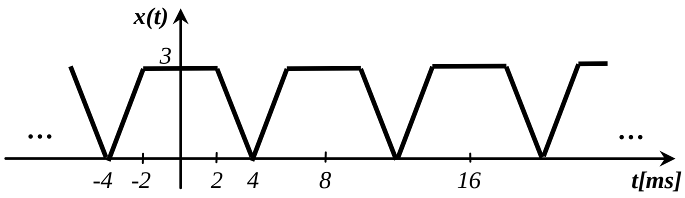


Figura P2.17

P2.18. Se consideră semnalul periodic din *Figura P2.18*.

(a) Determinaţi expresia generală a coeficienţilor complecşi.

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului până la armonica a 5-a.

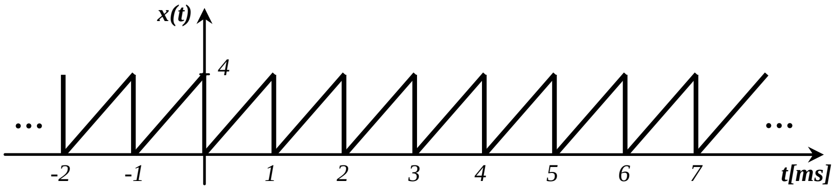


Figura P2.18

P2.19. Se consideră semnalul $\delta(t)$ – impuls Dirac – ilustrat în *Figura P2.19*.

(a) Reprezentaţi spectrul semnalului $\delta(t)$.

(b) Scrieţi expresia analitică şi reprezentaţi graficul semnalului $\delta_T(t)$, obţinut prin repetarea lui $\delta(t)$ cu perioada *20 ms*.

(c) Reprezentaţi spectrul semnalului $\delta_T(t)$.

(d) Realizaţi sinteza semnalului $\delta_T(t)$.

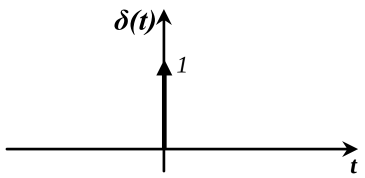


Figura P2.19

P2.20. Se consideră semnalele: $x_B(t) = -\delta\left(t + 2\cdot 10^{-3}\right) + \delta\left(t - 2\cdot 10^{-3}\right)$ şi $x_A(t) = \delta\left(t + 2\cdot 10^{-3}\right) + \delta\left(t - 2\cdot 10^{-3}\right)$.

(a) Reprezentaţi în domeniul timp cele două semnale.

(b) Determinaţi şi reprezentaţi transformatele Fourier ale semnalelor.

(c) Scrieţi expresia şi să se reprezinte grafic semnalele $x_{AT}(t)$ şi $x_{BT}(t)$, obţinute prin repetarea semnalelor date cu perioada $T = 10\ ms$.

(d) Reprezentaţi spectrele semnalelor $x_{AT}(t)$ şi $x_{BT}(t)$, până la armonica a 5-a.

(e) Faceţi sinteza semnalelor $x_{AT}(t)$ şi $x_{BT}(t)$, până la armonica a 5-a.

P2.21. Se consideră semnalul:

$$x(t) = \begin{cases} X_0\ ,\ |t| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0\ ,\ |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

(a) Determinaţi expresia transformatei Fourier a semnalului.

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului.

P2.22. Se consideră semnalele ilustrate în *Figura P2.22.* Determinaţi expresiile transformatelor Fourier ale celor două semnale.

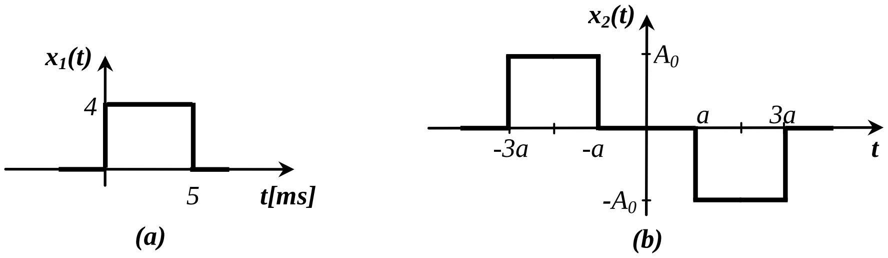


Figura P2.22

P2.23. Se consideră semnalul din *Figura P2.23.*

(a) Determinaţi expresia transformatei Fourier a semnalului.

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului.

P2.24. Se consideră semnalul $x(t)$ din *Figura P2.24.*

(a) Determinaţi transformata Fourier a semnalului prin *2* metode.

(b) Se consideră semnalul periodic $x_T(t)$, obţinut prin repetarea semnalului $x(t)$ cu perioada *4 s*. Folosind rezultatul de la punctul *(a)*, reprezentaţi spectrul semnalului $x_T(t)$ (până la armonica a 5-a).

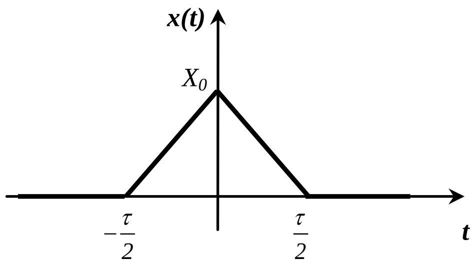


Figura P2.23.

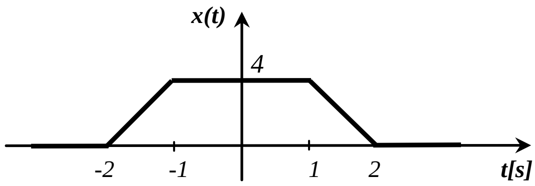


Figura P2.24

P2.25. Se consideră semnalul $x(t)$ din *Figura P2.25*.

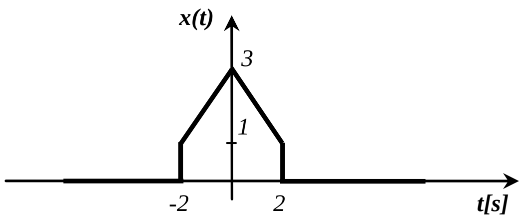


Figura P2.25

(a) Determinaţi transformata Fourier a semnalului prin *2* metode.

(b) Se consideră semnalul periodic $x_T(t)$, obţinut prin repetarea semnalului $x(t)$ cu perioada *8 s*. Folosind rezultatul de la punctul *(a)*, reprezentaţi spectrul semnalului $x_T(t)$ (până la armonica a *5*-a).

P2.26. Se consideră semnalul $x(t)$ din *Figura P2.26*.

(a) Determinaţi transformata Fourier a semnalului.

(b) Se consideră semnalul periodic $x_T(t)$, obţinut prin repetarea semnalului $x(t)$ cu perioada *20 s*. Folosind rezultatul de la punctul *(a)*, reprezentaţi spectrul semnalului $x_T(t)$ (până la armonica a *5*-a).

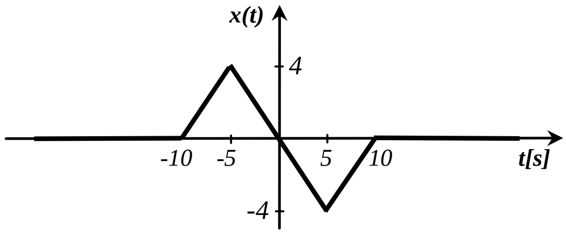


Figura P2.26

P2.27. Se consideră semnalul $x(t)$ din *Figura P2.27.*

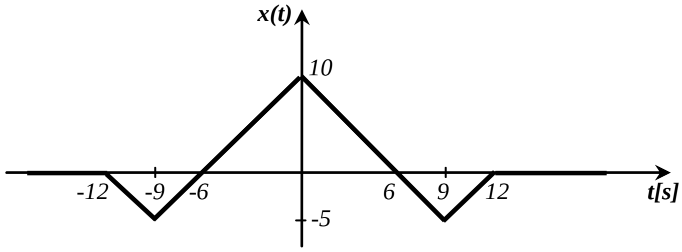


Figura P2.27

(a) Determinaţi transformata Fourier a semnalului.

(b) Se consideră semnalul periodic $x_T(t)$, obţinut prin repetarea semnalului $x(t)$ cu perioada $T = 24s$. Folosind rezultatul de la punctul *(a)*, determinaţi expresia coeficienţilor complecşi ai semnalului $x_T(t)$.

P2.28. Se consideră semnalul $x(t)$ din *Figura P2.28.*

(a) Determinaţi transformata Fourier a descrierii pe o perioadă a semnalului.

(b) Folosind rezultatul de la punctul *(a)*, determinaţi expresia coeficienţilor complecşi ai semnalului $x(t)$.

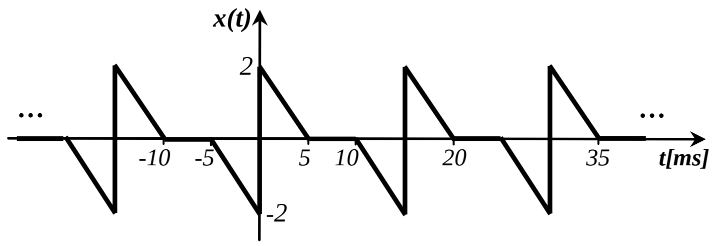


Figura P2.28

P2.29. Fie schema-bloc din *Figura P2.29*, unde $x(t)=\sum_{k=1}^{10} k\,cos\left(4k\pi\cdot 10^3 t\right)$.

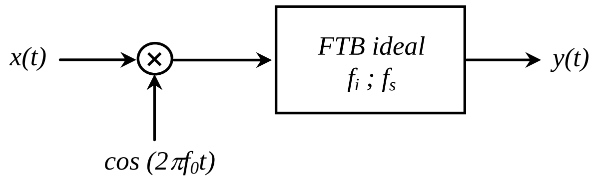


Figura P2.29

Determinaţi expresia semnalului $y(t)$, în următoarele cazuri:

(a) $f_0 = 100\ kHz$, $f_i = 97\ kHz$ şi $f_s = 103\ kHz$.

(b) $f_0 = 200\ kHz$, $f_i = 195\ kHz$ şi $f_s = 205\ kHz$.

P2.30. Fie schema-bloc din *Figura P2.30*. Ştiind că la intrare se aplică semnalul $x(t)=\sum_{k=1}^{10} k\,cos\left(4k\pi\cdot 10^3 t\right)$, iar $f_0 = 127.5\ kHz$, determinaţi raportul $\dfrac{y(t)}{x(t)}$.

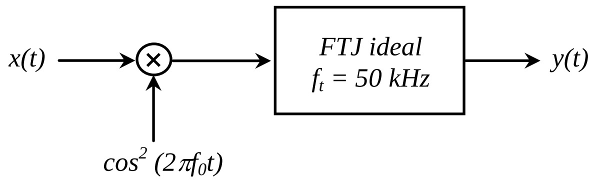


Figura P2.30

P2.31. Se consideră schema bloc din *Figura P2.31*, unde $x(t)$ este un semnal aperiodic, având transformata Fourier de forma unui triunghi centrat în origine, de amplitudine *100*, între frecvenţele *–10 kHz* şi *10 kHz*. Să se reprezinte *TF* a semnalului $y(t)$.

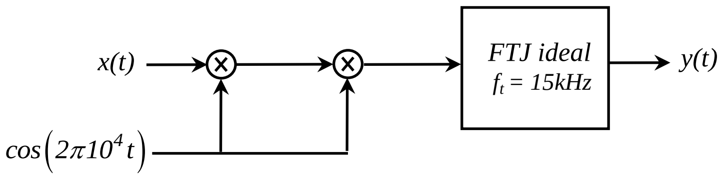


Figura P2.31

P2.32. Se consideră schema bloc din *Figura P2.32*, unde $x(t)$ este un semnal aperiodic, având spectrul de frecvenţă maximă f_0. Cât trebuie să fie frecvenţa f_x astfel încât $y(t) = k \cdot x(t)$? Determinaţi *k*.

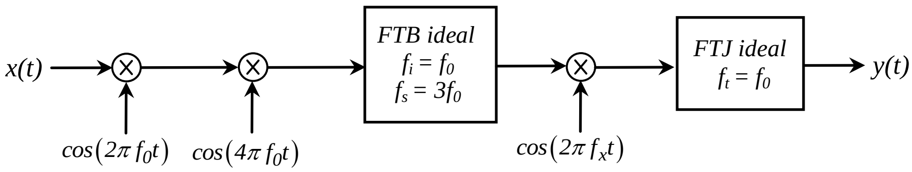


Figura P2.32

P2.33. Se consideră semnalul armonic simplu redresat (*Figura P2.33.a*) şi semnalul armonic dublu redresat (*Figura P2.33.b*).

(a) Exprimaţi coeficienţii complecşi A_{nc2} ai semnalului $x_2(t)$ în funcţie de coeficienţii complecşi A_{nc1} ai semnalului $x_1(t)$.

(b) Determinaţi coeficienţii complecşi A_{nc1} şi A_{nc2} folosind transformata Fourier a semnalului $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t\right), & -\dfrac{T_0}{4} \le t \le \dfrac{T_0}{4} \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases}$$

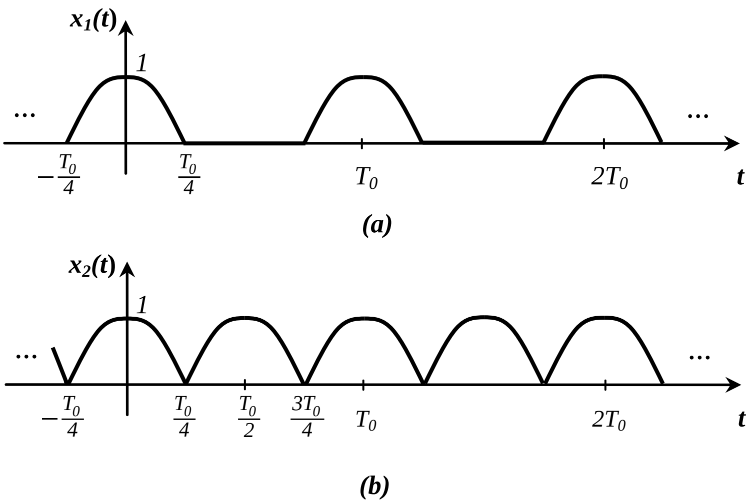


Figura P2.33

P2.34. Determinaţi energia dezvoltată de semnalul: $x(t)=3V$ între momentele $t_1=1ms$ şi $t_2=10ms$.

P2.35. Determinaţi energia dezvoltată de semnalul: $x(t)=t\,[V]$ între momentele $t_1=1\,s$ şi $t_2=4\,s$.

P2.36. Determinaţi puterea semnalului care are descrierea pe o perioadă scrisă mai jos şi perioada egală cu *3s*.

$$x(t)=\begin{cases} t\ , & 0<t<3s \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases} \quad [\text{mA}]$$

P2.37. Determinaţi energia totală a semnalului:

$$x(t)=\begin{cases} \sqrt{3}t\ , & 0<t<5s \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases} \quad [\text{mA}]$$

P2.38. Determinaţi valoarea efectivă a semnalului care are descrierea pe o perioadă scrisă mai jos şi perioada egală cu *3 s*:

$$x(t)=\begin{cases}\sqrt{3}t\ , & 0<t<3s\\ 0\ , & \text{în rest}\end{cases}\quad [\text{mV}]$$

P2.39. Se consideră un filtru trece-jos ideal având amplificarea în banda de trecere *10* şi frecvenţa de tăiere *1.01 kHz*. Să se determine răspunsul $y(t)$ al filtrului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{100}cos\left(200k\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$$

P2.40. Se consideră un filtru trece-bandă ideal având amplificarea în banda de trecere *2* şi frecvenţele de tăiere *9.95 kHz* şi *20.05 kHz*. Să se determine răspunsul $y(t)$ al filtrului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{100}cos\left(2k\pi 10^3 t\right)$$

P2.41. Se consideră un filtru trece-sus ideal având amplificarea în banda de trecere *5* şi frecvenţa de tăiere *20.01 kHz*. Să se determine răspunsul $y(t)$ al filtrului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{100}cos\left(2k\pi 10^3 t\right)$$

P2.42. Transformata Fourier a descrierii pe o perioadă a unui semnal periodic $x(t)$ arată ca în *Figura P2.42*. Se cere expresia semnalului $x(t)$, dacă perioada sa este *1ms*.

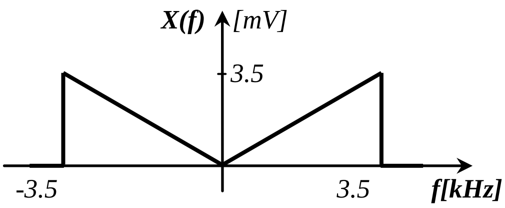


Figura P2.42

P2.43. Transformata Fourier a descrierii pe o perioadă a unui semnal periodic arată ca în *Figura P2.43*. Se cere expresia semnalului periodic, dacă perioada sa este *1 ms*.

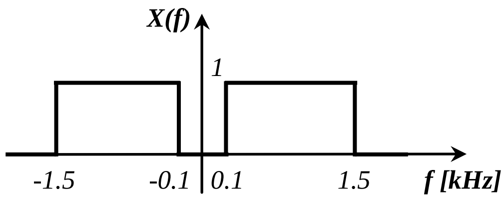


Figura P2.43

P2.44. Transformata Fourier a descrierii pe o perioadă a unui semnal arată ca în *Figura P2.44*. Se cere expresia semnalului periodic dacă frecvenţa de repetare este de *100 Hz*.

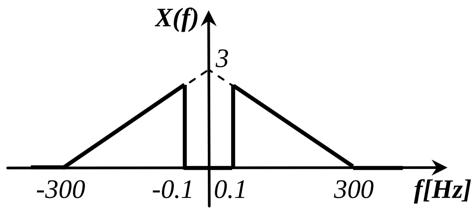


Figura P2.44

P2.45. Determinaţi expresia spectrului semnalului:

$$x(t)=\begin{cases} cos(2\pi 10\,t), & -50\,ms \le t \le 50\,ms \\ 0\,, & \text{în rest} \end{cases}$$

P2.46. Determinaţi expresia spectrului semnalului:

$$x(t)=\begin{cases} cos(2\pi 10\,t), & -25\,ms \le t \le 25\,ms \\ 0\,, & \text{în rest} \end{cases}$$

P2.47. Reprezentaţi transformata Fourier a semnalului:

$$x(t)=20\,Sa(50\pi t)+20\,Sa^2(50\pi t)$$

P2.48. Reprezentaţi transformatele Fourier ale semnalelor:

(a) $x(t)=20\,Sa(100\pi t)+10\,Sa^2(50\pi t)$

(b) $x(t) = 40\,Sa(100\pi t) + 40\,Sa^2(100\pi t)$

(c) $x(t) = 20\,Sa(10\pi t) - 10\,Sa^2(5\pi t)$

(d) $x(t) = 40\,Sa(10\pi t) - 40\,Sa^2(10\pi t)$

P2.49. Scrieţi expresiile transformatelor Fourier ale semnalelor reprezentate în *Figura P2.49*.

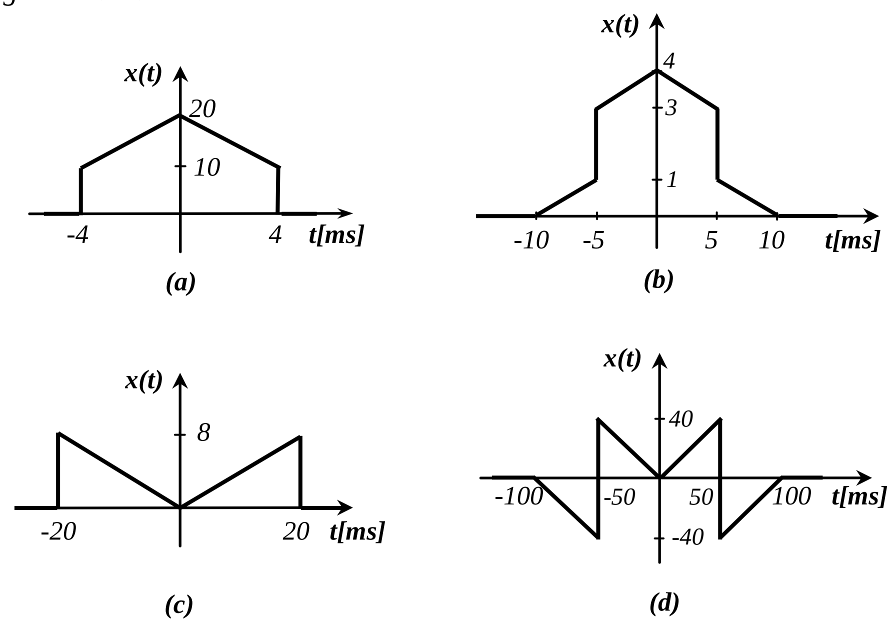


Figura P2.49

P2.50. Pentru schema din *Figura P2.50*, determinaţi expresia semnalului $y(t)$, considerând că: $f_p = 100\ kHz$, $f_i = 95\ kHz$, $f_s = 105\ kHz$, iar la intrare se aplică semnalul: $x(t) = \sum_{k=1}^{10} k \cos\left(4k\pi \cdot 10^3 t\right)$.

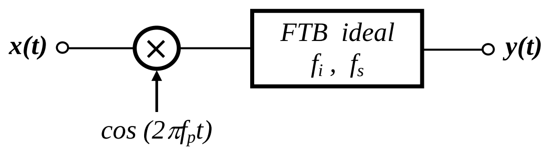


Figura P2.50

P2.51. Pentru schema din *Figura P2.51*, determinaţi expresia semnalului $y(t)$, dacă: $x(t)=\sum_{k=1}^{10} k\cos\left(4k\pi\cdot 10^{3}t\right)$ şi $f_p = 127.5\ kHz$.

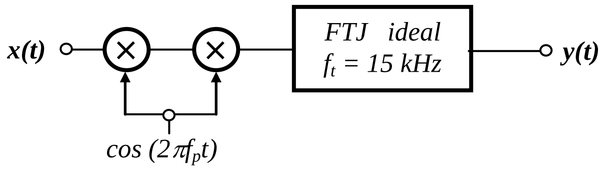


Figura P2.51

P2.52. Pentru schema din *Figura P2.52*, determinaţi expresia semnalului $y(t)$, dacă: $x(t)=\sum_{k=1}^{10} k\cos\left(4k\pi\cdot 10^{3}t\right)$ *şi* $f_p = 241.3\ kHz$;

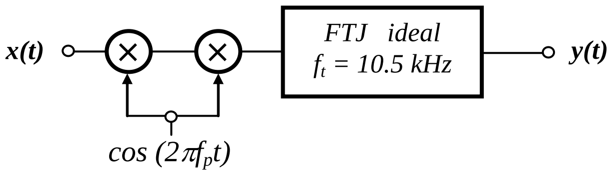


Figura P2.52

2.3. Indicaţii şi soluţii

S2.1. (a) $f_1 = cmmdc(1600, 3200, 4000) = 800\ Hz \quad \Rightarrow \quad T = 1.25\ ms$;

(b) Semnalul se scrie astfel:

$$x(t) = 2 + 4\cos\left(3.2\cdot 10^{3}\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(6.4\cdot 10^{3}\pi t\right) + 0.8\cos\left(8\cdot 10^{3}\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Spectrul unilateral al semnalului este ilustrat în *Figura S2.1.a*, iar cel bilateral – în *Figura S2.1.b*.

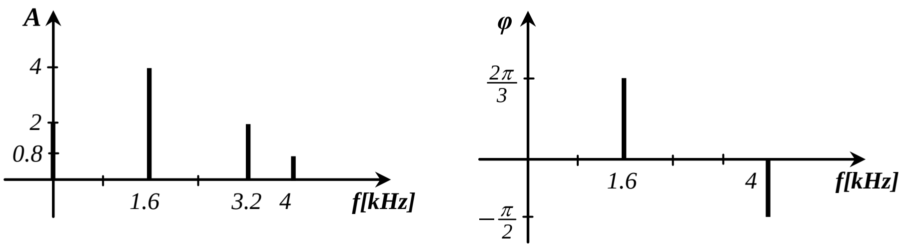


Figura S2.1.a

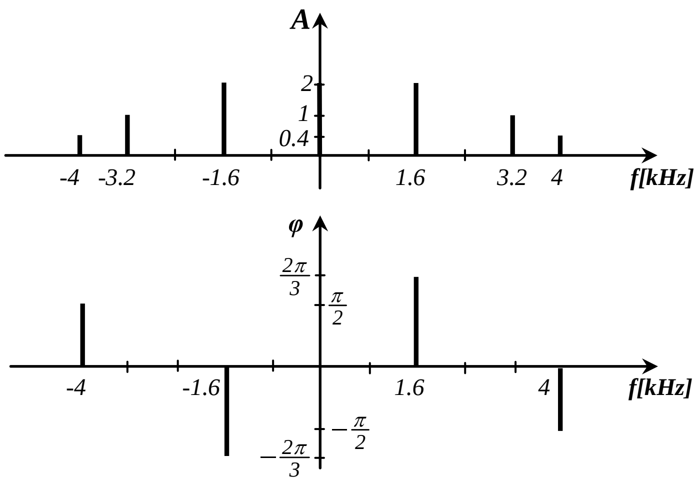


Figura S2.1.b

(c) Se aplică relaţia *(2.13)* : $P = 2^2 + \frac{1}{2}\left(4^2 + 2^2 + 0.8^2\right) = 14.32\,W$.

S2.2. (a) $T = 50\ ms$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.2.a* ; semnalul conţine armonicile *2*, *5* şi *6*;

(b) $T = 3.33\ ms$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.2.b*; semnalul conţine: componenta continuă, armonicile *3*, *4* şi *6*;

(c) $T = 2\ ms$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.2.c* ; semnalul conţine: componenta continuă, componenta fundamentală, armonicile *2*, *3*, *4* şi *5*;

(d) $T = 20\ ms$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.2.d*; semnalul conţine componenta continuă, armonicile *2*, *4* şi *5*;

(e) $T = 1.43\ ms$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.2.e*; semnalul conţine componenta continuă, armonicile *3*, *4* şi *5*.

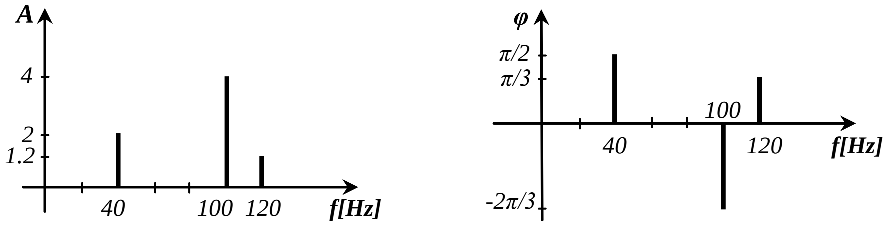


Figura S2.2.a

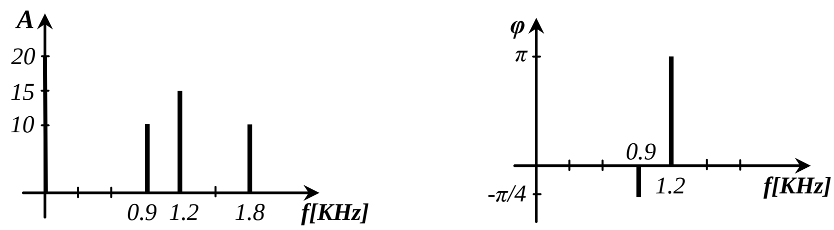


Figura S2.2.b

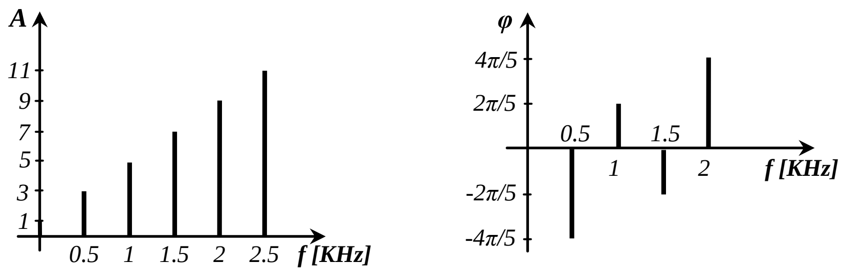


Figura S2.2 .c

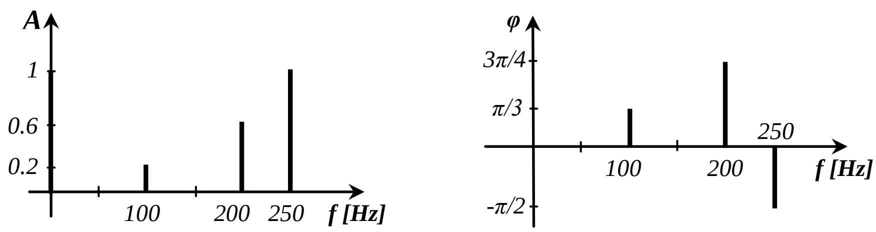


Figura S2.2 .d

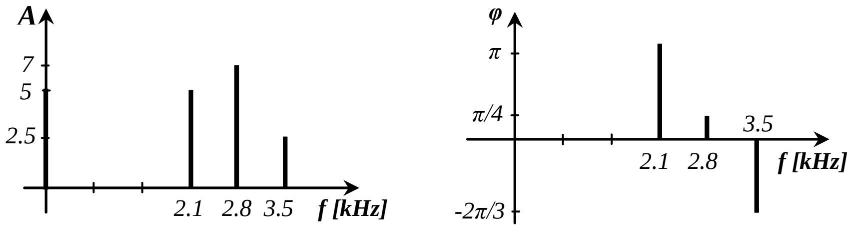


Figura S2.2 .e

S2.3. (a) $k=1800$ sau $k=3200$; **(b)** Pentru $k=1800$: $T=3.33\,ms$, spectrul este ilustrat în *Figura S2.3.a*. Pentru $k=3200$: $T=2.5\,ms$, spectrul este ilustrat în *Figura S2.3.b*.

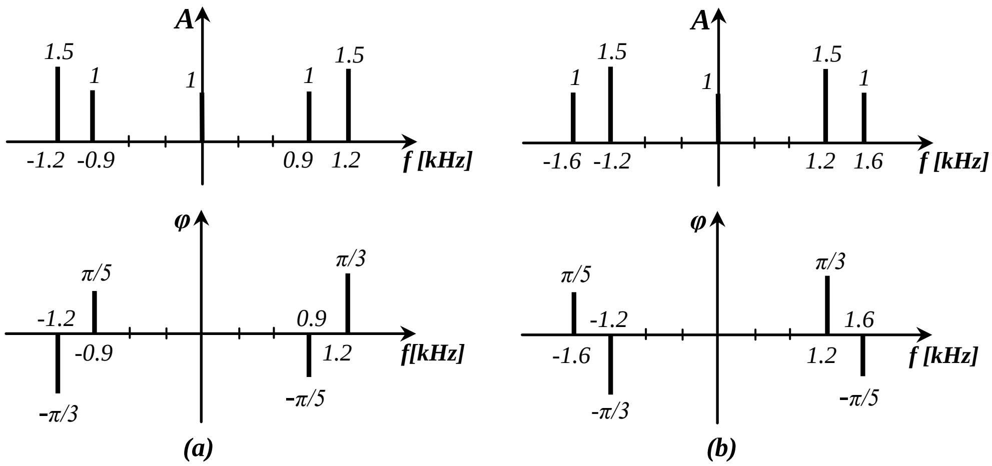


Figura S2.3

S2.4. (a) $x(t)=0.5+\cos\left(800\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)+1.5\cos(2400\pi t)+\cos\left(4000\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

$P=2.375\,W$;

(b) $x(t)=6\cos\left(20\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos(40\pi t)+2\cos\left(60\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos(100\pi t)$;

$P=30\,W$.

S2.5. (a) Cazul I : $a=50$ şi $b=400$; cazul II : $a=200$ şi $b=100$;
(b) Vezi *Figura S2.5. a şi b.*

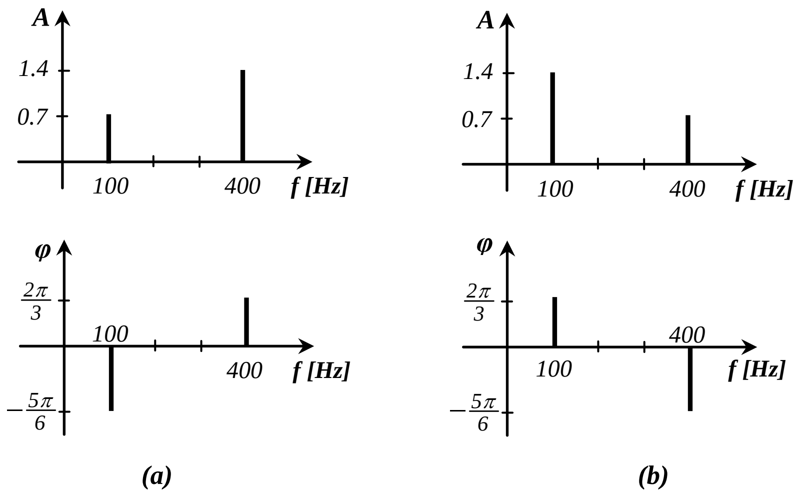


Figura S2.5

S2.6.

$$x(t) = 15 + 30\cos\left(12\cdot 10^3 \pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 14\cos\left(24\cdot 10^3 \pi t\right) + 14\cos\left(30\cdot 10^3 \pi t - \frac{\pi}{4}\right);$$

$P = 871W$.

S2.7. (a) Cazul I : $a = 900$, $b = 1500$; cazul II : $a = 400$, $b = 1000$; cazul III : $a = 240$, $b = 360$;

(b) Spectrul pentru cazul I este ilustrat în *Figura S2.7.a;* spectrul pentru cazul II – în *Figura S2.7.b*; spectrul pentru cazul III – în *Figura S2.7.c.*

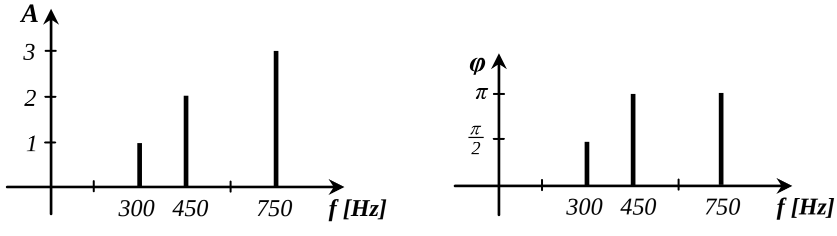


Figura S2.7.a

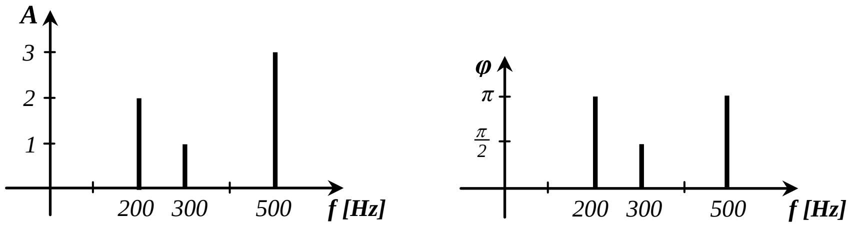


Figura S2.7.b

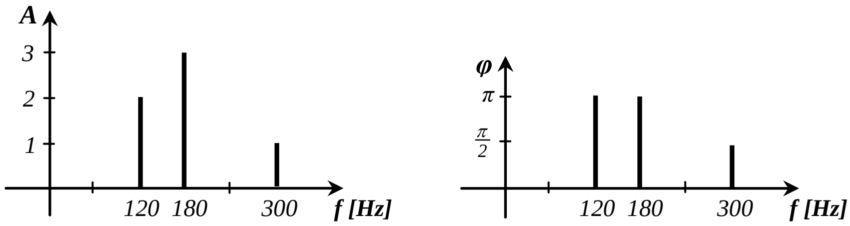


Figura S2.7.c

S2.8. (a) Pentru a determina banda la *3dB*, trebuie determinat ordinul pentru care armonicile sunt mai mari decât nivelul de referinţă a benzii. Acesta se determină în raport cu componenta de amplitudine maximă A_{max} astfel:

$$N_{3dB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_{max}$$

Având în vedere că amplitudinea primei armonice este *0.707 V*, iar restul armonicelor scad cu frecvenţa, rezultă că amplitudinea maximă este cea a componentei continue, în valoare de *0.8 V*. Rezultă condiţia:

$$A_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.8 \quad \Rightarrow \quad n \leq 2.125$$

deci ordinul maxim va fi: $n_{max} = 2$, iar banda ocupată va fi în acest caz:

$$B_{3dB} = n_{max} \cdot f_1 = 4kHz \,.$$

(b) Pentru a determina banda la *6dB*, nivelul de referinţă al benzii este:

$$N_{6dB} = \frac{1}{2} \cdot A_{max}$$

Rezultă: $n_{max} = 5$ şi $B_{6dB} = 10kHz$.

S2.9. **(a)** Folosind relaţiile lui Euler *(1.7)*, semnalele se scriu astfel:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j200\pi t} + e^{-j200\pi t}\right) \quad \textbf{(S2.1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j200\pi t} - e^{-j200\pi t}\right) \quad \textbf{(S2.2)}$$

Pe de altă parte, semnalele se pot exprima în forma complexă a SFA *(2.4)*. Ştiind că frecvenţa fundamentală este *100 Hz* pentru ambele semnale, rezultă expresia pentru $x(t)$:

$$x(t) = A_{0x} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} A_{ncx} \cdot e^{jn \cdot 200\pi t} \quad \textbf{(S2.3)}$$

Comparând *(S2.3)* cu *(S2.1)*, rezultă coeficienţii SFA ai semnalului $x(t)$:

$$\begin{cases} A_{1cx} = A_{-1cx} = 1; \\ A_{ncx} = 0, \text{ pentru } n \neq \pm 1 \end{cases}$$

În mod similar, rezultă pentru semnalul $y(t)$:

$$\begin{cases} A_{1cy} = \frac{1}{j}, A_{-1cy} = -\frac{1}{j}; \\ A_{ncy} = 0, \text{ pentru } n \neq \pm 1 \end{cases}$$

(b) Coeficienţii A_{ncz} rezultă:

$$\begin{cases} A_{1cz} = \frac{1}{j}, A_{-1cz} = -\frac{1}{j}; \\ A_{ncz} = 0, \text{ pentru } n \neq \pm 1 \end{cases}$$

Rezultă astfel expresia semnalului $z(t)$: $z(t)=sin(200\pi t)$.

(c) Semnalul $w(t)$ se scrie astfel: $w(t)=0.5\,sin(400\pi t)$. Rezultă:

$$\begin{cases} A_{1cw}=\dfrac{1}{2j};\ A_{-1cw}=-\dfrac{1}{2j}; \\ A_{ncw}=0,\ \text{pentru } n\neq\pm 1 \end{cases}$$

S2.10. $A_{1c}=\dfrac{A}{j};\ A_{-1c}=-\dfrac{A}{j};\ A_{3c}=A_{-3c}=B;\ A_{5c}=C\cdot e^{j\varphi};\ A_{-5c}=C\cdot e^{-j\varphi}$;

$A_{nc}=0$, pentru $n\neq\{\pm 1,\pm 3,\pm 5\}$.

S2.11. Pentru determinarea spectrului semnalului derivat, se aplică teorema derivării pentru semnale periodice – relaţia *(2.10)*. Rezultă următoarele relaţii din spectrul semnalului derivat:

$$A_{nd}=j2\pi nf_1\cdot A_n$$

$$\varphi_{nd}=\varphi_n+\frac{\pi}{2}$$

unde A_{nd} şi φ_{nd} sunt amplitudinile respectiv fazele din spectrul semnalului $x'(t)$, iar A_n şi φ_n sunt amplitudinile şi fazele din spectrul semnalului $x(t)$. Rezultă :

$$A_{0d}=A_0$$

$$A_{2d}=2\pi\cdot 10^5\quad;\quad \varphi_{2d}=\frac{5\pi}{6}$$

$$A_{4d}=12\pi\cdot 10^5\quad;\quad \varphi_{4d}=\frac{\pi}{4}$$

$$A_{5d}=25\pi\cdot 10^5\quad;\quad \varphi_{5d}=0$$

În *Figura S2.11* este ilustrat spectrul semnalului derivat.

S2.12. Pentru determinarea spectrului semnalului integrat, se aplică teorema integrării pentru semnale periodice – relaţia *(2.11)*. Rezultă următoarele relaţii din spectrul semnalului integrat:

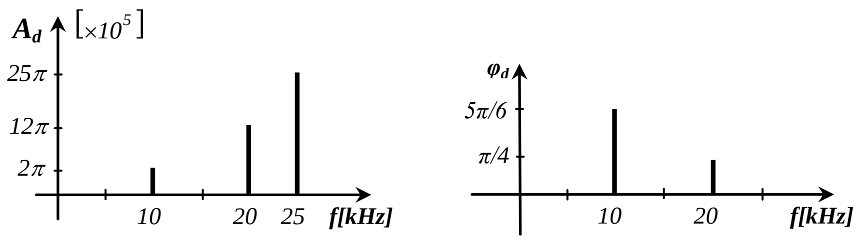


Figura S2.11

$$A_{ni} = \frac{1}{j2\pi n f_1} \cdot A_n$$

$$\varphi_{ni} = \varphi_n - \frac{\pi}{2}$$

unde A_{ni} şi φ_{ni} sunt amplitudinile respectiv fazele din spectrul semnalului integrat, iar A_n şi φ_n sunt amplitudinile şi fazele din spectrul semnalului $x(t)$.

Rezultă :

$$A_{3i} = \frac{5}{12\pi} \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \varphi_{3i} = \frac{\pi}{2}$$

$$A_{4i} = \frac{7}{16\pi} \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \varphi_{4i} = -\frac{\pi}{2}$$

$$A_{5i} = \frac{1}{8\pi} \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \varphi_{5i} = -\frac{\pi}{6}$$

În *Figura S2.12* este ilustrat spectrul semnalului integrat.

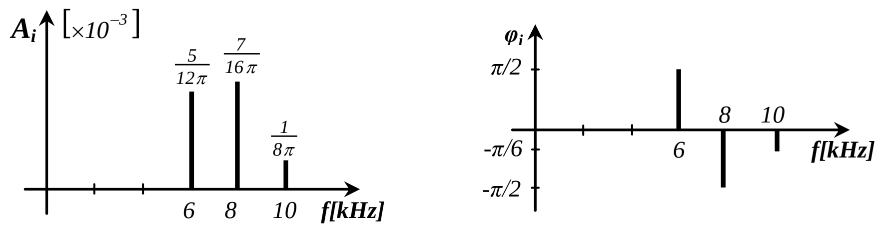


Figura S2.12

S2.13. (a) Pentru calculul coeficienţilor complecşi A_{nc}, o primă metodă reprezintă *metoda delta-periodic*: se derivează semnalul $x(t)$, obţinând semnalul derivat $x_d(t)$, compus din două semnale delta-periodic deplasate:

$$x_d(t) = X_0 \cdot \delta_T\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - X_0 \cdot \delta_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \qquad \textbf{\textit{(S2.4)}}$$

Coeficienţii Fourier ai semnalului $\delta_T(t)$ se determină din relaţia de definiţie:

$$A_{nc\delta} = \frac{2}{T} \cdot \int_T \delta_T(t) \cdot e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{2}{T}\int_T \delta(t) \cdot e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{2}{T}\int_T \delta(t) dt = \frac{2}{T} \qquad \textbf{\textit{(S2.5)}}$$

Aplicând teorema întârzierii – relaţia *(2.8)* – rezultă coeficienţii A_{ncd} ai semnalului $x_d(t)$:

$$A_{ncd} = \frac{2}{T} X_0 e^{j\pi n f_1 \tau} - \frac{2}{T} X_0 e^{-j\pi n f_1 \tau} \qquad \textbf{\textit{(S2.6)}}$$

Cu teorema derivării *(2.10)* se obţin coeficienţii A_{nc} ai semnalului $x(t)$:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} X_0 \tau \cdot Sa(\pi n f_1 \tau) \qquad \textbf{\textit{(S2.7)}}$$

unde *Sa* este funcţia *sinus-atenuat*, definită astfel:

$$Sa(x) = \frac{sin(x)}{x} \qquad \textbf{\textit{(S2.8)}}$$

Relaţia *(S2.7)* mai poate fi scrisă sub forma:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot aria_{\square} \cdot Sa(\pi n f_1 \cdot dur_{\square}) \qquad \textbf{\textit{(S2.9)}}$$

unde $aria_{\square}$ şi $dur_{\square}$ sunt aria, respectiv durata unui impuls dreptunghiular.

O altă metodă de determinarea a coeficienţilor A_{nc} este *metoda directă*: se aplică relaţia de definiţie a coeficienţilor complecşi – *(2.5)* –, în care integrala se calculează pentru impulsul dreptunghiular din intervalul $\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} X_0 \cdot e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{2}{T} X_0 \tau \cdot Sa(\pi n f_1 \tau) \qquad \textbf{(S2.10)}$$

<u>Observaţie</u>: aici, calculul coeficienţilor cu metoda directă este cu mult mai simplu decât metoda delta-periodic, dar acest lucru nu este valabil pentru orice semnal periodic, de multe ori metoda directă fiind dificil de aplicat din cauza dificultăţilor întâmpinate la rezolvarea integralei.

Se obţine următoarea expresie pentru spectrul de amplitudini:

$$A_n = |A_{nc}| = \frac{2}{T} X_0 \tau \cdot |Sa(\pi n f_1 \tau)| \qquad \textbf{(S2.11)}$$

şi spectrul de faze:

$$\varphi_n = arg\{A_{nc}\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } A_{nc} \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{dacă } A_{nc} < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(S2.12)}$$

(b) Pentru un factor de umplere de *50%* , rezultă $T = 2\tau$, iar pentru cazul când factorul de umplere este de *25%*, rezultă $T = 4\tau$. Graficele semnalului în cele două cazuri sunt ilustrate în *Figura S2.13.b*.

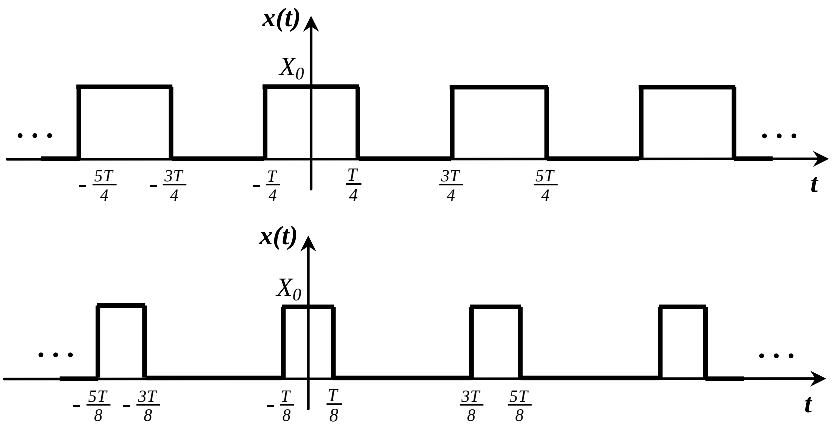


Figura S2.13.b

(c) Pentru cazul $T = 2\tau$, coeficienţii complecşi rezultă:

$$A_{nc} = X_0 \cdot Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } n = 2k \\ (-1)^k \cdot \dfrac{2X_0}{(2k+1)\pi}, \text{ pentru } n = 2k+1 \end{cases} \qquad \textbf{(S2.13)}$$

Prin urmare, dintre coeficienţii complecşi corespunzători primelor 7 armonici, cei de ordin par sunt 0, iar cei de ordin impar sunt:

$$A_{1c} = \frac{2X_0}{\pi};\ A_{3c} = -\frac{2X_0}{3\pi};\ A_{5c} = \frac{2X_0}{5\pi};\ A_{7c} = -\frac{2X_0}{7\pi}$$

Rezultă liniile spectrale din spectrul de amplitudini:

$$A_1 = \frac{2X_0}{\pi};\ A_3 = \frac{2X_0}{3\pi};\ A_5 = \frac{2X_0}{5\pi};\ A_7 = \frac{2X_0}{7\pi}$$

şi liniile corespunzătoare din spectrul de faze: $\varphi_1 = \varphi_5 = 0;\ \varphi_3 = \varphi_7 = \pi$.

Componenta continuă se determină cu relaţia *(2.2)*:

$$A_0 = \frac{X_0\tau}{T} \ \Rightarrow\ A_0 = \frac{X_0}{2} \qquad \textbf{(S2.14)}$$

Înainte de desenarea liniilor spectrale, în cazul semnalului dreptunghiular periodic se poate trasa şi *anvelopa* (*învelitoarea*) spectrului. Expresia anvelopei se obţine din expresia spectrului de amplitudini, înlocuind „frecvenţa discretă” nf_1 cu „frecvenţa continuă” f:

$$I(f) = \frac{2}{T} X_0\tau \cdot \left|Sa(\pi f \tau)\right| \qquad \textbf{(S2.15)}$$

În vederea reprezentării anvelopei, se determină punctele sale de anulare:

$$I(f) = 0 \ \Rightarrow\ sin(\pi f \tau) = 0 \ \Rightarrow\ f = \frac{k}{\tau},\ k \in \mathbf{Z}^* \qquad \textbf{(S2.16)}$$

precum şi valoarea sa la frecvenţa $f = 0$:

$$I(0) = \frac{2}{T} X_0\tau \qquad \textbf{(S2.17)}$$

În *Figura S2.13.c* sunt reprezentate spectrul de amplitudini, împreună cu anvelopa sa, şi spectrul de faze.

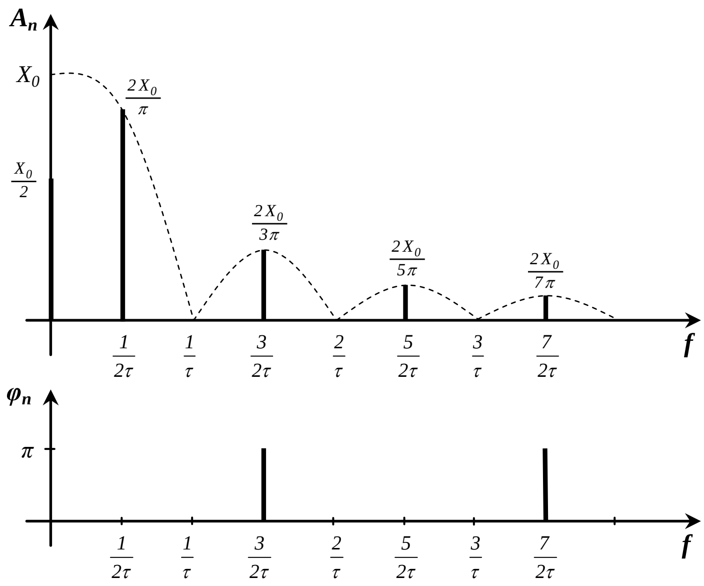


Figura S2.13.c

(d) Pentru cazul $T = 4\tau$, coeficienţii complecşi rezultă: $A_{nc} = \frac{X_0}{2} \cdot Sa\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. În *Figura S2.13.d* sunt reprezentate spectrul de amplitudini, împreună cu anvelopa sa, şi spectrul de faze.

S2.14. (a) Se derivează semnalul $x(t)$, obţinând semnalul $x_d(t)$, compus din două semnale delta-periodic (*Figura S2.14.a*):

$$x_d(t) = 2\delta_T\left(t + 4 \cdot 10^{-3}\right) - 2\delta_T(t)$$

Cunoscând expresia coeficienţilor SFA ai semnalului delta periodic *(S2.5)*, pentru $T = 12 \cdot 10^{-3}\ s$ rezultă coeficienţii SFA ai semnalului derivat:

$$A_{ncd} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(e^{jn\frac{2\pi}{3}} - 1\right)$$

Folosind teorema derivării *(2.10)*, rezultă:

$$A_{nc} = \frac{4}{j2\pi n} \cdot \left(e^{j\frac{2n\pi}{3}} - 1 \right) = \frac{4}{j2\pi n} \cdot e^{j\frac{n\pi}{3}} \left(e^{j\frac{n\pi}{3}} - e^{-j\frac{n\pi}{3}} \right) = \frac{4}{3} \cdot e^{j\frac{n\pi}{3}} \cdot Sa\left(\frac{n\pi}{3}\right) \tag{S2.18}$$

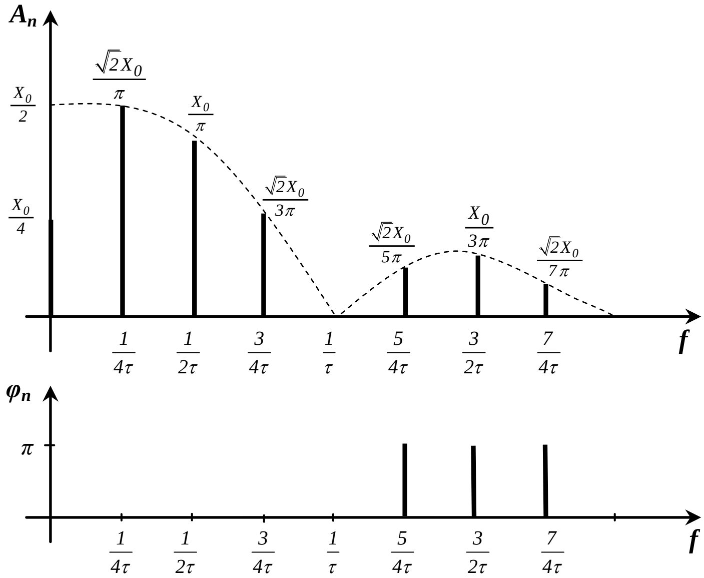


Figura S2.13.d

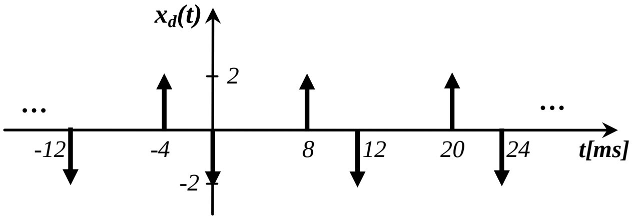


Figura S2.14.a

(b) Se scrie:

$$x(t) = x_0\left(t + 2 \cdot 10^{-3}\right),$$

unde $x_0(t)$ este semnalul dreptunghiular periodic având aceleaşi dimensiuni, dar centrat în origine.

Coeficienţii complecşi ai semnalului $x_0(t)$ se determină cu relaţia *(S2.9)*. Folosind teorema întârzierii *(2.7)*, rezultă relaţia *(S2.18)*.

(c) Expresia spectrului de amplitudini:

$$A_n = \frac{4}{3}\cdot\left|Sa\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| = \begin{cases} 0, \text{ pentru } n = 3k \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{n\pi}, \text{ pentru } n \neq 3k \end{cases}$$

Expresia spectrului de faze:

$$\varphi_n = arg\left\{Sa\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} + \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} \dfrac{n\pi}{3}, \text{ dacă } Sa\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) > 0 \\ \dfrac{n\pi}{3} - \pi, \text{ dacă } Sa\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) < 0 \end{cases}$$

Spectrul este ilustrat în *Figura S2.14.c*.

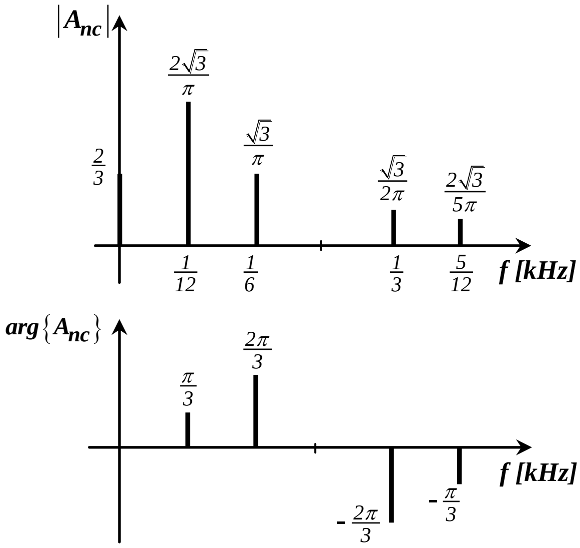


Figura S2.14.c

S2.15. (a) *Metoda I*: se derivează semnalul $x(t)$, iar semnalul derivat se exprimă în funcţie de semnalul delta-periodic:

$$x_d(t) = 2\delta_T(t) - \delta_T\left(t - 2\cdot 10^{-3}\right) - \delta_T\left(t - 3\cdot 10^{-3}\right)$$

Se determină coeficienţii complecşi ai semnalului $x_d(t)$, apoi, folosind teorema derivării, rezultă în final coeficienţii complecşi ai semnalului $x(t)$:

$$A_{nc} = \frac{2 - e^{-jn\pi} - e^{-j\frac{3n\pi}{2}}}{j\pi n}$$

Metoda II: semnalul $x(t)$ se poate scrie ca o sumă de două semnale periodice dreptunghiulare, deplasate faţă de origine:

$$x(t) = x_1\left(t - 10^{-3}\right) + x_2\left(t - 2.5\cdot 10^{-3}\right)$$

Pentru fiecare din cele două semnale dreptunghiulare se aplică relaţia *(S2.9)*, împreună cu teorema întârzierii . Rezultă soluţia:

$$A_{nc} = 2\cdot Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot e^{-j\frac{n\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot Sa\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cdot e^{-j\frac{5n\pi}{4}}$$

Observaţie: expresia este echivalentă cu cea obţinută la prima metodă.

(b) $A_{1c} = \frac{1}{\pi}(-1-3j);\ A_{2c} = \frac{1}{j\pi};\ A_{3c} = \frac{1}{3\pi}(1-3j);\ A_{4c} = 0;\ A_{5c} = \frac{1}{5\pi}(-1-3j)$

Rezultă primele *5* linii din spectrul de amplitudini şi componenta continuă:

$$A_0 = 1.25;\ A_1 = \frac{1}{\pi}\sqrt{10};\ A_2 = \frac{1}{\pi};\ A_3 = \frac{1}{3\pi}\sqrt{10};\ A_4 = 0;\ A_5 = \frac{1}{5\pi}\sqrt{10}$$

şi primele *5* linii din spectrul de faze:

$$\varphi_1 = \varphi_5 = -\pi + arctg\ 3;\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{2};\ \varphi_3 = -arctg\ 3;\ \varphi_4 = 0\ .$$

Frecvenţa fundamentală este *250 Hz*, deci cele *4* armonici se vor afla la frecvenţele: *250*, *500*, *750* şi respectiv *1250 Hz* (vezi *Figura S2.15*).

S2.16. **(a)** Se derivează semnalul şi se obţine semnalul derivat, compus din două semnale periodice dreptunghiulare deplasate (vezi *Figura S2.16.a*):

$$x_d(t) = x_0\left(t+\frac{\tau}{4}\right) - x_0\left(t-\frac{\tau}{4}\right)$$

unde $x_0(t)$ este un semnal dreptunghiular periodic de aceleaşi dimensiuni, dar centrat în origine.

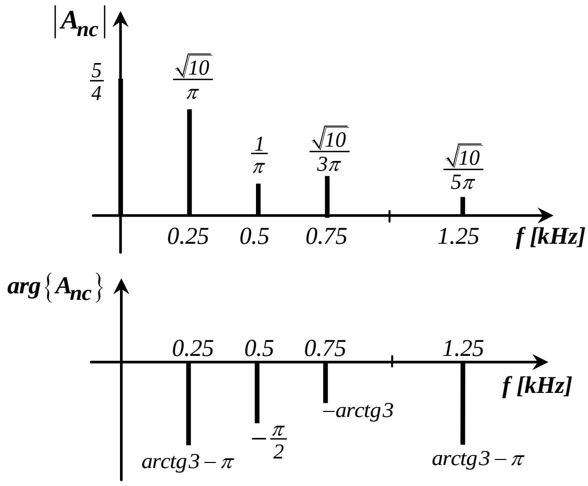


Figura S2.15

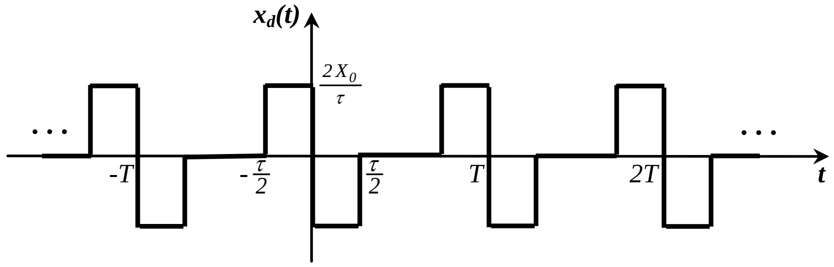


Figura S2.16.a

Pentru fiecare din cele două semnale dreptunghiulare se aplică relaţia *(S2.9)*, împreună cu teorema întârzierii. Rezultă expresia spectrului semnalului derivat:

$$A_{ncd} = \frac{2}{T} X_0 Sa\left(\pi n f_1 \frac{\tau}{2}\right) \cdot 2j \cdot sin\left(\pi n f_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

Cu teorema derivării, se obţin coeficienţii complecşi ai semnalului $x(t)$:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot X_0 \frac{\tau}{2} \cdot Sa^2\left(\pi n f_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

Relaţia mai poate fi scrisă sub forma::

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot aria_{\Delta} \cdot Sa^2\left(\pi n f_1 \cdot \frac{dur_{\Delta}}{2}\right) \qquad \textbf{\textit{(S2.19)}}$$

unde $aria_{\Delta}$ şi dur_{Δ} reprezintă aria, respectiv durata unui impuls triunghiular.

Rezultă spectrul de amplitudini

$$|A_{nc}| = \frac{X_0 \tau}{T} \cdot Sa^2\left(\pi n f_1 \frac{\tau}{2}\right) \qquad \textbf{\textit{(S2.20)}}$$

şi cel de faze: $arg\{A_{nc}\} = 0$.

(b) Pentru cazul $T = 2\tau$, liniile din spectrul de amplitudini vor fi:

$$A_n = \frac{X_0}{2} \cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Componenta continuă se determină cu relaţia *(2.2)*:

$$A_0 = \frac{X_0 \tau}{2T} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{X_0}{4}$$

Ca şi la semnalul periodic dreptunghiular (vezi soluţia *S2.13*), şi aici se poate trasa mai întâi anvelopa spectrului de amplitudini. Expresia sa este:

$$I(f) = \frac{X_0 \tau}{T} \cdot Sa^2\left(\pi f \frac{\tau}{2}\right) \qquad \textbf{\textit{(S2.21)}}$$

Anvelopa este în formă de Sa^2 , având punctele de anulare la frecvenţele:

$$f = \frac{2k}{\tau}, \ k \in \mathbf{Z}^*$$

iar valoarea la frecvenţa $f = 0$:

$$I(0) = \frac{2}{T} X_0 \tau$$

În *Figura S2.16.b* este reprezentat spectrul de amplitudini, împreună cu anvelopa sa.

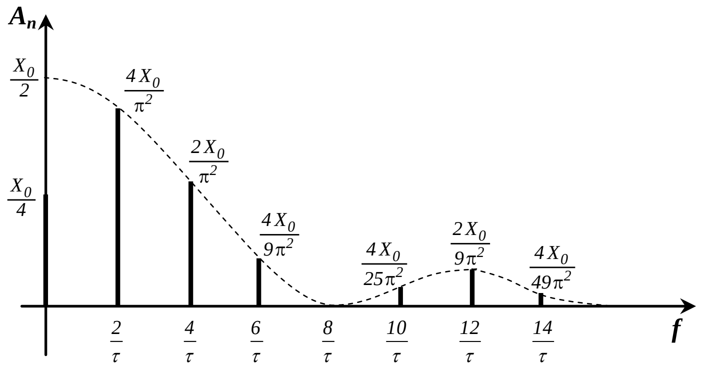


Figura S2.16.b

S2.17. **(a)** *Metoda I*: se derivează semnalul şi se determină mai întâi spectrul semnalului derivat, folosind *(S2.9)*. Rezultă:

$$A_{nc} = \frac{9}{2} \cdot Sa\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cdot Sa\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

Metoda II: trapezul se scrie ca o diferenţă de două semnale triunghiulare, ambele centrate în origine (vezi *Figura P2.17.a*).

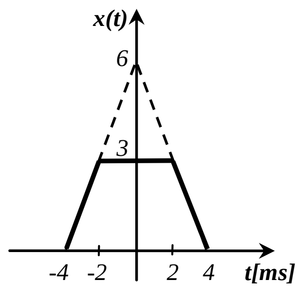


Figura P2.17.a

Apoi, se foloseşte expresia *(S2.19)*. Rezultă expresia coeficienţilor complecşi:

$$A_{nc} = 6 \cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

<u>Observaţie</u>: soluţia este echivalentă cu cea de la prima metodă.

(b) vezi *Figura S2.17.b*.

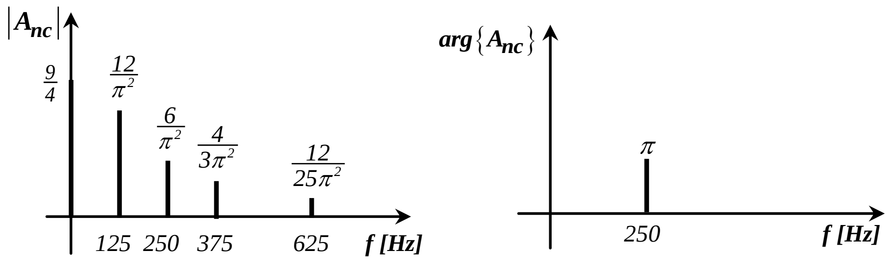


Figura S2.17.b

S2.18. (a) Se derivează semnalul şi se determină mai întâi spectrul semnalului derivat. În final, rezultă: $A_{nc} = \frac{4}{\pi n} j$.

(b) $A_0 = 2 \cdot 10^{-3}$; $A_n = \frac{4}{\pi n}$; $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$; spectrul este ilustrat în *Figura S2.18*.

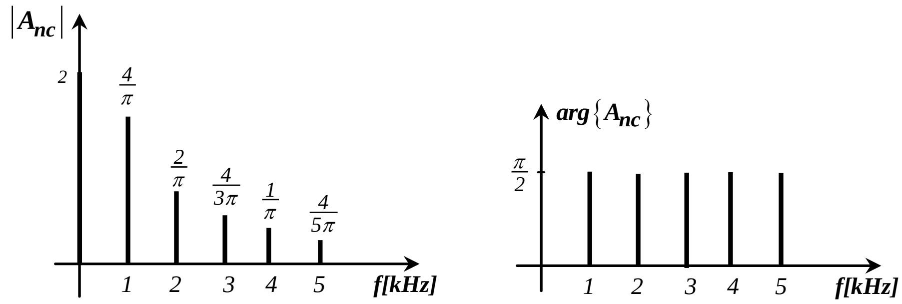


Figura S2.18

S2.19. (a) Funcţia de densitate spectrală a semnalului $\delta(t)$ este:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

Rezultă spectrul de amplitudini şi de faze ilustrat în *Figura S2.19.a*.

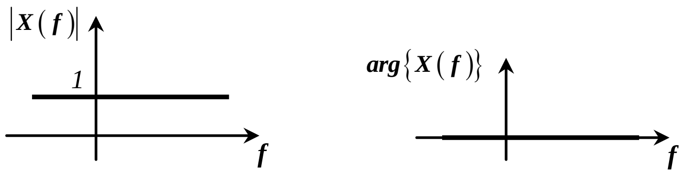


Figura S2.19.a

(b) $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k \cdot 20 \cdot 10^{-3}\right)$ (*Figura S2.19.b*).

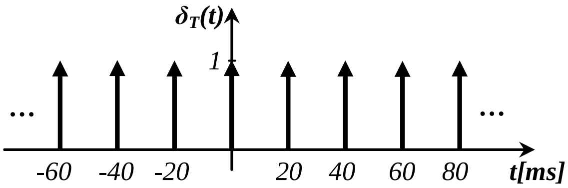


Figura S2.19.b

(c) Dacă un impuls finit având transformata Fourier $X(f)$ se repetă cu perioada *T*, atunci coeficienţii complecşi ai semnalului periodic care rezultă se determină cu relaţia *(2.26)*.

Rezultă spectrul de amplitudini (*Figura S2.19.c*): $|A_{nc}| = 100$ şi cel de faze: $arg\{A_{nc}\} = 0$. Componenta continuă rezultă: $A_0 = 50$.

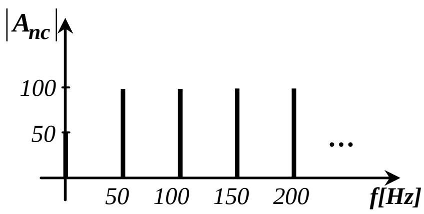


Figura S2.19.c

(d) Sinteza unui semnal periodic $x(t)$ semnifică exprimarea semnalului ca o sumă a componentelor sale armonice (SFA):

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{nc}| cos\left(2\pi n f_1 t + arg\{A_{nc}\}\right)$$

Rezultă expresia semnalului $\delta_T(t)$:

$$\delta_T(t) = 50 + 100\left[cos(100\pi t) + cos(200\pi t) + cos(300\pi t) + \ldots\right]$$

S2.20. **(a)** Vezi *Figura S2.20.a*.

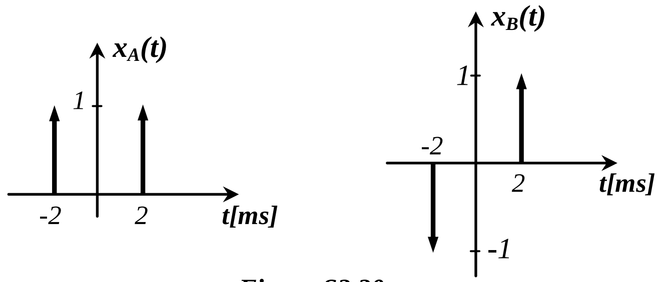


Figura S2.20.a

(b) Expresiile transformatelor Fourier ale semnalelor:

$$X_A(f) = e^{j2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + e^{-j2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot cos\left(4 \cdot 10^{-3} \pi f\right)$$

$$X_B(f) = -e^{j2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + e^{-j2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -2j \cdot sin\left(4 \cdot 10^{-3} \pi f\right)$$

Spectrele sunt ilustrate în *Figura S2.20.b*.

(c) Expresiile semnalelor sunt:

$$x_{AT}(t) = \delta_T\left(t + 2 \cdot 10^{-3}\right) + \delta_T\left(t - 2 \cdot 10^{-3}\right)$$

$$x_{BT}(t) = -\delta_T\left(t + 2 \cdot 10^{-3}\right) + \delta_T\left(t - 2 \cdot 10^{-3}\right)$$

unde $\delta_T(t)$ este semnalul delta-periodic. Graficele semnalelor sunt ilustrate în *Figura S2.20.c*.

(d) $A_{ncA} = \frac{2}{T} \cdot 2 \cdot cos\left(4 \cdot 10^{-3} \pi n f_1\right) = 400 \cdot cos(0.4 n\pi)$ (vezi *Figura S2.20.d-1*)

$A_{ncB} = -\frac{2}{T} \cdot 2j \cdot sin\left(4 \cdot 10^{-3} \pi n f_1\right) = -j \cdot 400 \cdot sin(0.4 \cdot n\pi)$ (vezi *Figura S2.20.d-2*)

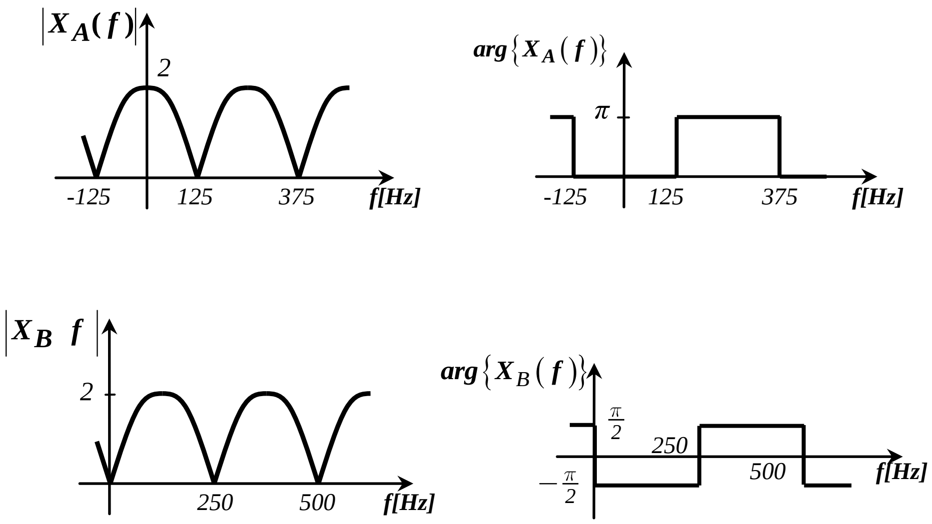


Figura S2.20.b

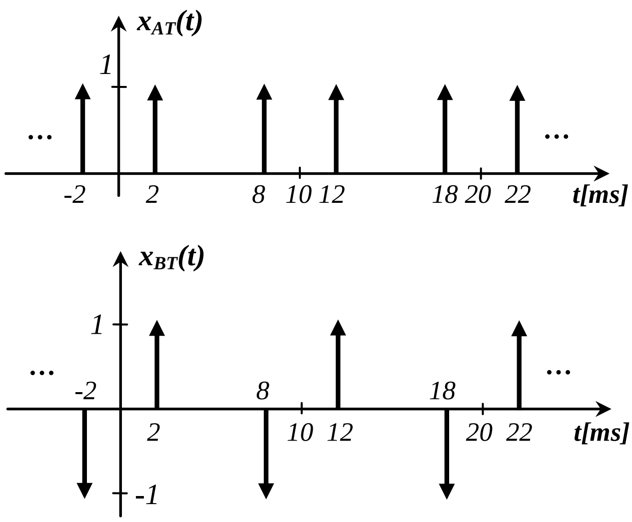


Figura S2.20.c

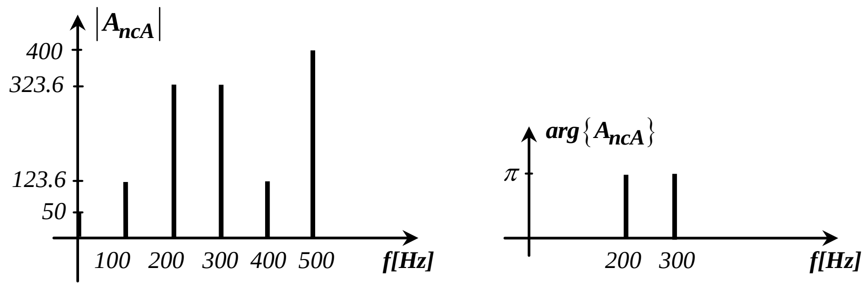


Figura S2.20.d-1

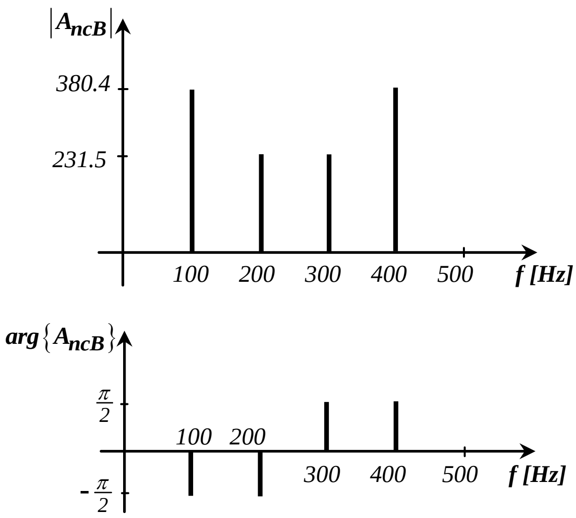


Figura S2.20.d-2

(e) $x_{AT}(t) = 50 + 123.6\cos(200\pi t) + 323.6\cos(400\pi t + \pi) +$
$+323.6\cos(600\pi t + \pi) + 123.6\cos(800\pi t) + 400\cos(1000\pi t);$

$x_{BT}(t) = 380.4\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 235.1\cos\left(400\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 235.1\cos\left(600\pi t + \frac{\pi}{2}\right) +$
$+380.4\cos\left(800\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

S2.21. (a) Se derivează semnalul şi rezultă: $x_d(t) = X_0 \cdot \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - X_0 \cdot \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$.

Ştiind că:

$$F\{\delta(t)\} = 1 \qquad \textbf{\textit{(S2.22)}}$$

şi, folosind teorema întârzierii, rezultă spectrul semnalului derivat:

$$X_d(f) = 2jX_0 \sin(\pi f \tau)$$

Cu teorema derivării *(2.20)*, rezultă transformata Fourier a semnalului $x(t)$:

$$X(f) = X_0 \tau \cdot Sa(\pi f \tau) \qquad \textbf{\textit{(S2.23)}}$$

Relaţia *(S2.23)* mai poate fi scrisă sub forma:

$$X(f) = aria_{\square} \cdot Sa(\pi f \cdot dur_{\square}) \qquad \textbf{\textit{(S2.24)}}$$

unde $aria_{\square}$ şi $dur_{\square}$ reprezintă aria, respectiv durata dreptunghiului.

(b) Spectrul de amplitudini are expresia:

$$|X(f)| = X_0 \tau \cdot |Sa(\pi f \tau)| \qquad \textbf{\textit{(S2.25)}}$$

deci graficul său va fi în formă de $|Sa|$, cu maximul $X_0 \tau$ şi având ca puncte de anulare frecvenţele $f = \frac{k}{\tau}$ – vezi relaţia *(S2.16)*. Spectrul de faze are expresia:

$$arg\{X(f)\} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } X(f) \geq 0 \\ \pm \pi, & \text{pentru } X(f) < 0 \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(S2.26)}}$$

În *Figura S2.21* sunt reprezentate spectrul de amplitudini şi cel de faze.

S2.22. *Determinarea transformatei Fourier a semnalului* $x_1(t)$: semnalul poate fi considerat ca fiind un impuls dreptunghiular avansat cu *2ms* faţă de origine:

$$x_1(t) = x_0\left(t - 2 \cdot 10^{-3}\right)$$

unde $x_0(t)$ este acelaşi impulsul dreptunghiular centrat în origine, a cărui transformată Fourier o determinăm aplicând relaţia *(S2.24)*. Folosind teorema întârzierii, rezultă:

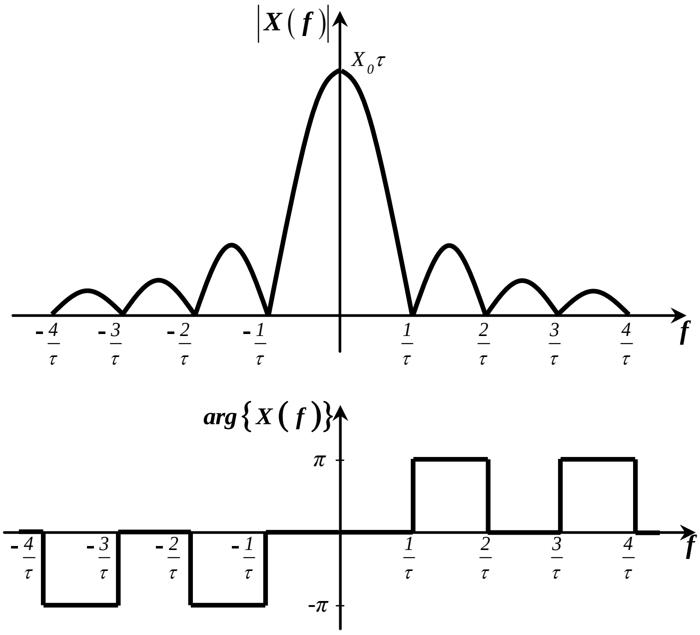


Figura S2.21

$$X_1(f)=2\cdot 10^{-2}Sa\left(\pi f\cdot 5\cdot 10^{-3}\right)\cdot e^{-j\pi f\cdot 5\cdot 10^{-3}}$$

Determinarea transformatei Fourier a semnalului $x_2(t)$: semnalul este format din cele două impulsuri dreptunghiulare deplasate. Folosind *(S2.24)* şi teorema întârzierii, rezultă:

$$X_2(f)=j\cdot 4A_0a\cdot sin(4a\pi f)Sa(2a\pi f).$$

S2.23. **(a)** Se derivează semnalul şi se obţine semnalul derivat, compus din două dreptunghiuri de aceleaşi dimensiuni, deplasate faţă de origine:

$$x_d(t)=x_0\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-x_0\left(t-\frac{\tau}{4}\right)$$

unde $x_0(t)$ este un semnal dreptunghiular de aceleaşi dimensiuni, dar centrat în origine.

Pentru fiecare din cele două semnale dreptunghiulare se aplică relaţia *(S2.24)* împreună cu teorema întârzierii. Rezultă expresia:

$$X_d(f) = 2jX_0 \cdot Sa\left(\pi f \frac{\tau}{2}\right) \cdot sin\left(\pi f \frac{\tau}{2}\right)$$

Aplicând teorema derivării, rezultă transformata Fourier a semnalului $x(t)$:

$$X(f) = \frac{X_0 \tau}{2} \cdot Sa^2\left(\pi f \frac{\tau}{2}\right) \qquad \textbf{(S2.27)}$$

Relaţia *(S2.23)* mai poate fi scrisă sub forma:

$$X(f) = aria_\Delta \cdot Sa^2\left(\pi f \cdot \frac{dur_\Delta}{2}\right) \qquad \textbf{(S2.28)}$$

unde $aria_\Delta$ şi dur_Δ reprezintă aria, respectiv durata triunghiului.

(b) Spectrul de amplitudini are expresia:

$$\left|X(f)\right| = \frac{X_0 \tau}{2} \cdot Sa^2\left(\pi f \frac{\tau}{2}\right) \qquad \textbf{(S2.29)}$$

şi este ilustrat în *Figura S2.23*.

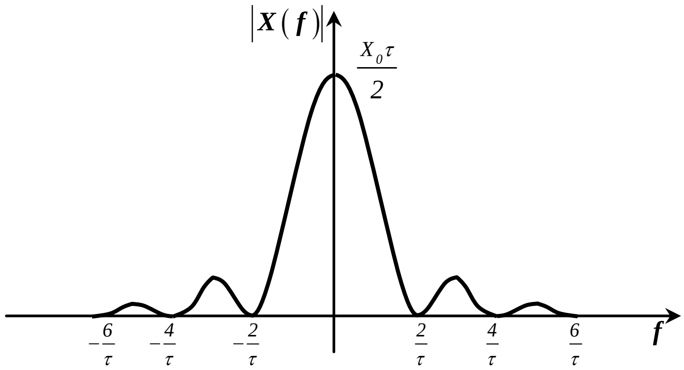


Figura S2.23

Graficul său este fi în formă de Sa^2, cu maximul $\frac{X_0 \tau}{2}$ şi având ca puncte de anulare frecvenţele $f = \dfrac{2k}{\tau}$, $k \in \mathbf{Z}^*$ (vezi soluţia *S2.16*). Spectrul de faze este nul: $arg\left\{X\left(f\right)\right\} = 0$.

S2.24. (a) *Metoda I*: Trapezul se scrie ca diferenţă de două triunghiuri; se va folosi expresia TF a unui semnal triunghiular centrat în origine *(S2.28)*. Rezultă:

$$X\left(f\right) = 4\left[4 \cdot Sa^2\left(2\pi f\right) - Sa^2\left(\pi f\right)\right]$$

Metoda II: Se determină mai întâi spectrul semnalului derivat. În final, rezultă:

$$X\left(f\right) = 12 \cdot Sa\left(\pi f\right) \cdot Sa\left(3\pi f\right)$$

<u>*Observaţie:*</u> expresia este echivalentă cu cea obţinută la prima metodă.

(b) Expresia coeficienţilor complecşi rezultă:

$$A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot X\left(nf_1\right) = 2\left[4 \cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) - Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

Spectrul este ilustrat în *Figura S2.24*.

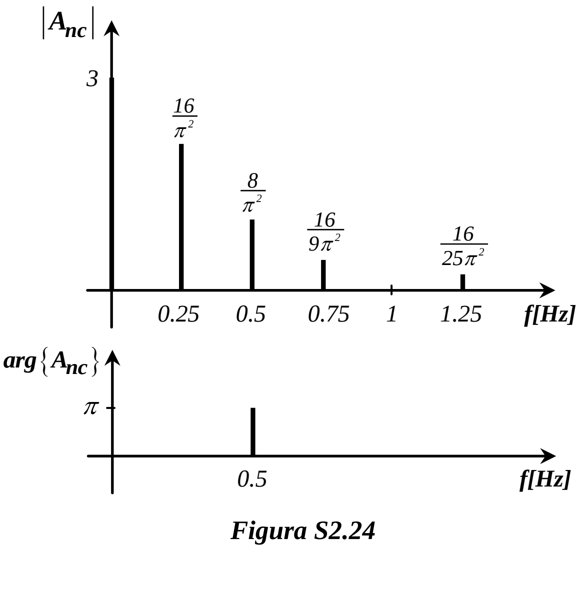


Figura S2.24

S2.25. (a) *Metoda I:* Semnalul se scrie ca sumă dintre un dreptunghi şi un triunghi, ambele centrate în origine. Rezultă:

$$X(f) = 4\left[Sa(4\pi f) + Sa^2(2\pi f)\right]$$

Metoda II: Se determină mai întâi transformata Fourier a semnalului derivat (vezi *Figura S2.25.a*), care se poate scrie:

$$x'(t) = \delta(t+2) + x_0(t+1) - x_0(t-1) - \delta(t-2)$$

unde $x_0(t)$ este un semnal dreptunghiular de dimensiunile celor din figură, dar centrat în origine. Apoi, se foloseşte teorema derivării şi rezultă aceeaşi expresie a spectrului semnalului $x(t)$ ca la metoda I.

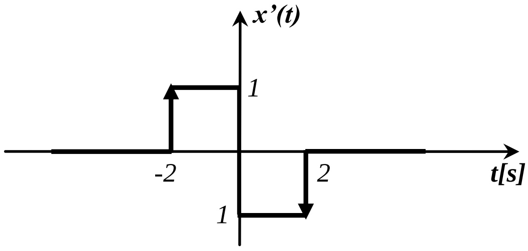


Figura S2.25.a

(b) Expresia coeficienţilor complecşi:

$$A_{nc} = Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Spectrul este ilustrat în *Figura S2.25.b*.

S2.26. (a) Semnalul este format din cele triunghiuri deplasate; rezultă expresia transformatei Fourier:

$$X(f) = 40j \cdot Sa^2(5\pi f) \cdot sin(10\pi f)$$

(b) Expresia coeficienţilor complecşi: $A_{nc} = 4j \cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cdot sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Spectrul este ilustrat în *Figura S2.26*.

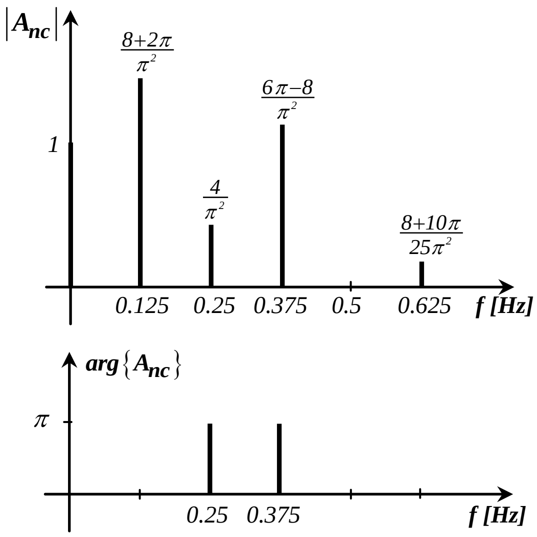


Figura S2.25.b

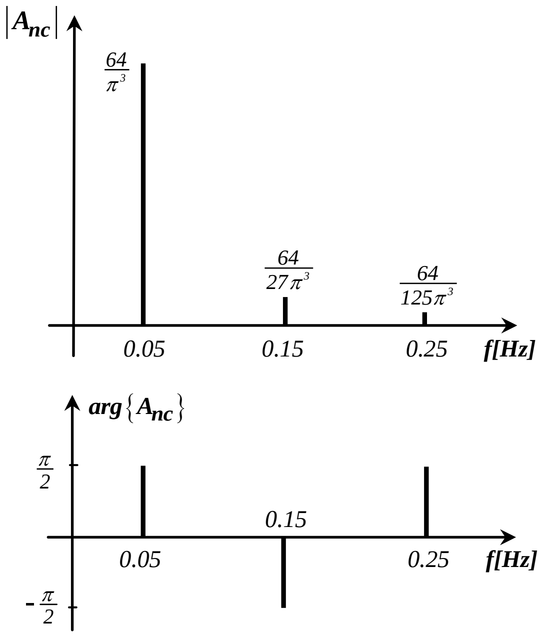


Figura S2.26

S2.27. **(a)** $X(f)=30\left[2\cdot Sa^2(6\pi f)-Sa^2(3\pi f)\cdot cos(18\pi f)\right]$

(b) $A_{nc}=\frac{5}{2}\left[2\cdot Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)-Sa^2\left(\frac{n\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right]$

S2.28. Se va considera semnalul $x_1(t)$, ilustrat în *Figura S2.28*. Se determină transformata Fourier a acestui semnal, folosind teorema derivării. Rezultă:

$$X_1(f)=\frac{2}{j\pi f}\left[1-Sa\left(\pi f\cdot 10^{-2}\right)\right].$$

Semnalul $x(t)$ se obţine prin repetarea semnalului $x_1(t)$ cu perioada $T=15\ ms$, prin urmare:

$$A_{nc}=\frac{2}{15\cdot 10^{-3}}\cdot X_1\left(\frac{n}{15\cdot 10^{-3}}\right)$$

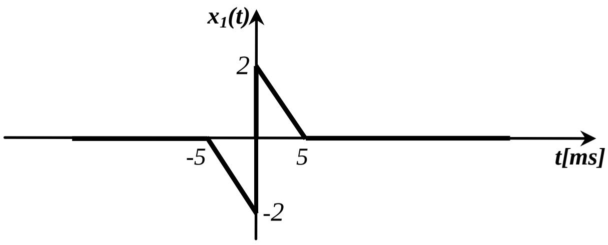


Figura S2.28

Rezultă: $A_{nc}=\frac{4}{j\pi n}\left[1-Sa\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right].$

S2.29. **(a)** $y(t)=0.5cos\left(2\pi\cdot 98\cdot 10^3 t\right)+0.5cos\left(2\pi\cdot 102\cdot 10^3 t\right)$

(b) $y(t)=cos\left(2\pi\cdot 196\cdot 10^3 t\right)+0.5cos\left(2\pi\cdot 198\cdot 10^3 t\right)+0.5cos\left(2\pi\cdot 202\cdot 10^3 t\right)+$
$+cos\left(2\pi\cdot 204\cdot 10^3 t\right)$

S2.30. După înmulţirea cu $cos(2\pi f_0 t)$, spectrul bilateral al semnalului $x(t)$ se deplasează în jurul frecvenţelor $\pm\ f_0$, conform cu *teorema modulării*:

$$x(t)\cdot cos(2\pi f_0 t) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2}\left[X(f+f_0)+X(f-f_0)\right] \qquad \textbf{\textit{(S2.30)}}$$

După a doua înmulţire cu $cos(2\pi f_0 t)$, variante (ponderate) ale spectrului bilateral al semnalului $x(t)$ vor apărea în jurul originii şi în jurul frecvenţelor $\pm 2f_0$. După aplicarea filtrului, va rămâne doar varianta din origine. Rezultă: $y(t)=\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{2}cos\left(4k\pi\cdot 10^3 t\right)$, deci : $\frac{y(t)}{x(t)}=0.5$.

S2.31. Vezi *Figura S2.31*.

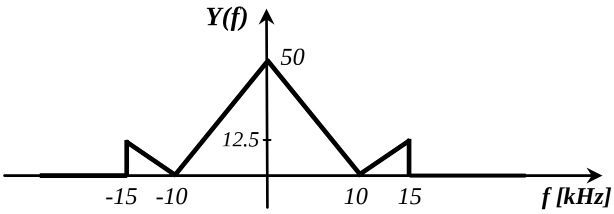


Figura S2.31

S2.32. Dacă nu se specifică forma spectrului semnalului $x(t)$, ci doar frecvenţa sa maximă f_0, atunci acesta se va considera de o formă oarecare, de exemplu triunghi centrat în origine, între frecvenţele $-f_0$ şi f_0 şi de amplitudine *A*. După trecerea prin FTB se obţine semnalul $w_1(t)$, cu TF ilustrată în *Figura S2.32.a*.

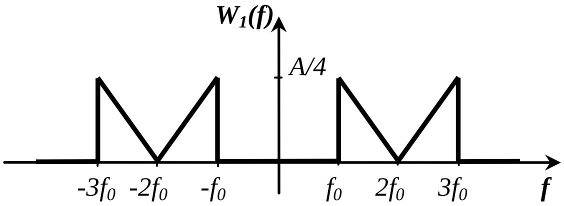


Figura S2.32.a

Este necesar ca $y(t)=k\cdot x(t)$, adică $Y(f)=k\cdot X(f)$. Deci $Y(f)$ trebuie să aibă aceeaşi formă ca $X(f)$, dar de amplitudine $k\cdot A$. Aceasta înseamnă că f_x trebuie ales astfel încât semnalul înainte de FTJ să conţină un triunghi între frecvenţele $-f_0$ şi f_0.

Se poate alege $f_x = f_0$. Rezultă $W_2(f)$ ilustrat în *Figura S2.32.b*.

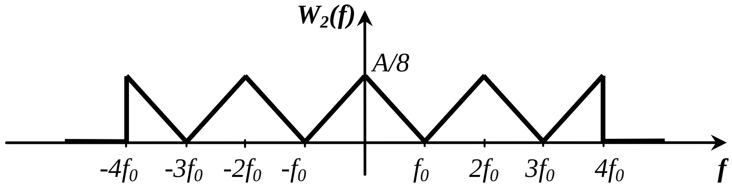


Figura S2.32.b

$Y(f)$ conţine doar triunghiul din jurul originii. Rezultă: $Y(f)=\frac{1}{8}\cdot X(f)$, deci $k=\frac{1}{8}$.

S2.33. **(a)** Se observă că: $x_2(t)=x_1(t)+x_1\left(t-\frac{T_0}{2}\right)$, deci în domeniul frecvenţă rezultă: $A_{nc2}=A_{nc1}+A_{nc1}\cdot e^{-j\pi n}$, deci: $A_{nc2}=A_{nc1}\left[1+(-1)^n\right]$.

(b) Se determină mai întâi transformata Fourier a semnalului $x(t)$. Se poate scrie:

$$x(t)=cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\cdot\begin{cases}1, & -\frac{T_0}{4}\le t\le\frac{T_0}{4}\\ 0\ , & \text{în rest}\end{cases}=cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\cdot x_0(t)$$

unde $x_0(t)$ este un semnal dreptunghiular centrat în origine, de amplitudine *1* şi durată $\frac{T_0}{2}$ (vezi *Figura S2.33).*

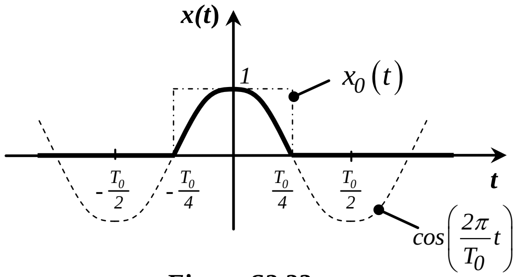


Figura S2.33

Folosind teorema modulării, rezultă transformata Fourier a semnalului $x(t)$:

$$X(f)=\frac{T_0}{4}\left[Sa\left(\pi f\frac{T_0}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+Sa\left(\pi f\frac{T_0}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Ambele semnale $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ se obţin prin repetarea lui $x(t)$ cu o anumită perioadă. De aceea, pentru determinarea A_{nc1} şi A_{nc2}, se va folosi relaţia *(2.26)*.

Semnalul $x_1(t)$ se obţine prin repetarea lui $x(t)$ cu perioada $T=T_0$, deci:

$$A_{nc1}=\frac{1}{2}Sa\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}Sa\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Semnalul $x_2(t)$ se obţine prin repetarea lui $x(t)$ cu perioada $T=\frac{T_0}{2}$, deci:

$$A_{nc2}=Sa\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]+Sa\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

S2.34. $W=\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)\,dt=81\,mJ$

S2.35. $W=21\,J$

S2.36. $P=\frac{1}{T}\int_T x^2(t)\,dt=3\,\mu W$

S2.37. $W=125\,\mu J$

S2.38. $X_{ef}=\sqrt{P}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T x^2(t)\,dt}=3\,mV$

S2.39. $y(t)=10\sum_{k=1}^{10}cos\left(200k\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

S2.40. $y(t)=2\sum_{k=10}^{20}cos(2000k\pi t)$

S2.41. $y(t)=5\sum_{k=21}^{100} cos(2000k\pi t)$

S2.42. Vom nota cu $x_1(t)$ semnalul aperiodic ce reprezintă descrierea pe o perioada a semnalului $x(t)$. Semnalul periodic $x(t)$ se poate scrie folosind forma armonică a SFA *(2.6)*, unde $f_1 = 1\,kHz$, iar coeficienţii complecşi se determină cu relaţia *(2.26)*: $A_{nc} = 2\cdot 10^3 \cdot X_1\left(n\cdot 10^3\right)$. Din *Figura P2.42* se observă că, pentru $n>3$, $X_1(f)=0$, prin urmare rămân de determinat A_{1c} , A_{2c} şi A_{3c} :

$$A_{1c} = 2\cdot 10^3\cdot X\left(10^3\right) = 2\cdot 10^3\cdot 10^{-3} = 2$$
$$A_{2c} = 2\cdot 10^3\cdot X\left(2\cdot 10^3\right) = 2\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^{-3} = 4$$
$$A_{3c} = 2\cdot 10^3\cdot X\left(3\cdot 10^3\right) = 2\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^{-3} = 6$$

Toţi trei coeficienţii fiind reali şi pozitivi, rezultă că $arg\{A_{nc}\}=0$. Expresia semnalului $x(t)$ va fi:

$$x(t) = 2cos\left(2\pi\cdot 10^3 t\right) + 4cos\left(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t\right) + 6cos\left(2\pi\cdot 4\cdot 10^3 t\right)$$

S2.43. $x(t) = 2\cdot 10^3\, cos\left(2\pi\cdot 10^3\cdot t\right)$

S2.44. $x(t) = 400cos(2\pi\cdot 100t) + 200cos(2\pi\cdot 200t)$

S2.45. $X(f) = 0.05\left\{Sa\left[0.1\pi(f+10)\right] + Sa\left[0.1\pi(f-10)\right]\right\}$

S2.46. $X(f) = 0.025\left\{Sa\left[0.05\pi(f+10)\right] + Sa\left[0.05\pi(f-10)\right]\right\}$

S2.47. Se consideră că semnalul $x(t)$ este compus din două semnale:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

unde $x_1(t) = 20\cdot Sa(50\pi t)$ şi $x_2(t) = 20\cdot Sa^2(50\pi t)$.

Pentru $x_1(t)$ se aplică teorema simetriei *(2.23)*: dacă unui dreptunghi în timp îi corespunde un *Sa* în frecvenţă, atunci unui *Sa* în timp îi va corespunde un dreptunghi în frecvenţă:

$$x_{\square}(t) \leftrightarrow aria \cdot Sa(\pi f \cdot dur)$$
$$aria \cdot Sa(\pi t \cdot dur) \leftrightarrow x_{\square}(f)$$

Se echivalează $x_1(t)$ cu expresia: $aria \cdot Sa(\pi t \cdot dur)$ şi rezultă durata dreptunghiului *100 Hz*, iar amplitudinea *1*. Analog se procedează pentru semnalul $x_2(t)$. Spectrele rezultate sunt ilustrate în *Figura S2.47.a.*

Transformata Fourier a semnalului $x(t)$ se obţine prin însumarea grafică a celor două transformate Fourier (*Figura S2.47.b*).

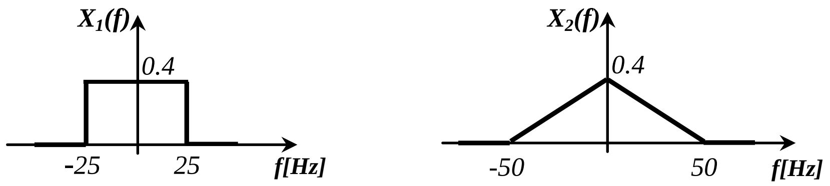


Figura S2.47.a

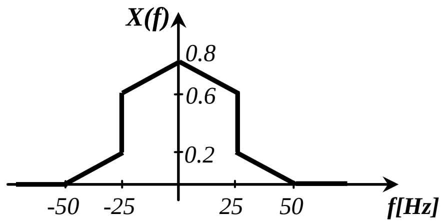


Figura S2.47.b

S2.48. Vezi *Figura S2.48, (a) – (d).*

S2.49. (a) Se observă din grafic că $x(t)$ este suma dintre un semnal dreptunghiular şi unul triunghiular, de aceeaşi durată. Se scriu TF ale celor două semnale şi în final rezultă: $X(f) = 0.16Sa\left(16 \cdot 10^{-3}\pi f\right) + 0.08Sa\left(8 \cdot 10^{-3}\pi f\right)$.

(b) Semnalul $x(t)$ este suma dintre un dreptunghi şi un triunghi, triunghiul având durată mai mare. Rezultă: $X(f) = 0.02Sa(0.01\pi f) + 0.02Sa^2(0.01\pi f)$.

(c) Semnalul $x(t)$ este diferenţa dintre un dreptunghi şi un triunghi de aceeaşi durată. Rezultă: $X(f) = 0.32Sa(0.04\pi f) - 0.16Sa^2(0.02\pi f)$.

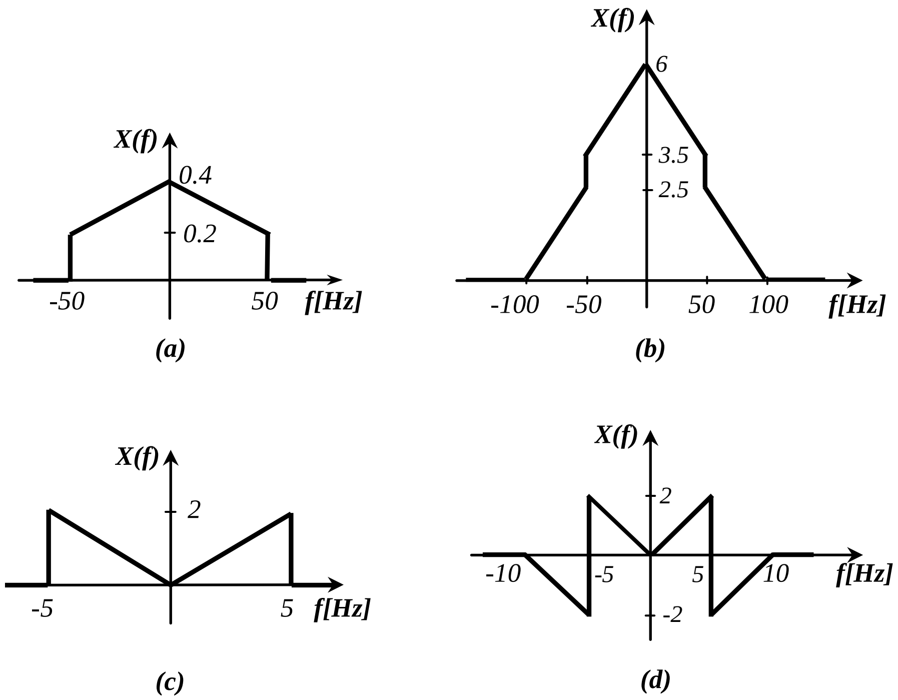


Figura S2.48

(d) Semnalul $x(t)$ este diferenţa dintre un dreptunghi şi un triunghi, triunghiul având durată mai mare decât dreptunghiul. Rezultă:

$$X(f) = 8Sa(0.1\pi f) - 8Sa^2(0.1\pi f)$$

S2.50. $y(t) = cos\left(192\pi \cdot 10^3 t\right) + 0.5cos\left(196\pi \cdot 10^3 t\right) + 0.5cos\left(204\pi \cdot 10^3 t\right) +$
$+ cos\left(208\pi \cdot 10^3 t\right)$.

S2.51. $y(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} k\,cos\left(4k\pi \cdot 10^3 t\right)$.

S2.52. $y(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} k\,cos\left(4k\pi \cdot 10^3 t\right)$.

Capitolul 3
SISTEME ANALOGICE LINIARE ŞI INVARIANTE ÎN TIMP (SALI)

3.1. Breviar teoretic

Caracterizarea SALI

Un sistem cu o intrare $x(t)$ şi o ieşire $y(t)$ poate fi caracterizat prin:

• *ecuaţia diferenţială ataşată:*

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_n \cdot \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \ldots + b_0 \cdot x(t) \qquad \textbf{(3.1)}$$

• *funcţia de sistem (funcţia de transfer):*

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{cond.init.=0} \qquad \textbf{(3.2)}$$

unde $X(s)$ şi $Y(s)$ sunt transformatele Laplace ale semnalelor $x(t)$ şi $y(t)$;

• *funcţia pondere* (răspunsul unui SALI la un impuls ideal unitate):

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} \qquad \textbf{(3.3)}$$

• *răspunsul indicial* (răspunsul unui SALI la semnal treaptă unitate):

$$a(t) = L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} \qquad \textbf{(3.4)}$$

sau, ca integrală a funcţiei pondere:

$$a(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau \qquad \textbf{(3.5)}$$

• *răspunsul în frecvenţă:*

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} \qquad \textbf{(3.6)}$$

• *amplificarea şi defazajul:*

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left|H(j\omega)\right| \\ \varphi(\omega) &= arg\left\{H(j\omega)\right\} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.7)}$$

<u>Răspunsul unui SALI la semnale periodice</u>

Dacă la intrarea unui SALI, caracterizat prin funcţia de sistem $H(s)$, se aplică semnalul periodic $x(t)$:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} X_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_{xk}) \qquad \textbf{(3.8)}$$

atunci semnalul de ieşire va fi:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{N} Y_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_{yk}) \qquad \textbf{(3.9)}$$

unde :

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0 \cdot \left|H(0)\right| \\ Y_k &= X_k \cdot \left|H(j\omega_k)\right| \\ \varphi_{yk} &= \varphi_{xk} + arg\left\{H(j\omega_k)\right\} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.10)}$$

<u>Proprietăţile transformatei Laplace</u>

Dacă $X(s) = L\left\{x(t)\right\}$, atunci au loc următoarele proprietăţi ale transformatei Laplace:

• *liniaritatea*:

$$\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \leftrightarrow \alpha \cdot X_1(s) + \beta \cdot X_2(s) \qquad \textbf{(3.11)}$$

• *deplasarea originalului*:

$$x(t-\alpha)\cdot u(t-\alpha) \leftrightarrow e^{-\alpha s}\cdot X(s) \qquad \textbf{(3.12)}$$

• *deplasarea imaginii*:

$$e^{-\alpha t}\cdot x(t) \leftrightarrow X(s+\alpha) \qquad \textbf{(3.13)}$$

• *derivarea originalului*:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n\cdot X(s) \qquad \textbf{(3.14)}$$

• *integrarea originalului*:

$$\int_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} \qquad \textbf{(3.15)}$$

• *comprimarea timpului*:

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad \textbf{(3.16)}$$

• *derivarea imaginii*:

$$t\cdot x(t) \leftrightarrow -X'(s) \qquad \textbf{(3.17)}$$

• *integrarea imaginii*:

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(r)dr \qquad \textbf{(3.18)}$$

• *produsul originalelor*:

$$x_1(t)\cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)\otimes X_2(s) \qquad \textbf{(3.19)}$$

• *produsul imaginilor*:

$$x_1(t)\otimes x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)\cdot X_2(s) \qquad \textbf{(3.20)}$$

Transformatele Laplace ale unor semnale folosite în culegere:

$$L\{\gamma(t)\} = \frac{1}{s} \tag{3.21}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \tag{3.22}$$

$$L\left\{e^{-\alpha t} \cdot \gamma(t)\right\} = \frac{1}{s+\alpha} \tag{3.23}$$

$$L\{sin(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \tag{3.24}$$

$$L\{cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2} \tag{3.25}$$

Corelaţia, autocorelaţia şi convoluţia

Funcţia de corelaţie între două semnale $x(t)$ şi $y(t)$ este:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t-\tau)\,dt \tag{3.26}$$

Funcţia de autocorelaţie a unui semnal $x(t)$ este:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t-\tau)\,dt \tag{3.27}$$

Pentru un SALI caracterizat de funcţia pondere $h(t)$, răspunsului $y(t)$ la excitaţia $x(t)$ se evaluează prin *integrala de convoluţie*:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \tag{3.28}$$

Răspunsul permanent al unui SALI

Răspunsul permanent al unui sistem $H(s)$ la excitaţia periodică $x_T(t)$ în intervalul $(0,T)$ se determină cu relaţia:

$$y_p(t) = L^{-1}\{X(s)\cdot H(s)\} - \sum_{\substack{polii\\ H(s)}} rez\left\{\frac{X(s)\cdot H(s)}{1-e^{-sT}}\cdot e^{st}\right\} \qquad \textit{(3.29)}$$

unde $X(s) = L\{x(t)\}$, iar $x(t)$ este descrierea pe o perioadă a semnalului $x_T(t)$.

Diagramele Bode

Diagramele Bode *elementare* sunt prezentate în *Figura 3.1*, unde caracteristicile reale sunt trasate cu linie întreruptă, iar asimptotele lor – cu linie continuă.

Abaterile caracteristicilor reale faţă de asimptote sunt maxime la frecvenţele de frângere ale asimptotelor:

- pentru funcţia elementară $H(s) = (\tau s + 1)^{\alpha}$, abaterea amplificării reale este de *3dB*, iar a defazajului este de *5,8°*.
- pentru funcţia elementară $H(s) = \left(\dfrac{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^{\alpha}$, abaterea caracteristicilor reale de asimptote nu este constantă, ci depinde de valoarea lui ξ.

Principiul diagramelor Bode:

(1) funcţia de sistem $H(s)$ se scrie ca produs de factori elementari (funcţiile de sistem elementare din *Figura 3.1*);

(2) se reprezintă, pe acelaşi grafic, diagramele Bode ale factorilor elementari respectivi;

(3) prin logaritmare, produsul trece în sumă, deci:
   - amplificarea în [dB] a funcţiei de sistem va fi suma amplificărilor factorilor elementari;
   - defazajul va fi suma defazajelor introduse de fiecare factor.

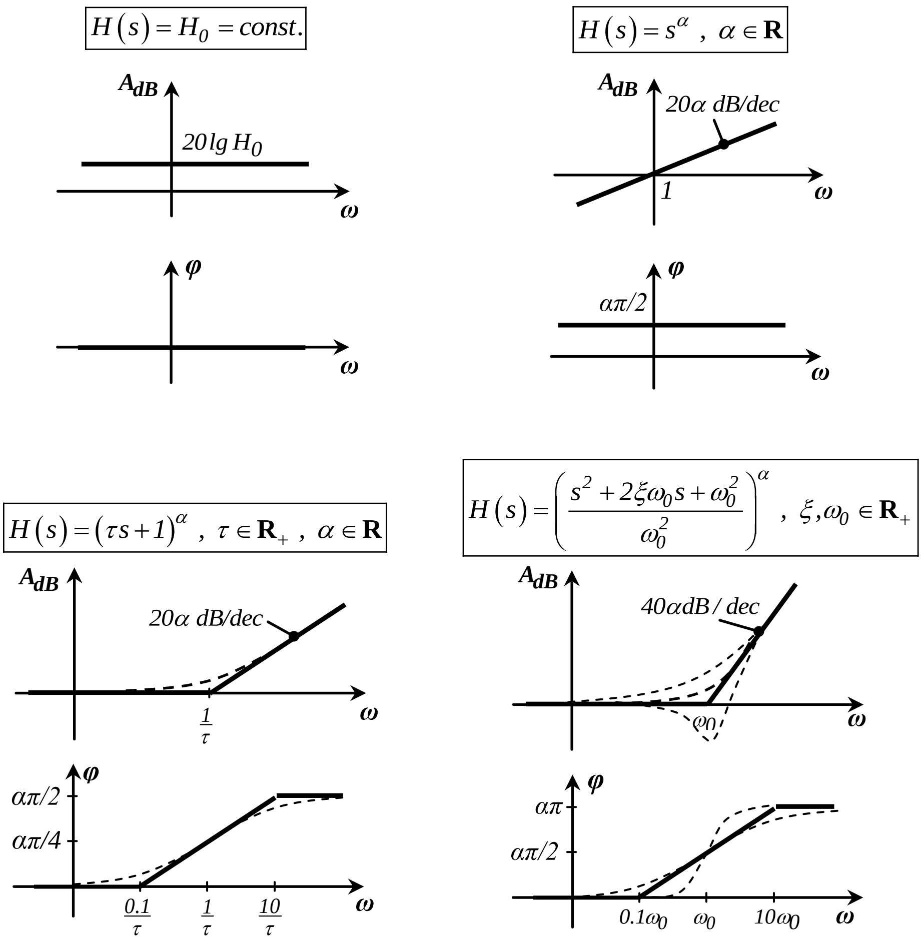


Figura 3.1.

3.2. Enunţuri

P3.1. Determinaţi amplificarea şi defazajul în regim permanent ale SALI caracterizate prin funcţiile de sistem:

(a) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+1}$ **(b)** $H(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$

(c) $H(s)=\dfrac{4s}{s^2+4s+4}$ **(d)** $H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}$

P3.2. Determinaţi răspunsul permanent al SALI caracterizat prin $H(s)$ la excitaţia $x(t)$, pentru:

(a) $H(s)=\dfrac{s}{s+1}$, $x(t)=\sqrt{8}\cos(t)$;

(b) $H(s)=\dfrac{s}{s+2}$; $x(t)=\sqrt{2}\cos(2t)$;

(c) $H(s)=\dfrac{1}{s+3}$; $x(t)=\sqrt{18}\cos(3t)$;

(d) $H(s)=\dfrac{1}{s+1}$; $x(t)=\sqrt{8}\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

P3.3. Pentru SALI descrise prin ecuaţiile de mai jos, determinaţi răspunsul în frecvenţă, amplificarea şi defazajul:

(a) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=4\dfrac{dx(t)}{dt}$;

(b) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^2}+\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+3\cdot\dfrac{dx(t)}{dt}$.

P3.4. Se consideră un SALI descris prin ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=x(t)$$

(a) Determinaţi răspunsul la frecvenţă, amplificarea şi defazajul sistemului.
(b) Determinaţi răspunsul $y(t)$ al sistemului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$

P3.5. Se consideră un SALI descris de ecuaţia:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\cdot\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+5x(t)$$

(a) Determinaţi răspunsul în frecvenţă al sistemului.
(b) Determinaţi răspunsul sistemului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t) = 1 + 2\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 5\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + 20\cos(3t)$$

P3.6. Se consideră un SALI descris prin ecuaţia diferenţială:

$$16 \cdot \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Determinaţi semnalul $x(t)$ care trebuie aplicat la intrarea sistemului, astfel încât răspunsul să fie : $y(t) = 3 - 2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

P3.7. Se consideră un SALI caracterizat prin: $H(j\omega) = \dfrac{j\omega}{100\pi + j\omega}$. Determinaţi răspunsul sistemului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t) = 2 + 3\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

P3.8. Se consideră un SALI caracterizat de: $H(j\omega) = \dfrac{j\omega}{20\pi + j\omega}$. Determinaţi răspunsul sistemului dacă la intrare se aplică semnalul:

$$x(t) = \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(80\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

P3.9. Se consideră un SALI caracterizat de: $H(j\omega) = \dfrac{3\omega_0}{\omega_0 + j\omega}$. Determinaţi semnalul care trebuie aplicat la intrare astfel încât la ieşire să rezulte semnalul:

$$y(t) = 2 + 3\cos\left(2 f_0 \pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos(4 f_0 \pi t) + 5\cos(6 f_0 \pi t + \pi)$$

unde $\omega_0 = 2\pi f_0$.

P3.10. Fie un SALI având funcţia de circuit: $H(s)=\dfrac{2\pi\cdot 10^3}{s+2\pi\cdot 10^3}$. Determinaţi răspunsul acestui sistem la semnalul:

$$x(t)=2+3\cdot cos\left(2000\pi t-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(6000\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+2.5\cdot cos\left(10^4\pi t\right)$$

P3.11. Se consideră circuitul din *Figura P3.11*, unde semnalul de ieşire este tensiunea pe rezistenţa R_2. Determinaţi:

(a) funcţia de transfer.
(b) funcţia pondere.
(c) răspunsul indicial prin două metode.
(d) răspunsul circuitului la excitaţia $e(t)=e^{-2t}\cdot\gamma(t)$, pentru cazul particular: $R_1=2\,\Omega$, $R_2=3\,\Omega$ şi $L=1\,H$.

P3.12. Aceeaşi problemă ca mai sus, dar considerând că semnalul de ieşire este curentul prin bobină.

P3.13. Se consideră circuitul din *Figura P3.13*, unde semnalul de ieşire este curentul prin condensatorul *C*. Determinaţi:

(a) funcţia pondere.
(b) răspunsul indicial prin două metode.
(c) răspunsul circuitului la excitaţia $e(t)=e^{-t}\cdot\gamma(t)$, pentru cazul particular: $R_1=1\,\Omega$, $R_2=2\,\Omega$ şi $C=1\,F$.

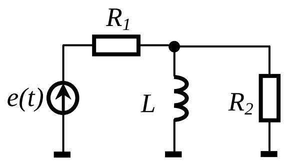


Figura P3.11

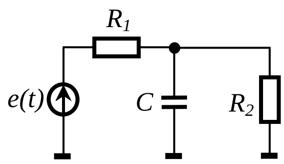


Figura P3.13

P3.14. Aceeaşi problema ca mai sus, dar considerând că semnalul de ieşire este curentul prin rezistenţa R_2.

P3.15. Se consideră circuitul din *Figura P3.15*. Determinaţi funcţia pondere în următoarele cazuri:

(a) Semnalul de ieşire este curentul prin rezistenţa R_2.

(b) Semnalul de ieşire este curentul prin rezistenţa R_1.

P3.16. Se consideră circuitul din *Figura P3.16*. Determinaţi răspunsul indicial în următoarele cazuri:

(a) Semnalul de ieşire este curentul prin rezistenţa R_1.
(b) Semnalul de ieşire este tensiunea pe bobina L.

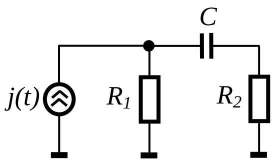


Figura P3.15

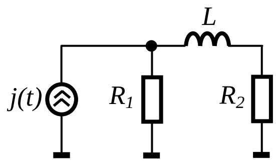


Figura P3.16

P3.17. Pentru circuitul din *Figura P3.17,* determinaţi:

(a) amplificarea şi defazajul, în funcţie de R şi C.
(b) răspunsul circuitului la excitaţia $e(t) = 2 + 3cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right)$, pentru cazul particular: $R = 1\,k\Omega$ şi $C = 1\,\mu F$.

P3.18. Fie circuitul din *Figura P3.18,* unde: $R = 0.5\,k\Omega$, $L = 4\,\mu H$ şi $C = 5\,pF$. Se consideră următoarele cazuri:

(a) semnalul de ieşire este curentul prin rezistenţa R.
(b) semnalul de ieşire este curentul prin bobina L.
(c) semnalul de ieşire este curentul prin condensatorul C.

Pentru fiecare caz, determinaţi funcţia de transfer, frecvenţa de rezonanţă, precizaţi ce fel de filtru este şi determinaţi frecvenţele de tăiere.

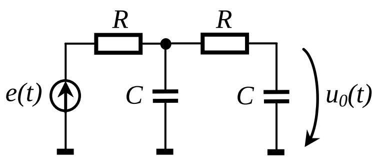


Figura P3.17

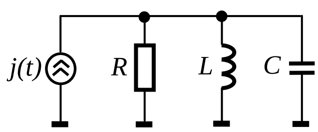


Figura P3.18

P3.19. Pentru circuitul din *Figura P3.19*, determinaţi:

(a) funcţiile de sistem $H_1(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)}$ şi $H_2(s) = \frac{U_L(s)}{E(s)}$, în funcţie de R

şi L , unde $u_R(t)$ şi $u_L(t)$ sunt tensiunea pe R, respectiv pe L;

(b) amplificările şi defazajele corespunzătoare celor două funcţii de sistem;

(c) funcţiile pondere corespunzătoare celor două funcţii de sistem;

(d) răspunsurile indiciale corespunzătoare celor două funcţii de sistem, prin două metode.

(e) $u_L(t)$ dacă la intrare se aplică semnalul $e(t) = e^{-t} \cdot \gamma(t)$, pentru cazul particular: $R = 2\,\Omega$ şi $L = 10\,mH$.

P3.20. Pentru circuitul din *Figura P3.20* determinaţi:

(a) funcţia de sistem $H(s) = \dfrac{U_0(s)}{E(s)}$;

(b) amplificarea şi defazajul.

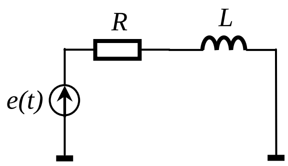


Figura P3.19

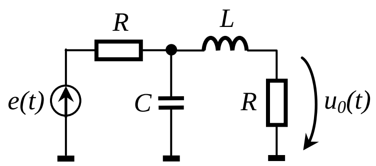


Figura P3.20

P3.21. Determinaţi funcţia de autocorelaţie a semnalului din *Figura P3.21*.

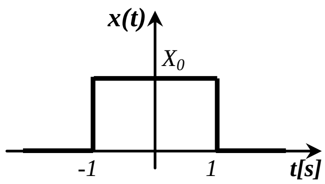


Figura P3.21

P3.22. Determinaţi răspunsul sistemului caracterizat prin funcţia pondere $h(t) = e^{-at}\gamma(t)$ la impulsul: $x(t) = \begin{cases} X_0 \;,\; 0 < t < \theta \\ 0 \;,\; \text{în rest} \end{cases}$.

P3.23. Determinaţi răspunsul sistemului caracterizat prin funcţia pondere $h(t)=e^{-t/a}\gamma(t)$ la impulsul: $x(t)=\begin{cases} X_0\ ,\ 0<t<\theta \\ 0\ ,\ \text{în rest} \end{cases}$.

P3.24. Determinaţi răspunsul sistemului caracterizat prin funcţia pondere: $h(t)=e^{-at}\gamma(t)$ la impulsul: $x(t)=\begin{cases} aX_0\ ,\ 0<t<\theta \\ 0\ ,\ \text{în rest} \end{cases}$.

P3.25. Determinaţi forma compactă a răspunsului sistemului $H(s)=\dfrac{0.5s}{s+0.5}$, la excitaţia periodică din *Figura P2.25*.

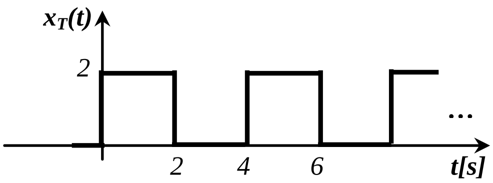


Figura P3.25

P3.26. Determinaţi forma compactă a răspunsului sistemului $H(s)=\dfrac{2s}{s+2}$, la excitaţia periodică din *Figura P3.26*.

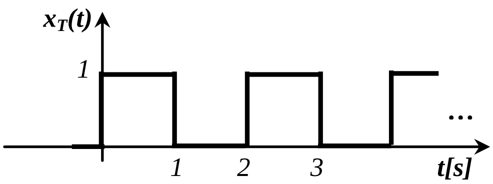


Figura P3.26

P3.27. Determinaţi forma compactă a răspunsului sistemului: $H(s)=\dfrac{0.5s}{s+0.5}$, la excitaţia periodică din *Figura P3.27*.

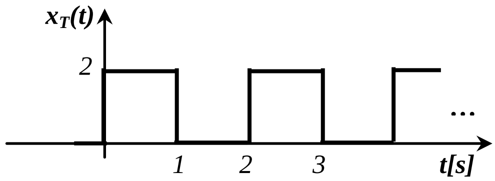


Figura P3.27

P3.28. Determinaţi forma compactă a răspunsului sistemului: $H(s) = \frac{2s}{s+2}$, la excitaţia periodică din *Figura P3.28*.

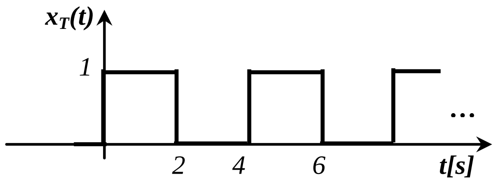


Figura P3.28

P3.29. Reprezentaţi diagramele Bode ale amplificării şi defazajului pentru funcţia de sistem: $H(s) = \frac{1}{s+100}$.

P3.30. Reprezentaţi diagrama Bode a defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

P3.31. Reprezentaţi diagrama Bode a defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(0.1s+1)}$$

P3.32. Reprezentaţi diagrama Bode a amplificării pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{s^2}{(s+1)(0.1s+1)}$$

P3.33. Reprezentaţi diagrama Bode a defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{s^2}{(s+1)(0.1s+1)}$$

P3.34. Reprezentaţi diagrama Bode a amplificării pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{s+100}{s^2}$$

P3.35. Reprezentaţi diagrama Bode a defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{10s+1}{s^2(s+1)}$$

P3.36. Reprezentaţi diagrama Bode a amplificării pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{s+10}{10s+1}$$

P3.37. Reprezentaţi diagrama Bode a defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{s+1}{s(10s+1)}$$

P3.38. Reprezentaţi diagramele Bode ale amplificării şi defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{10s+1}{s}$$

P3.39. Reprezentaţi diagramele Bode ale amplificării şi defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s)=\frac{(s+1)(0.1s+1)}{s^2}$$

P3.40. Trasaţi caracteristicile reale Bode ale amplitudinii şi defazajului pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}$$

P3.41. Se consideră circuitul din *Figura P3.41*, unde $R = 10\,k\Omega$ şi $C = 1\,\mu F$.

(a) Determinaţi funcţiile de sistem $H_1(s) = \frac{I_R(s)}{J(s)}$ şi $H_2(s) = \frac{I_C(s)}{J(s)}$, unde $i_R(t)$ şi $i_C(t)$ sunt curentul prin *R*, respectiv curentul prin *C*.

(b) Trasaţi diagramele Bode corespunzătoare celor două funcţii de sistem determinate la punctul *(a)*.

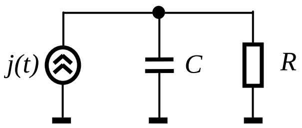


Figura P3.41

P3.42. Reprezentaţi diagramele Bode pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{10^4}{s^2 + 10^4}$$

P3.43. Reprezentaţi diagramele Bode pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = \frac{s + 0.1}{s^2 + 1.01s + 0.01}$$

P3.44. Reprezentaţi diagramele Bode pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = 0.1s^2 + 0.1s + 0.001$$

P3.45. Reprezentaţi diagramele Bode pentru funcţia de sistem:

$$H(s) = (10s + 1)^{-1}\left(s^2 + s + 1\right)^{-1}$$

P3.46. Să se determine funcţia de sistem $H(s)$ corespunzătoare diagramelor Bode din *Figurile P3.46, (a) – (d).*

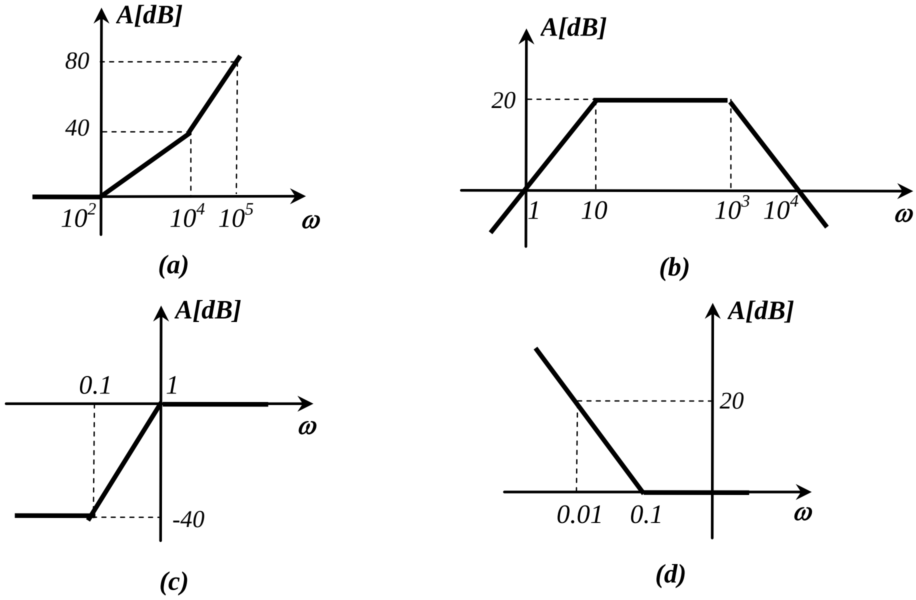


Figura P3.46

3.3. Indicaţii şi soluţii

S3.1. (a) $A(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$; $\varphi(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-arctg\,\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\ , & \omega\geq 1\\ \dfrac{\pi}{2}-arctg\,\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\ , & \omega<1\end{cases}$

(b) $A(\omega)=\dfrac{\omega}{\sqrt{\left(2-\omega^2\right)^2+9\omega^2}}$; $\varphi(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-arctg\,\dfrac{3\omega}{2-\omega^2}\ , & \omega\geq\sqrt{2}\\ \dfrac{\pi}{2}-arctg\,\dfrac{3\omega}{2-\omega^2}\ , & \omega<\sqrt{2}\end{cases}$

(c) $A(\omega)=\dfrac{4\omega}{4+\omega^2}$; $\varphi(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}\ , & \omega\ge 2\\ \dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}\ , & \omega<2\end{cases}$

(d) $A(\omega)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}$; $\varphi(\omega)=\begin{cases}\pi-arctg\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\ , & \omega\ge 1\\ -arctg\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\ , & \omega<1\end{cases}$

S3.2. Răspunsul unui SALI la un semnal armonic $x(t)=X\,cos(\omega_0 t+\varphi_x)$ este tot un semnal armonic, de aceeaşi frecvenţă: $y(t)=Y\,cos(\omega_0 t+\varphi_y)$, unde $Y=X\cdot A(\omega_0)$ şi $\varphi_y=\varphi_x+\varphi(\omega_0)$ (*A* este amplificarea SALI şi φ este defazajul SALI);

(a) $A(\omega)=\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$; $\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}-arctg(\omega)$; $y(t)=2cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(b) $A(\omega)=\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4}}$; $\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}-arctg\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$; $y(t)=cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(c) $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+9}}$; $\varphi(\omega)=-arctg\left(\dfrac{\omega}{3}\right)$; $y(t)=cos\left(3t-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(d) $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$; $\varphi(\omega)=-arctg(\omega)$; $y(t)=2cos(t)$.

S3.3. (a) $H(j\omega)=\dfrac{4j\omega}{-\omega^2+3j\omega+2}$; $A(\omega)=\dfrac{4\omega}{\sqrt{\omega^4+5\omega^2+4}}$;

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{3\omega}{2-\omega^2}\ , & \omega\le\sqrt{2}\\ -\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{3\omega}{2-\omega^2}\ , & \omega>\sqrt{2}\end{cases};$$

(b) $H(j\omega)=\dfrac{-\omega^2+3j\omega}{-j\omega^3-\omega^2+4j\omega+1}$; $A(\omega)=\sqrt{\dfrac{\omega^4+9\omega^2}{\omega^6-7\omega^4+14\omega^2+1}}$;

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\pi-arctg\,\dfrac{3}{\omega}-arctg\,\dfrac{4\omega-\omega^3}{1-\omega^2}\,, & \omega\le 1\\ -arctg\,\dfrac{3}{\omega}-arctg\,\dfrac{4\omega-\omega^3}{1-\omega^2}\,, & \omega>1\end{cases}.$$

S3.4. (a) $H(j\omega)=\dfrac{1}{5+j\omega}$; $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{25+\omega^2}}$; $\varphi(\omega)=-arctg\,\dfrac{\omega}{5}$

(b) $y(t)=\dfrac{1}{\sqrt{29}}cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}-arctg\;0.4\right)$.

S3.5. (a) $H(j\omega)=\dfrac{5+2j\omega}{-\omega^2+2j\omega+1}$;

(b) $y(t)=5+\sqrt{29}\,cos(t+arctg\,0.4)-\sqrt{41}\,cos\left(2t-\dfrac{\pi}{2}+arctg\,\dfrac{4}{5}+arctg\,\dfrac{4}{3}\right)+$

$+2\sqrt{61}\,cos\left(3t-\pi+arctg\,\dfrac{6}{5}+arctg\,\dfrac{3}{4}\right)$.

S3.6. $x(t)=3-\sqrt{10}\,cos\left(0.5t-\dfrac{7\pi}{12}+arctg\,\dfrac{1}{2}\right)$.

S3.7. $y(t)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot cos\left(100\pi t-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{8}{\sqrt{5}}\cdot cos\left(200\pi t+\dfrac{3\pi}{4}-arctg2\right)$.

S3.8. $y(t)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}cos(40\pi t-arctg\,2)-\dfrac{4}{\sqrt{17}}cos(80\pi t-arctg\,4)$.

S3.9. $x(t)=\dfrac{2}{3}+\sqrt{2}\,cos\left(2\,f_0\pi t-\dfrac{\pi}{12}\right)+\sqrt{5}\,cos(4\,f_0\pi t+arctg2)+$

$+\dfrac{5\sqrt{10}}{3}cos(6\,f_0\pi t+\pi+arctg3)$

S3.10. $y(t)=2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot cos\left(2000\pi t-\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot cos\left(6000\pi t+\dfrac{\pi}{4}-arctg\,3\right)+$

$+\dfrac{2.5}{\sqrt{26}}\cdot cos\left(10^4\,\pi t-arctg\,5\right)$.

S3.11. (a) Se aplică relaţia de la divizorul de tensiune: $H(s)=\frac{Z_p}{Z_p+R_1}$, unde $Z_p=\frac{sL\cdot R_2}{sL+R_2}$. Rezultă: $H(s)=\frac{sLR_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2}$.

(b) $H(s)$ se scrie astfel: $H(s)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{s}{s+\tau^{-1}}$, unde $\tau=\frac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$.

Rezultă: $h(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot L^{-1}\left\{1-\frac{\tau^{-1}}{s+\tau^{-1}}\right\}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left[\delta(t)-\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)\right]$.

(c) *Metoda I*: $a(t)=L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)$;

Metoda II: $a(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau$.

(d) $y(t)=L^{-1}\{H(s)\cdot E(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s+2}\right\}=\left(1.5\cdot e^{-2t}-0.9\cdot e^{-1.2t}\right)\cdot\gamma(t)$.

S.3.12. (a) $H(s)=\frac{I_L(s)}{E(s)}=\frac{U_L(s)}{E(s)}\cdot\frac{1}{sL}$, iar $\frac{U_L(s)}{E(s)}$ este f.d.s. determinată la soluţia *S.3.11*. Rezultă: $H(s)=\frac{R_2}{L(R_1+R_2)}\cdot\frac{1}{s+\tau^{-1}}$, unde $\tau=\frac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$.

(b) $h(t)=\frac{R_2}{L(R_1+R_2)}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)$; **(c)** $a(t)=\frac{1}{R_1}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\gamma(t)$;

(d) $y(t)=0.75\left[e^{-1.2t}-e^{-2t}\right]\cdot\gamma(t)$.

S3.13. (a) $H(s)=\frac{I_c(s)}{E(s)}=\frac{U_C(s)\cdot sC}{E(s)}$, apoi se foloseşte relaţia de la divizorul de tensiune: $U_C(s)=\frac{Z_p}{Z_p+R_1}\cdot E(s)$, unde $Z_p=\frac{R_2}{1+sR_2C}$. Rezultă în final: $H(s)=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{s}{s+\tau^{-1}}$, unde $\tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$. Rezultă: $h(t)=\frac{1}{R_1}\left[\delta(t)-\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)\right]$.

(b) $a(t)=\frac{1}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)$; **(c)** $y(t)=\left[3e^{-1.5t}-2e^{-t}\right]\cdot\gamma(t)$.

S3.14. (a) $h(t)=\frac{1}{R_1R_2C}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)$, unde $\tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$;

(b) $a(t)=\frac{1}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\gamma(t)$; **(c)** $y(t)=\left(e^{-t}-e^{-1.5t}\right)\cdot\gamma(t)$.

S3.15. (a) $H(s)=\frac{I_{R2}(s)}{J(s)}$, se aplică relaţia de la divizorul de curent şi rezultă:

$H(s)=\frac{R_1}{Z_s+R_1}$, unde $Z_S=R_2+\frac{1}{sC}$. Rezultă în final: $H(s)=\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{s}{s+\tau^{-1}}$,

unde $\tau=C(R_1+R_2)$. Rezultă: $h(t)=\frac{R_1}{R_1+R_2}\left[\delta(t)-\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)\right]$;

(b) $H(s)=\frac{I_{R1}(s)}{J(s)}$, se aplică relaţia de la divizorul de curent şi rezultă:

$H(s)=\frac{sCR_2+1}{sC(R_1+R_2)+1}=\frac{1}{R_1+R_2}\left(R_2+\frac{R_1}{\tau}\cdot\frac{1}{s+\tau^{-1}}\right)$. Rezultă funcţia pondere:

$h(t)=\frac{1}{R_1+R_2}\cdot\left[R_2\cdot\delta(t)+\frac{R_1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)\right]$.

S3.16. (a) $H(s)=\frac{sL+R_2}{sL+R_1+R_2}$; $a(t)=\frac{1}{R_1+R_2}\left[R_2+R_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right]\cdot\gamma(t)$, unde

$\tau=\frac{L}{R_1+R_2}$; **(b)** $H(s)=R_1\cdot\frac{s}{s+\tau^{-1}}$; $a(t)=R_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\gamma(t)$.

S3.17. (a) Se notează cu M nodul de la intersecţia celor trei laturi care conţin rezistoarele şi respectiv condensatorul din stânga. Se aplică relaţia de la divizorul de tensiune: $U_M(s)=\frac{Z_p}{Z_p+R}\cdot E(s)$, unde $Z_p=\left(R+\frac{1}{sC}\right)||\left(\frac{1}{sC}\right)$. Apoi se aplică din nou divizorul de tensiune: $U_0(s)=\dfrac{1}{1+sRC}\cdot U_M(s)$. Rezultă în final f.d.s: $H(s)=\dfrac{1}{s^2\tau^2+3s\tau+1}$, unde $\tau=RC$. De aici rezultă amplificarea şi defazajul:

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega^4\tau^4+7\omega^2\tau^2+1}}\;;\quad \varphi(\omega)=\begin{cases}-arctg\,\dfrac{3\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}, & 0<\omega\le\dfrac{1}{\tau}\\ -\pi-arctg\,\dfrac{3\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}, & \omega>\dfrac{1}{\tau}\end{cases}.$$

(b) $u_0(t)=2+cos\left(10^3t-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

S3.18. (a) $H(s)=\dfrac{sL}{s^2RLC+sL+R}$; este un FTB. Pentru determinarea frecvenţei de rezonanţă, $H(s)$ se echivalează cu forma generală a funcţiei de sistem pentru un FTB de ordinul II:

$$H(s)=\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad \textbf{\textit{(S3.1)}}$$

unde ω_0 este frecvenţa de rezonanţă, iar ξ este factorul de amortizare. Rezultă: $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Frecvenţele de tăiere (inferioară şi superioară) rezultă punând condiţia: $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot A_{max}$; pentru *FTB*: $A_{max}=A(\omega_0)$. Rezultă ecuaţia:

$$\omega^4\cdot 10^{-28}-\omega^2\cdot 26\cdot 10^{-12}+0.25\cdot 10^6=0$$

cu soluţiile: $\omega_i=10^8\ rad/s$ şi $\omega_s=5\cdot 10^8\ rad/s$.

(b) $H(s)=\dfrac{R}{s^2RLC+sL+R}$; este un FTJ. $H(s)$ se echivalează cu forma generală a funcţiei de sistem pentru un FTJ de ordinul II:

$$H(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad \textbf{\textit{(S3.2)}}$$

de unde rezultă: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Pentru *FTJ*: $A_{max} = A(0)$, rezultă frecvenţa de tăiere: $\omega_t = \sqrt{\sqrt{34} - 3} \cdot 10^8 \ rad/s$.

(c) $H_2(s) = \dfrac{s^2 RLC}{s^2 RLC + sL + R}$; este un FTS. $H(s)$ se echivalează cu forma generală a funcţiei de sistem pentru un FTS de ordinul II:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \textit{(S3.3)}$$

Rezultă: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Pentru FTS: $A_{max} = A(\infty)$, rezultă frecvenţa de tăiere: $\omega_t = \sqrt{\sqrt{34} - 3} \cdot 10^8 \ rad/s$.

S3.19. **(a)** $H_1(s) = \dfrac{U_R(s)}{E(s)} = \dfrac{R}{sL + R}$; $H_2(s) = \dfrac{U_L(s)}{E(s)} = \dfrac{sL}{sL + R}$

(b) $A_1(\omega) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$; $\varphi_1(\omega) = -arctg\dfrac{\omega L}{R}$; $A_2(\omega) = \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$;

$\varphi_2(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - arctg\dfrac{\omega L}{R}$; **(c)** $h_1(t) = \dfrac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \cdot \gamma(t)$; $h_2(t) = \delta(t) - \dfrac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \cdot \gamma(t)$;

(d) $a_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) \cdot \gamma(t)$; $a_2(t) = e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \cdot \gamma(t)$;

(e) $u_L(t) = 0.25 \cdot \left[5 \cdot e^{-10^3 t} - e^{-2\cdot 10^2 t}\right] \cdot \gamma(t)$.

S3.20. **(a)** $H(s) = \dfrac{R}{s^2 RLC + s\left(R^2 C + L\right) + 2R}$;

(b) $A(\omega) = \dfrac{R}{\sqrt{\left(2R - \omega^2 RLC\right)^2 + \omega^2 \left(R^2 C + L\right)^2}}$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-arctg\,\dfrac{\omega\left(R^2C+L\right)}{R\left(2-\omega^2LC\right)}, & 0<\omega<\sqrt{\dfrac{2}{LC}}\\ -\pi-arctg\,\dfrac{\omega\left(R^2C+L\right)}{R\left(2-\omega^2LC\right)}, & \omega>\sqrt{\dfrac{2}{LC}}\end{cases}$$

S3.21. Funcţia de autocorelaţie se determină cu relaţia *(3.27)*.
Cazul I: $\tau<0$ (*Figura S3.21* – graficul din mijloc):

Funcţia $R_{xx}\neq 0$ doar dacă $1+\tau>-1$. În acest caz, rezultă:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-1}^{1+\tau}X_0^2\,dt=X_0^2(2+\tau)$$

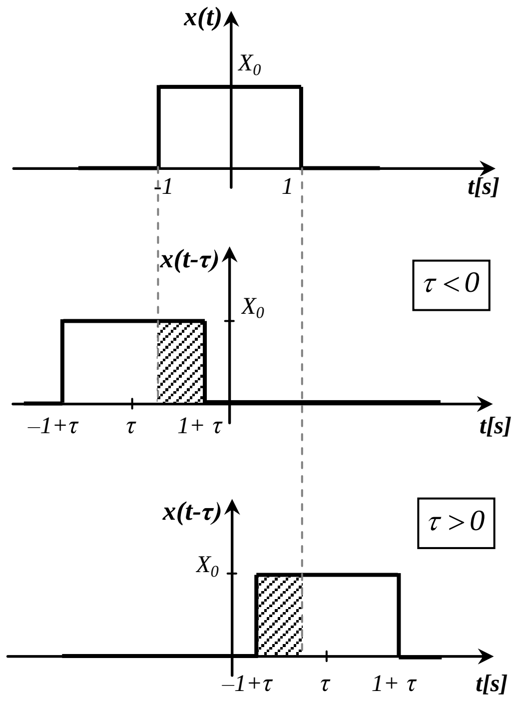


Figura S3.21

Cazul II: $\tau>0$ (*Figura S3.21* – graficul de jos)

Funcţia $R_{xx} \neq 0$ doar dacă $-1+\tau<1$. În acest caz, rezultă:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-1+\tau}^{1} X_0^2\, dt = X_0^2(2-\tau)$$

În concluzie, funcţia de autocorelaţie va avea expresia:

$$R_{xx}(\tau)=\begin{cases} X_0^2(2+\tau), & -2<\tau\leq 0 \\ X_0^2(2-\tau), & 0<\tau<2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

S3.22. Răspunsului $y(t)$ al unui SALI caracterizat prin $h(t)$ la excitaţia $x(t)$ se evaluează cu relaţia *(3.28)*. Se consideră următoarele trei cazuri (*Figura S3.22*):

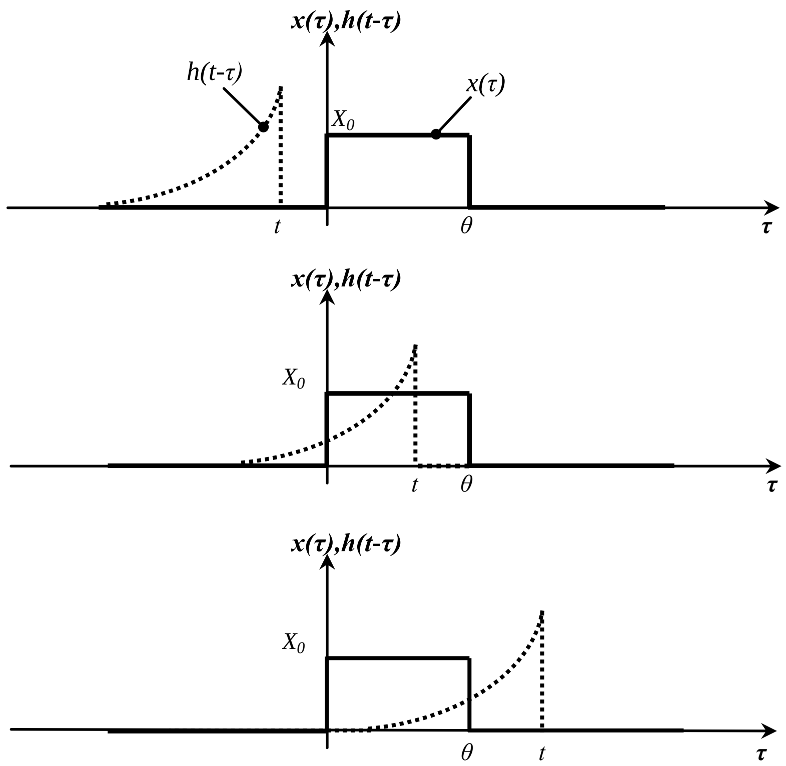


Figura S3.22

- Pentru $t<0$, rezultă: $y(t)=0$
- Pentru $0<t<\theta$, rezultă: $y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{X_0}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
- Pentru $t>\theta$, rezultă: $y(t)=\int_0^\theta x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{X_0}{a}\cdot e^{-at}\left(e^{a\theta}-1\right)$

Deci răspunsul este:

$$y(t)=\begin{cases}\frac{X_0}{a}\left(1-e^{-at}\right) & , \quad 0<t<\theta \\ \frac{X_0}{a}\cdot e^{-at}\left(e^{a\theta}-1\right) & , \quad t>\theta\end{cases}$$

S3.23. $y(t)=\begin{cases}aX_0\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right) & , \quad 0<t<\theta \\ aX_0\cdot e^{-\frac{t}{a}}\left(e^{\frac{\theta}{a}}-1\right) & , \quad t>\theta\end{cases}$

S3.24. $y(t)=\begin{cases}X_0\left(1-e^{-at}\right) & , \quad 0<t<\theta \\ X_0\cdot e^{-at}\left(e^{a\theta}-1\right) & , \quad t>\theta\end{cases}$

S3.25. Semnalul periodic de la intrare se poate scrie: $x_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t-kT)$, unde $x(t)$ reprezintă descrierea pe o perioadă a semnalului $x_T(t)$ (*Figura S3.25*).

Răspunsul permanent al sistemului la excitaţia periodică $x_T(t)$ în intervalul $(0,T)$ se determină cu relaţia *(3.29)*. Avem succesiv:

$$x(t)=2\gamma(t)-2\gamma(t-2) \quad \Rightarrow \quad X(s)=2\cdot\frac{1-e^{-2s}}{s}$$

$$L^{-1}\{X(s)\cdot H(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.5}-\frac{1}{s+0.5}\cdot e^{-2s}\right\}=e^{-\frac{t}{2}}\cdot\gamma(t)-e^{-\frac{t-2}{2}}\cdot\gamma(t-2)$$

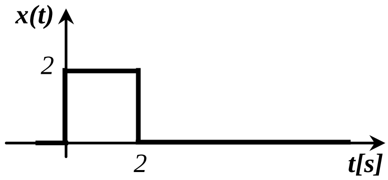


Figura S3.25

Deoarece *H(s)* are un singur pol $p_1 = -0.5$, suma reziduurilor în polii lui $H(s)$ va conţine un singur termen. Rezultă:

$$\sum_{\substack{polii\\ H(s)}} rez\left\{\frac{X(s)H(s)}{1-e^{-sT}}\cdot e^{st}\right\} = \underset{p_1}{rez}\left\{\frac{X(s)H(s)}{1-e^{-sT}}\cdot e^{st}\right\} == \lim_{s\to -0.5}\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}\cdot e^{st} = \frac{e^{-0.5t}}{1+e}$$

Rezultă expresia finală a răspunsului permanent a circuitului:

$$y_p(t) = \begin{cases} \dfrac{e}{1+e}e^{-0.5\,t}\ ; & 0<t<2 \\ -\dfrac{e^2}{1+e}e^{-0.5\,t}\ ; & 2<t<4 \end{cases}$$

S3.26. $y_p(t) = \begin{cases} \dfrac{2e^2}{1+e^2}e^{-2\,t}\ ; & 0<t<1 \\ -\dfrac{2e^4}{1+e^2}e^{-2\,t}\ ; & 1<t<2 \end{cases}$

S3.27. $y_p(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{0.5}}{1+e^{0.5}}e^{-0.5\,t}\ ; & 0<t<1 \\ -\dfrac{e}{1+e^{0.5}}e^{-0.5\,t}\ ; & 1<t<2 \end{cases}$

S3.28. $y_p(t) = \begin{cases} \dfrac{2e^4}{1+e^4}e^{-2\,t}\ ; & 0<t<2 \\ -\dfrac{2e^8}{1+e^4}e^{-2\,t}\ ; & 2<t<4 \end{cases}$

S3.29. vezi *Figura S3.29.*

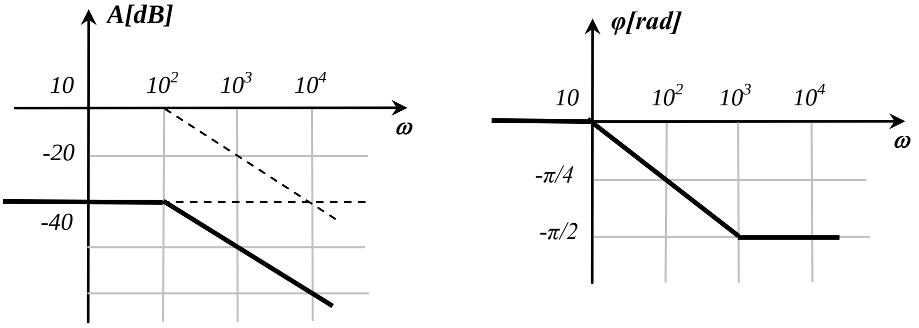


Figura S3.29

S3.30. vezi *Figura S3.30*.

S3.31. vezi *Figura S3.31*.

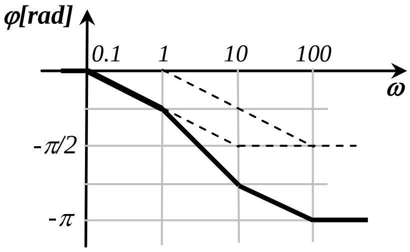


Figura S3.30

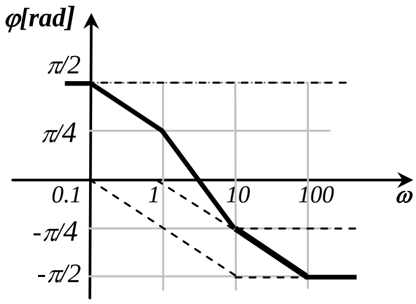


Figura S3.31

S3.32. vezi *Figura S3.32*.

S3.33. vezi *Figura S3.33*.

S3.34. vezi *Figura S3.34*.

S3.35. vezi *Figura S3.35*.

S3.36. vezi *Figura S3.36*

S3.37. vezi *Figura S3.37*.

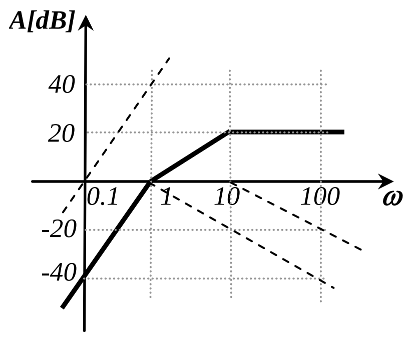


Figura S3.32

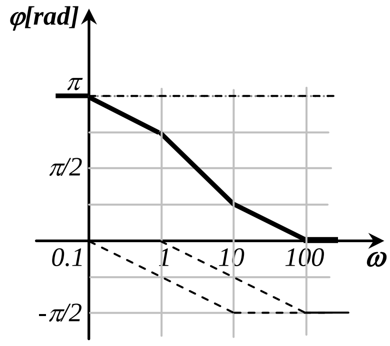


Figura S3.33

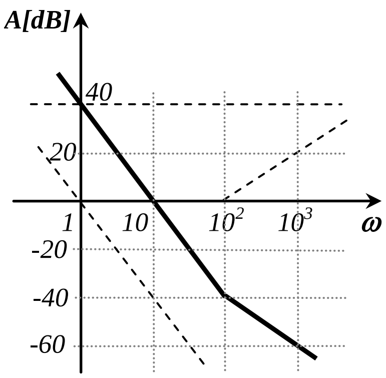


Figura S3.34

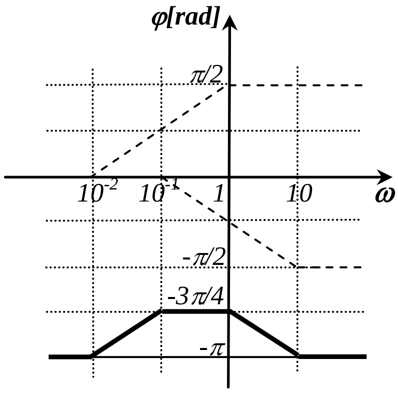


Figura S3.35

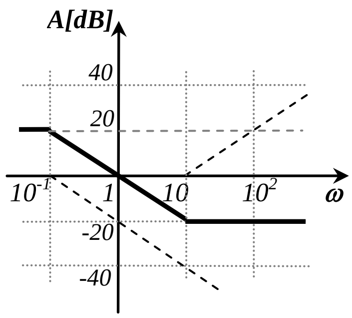


Figura S3.36

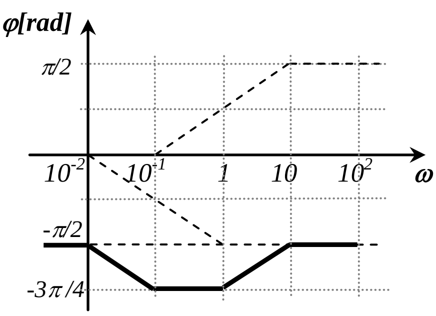


Figura S3.37

S3.38. vezi *Figura S3.38.*

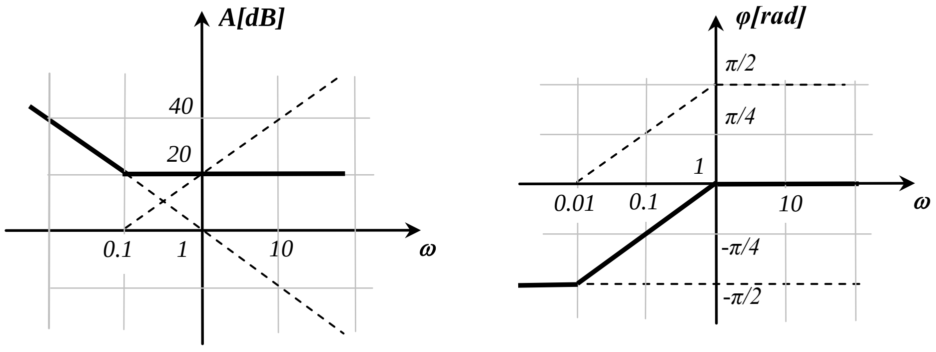


Figura S3.38

S3.39. vezi *Figura S3.39.*

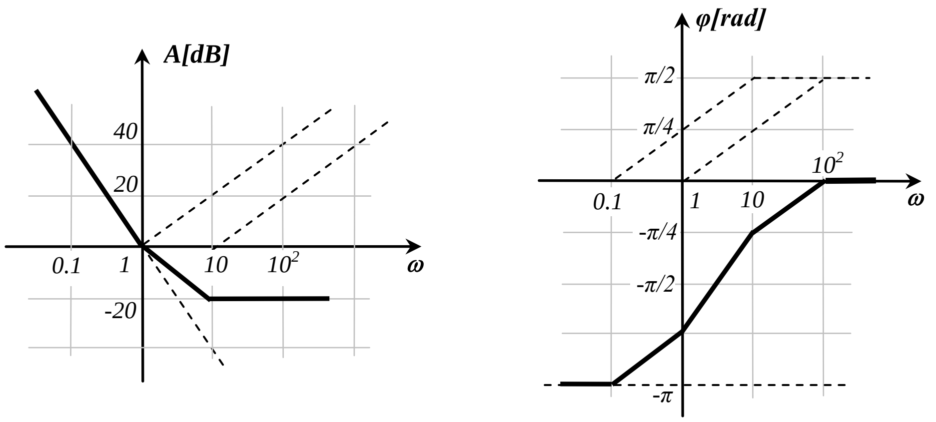


Figura S3.39

S3.40. vezi *Figura S3.40;*

$A_{dB}(10) = 20\ dB$, $\varphi(1) = -0.0031\pi$, $\varphi(100) = -0.997\pi$

S3.41. **(a)** $H_1(s) = \dfrac{1}{1 + s \cdot 10^{-2}}$; $H_2(s) = \dfrac{s \cdot 10^{-2}}{1 + s \cdot 10^{-2}}$. **(b)** vezi *Figura S3.41.*

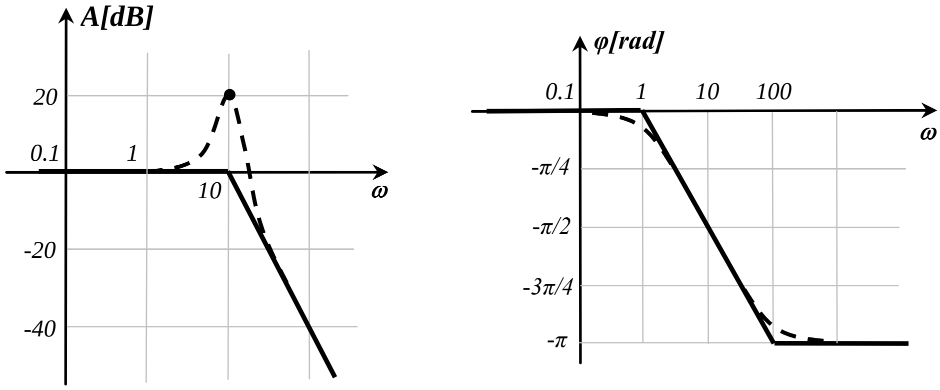


Figura S3.40

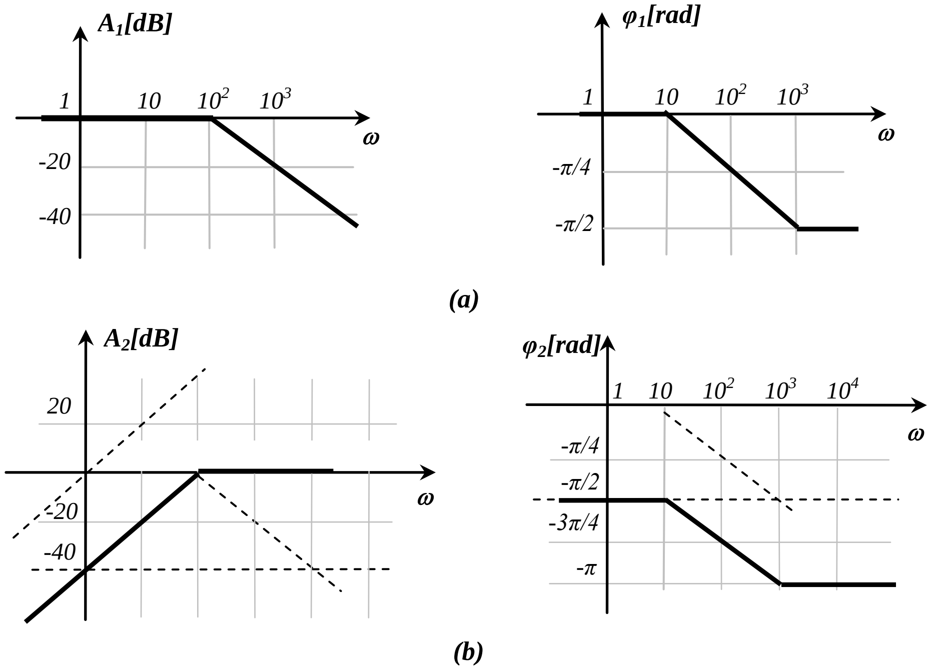


Figura S3.41

S3.42. Vezi *Figura S3.42*: se trasează asimptotele (cu linie continuă); se determină punctele prin care trece caracteristica reală (trasată cu line întreruptă):

$$A(\omega)=\frac{10^4}{\left|10^4-\omega^2\right|}\ ;\quad A\left(10^4\right)=\infty\ ;\ \varphi(\omega)=arg\left\{\frac{10^4}{10^4-\omega^2}\right\}=\begin{cases}0\ , & \text{dacă}\ \ \omega<10^2\\ -\pi\ , & \text{dacă}\ \ \omega>10^2\end{cases}.$$

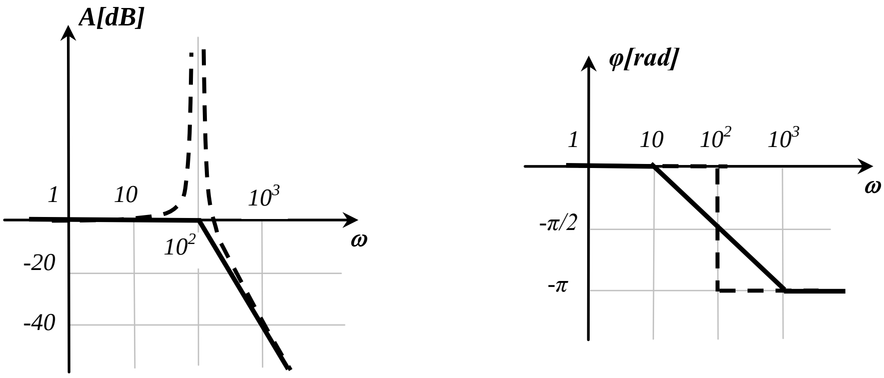


Figura S3.42

S3.43. vezi *Figura S3.43.*

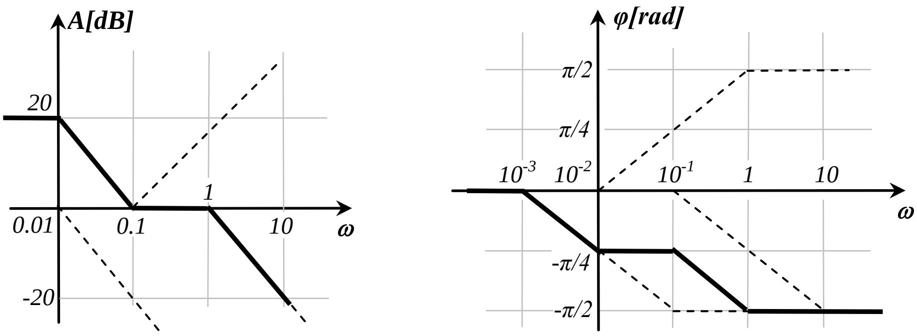


Figura S3.43

S3.44. vezi *Figura S3.44;*

$$H(s)=10^{-3}\cdot\frac{s^2+s+10^{-2}}{10^{-2}}\quad\Rightarrow\quad\omega_0=10^{-1}\,;$$

$$A_{dB}\left(10^{-1}\right)=-40\ dB\ ,\ \varphi\left(10^{-2}\right)=0.2516\pi\ ,\quad\varphi(1)=-0.7483\pi$$

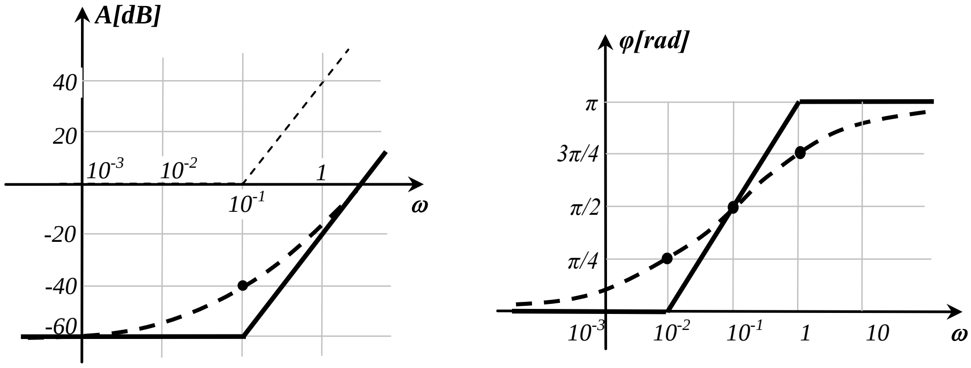


Figura S3.44

S3.45. vezi *Figura S3.45.*

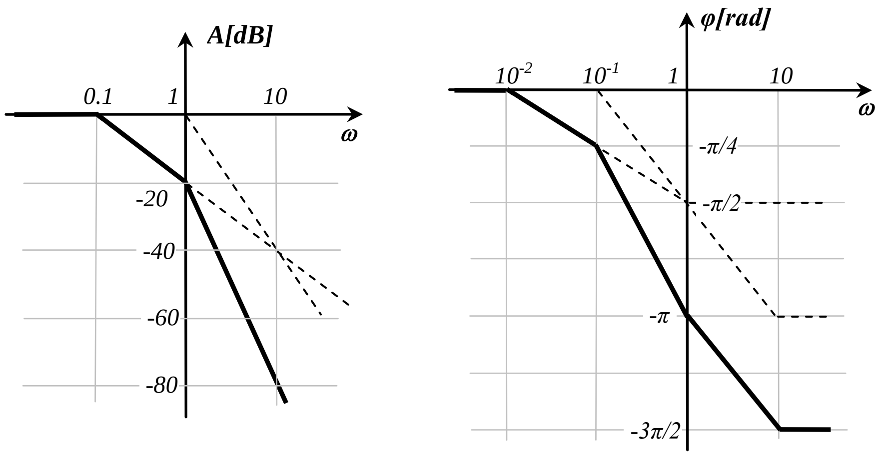


Figura S3.45

S3.46. **(a)** Amplificarea este nulă până la frecvenţa $\omega = 10^2$, apoi creşte cu $20\,dB/dec$, ceea ce corespunde unei f.d.s. de tipul $\tau s + 1$, cu $\tau = 10^{-2}$. După $\omega = 10^4$ urmează o creştere cu $40\,dB/dec$, deci la panta iniţială se mai adaugă o creştere de $20\,dB/dec$, ceea ce corespunde unei f.d.s. tot de tipul $\tau s + 1$, dar cu $\tau = 10^{-4}$. În concluzie, $H(s) = \left(10^{-2}s + 1\right)\left(10^{-4}s + 1\right)$.

(b) Pentru $\omega < 10$, amplificarea creşte cu $20\,dB/dec$, trecând prin $\omega = 1$, ceea ce corespunde unei f.d.s. de tipul s. După $\omega = 10$, amplificarea e constantă, acest lucru însemnând că începând cu această frecvenţă, la panta iniţială se adaugă o pantă de $-20\,dB/dec$, ceea ce corespunde unei f.d.s. de tipul $\frac{1}{\tau s+1}$, cu $\tau = 10^{-1}$. Din $\omega = 10^3$, amplificarea scade cu $20\,dB/dec$, corespunzător unei f.d.s. de tipul $\frac{1}{\tau s+1}$, cu $\tau = 10^{-3}$. Rezultă în concluzie: $H(s) = \frac{s}{(0.1s+1)\left(10^{-3}s+1\right)}$.

(c) Amplificarea este constantă şi egală cu $-40\ dB$ până la $\omega = 0.1$, deci este vorba de o f.d.s. de tip constantă : $H_0 = \frac{1}{100}$ ($20\lg H_0 = -40\ dB$). De la $\omega = 0.1$ are loc o creştere cu $40\,dB/dec$, ceea ce corespunde unei f.d.s. de tipul $(\tau s+1)^2$, cu $\tau = 10$. Pentru $\omega > 1$, amplificarea este nulă, deci la panta iniţială de $40\,dB/dec$ s-a adăugat o scădere de $40\,dB/dec$, ceea ce corespunde unei f.d.s. de tipul $\frac{1}{(\tau s+1)^2}$, cu $\tau = 1$. Rezultă deci: $H(s) = \frac{(10s+1)^2}{100(s+1)^2}$.

(d) Amplificarea scade cu o pantă de $-20\,dB/dec$, corespunzător unei f.d.s. de tipul $\frac{1}{s}$. Nu trece însă prin $\omega > 1$, ci cu o decadă înainte, prin $\omega > 0.1$, deci dreapta corespunzătoare f.d.s. $\frac{1}{s}$ a coborât cu $20\ dB$, ceea ce înseamnă o înmulţire a f.d.s. cu 10^{-1} ($20\lg 10^{-1} = -20\ dB$). Pentru $\omega > 0.1$, amplificarea e constantă, ceea ce înseamnă că la panta iniţială de $-20\,dB/dec$ s-a adăugat o creştere de $20\,dB/dec$, corespunzător unei f.d.s. de tipul $\tau s+1$, cu $\tau = 10$. Rezultă: $H(s) = \frac{10s+1}{10s}$.

Capitolul 4
SEMNALE EŞANTIONATE

4.1. Breviar teoretic

Un semnal eşantionat se obţine prin extragerea de eşantioane din semnalul analogic. În cazul eşantionării *ideale*, durata unui eşantion tinde la zero.

Eşantionarea ideală poate fi reprezentată matematic prin relaţia:

$$x_T(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) \qquad \textbf{\textit{(4.1)}}$$

unde $x_T(t)$ este semnalul eşantionat, $x(t)$ este semnalul analogic, iar $\delta_T(t)$ este semnalul delta-periodic.

<u>Spectrul semnalului eşantionat</u>

Spectrul semnalului eşantionat ideal este dat de relaţia:

$$X_T(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - nf_p\right) \qquad \textbf{\textit{(4.2)}}$$

unde $X(f)$ este transformata Fourier a semnalului analogic, f_p este frecvenţa de eşantionare şi $T = \dfrac{1}{f_p}$.

Teorema eşantionării: pentru a fi posibilă reconstituirea semnalului eşantionat din semnalul analogic, frecvenţa de eşantionare trebuie să fie mai mare decât dublul frecvenţei maxime din spectrul semnalului analogic.

<u>Reconstituirea semnalului analogic</u>

Reconstituirea semnalului analogic din semnalul eşantionat se poate face prin *extrapolare* de ordin zero sau unu.

Extrapolatorul de ordinul zero realizează o aproximare în trepte a semnalului analogic şi lucrează pe baza relaţiei:

$$x_r(t) = x(kT) \qquad \textbf{\textit{(4.3)}}$$

pentru $t \in \left[kT,(k+1)T\right)$.

Extrapolatorul de ordinul unu lucrează pe baza relaţiei:

$$x_r(t) = x(kT) + \frac{1}{T}\left[x(kT) - x\left[(k-1)T\right]\right]\cdot(t-kT) \qquad \textbf{\textit{(4.4)}}$$

pentru $t \in \left[kT,(k+1)T\right)$.

Semnalul reconstituit este dat de expresia:

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)Sa\left[\pi f_p(t-kT)\right] \qquad \textbf{\textit{(4.5)}}$$

unde termenii sumei reprezintă contribuţiile eşantioanelor de ordin *k*.

4.2. Enunţuri

P4.1. Reprezentaţi semnalul $x(t) = sin(2000\pi t)$ eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare *8 kHz*.

P4.2. Reprezentaţi semnalul: $x(t) = 2cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare *8 Hz*.

P4.3. Ce condiţie trebuie să îndeplinească frecvenţa de eşantionare pentru ca semnalul $x(t) = 3 - 5cos\left(2000\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 3cos(2500\pi t)$ să poată fi reconstituit din eşantioanele sale?

P4.4. Ce condiţie trebuie să îndeplinească frecvenţa de eşantionare pentru ca semnalul $x(t) = 2cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + cos(2000\pi t - \pi) - 3cos\left(1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ să poată fi reconstituit din eşantioanele sale?

P4.5. Semnalul $x(t)=cos(4\pi t)+2cos(2\pi t)$ este eşantionat ideal cu perioada $200\ ms$. Reprezentaţi spectrul de amplitudini al semnalului.

P4.6. Semnalul $x(t)=\sum_{n=0}^{4}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot cos(2000n\pi t)$ este eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare f_p.

(a) În ce domeniu de frecvenţe se poate afla f_p astfel încât semnalul $x(t)$ să poată fi reconstituit fără distorsiuni din semnalul eşantionat?

(b) Pentru $f_p=9kHz$, reprezentaţi spectrul semnalului eşantionat.

P4.7. Se consideră schema bloc din *Figura P4.7*, unde:

$$x(t)=2+2\cdot cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+3\cdot cos\left(300\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

(a) Reprezentaţi spectrul semnalului $y(t)$.

(b) Scrieţi expresia semnalului $y(t)$.

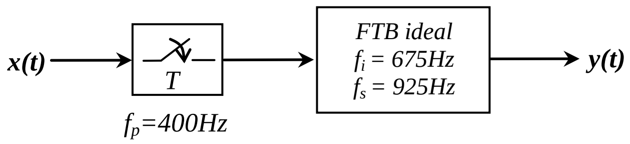


Figura P4.7

P4.8. Semnalul $x(t)$ este eşantionat cu frecvenţa f_p şi apoi este trecut printr-un FTJ cu frecvenţa de tăiere f_t. Scrieţi expresia semnalului de la ieşirea filtrului, dacă se consideră că:

(a) $x(t)=cos\left(2000\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2cos\left(4000\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$, $f_p=5\ kHz$, $f_t=4.5\ kHz$.

(b) $x(t)=2+cos\left(20\pi t-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(30\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+cos(40\pi t)$, $f_p=70\ Hz$, $f_t=75\ Hz$

P4.9. Semnalul $x(t)$ este eşantionat cu frecvenţa f_p şi apoi este trecut printr-un FTB cu frecvenţele de tăiere f_i şi f_s. Scrieţi expresia semnalului $y(t)$ de la ieşirea filtrului, dacă se consideră că:

(a) $x(t) = cos(\pi t) + 2cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 3cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_p = 6.5\ Hz$, $f_i = 5.7\ Hz$, $f_s = 7.2\ Hz$.

(b) $x(t) = 1 - 3cos(4000\pi t) + 2cos(6000\pi t) + cos\left(10^4 \pi t\right)$, $f_p = 11\ kHz$, $f_i = 10\ kHz$, $f_s = 13.5\ kHz$.

P4.10. Fie semnalul: $x(t) = Sa(200\pi t) + 0.5 \cdot Sa^2(100\pi t)$.

(a) Determinaţi frecvenţa minimă de eşantionare, astfel încât semnalul $x(t)$ să poată fi reconstituit fără distorsiuni din eşantioanele sale.

(b) Reprezentaţi transformata Fourier a semnalului $x_T(t)$, obţinut prin eşantionare ideală cu frecvenţa de *400 Hz*.

P4.11. În *Figura P4.11* este reprezentat un semnal eşantionat real, cu durata foarte mică a eşantioanelor. Semnalul este aplicat unui extrapolator. Reprezentaţi semnalul de la ieşirea extrapolatorului, dacă extrapolatorul este de ordinul: **(a)** zero; **(b)** unu.

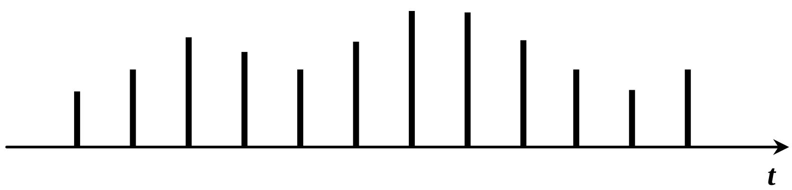


Figura P4.11

P4.12. Un semnal analogic este eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare *10 kHz*. Eşantionul de ordinul *20* are valoarea *0.6*. Scrieţi contribuţia acestui eşantion la formarea semnalului reconstituit prin filtrare ideală (interpolare).

P4.13. Un semnal analogic este eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare $100\ kHz$. Eşantionul de ordinul *10* are valoarea *3V*. Scrieţi contribuţia acestui eşantion la formarea semnalului reconstituit prin interpolare.

P4.14. Un semnal analogic este eşantionat ideal. Eşantionul de ordinul *10* are valoarea *0.3V* şi apare la momentul $t_{10} = 10\ ms$. Scrieţi contribuţia acestui eşantion la formarea semnalului reconstituit prin interpolare.

P4.15. Un semnal analogic este eşantionat ideal. Eşantionul de ordinul *100* are valoarea *0.5A* şi apare la momentul $t_{100} = 10\ ms$. Scrieţi contribuţia acestui eşantion la formarea semnalului reconstituit prin interpolare.

P4.16. Două dintre eşantioanele recepţionate succesiv sunt: $x(2) = 5$ şi $x(3) = 3$. Scrieţi contribuţia acestor eşantioane la formarea semnalului reconstituit prin interpolare.

P4.17. Trei dintre eşantioanele recepţionate succesiv sunt: $x(0.1) = 5$, $x(0.2) = 5.1$ şi respectiv $x(0.3) = 5.2$. Scrieţi contribuţia acestor eşantioane la formarea semnalului reconstituit prin filtrare ideală.

P4.18. Patru dintre eşantioanele recepţionate succesiv sunt: $x(1200) = 2 \cdot 10^3$, $x(1400) = 1.8 \cdot 10^3$, $x(1600) = 19 \cdot 10^3$ şi respectiv $x(1800) = 10^3$. Scrieţi contribuţia acestor eşantioane la formarea semnalului reconstituit prin filtrare ideală.

4.3. Indicaţii şi soluţii

S4.1. Se desenează semnalul analogic (cu linie întreruptă în *Figura S4.1*), apoi se eşantionează, distanţa dintre eşantioane fiind $\frac{1}{f_p} = 0.125\ ms$. Eşantioanele sunt reprezentate cu linie continuă în figură.

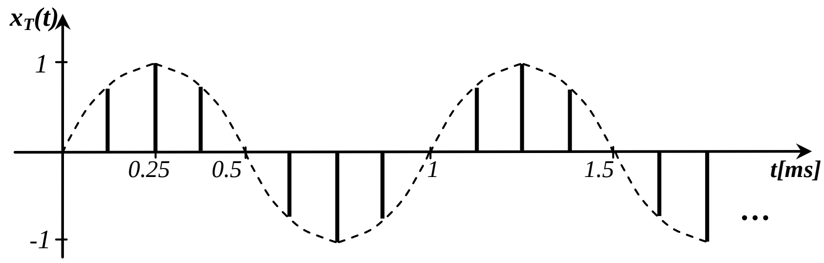


Figura S4.1

S4.2. Vezi *Figura S4.2*. Distanţa între eşantioane este $\frac{1}{f_p} = 0.125\ s$.

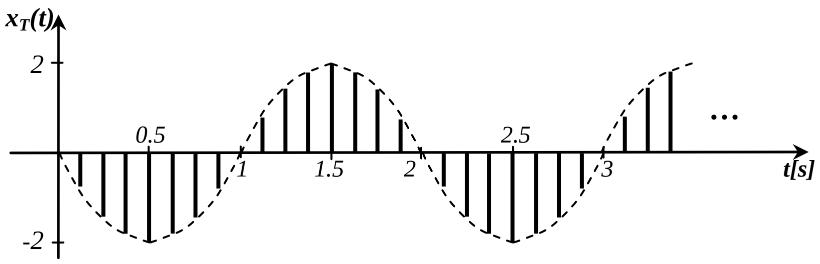


Figura S4.2

S4.3. $f_p > 2.5\ kHz$.

S4.4. $f_p > 4\ kHz$.

S4.5. Prin eşantionare ideală, spectrul bilateral al semnalului analogic este deplasat în jurul multiplilor frecvenţei de eşantionare ($f_p = \frac{1}{200\,ms} = 5\,Hz$) şi ponderat cu f_p, conform cu relaţia *(4.2)*. Spectrul semnalului eşantionat este ilustrat în *Figura S4.5*.

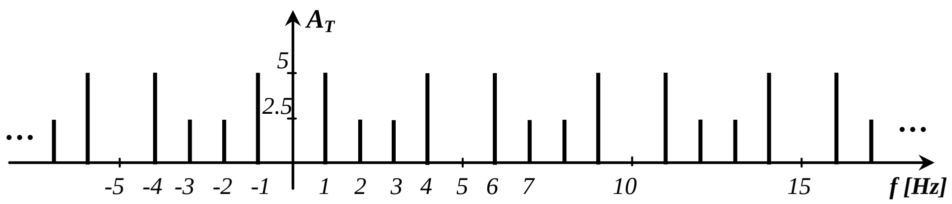


Figura S4.5

S4.6. (a) $f_p > 8kHz$. **(b)** Vezi *Figura S4.6*.

S4.7. (a) Vezi *Figura S4.7*.

(b) $y(t) = 2\left[400\cos\left(1400\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + 800\cos\left(1600\pi t\right) + 400\cos\left(1800\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

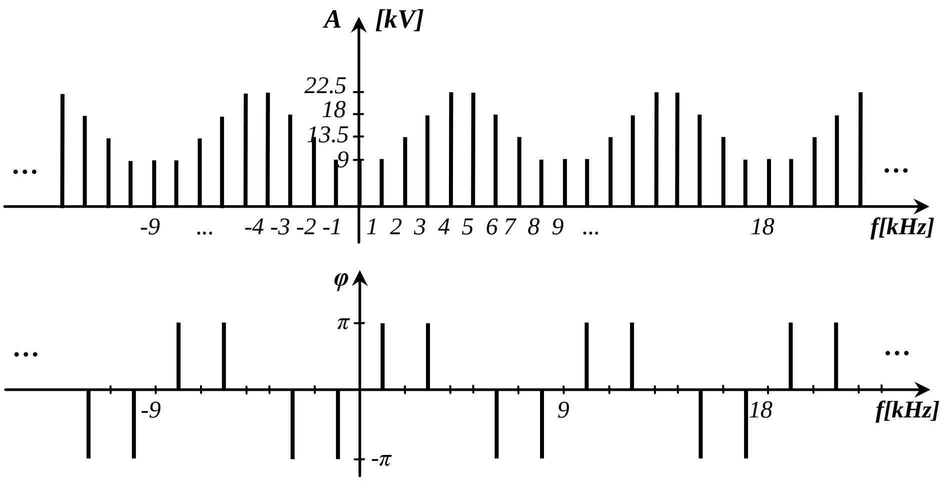


Figura S4.6

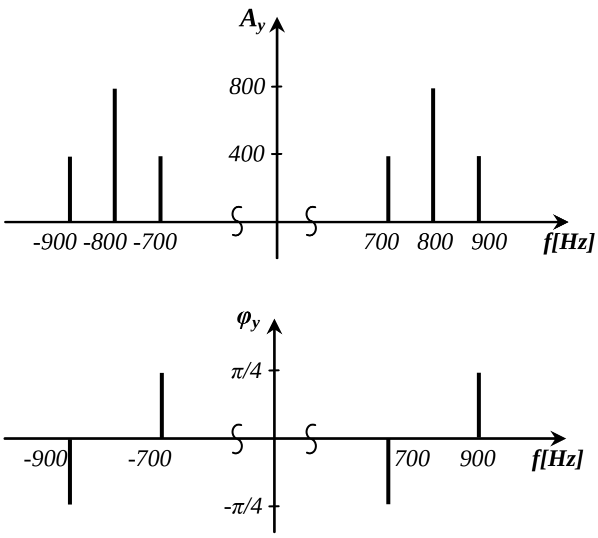


Figura S4.7

S4.8. (a) $y(t)=5\cdot 10^3 \cos\left(2000\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+10^4 \cos\left(4000\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+$

$$+10^4 \cos\left(6000\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+5\cdot 10^3 \cos\left(8000\pi t-\frac{\pi}{2}\right).$$

(b) $y(t)=70\,cos\left(20\pi t-\dfrac{\pi}{3}\right)+70\,cos\left(30\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)+70\,cos(40\pi t)+70\,cos(100\pi t)+$

$$+70\,cos\left(110\pi t-\frac{\pi}{4}\right)+70\,cos\left(120\pi t+\frac{\pi}{3}\right).$$

S4.9. (a) $y(t)=6.5\left[cos(12\pi t)+cos(14\pi t)\right]$;

(b) $y(t)=2\cdot 10^3\left[11\,cos\left(22\cdot 10^3\pi t\right)+16.5\,cos\left(26\cdot 10^3\pi t+\pi\right)\right].$

S4.10. (a) $f_p > 200Hz$ **; (b)** Vezi *Figura S4.10*.

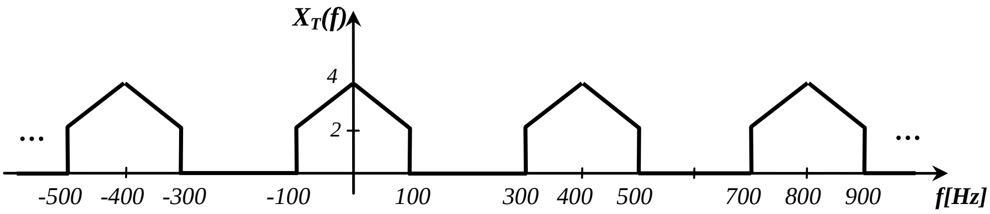


Figura S4.10

S4.11. (a) În cazul extrapolatorului de ordin zero, semnalul reconstituit este constant între citirea eşantioanelor şi egal cu valoarea eşantionului citit, până la sosirea eşantionului următor, conform cu relaţia *(4.3)* (vezi *Figura S4.11.a*: eşantioanele sunt cu linie întreruptă, semnalul reconstituit – cu linie continuă).

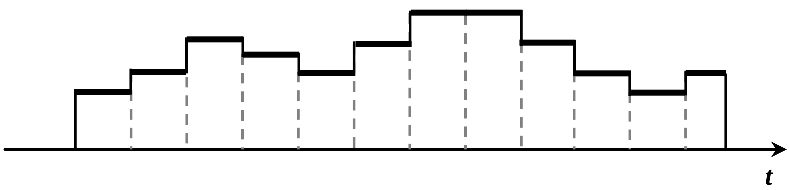


Figura S4.11.a

(b) În cazul extrapolatorului de ordin unu, valoarea semnalului reconstituit între două eşantioane este egal cu prelungirea dreptei care uneşte eşantioanele anterioare, conform cu relaţia *(4.4)*. Semnalul reconstituit este ilustrat în *Figura S4.11.b* (cu linie continuă).

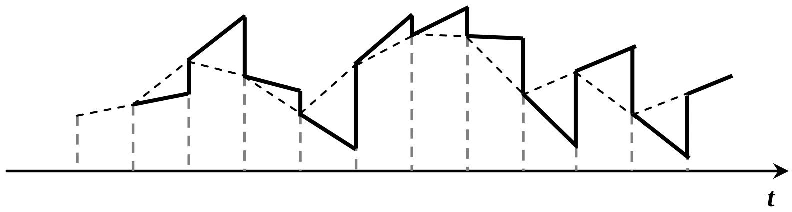


Figura S4.11.b

S4.12. Semnalul reconstituit este dat de expresia *(4.5)*. Contribuţia eşantionului de ordin $k=20$ va fi: $0.6\cdot Sa\left[\pi 10^4\left(t-2\cdot 10^{-3}\right)\right]$.

S4.13. $x_r(t)=3\cdot Sa\left[10^5\pi\left(t-10^{-4}\right)\right][V]$.

S4.14. $t_{10}=kT \;\Rightarrow\; T=\dfrac{t_{10}}{k}=1ms \;\Rightarrow\; f_p=1kHz$; semnalul reconstituit rezultă: $x_r(t)=0.3\cdot Sa\left[10^3\pi(t-0.01)\right][V]$.

S4.15. $t_{100}=kT \;\Rightarrow\; T=0.1ms \;\Rightarrow\; f_p=10kHz$; semnalul reconstituit rezultă: $x_r(t)=0.5\cdot Sa\left[10^4\pi\left(t-10^{-2}\right)\right]\;[A]$.

S4.16. Cele două eşantioane sunt succesive, deci perioada de eşantionare este diferenţa între momentele în care apar eşantioanele: $T=1s \;\Rightarrow\; f_p=1Hz$. Rezultă semnalul reconstituit: $x_r(t)=5\cdot Sa\left[\pi(t-2)\right]+3\cdot Sa\left[\pi(t-3)\right]$.

S4.17. $T=10^{-1}s \;\Rightarrow\; f_p=10Hz$;

$$x_r(t)=5Sa\left[10\pi(t-0.1)\right]+5.1Sa\left[10\pi(t-0.2)\right]+5.2Sa\left[10\pi(t-0.3)\right].$$

S4.18. $T=200s \;\Rightarrow\; f_p=0.005Hz$;

$$x_r(t)=2\cdot 10^3 Sa\left[0.005\pi(t-1200)\right]+1.8\cdot 10^3 Sa\left[0.005\pi(t-1400)\right]+$$
$$+19\cdot 10^3 Sa\left[0.005\pi(t-1600)\right]+10^3 Sa\left[0.005\pi(t-1800)\right].$$

Capitolul 5
SEMNALE MODULATE

5.1. Breviar teoretic

Semnalul modulat în amplitudine (MA)

Expresia semnalului MA:

$$x_{MA}(t) = X_p\left[1 + m \cdot x_m(t)\right]\cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) \qquad \textbf{(5.1)}$$

unde: $X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right)$ reprezintă *semnalul purtător (purtătoarea)*, $x_m(t)$ este *semnalul modulator (modulatoarea)*, iar *m* este *gradul de modulaţie*, cu condiţia ca $min\left\{x_m(t)\right\} = -1$.

Observaţii:

- dacă $min\left\{x_m(t)\right\} \neq -1$, se face mai întâi o *normare în amplitudine* a semnalului modulator ;
- pentru a evita apariţia supramodulaţiei (întrepătrunderea anvelopelor), este necesar ca gradul de modulaţie să fie subunitar: $m \leq 1$.

Dacă semnalul modulator este armonic:

$$x_m(t) = cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right) \qquad \textbf{(5.2)}$$

atunci expresia semnalului MA se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} x_{MA}(t) = X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) + \frac{mX_p}{2}\cos\left[2\pi\left(f_p + f_m\right)t + \varphi_p + \varphi_m\right] + \\ + \frac{mX_p}{2}\cos\left[2\pi\left(f_p - f_m\right)t + \varphi_p - \varphi_m\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Banda de frecvenţă ocupată de semnalul MA este egală cu dublul benzii de bază (banda de bază reprezintă banda semnalului modulator):

$$B_{MA} = 2B_m \qquad \textbf{(5.4)}$$

Semnalul modulat în amplitudine cu bandă laterală dublă (BLD)

Semnalul BLD se obţine din semnalul MA prin suprimarea purtătoarei. Rezultă *expresia* semnalului BLD:

$$x_{BLD}(t) = m \cdot x_m(t) \cdot X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) \tag{5.5}$$

Observaţie: la modulaţia BLD, anvelopele sunt tot timpul întrepătrunse, deci nu se mai pune problema supramodulaţiei; prin urmare, *m* nu mai este necesar să fie subunitar şi nici modulatoarea nu mai trebuie să aibă minimul egal cu *–1*.

Dacă semnalul modulator este armonic: $x_m(t) = X_m \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$, atunci expresia semnalului BLD se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} x_{BLD}(t) = & \frac{mX_pX_m}{2}\cos\left[2\pi\left(f_p + f_m\right)t + \varphi_p + \varphi_m\right] + \\ & + \frac{mX_pX_m}{2}\cos\left[2\pi\left(f_p - f_m\right)t + \varphi_p - \varphi_m\right] \end{aligned} \tag{5.6}$$

Banda de frecvenţă ocupată de semnalul BLD este egală cu dublul benzii de bază:

$$B_{BLD} = 2B_m \tag{5.7}$$

Semnalul modulat în amplitudine cu bandă laterală unică (BLU)

Semnalul BLU se obţine din semnalul BLD prin suprimarea uneia dintre benzile laterale. Semnalul BLU se numeşte BLU_S (cu bandă laterală *superioară*), dacă se suprimă banda inferioară, sau BLU_I (cu bandă laterală *inferioară*), dacă se suprimă banda superioară.

Banda ocupată de semnalul BLU este egală cu banda de bază:

$$B_{BLU} = B_m \tag{5.8}$$

Alte procedee speciale ale modulaţiei în amplitudine

Semnalul modulat polar (MPO):

$$x_{MPO}(t) = x_{m1}(t) + x_{m2}(t) + \left[2 + x_{m1}(t) - x_{m2}(t)\right]\cos\left(2\pi f_{sp} t\right) \tag{5.9}$$

Semnalul dublu modulat în amplitudine (DMA):

$$x_{DMA}(t) = X_p\left\{1 + m_2\left[1 + m_1\cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right]\cos\left(2\pi f_{sp} t\right)\right\} \cdot \cos\left(2\pi f_p t\right) \tag{5.10}$$

Semnalul dublu modulat în cuadratură (DMC):

$$x_{DMC}(t) = X_p\left[1 + m_1 \cdot x_{m1}(t)\right]cos\left(2\pi f_{sp}t\right) + X_p\left[1 + m_2 \cdot x_{m2}(t)\right]sin\left(2\pi f_{sp}t\right) \tag{5.11}$$

Semnalul modulat în frecvenţă (MF)

Expresia semnalului MF:

$$x_{MF}(t) = X_p\, cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + 2\pi \cdot \int g_m(t)dt\right] \tag{5.12}$$

unde: $X_p\, cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right)$ este semnalul purtător, iar $g_m(t)$ este o funcţie de semnalul modulator.

Dacă semnalul modulator este *armonic*: $cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$, atunci semnalul MF are expresia:

$$x_{MF}(t) = X_p\, cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta \cdot sin\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right] \tag{5.13}$$

unde β se numeşte *indice de modulaţie* şi este egal cu raportul dintre deviaţia de frecvenţă şi frecvenţa modulatoare:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \tag{5.14}$$

Pentru semnalele MF de *bandă îngustă* ($\beta < 0.4$), se poate face aproximarea:

$$\begin{aligned} x_{MF}(t) \cong\ & X_p \cdot cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) + \frac{\beta}{2} X_p \cdot cos\left[2\pi\left(f_p + f_m\right)t + \varphi_p + \varphi_m\right] - \\ & - \frac{\beta}{2} X_p \cdot cos\left[2\pi\left(f_p - f_m\right)t + \varphi_p - \varphi_m\right] \end{aligned} \tag{5.15}$$

Puterea semnalului MF:

$$P_{MF} = \frac{1}{2} \cdot X_p^2 \tag{5.16}$$

Banda de frecvenţă ocupată de semnalul MF:

- *relaţia lui Carson*:

$$B_{MF} = 2\left(1 + \beta\right) \cdot f_m \tag{5.17}$$

- *relaţia lui Manaev*:

$$B_{MF} = 2\left(1+\beta+\sqrt{\beta}\right)\cdot f_m \qquad \textbf{(5.18)}$$

Semnalul modulat în fază (MP)

Expresia semnalului MP:

$$x_{MP}(t) = X_p\, cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + g_m(t)\right] \qquad \textbf{(5.19)}$$

unde: $X_p\, cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right)$ este semnalul purtător, iar $g_m(t)$ este o funcţie de semnalul modulator.

Dacă semnalul modulator este *armonic*: $cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$, atunci semnalul MP are expresia:

$$x_{MP}(t) = X_p\, cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \Delta\varphi\cdot cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right] \qquad \textbf{(5.20)}$$

unde $\Delta\varphi$ se numeşte *deviaţia maximă de fază*.

Banda de frecvenţă ocupată de semnalul MP:

$$B_{MP} = 2\left(1+\Delta\varphi\right)\cdot f_m \qquad \textbf{(5.21)}$$

Puterea semnalului MP:

$$P_{MP} = \frac{1}{2}\cdot X_p^2 \qquad \textbf{(5.22)}$$

5.2. Enunţuri

P5.1. O purtătoare de amplitudine *10 V*, frecvenţă *11 kHz* şi fază iniţială $\frac{\pi}{4}$ este modulată de un semnal modulator armonic de frecvenţă *1 kHz*, fază iniţială $-\frac{\pi}{2}$, cu gradul de modulaţie *0.5*. Determinaţi expresia, spectrul şi puterea semnalului modulat în următoarele cazuri:

(a) Modulaţia este în amplitudine (MA).
(b) Modulaţia este în amplitudine cu bandă laterală dublă (BLD).

P5.2. Determinaţi frecvenţa semnalului modulator armonic şi gradul de modulaţie dacă semnalul modulat este:

$$y(t)=5\cos\left(30\pi\cdot 10^3 t\right)+2\cos\left(28\pi\cdot 10^3 t\right)+2\cos\left(32\pi\cdot 10^3 t\right)$$

P5.3. Să se arate că în cazul unui semnal MA cu modulatoare armonică şi ne-supramodulat, puterea ambelor benzi laterale nu depăşeşte o treime din puterea totală a semnalului MA.

P5.4. Un semnal modulator armonic a produs semnalul:

$$y(t)=50\cos\left(1252\cdot 10^3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(1250\cdot 10^3\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(1254\cdot 10^3\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Determinaţi semnalul purtător, semnalul modulator şi gradul de modulaţie.

P5.5. Dacă se consideră că semnalul $x(t)=5\cos(2000\pi t)+2\cos(1600\pi t)$ modulează în amplitudine o purtătoare armonică, determinaţi banda ocupată de semnalul modulat.

P5.6. Se consideră spectrul unui semnal MA cu modulatoare armonică, având linia centrală de amplitudine *1V* şi liniile laterale de amplitudine *650 mV*. Arătaţi că în cazul demodulării semnalului MA prin detecţie de anvelopă, semnalul demodulat nu va fi proporţional cu semnalul modulator.

P5.7. Dacă se consideră că semnalul:

$$x(t)=0.9\cos(2000\pi t)+0.3\cos(1800\pi t)+0.3\cos(2200\pi t)$$

este obţinut prin MA, cu gradul de modulaţie *0.4*, determinaţi expresiile purtătoarei şi a modulatoarei, ştiind că modulatoarea are o componentă continuă (*Indicaţie*: se va considera că semnalul modulator are minimul egal cu -*1*).

P5.8. Expresia unui semnal MA este :

$$y(t)=5\left[1+m\cdot x(t)\right]\cdot\cos\left(10^4\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

unde $x(t)=-4\cdot\cos\left(10^3\pi t\right)$.

(a) Ce valori poate lua *m* astfel încât să fie posibilă demodularea semnalului MA prin detecţie de anvelopă?

(b) Reprezentaţi spectrul semnalului MA pentru $m = 0.2$.

P5.9. Determinaţi frecvenţele purtătoare dacă semnalele următoare sunt obţinute prin modulaţie BLD:

(a) $x(t) = cos\left(3.5\pi \cdot 10^3 t\right) + cos\left(3.8\pi \cdot 10^3 t\right)$.

(b) $x(t) = cos(2\pi \cdot 2250t) + cos(2\pi \cdot 1850t) + cos(2\pi \cdot 2520t) + cos(2\pi \cdot 1580t)$

P5.10. Semnalul $x(t) = -2cos(2000\pi t) - cos(4000\pi t)$ modulează în amplitudine o purtătoare de amplitudine *1 V* şi frecvenţă *100 kHz*, cu gradul de modulaţie *0.6*. Scrieţi expresia semnalului MA.

P5.11. Semnalul modulator: $x(t) = -cos(2000\pi t) - 3cos(6000\pi t)$ modulează BLU o purtătoare de amplitudine *1V* şi frecvenţă *1 MHz*, cu gradul de modulaţie *0.6*. Reprezentaţi spectrul şi scrieţi expresia semnalului BLU, în cazul în care modulaţia este cu bandă laterală: **(a)** inferioară; **(b)** superioară.

P5.12. Semnalul $x(t) = 0.5 \cdot cos\left(200\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ modulează BLD o purtătoare de amplitudine *2 V*, frecvenţă *3 kHz* şi fază iniţială $-\dfrac{\pi}{3}$, cu gradul de modulaţie *1.2*.

(a) Determinaţi expresia şi spectrul semnalului BLD.

(b) Semnalul BLD este trecut printr-un FTJ ideal cu frecvenţa de tăiere *3 kHz*. Semnalul filtrat modulează apoi BLD o purtătoare de amplitudine *3V*, frecvenţă *25 kHz* şi fază iniţială $\dfrac{\pi}{4}$, cu gradul de modulaţie *1.5*. Determinaţi expresia şi spectrul noului semnal BLD.

P5.13. Semnalul $x(t) = 1 + cos\left(200\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2cos\left(400\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ modulează BLD, cu gradul de modulaţie *2*, semnalul $x_1(t) = cos\left(2000\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Semnalul BLD este trecut printr-un FTB ideal cu frecvenţele de tăiere *850 Hz* şi *1150 Hz*.

(a) Determinaţi expresia semnalului filtrat şi arătaţi că acesta poate fi interpretat ca fiind un semnal MA.

(b) Pentru semnalul MA de la punctul (a), determinaţi semnalul modulator, semnalul purtător şi gradul de modulaţie.

P5.14. Semnalul $x(t) = 3 + 2cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ modulează BLD o purtătoare de amplitudine *1V*, frecvenţă *3f₀*, cu gradul de modulaţie *0.8*. Semnalul BLD este apoi eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare $9f_0$. Precizaţi ce fel de filtru ideal trebuie aplicat semnalului eşantionat astfel încât să se obţină:

- **(a)** un semnal BLD cu modulatoare armonică şi fără componentă continuă. Daţi două soluţii de alegere a filtrului.
- **(b)** un semnal MA cu modulatoare armonică şi fără componentă continuă.
- **(c)** un semnal BLD cu modulatoare nearmonică şi fără componentă continuă.

Pentru fiecare caz, determinaţi parametrii modulaţiei şi expresia semnalului filtrat.

P5.15. Semnalul $x(t) = \sum_{n=0}^{4} (-1)^n (n+1) cos(2000 n\pi t)$ este eşantionat ideal cu frecvenţa de eşantionare *9 kHz*. Ce fel de filtru ideal trebuie aplicat semnalului eşantionat astfel încât să se obţină un semnal BLD cu modulatoarea armonică având o componentă continuă? Daţi două soluţii de alegere a filtrului. Pentru fiecare variantă de filtru, determinaţi expresia semnalului filtrat, frecvenţa purtătoare şi frecvenţa modulatoare.

P5.16. Semnalul $x(t) = Sa(400\pi t)$ este modulat în amplitudine pe purtătoarea $10 \cdot cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$, cu gradul de modulaţie *0.5*.

- **(a)** Reprezentaţi spectrul semnalului $x(t)$.
- **(b)** Reprezentaţi spectrul semnalului MA.

P5.17. Se consideră schema bloc din *Figura P5.17*, unde $f_p = 400\ Hz$ şi

$$x(t) = 2 + 2 \cdot cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot cos\left(300\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Să se arate că $y(t)$ poate fi interpretat ca fiind un semnal MA. Determinaţi în acest caz semnalul modulator, cel purtător şi gradul de modulaţie.

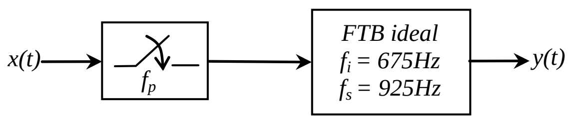


Figura P5.17

P5.18. Semnalul modulator: $x(t) = -2cos\left(2\pi 10^5 t\right) - cos\left(4\pi \cdot 10^5 t\right)$ modulează BLU cu bandă laterala superioară o purtătoare de amplitudine *2 V* şi frecvenţă *1 MHz*, cu gradul de modulaţie *0.9*. Determinaţi expresia semnalului BLU.

P5.19. Semnalele: $x_{m1}(t) = cos(2\pi t)$ şi $x_{m2}(t) = cos(4\pi t)$ sunt semnale modulatoare pentru o modulaţie polară pe o sub-purtătoare de frecvenţă *6 Hz*. Scrieţi semnalul modulat ca o sumă de componente armonice.

P5.20. Un semnal modulat în amplitudine având frecvenţa purtătoare *100 kHz* şi frecvenţa modulatoare *25 kHz* este demodulat prin redresare simplă alternanţă şi filtrare trece-jos. Determinaţi intervalul de frecvenţe în care se poate găsi frecvenţa de tăiere a FTJ.

P5.21. Aceeaşi problemă ca cea anterioară, dar considerând că redresarea este dublă alternanţă.

P5.22. Dacă răspunsul sistemului din *Figura P5.22* la un impuls de bandă limitată la *10 kHz* poate fi interpretat ca un semnal modulat, indicaţi tipul modulaţiei şi frecvenţa purtătoare, în următoarele cazuri:

(a) $f_i = 250\ kHz$, $f_s = 350 kHz$;

(b) $f_i = 150\ kHz$, $f_s = 200\ kHz$;

(c) $f_i = 200\ kHz$, $f_s = 300\ kHz$.

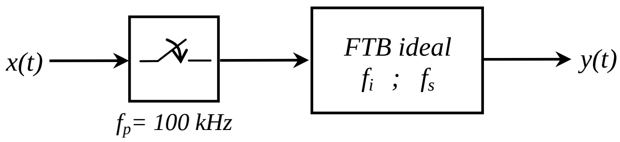


Figura P5.22

P5.23. Se consideră semnalul DMC :

$$y(t) = x_1(t) \cdot cos\left(240\pi \cdot 10^3 t\right) + x_2(t) \cdot sin\left(240\pi \cdot 10^3 t\right),$$

unde: $x_1(t) = 5\left[1 + 0.4 \cdot cos(4000\pi t)\right]$ şi $x_2(t) = 5\left[1 + 0.6 \cdot cos\left(10^4 \pi t\right)\right]$.

(a) Reprezentaţi spectrul semnalului $y(t)$.

(b) Determinaţi banda ocupată şi puterea disipată.

P5.24. Determinaţi indicele de modulaţie dacă frecvenţa modulatoare este de *10 kHz* şi deviaţia maximă de frecvenţă este de *5 kHz*.

P5.25. Determinaţi deviaţia maximă de frecvenţă dacă frecvenţa modulatoare este de *15 kHz* şi indicele de modulaţie este de *0.5 rad*.

P5.26. Determinaţi frecvenţa modulatoare dacă indicele de modulaţie este de *2 rad* şi deviaţia maximă de frecvenţă este de *75 kHz*.

P5.27. Semnalul modulator $cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ produce semnalul modulat:

$$x_M(t)=5cos\left[2000\pi t+\pi cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Indicaţi tipul modulaţiei şi parametrii acesteia.

P5.28. Semnalul modulator $cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ produce semnalul modulat:

$$x_M(t)=10cos\left[3000\pi t+\pi cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Indicaţi tipul modulaţiei şi parametrii acesteia.

P5.29. Semnalul modulator $sin(30\pi t+\pi)$ produce semnalul modulat:

$$x_m(t)=cos\left[10^4\pi t-\frac{\pi}{4}+2cos\left(30\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Indicaţi tipul modulaţiei şi parametrii acesteia.

P5.30. Determinaţi banda de frecvenţă ocupată de fiecare dintre următoarele semnale MF, folosind: **(a)** relaţia lui Carson; **(b)** relaţia lui Manaev.

$$x_{M1}(t)=5cos\left[2\pi\cdot 10^6t+5sin\left(30\pi\cdot 10^3t\right)\right]$$

$$x_{M2}(t)=2cos\left[2\pi\cdot 10^6t+2sin\left(2\pi\cdot 10^4t\right)\right]$$

P5.31. Se consideră o MF, în care purtătoarea are amplitudinea *2V*, frecvenţa *10 kHz*, faza iniţială $\frac{\pi}{4}$, semnalul modulator este $cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$, iar indicele de modulaţie *0.3*. Reprezentaţi grafic spectrul semnalului MF.

5.3. Indicaţii şi soluţii

S5.1. (a) $x_{MA}(t)=10\left[1+0.5\,cos\left(2000\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\right]cos\left(2200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$;

$P_{MA}=56.25\,W$; spectrul este ilustrat în *Figura S5.1.a*.

(b) $x_{BLD}(t)=5\,cos\left(2000\pi t-\frac{\pi}{2}\right)cos\left(2200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$; $P_{BLD}=6.25\,W$; spectrul este ilustrat în *Figura S5.1.b*.

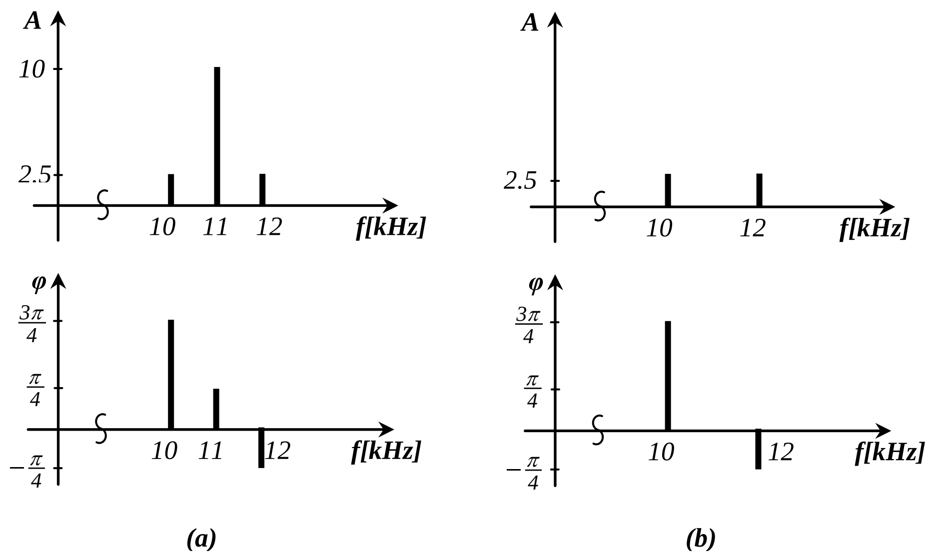


Figura S5.1

S5.2. Spectrul de amplitudini al unui semnal MA conţine o linie centrală, la frecvenţa f_p, de amplitudine X_p, şi două linii laterale, la frecvenţele $f_p \pm f_m$, de amplitudine $\frac{mX_p}{2}$. Din spectrul semnalului y(t) rezultă: $X_p = 5$ şi $\frac{mX_p}{2} = 2$, deci gradul de modulaţie este $m = 0.8$. Frecvenţa modulatoare rezultă: $f_m = 15 \cdot 10^3 - 14 \cdot 10^3 = 1 kHz$.

S5.3. Puterea totală a semnalului MA şi puterea ambelor benzi laterale se determină cu relaţia de calcul în domeniul frecvenţă a puterii unui semnal periodic – relaţia *(2.13)*. Rezultă: $P_{MA} = \frac{X_p^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$, respectiv: $P_{lat} = \left(\frac{1}{2} mX_p\right)^2$. Avem de demonstrat că: $P_{lat} \leq \frac{1}{3} P_{MA}$; înlocuind expresiile puterilor în inegalitate, rezultă: $m^2 \leq 1$, ceea ce este adevărat, deoarece semnalul este ne-supramodulat.

S5.4. Spectrul de amplitudini al semnalului conţine:

- o linie centrală, de amplitudine *50* $(= X_p)$, la frecvenţa *626 Hz* $(= f_p)$;
- două linii laterale, de amplitudine *1* $\left(= \frac{1}{2} mX_p \Rightarrow m = 0.04\right)$, situate la frecvenţele *625 Hz* $(= f_p - f_m)$, respectiv *627 Hz* $(= f_p + f_m)$; rezultă: $f_m = 1\,Hz$.

În spectrul de faze: linia centrală este $\frac{\pi}{3}$ $(= \varphi_p)$, linia din stânga este $\frac{\pi}{3}$ $(= \varphi_p - \varphi_m)$; rezultă $\varphi_m = 0$. Rezultă expresiile purtătoarei şi modulatoarei:

$$x_p(t) = 50 \cdot cos\left(2\pi \cdot 626t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_m(t) = cos(2\pi t)$$

iar gradul de modulaţie rezultă: $m = 0.04$.

S5.5. *2 kHz.*

S5.6. În cazul demodulării prin detecţie de anvelopă, pentru ca semnalul demodulat să fie proporţional cu semnalul modulator, trebuie ca gradul de modulaţie să fie subunitar. Amplitudinile liniilor laterale sunt: $0.65 = \frac{1}{2} mX_p$, iar amplitudinea purtătoarei este *1V*, rezultă $m = 1.3 > 1$.

S5.7. Semnalul modulator este de forma: $x_m(t) = X_0 + X_m cos(2\pi f_m t)$, cu $X_0 - X_m = -1$. În continuare, se deduce expresia generală a semnalului MA folosind pentru semnalul modulator expresia considerată. Rezultă:

$$x_{MA}(t) = X_p(1 + mX_0)cos(2\pi f_p t) + \frac{mX_p X_m}{2} cos\left[2\pi\left(f_p + f_m\right)t\right] + \\ + \frac{mX_p X_m}{2} cos\left[2\pi\left(f_p - f_m\right)t\right]$$

Echivalând cu expresia semnalului $x(t)$, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} X_p(1 + mX_0) = 0.9 \\ \frac{1}{2} mX_p(X_0 + 1) = 0.3 \end{cases}$$

De aici rezultă: $x_p(t) = 0.5 cos(2000\pi t)$, $x_m(t) = 2 + 3cos(200\pi t)$.

S5.8. (a) În cazul demodulării prin detecţie de anvelopă, pentru a reconstitui corect semnalul modulator, este necesar ca gradul de modulaţie să fie subunitar. În expresia unui semnal MA, gradul de modulaţie este factorul care înmulţeşte un semnal care are minimul egal cu -1. Prin urmare, aici *m* din expresie *nu* este gradul de modulaţie. Se înlocuieşte $x(t)$ în $y(t)$:

$$y(t) = 5\left[1 + m \cdot 4cos\left(10^3 \pi t + \pi\right)\right] \cdot cos\left(10^4 \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Rezultă că gradul de modulaţie este $m' = 4m$, iar semnalul modulator este $cos\left(10^3 \pi t + \pi\right)$. În concluzie, trebuie ca $m' \le 1$, deci $m \le 0.25$.

(b) Vezi *Figura S5.8* (*Observaţie*: la frecvenţa *4.5 kHz*, faza rezultă din calcule $-\frac{5\pi}{4}$, dar, deoarece am convenit ca în spectrul de faze să avem reprezentări în domeniul $[-\pi, \pi]$, adunăm -2π şi astfel rezultă $\frac{3\pi}{4}$).

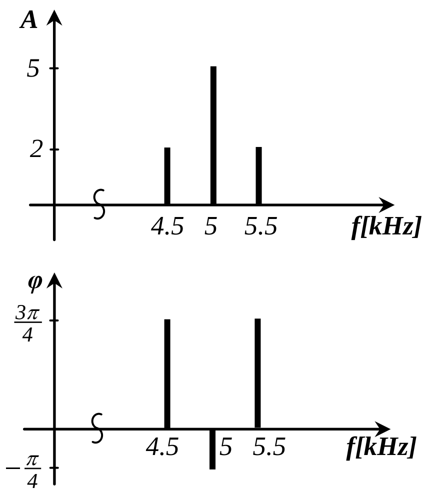


Figura S5.8

S5.9. **(a)** $f_p = \frac{1}{2}\left(1.9\cdot 10^3 + 1.75\cdot 10^3\right) = 1825\,Hz$; **(b)** *20kHz.*

S5.10. Deoarece minimul semnalului $x(t)$ nu este egal cu -*1*, trebuie mai întâi să se facă o *normare* a semnalului modulator (se împarte semnalul modulator la minimul său în modul, egal cu *3*):

$$x_{MA}(t) = X_p\left[1 + m\cdot\frac{x_m(t)}{\left|min\{x_m(t)\}\right|}\right]\cdot cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right)$$

Rezultă: $x_{MA}(t) = \left[1 - 0.4cos(2000\pi t) - 0.2cos(4000\pi t)\right]cos\left(2\pi 10^5 t\right)$.

S5.11. Se determină mai întâi semnalul BLD:

$$x_{BLD}(t) = 0.6\left[cos\left(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t + \pi\right) + 3cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^3 t + \pi\right)\right]\cdot cos\left(2\pi\cdot 10^6 t\right) =$$
$$= 0.9\cdot cos\left(2\pi\cdot 997\cdot 10^3 t - \pi\right) + 0.3\cdot cos\left(2\pi\cdot 999\cdot 10^3 t - \pi\right) +$$
$$+ 0.3\cdot cos\left(2\pi\cdot 1001\cdot 10^3 t + \pi\right) + 0.9\cdot cos\left(2\pi\cdot 1003\cdot 10^3 t + \pi\right)$$

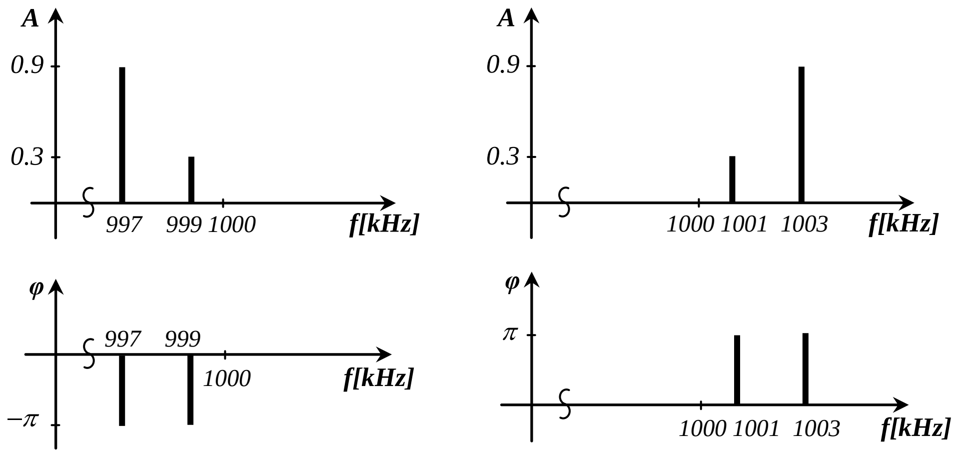
Pentru semnalul BLU_I se reţin cele două componente din banda inferioară, iar pentru BLU_S se reţin cele două componente din banda superioară. Rezultă:

(a) $x_{BLU\_I}(t) = 0.9 \cdot cos\left(2\pi \cdot 997 \cdot 10^3 t - \pi\right) + 0.3 \cdot cos\left(2\pi \cdot 999 \cdot 10^3 t - \pi\right)$;

spectrul semnalului BLU_I este ilustrat în *Figura S5.11.a*.

(b) $x_{BLU\_S}(t) = 0.3 \cdot cos\left(2\pi \cdot 1001 \cdot 10^3 t + \pi\right) + 0.9 \cdot cos\left(2\pi \cdot 1003 \cdot 10^3 t + \pi\right)$;

spectrul semnalului BLU_S este ilustrat în *Figura S5.11.b*.



(a) ***(b)***

Figura S5.11

S5.12. (a) $x_{BLD}(t) = 1.2 \cdot cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot cos\left(6000\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

(b) semnalul filtrat: $x_f(t) = 0.6 \cdot cos\left(2\pi \cdot 2900t - \frac{7\pi}{12}\right)$; al doilea SBLD:

$x_{BLD2}(t) = 2.7 \cdot cos\left(5800\pi t - \frac{7\pi}{12}\right) \cdot cos\left(5 \cdot 10^4 \pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

S5.13. (a) $x_f(t) = cos(1800\pi t) + 2cos\left(2000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(2200\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$;

Spectrul semnalului filtrat are o linie centrală şi două linii laterale şi egale, deci poate fi interpretat ca fiind un SMA.

(b) Semnalul modulator: $x_m(t) = cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; semnalul purtător:

$x_p(t) = 2cos\left(2000\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; gradul de modulaţie: $m = 1$.

S5.14. (a) Reamintim că un semnal BLD cu modulatoare armonică fără componentă continuă are în spectrul de amplitudini două linii egale între ele.
Soluţia I: Se aplică un FTB ideal, cu amplificarea unitară şi frecvenţele de tăiere: $f_i \in (3f_0,\, 4f_0)$ şi $f_s \in (5f_0,\, 6f_0)$.

Parametrii modulaţiei: $mX_pX_m = 14.4\,f_0$, $f_p = 4.5\,f_0$, $f_m = 0.5\,f_0$, $\varphi_p = 0$ şi $\varphi_m = -\dfrac{\pi}{2}$.

Semnalul filtrat: $x_f(t) = 7.2\,f_0 \cdot cos\left(8\,f_0 \cdot \pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) + 7.2\,f_0 \cdot cos\left(10\,f_0 \cdot \pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Soluţia a II-a: se aplică un FTB ideal, cu amplificarea unitară şi frecvenţele de tăiere: $f_i \in (6f_0,\, 7f_0)$ şi $f_s \in (11f_0,\, 12f_0)$.

Parametrii modulaţiei: $mX_pX_m = 14.4\,f_0$, $f_p = 9\,f_0$, $f_m = 2\,f_0$, $\varphi_p = 0$, $\varphi_m = -\dfrac{\pi}{2}$.

Semnalul filtrat: $x_f(t) = 7.2\,f_0 \cdot cos\left(14\,f_0 \cdot \pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) + 7.2\,f_0 \cdot cos\left(22\,f_0 \cdot \pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(b) FTB ideal, cu amplificarea unitară şi frecvenţele de tăiere: $f_i \in (0,\, 2f_0)$ şi $f_s \in (4f_0,\, 5f_0)$. Parametrii modulaţiei: $f_p = 3f_0$, $f_m = f_0$, $\varphi_p = 0$, $\varphi_m = \dfrac{\pi}{2}$, $X_p = 21.6\,f_0$ şi $m = \dfrac{2}{27\,f_0}$. Semnalul filtrat:

$$x_f(t) = 7.2\,f_0 \cdot cos\left(4\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 21.6\,f_0 \cdot cos(6\pi f_0 t) + 7.2\,f_0 \cdot cos\left(8\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(c) Un semnal BLD cu modulatoare nearmonică fără componentă continuă are un număr par de linii, simetrice faţă de o frecvenţă centrală. Se poate aplica un FTB ideal, cu amplificarea unitară şi frecvenţele de tăiere: $f_i \in (2f_0,\, 3f_0)$ şi $f_s \in (6f_0,\, 7f_0)$.

Parametrii modulaţiei: $f_p = 4.5\,f_0$, $f_{m1} = 0.5\,f_0$, $f_{m2} = 1.5\,f_0$, $\varphi_p = 0$, $\varphi_{m1} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_{m2} = 0$, $mX_pX_{m1} = 14.4\,f_0$, $mX_pX_{m2} = 43.2\,f_0$. Semnalul filtrat:

$$x_f(t) = 21.6\,f_0 \cdot cos(6\pi f_0 t) + 7.2\,f_0 \cdot cos\left(8\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + 7.2\,f_0 \cdot cos\left(10\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ 21.6\,f_0 \cdot cos(12\pi f_0 t).$$

S5.15. Un semnal BLD cu modulatoare armonică având o componentă continuă are în spectrul de amplitudini trei linii spectrale, iar cele laterale sunt egale. În spectrul semnalului eşantionat, astfel de linii sunt cele situate la frecvenţele: $kf_p, kf_p \pm 1kHz$.

Soluţia I: FTB ideal, cu frecvenţele de tăiere: $f_i \in (7\ kHz,\ 8\ kHz)$ şi $f_s \in (10\ kHz,\ 11\ kHz)$. Rezultă frecvenţa purtătoare: $f_p = 9\ kHz$, frecvenţa modulatoare: $f_m = 1\ kHz$. Semnalul filtrat:

$$x_f(t) = 18 \cdot 10^3 \left[cos\left(16\pi \cdot 10^3 t\right) + cos\left(18\pi \cdot 10^3 t\right) + cos\left(20\pi \cdot 10^3 t\right) \right].$$

Soluţia a II-a: FTB ideal, cu frecvenţele de tăiere: $f_i \in (16\ kHz,\ 17\ kHz)$ şi $f_s \in (19\ kHz,\ 20\ kHz)$. Rezultă frecvenţa purtătoare: $f_p = 18\ kHz$, frecvenţa modulatoare: $f_m = 1\ kHz$. Semnalul filtrat:

$$x_f(t) = 18 \cdot 10^3 \left[cos\left(34\pi \cdot 10^3 t\right) + cos\left(36\pi \cdot 10^3 t\right) + cos\left(38\pi \cdot 10^3 t\right) \right].$$

S5.16. **(a)** Vezi *Figura S5.16.(a).* **(b)** Vezi *Figura S5.16.(b).*

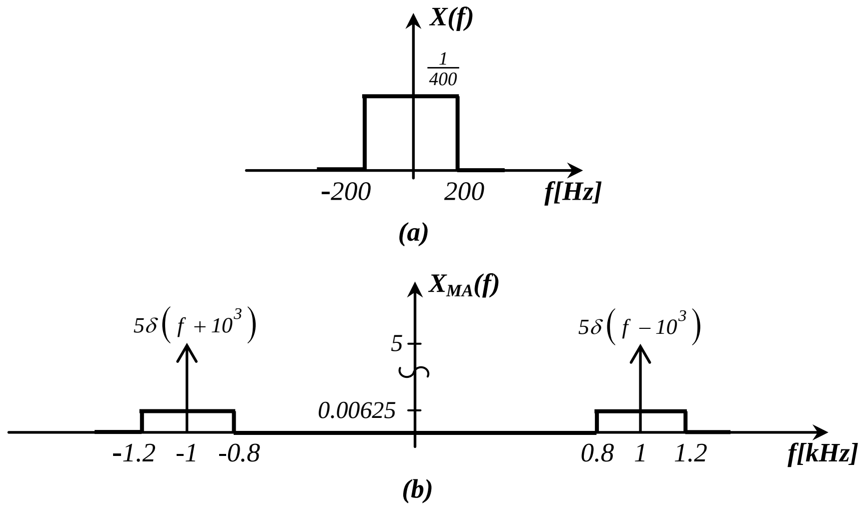


Figura S5.16

S5.17. Semnalul filtrat are în spectrul de amplitudini o linie centrală şi două linii laterale egale între ele, deci poate fi interpretat ca fiind un semnal MA.

Rezultă semnalul modulator: $x_m(t) = cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, semnalul purtător: $x_p(t) = 1600 \cdot cos(1600\pi t)$ şi gradul de modulaţie $m = 1$.

S5.18. $x_{BLU-S}(t) = 1.8cos\left(22\pi \cdot 10^5 t + \pi\right) + 0.9cos\left(24\pi \cdot 10^5 t + \pi\right)$

S5.19. $x_{MPO}(t) = cos(2\pi t) + cos(4\pi t) - 0.5cos(8\pi t) + 0.5cos(10\pi t) +$
$+2cos(12\pi t) + 0.5cos(14\pi t) - 0.5cos(16\pi t)$

S5.20. Prin redresare simplă-alternanţă, spectrul semnalului redresat va fi format din variante (ponderate) ale spectrului semnalului MA deplasate în jurul multiplilor frecvenţei purtătoare (*Figura S5.20*). Prin aplicarea FTJ, dorim să rămână doar varianta din origine. Prin urmare, intervalul de frecvenţe în care se poate găsi frecvenţa de tăiere a FTJ este: $25 - 75\ kHz$.

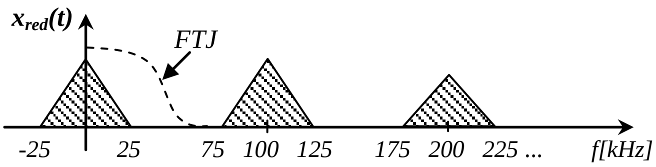


Figura S5.20

S5.21. În spectrul semnalului dublu-redresat vor apărea variante ale spectrului SMA deplasate în jurul multiplilor pari ai frecvenţei purtătoare. Prin urmare, în acest caz, intervalul de frecvenţe în care se poate găsi frecvenţa de tăiere a FTJ este: $25 - 75\ kHz$.

S5.22. (a) Spectrul semnalului $y(t)$ conţine spectrul semnalului $x(t)$, deplasat în jurul frecvenţei *300 kHz*, ceea ce se poate obţine şi în următoarele cazuri:

- modulaţie BLD, cu frecvenţa purtătoare *300 kHz,* sau:
- modulaţie BLU_S, cu frecvenţa purtătoare mai mică decât *290 kHz*, sau:
- modulaţie BLU_I, cu frecvenţa purtătoare mai mare decât *310 kHz*.

(*Observaţie*: MA nu poate fi, deoarece spectrul ar trebui să conţină şi un impuls Dirac la frecvenţa *300 kHz*).

(b) Spectrul semnalului $y(t)$ conţine jumătatea din stânga a spectrului semnalului $x(t)$, deplasat cu *200 kHz*, ceea ce se poate obţine şi în următoarele cazuri:

- modulaţie BLU_S, cu frecvenţa purtătoare mai mică decât *190 kHz*, sau:
- modulaţie BLU_I, cu frecvenţa purtătoare mai mare decât *200 kHz*.

(*Observaţie*: BLD nu poate fi, deoarece spectrul nu este simetric).

(c) Spectrul este simetric faţă de *250 kHz* , ceea ce se poate obţine în cazurile:

- modulaţie BLD, cu frecvenţa purtătoare *250 kHz,* sau:
- modulaţie BLU_S, cu frecvenţa purtătoare mai mică decât *200 kHz,* sau:
- modulaţie BLU_I, cu frecvenţa purtătoare mai mare decât *310 kHz.*

S5.23. (a) Dacă se însumează două armonici de aceeaşi frecvenţă, ele trebuie compuse vectorial:

$$X_1 \cos(\omega_0 t+\varphi_1)+X_2 \cos(\omega_0 t+\varphi_2)=X \cos(\omega_0 t+\varphi)$$

unde:

$$\begin{cases} X^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cdot \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \varphi = arctg \dfrac{X_1 \sin\varphi_1 + X_2 \sin\varphi_2}{X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \cos\varphi_2} \end{cases}$$

Aici, cele două armonici sunt: $5\cos\left(2\pi\cdot 120\cdot 10^3 t\right)$ şi $5\cos\left(2\pi\cdot 120\cdot 10^3 t-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rezultă suma lor: $5\sqrt{2}\cos\left(2\pi\cdot 120\cdot 10^3 t-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Spectrul este ilustrat în *Figura S5.23*. **(b)** $B=125\ kHz-115\ kHz=10\ kHz$; $P=35.25\ W$.

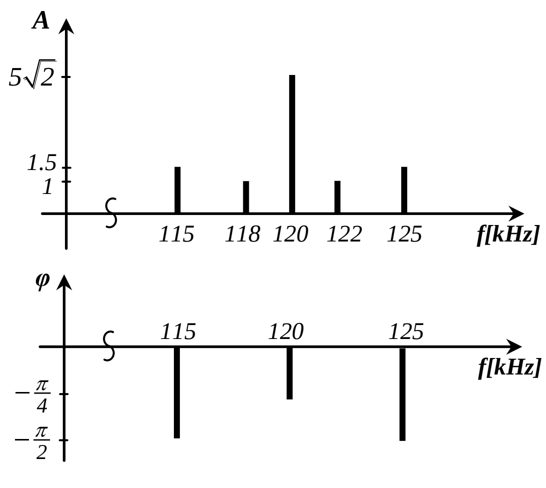


Figura S5.23

S5.24. $\beta=0.5\ rad$.

S5.25. $\Delta f = 7.5\ kHz$.

S5.26. $f_m = 37.5\ kHz$.

S5.27. MP, cu parametrii: $X_p = 5$, $f_p = 1\ kHz$, $f_m = 100\ Hz$, $\varphi_m = \frac{\pi}{6}$, $\Delta\varphi = \pi$.

S5.28. Poate fi MF sau MP + MF. Facem să apară argumentul de la semnalul modulator în expresia semnalului modulat:

$$cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Rezultă că este vorba de MF, cu parametrii: $X_p = 10$, $f_p = 1.5\ kHz$, $f_m = 50\ Hz$, $\varphi_m = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \pi$.

S5.29. Semnalul modulator este: $sin(30\pi t + \pi) = cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, iar în expresia semnalului modulat, facem să apară argumentul $30\pi t + \frac{\pi}{2}$:

$$cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} sin\left(30\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rezultă că este vorba de MF + MP, cu parametrii: $X_p = 1$, $f_p = 5\ kHz$, $\varphi_p = -\frac{\pi}{4}$, $f_m = 15\ Hz$, $\varphi_m = \pi$, $\beta = \Delta f = \sqrt{2}$.

S5.30. (a) Cu relaţia lui Carson:

$$B_{MF1} = 2(1+5)\cdot 15\cdot 10^3 = 180\,kHz$$
$$B_{MF2} = 2(1+2)\cdot 10\cdot 10^3 = 60\,kHz$$

(b) Cu relaţia lui Manaev:

$$B_{MF1} = 2\left(1+5+\sqrt{5}\right)\cdot 15\cdot 10^3 \simeq 247\,kHz$$
$$B_{MF2} = 2\left(1+2+\sqrt{2}\right)\cdot 10\cdot 10^3 \simeq 88.3\,kHz$$

S5.31. Se scrie semnalul folosind relaţia *(5.15)* . Spectrul este ilustrat în *Figura S5.31*.

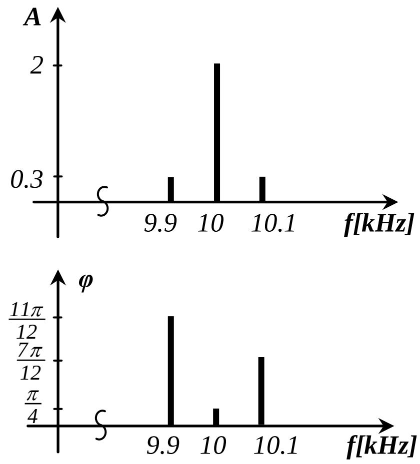


Figura S5.31

NOTAȚII

$L\{\bullet\}$	transformata Laplace
$F\{\bullet\}$	transformata Fourier
$x \otimes y$	produsul de convoluție dintre *x* şi *y*
f.d.s.	funcție de sistem
BLD	bandă laterală dublă
BLU	bandă laterală unică
BLU-I	bandă laterală unică inferioară
BLU-S	bandă laterală unică superioară
DMA	dublă modulație în amplitudine
DMC	dublă modulație în cuadratură
FOB	filtru opreşte-bandă
FTB	filtru trece-bandă
FTJ	filtru trece-jos
FTS	filtru trece-sus
MA	modulație în amplitudine
MF	modulație în frecvență
MP	modulație în fază
MPO	modulație polară
SALI	sistem analogic liniar şi invariant în timp
SFA	seria Fourier armonică
TF	transformata Fourier

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Cartianu, ş.a. – "*Semnale, circuite şi sisteme*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
2. I. Constantin – "*Semnale şi răspunsul circuitelor*", Editura Bren, Bucureşti, 1999.
3. A. Mateescu, N. Dumitriu, L.Stanciu – "*Semnale şi sisteme. Aplicații în filtrarea semnalelor*", Ed. Teora, Bucureşti, 2001.
4. A. Mateescu, A. Şerbănescu, ş.a. – "*Semnale, circuite şi sisteme. Probleme*", Editura Militară, Bucureşti, 1998.
5. I. Popescu, V.Popescu, E. Szopos, M. Țopa – "*Semnale, circuite şi sisteme. Îndrumător de laborator IV*", Editura Casa Cărții de Ştiință, Cluj-Napoca, 2003.
6. V. Popescu – "*Semnale, circuite şi sisteme. Partea I: Teoria semnalelor*", Editura Casa Cărții de Ştiință, Cluj-Napoca, 2001.
7. M. Săvescu – "*Semnale, circuite şi sisteme. Probleme*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
8. D. Stanomir – "*Semnale analogice şi transformările lor*", Editura Athena, Bucureşti, 1995.
9. M. Țopa – "*Semnale, circuite şi sisteme. Partea a II-a: Teoria sistemelor*", Editura Casa Cărții de Ştiință, Cluj-Napoca, 2002