

ANCA G. POPA  
MIRCEA D. BOTEZ  
MARIUS Ș. BURU  
TEODORA S. BESOIU  
ADRIAN G. MARCHIȘ  
LUCIAN A. BREDEAN

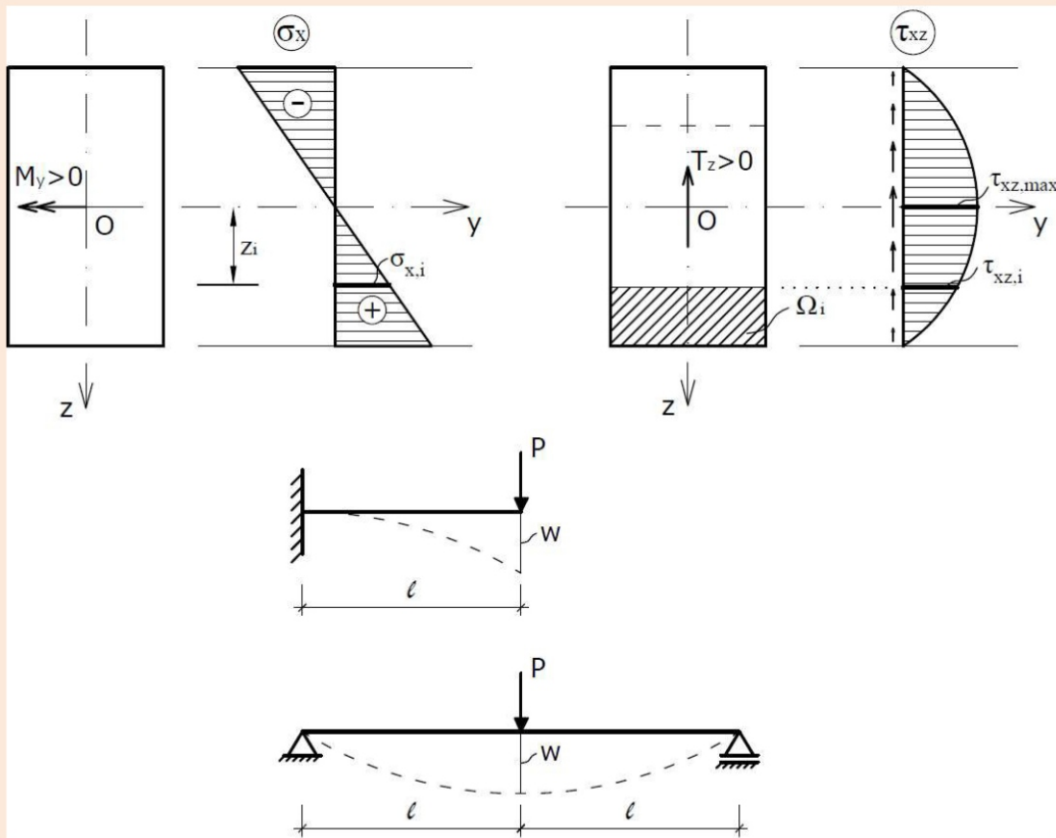
# Îndrumător de Lucrări

## la

# REZISTENȚA MATERIALELOR

## (I)

Ediția a II-a, revizuită și adăugită



UTPRESS  
Cluj-Napoca, 2020  
ISBN 978-606-737-481-0

**Conf. dr. ing. ANCA G. POPA (Coordonator)**  
**Şef lucr. dr. ing. MIRCEA D. BOTEZ**  
**Şef lucr. dr. ing. MARIUS Ş. BURU**  
**Asist. dr. ing. TEODORA S. BESOIU**  
**Asist. dr. ing. ADRIAN G. MARCHIŞ**  
**dr. ing. LUCIANA BREDEAN**

**Îndrumător de Lucrări**  
**la**  
**REZISTENŢA MATERIALELOR (I)**

Ediția a II-a, revizuită și adăugită



**Editura UTPRESS**  
**Cluj-Napoca, 2020**  
**ISBN 978-606-737-481-0**



Editura U.T.PRESS  
Str. Observatorului nr. 34  
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca  
Tel.:0264-401.999  
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro  
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director:           ing. Călin Câmpean

Recenzia:           Prof.em.dr.ing. Ironim Marțian  
                          Șef.lucrări dr.ing. Horațiu Alin Mociran

Copyright © 2020 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-481-0

Bun de tipar: 17.12.2020

## **Prefață la ediția a II-a**

Prima ediție a acestui îndrumător s-a dovedit a fi un real sprijin pentru pregătirea profesională a studenților din domeniul Ingineriei civile. Epuizarea tirajului este, probabil, cel mai elocvent argument în acest sens.

Drept urmare, autorii au decis să publice o nouă ediție, revăzută și adăugită. Principalele elemente de noutate pe care le aduce ediția prezentă constau în suplimentarea exemplilor de calcul cu probleme relevante pentru subiectul capitolului, actualizarea valorilor rezistențelor de calcul pentru oțelurile folosite în prezent în Construcțiile metalice.

Pentru o mai bună înțelegere și mai multă claritate a notațiilor folosite în îndrumător, a fost inserat alfabetul grec.

Am considerat, de asemenea, că este utilă introducerea unui capitol nou cuprinzând teste de verificare a cunoștințelor, de tip grilă, care să vină în ajutorul fixării cunoștințelor acumulate nu numai în plan teoretic, dar și în plan aplicativ și care urmăresc dezvoltarea intuiției ingineresti.

Autorii mulțumesc tuturor celor care, prin sugestii și observații, ne-au ajutat să dăm un conținut mai bun acestei ediții. Mulțumiri deosebite îi adresăm domnului Prof. em. dr. ing. Ironim Marțian care, din nou, ne-a fost alături cu toată dăruirea, împărtășindu-ne experiența vastă pe care a acumulat-o în cariera de dascăl în domeniul Mecanicii corpului deformabil.

Nu în ultimul rând, mulțumim tuturor celor care au făcut posibilă apariția acestei cărți și ne exprimăm speranța că va fi de un real folos studenților noștri, atât de greu încercați în aceste vremuri de pandemie.

Conf. dr. ing. Anca Gabriela POPA

Cluj-Napoca, 21 decembrie 2020



## **Cuvânt înainte**

Rezistența materialelor este o disciplină fundamentală în pregătirea profesională a studenților în domeniul Ingineriei civile, familiarizându-i pe aceștia cu introducerea, utilizarea și respectarea normelor precum și a rigorilor impuse de gândirea tehnică. Așa cum un medic nu poate profesa fără să cunoască anatomie, inginerul constructor nu își poate practica profesia fără o înțelegere profundă a Rezistenței materialelor.

Fiind prima dintre disciplinele ingineresti, Rezistența materialelor deschide studenților universul tehnic, îmbinând matematica și fizica cu observații practice, confirmate experimental, toate aceste elemente contribuind la crearea unui model al corpului deformabil real.

Cunoștințele de Rezistența materialelor se pot dobândi numai printr-un studiu susținut, alăturând înțelegerea teoretică cu partea aplicativă a abordării problemelor specifice, urmărindu-se rezolvarea lor concretă, tehnică, până la final: alegerea materialului, formei și a dimensiunilor elementelor de construcții și aprecierea siguranței acestora.

Volumul înmănușează experiența colectivului de Rezistența materialelor din cadrul Departamentului de Mecanica Construcțiilor, alăturând experiența cadrelor didactice “veterane” cu entuziasmul celor tineri. El se adresează în primul rând studenților Facultății de Construcții, urmărind să pună la dispoziția studenților un instrument de lucru util atât pentru studiul individual cât și în cadrul orelor de lucrări aplicative.

Materialul este structurat în treisprezece capitole care respectă și acoperă în întregime programa analitică a cursului de Rezistența materialelor partea întâi. Fiecare capitol reprezintă o lucrare săptămânală, fiind structurat în trei părți. Este prezentată la început o sinteză a noțiunilor teoretice ce vor fi utilizate în aplicații și se adresează studiului individual. Urmează exemple de calcul detaliate pentru fiecare tip de problemă care sunt concepute pentru înțelegerea algoritmilor și a etapelor de calcul. Ultima parte conține aplicații propuse pentru rezolvarea individuală în vederea fixării cunoștințelor dobândite în cadrul orelor de aplicații.

Autorii mulțumesc pe această cale domnului Profesor dr. ing. Ironim Marțian pentru tot sprijinul și implicarea în redactarea acestui îndrumător de lucrări. Știind că perfecțiunea este un deziderat greu de realizat, autorii sunt recunoscători tuturor celor care prin sugestii și observații ne vor ajuta la îmbunătățirea conținutului viitoarelor ediții. Nu în ultimul rând, mulțumim tuturor celor care au contribuit la apariția acestei lucrări.

Conf. dr. ing. Anca Gabriela Popa

Cluj-Napoca, 20 decembrie 2017

## CUPRINS

<b>Conf. dr. ing. Anca G. POPA, Cuvânt înainte .....</b>	<b>3</b>
<b>Lucrarea 1.</b>	
Schematizarea elementelor și acțiunilor. Calculul reacțiunilor .....	7
<b>Lucrarea 2.</b>	
Diagrame de eforturi .....	15
<b>Lucrarea 3.</b>	
Diagrame simple. Suprapunerea diagramelor. Utilizarea simetriei și antisimetriei .....	26
<b>Lucrarea 4.</b>	
Diagrame pe stâlpi, bare cotite, grinzi cu console și articulații .....	34
<b>Lucrarea 5.</b>	
Caracteristici geometrice ale figurilor plane. Încercarea la întindere a unui oțel ductil .....	45
<b>Lucrarea 6.</b>	
Solicitări axiale ale sistemelor static determinate (SSD): eforturi în bare, verificare, efort capabil și dimensionare.....	62
<b>Lucrarea 7.</b>	
Solicitări axiale (prin forțe, variații de temperatură, inexactități de montaj) ale sistemelor de bare static nedeterminate (SSN).....	73
<b>Lucrarea 8.</b>	
Calculul îmbinărilor cu nituri sau cu șuruburi.....	87
<b>Lucrarea 9.</b>	
Calculul îmbinărilor sudate.....	102
<b>Lucrarea 10.</b>	
Calculul de rezistență al grinzilor încovoiate (diagrame de eforturi, caracteristici geometrice, verificare, dimensionare).....	117
<b>Lucrarea 11.</b>	
Calculul de rezistență al grinzilor încovoiate. Determinarea sarcinii capabile. Trasarea diagramelor de tensiuni.....	128
<b>Lucrarea 12.</b>	
Calculul deplasărilor grinzilor supuse la încovoiere plană. metoda grinzii conjugate/fictive (Mohr).....	142
<b>Lucrarea 13.</b>	
Torsiunea liberă a barelor drepte.....	154
<b>Test de verificare a cunoștințelor.....</b>	<b>172</b>
Răspunsuri - Test de verificare a cunoștințelor.....	196
<b>Anexe.....</b>	<b>197</b>
<b>Bibliografie .....</b>	<b>222</b>

## ALFABETUL GREC

<b>A</b>	$\alpha$	Alfa	<b>N</b>	$\nu$	Nu
<b>B</b>	$\beta$	Beta	$\Xi$	$\xi$	Xi
<b><math>\Gamma</math></b>	$\gamma$	Gamma	$\omicron$	$o$	Omicron
<b><math>\Delta</math></b>	$\delta$	Delta	$\Pi$	$\pi$	Pi
<b>E</b>	$\varepsilon$	Epsilon	$\rho$	$\rho$	Ro
<b>Z</b>	$\zeta$	Zeta	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
<b>H</b>	$\eta$	Eta	$\tau$	$\tau$	Tau
<b><math>\theta</math></b>	$\theta$	Theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	Upsilon
<b>I</b>	$\iota$	Iota	$\Phi$	$\phi$	Phi
<b>K</b>	$\kappa$	Kappa	$\chi$	$\chi$	Chi
<b><math>\Lambda</math></b>	$\lambda$	Lambda	$\Psi$	$\psi$	Psi
<b>M</b>	$\mu$	Mu	$\Omega$	$\omega$	Omega

## LUCRAREA 1

### SCHEMATIZAREA ELEMENTELOR ȘI ACȚIUNILOR. CALCULUL REACȚIUNILOR

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

##### A.1. Schematizarea elementelor

Elementele de construcție se împart, în funcție de raportul dintre dimensiunile acestora, în trei categorii:

- **bare:** sunt acele elemente la care una dintre dimensiuni (lungimea) este mult mai mare decât celelalte două (dimensiunile secțiunii transversale: lățimea și înălțimea);
- **plăci:** sunt acele elemente la care două dintre dimensiuni (lungimea și lățimea) sunt mult mai mari decât cea de-a treia (înălțimea / grosimea);
- **blocuri:** sunt acele elemente la care toate cele trei dimensiuni (lungimea, lățimea, înălțimea) au același ordin de mărime.

Obiectivul principal din prezentul îndrumător îl constituie bara dreaptă plană supusă la acțiuni cuprinse în planul ei.

Bara va fi schematizată prin axa longitudinală ( $Ox$ ) și secțiunea transversală ( $yOz$ ).

##### A.2. Schematizarea acțiunilor

Acțiunea se definește ca fiind orice cauză care produce o stare de solicitare mecanică sau deformări în corp. Acțiunile mecanice se schematizează prin **încărcări** (produc același efect asupra elementului de construcție).

Încărcările pot fi sub formă de: sisteme de forțe, sisteme de deplasări, deformații impuse (inexactități de execuție, tasări de reazeme) sau interacțiuni cu mediul ambiant (variații de temperatură).

**Sistemele de forțe**, în funcție de modul de aplicare asupra elementelor de tip bară, sunt schematizate prin (Fig.1.1):

- a) forțe ( $P$ ) sau momente ( $M$ ) concentrate – acționează într-un punct;
- b) forțe ( $q$ ) sau momente ( $m$ ) distribuite – acționează după o linie.

##### A.3. Reazeme și reacțiuni

Barele de care ne ocupăm sunt considerate elemente plane fixate prin intermediul reazemelor.

Reazemele se caracterizează prin deplasările generalizate pe care le suprimă; din punct de vedere static, ele sunt echivalate cu reacțiunile care apar pe aceste direcții. Cele mai des întâlnite tipuri de reazeme sunt exemplificate în Tab.1.1.

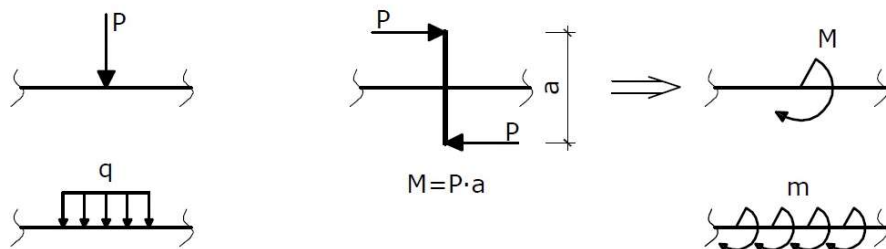


Fig. 1.1. Reprezentarea grafică a încărcărilor:  $P$  – forță concentrată,  $M$  – moment concentrat,  $q$  – forță distribuită,  $m$  – momente distribuite.

Tab.1.1. Tipuri de reacțiuni.

Tipul	Nr. gradelor de libertate suprimate	Tipul reacțiunii	Reprezentare grafică
Reazemul simplu	1 deplasarea pe direcția normalei la suprafața de rezemare	$V$ (forță concentrată pe direcția verticală)	
Articulația plană	2 deplasarea pe două direcții oarecare, în particular ortogonale în plan	$V, H$ (două forțe concentrate ortogonale)	
Încăstrarea	3 deplasarea pe două direcții în particular ortogonale și o rotire în plan	$V, H, M$ (două forțe concentrate și un moment)	

unde:  $V$  – reacțiune (forță) verticală,  $H$  – reacțiune (forță) orizontală,  $M$  – moment.

#### A.4. Calculul reacțiunilor

Bara dreaptă, în starea de acțiune plană, are trei grade de libertate: 2 translații și o rotire. Pentru asigurarea invariabilității poziției ei sunt necesare un număr minim de 3 legături simple sau combinații de legături dispuse judicios. Barele cu cele 3 legături se numesc **static determinate (SSD)**; dacă numărul de legături este mai mare decât 3, barele devin **static nedeterminate (SSN)**.

*Obs. Pentru calculul reacțiunilor la barele încărcate cu sarcini distribuite ( $q$ ), acestea se vor înlocui cu rezultantele lor conform Tab.1.2.*

Tipurile de *bare static determinate (SSD)* sunt ilustrate în Fig.1.2. Pentru determinarea reacțiunilor la SSD se vor utiliza ecuațiile de echilibru static ale Mecanicii teoretice, astfel:

a) pentru **bara simplu rezemată**:

$\sum F_x = 0$  (suma proiecțiilor tuturor forțelor, inclusiv reacțiuni, după axa barei Ox este nulă);

$\sum M_A = 0$  (suma tuturor forțelor/reacțiunilor care dau moment în raport cu punctul A este nulă);

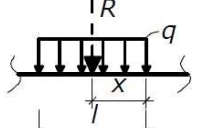
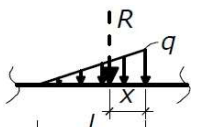
$\sum M_B = 0$  (suma tuturor forțelor/reacțiunilor care dau moment în raport cu punctul B este nulă).

Obs. 1.  $\sum F_z = 0$  (suma proiecțiilor tuturor forțelor după axa Oz este nulă) se folosește pentru verificarea calculului reacțiunilor. Punctele A și B se aleg astfel încât să se obțină ecuații cu câte o necunoscută.

Obs. 2. Această exprimare a echilibrului static este echivalentă celei propriu-zise, adică  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_z = 0$  și  $\sum M_A = 0$  sau  $\sum M_B = 0$ , unde  $M_A$ , respectiv  $M_B$ , sunt momente în raport cu axa Oy. Ecuația de proiecții trebuie să fie scrisă pe o direcție diferită de normala la dreapta AB; un alt mod de exprimare a echilibrului static este sub forma a trei ecuații de momente,  $\sum M_A = 0$ ,  $\sum M_B = 0$ ,  $\sum M_C = 0$ , cu condiția ca punctele A, B și C să nu fie coliniare.

b) pentru **consolă**:  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_z = 0$ ,  $\sum M_A = 0$ .

Tab.1.2. Valoarea și poziția rezultantei încărcărilor distribuite.

Nr. crt.	Tipul forței distribuite	Valoarea rezultantei (R)	Poziția rezultantei (x)
1	distribuită uniform 	$R = ql$	$x = \frac{1}{2}l$
2	distribuită liniar 	$R = \frac{1}{2}ql$	$x = \frac{1}{3}l$ (față de punctul unde forța distribuită are intensitatea maximă)

unde:  $l$  – distanța pe care acționează forța distribuită  $q$ .

Obs. Reacțiunile barelor static nedeterminate (SSN) nu pot fi calculate numai din condițiile de echilibru static, fiind necesară impunerea unor condiții suplimentare (în general, de compatibilitate a deplasărilor).

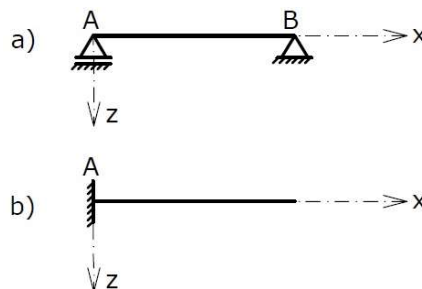


Fig. 1.2. Bare static determinate: a) bara simplu rezemată, b) consola.

## B. EXEMPLE DE CALCUL

Ex.1. Pentru grinda simplu rezemată sollicitată ca în Fig. 1.3, se cere să se determine reacțiunile.

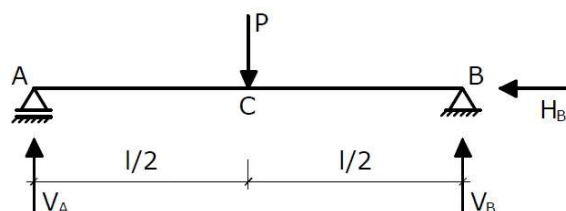


Fig. 1.3.

### REZOLVARE

Se introduc reacțiunile corespunzătoare în reazeme, astfel:

- În reazemul simplu din punctul A se introduce o reacțiune verticală  $V_A$ ;
- În articulația din punctul B se introduce o reacțiune verticală  $V_B$  și o reacțiune orizontală  $H_B$ .

Obs.1. Sensul reacțiunilor introduse este arbitrar. Dacă în urma calculului se obține o valoare negativă a reacțiunii, înseamnă că sensul real de acțiune al acesteia este contrar celui considerat inițial în mod arbitrar.

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H_B$ , din ecuațiile de echilibru static:

(1)  $\sum M_A = 0:$

$$P \cdot \frac{l}{2} - V_B \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P}{2};$$

(2)  $\sum M_B = 0:$

$$-P \cdot \frac{l}{2} + V_A \cdot l = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P}{2};$$

(3)  $\sum F_x = 0:$

$$H_B = 0;$$

(4) Verificare  $\sum F_z = 0:$

$$V_A + V_B - P = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P.$$

Obs.2. Pentru determinarea valorilor lui  $V_A$  și  $V_B$  se va considera un sens pozitiv arbitrar (orar sau antiorar) al momentelor forțelor, inclusiv reacțiuni, în raport cu punctul față de care se exprimă; în acest caz, sensul pozitiv s-a considerat sensul orar pentru ambele ecuații (1), (2). Pentru determinarea lui  $H_B$  din ecuația (3) sensul pozitiv s-a considerat de la dreapta la stânga, iar pentru verificarea din ecuația (4) sensul pozitiv s-a considerat de jos în sus.

Obs.3. Într-o ecuație de echilibru, alegerea sensului pozitiv este arbitrară și poate fi schimbat de la o ecuație la alta (ceea ce înseamnă înmulțirea ecuației cu -1).

**S-au obținut:**

$$V_A = \frac{P}{2}; V_B = \frac{P}{2}; H_B = 0.$$

**Ex.2.** Pentru grinda simplu rezemată sollicitată ca în Fig. 1.4, se cere să se determine reacțiunile.

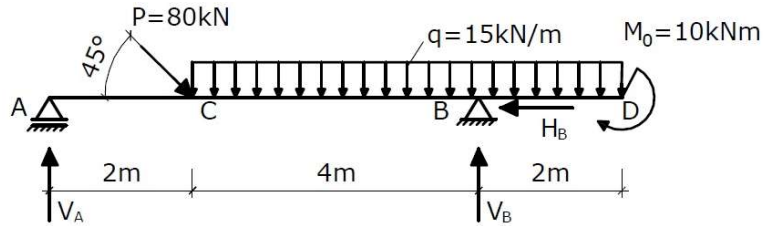


Fig. 1.4.

**REZOLVARE**

Se introduc reacțiunile corespunzătoare, astfel:

- o reacțiune verticală  $V_A$ ;
- o reacțiune verticală  $V_B$ ;
- o reacțiune orizontală  $H_B$ .

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H_B$  din ecuațiile de echilibru static:

$$(1) \quad \sum M_A = 0: \quad -V_B \cdot 6 + 80 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + (15 \cdot 6) \cdot 5 + 10 = 0 \Rightarrow V_B = 95.52 \text{ kN};$$

$$(2) \quad \sum M_B = 0: \quad V_A \cdot 6 - 80 \cdot \sin 45^\circ \cdot 4 - (15 \cdot 6) \cdot 1 + 10 = 0 \Rightarrow V_A = 51.04 \text{ kN};$$

$$(3) \quad \sum F_x = 0: \quad -H_B + 80 \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow H_B = 56.57 \text{ kN};$$

(4) *Verificare*

$$\sum F_z = 0: \quad V_A + V_B - 80 \cdot \sin 45^\circ - 15 \cdot 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

**S-au obținut:**

$$V_A = 51.04 \text{ kN}; V_B = 95.52 \text{ kN}; H_B = 56.57 \text{ kN}.$$

*Obs.1.* Pentru determinarea valorilor lui  $V_A$  și  $V_B$  s-a considerat sensul pozitiv  $\rightarrow$  sensul orar.

*Obs.2.* Forțele înclinate se descompun după cele două direcții ortogonale: axa  $Ox$  – axa barei și  $Oz$  după verticală (Fig.1.5).

*Obs.3.* Pentru determinarea lui  $H_B$  din ecuația (3) sensul pozitiv s-a considerat de la dreapta la stânga.

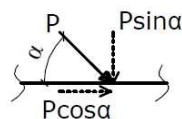


Fig. 1.5. Componentele forței înclinate.



**Ex.3.** Pentru consola solicitată ca în Fig. 1.6, se cere să se determine reacțiunile.

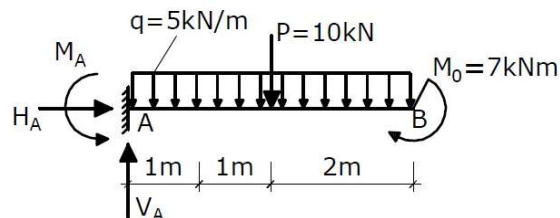


Fig. 1.6.

**REZOLVARE**

Se introduc reacțiunile corespunzătoare, astfel:

- o reacțiune verticală  $V_A$ ;
- o reacțiune orizontală  $H_A$ ;
- o reacțiune moment  $M_A$ .

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $H_A$  și  $M_A$  din ecuațiile de echilibru static:

- (1)  $\sum F_Z = 0: V_A - (5 \cdot 4) - 10 = 0 \Rightarrow V_A = 30 \text{ kN};$
- (2)  $\sum F_X = 0: H_A = 0;$
- (3)  $\sum M_A = 0: -M_A + (5 \cdot 4) \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 7 = 0 \Rightarrow M_A = 67 \text{ kNm}.$

**S-au obținut:**

$$V_A = 30 \text{ kN}; H_A = 0; M_A = 67 \text{ kNm}.$$

*Obs.1. Pentru determinarea valorilor lui  $M_A$  din ecuația (3), s-a considerat sensul pozitiv  $\rightarrow$  sensul orar.*

*Obs.2. Pentru determinarea lui  $V_A$  din ecuația (1), sensul pozitiv s-a considerat de jos în sus.*

**Ex.4.** Pentru grinda simplu rezemată solicitată ca în Fig. 1.7, se cere să se determine reacțiunile.

**REZOLVARE**

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H_B$  din ecuațiile de echilibru static:

- (1)  $\sum M_A = 0:$   

$$-V_B \cdot 6 - 30 \cdot 2 + 20 \cdot 5 \cdot 0.5 - 15 = 0 \Rightarrow V_B = -4.17 \text{ kN};$$
- (2)  $\sum M_B = 0:$   

$$V_A \cdot 6 - 30 \cdot 8 - 20 \cdot 5 \cdot 5.5 - 15 = 0 \Rightarrow V_A = 134.17 \text{ kN};$$
- (3)  $\sum F_X = 0:$   

$$H_B = 0;$$
- (4) Verificare  $\sum F_Z = 0:$

$$V_A - V_B - 30 - 20 \cdot 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

(5) S-au obținut:

$$V_A = 134.17 \text{ kN}; V_B = 4.17 \text{ kN}; H_B = 60.$$

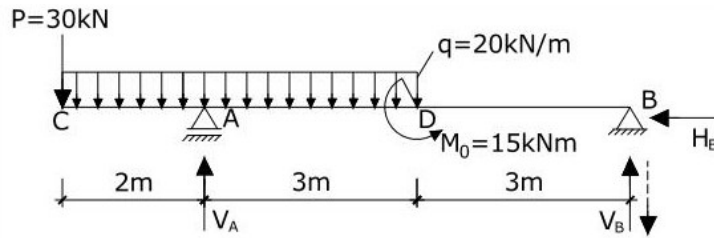


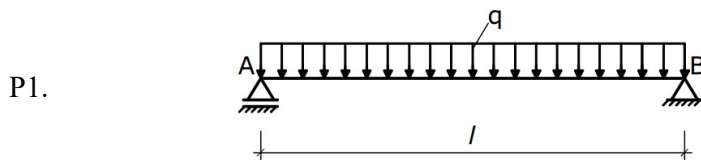
Fig. 1.7.

Obs.1. Pentru determinarea valorilor lui  $V_A$  și  $V_B$  s-a considerat sensul orar pentru ambele ecuații (1), (2). Pentru determinarea lui  $H_B$  din ecuația (3) sensul pozitiv s-a considerat de la dreapta la stânga, iar pentru verificarea din ecuația (4) sensul pozitiv s-a considerat de jos în sus.

Obs.2. Valoare negativă obținută pentru  $V_B$  înseamnă că sensul real de acțiune al acesteia este contrar celui considerat inițial. Sensul real este schematizat în Fig.1.7 cu linie întreruptă. În relația (4) de verificare,  $V_B$  a fost introdus cu sensul real.

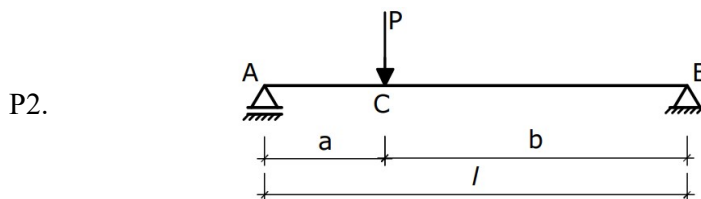
### C. PROBLEME PROPUSE

Pentru grinzile solicitate ca în Fig. 1.8, se cere să se determine reacțiunile.



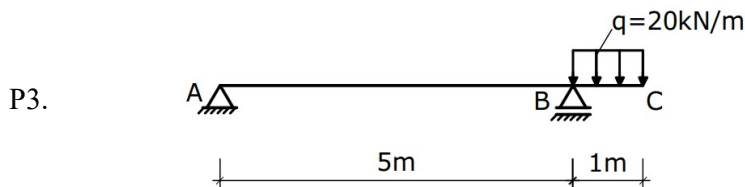
Rezultate  
parțiale:

$$V_A = \frac{ql}{2}.$$



Rezultate  
parțiale:

$$V_B = \frac{P \cdot a}{l}.$$



Rezultate  
parțiale:

$$V_B = 22 \text{ kN}.$$

P4.

Rezultate  
parțiale:

$$V_A = 30 \text{ kN}.$$

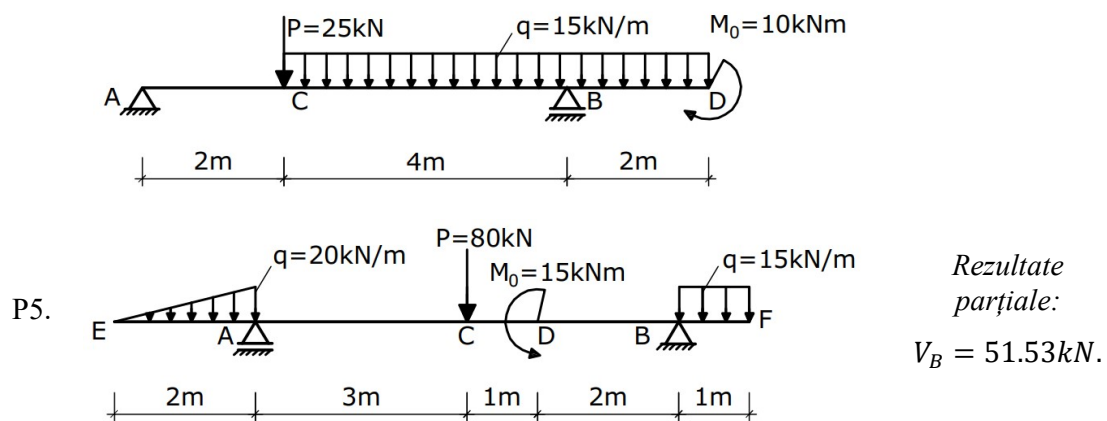


Fig. 1.8. Probleme propuse.

## LUCRAREA 2

## DIAGrame DE EFORTURI

## A. NOȚIUNI TEORETICE

## A.1. Eforturi secționale

Definiție: Eforturile secționale reprezintă componentele taylorului de reducere ale forțelor exterioare date și de legătură de la stânga sau de la dreapta secțiunii în raport cu centrul de greutate echivalent celui dat de  $\sigma$  (tensiuni normale) și  $\tau$  (tensiuni tangențiale) de pe toată secțiunea.

În starea spațială există șase eforturi secționale (Fig. 2.1):

- $[N_x]$  – forța axială orientată după axa  $Ox$ ;
- $[M_y]$  – moment încovoietor – secțiunea este rotită în jurul axei  $Oy$ ;
- $[M_z]$  – moment încovoietor – secțiunea este rotită în jurul axei  $Oz$ ;
- $[T_y]$  – forța tăietoare orientată după axa  $Oy$ ;
- $[T_z]$  – forța tăietoare orientată după axa  $Oz$ ;
- $[M_t]$  – moment de torsiune – secțiunea este rotită în jurul axei  $Ox$  a barei.

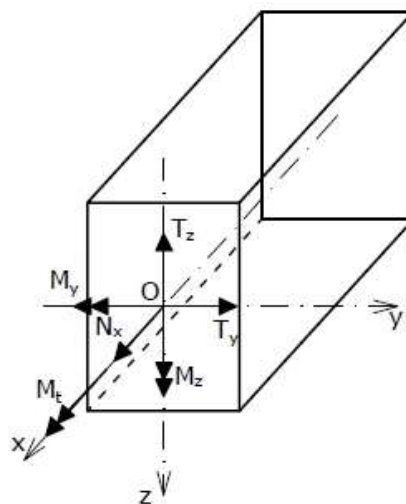


Fig. 2.1.

În cazul barelor acționate de forțe în planul vertical ( $xOz$ ), rezultă doar trei eforturi secționale:  $N_x = N$ ,  $T_z = T$ ,  $M_y = M$ .

## A.2. Calculul eforturilor secționale și convenția de semne

Determinarea eforturilor se realizează utilizând **metoda secțiunilor**. Se parcurg următorii pași:

- 1) Bara AB supusă la forțe exterioare date și de legătură se secționează în punctul C cu un plan perpendicular pe axa barei ( $Ox$ ). Bara se împarte astfel în două tronsoane: I ( $TR_{st}$ ) și II ( $TR_{dr}$ ), așa cum este ilustrat în Fig. 2.2.a.
- 2) Se îndepărtează una din părți (ex: tronsonul  $TR_{st}$ ).
- 3) Pentru ca tronsonul CB ( $TR_{dr}$ ) rămas să fie în echilibru, în baza teoremei echilibrului părților, în punctul C (centrul de greutate al secțiunii) se introduce un sistem de forțe static echivalent cu cel al forțelor (inclusiv reacțiuni) de pe tronsonul îndepărtat  $TR_{st}$  (Fig. 2.2.b).
- 4) Valorile eforturilor în secțiunea C se vor determina astfel:

- a)  $N_C$  – suma proiecțiilor după axa barei (Ox) a tuturor forțelor exterioare date și de legătură ( $F_x$ ) de pe tronsonul înlăturat ( $TR_{st}$ ) în raport cu centrul de greutate al secțiunii C.

$$N_C = \sum_{TR_{stg}} F_x \quad (2.1)$$

- b)  $T_C$  – suma proiecțiilor după normala la axa barei a tuturor forțelor exterioare date și de legătură ( $F_z$ ) de pe tronsonul înlăturat ( $TR_{st}$ ) în raport cu centrul de greutate al secțiunii C.

$$T_C = \sum_{TR_{stg}} F_z \quad (2.2)$$

- c)  $M_C$  – suma momentelor tuturor forțelor exterioare date și de legătură de pe tronsonul îndepărtat ( $TR_{st}$ ) în raport cu centrul de greutate al secțiunii C.

$$M_C = \sum_{TR_{stg}} M_C \quad (2.3)$$

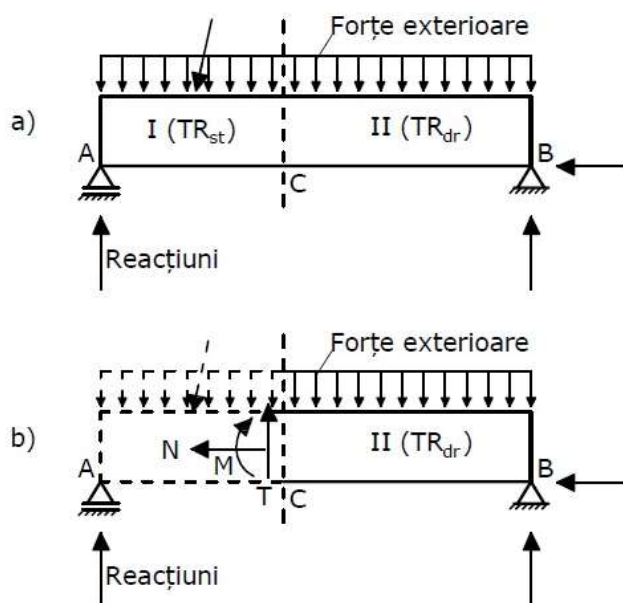


Fig. 2.2. Calculul eforturilor.

Obs. În cazul în care bara se parcurge de la stânga la dreapta pentru determinarea eforturilor secționale, tronsonul rămas va fi tot timpul cel din dreapta secțiunii considerate; pentru sensul de parcurgere de la dreapta la stânga, tronsonul rămas va fi cel din stânga secțiunii.

Convenția de semne a eforturilor secționale detaliate mai sus este ilustrată în Fig. 2.3, astfel:

- $N$  – este pozitiv dacă iese din secțiune;
- $T$  – este pozitiv dacă rotește tronsonul rămas în sens orar;
- $M$  – este pozitiv dacă întinde fibra inferioară.

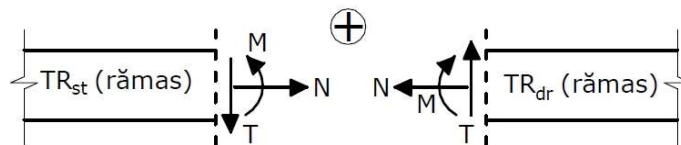


Fig. 2.3. Eforturi secționale  $N$ ,  $T$ ,  $M$ ; convenția de semne.

### A.3. Diagrame de eforturi

Definiție: Diagrama de variație a unui efort este reprezentarea grafică a valorilor acestuia în raport cu axa barei ( $Ox$ ).

Poziția unei secțiuni transversale pe axa barei se definește prin mărimea coordonatei  $x$  (abscisa), măsurată din originea  $O$  a sistemului de coordonate atașat. În cele ce urmează, originea se va considera întotdeauna în capătul din stânga al barei. Astfel, eforturile secționale pot fi considerate ca și funcții de variabila  $x$ .

Convenția de reprezentare:

- Pentru  $N$ : ordonatele pozitive se reprezintă **deasupra liniei** de referință;
- Pentru  $T$ : ordonatele pozitive se reprezintă **deasupra liniei** de referință;
- Pentru  $M$ : ordonatele pozitive se reprezintă **dedesubtul liniei** de referință (momentele încovoietoare se reprezintă pe fibra întinsă).

### A.4. Relațiile diferențiale între încărcări și eforturile secționale și consecințele acestora

$$\frac{dN}{dx} = -p \quad (2.4)$$

$$\frac{dT}{dx} = -q \quad (2.5)$$

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (2.7)$$

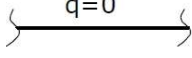
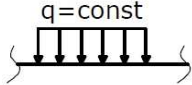
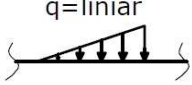
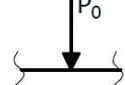
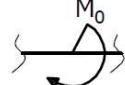
unde:  $p$  – forța distribuită axial,  $q$  – forța distribuită transversal.

Consecințele relațiilor (2.4) și (2.5) sunt similare, astfel încât se va pune accentul în continuare doar pe relația (2.5).

*Obs.1. Dacă  $q$  este o funcție de gradul  $n$  atunci, în baza relației diferențiale (2.5),  $T$  va fi o funcție de grad  $n+1$ .*

*Obs.2. Conform Ec. (2.6), dacă  $T$  este o funcție de grad  $n+1$ , atunci  $M$  va fi o funcție de grad  $n+2$ .*

Tab. 2.1. Consecințele relațiilor diferențiale între  $q$ ,  $T$  și  $M$ ; gradul funcției.

$q$			(funcție grad 0) 	(funcție grad I) 	$P_0$ – forță concentrată 	$M_0$ – concentrat 
$T$	0	<b>constant</b> (funcție grad 0)	<b>liniar</b> (funcție grad I)	<b>parabolă ord.II</b> (funcție grad II)	salt = $P_0$	–
$M$	<b>const</b> .	<b>liniar</b> (funcție grad I)	<b>parabolă ord.II</b> (funcție grad II)	<b>parabolă ord.III</b> (funcție grad III)	schimbare de pantă	salt = $M_0$

unde:  $q$  – încărcarea distribuită transversal,  $T$  – forța tăietoare,  $M$  – momentul încovoietor.

Obs.1. O forță concentrată  $P_0$  va produce în diagrama de forță tăietoare  $T$  un salt în sensul și de valoarea acesteia; în diagrama de moment încovoietor  $M$  se va produce o schimbare de pantă.

Obs.2. Un moment concentrat  $M_0$  va produce în diagrama  $M$  un salt în sensul și de valoarea acesteia; diagrama  $T$  nu este influențată.

Obs.3. În secțiunea în care forța tăietoare se anulează ( $T = 0$ ), diagrama  $M$  va avea o valoare extremă. Excepție fac extremitățile intervalelor.

Tab. 2.2. Consecințele relațiilor diferențiale între  $q$ ,  $T$  și  $M$ : monotonia funcției.

$q$	$q > 0$	$q < 0$	$T$	$T > 0$	$T < 0$
$T$	$T$ – descrescător	$T$ – crescător	$M$	$M$ – crescător	$M$ – descrescător

În baza Tab.2.1, respectiv a observațiilor mai sus menționate se pot defini secțiunile caracteristice, necesare la trasarea diagramei de eforturi.

Astfel, pentru trasarea diagramei de forță tăietoare ( $T$ ) sau efort axial ( $N$ ) **secțiunile caracteristice** sunt:

- De o parte și de alta a unei forțe concentrate (forțe exterioare sau reacțiuni), întrucât acestea produc salturi în diagramă. *Atenție, nu se va considera rezultanta  $R$  a unei încărcări distribuite.*
- La începutul și sfârșitul unei încărcări distribuite.

**Secțiunile caracteristice** pentru trasarea diagramei de moment încovoietor ( $M$ ) sunt următoarele:

- În dreptul forțelor concentrate, întrucât acestea produc o schimbare de pantă în punctele respective.
- De o parte și de alta a unui moment concentrat, deoarece acesta produce un salt în diagramă.
- La începutul și sfârșitul unei încărcări distribuite.

- În secțiunea unde forța tăietoare se anulează ( $T = 0$ ), întrucât în diagrama  $M$  vom avea o valoare extremă.

Obs. Regulile valabile pentru trasarea diagramei de forță tăietoare,  $T$  se aplică și la trasarea diagramei de forță axială  $N$ .

## B. EXEMPLE DE CALCUL

Ex.1. Pentru grinda simplu rezemată și încărcată ca în Fig. 2.4, să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .

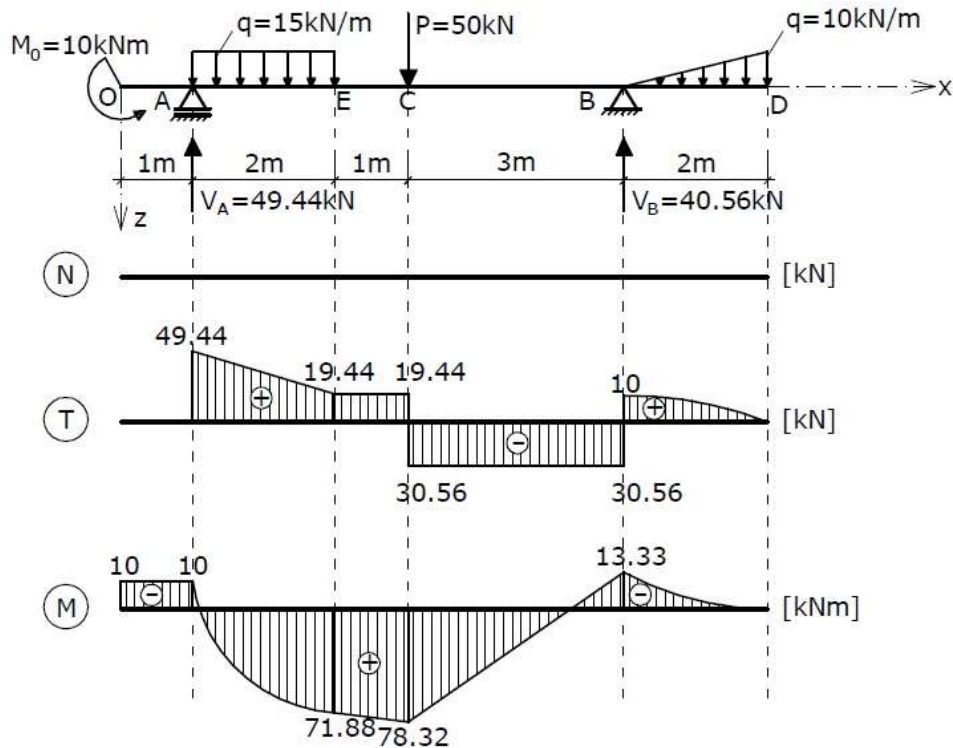


Fig. 2.4.

### REZOLVARE

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H_B$  din ecuațiile de echilibru static (vezi Lucrarea nr. 1).

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & 10 - 15 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 50 \cdot 3 + V_B \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + 6 \right) = 0 \\ \Rightarrow & V_B = 40.56 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: & 10 - V_A \cdot 6 + 15 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \right) + 50 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0 \\ \Rightarrow & V_A = 49.44 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\sum F_X = 0: H_B = 0.$$



**S-au obținut:**

$$V_A = 49.44 \text{ kN}; V_B = 40.56 \text{ kN}; H_B = 0.$$

Deoarece  $H_B = 0$ , reacțiunea nu a fost marcată în Fig. 2.4.

Având în vedere că nu există forțe/reacțiuni ce acționează în lungul barei sau înclinate, diagrama de efort axial  $N$  este nulă.

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare se parcurge bara din originea  $O$  (capătul din stânga) în sensul axei longitudinale și se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$T_O = 0; T_A^{st} = 0; T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = 49.44 \text{ kN}; T_E = T_A^{dr} - 15 \cdot 2 = 19.44 \text{ kN};$$

$$T_C^{st} = T_E = 19.44 \text{ kN}; T_C^{dr} = T_C^{st} - 50 = -30.56 \text{ kN}; T_B^{st} = T_C^{dr} = -30.56 \text{ kN};$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 10 \text{ kN}; T_D = T_B^{dr} - 0.5 \cdot 10 \cdot 2 = 0.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama de forță tăietoare ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab.2.1. Diagrama  $T$  se închide întotdeauna pe linia de referință, deoarece bara este în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate și a reacțiilor.

Pentru trasarea diagramei de moment încovoietor în lungul barei, se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$M_O^{dr} = -10 \text{ kNm}; M_A = -10 \text{ kNm};$$

$$M_E = -10 + V_A \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 71.88 \text{ kNm};$$

$$M_C = -10 + V_A \cdot 3 - 15 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + 1\right) = 78.32 \text{ kNm}$$

( $M_C$  – maxim,  $T$  – salt în punctul  $C$  și se anulează);

$$M_B = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -13.33 \text{ kNm}; M_D = 0.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

**Ex.2.** Pentru grinda simplu rezemată și încărcată ca în Fig. 2.5, să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .

*REZOLVARE*

Se determină reacțiunile  $V_O$ ,  $V_A$  și  $H_O$  din ecuațiile de echilibru static (vezi Lucrarea nr. 1).

$$\sum M_O = 0: -V_A \cdot 5 + 40 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_A = 144 \text{ kN};$$

$$\sum M_A = 0: V_O \cdot 5 - 40 \cdot 6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_O = 96 \text{ kN};$$

$$\sum F_X = 0: H_O = 0.$$

S-au obținut:

$$V_A = 144 \text{ kN}; V_O = 96 \text{ kN}; H_O = 0.$$

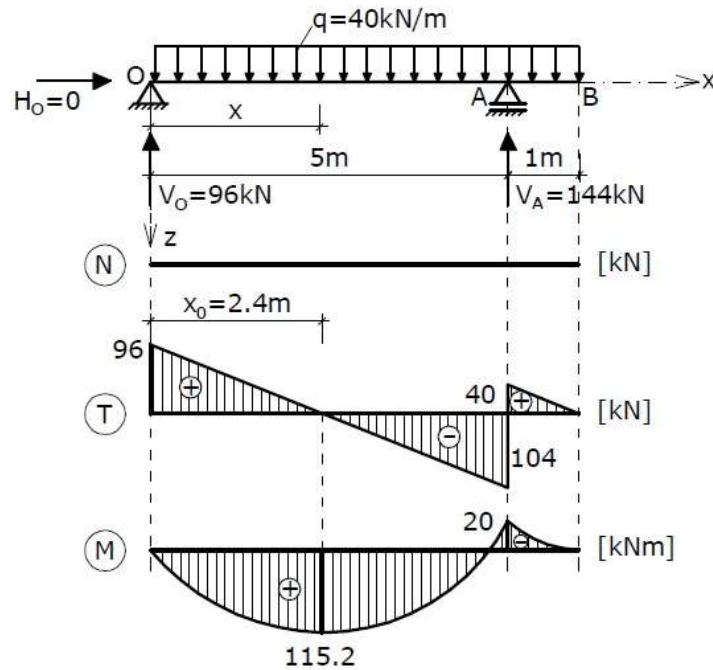


Fig. 2.5.

Având în vedere că nu există forțe/reacțiuni ce acționează în lungul barei sau înclinate, diagrama de efort axial  $N$  este nulă.

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare se parcurge bara din originea  $O$  (capătul din stânga) în sensul axei barei și se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$T_O^{dr} = V_O = 96 \text{ kN}; T_A^{st} = T_O^{dr} - 40 \cdot 5 = -104 \text{ kN}; T_A^{dr} = T_A^{st} + 144 = 40 \text{ kN};$$

$$T_B^{st} = T_A^{dr} - 40 \cdot 1 = 0.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama de forță tăietoare ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab.2.1.

*Obs. În secțiunea unde  $T$  se anulează ( $T = 0$ ), în diagrama  $M$  vom avea o valoare extremă (maximă). În consecință, este necesar să se determine poziția unde  $T = 0$  pentru a putea identifica valoarea extremă din diagrama  $M$ .*

Se scrie condiția:

$$T(x) = 0: T(x) = T_O^{dr} - 40 \cdot x = 0: \Rightarrow x_0 = 2.4 \text{ m}$$

Pentru trasarea diagramei de moment încovoietor în lungul barei, se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$M_O = 0; \quad M_B = 0; \quad M_A = -40 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -20 \text{ kNm};$$

$$M_{X_0} = M_{max} = 96 \cdot 2.4 - 40 \cdot 2.4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.4 = 115.2 \text{ kNm};$$

*Obs. În secțiunea  $x_0$  unde  $T = 0$ , diagrama de moment încovoietor are o valoare extremă ( $M_{max}$ ). Astfel, secțiunea  $x_0$  devine secțiune caracteristică necesară pentru trasarea diagramei  $M$ .*

Cu valorile obținute se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

**Ex.3.** Pentru consola încărcată ca în Fig. 2.6, să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .

#### REZOLVARE

Se determină reacțiunile  $V_A, H_A$  și  $M_A$  din ecuațiile de echilibru static considerând proiecțiile forței  $P$  după axele  $Ox$  și  $Oz$  (se va revedea Lucrarea nr. 1).

$$\sum F_Z = 0: \quad V_A - 12 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 30.39 \text{ kN};$$

$$\sum F_X = 0: \quad H_A - 12 \cdot \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ kN};$$

$$\sum M_A = 0: \quad 12 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 + 5 + 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = 66.57 \text{ kNm}.$$

**S-au obținut:**

$$V_A = 30.39 \text{ kN}; \quad H_A = 6 \text{ kN}; \quad M_A = 66.57 \text{ kNm}.$$

Se determină valorile lui  $N$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$N_O^{dr} = -12 \cdot \cos 60^\circ = -6 \text{ kN}; \quad N_A^{st} = -H_A = -6 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama  $N$ , respectând aceleași reguli ca și la diagrama  $T$  (Tab.2.1).

Se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$T_O^{dr} = -12 \cdot \sin 60^\circ = -10.39 \text{ kN}; \quad T_B = T_O^{dr} = -10.39 \text{ kN};$$

$$T_A^{st} = T_B - 10 \cdot 2 = -30.39 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama de forță tăietoare ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab.2.1.

Se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice.

$$M_O = 0; \quad M_C^{st} = -12 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 = -10.39 \text{ kNm}; \quad M_C^{dr} = M_C^{st} - 5 = -15.39 \text{ kNm};$$

$$M_B = -12 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - 5 = -25.78 \text{ kNm}; \quad M_A^{st} = -66.57 \text{ kNm}.$$

Cu valorile obținute se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

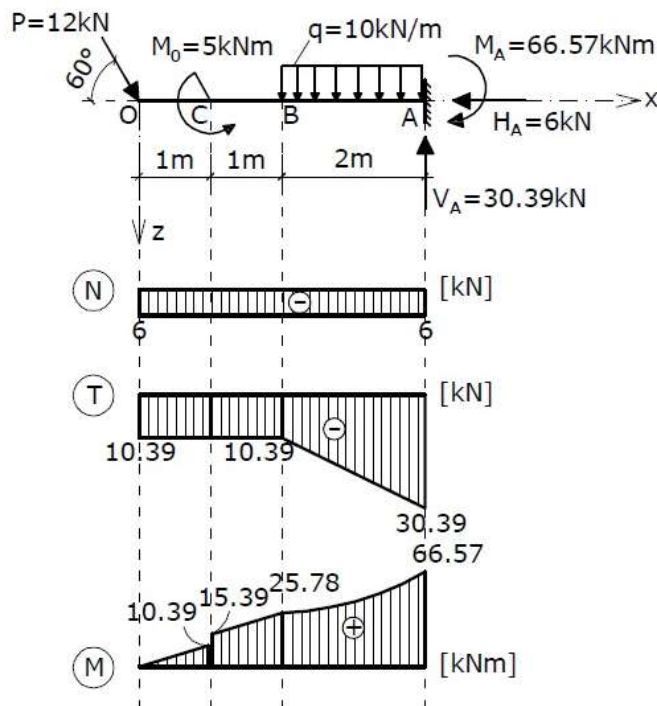


Fig. 2.6.

**Ex.4.** Pentru grinda simplu rezemată și încărcată ca în Fig. 2.7, să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .

**REZOLVARE**

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H_B$  din ecuațiile de echilibru static (vezi Lucrarea nr. 1).

$$\sum M_A = 0: -V_B \cdot 5 + 20 \cdot 4 \cdot 1 + 40 \cdot 4 + 25 = 0 \Rightarrow V_B = 53 \text{ kN};$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 5 - 20 \cdot 4 \cdot 4 - 40 \cdot 1 + 25 = 0 \Rightarrow V_A = 67 \text{ kN};$$

$$\sum F_x = 0: H_B = 0.$$

**S-au obținut:**

$$V_A = 67 \text{ kN}; \quad V_B = 53 \text{ kN}; \quad H_B = 0.$$

Având în vedere că nu există forțe/reacțiuni ce acționează în lungul barei sau înclinate, diagrama de efort axial  $N$  este nulă.

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare se parcurge bara din originea O (capătul din stânga) în sensul axei barei și se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$T_O = 0; T_A^{st} = T_O - 20 \cdot 1 = -20 \text{ kN}; T_A^{dr} = T_A^{st} + 67 = -20 + 67 = 47 \text{ kN};$$

$$T_C = T_A^{dr} - 20 \cdot 3 = 47 - 20 \cdot 3 = -13 \text{ kN}; T_D^{st} = T_C = -13 \text{ kN}; T_D^{dr} = T_D^{st} - 40 =$$

$$-13 - 40 = -53 \text{ kN}; T_B^{st} = T_D^{dr} = -53 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama de forță tăietoare ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab.2.1.

Obs. În secțiunea unde  $T$  se anulează ( $T = 0$ ), în diagrama  $M$  vom avea o valoare extremă (maximă). În consecință, este necesar să se determine poziția unde  $T = 0$  pentru a putea identifica valoarea extremă din diagrama  $M$ .

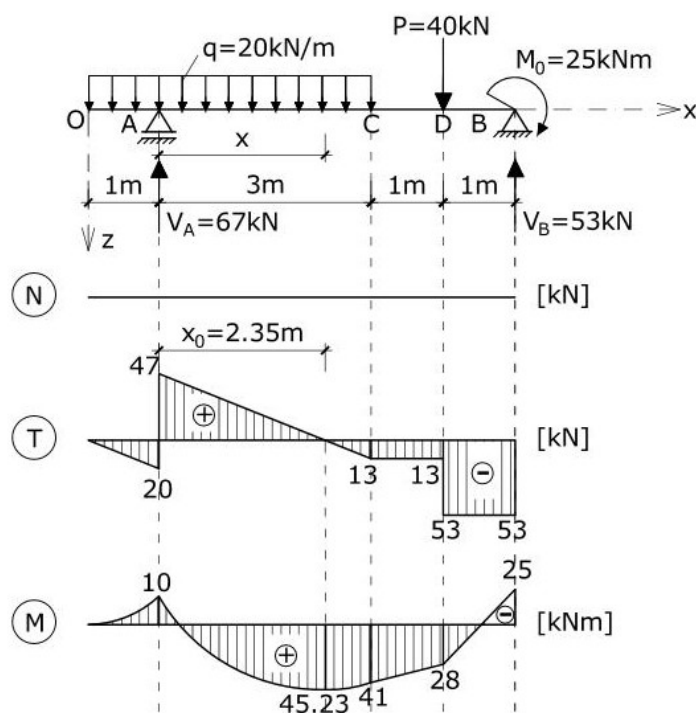


Fig. 2.7.

Se scrie condiția:

$$T(x) = 0: T(x) = T_A^{dr} - 20 \cdot x = 0: \Rightarrow x_0 = 2.35\text{ m}$$

Pentru trasarea diagramei de moment încovoiător în lungul barei, se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice, astfel:

$$M_O = 0; M_A = -20 \cdot 1 \cdot 0.5 = -10 \text{ kNm}; M_C = -20 \cdot 4 \cdot 2 + 67 \cdot 3 = 41 \text{ kNm};$$

$$M_B^{st} = -25 \text{ kNm}; M_D = -25 + 53 \cdot 1 = 28 \text{ kNm}; M_{x_0} = M_{max} = -20 \cdot 3.35 \cdot \frac{3.35}{2} + 67 \cdot$$

$$2.35 = 45.23 \text{ kNm};$$

Obs. În secțiunea  $x_0$  unde  $T = 0$ , diagrama de moment încovoietor are o valoare extremă ( $M_{max}$ ). Astfel, secțiunea  $x_0$  devine secțiune caracteristică necesară pentru trasarea diagramei  $M$ .

Cu valorile obținute se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

### C. PROBLEME PROPUSE

Pentru grinzile solicitate ca în Fig. 2.8, se cere să se traseze diagramele de eforturi  $N, T, M$ .

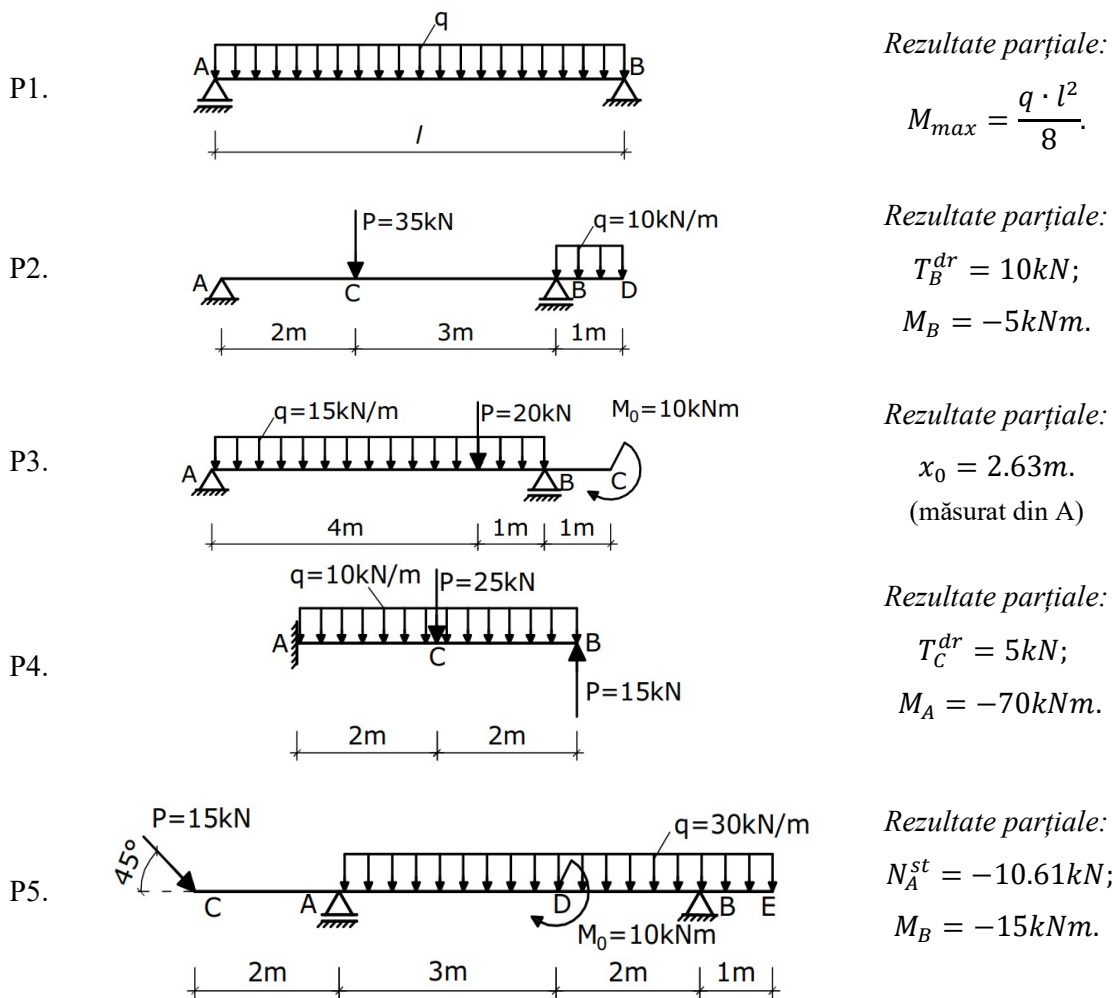


Fig. 2.8. Probleme propuse.

## LUCRAREA 3

### DIAGrame SIMPLE. SUPRAPUNEREA DIAGRAMELOR. UTILIZAREA SIMETRIEI ȘI ANTISIMETRIEI

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

##### A.1. Suprapunerea diagramelor

Principiul suprapunerii efectelor se poate aplica în baza valabilității ipotezelor micilor deplasări (liniaritatea geometrică) și a comportării liniar elastice a materialului (legea lui Hooke:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , liniaritatea fizică). În consecință, trasarea diagramelor de eforturi finale se poate realiza prin trasarea diagramelor de eforturi din fiecare **încărcare simplă** (= o singură încărcare pe bară) și, la final, se suprapun diagramele simple prin adunarea algebrică a valorilor eforturilor din fiecare secțiune caracteristică.

*Obs. Legea de variație din diagrama de efort finală între două secțiuni caracteristice va fi direct corelată cu încărcarea totală de pe bară, având gradul cel mai mare.*

Diagramele uzuale de moment simple sunt ilustrate în Fig. 3.1.

##### A.2. Utilizarea simetriei și antisimetriei

*Dacă bara este simetrică din punct de vedere geometric (al rezemărilor) și încărcată simetric, atunci diagrama de forță tăietoare  $T$  este antisimetrică, iar diagrama de moment încovoietor  $M$  este simetrică (și  $N$  este simetrică).*

*Dacă bara este simetrică din punct de vedere geometric și încărcată antisimetric, atunci diagrama  $T$  este simetrică, iar diagrama  $M$  este antisimetrică (și  $N$  este antisimetrică).*

#### B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru grinda simplu rezemată și încărcată ca în Fig. 3.2, să se traseze diagrama de moment încovoietor  $M$  utilizând principiul suprapunerii efectelor.

##### REZOLVARE

Se identifică încărcările simple ce acționează asupra grinzii: forța concentrată  $P$  și sarcina distribuită  $q$ .

Se trasează diagrama de moment încovoietor  $M_1$  doar din forța concentrată  $P$  (vezi Fig. 3.1(10)).

Se trasează diagrama  $M_2$  din sarcina distribuită  $q$  pe consola BC (vezi Fig. 3.1(5)).

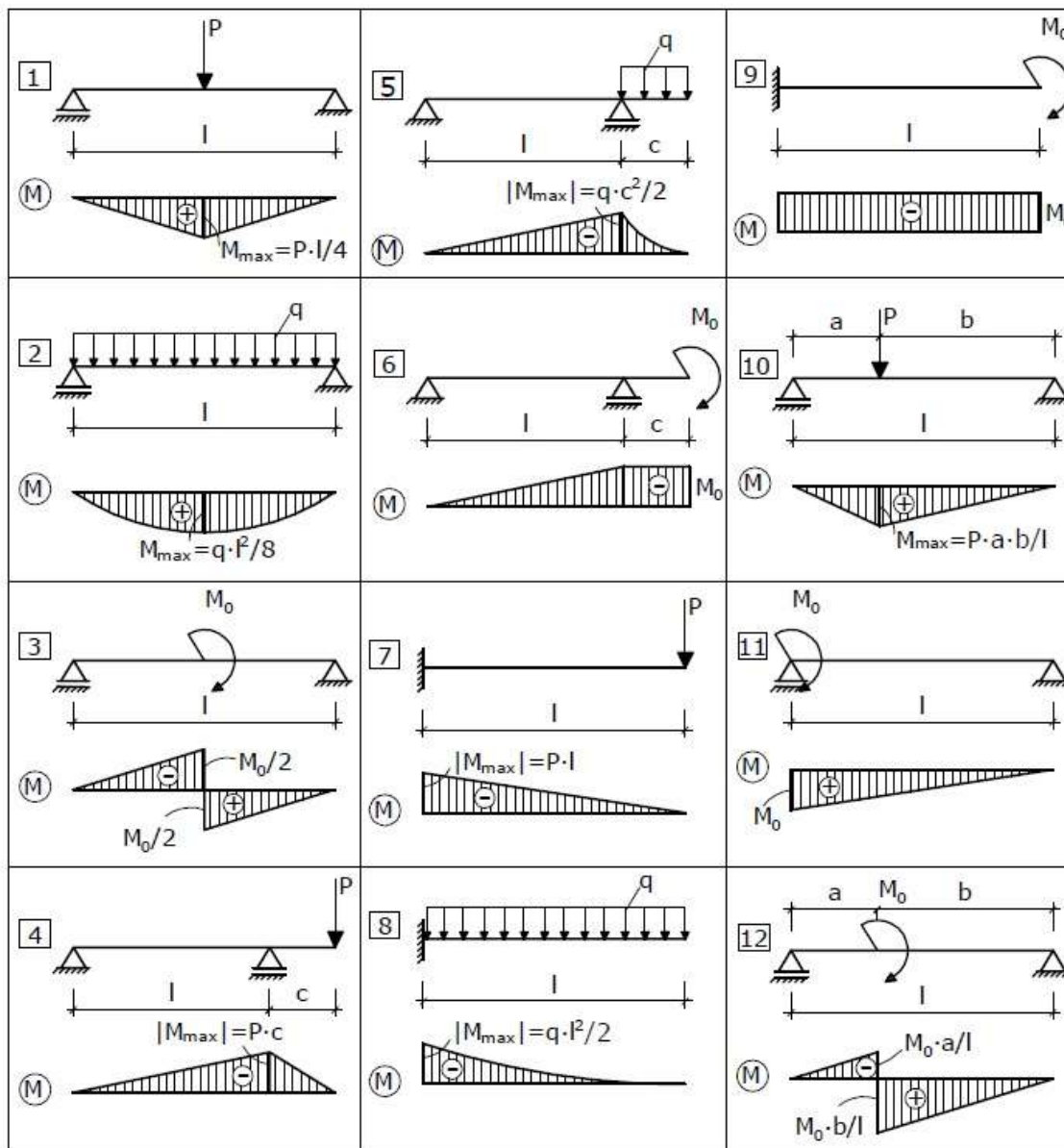


Fig. 3.1. Diagrame de moment simple.

Se trasează diagrama de moment încovoietor finală  $M_f$  prin adunarea algebrică a valorilor din secțiunile caracteristice:

$$M_f^A = M_1^A + M_2^A = 0; \quad M_f^D = M_1^D + M_2^D = 60 - 4 = 56 \text{ kNm};$$

$$M_f^B = M_1^B + M_2^B = 0 - 10 = -10 \text{ kNm}; \quad M_f^C = M_1^C + M_2^C = 0.$$

Pentru identificarea legii de variație între secțiunile caracteristice se va urmări încărcarea totală aplicată pe bară (Fig. 3.2), astfel:

- intervalul AD:  $q=0 \Rightarrow M$  – variație liniară;



- intervalul DB:  $q=0 \Rightarrow M$  – variație liniară;
- intervalul BC:  $q=\text{constant} \Rightarrow M$  – variație parabolică.

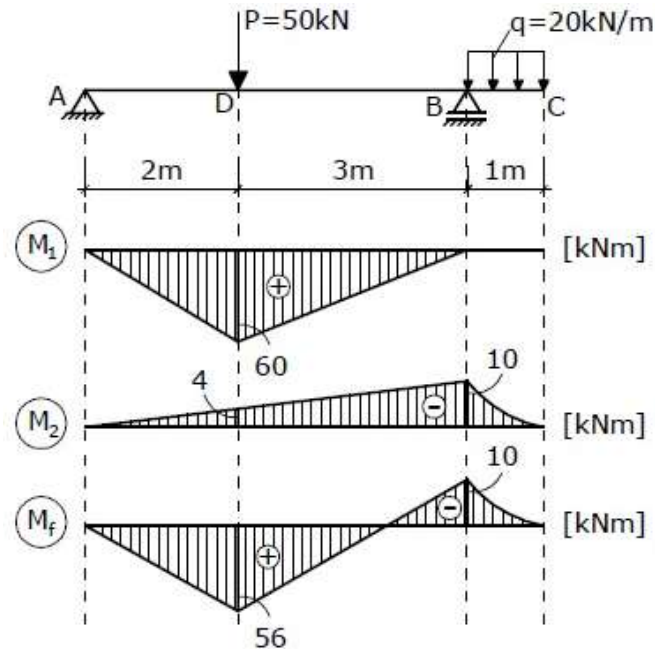


Fig. 3.2.

**Ex.2.** Pentru consola încărcată ca în Fig. 3.3, să se traseze diagrama de moment încovoietor  $M$  utilizând principiul suprapunerii efectelor.

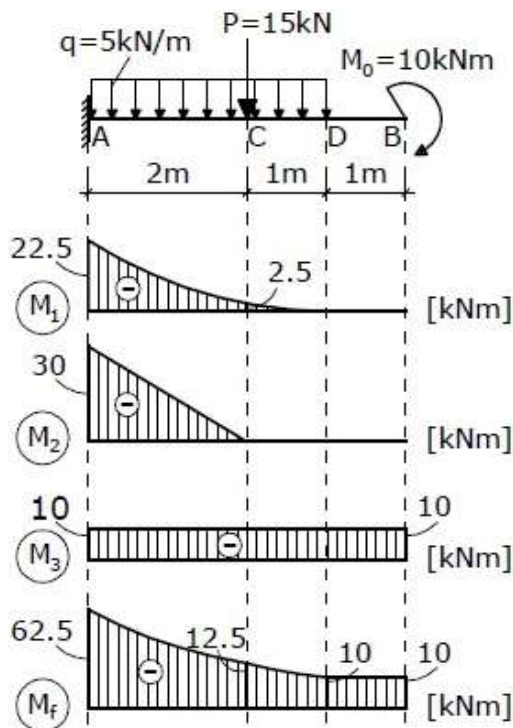


Fig.3.3.

### REZOLVARE

Se identifică încărcările simple ce acționează asupra grinzii:

- sarcina distribuită  $q$ ;
- forța concentrată  $P$ ;
- moment concentrat  $M_0$ .

Se trasează diagramele de momente încovoietoare  $M_1, M_2, M_3$  din fiecare încărcare simplă (vezi Fig. 3.1), iar apoi se trasează diagrama de moment încovoietor finală  $M_f$  prin adunarea algebrică a valorilor din secțiunile caracteristice, astfel:

$$M_f^{Adr} = M_1^{Adr} + M_2^{Adr} + M_3^{Adr} =$$

$$= -22.5 - 30 - 10 = -62.5\text{kNm};$$

$$M_f^C = M_1^C + M_2^C + M_3^C = -2.5 + 0 - 10 =$$

$$= -12.5\text{kNm};$$

$$M_f^D = M_1^D + M_2^D + M_3^D = 0 + 0 - 10 = -10 \text{ kNm};$$

$$M_f^{Bst} = M_1^{Bst} + M_2^{Bst} + M_3^{Bst} = 0 + 0 - 10 = -10 \text{ kNm}.$$

Obs. Pentru stabilirea valorii în punctul C în diagrama de moment finală  $M_f$  este necesar să se determine valoarea în punctul respectiv asociată diagramei simple  $M_1$ .

Legea de variație între secțiunile caracteristice este corelată cu încărcarea totală aplicată pe bară conform Fig. 3.3.

Ex. 3. Pentru grinda simplu rezemată și încărcată ca în Fig. 3.4, să se traseze diagrama de moment încovoietor  $M$  și forță tăietoare  $T$  utilizând principiul suprapunerii efectelor și simetria.

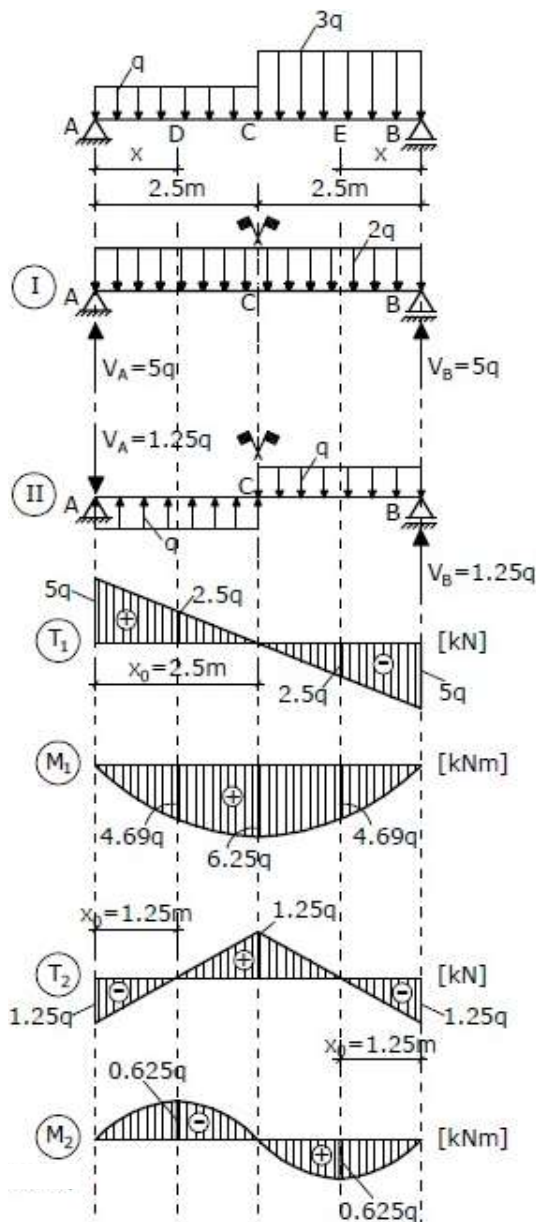


Fig.3.4.

### REZOLVARE

Se descompune încărcarea totală în două încărcări (I, II).

Pentru **grinda încărcată cu I**, se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $H_A$  și  $V_B$  din ecuațiile de echilibru static (se va revedea Lucrarea Nr. 1).

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 5 - 2 \cdot q \cdot 5 \cdot 2.5 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 5 \cdot q;$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 5 - 2 \cdot q \cdot 5 \cdot 2.5 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 5 \cdot q;$$

$$\sum F_x = 0: H_A = 0.$$

S-au obținut:

$$V_A = V_B = 5 \cdot q; H_A = 0.$$

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare, se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice:

$$T_A^{dr} = V_A = 5 \cdot q; T_B^{st} = -V_B = -5 \cdot q.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama  $T_1$  ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab. 2.1.

Obs. În secțiunea unde  $T$  se anulează în diagrama  $M$  vom avea o valoare extremă. În consecință, este necesar să se determine poziția unde  $T = 0$  pentru a putea identifica valoarea extremă din diagrama  $M_1$ .

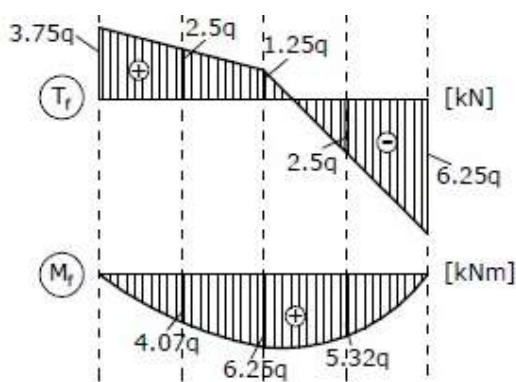


Fig.3.4. - continuare

Se scrie condiția:

$$T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = T_A^{dr} - 2 \cdot q \cdot x = 0 \\ \Rightarrow x_0 = 2.5m$$

Pentru trasarea diagramei de moment încovoietor în lungul barei, se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice:

$$M_A = M_B = 0;$$

$$M_{max} = M_C = 5 \cdot q \cdot 2.5 - 2 \cdot q \cdot 2.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.5 \\ = 6.25 \cdot q;$$

Cu valorile obținute se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

Pentru **grinda încărcată cu II**, se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $H_A$  și  $V_B$  din ecuațiile de echilibru static (se va revedea Lucrarea Nr. 1).

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 5 - 2.5 \cdot q \cdot (2.5 + 1.25) + 2.5 \cdot q \cdot 1.25 = 0 \Rightarrow V_B = 1.25 \cdot q;$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 5 - 2.5 \cdot q \cdot (2.5 + 1.25) + 2.5 \cdot q \cdot 1.25 = 0 \Rightarrow V_A = 1.25 \cdot q;$$

$$\sum F_x = 0: H_A = 0.$$

**S-au obținut:**

$$V_A = V_B = 1.25 \cdot q; H_A = 0.$$

*Obs. În cazul grinzii încărcate cu II, reacțiunea  $V_A$  este egală dar de sens opus reacțiunii  $V_B$ .*

Pentru trasarea diagramei de forță tăietoare, se determină valorile lui  $T$  în secțiunile caracteristice:

$$T_A^{dr} = -V_A = -1.25 \cdot q; T_C = -1.25 \cdot q + 2.5 \cdot q = 1.25 \cdot q; T_B^{st} = -V_B = -1.25 \cdot q.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama  $T_2$  ținând cont că variația între secțiunile caracteristice este cea din Tab. 2.1.

Pentru a identifica valorile maxime din diagrama  $M_2$  (în secțiunile unde  $T = 0$ ) se scrie condiția:

$$T(x) = 0: T(x) = T_A^{dr} + q \cdot x = 0: \Rightarrow -1.25 \cdot q + q \cdot x = 0: \Rightarrow x_0 = 1.25m.$$

Pentru trasarea diagramei de moment încovoietor în lungul barei, se determină valorile lui  $M$  în secțiunile caracteristice:

$$M_A = M_B = 0; M_C = -1.25 \cdot q \cdot 2.5 + q \cdot 2.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2.5 = 0;$$

$$M_D = M_{max} = -1.25 \cdot q \cdot 1.25 + q \cdot 1.25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 = -0.625 \cdot q;$$

$$M_E = M_{max} = 1.25 \cdot q \cdot 1.25 - q \cdot 1.25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 = 0.625 \cdot q.$$

Cu valorile obținute se trasează diagrama momentelor încovoietoare ținând cont de variația dată în Tab.2.1 și de monotonia din Tab.2.2.

*Obs:* În cazul grinzii încărcată cu II, forța tăietoare  $T$  se anulează în două secțiuni; astfel, în diagrama  $M$  avem două valori extreme ( $M_D$  și  $M_E$ ).

Pentru trasarea diagramelor finale de forță tăietoare și moment încovoietor se aplică principiul suprapunerii efectelor. Astfel, se trasează diagrama de forță tăietoare finală  $T_f$  prin adunarea algebrică a valorilor din secțiunile caracteristice:

$$T_f^A = T_1^A + T_2^A = 5 \cdot q - 1.25 \cdot q = 3.75 \cdot q;$$

$$T_f^D = T_1^D + T_2^D = 2.5 \cdot q + 0 = 2.5 \cdot q;$$

$$T_f^C = T_1^C + T_2^C = 0 + 1.25 \cdot q = 1.25 \cdot q;$$

$$T_f^E = T_1^E + T_2^E = -2.5 \cdot q + 0 = -2.5 \cdot q;$$

$$T_f^B = T_1^B + T_2^B = -5 \cdot q - 1.25 \cdot q = -6.25 \cdot q.$$

Valorile finale pentru momentul încovoietor sunt:

$$M_f^A = M_1^A + M_2^A = 0;$$

$$M_f^D = M_1^D + M_2^D = 4.69 \cdot q - 0.625 \cdot q = 4.07 \cdot q;$$

$$M_f^C = M_1^C + M_2^C = 6.25 \cdot q + 0 = 6.25 \cdot q;$$

$$M_f^E = M_1^E + M_2^E = 4.69 \cdot q + 0.625 \cdot q = 5.32 \cdot q;$$

$$M_f^B = M_1^B + M_2^B = 0.$$

*Obs1.* Pentru trasarea diagramelor finale  $T_f$  și  $M_f$  este necesar să se determine suplimentar valorile forței tăietoare și momentului încovoietor din diagramele  $T_1$  și  $T_2$  (respectiv  $M_1$  și  $M_2$ ) în punctele  $D$  și  $E$  care au devenit secțiuni caracteristice (secțiuni unde  $T = 0$ , deci  $M$  are valori extreme).

*Obs2.* Întrucât grinda este simetrică din punct de vedere geometric și încărcată simetric cu I, atunci diagrama  $T_1$  este antisimetrică, iar diagrama  $M_1$  este simetrică.

*Obs3.* Întrucât grinda este simetrică din punct de vedere geometric și încărcată antisimetric cu II, atunci diagrama  $T_2$  este simetrică, iar diagrama  $M_2$  este antisimetrică.

**Ex.4.** Pentru grinda simplu rezemată încărcată ca în Fig. 3.5, să se traseze diagrama de moment încovoiător  $M$  utilizând principiul suprapunerii efectelor.

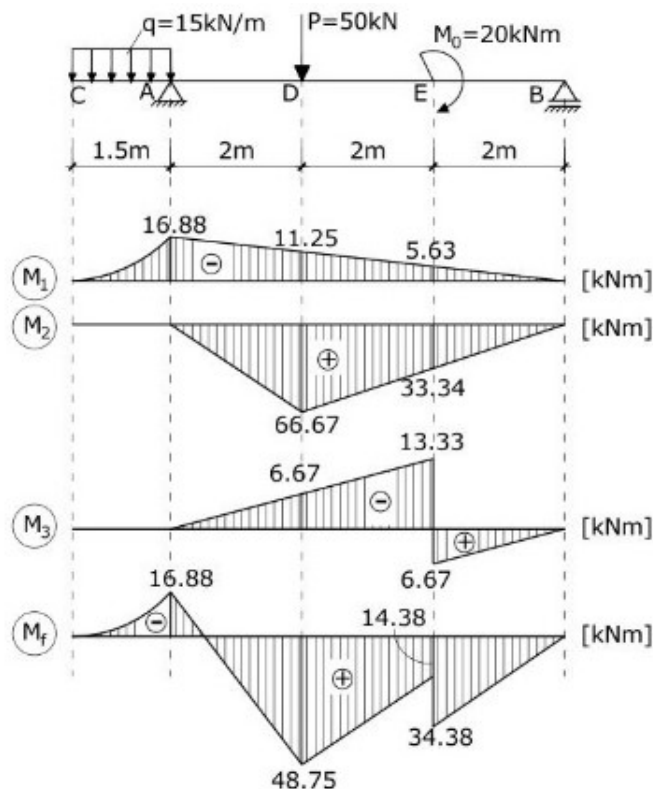


Fig.3.5.

$$M_f^A = M_1^A + M_2^A + M_3^A = -16.88 + 0 - 0 = -16.88 \text{ kNm};$$

$$M_f^D = M_1^D + M_2^D + M_3^D = -11.25 + 66.67 - 6.67 = 48.75 \text{ kNm};$$

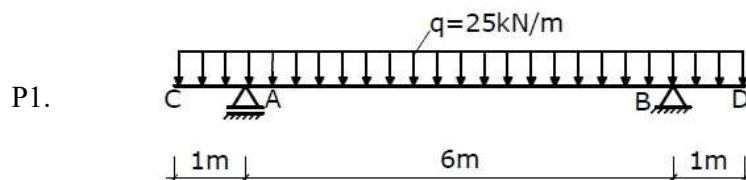
$$M_f^{Est} = M_1^{Est} + M_2^{Est} + M_3^{Est} = -5.63 + 33.34 - 13.33 = 14.38 \text{ kNm};$$

$$M_f^{Edr} = M_1^{Edr} + M_2^{Edr} + M_3^{Edr} = -5.63 + 33.34 + 6.67 = 34.38 \text{ kNm}.$$

Legea de variație între secțiunile caracteristice este corelată cu încărcarea totală aplicată pe bară conform Fig. 3.5.

### C. PROBLEME PROPUSE

Pentru grinzile solicitate ca în Fig. 3.6, se cere să se traseze diagramele de moment încovoiător  $M$  folosind principiul suprapunerii efectelor și simetria.



Rezultate parțiale:

$$M_B = -12.5 \text{ kNm}.$$

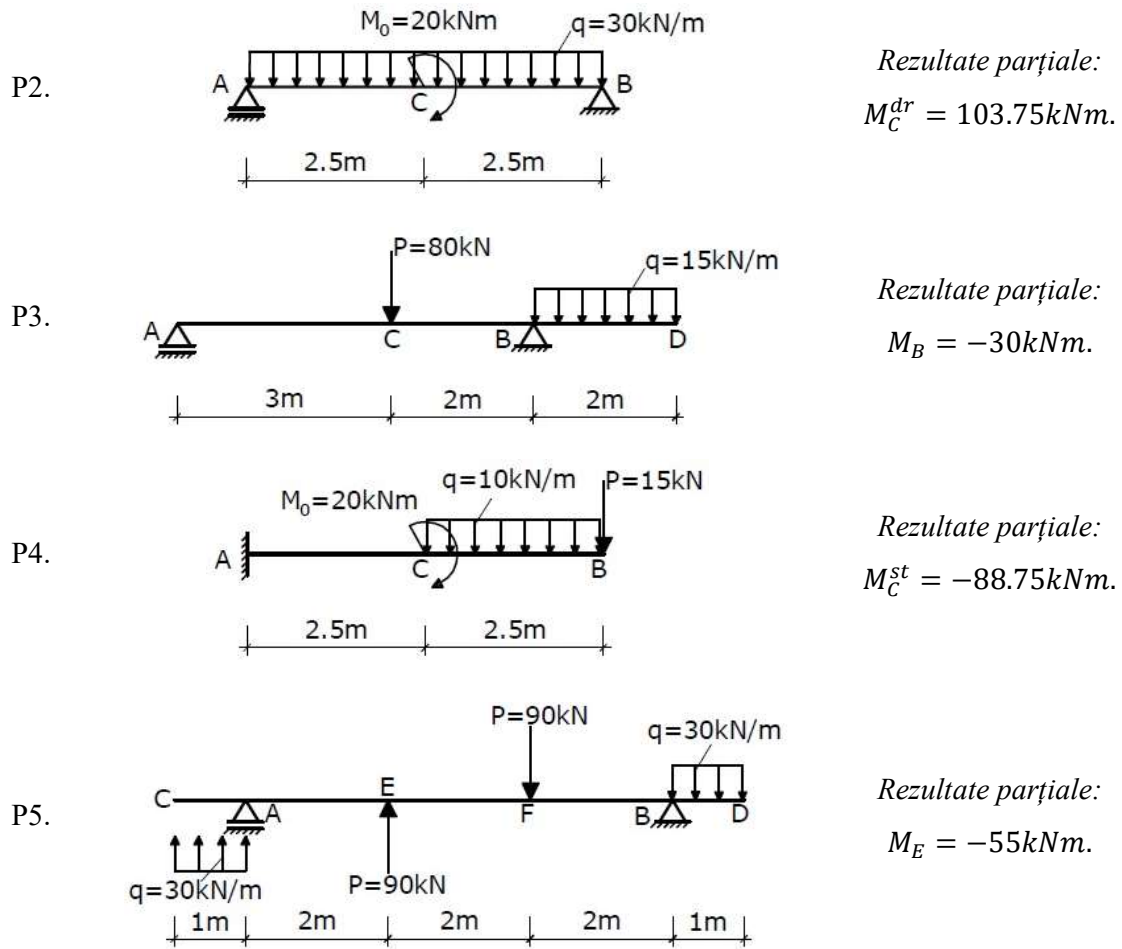


Fig. 3.6. Probleme propuse.

## LUCRAREA 4

### DIAGrame PE STĂLPI, BARE COTITE, GRINZI CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

##### A.1. Diagrame de eforturi pe stâlpi și bare cotate

Trasarea diagramei de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$  pe stâlpi sau bare cotate acționate în planul lor, se realizează urmărind principiile detaliate în Lucrarea Nr. 2.

##### A.2. Grinzi cu console și articulații

Grinzile cu console și articulații (denumite și **grinzi Gerber**) sunt sisteme statice determinate (SSD) compuse din bare legate între ele prin articulații interioare și fixate pe teren prin reazeme simple, articulații sau încastrări.

Gradul de nedeterminare statică ( $n$ ) pentru un SSD fiind  $n=0$ , trebuie satisfăcută relația (4.1).

$$n = (L_{ext} + 2 \cdot A_{int}) - 3 \cdot C = 0, \quad (4.1)$$

unde:  $L_{ext}$  – numărul de legături exterioare cu terenul,  $A_{int}$  – numărul de legături interioare,  $C$  – numărul de bare.

##### Metoda pas cu pas de rezolvare a grinzilor Gerber

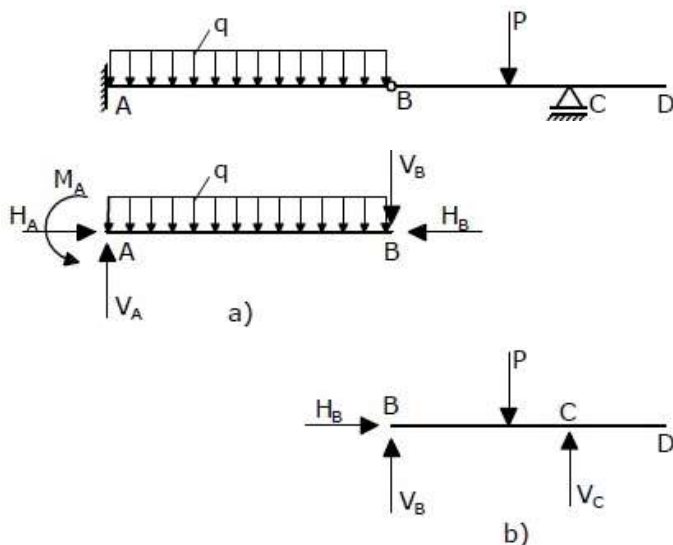


Fig. 4.1. Grinda Gerber: a) bară fundamentală; b) bară independentă.

(1) Se desfac articulațiile interioare. Pe capetele barelor obținute se introduc reacțiunile și forțele de legătură interioare, egale și de semn contrar pe cele două bare (Fig. 4.1). Se descompune grinda Gerber în:

- **bare independente:** ale căror reacțiuni pot fi determinate din ecuațiile de echilibru static (Fig.4.1.b);
- **bare fundamentale:** ale căror reacțiuni vor putea fi determinate numai după calculul reacțiunilor la barele independente (Fig.4.1.a).

- (2) Se calculează reacțiunile barelor independente.
- (3) Se calculează reacțiunile barelor fundamentale.

Obs. Reacțiunile de la barele independente devin încărcări pe barele fundamentale (în baza principiului acțiunii și reacțiunii).

## B. EXEMPLE DE CALCUL

Ex.1. Pentru stâlpul solicitat ca în Fig. 4.2, se cere trasarea diagramelor de eforturi  $N$ ,  $T$  și  $M$ .

REZOLVARE

• VARIANTA I

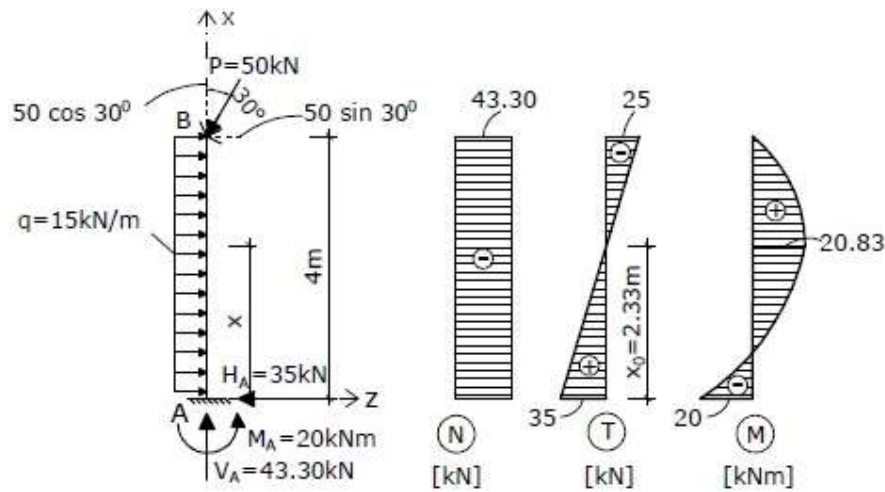


Fig. 4.2.

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $H_A$  și  $M_A$  din ecuațiile de echilibru static (se va revedea Lucrarea Nr. 1). Forța înclinată  $P$  se proiectează după axa barei ( $P \cdot \cos 30^\circ$ ) și normal pe aceasta ( $P \cdot \sin 30^\circ$ ), componente reprezentate punctat pe figură.

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - 15 \cdot 4 \cdot 0.5 \cdot 4 + 50 \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_A = 20 \text{ kNm}$$

$$\sum F_X = 0: \quad V_A - 50 \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow V_A = 43.30 \text{ kN};$$

$$\sum F_Z = 0: \quad -H_A - 50 \cdot \sin 30^\circ + 15 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_A = 35 \text{ kN}.$$

**S-au obținut:  $V_A = 43.30 \text{ kN}$ ;  $H_A = 35 \text{ kN}$ ;  $M_A = 20 \text{ kNm}$ .**

Se determină valorile forței axiale  $N$  în secțiunile caracteristice:

$$N_A^{sus} = -V_A = -43.30 \text{ kN}; \quad N_B^{jos} = -43.30 \text{ kN}.$$

Deoarece nu există încărcare distribuită axial sau concentrate după axă, diagrama  $N$  este constantă pe toată înălțimea stâlpului.

Se determină valorile forței tăietoare  $T$  în secțiunile caracteristice:



$$T_A^{sus} = +H_A = +35kN; \quad T_B^{jos} = -25kN.$$

Diagrama de forță tăietoare are o variație liniară datorită acțiunii forței distribuite  $q$ .

Se determină poziția secțiunii  $x$  față de punctul A, secțiune unde forța tăietoare se anulează:

$$T(x) = 0 \Rightarrow T_A^{sus} - 15 \cdot x = 0 \Rightarrow +35 - 15 \cdot x = 0 \Rightarrow x_0 = 2.33m;$$

Se determină valorile momentului încovoietor în secțiunile caracteristice:

$$M_A^{sus} = -20kNm; \quad M_B = 0;$$

$$M_{x_0} = M_{max} = -20 + 35 \cdot 2.33 - 15 \cdot 2.33 \cdot \frac{2.33}{2} = 20.83kNm.$$

Diagrama de moment încovoietor va avea o variație parabolică, deoarece forța tăietoare este liniară. Momentul va fi crescător până în secțiunea  $x_0$  unde  $T = 0$  (deoarece  $T$  este pozitiv), apoi va scădește.

- *VARIANTA II: Trasarea diagramelor de eforturi fără determinarea reacțiunilor, plecând din capătul liber (Fig.4.3)*

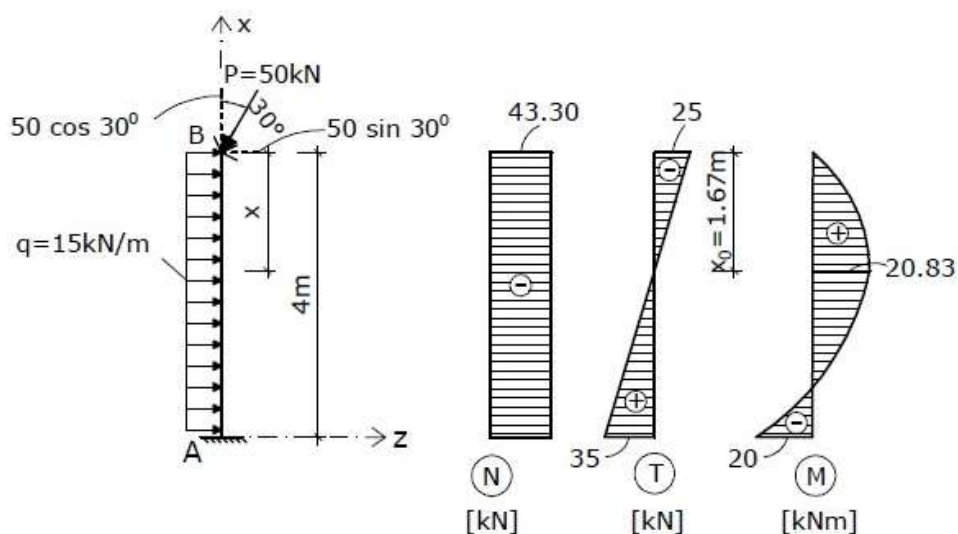


Fig. 4.3.

Pentru console, trasarea diagramelor de eforturi poate fi făcută și fără determinarea prealabilă a reacțiunilor; acestea vor rezulta din închiderea diagramelor, adică din satisfacerea condițiilor de echilibru. Bara va fi parcursă întotdeauna dinspre capătul liber spre cel încastat.

Se determină valorile forței axiale  $N$  în secțiunile caracteristice:

$$N_B^{jos} = -P \cdot \cos\alpha = -50 \cdot \cos 30^\circ = -43.30kN; \quad N_A^{sus} = N_B^{jos} = -43.30kN;$$

Diagrama  $N$  este constantă pe toată înălțimea stâlpului întrucât nu există forță distribuită axial.

Se determină valorile forței tăietoare  $T$  în secțiunile caracteristice:

$$T_B^{jos} = -P \cdot \sin\alpha = -50 \cdot \sin 30^\circ = -25 \text{ kN};$$

$$T_A^{sus} = T_B^{jos} + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -25 + 15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 35 \text{ kN}.$$

Diagrama de forță tăietoare are o variație liniară datorită acțiunii forței distribuite  $q$ .

Se determină poziția secțiunii  $x$  față de punctul B (capătul liber), secțiune unde forța tăietoare se anulează:

$$T(x) = 0 \Rightarrow T_B^{jos} + 15 \cdot x = 0 \Rightarrow -25 + 15 \cdot x = 0 \Rightarrow x_0 = 1.67 \text{ m};$$

Se determină valorile momentului încovoietor în secțiunile caracteristice:

$$M_B = 0; M_{max} = +50 \cdot \sin 30^\circ \cdot 1.67 - 15 \cdot 1.67 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.67 = 20.83 \text{ kNm};$$

$$M_A = +50 \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -20 \text{ kNm}.$$

Diagrama de moment încovoietor are o variație parabolică, deoarece forța tăietoare este liniară. Momentul va fi crescător până în secțiunea  $x_0$  unde  $T = 0$  (deoarece  $T$  este pozitiv), apoi va descrește.

**Ex.2.** Pentru sistemul din Fig. 4.4, se cere trasarea diagramelor de eforturi  $N$ ,  $T$  și  $M$ .

*REZOLVARE*

• *VARIANTA I:*

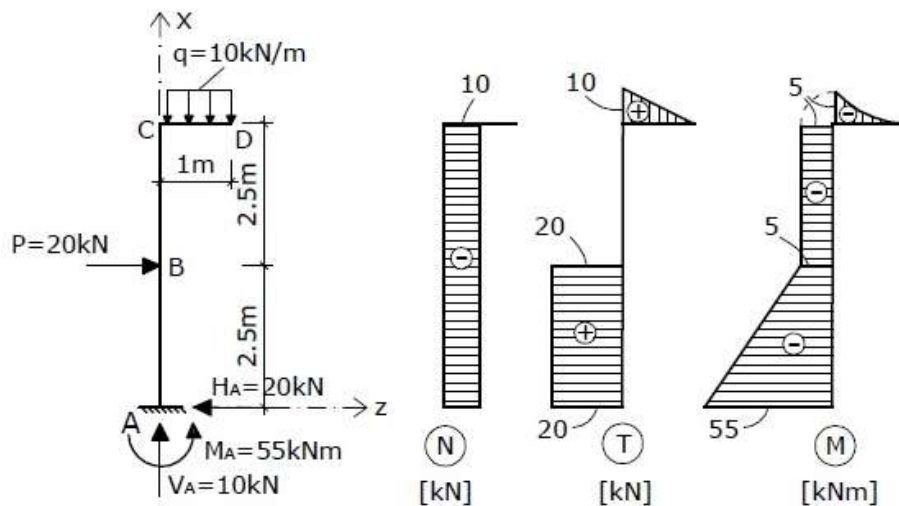


Fig. 4.4.

Se determină reacțiunile  $V_A, H_A$  și  $M_A$  din ecuațiile de echilibru static (se va vedea Lucrarea Nr. 1).

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - 20 \cdot 2.5 - 10 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_A = 55kNm;$$

$$\sum F_X = 0: \quad V_A - 10 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_A = 10kN;$$

$$\sum F_Z = 0: \quad -H_A + 20 = 0 \Rightarrow H_A = 20kN.$$

**S-au obținut:  $V_A = 10 kN$ ;  $H_A = 20kN$ ;  $M_A = 55kNm$ .**

Se determină valorile forței axiale în secțiunile caracteristice:

$$N_A^{sus} = -V_A = -10kN; \quad N_C^{jos} = -10kN.$$

Variația diagramei de efort axial va fi constantă pe bara verticală AC și nulă pe bara orizontală CD. Existența efortului de compresiune  $N$  în stâlpul AC se datorează sarcinii distribuite transversal pe grinda CD.

Se determină valorile forței tăietoare în secțiunile caracteristice:

$$T_A^{sus} = +H_A = +20kN; \quad T_B^{jos} = T_A^{sus} = +20kN; \quad T_B^{sus} = +20 - 20 = 0;$$

$$T_C^{dr} = +10 \cdot 1 = 10kN; \quad T_D = 0.$$

Variația diagramei de forță tăietoare va fi constantă pe tronsonul AB, respectiv nulă pe porțiunea BC. Pe zona CD variația diagramei va fi liniară datorită acțiunii forței distribuite transversal  $q$ .

Se determină valorile momentului încovoietor în secțiunile caracteristice:

$$M_A^{sus} = -55kNm; \quad M_B = -55 + 20 \cdot 2.5 = -5kNm;$$

$$M_C^{jos} = M_C^{dr} = -10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -5kNm; \quad M_D = 0.$$

Variația momentului încovoietor va fi liniară pe tronsonul AB, deoarece forța tăietoare este constantă. Pe porțiunea BC variația momentului va fi constantă pentru că forța tăietoare este nulă. Pe zona CD momentul va avea o variație parabolică întrucât forța tăietoare este liniară.

- *VARIANTA II: Trasarea diagramei de eforturi fără determinarea reacțiunilor, pornind din capătul liber*

Pentru console, trasarea diagramei de eforturi poate fi făcută și fără determinarea prealabilă a reacțiunilor; acestea vor rezulta din închiderea diagramei, adică din satisfacerea condițiilor de echilibru. Bara va fi parcursă întotdeauna dinspre capătul liber spre cel încastrat.

*Se trasează diagrama de efort axial  $N$ :*

Se observă că pe bara orizontală CD nu acționează forțe axiale, deci diagrama va fi nulă.

Pe bara verticală CA avem:

$$N_C = -10 \cdot 1 = -10kN.$$

Alte forțe axiale nu mai acționează, deci diagrama va fi constantă. Pentru asigurarea echilibrului:

$$\Sigma F_X=0 \Rightarrow V_A - 10 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_A = 10kN.$$

Se trasează diagrama de forță tăietoare  $T$ :

- pe bara orizontală CD:

$$T_D = 0; T_C^{dr} = +10 \cdot 1 = +10kN \text{ (semnul este pozitiv deoarece rotește tronsonul rămas în sens orar).}$$

Variația va fi liniară datorită prezenței forței distribuite uniform  $q$ .

- pe bara verticală AC:

$$T_C^{sus} = 0; T_B^{sus} = 0; T_B^{jos} = T_B^{sus} + P = 20kN; T_A^{sus} = T_B^{jos} = 20kN.$$

Diagrama va fi nulă pe porțiunea BC și constantă pe porțiunea AB (deoarece nu avem forțe acționând transversal).

Pentru închiderea diagramei, trebuie satisfăcută condiția de echilibru:

$$\Sigma F_X=0 \Rightarrow P - H_A = 0 \Rightarrow H_A = 20kN.$$

Se trasează diagrama de moment încovoietor  $M$ :

- pe bara orizontală CD:

$$M_D = 0; M_C^{dr} = -10 \cdot 1 \cdot 0.5 = -5kNm \text{ (variația este parabolică deoarece forța tăietoare are variație liniară).}$$

- pe bara verticală AC:

$$M_C^{sus} = -10 \cdot 1 \cdot 0.5 = -5kNm; M_B = M_C = -5kNm; M_A^{sus} = -5 - 20 \cdot 2.5 = -55kNm.$$

Reacțiunea moment în încastrare este egală și opusă momentului  $M_A$ . Diagrama va fi constantă pe zona BC (unde diagrama  $T$  este nulă) și liniară pe AB (unde  $T$  este constantă).

**Ex.3.** Pentru grinda Gerber sollicitată ca în Fig. 4.5, se cere să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$  și  $M$ .

### REZOLVARE

Se verifică dacă bara este static determinată utilizând relația (4.1):  $n=3+1+2-3 \cdot 2=0$ .

Se desface articulația interioară și se introduc reacțiuni egale și de semn contrar ( $V_B$  și  $H_B$ ) pe cele două capete rezultate. Se obțin astfel două bare: AB (cu patru reacțiuni necunoscute) și BD (cu trei reacțiuni necunoscute). În lipsa încărcărilor axiale, reacțiunea  $H_B = 0$ . Astfel, grinda

Gerber a fost descompusă în bara independentă BD (Fig. 4.5.a) și bara fundamentală AB (Fig. 4.5.b).

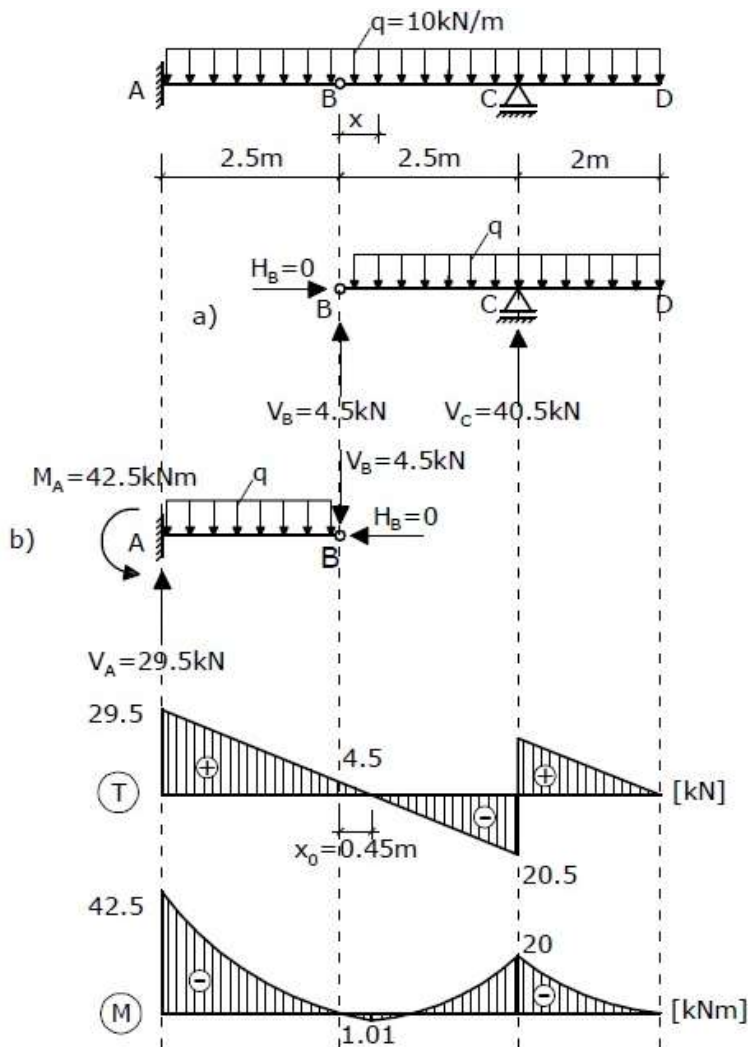


Fig. 4.5.

Se determină reacțiunile pe **bara independentă BD** din ecuațiile de echilibru static (se va revedea Lucrarea Nr. 1). Bara este articulată în punctul B și simplu rezemată în punctul C.

$$\sum M_B = 0: V_C \cdot 2.5 - 10 \cdot 4.5 \cdot 0.5 \cdot 4.5 = 0 \Rightarrow V_C = 40.5 \text{ kN};$$

$$\sum M_C = 0: V_B \cdot 2.5 - 10 \cdot 4.5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4.5 - 2\right) = 0 \Rightarrow V_B = 4.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_X = 0: H_B = 0.$$

**S-au obținut:**  $V_B = 4.5 \text{ kN}$ ;  $V_C = 40.5 \text{ kN}$ ;  $H_B = 0$ .

Se determină reacțiunile pe **bara fundamentală AB**, încărcată cu forțele date și reacțiunea  $V_B$ , din ecuațiile de echilibru static.

$$\sum M_A = 0: M_A - 4.5 \cdot 2.5 - 10 \cdot 2.5 \cdot 0.5 \cdot 2.5 = 0 \Rightarrow M_A = 42.5 \text{ kNm};$$

$$\sum F_Z = 0: V_A - 10 \cdot 2.5 - 4.5 = 0 \Rightarrow V_A = 29.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_X = 0: H_B = 0.$$

**S-au obținut:**  $V_A = 29.5 \text{ kN}$ ;  $M_A = 42.5 \text{ kNm}$ ;  $H_A = 0$ .

Întrucât nu există forțe/reacțiuni aplicate după axa barei, efortul axial  $N$  în fiecare secțiune în lungul barei este nul, în consecință nu a fost ilustrat în Fig. 4.5.

Se determină valorile forței tăietoare  $T$  în secțiunile caracteristice:

$$T_A^{dr} = +V_A = +29.5 \text{ kN}; \quad T_B^{stg} = +29.5 - 10 \cdot 2.5 = +4.5 \text{ kN} = T_B^{dr};$$

$$T_C^{stg} = +4.5 - 10 \cdot 2.5 = -20.5 \text{ kN}; \quad T_C^{dr} = -20.5 + V_C = -20.5 + 40.5 = +20 \text{ kN};$$

$$T_D = 0.$$

Diagrama de forță tăietoare are o variație liniară (de aceeași pantă) datorită încărcării uniform distribuite  $q$ .

Se determină poziția secțiunii  $x$  față de punctul B, secțiune unde  $T$  se anulează, din condiția:

$$T(x) = 0 \Rightarrow T_B^{dr} - 10 \cdot x = 0 \Rightarrow +4.5 - 10 \cdot x = 0 \Rightarrow x_0 = 0.45 \text{ m}.$$

Se determină valorile momentului încovoietor  $M$  în secțiunile caracteristice:

$$M_A^{dr} = -42.5 \text{ kNm}; \quad M_B = 0; \quad M_{x_0} = V_B \cdot 0.45 - 10 \cdot 0.45 \cdot \frac{0.45}{2} = +1.01 \text{ kNm};$$

$$M_C = -10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -20 \text{ kNm}; \quad M_D = 0.$$

Diagrama de moment încovoietor are o variație parabolică (deoarece  $T$  este liniar). În articulațiile interioare momentul este nul. Valoarea extremă a momentului încovoietor apare în secțiunea de încastrare.

**Ex.4.** Pentru grinda solicitată ca în Fig. 4.6, se cere trasarea diagramelor de eforturi  $N$ ,  $T$  și  $M$ .

#### REZOLVARE

Se determină reacțiunile  $V_A$ ,  $H_A$  și  $V_B$  din ecuațiile de echilibru static (se va vedea Lucrearea Nr. 1).

$$\sum M_A = 0: -V_B \cdot 5 - 15 \cdot 1 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 5 \cdot 2.5 = 0 \Rightarrow V_B = 96 \text{ kNm}$$

$$\sum F_X = 0: H_A - 15 = 0 \Rightarrow H_A = 15 \text{ kN};$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 5 + 20 \cdot 1 - 30 \cdot 5 \cdot 2.5 - 15 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_A = 74 \text{ kN}.$$

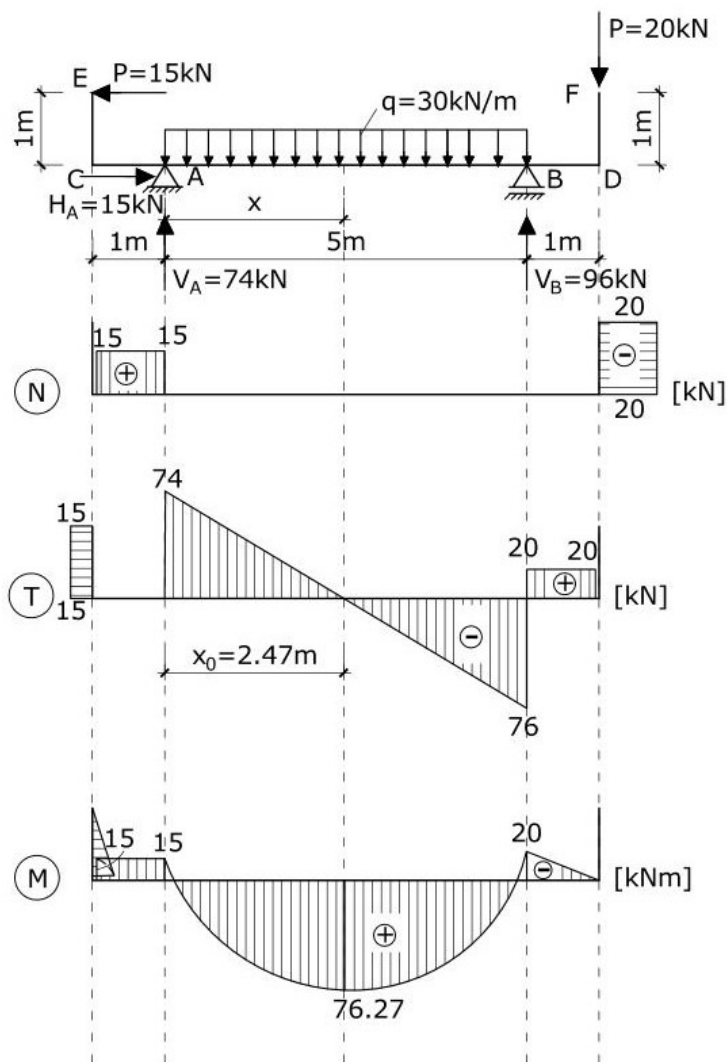


Fig. 4.6.

S-au obținut:  $V_A = 74 \text{ kN}$ ;  $H_A = 15 \text{ kN}$ ;  $V_B = 96 \text{ kN}$ .

Se determină valorile forței axiale  $N$  în secțiunile caracteristice:

$$N_E = 0; N_C^{sus} = 0; N_C^{dr} = +P = 15 \text{ kN}; N_A^{st} = 15 \text{ kN}; N_A^{dr} = N_A^{st} - H_A = 15 - 15 = 0;$$

$$N_D^{st} = 0; N_D^{sus} = -P = -20 \text{ kN}; N_F^{jos} = N_D^{sus} = -20 \text{ kN}.$$

Diagrama  $N$  este constantă și  $\neq 0$  pe tronsoanele C-A, respectiv D-F.

Se determină valorile forței tăietoare  $T$  în secțiunile caracteristice:

$$T_E^{jos} = -P = -15 \text{ kN}; T_C^{sus} = T_E^{jos} = -15 \text{ kN}; T_C^{dr} = 0; T_A^{st} = 0; T_A^{dr} = +V_A = 74 \text{ kN};$$

$$T_B^{st} = 74 - 30 \cdot 5 = -76 \text{ kN}; T_B^{dr} = -76 + 96 = 20 \text{ kN}; T_D^{st} = 20 \text{ kN}; T_D^{sus} = 0; T_F = 0.$$

Diagrama de forță tăietoare are o variație liniară între reazemele A și B datorită acțiunii forței distribuite  $q$ .

Se determină poziția secțiunii  $x$  față de punctul A unde forța tăietoare se anulează:

$$T(x) = 0 \Rightarrow T_A^{dr} - 30 \cdot x = 0 \Rightarrow +74 - 30 \cdot x = 0 \Rightarrow x_0 = 2.47m;$$

Se determină valorile momentului încovoiator în secțiunile caracteristice:

$$M_E = 0; M_C^{sus} = -15 \cdot 1 = -15kNm; M_C^{dr} = -15kNm; M_A = -15kNm;$$

$$M_B = -20 \cdot 1 = -20kNm; M_F = 0; M_D = 0;$$

$$M_{x_0} = M_{max} = -15 \cdot 1 + 74 \cdot 2.47 - 30 \cdot 2.47 \cdot \frac{2.47}{2} = 76.27kNm.$$

Diagrama de moment încovoiator va avea o variație parabolică pe tronsonul A-B, deoarece forța tăietoare este liniară; pe tronsonul E-C, respectiv B-D va avea o variație liniară, iar pe tronsonul C-A legea de variație va fi constantă.

### C. PROBLEME PROPUSE

Pentru barele solicitate ca în Fig. 4.7, se cere să se traseze diagramele de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .

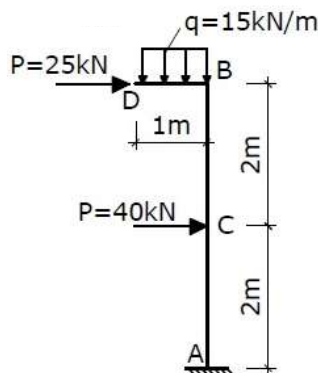
P1.



Rezultate parțiale:

$$T_A^{sus} = 36kN; M_A^{sus} = -54kNm.$$

P2.



Rezultate parțiale:

$$N_A^{sus} = -15kN; T_C^{jos} = 65kN.$$



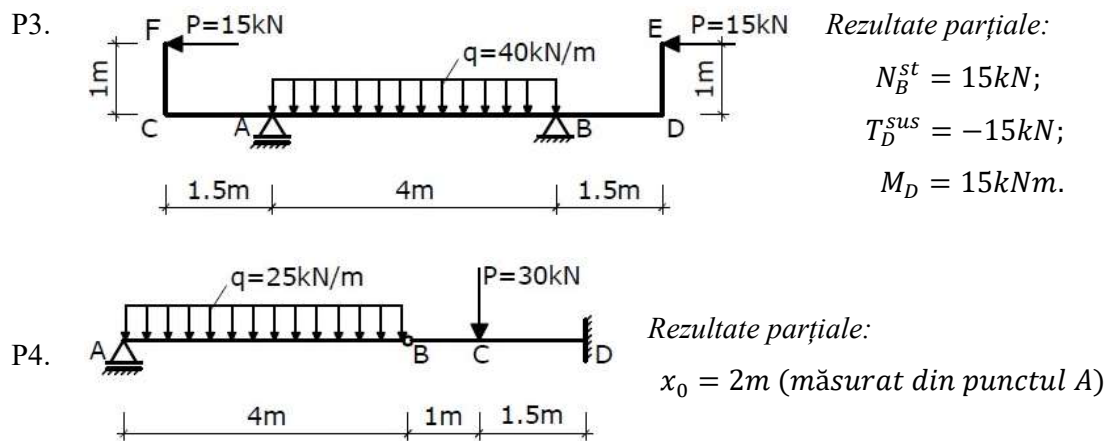


Fig. 4.7. Probleme propuse.

## LUCRAREA 5

**CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE FIGURILOR PLANE.  
ÎNCERCAREA LA ÎNTINDERE A UNUI OȚEL DUCTIL**

## 5.1. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE FIGURILOR PLANE

## A. NOȚIUNI TEORETICE

În relațiile de calcul ale tensiunilor și deformațiilor elementelor de rezistență intervin caracteristicile geometrice ale secțiunii. Acestea sunt mărimi ce depind de forma și dimensiunile secțiunii transversale ale elementului. Caracteristicile geometrice ale unei secțiuni se determină în raport cu **sistemul de axe central principal de inerție**. Sistemul central are originea în punctul G, centrul de greutate al secțiunii, iar sistemul principal de inerție are ca și axe direcțiile după care secțiunea are momentul de inerție maxim ( $I_{max} = I_1$ ), respectiv minim ( $I_{min} = I_2$ ). Dacă secțiunea admite o axă de simetrie, atunci aceasta va fi atât axă centrală, cât și principală.

Pentru secțiunea din Fig. 5.1, raportată la un sistem ortogonal de axe  $yOz$  și compusă dintr-o infinitate de arii elementare  $dA$ , se definesc următoarele caracteristici geometrice:

1. **Aria** secțiunii transversale, care se determină cu relația:

$$A = \int_A dA. \quad (5.1)$$

Aria se măsoară în unități de lungime la puterea a doua [ $L^2$ ], de regulă  $cm^2$ .

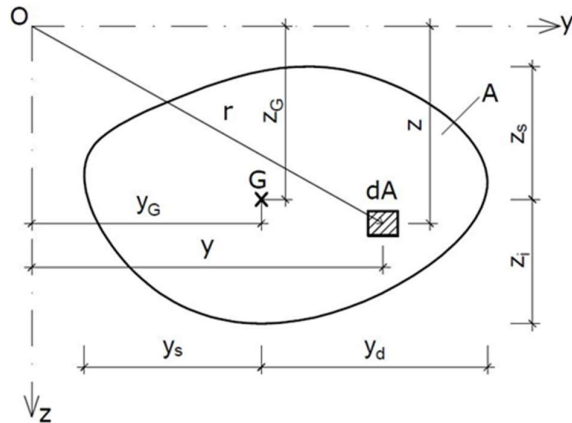


Fig. 5.1. Definierea caracteristicilor geometrice pentru o figură plană.

2. **Momentul static** al secțiunii în raport cu o axă reprezintă suma produselor dintre elementele de arie  $dA$  și distanța (coordonata) acestora față de axa în raport cu care se face calculul. Relațiile de calcul ale momentelor statice în raport cu axele  $Oy$  și  $Oz$  sunt:

$$S_y = \int_A z \cdot dA = z_G \cdot A; \quad S_z = \int_A y \cdot dA = y_G \cdot A. \quad (5.2)$$

Momentele statice se măsoară în unități de lungime la puterea a treia [ $L^3$ ], de regulă  $cm^3$ .

*Obs. Momentul static poate să fie pozitiv, negativ sau nul (atunci când este determinat în raport cu o axă centrală).*

3. **Momentul de inerție axial** al figurii plane în raport cu o axă reprezintă suma produselor dintre elementele de arie  $dA$  și pătratul distanței (coordonatei) acestora față de axa în raport cu care se face calculul. Relațiile de calcul ale momentelor de inerție în raport cu axele  $Oy$  și  $Oz$  sunt:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA; \quad I_z = \int_A y^2 \cdot dA. \quad (5.3)$$

Momentele de inerție se măsoară în unități de lungime la puterea a patra [ $L^4$ ], de regulă  $cm^4$ .

*Obs. Momentul de inerție față de o axă este întotdeauna pozitiv (nu poate să fie nul).*

4. **Momentul de inerție centrifugal** al figurii plane în raport cu sistemul de axe  $yOz$  reprezintă suma produselor dintre elementele de arie  $dA$  și distanțele (coordonatele) acestora față de cele două axe  $Oy$ , respectiv  $Oz$ . Expresia de calcul a momentului de inerție centrifugal este:

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA. \quad (5.4)$$

Momentul de inerție centrifugal se măsoară în unități de lungime la puterea a patra [ $L^4$ ], de regulă  $cm^4$ .

*Obs. Momentul de inerție centrifugal al unei figuri poate să fie pozitiv sau negativ și este nul în raport cu un sistem având o axă de simetrie, respectiv în raport cu sistemul de axe principale de inerție.*

5. **Momentul de inerție polar** al secțiunii în raport cu un punct/pol ( $O$ ) reprezintă suma produselor dintre elementele de arie  $dA$  și pătratele distanțelor acestora (coordonata polară  $r$ ) față de punct/pol. Pentru secțiunea din Fig. 5.1, momentul de inerție polar este:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_z. \quad (5.5)$$

Momentul de inerție polar se măsoară în unități de lungime la puterea a patra [ $L^4$ ], de regulă  $cm^4$ .

*Obs. Momentul de inerție polar al unei figuri este întotdeauna pozitiv.*

### **Calculul practic al caracteristicilor geometrice**

Pentru o secțiune compusă din „n” figuri simple se utilizează următoarele relații de calcul pentru determinarea caracteristicilor geometrice:

1. **Aria** întregii secțiuni:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (5.6)$$

2. **Poziția centrului de greutate** presupune parcurgerea următorilor pași:

- (1) se alege un sistem de axe de referință arbitrar  $y'O'z'$ ;

*Obs. De regulă, sistemul de axe de referință  $y'O'z'$  se alege la extremitatea secțiunii, iar dacă secțiunea admite o axă de simetrie una dintre axe va fi aceasta.*

- (2) se împarte secțiunea în figuri simple, pentru care sunt cunoscute ariile  $A_i$  și poziția centrelor de greutate  $G_i$  ale acestora;  
 (3) coordonatele centrului de greutate al întregii secțiuni se determină cu relațiile de mai jos, rezultate din (5.2):

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z'_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y'_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (5.7)$$

unde  $y'_i, z'_i$  reprezintă coordonatele centrului de greutate al ariei  $A_i$  în raport cu sistemul  $y'O'z'$ .

*Obs. Coordonatele  $y'_i$  și  $z'_i$  se introduc cu semnele lor, iar coordonatele centrului de greutate al secțiunii  $y_G$  și  $z_G$  rezultă cu semn. Dacă semnul este pozitiv, ele se măsoară în sensul pozitiv al axelor de coordonate.*

3. **Momentele de inerție axiale** ale secțiunii compuse se determină cu formula lui Steiner:

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i \cdot z_i^2); \quad I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + A_i \cdot y_i^2), \quad (5.8)$$

unde:  $I_{y_i}, I_{z_i}$  sunt momentele de inerție ale figurilor simple de arie  $A_i$  în raport cu axele centrale proprii ( $y_iOz_i$ ), paralele axelor sistemului  $yOz$ ;

$y_i, z_i$  – distanțele (coordonatele) pe direcțiile  $y$  și  $z$  de la sistemul de axe central propriu al figurii simple  $A_i$  la sistemul de axe central al întregii secțiuni ( $yOz$ ).

Pentru figurile simple prezentate în Fig. 5.2, relațiile de calcul ale momentelor de inerție în raport cu axele centrale principale proprii sunt:

– Dreptunghi:  $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12};$

– Cerc:  $I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32};$

– Inel:  $I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$

Pentru profile laminate (I, U, L), momentele de inerție în raport cu axele centrale principale proprii se găsesc în tabele (Anexa 3).

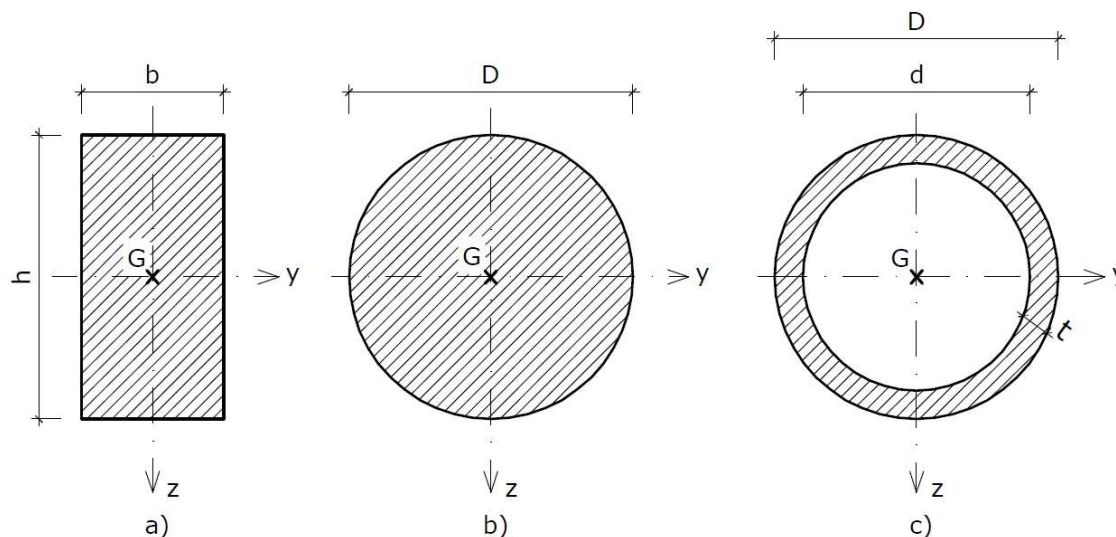


Fig. 5.2. Figuri simple: a) dreptunghi; b) cerc; c) inel (țevă circulară).

4. **Modulele de rezistență** ale secțiunii se definesc ca fiind rapoartele dintre momentele de inerție ale secțiunii față de axele centrale și distanța celor mai îndepărtate puncte ale secțiunii față de axe:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}}; \quad W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}}. \quad (5.9)$$

Obs. Pentru secțiunea din Fig. 5.1:  $|z|_{max} = \max(|z_s|, z_i)$ ;  $|y|_{max} = \max(|y_s|, y_d)$ .

Modulele de rezistență se măsoară în unități de lungime la puterea a treia  $[L^3]$ , de regulă  $cm^3$ .

Pentru figurile simple din Fig. 5.2, modulele de rezistență în raport cu axele centrale principale proprii se determină cu relațiile:

– Dreptunghi:  $W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad W_z = \frac{h \cdot b^2}{6};$

– Cerc:  $W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16};$

– Inel:  $W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$

Pentru profile laminate (I, U, L), modulele de rezistență în raport cu axele centrale se găsesc în tabele (Anexa 3).

5. **Momentele statice** ale secțiunii compuse se determină ca fiind suma produselor dintre aria figurii simple  $A_i$  și coordonatele centrului de greutate al acesteia ( $G_i$ ) față de sistemul de axe central al întregii secțiunii compuse ( $G$ ):

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_i; \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i. \quad (5.10)$$

6. **Razele de inerție (girație)** ale secțiunii în raport cu axele centrale (principale) de inerție se determină cu relațiile:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad (5.11)$$

unde:  $I_y, I_z$  sunt momentele de inerție axiale ale secțiunii compuse, determinate cu formula lui Steiner (5.8);

$A$  – aria întregii secțiuni compuse.

Razele de inerție se măsoară în unități de lungime [L], de regulă cm.

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru secțiunea compusă din Fig. 5.3, se cere să se determine caracteristicile geometrice: aria ( $A$ ), poziția centrului de greutate ( $y_G, z_G$ ), momentele de inerție axiale ( $I_y, I_z$ ), modulele de rezistență ( $W_y, W_z$ ), razele de inerție ( $i_y, i_z$ ) și momentul static ( $S_y$ ).

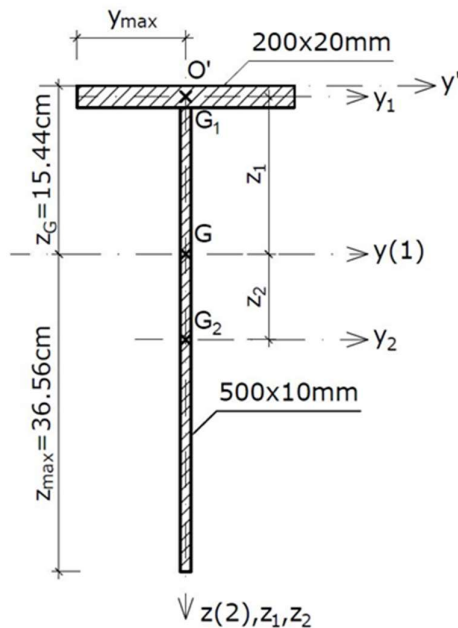


Fig. 5.3.

### REZOLVARE

1) Aria secțiunii compuse:

$$A = 20 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 90 \text{ cm}^2.$$

2) Poziția centrului de greutate:

- secțiunea admite o axă de simetrie (axa  $z$ ), prin urmare această axă este atât axă centrală, cât și principală de inerție;
- pentru a determina poziția axei  $y$ , respectiv a centrului de greutate  $G$  al secțiunii, se alege un sistem de axe  $y'O'z'$ , axa  $O'y'$  fiind situată la extremitatea superioară a secțiunii. Secțiunea este alcătuită din două figuri simple (dreptunghiuri), pentru care sunt cunoscute ariile, poziția centrelor de greutate și sistemele de coordonate proprii  $y_i G_i z_i$ ;

- coordonata centrului de greutate ( $z_G$ ) se determină cu relația:

$$z_G = \frac{\sum A_i z'_i}{A} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 50 \cdot 1 \cdot 27}{90} = 15.4444 \text{ cm.}$$

3) Momentele de inerție axiale ale secțiunii se determină cu formula lui Steiner:

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i \cdot z_i^2) = \frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot (15.44 - 1)^2 + \frac{1 \cdot 50^3}{12} + 50 \cdot 1 \cdot (36.56 - 25)^2 = 25452.224 \text{ cm}^4;$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2) = \frac{2 \cdot 20^3}{12} + \frac{50 \cdot 1^3}{12} = 1337.5 \text{ cm}^4.$$

*Obs. Axa Oz fiind de simetrie este și axă principală de inerție. Cealaltă axă de inerție este perpendiculară pe axa Oz în centrul de greutate al figurii:*

$$I_y = I_1 = I_{\max};$$

$$I_z = I_2 = I_{\min}.$$

4) Modulele de rezistență:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}} = \frac{25452.224}{36.56} = 696.18 \text{ cm}^3;$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{1337.5}{10} = 133.75 \text{ cm}^3.$$

5) Razele de inerție (girație):

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{25452.224}{90}} = 16.82 \text{ cm};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1337.5}{90}} = 3.85 \text{ cm}.$$

6) Momentele statice:

- momentul static al ariei de sub axa Oy în raport cu aceasta:

$$S_y^{\text{inf}} = 36.5556 \cdot 1 \cdot \frac{36.5556}{2} = 668.15 \text{ cm}^3;$$

- momentul static al ariei de deasupra axei Oy în raport cu aceasta:

$$S_y^{\text{sup}} = 20 \cdot 2 \cdot (-14.4444) + 13.4444 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{13.4444}{2}\right) = -668.15 \text{ cm}^3.$$

Obs.  $S_y^{inf} = |S_y^{sup}|$ , această egalitate confirmând faptul că poziția centrului de greutate a fost determinată corect.

**Ex.2.** Să se determine caracteristicile geometrice: aria ( $A$ ), poziția centrului de greutate ( $y_G$ ,  $z_G$ ), momentele de inerție axiale ( $I_y$ ,  $I_z$ ), modulele de rezistență ( $W_y$ ,  $W_z$ ) și momentul static ( $S_y$ ) pentru secțiunea din Fig. 5.4.

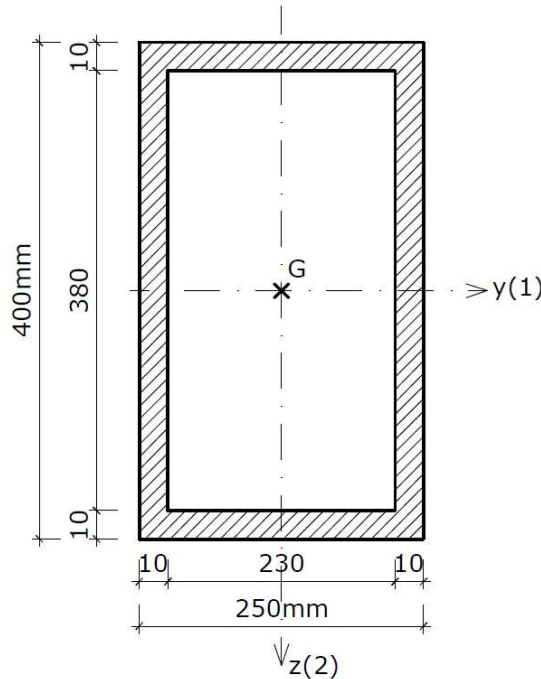


Fig. 5.4.

**REZOLVARE**

1) Aria secțiunii:

$$A = 25 \cdot 40 - 23 \cdot 38 = 126 \text{ cm}^2.$$

2) Poziția centrului de greutate:

- secțiunea admite două axe de simetrie, rezultă că la intersecția lor se află centrul de greutate.

3) Momentele de inerție axiale:

$$I_y = \frac{25 \cdot 40^3}{12} - \frac{23 \cdot 38^3}{12} = 28162 \text{ cm}^4;$$

$$I_z = \frac{40 \cdot 25^3}{12} - \frac{38 \cdot 23^3}{12} = 13554.5 \text{ cm}^4.$$

Momentele de inerție principale:

$$I_1 = I_y; I_2 = I_z.$$

4) Modulele de rezistență:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}} = \frac{28162}{20} = 1408.1 \text{ cm}^3;$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}} = \frac{13554.5}{12.5} = 1084.36 \text{ cm}^3.$$

5) Momentul static al ariei de sub axa  $Oy$  este egal cu momentul static al ariei de deasupra axei  $Oy$ :

$$S_y^{inf} = 25 \cdot 1 \cdot 19.5 + 2 \cdot \left( 19 \cdot 1 \cdot \frac{19}{2} \right) = 848.5 \text{ cm}^3.$$

**Ex.3.** Pentru secțiunea alcătuită din două profile laminare UPE 200 și IPE 300 din Fig. 5.5.a, se cere să se determine caracteristicile geometrice: aria ( $A$ ), poziția centrului de greutate ( $y_G$ ,  $z_G$ ), momentele de inerție axiale ( $I_y$ ,  $I_z$ ), modulele de rezistență ( $W_y$ ,  $W_z$ ) și razele de inerție ( $i_y$ ,  $i_z$ ).



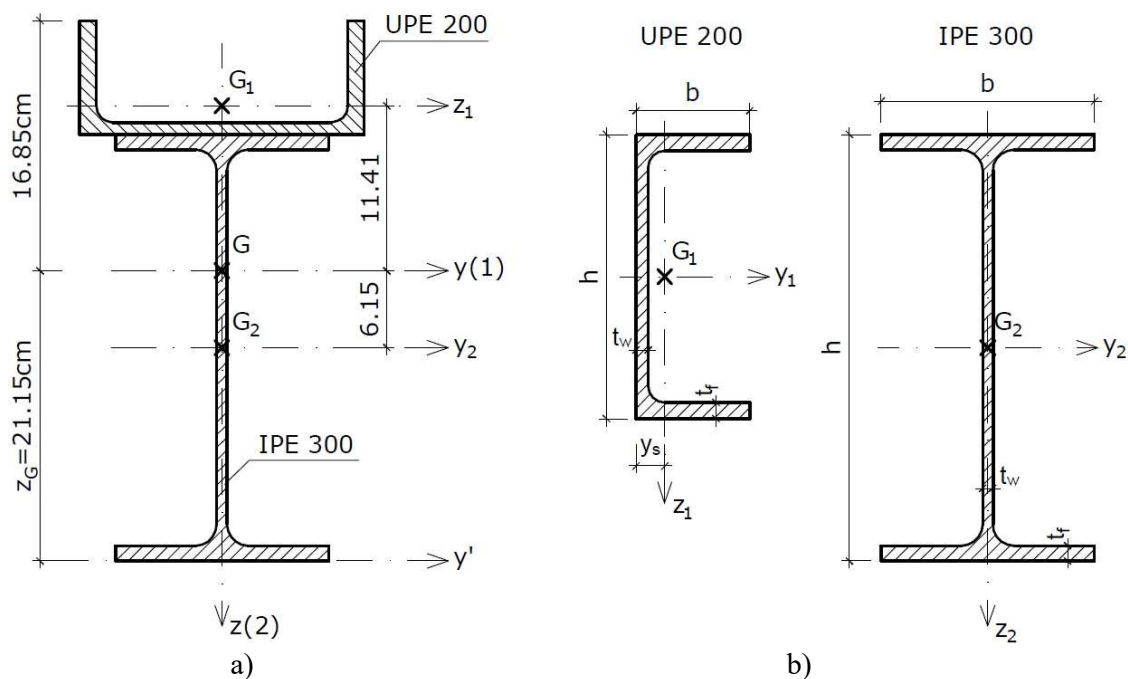


Fig. 5.5.

REZOLVARE

Din tabele (Anexa 3) se extrag caracteristicile geometrice ale profilelor (reprezentate separat în Fig. 5.5.b) în raport cu axele centrale proprii:

UPE 200:  $h = 200\text{mm}$ ;  $b = 80\text{mm}$ ;  $t_w = 6\text{mm}$ ;  $t_f = 11\text{mm}$ ;  $A_1 = 29\text{cm}^2$ ;

$$I_{y1} = 1910\text{cm}^4; I_{z1} = 187\text{cm}^4; y_s = 2.56\text{cm}.$$

IPE 300:  $h = 300\text{mm}$ ;  $b = 150\text{mm}$ ;  $t_w = 7.1\text{mm}$ ;  $t_f = 10.7\text{mm}$ ;  $A_2 = 53.8\text{cm}^2$ ;

$$I_{y2} = 8356\text{cm}^4; I_{z2} = 604\text{cm}^4.$$

1) Aria secțiunii:  $A = A_1 + A_2 = 82.8\text{cm}^2$ .

2) Poziția centrului de greutate:

- axa z este axă de simetrie, deci este axă centrală principală de inerție;
- se alege o axă de referință y' la extremitatea inferioară a secțiunii;
- se calculează coordonata  $z_G$  a centrului de greutate:

$$z_G = \frac{29 \cdot (-30 - 2.56) + 53.8 \cdot (-15)}{82.8} = -21.15\text{cm}.$$

3) Momentele de inerție axiale:

$$I_y = (I_{z1} + A_1 \cdot z_1^2) + (I_{y2} + A_2 \cdot z_2^2) = (187 + 29 \cdot 11.41^2) + (8356 + 53.8 \cdot 6.15^2) = 14353.31\text{cm}^4;$$

$$I_z = (I_{y1} + A_1 \cdot y_1^2) + (I_{z2} + A_2 \cdot y_2^2) = 1910 + 604 = 2514 \text{ cm}^4.$$

4) Modulele de rezistență:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}} = \frac{14353.31}{21.15} = 678.64 \text{ cm}^3;$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{2514}{10} = 251.4 \text{ cm}^3.$$

5) Razele de inerție (girație):

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{14353.31}{82.8}} = 13.17 \text{ cm};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{2514}{82.8}} = 5.51 \text{ cm}.$$

**Ex.4.** Pentru secțiunea din Fig. 5.6, se cere să se determine:

- poziția centrului de greutate;
- momentele de inerție axiale  $I_y$  și  $I_z$ ;
- poziția axelor principale de inerție;
- momentele de inerție principale  $I_1$  și  $I_2$ .

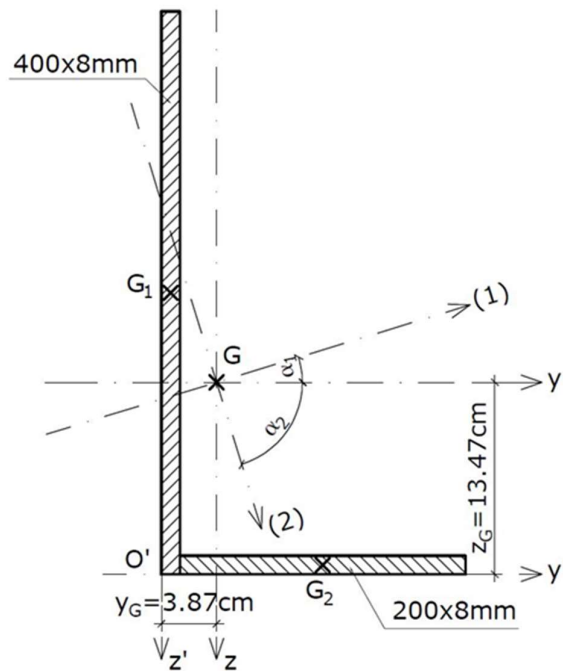


Fig. 5.6.

**REZOLVARE**

a) Poziția centrului de greutate:

- se alege un sistem de axe de referință  $y'O'z'$  la extremitatea secțiunii;
- se împarte secțiunea în cele două figuri simple (dreptunghiuri) cu centrele de greutate  $G_1$  și  $G_2$ ;
- se determină coordonatele centrului de greutate cu relațiile (5.7):

$$z_G = \frac{40 \cdot 0.8 \cdot (-20) + 20 \cdot 0.8 \cdot (-0.4)}{40 \cdot 0.8 + 20 \cdot 0.8} = -13.47 \text{ cm};$$

$$y_G = \frac{40 \cdot 0.8 \cdot 0.4 + 20 \cdot 0.8 \cdot 10.8}{40 \cdot 0.8 + 20 \cdot 0.8} = 3.87 \text{ cm}.$$

b) Momentele de inerție axiale se determină cu formula lui Steiner (5.8):

$$I_y = \frac{0.8 \cdot 40^3}{12} + 0.8 \cdot 40 \cdot (20 - 13.47)^2 + \frac{20 \cdot 0.8^3}{12} + 20 \cdot 0.8 \cdot (13.47 - 0.4)^2 =$$

$$= 8365.23 \text{ cm}^4;$$

$$I_z = \frac{40 \cdot 0.8^3}{12} + 0.8 \cdot 40 \cdot (3.87 - 0.4)^2 + \frac{0.8 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 0.8 \cdot (10.8 - 3.87)^2 =$$

$$= 1688.75 \text{ cm}^4.$$

c) Poziția sistemului principal de inerție se determină cu relația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2 \frac{I_{yz}}{I_y - I_z}, \quad (5.12)$$

unde  $I_{yz}$  este momentul de inerție centrifugal, care pentru secțiunile compuse se determină cu relația:

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i z_i} + A_i \cdot y_i \cdot z_i), \quad (5.13)$$

în care:  $I_{y_i z_i}$  este momentul de inerție centrifugal al figurii simple de arie  $A_i$  în raport cu axele centrale proprii ( $y_i G_i z_i$ );

$y_i, z_i$  – coordonatele centrului de greutate al figurii simple în raport cu sistemul de axe central al întregii secțiuni.

*Obs. Momentul de inerție centrifugal al unei figuri este nul în raport cu axele principale de inerție ale ei (de regulă, una este axă de simetrie).*

$$I_{yz} = 40 \cdot 0.8 \cdot (-3.47) \cdot (-6.53) + 20 \cdot 0.8 \cdot 6.93 \cdot 13.07 = 2174.29 \text{ cm}^4;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2 \frac{2174.29}{6676.48} = -0.651328 \rightarrow \alpha_0 = -16^\circ 32'.$$

*Obs. 1. Direcția principală (1) face unghiul  $\alpha$  mai mic în raport cu axa  $Gy$  sau  $Gz$  în raport cu care momentul de inerție ( $I_y$  sau  $I_z$ ) are cea mai mare valoare.*

*Obs. 2. Cele două direcții principale de inerție sunt ortogonale ( $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ ).*

Rezultă:  $\alpha_1 = -16^\circ 32'$ ;  $\alpha_2 = 73^\circ 28'$ .

d) Momentele de inerție principale se determină cu relațiile:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}; \quad (5.14)$$

$$I_1 = \frac{8365.23 + 1688.75}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(8365.23 - 1688.75)^2 + 4 \cdot 2174.29^2} = 9010.88 \text{ cm}^4;$$

$$I_2 = \frac{8365.23 + 1688.75}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(8365.23 - 1688.75)^2 + 4 \cdot 2174.29^2} = 1043.1 \text{ cm}^4.$$

Se verifică:

$$I_1 + I_2 = I_y + I_z = 9010.88 + 1043.1 = 8365.23 + 1688.75 = 10053.98 \text{ cm}^4.$$

**Ex.5.** Pentru secțiunea din Fig. 5.7.a, se cere să se determine:

- poziția centrului de greutate;
- momentele de inerție axiale  $I_y$  și  $I_z$ ;
- poziția axelor principale de inerție;
- momentele de inerție principale  $I_1$  și  $I_2$ .

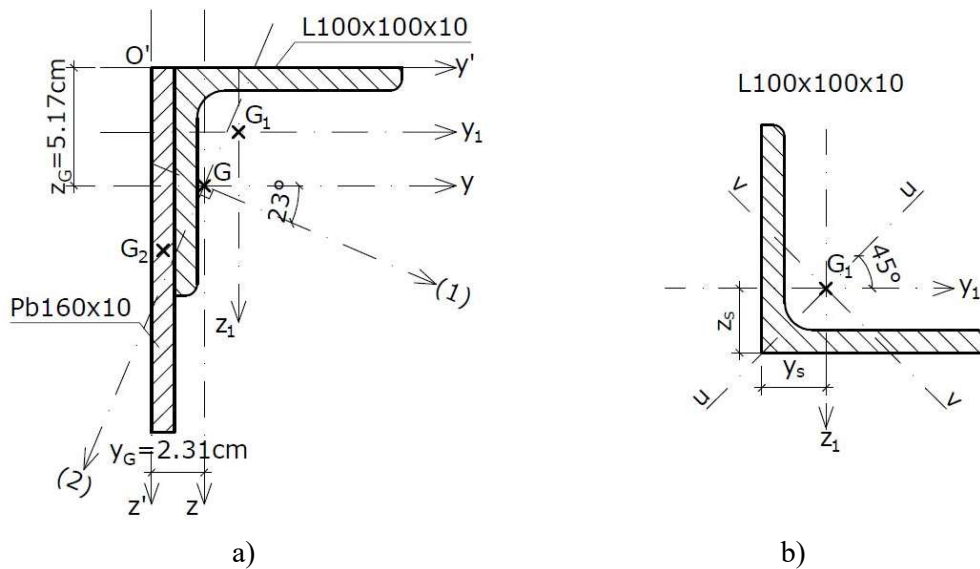


Fig. 5.7.

### REZOLVARE

a) Poziția centrului de greutate:

- se alege un sistem de axe de referință  $y'O'z'$  la extremitatea secțiunii;
- se împarte secțiunea în cele două figuri simple (platbandă și cornier) cu centrele de greutate  $G_1$  și  $G_2$ ;
- din tabel (Anexa 3) se extrag caracteristicile geometrice ale profilului cornier L100x100x10 (Fig. 5.7.b):

$$A_1 = 19.2 \text{ cm}^2; z_s = y_s = 2.82 \text{ cm}; I_{y_1} = I_{z_1} = 176.7 \text{ cm}^4; I_u = 280.7 \text{ cm}^4; I_v = 72.66 \text{ cm}^4.$$

- se determină coordonatele centrului de greutate al întregii secțiuni:

$$z_G = \frac{19.2 \cdot 2.82 + 16 \cdot 1 \cdot 8}{19.2 + 16} = 5.17 \text{ cm};$$

$$y_G = \frac{19.2 \cdot (2.82 + 1) + 16 \cdot 1 \cdot 0.5}{19.2 + 16} = 2.31 \text{ cm}.$$

b) Momentele de inerție axiale se determină cu formula lui Steiner (5.8):

$$I_y = 176.7 + 19.2 \cdot (5.17 - 2.82)^2 + \frac{1 \cdot 16^3}{12} + 16 \cdot (8 - 5.17)^2 = 752.21 \text{ cm}^4;$$

$$I_z = 176.7 + 19.2 \cdot (3.82 - 2.31)^2 + \frac{16 \cdot 1^3}{12} + 16 \cdot (2.31 - 0.5)^2 = 274.23 \text{ cm}^4.$$

c) Poziția sistemului principal de inerție se determină cu relația (5.12), în care intervine momentul de inerție centrifugal al întregii figuri care se calculează cu relația (5.13).

Momentul de inerție centrifugal propriu al profilului cornier L100x100x10 se determină cu relația:

$$I_{y_0z_0} = \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (5.15)$$

$$I_{y_0z_0} = \frac{280.7 - 72.66}{2} \cdot \sin(-2 \cdot 45^\circ) = -104.02 \text{ cm}^4;$$

$$I_{yz} = 16 \cdot 1 \cdot (-1.81) \cdot 2.83 - 104.02 + 19.2 \cdot 1.51 \cdot (-2.35) = -254.11 \text{ cm}^4;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2 \frac{-254.11}{752.21 - 274.23} = 1.063266245 \rightarrow \alpha_0 = 23^\circ 22'.$$

Axele principale 1 și 2 au poziția din Fig. 5.7.a.

d) Momentele de inerție principale se calculează cu relațiile (5.14):

$$I_1 = \frac{752.21 + 274.23}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(752.21 - 274.23)^2 + 4 \cdot (-254.11)^2} = 862.06 \text{ cm}^4;$$

$$I_2 = \frac{752.21 + 274.23}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(752.21 - 274.23)^2 + 4 \cdot (-254.11)^2} = 164.38 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Verificare: } I_1 + I_2 = I_y + I_z = 862.06 + 164.38 = 752.21 + 274.23 = 1026.44 \text{ cm}^4.$$

### C. PROBLEME PROPUSE

Să se determine caracteristicile geometrice: aria ( $A$ ), poziția centrului de greutate ( $y_G, z_G$ ), momentele de inerție axiale ( $I_y, I_z$ ), modulele de rezistență ( $W_y, W_z$ ), momentul static ( $S_y$ , doar la P1) și razele de inerție ( $i_y, i_z$ ) pentru următoarele secțiuni compuse:

P1.

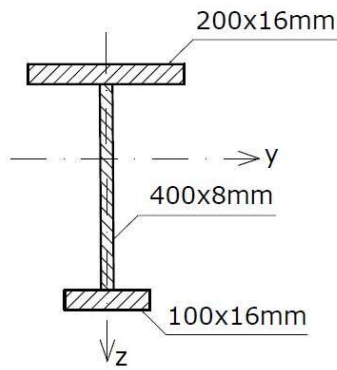


Fig. 5.8.

Rezultate parțiale:  $S_y^{sup} = 632.84\text{cm}^3$ .

P2.

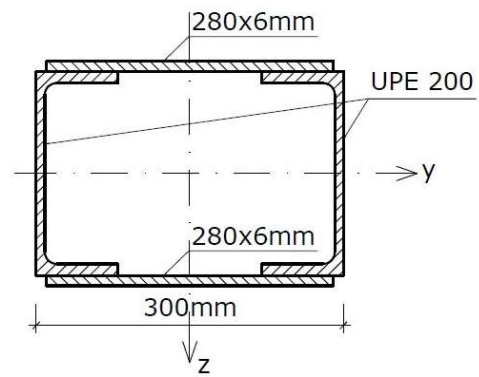


Fig. 5.9.

Rezultate parțiale:  $W_z = 769.66\text{cm}^3$ .

P3.

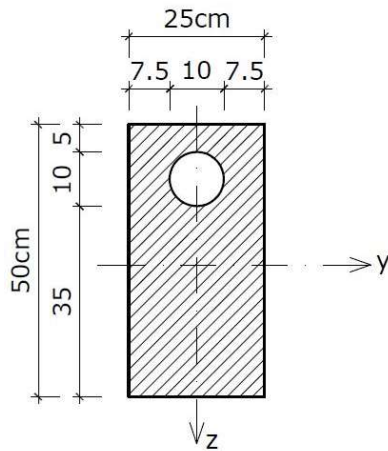


Fig. 5.10.

Rezultate parțiale:  $I_y = 241069.60\text{cm}^4$ .

P4.

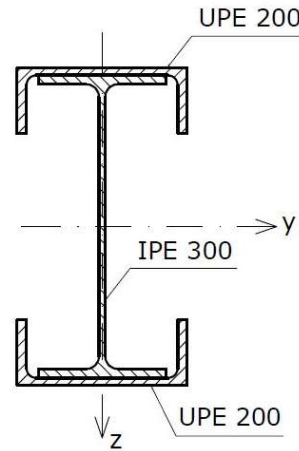


Fig. 5.11.

Rezultate parțiale:  $I_z = 4424\text{cm}^4$ .

P5. Pentru secțiunea din Fig. 5.12, se cere să se determine:

- poziția centrului de greutate;
- momentele de inerție axiale  $I_y$  și  $I_z$ ;
- poziția axelor principale de inerție;
- momentele de inerție principale  $I_1$  și  $I_2$ .

Rezultate parțiale:  $I_{yz} = 2838.10\text{cm}^4$ .

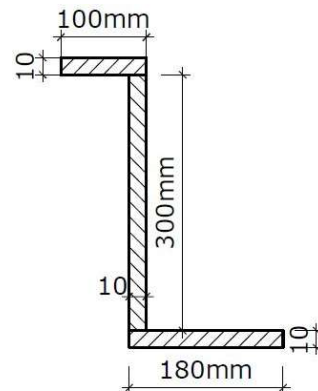
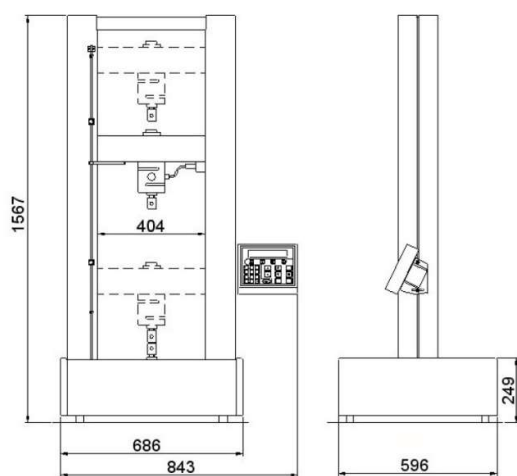


Fig. 5.12.

## 5.2. ÎNCERCAREA LA ÎNTINDERE A OȚELULUI

Caracteristicile mecanice fundamentale ale materialelor de construcții se determină experimental pe baza încercărilor la întindere sau compresiune. Aceste încercări se execută la mașini special concepute, pe epruvete de anumite forme și dimensiuni. Încercarea la întindere a oțelului se efectuează cu ajutorul presei *LS100 Plus* (prezentată în Fig. 5.13) în Laboratorul de Acțiuni în Construcții și Structuri din cadrul Departamentului de Mecanica Construcțiilor. Presa poate genera forțe de maxim 100kN și are un sistem automat pentru achiziția datelor *NEXYGEN Plus*, cu ajutorul căruia se poate vizualiza în timp real curba forță-alungire a oțelului. În timpul încercării, se determină forțele pentru o anumită treaptă de încărcare și alungirile corespunzătoare. Mărimea forțelor și a alungirilor se citește de pe consola din dreapta a presei.



a) Dimensiunile presei [mm]



b) Presa LS100 Plus [Lloyd Instruments]

Fig. 5.13.

Experimentul constă în stabilirea unei diagrame caracteristice pentru oțelul încercat, prin intermediul căreia se descrie relația dintre efortul axial de întindere care soliciță epruveta și efectul acestei solicițări → alungirea epruvetei. În continuare se prezintă încercarea la întindere a unui oțel ductil (moale) și curba caracteristică a acestuia:

- se măsoară dimensiunile inițiale ale epruvetei (Fig. 5.14.a);

$d_0$  – diametrul inițial al epruvetei;

$l_0$  – lungimea inițială a epruvetei.

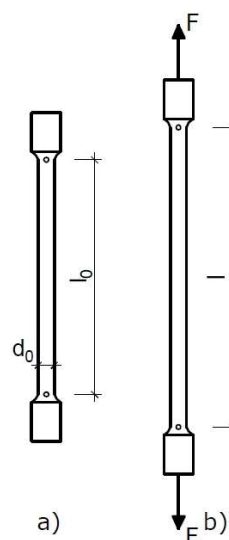


Fig. 5.14. Epruveta solicițată la întindere: a) înainte de solicițare; b) după solicițare.

- după fixarea epruvetei în presă, la capetele acesteia se aplică un sistem de forțe a cărui rezultantă este forța  $F$  având direcția axei probei, obținându-se astfel în tija epruvetei o solicitare de întindere pură (Fig. 5.14.b);
- încercarea se execută până la ruperea probei, înregistrându-se valori succesive ale forței  $F$  și alungirile aferente  $\Delta l = l - l_0$ . În final, se obține o diagramă a legii de variație forță-alungire. După ce s-a produs ruperea epruvetei, se vor măsura:

$l_r$  – lungimea epruvetei după rupere;

$d_r$  – diametrul epruvetei la rupere în zona gătuită.

Diagrama efort-alungire depinde de aria secțiunii transversale ( $A_0$ ) și lungimea inițială ( $l_0$ ) a epruvetei. Pornind de la relația dintre efortul axial  $N = F$  și alungirea  $\Delta l$  a epruvetei, se definește o diagramă care descrie relația dintre tensiuni și deformații (diagrama  $\sigma - \varepsilon$ ), numită și **curba caracteristică a materialului** (Fig. 5.15). Tensiunile  $\sigma$  și deformațiile  $\varepsilon$ , presupuse uniform distribuite în secțiunea transversală, se determină cu relațiile:

$$\sigma = \frac{N}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad (5.16)$$

unde  $A_0$  este aria inițială a secțiunii transversale și  $l_0$  este lungimea inițială a epruvetei.

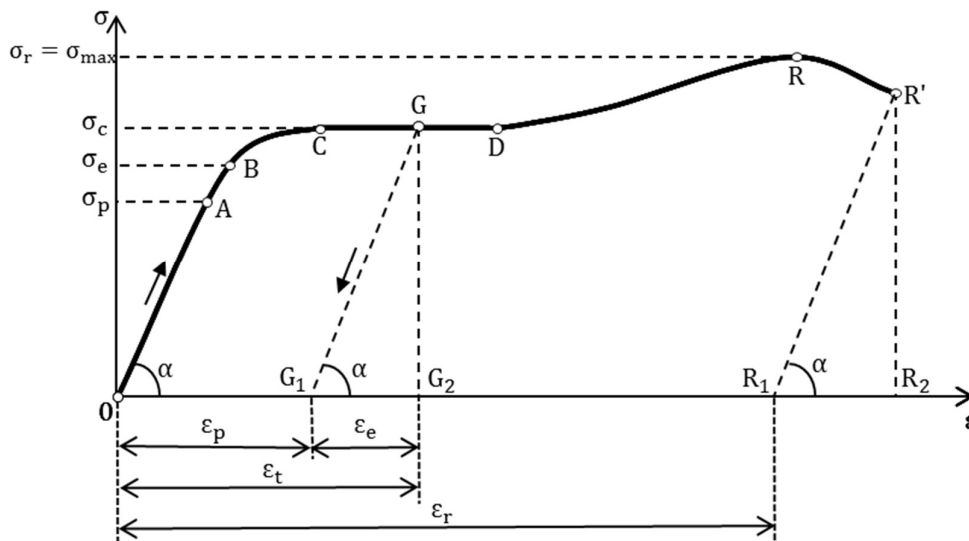


Fig. 5.15. Curba caracteristică a oțelului (convențională).

Pe curba caracteristică la întindere a oțelului se stabilesc următoarele puncte importante (limite):

- punctului A de pe curbă îi corespunde tensiunea  $\sigma_p$  – **limita de proporționalitate**, până la care tensiunile  $\sigma$  sunt proporționale cu deformațiile  $\varepsilon$ ; este admisă legea lui Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (5.17)$$

unde  $E = \operatorname{tg} \alpha$  este modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young); fizic, E este tensiunea  $\sigma$  ce produce  $\varepsilon = 1$ .



- punctului B de pe curbă îi corespunde tensiunea  $\sigma_e$  – **limita de elasticitate**. Până la această limită se consideră că materialul se comportă perfect elastic, adică la descărcare epruveta revine la forma și dimensiunile inițiale;
- punctului C de pe curbă îi corespunde tensiunea  $\sigma_c$  – **limita de curgere**. Pentru materialele care nu prezintă palier de curgere distinct, codurile definesc o limită de curgere convențională ca fiind valoarea tensiunii pentru care deformațiile remanente ating valoarea 0.2% din lungimea inițială a epruvetei. Punctul C (intrarea în curgere) marchează debutul dezvoltării deformației plastice;
- zona CD este denumită **palier de curgere**:  $\sigma = \sigma_c = const$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_c$  continuă să crească;
- porțiunea ascendentă DR a curbei se numește **zonă de autoconsolidare**;
- punctului R de pe curbă îi corespunde valoarea maximă a tensiunii:  $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_0} = \frac{F_{max}}{A_0}$ .  
Tensiunea corespunzătoare ruperii  $\sigma_r$ , numită **tensiune de rupere** sau **rezistență la rupere** se evaluează convențional cu efortul de întindere  $N_{max} = F_{max}$ , astfel  $\sigma_r = \sigma_{max}$ ;
- RR' este o zonă descendentă numită **zonă de rupere**, care se termină în punctul R' cu ruperea epruvetei și separarea ei în două părți.

Descărcarea epruvetelor solicate peste limita de curgere se face liniar elastic (după o dreaptă GG<sub>1</sub> paralelă cu zona de proporționalitate OA). Astfel, deformația totală ( $\varepsilon_t$ ) este formată dintr-o componentă elastică ( $\varepsilon_e$ ), care se anulează la descărcare, și una plastică ( $\varepsilon_p$ ), remanentă. Deformația specifică la rupere ( $\varepsilon_r$ ) caracterizează capacitatea de deformare plastică a materialului, iar în baza acestei mărimi materialele se pot clasifica în: materiale ductile ( $\varepsilon_r$  mare) și casante ( $\varepsilon_r$  mic).

*NOTĂ: Conform Eurocodului de proiectare a structurilor de oțel SR EN 1993-1-1, limita de curgere a oțelului  $\sigma_c$  este notată cu  $f_y$ . Rezistența de calcul R ( $f_{yd}$ ) a oțelului este definită prin raportul  $R = \frac{\sigma_c}{\gamma_M}$ , unde  $\gamma_M$  este coeficientul parțial de siguranță al materialului. Valorile coeficientului  $\gamma_M$  sunt date în Eurocod în funcție de solicitare. Pentru materialele casante, rezistența de calcul se va considera raportul  $R = \frac{\sigma_r}{\gamma_M}$ , unde  $\sigma_r$  este tensiunea de rupere, iar  $\gamma_M$  este coeficientul de siguranță al materialului.*

Curbele caracteristice de calcul care se utilizează în mod uzual sunt:

- a) curba caracteristică de calcul **ideal liniar elastică** – se utilizează pentru schematizarea comportării materialelor casante (Fig. 5.16.a).
- b) curba caracteristică de calcul **ideal elasto-plastică (curba Prandtl)** – se utilizează pentru schematizarea comportării materialelor ductile (Fig. 5.16.b).
- c) curba caracteristică de calcul **elasto-plastică și cu consolidare** – se utilizează pentru schematizarea comportării materialelor ductile la care palierul de curgere este relativ scurt și rezistența de rupere mult diferită față de limita de curgere (Fig. 5.16.c).

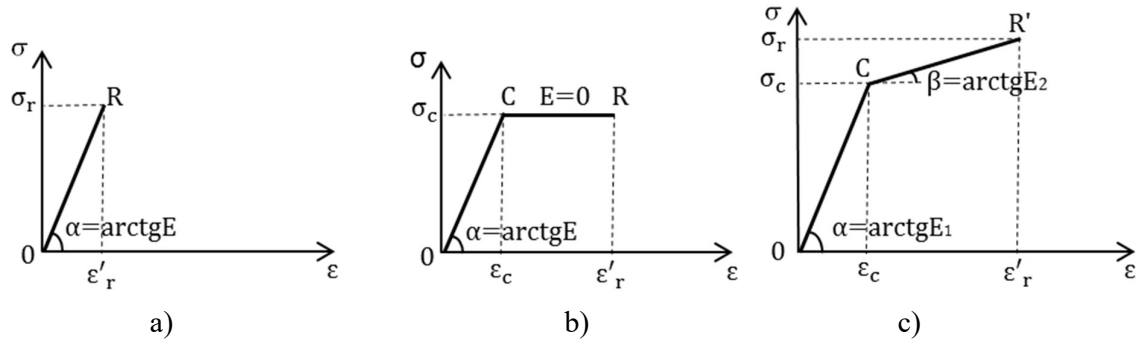
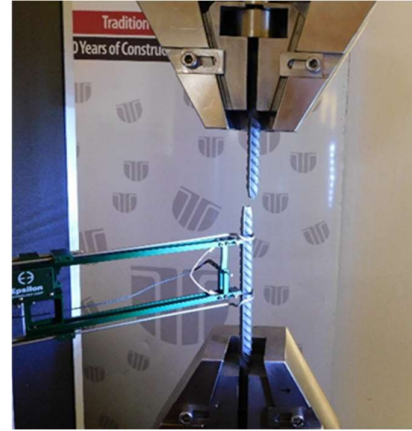


Fig. 5.16. Curbe caracteristice de calcul: a) material ideal liniar elastic; b) material ideal elasto-plastic; c) material ideal elasto-plastic și cu consolidare.



Fixarea epruvetei în presă



Ruperea epruvetei

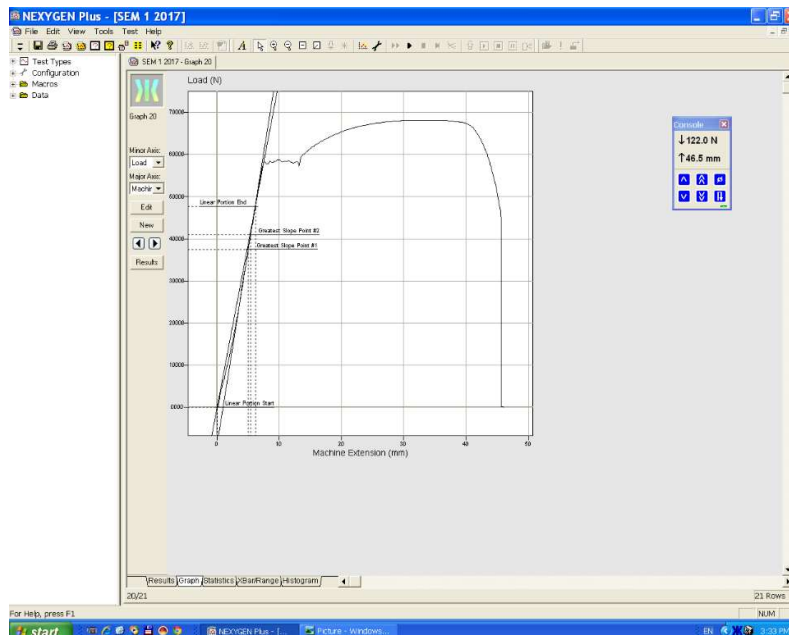


Fig. 5.17. Poze din timpul încercării.

## LUCRAREA 6

### SOLICITĂRI AXIALE ALE SISTEMELOR STATIC DETERMINATE (SSD): EFORTURI ÎN BARE, VERIFICARE, DIMENSIONARE ȘI EFORT CAPABIL

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

Pentru determinarea solicitărilor axiale apărute în sistemele static determinate (SSD), ca urmare a acțiunii forțelor exterioare date și de legătură sunt adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- ipoteza secțiunilor plane (a lui Bernoulli), care conduce la considerarea unor deformații specifice liniare uniforme pe toată secțiunea barei;
- rigiditatea barei comprimate este suficient de mare (riscul de pierdere a stabilității se neglijează);
- materialul se comportă liniar elastic (respectă legea lui Hooke).

Definiție: Efortul axial într-o secțiune „i” a unei bare este egal cu suma proiecțiilor după axa barei a tuturor forțelor date și de legătură care acționează dintr-un capăt al barei până în secțiunea „i” considerată.

La nivel de secțiune, se poate exprima echivalența efort-tensiune cu relația 6.1:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (6.1)$$

rezultând relația 6.2:

$$N = \sigma \cdot A \rightarrow \sigma = \frac{N}{A} \quad (6.2)$$

Cum, deformația specifică liniară se definește conform relației 6.3,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6.3)$$

aplicând legea lui Hooke pentru un tronson de bară de secțiune constantă cu aria A, realizată din material omogen și izotrop caracterizat de modulul de elasticitate E și solicitată la efort axial constant de intensitate N, rezultă:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (6.4)$$

alungirea barei de rigiditate la efort axial EA este dată de:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (6.5)$$

În funcție de sensul rezultantei N pe secțiunea analizată, solicitarea axială se poate clasifica astfel:

a) întindere ( $N > 0$ ):  $N$  iese din secțiune (este orientat în sensul normalei exterioare la secțiune);  
 b) compresiune ( $N < 0$ ):  $N$  intră în secțiune (este orientat în sensul normalei interioare la secțiune).

Pornind de la relațiile 6.2, care descriu legătura între tensiuni și eforturi pentru solicitarea axială, se stabilesc relațiile de calcul utilizate în rezolvarea principalelor categorii de probleme ale Rezistenței Materialelor. Acestea sunt rezumate în cadrul tabelului 6.1.

Tab. 6.1. Tipuri de probleme.

Tipul problemei	Relații de calcul	
	Cu neglijarea greutății proprii	Cu considerarea greutății proprii
Verificare (condiția de rezistență)	$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \leq R$	$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} + \gamma \cdot l \leq R$
Dimensionare	$A_{nec} \geq \frac{N}{R}$	$A_{nec} \geq \frac{N}{R - \gamma \cdot l}$
Efort axial capabil	$N_{cap} = A_{ef} \cdot R$	$N_{cap} = A_{ef} \cdot (R - \gamma \cdot l)$

unde:  $R$  – rezistența de calcul la întindere/compresiune a materialului;

$l$  – lungimea elementului de rezistență (a barei) supus la efort axial;

$\gamma$  – greutatea volumică a materialului din care este confecționată bara;

$A_{nec}$  – aria necesară a secțiunii transversale a barei solicitate la efortul axial  $N$ , dacă materialul din care e confecționată bara are rezistența  $R$ ;

$A_{ef}$  – aria efectivă a secțiunii transversale a barei solicitate axial, aceasta poate fi  $A_{br}$  sau  $A_{net}$  (dacă se ține seama de eventuale slăbiri datorate unor perforări).

*Obs. La barele întinse cu slăbiri (datorate golurilor pentru nituri/șuruburi) se lucrează cu aria netă ( $A_{net} = A_{br} - A_{gol}$ ), rezultând următoarele relații de calcul:*

– Verificare:  $\sigma = \frac{N}{A_{net}} \leq R$ ;

– Dimensionare:  $A_{nec} \geq \frac{N}{\alpha \cdot R}$ ;

unde  $\alpha$  este un coeficient care ține seama de slăbiri ( $\alpha=0.85$ ), practic sporim aria necesară cu 15-20% pentru a lua în considerare golurile;

– Efort capabil:  $N_{cap} = A_{net} \cdot R$ .

Dacă secțiunea slăbită este umplută cu un element de prindere (nit/șurub), iar solicitarea este de compresiune se lucrează cu aria brută ( $A_{br}$ ).

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru structura din Fig. 6.1, compusă dintr-o bară infinit rigidă și un tirant din oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ), se cere:

- determinarea efortului în tirant;
- dimensionarea tirantului de secțiune circulară;
- determinarea deplasării pe verticală a capătului liber (BB') al barei rigide.

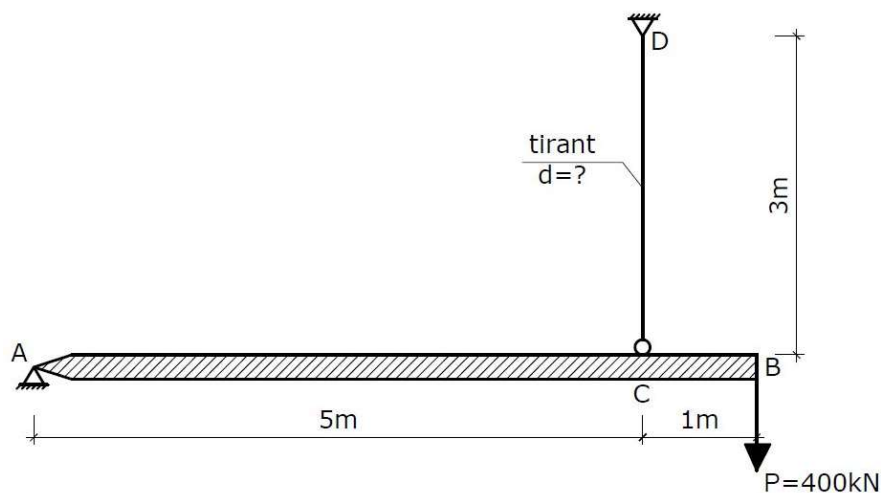


Fig. 6.1.

### REZOLVARE

a) Se determină efortul în tirant din condiția de echilibru, scrisă în punctul A, astfel încât necunoscutele  $H_A$  și  $V_A$  să nu intervină în expresie:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 400 \cdot 6 - N_t \cdot 5 = 0 \rightarrow N_t = 480kN.$$

b) Dimensionarea secțiunii tirantului

$$A_{nec} \geq \frac{N_t}{R} = \frac{480 \cdot 10^3}{235} = 2042.55mm^2 = \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4};$$

$$d_{nec} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 2042.55}{\pi}} \rightarrow d_{nec} \geq 51mm;$$

Alegem  $d = 55mm$ .

c) Se determină mai întâi alungirea tirantului CC'

$$CC' = \frac{N_t \cdot l}{E \cdot A} = \frac{480 \cdot 10^3 \cdot 3000}{2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 55^2}{4}} = 2.89mm.$$

Considerând că bara AB este rigidă (indeformabilă), din asemănarea triunghiurilor  $\Delta ACC'$  și  $\Delta ABB'$ , pe baza Fig. 6.2. și a ipotezei micilor deformații, se poate scrie relația:

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{BB'}{AB};$$

de unde rezultă că deplasarea pe verticală a capătului liber B este:

$$BB' = \Delta = \frac{\Delta l \cdot 6}{5} = \frac{6 \cdot 2.89}{5} = 3.47 \text{ mm}.$$

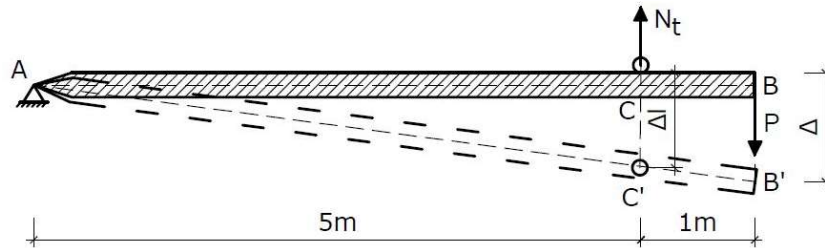


Fig. 6.2.

**Ex.2.** Pentru structura formată din două bare de oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ )

prinse articulat, reprezentată în Fig. 6.3.a, se cere:

- determinarea eforturilor axiale în bare;
- determinarea eforturilor capabile ale barelor în ipoteza prinderii sudate în noduri (fără slăbirea secțiunilor);
- determinarea valorii maxime a forței P ( $P_{cap}$ ) ce poate fi aplicată structurii.

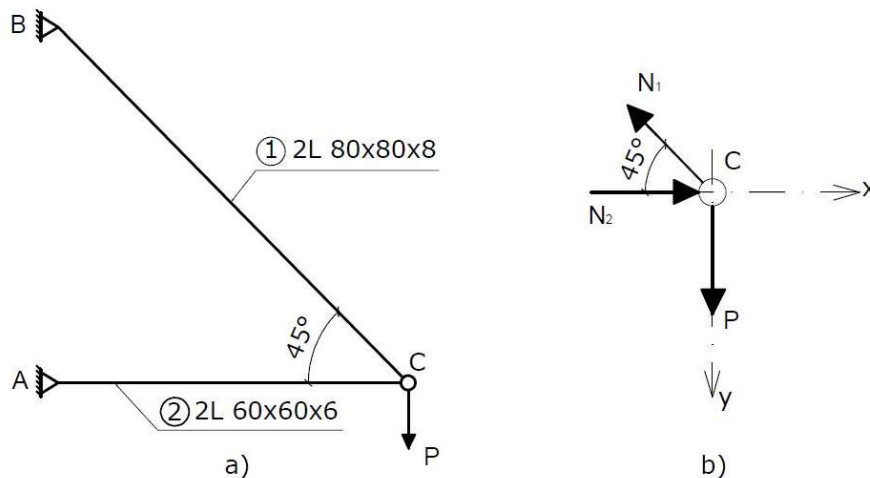


Fig. 6.3.

REZOLVARE

Rezolvarea poate fi abordată utilizând **metoda izolării nodurilor**; astfel, se izolează nodul C prin secționarea barelor CA și CB. Legăturile suprimate prin secționarea barelor se înlocuiesc cu eforturile axiale din bare ( $N_1$  și  $N_2$ ). În urma solicitării sistemului prin forța P, apare un efort axial de întindere în bara 1 a sistemului, respectiv un efort axial de compresiune în bara 2. Această stare de solicitare se reprezintă la nivelul nodului C, așa cum se arată în Fig. 6.3.b. În această etapă, eforturile se consideră cu un sens arbitrar. Dacă rezultatul este negativ înseamnă că, în realitate, efortul are sens contrar sensului introdus inițial în mod arbitrar. Dacă un efort „trage” de nod înseamnă că avem o solicitare de întindere și reciproc, dacă efortul „apasă” nodul, bara este comprimată. Scriind ecuațiile de echilibru ale nodului C rezultă:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_1 \cdot \cos 45^\circ = N_2;$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 \cdot \sin 45^\circ = P;$$

Rezolvând sistemul obținem:  $N_1 = 1.414P$ ;  $N_2 = P$ .

b) Din tablele (Anexa 3) se extrag ariile secțiunilor transversale ale profilelor laminate. Avem astfel:

$$A_{1,L60x60x6} = 6.91cm^2 \text{ și } A_{1,L80x80x8} = 12.30cm^2.$$

Valorile eforturilor axiale capabile ale barelor sunt:

$$N_{1, cap} = 2 \cdot A_{1,L80x80x8} \cdot R = 2 \cdot 1230 \cdot 235 = 578100N = 578.10kN;$$

$$N_{2, cap} = 2 \cdot A_{1,L60x60x6} \cdot R = 2 \cdot 691 \cdot 235 = 324770N = 324.77kN.$$

c) Presupunem că bara 1 își atinge prima capacitatea de rezistență:

$$N_1 = N_{1, cap} \rightarrow P_{1, cap} = \frac{N_{1, cap}}{1.414} = 408.84kN.$$

Presupunem că bara 2 își atinge prima capacitatea de rezistență:

$$N_2 = N_{2, cap} \rightarrow P_{2, cap} = N_{2, cap} = 324.77kN.$$

Valoarea maximă a forței P cu care poate fi încărcată structura studiată este:

$$P_{cap} = \min(P_{1, cap}, P_{2, cap}) = 324.77kN.$$

**Ex.3.** Pentru structura formată din bare articulate de oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ) din Fig. 6.4.a, se cere:

- determinarea eforturilor axiale în bare;
- dimensionarea barei 1, în ipoteza prinderii nituite ( $d_{nit} = 19mm$ ), utilizând două profile de tip cornier (L) cu aripi egale;
- dimensionarea barei 2, în ipoteza prinderii nituite ( $d_{nit} = 19mm$ ), utilizând două profile de tip cornier (L) cu aripi egale.

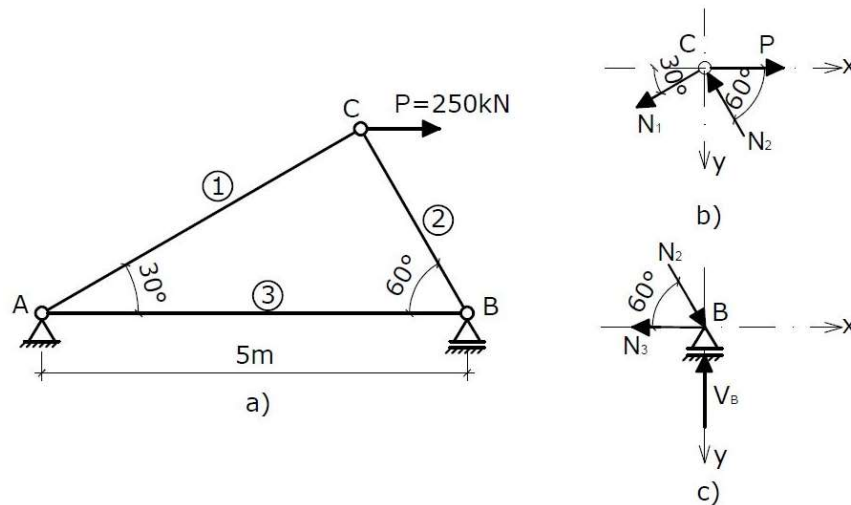


Fig. 6.4.

REZOLVARE

a) Determinarea eforturilor axiale în barele sistemului se poate face prin intermediul metodei izolării nodurilor. Astfel, izolând întâi nodul C, ca în Fig. 6.4.b, rezultă:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_1 \cdot \cos 30^\circ + N_2 \cdot \cos 60^\circ = P;$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 \cdot \cos 30^\circ = N_1 \cdot \cos 60^\circ \rightarrow N_1 = 1.732 \cdot N_2;$$

Înlocuind în prima ecuație relația obținută din a doua ecuație obținem  $N_2 = 0.5 \cdot P$ , iar apoi  $N_1 = 0.866 \cdot P$ . La izolarea nodului B, ca în Fig. 6.4.c, se poate obține reacțiunea verticală din reazemul B și efortul axial din bara 3:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_3 = N_2 \cdot \cos 60^\circ \rightarrow N_3 = 0.25 \cdot P;$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_B = N_2 \cdot \sin 60^\circ \rightarrow V_B = 0.433 \cdot P.$$

Verificarea rezultatelor se poate face scriind o ecuație de echilibru în reazemul A. Aceasta trebuie să conducă la aceeași valoare a reacțiunii  $V_B$ .

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot 5 - P \cdot 2.5 \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow V_B = 0.433 \cdot P.$$

În final, înlocuind și forța  $P = 250 \text{ kN}$ , rezultă eforturile în cele trei bare:  
 $N_1 = 216.5 \text{ kN}$ ,  $N_2 = 125 \text{ kN}$ ,  $N_3 = 62.5 \text{ kN}$ .

b) Conform rezultatelor, bara 1 este solicitată la întindere. La dimensionare se ține cont de slăbirea secțiunilor datorate golurilor pentru nituri prin coeficientul  $\alpha = 0.85$ :



$$A_{nec,1} = \frac{N_1}{\alpha \cdot R} = \frac{216.5 \cdot 10^3}{0.85 \cdot 235} = 1083.85 \text{mm}^2 \rightarrow A_{nec,1L} \geq 541.93 \text{mm}^2;$$

→ se alege din tabel (Anexa 3) 2L60x60x5, care are aria  $A_{1L} = 582 \text{mm}^2$ .

Verificarea soluției alese:

$$A_{net} = 2 \cdot (A_{br} - A_{gol}) = 2 \cdot (A_{1L} - d_{nit} \cdot t) = 2 \cdot (582 - 19 \cdot 5) = 974 \text{mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{N_1}{A_{ef}} = \frac{216.5 \cdot 10^3}{974} = 222.28 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{bara verifică condiția de rezistență.}$$

c) Conform rezultatelor, bara 2 este solicitată la compresiune; în consecință nu este necesară majorarea ariei necesare rezultate din calcul.

$$A_{nec,2} \geq \frac{N_2}{R} = \frac{125 \cdot 10^3}{235} = 531.91 \text{mm}^2 \rightarrow A_{nec,1L} \geq 265.96 \text{mm}^2;$$

→ se alege din tabel (Anexa 3) 2L35x35x4, care are aria  $A_{1L} = 267 \text{mm}^2$ .

Verificarea soluției alese:

$$A_{ef} = 2 \cdot A_{1L} = 2 \cdot 267 = 534 \text{mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{N_2}{A_{ef}} = \frac{125 \cdot 10^3}{534} = 234.08 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{bara verifică condiția de rezistență.}$$

**Ex.4.** Să se dimensioneze secțiunea stâlpului și a fundației din Fig. 6.5, știind că  $P = 600 \text{kN}$ , iar greutatea specifică a betonului simplu este  $\gamma_b = 24 \text{kN/m}^3$ . Rezistența de calcul la compresiune a betonului este  $R_1 = R_b = 4 \text{N/mm}^2$ , iar rezistența de calcul a terenului de fundare este  $R_2 = R_t = 0.3 \text{N/mm}^2$ . Se adoptă secțiuni pătrate.

#### REZOLVARE

Se începe prin dimensionarea secțiunii stâlpului ținând seama de greutatea proprie:

$$A_{1,nec} \geq \frac{P}{R_1 - \gamma \cdot l} = \frac{600 \cdot 10^3}{4 - 24 \cdot 10^{-6} \cdot 5000};$$

$$A_{1,nec} \geq 154639 \text{mm}^2 = 1546.39 \text{cm}^2;$$

$$a_{1,nec} \geq 39.32 \text{cm};$$

→ se alege  $a_1 = 40 \text{cm}$ , rezultând  $A_1 = 1600 \text{cm}^2$ .

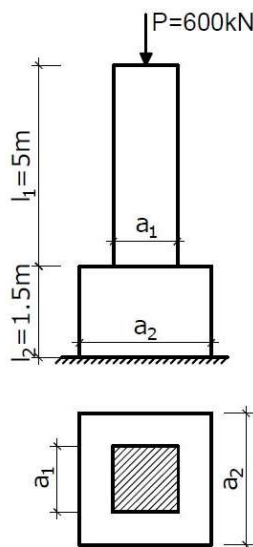


Fig. 6.5.

În continuare se dimensionează fundația stâlpului considerând de asemenea greutatea proprie:

$$A_{2,nec} \geq \frac{P + G_{stalp}}{R_1 - \gamma \cdot l} = \frac{(600 + 0.4^2 \cdot 5 \cdot 24) \cdot 10^3}{0.3 - 24 \cdot 10^{-6} \cdot 1500};$$

$$A_{2,nec} \geq 2345454 \text{ mm}^2 = 23454.54 \text{ cm}^2;$$

$$a_{2,nec} \geq 153.15 \text{ cm} \rightarrow \text{se alege } a_2 = 155 \text{ cm, rezultând } A_2 = 24025 \text{ cm}^2.$$

După cum se observă, considerarea greutății proprii poate fi privită ca reducere a rezistenței de calcul.

**Ex.5.** O bară dreaptă din oțel ( $R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ) fixată în capătul A, încărcată ca în Fig. 6.6.a. este alcătuită din două tronsoane: AB de secțiune circulară ( $D = 2.5 \text{ cm}$ ) și tronsonul BD de secțiune inelară ( $D = 3 \text{ cm}$  și  $d = 2.5 \text{ cm}$ ). Se cere:

- verificarea barei;
- deplasarea capătului liber D.

Se neglijează greutatea proprie a barei.

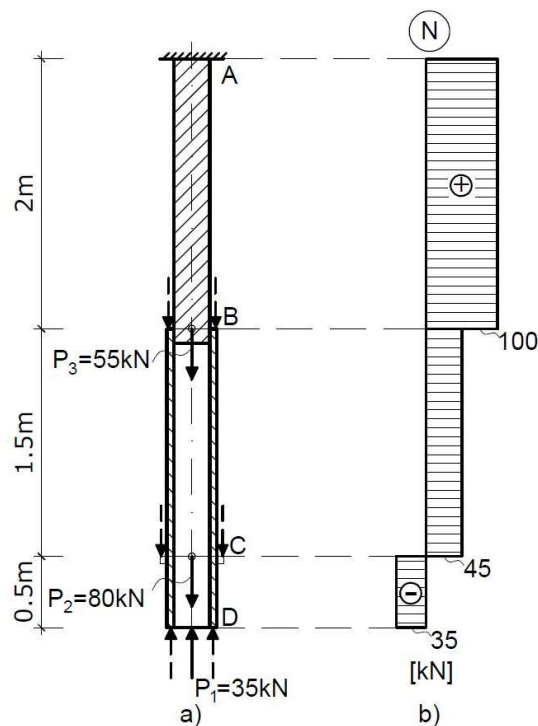


Fig. 6.6.

### REZOLVARE

- Se trasează diagrama de efort axial pornind din capătul liber (D) spre încastrare:

$$N_{CD} = -P_1 = -35 \text{ kN};$$

$$N_{BC} = -P_1 + P_2 = 45kN;$$

$$N_{AB} = -P_1 + P_2 + P_3 = 100kN;$$

Diagrama de efort axial N se poate vedea în Fig. 6.6.b.

Verificarea barei se face în toate segmentele de bară în care tensiunea normală este constantă.

Ariile secțiunilor normale sunt:

$$A_{AB} = \frac{\pi \cdot 2.5^2}{4} = 4.91cm^2; A_{BC} = A_{CD} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2.5^2}{4} = 2.16cm^2;$$

$$\sigma_{CD} = \frac{|N_{CD}|}{A_{CD}} = \frac{35 \cdot 10^3}{2.16 \cdot 10^2} = 162.04 \frac{N}{mm^2} < 235 \frac{N}{mm^2};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{45 \cdot 10^3}{2.16 \cdot 10^2} = 208.33 \frac{N}{mm^2} < 235 \frac{N}{mm^2};$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{100 \cdot 10^3}{4.91 \cdot 10^2} = 203.67 \frac{N}{mm^2} < 235 \frac{N}{mm^2};$$

→ bara verifică condiția de rezistență.

b) Bara fiind fixată în A, deplasarea secțiunii D se obține însumând algebric alungirile tronsoanelor de bară:

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot A_{CD}} = \frac{-35 \cdot 10^3 \cdot 500}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 2.16 \cdot 10^2} = -0.39mm;$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 1500}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 2.16 \cdot 10^2} = 1.49mm;$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot A_{AB}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2000}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 4.91 \cdot 10^2} = 1.94mm;$$

→ deplasarea secțiunii D este:  $\Delta_D = 3.04mm$ .

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru bara rigidă din Fig. 6.7. suspendată cu un tirant din oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ), prins sudat în noduri și având o secțiune alcătuită din 2UPN 80, se cere:

a) determinarea sarcinii capabile  $q_{cap}$ ;

b) dacă  $q = 40kN/m$ , să se verifice secțiunea tirantului și să se determine deplasarea nodului C.

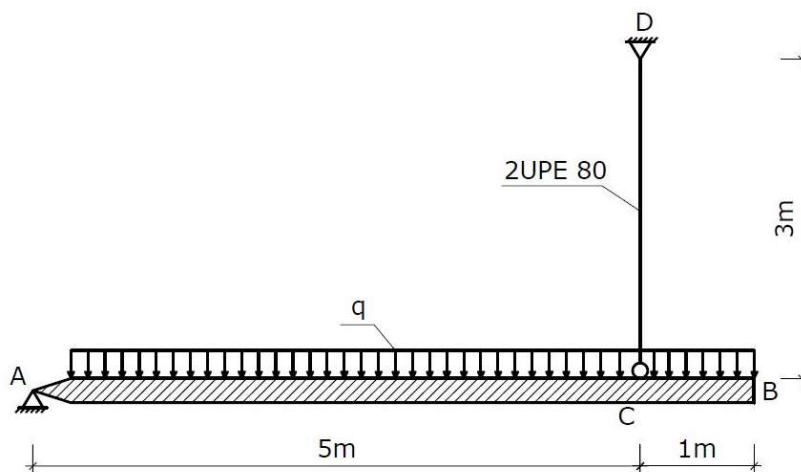


Fig. 6.7.

Rezultate parțiale:  $N_t = 3.6 \cdot q$ .

**P2.** Pentru sistemul din Fig. 6.8. alcătuit din trei bare de articulate, din oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ), este acționat de forța  $P = 850kN$ . Îmbinările nodurilor sunt realizate prin sudură. Se cere:

- dimensionarea secțiunii barei 1 utilizând două profile de tip UPN;
- dimensionarea secțiunii barei 2 utilizând două profile de tip L cu aripi egale.

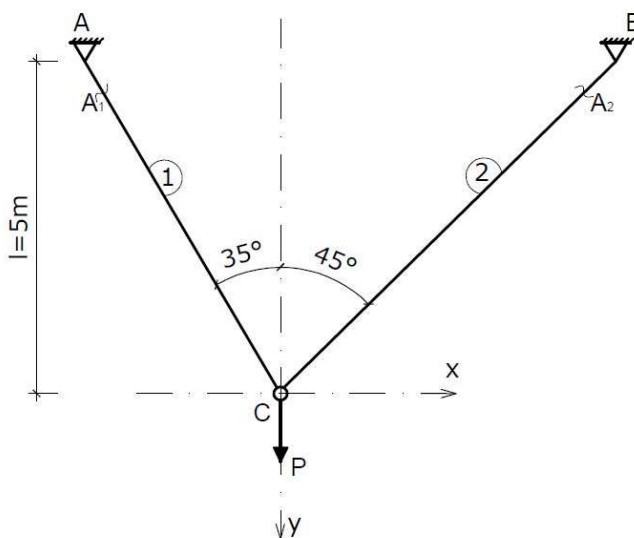


Fig. 6.8.

Rezultate parțiale:

$$N_1 = 0.730 \cdot P; N_2 = 0.518 \cdot P.$$

**P3.** Pentru structura formată din bare articulate de oțel ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ) din Fig. 6.9, se cere:

- determinarea eforturilor axiale în bare;
- dimensionarea secțiunilor barelor 1, 2 și 3, în ipoteza prinderii nituite ( $d_{nit} = 19mm$ ), utilizând două profile de tip cornier ( $L$ ) cu aripi egale;
- determinarea forței maxime ce poate fi preluată de structură ( $P_{cap}$ ).

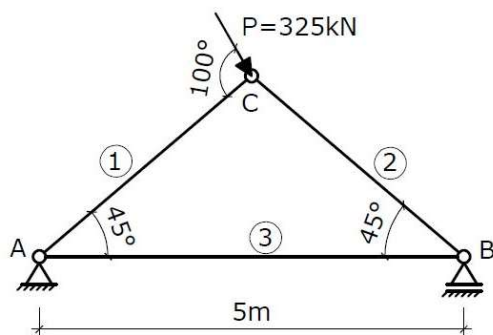


Fig. 6.9.

Rezultate parțiale:  $N_1 = 0.175 \cdot P$ ;  $N_2 = 0.985 \cdot P$ ;  $N_3 = 0.696 \cdot P$ .

**P4.** Un stâlp rigid, încărcat ca în Fig. 6.10, articulat în punctul A, este ancorat cu ajutorul unui tirant metalic ( $R = 235 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ). Să se dimensioneze tirantul de susținere, utilizând oțel rotund, astfel încât deplasarea maximă a vârfului stâlpului să nu depășească valoarea 2.2cm. Să se comenteze rezultatul obținut prin raportarea la dimensionarea bazată pe condiția de rezistență a tirantului. Prinderea tirantului se face fără slăbirea secțiunilor.

Rezultate parțiale:  $A_{nec} = 9.1cm^2$ .

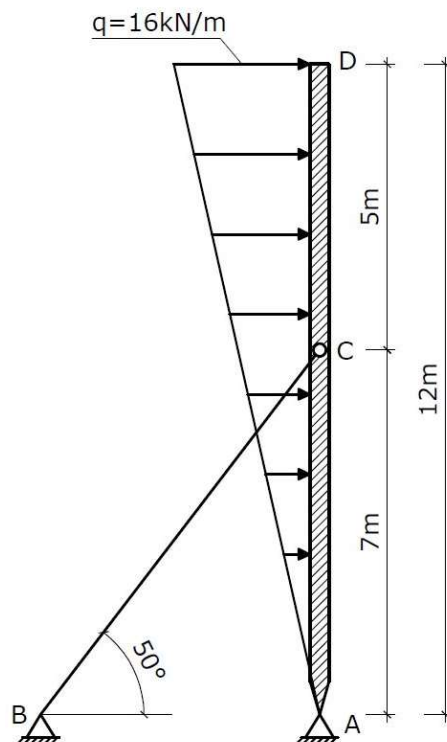


Fig. 6.10.

## LUCRAREA 7

**SOLICITĂRI AXIALE (PRIN FORȚE, VARIAȚII DE TEMPERATURĂ,  
INEXACTITĂȚI DE MONTAJ) ALE SISTEMELOR DE BARE STATIC  
NEDETERMINATE (SSN)**

**A. NOȚIUNI TEORETICE**

Sistemele static nedeterminate reprezintă sistemele structurale fixate în raport cu terenul prin intermediul mai multor legături decât cele strict necesare, în număr de 3. Numărul acestor legături suplimentare reprezintă gradul de nedeterminare statică. Urmare a acestui fapt, starea de eforturi rezultată în urma încărcărilor nu poate fi determinată numai pe baza ecuațiilor de echilibru static, fiind necesară impunerea unui număr de ecuații, numite „de compatibilitate”, egal cu numărul legăturilor suplimentare de fixare a corpului.

Gradul de nedeterminare statică se poate determina conform relației 7.1:

$$N = L_I + L_E - 3 \cdot C, \quad (7.1)$$

unde:

$L_I$  - numărul legăturilor interioare;

$L_E$  - numărul legăturilor simple cu terenul;

$N$  - gradul de nedeterminare statică;

$C$  - numărul corpurilor (barelor).

**B. EXEMPLE DE CALCUL**

**Ex.1.** Pentru bara metalică din Fig. 7.1. ( $E = 210000N/mm^2$ ,  $R = 235N/mm^2$ ) static nedeterminată, executată din țevă cu secțiunea inelară ( $D = 100mm$ ,  $d = 80mm$ ) și îmbinată la capete prin sudură, se cere:

- a) Determinarea reacțiilor;
- b) Trasarea diagramei de efort axial;
- c) Verficarea secțiunii barei pentru  $P = 240kN$ ;
- d) Determinarea valorii maxime a forței  $P$  care poate fi preluată de bară ( $P_{cap}$ ).

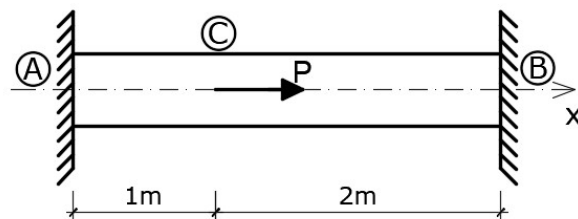


Fig. 7.1.

**REZOLVARE:**

- a) În cazul unui sistem de forțe coplanare oarecare, gradul de nedeterminare statică al

structurii studiate rezultă cu valoarea 3. Cum forța  $P$  este aplicată după axa barei, componentele reacțiunilor normale la axa barei sunt nule; la fel și reacțiunile moment. Rămân ca necunoscute numai componentele reacțiunilor orientate după axa barei, gradul de nedeterminare statică reducându-se în acest caz la valoarea 1. Singura ecuație de echilibru care poate fi utilizată este cea de proiecții după axa barei. Astfel, pe baza schemei din Fig. 7.2. avem:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A + H_B = P;$$

Ecuția de compatibilitate a deplasărilor exprimă faptul că alungirea tronsonului AC (întins) este egală cu scurtarea tronsonului CB (comprimat), lungimea totală a barei trebuind să rămână neschimbată:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{CB};$$

$$\frac{H_A \cdot l_{AC}}{E \cdot A} = \frac{H_B \cdot l_{CB}}{E \cdot A};$$

$$H_A = 2 \cdot H_B.$$

În urma rezolvării sistemului format din ecuația de echilibru și ecuația de compatibilitate rezultă valorile reacțiunilor. Astfel:

$$\begin{cases} H_A = 2 \cdot H_B; \\ H_A + H_B = P; \end{cases}$$

$$H_A = \frac{2}{3} \cdot P \text{ și } H_B = \frac{1}{3} \cdot P.$$

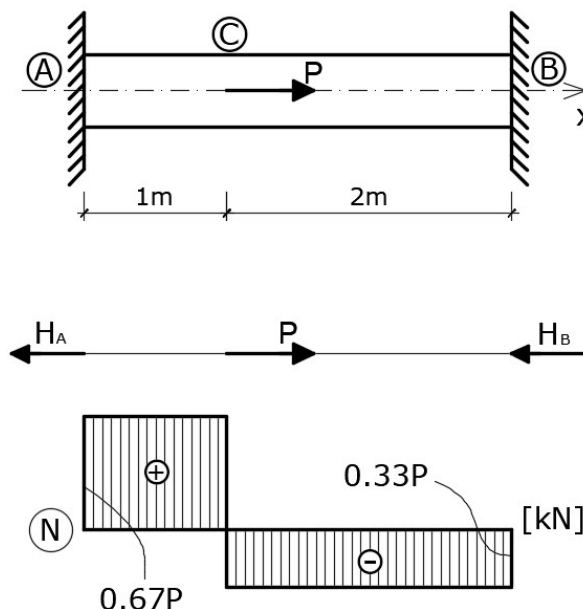


Fig. 7.2.

b) Pe baza reacțiunilor determinate anterior se trasează diagrama de efort axial din Fig. 7.2.

c) Pentru  $P = 240\text{kN}$ , rezultă  $H_A = 160\text{kN}$ , respectiv  $H_B = 80\text{kN}$ . Având în vedere secțiunea constantă a barei, verificarea ei se face doar pe tronsonul AC, acesta fiind tronsonul cel mai sollicitat.

$$A_{ef} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot (100^2 - 80^2) = 2827.43\text{mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{H_A}{A_{ef}} = \frac{160 \cdot 10^3}{2827.43} = 56.59 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{verifică.}$$

Obs. Se observă că bara este sollicitată mult sub capacitatea ei de rezistență.

d) Atingerea limitei de rezistență a barei este echivalentă cu atingerea efortului axial capabil al secțiunii tronsonului celui mai sollicitat, adică AC. Considerând exprimarea efortului axial pe tronsonul respectiv în funcție de forța  $P$ , avem:

$$N_{cap} = \frac{2}{3} \cdot P_{cap} = A_{ef} \cdot R \rightarrow P_{cap} = \frac{3}{2} \cdot A_{ef} \cdot R = 996.67 \text{ kN}.$$

**Ex.2.** Pentru structura de oțel ( $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ) din Fig. 7.3, având  $A_1 = 200 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 140 \text{ mm}^2$  se cere:

- Determinarea reacțiilor;
- Trasarea diagramei de efort axial;
- Verificarea barei pentru  $P = 80 \text{ kN}$ .

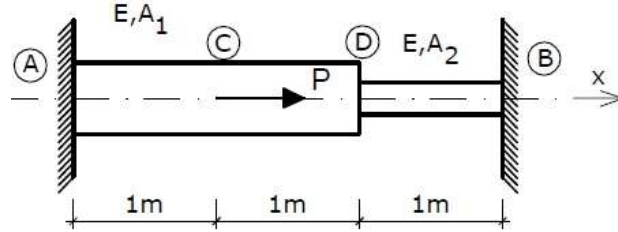


Fig. 7.3.

**REZOLVARE:**

*Obs. În cazul sistemelor de bare static nedeterminate, starea de eforturi este influențată de raportul rigidităților la efort axial ( $EA$ ), dacă materialele constitutive sunt diferite și/sau dacă aria secțiunii barei nu este constantă.*

- Similar cazului studiat anterior, se scrie o ecuație de echilibru static, respectiv o ecuație de compatibilitate a deplasărilor, pe baza Fig. 7.4.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A + H_B = P; \Delta l_{AC} = \Delta l_{CD} + \Delta l_{DB}; \frac{H_A \cdot l_{AC}}{E \cdot A_1} = \frac{H_B \cdot l_{CD}}{E \cdot A_1} + \frac{H_B \cdot l_{DB}}{E \cdot A_2};$$

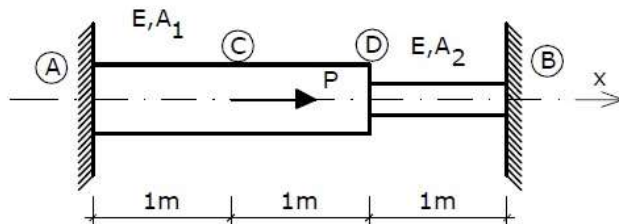
$$H_A = H_B \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right); \begin{cases} H_A + H_B = P \\ H_A = 2.4286 \cdot H_B \end{cases}; \frac{A_1}{A_2} = 1.4286;$$

În urma rezolvării sistemului format din ecuația de echilibru static și ecuația de compatibilitate rezultă reacțiunile de mai jos:

$$H_A = 0.709 \cdot P;$$

$$H_B = 0.291 \cdot P;$$

- Pe baza reacțiunilor determinate mai sus se poate trasa diagrama de efort axial din Fig. 7.4.



- Pentru structura analizată, pot fi identificate două tronsoane cu arii diferite ale secțiunilor: tronsonul AD de arie  $A_1$ , respectiv tronsonul DB de arie  $A_2$ . Datorită ariilor diferite, ambele tronsoane pot fi periculoase și trebuie verificate.

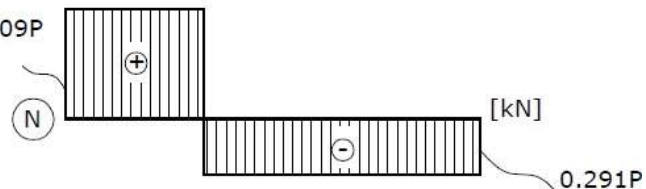


Fig. 7.4.

*Verificarea secțiunii tronsonului AD:*



$$\sigma = \frac{H_A}{A_1} = \frac{0.709 \cdot 80 \cdot 10^3}{200} = 283.6 \frac{N}{mm^2} \geq 235 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{NU verifică.}$$

Verificarea secțiunii tronsonului DB:

$$\sigma = \frac{H_B}{A_2} = \frac{0.291 \cdot 80 \cdot 10^3}{140} = 166.3 \frac{N}{mm^2} \leq 235 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifică.}$$

Se poate concluziona că bara cedează. Pentru ca bara să reziste ar trebui redimensionat tronsonul AC deoarece în cazul respectiv nu este verificată condiția de rezistență.

$$A_{1,nec} \geq \frac{H_A}{R} = \frac{0.709 \cdot 80 \cdot 10^3}{235} = 241.36 mm^2.$$

Pentru a nu modifica însă starea de solicitare, raportul între arii trebuie păstrat la valoarea anterioară, adică la 1.4286. Ca urmare, se prevăd ariile  $A_1 = 250 mm^2$ , respectiv  $A_2 = 175 mm^2$ , rezultând valorile tensiunilor de mai jos.

$$\sigma_{AC} = \frac{H_A}{A_1} = \frac{0.709 \cdot 80 \cdot 10^3}{250} = 226.88 \frac{N}{mm^2} \leq 235 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifică.}$$

$$\sigma_{DB} = \frac{H_B}{A_2} = \frac{0.291 \cdot 80 \cdot 10^3}{175} = 133.03 \frac{N}{mm^2} \leq 235 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifică.}$$

**Ex.3.** Bara de oțel ( $E = 210000 N/mm^2$ ,  $R = 235 N/mm^2$ ,  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ) din Fig. 7.5. este alcătuită din 2 profile UPN100 ( $A_{UPN100} = 1350 mm^2$ ) și este mai scurtă cu  $\delta = 1 mm$  decât distanța dintre reazeme ( $l = 6 m$ ).

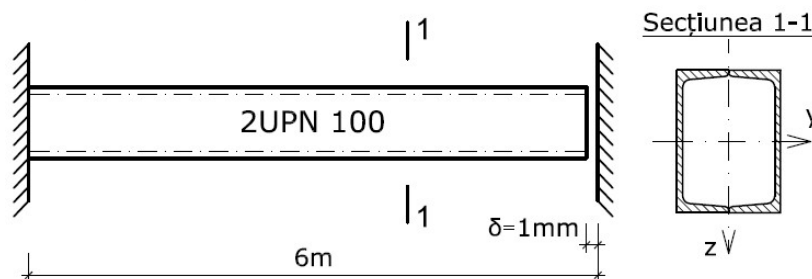


Fig. 7.5.

Se cere:

- Determinarea variației de temperatură  $\Delta t_1$  pentru care bara se alungește liber;
- Determinarea reacțiilor X din reazemele barei, în cazul în care bara este încălzită suplimentar cu  $\Delta t_2$  grade;
- Determinarea variației maxime a temperaturii ce poate fi suportată de bară.

**REZOLVARE:**

a) Variația de temperatură care permite alungirea liberă a barei este variația de temperatură corespunzătoare unei alungiri  $\delta = 1 mm$ .

$$\Delta l = \delta = l \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta l}{l \cdot \alpha_t} = \frac{1}{6000 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 13.89^\circ C.$$

b) După producerea alungirii libere  $\delta = 1\text{mm}$ , bara devine static nedeterminată. Orice creștere a temperaturii peste valoarea de  $13.89^\circ\text{C}$  conduce la comprimarea barei și la apariția unor reacțiuni orizontale în reazeme, egale ca intensitate cu forța de compresiune din bară, conform figurii următoare (Fig. 7.6):

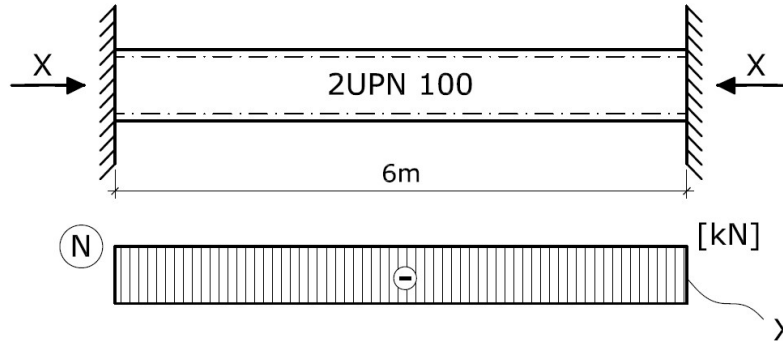


Fig. 7.6.

Valoarea reacțiunii corespunzătoare unei variații de temperatură  $\Delta t_2$  este determinată în continuare din condiția ca alungirea provocată de creșterea suplimentară a temperaturii (alungire care s-ar produce liber) să fie egală cu scurtarea provocată de reacțiunea  $X$  (care blochează alungirea liberă a barei), astfel încât bara să nu-și modifice lungimea:

$$l \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_2 = \frac{X \cdot l}{E \cdot A} \rightarrow X = E \cdot 2 \cdot A \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_2 = 2.1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 1350 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta t_2;$$

$$X = 6804 \cdot \Delta t_2 [\text{N}].$$

c) Valoarea maximă  $\Delta t_{2max}$  a variației temperaturii suportată de bara studiată este echivalentă producerii unei compresiuni în bară egală ca intensitate cu efortul axial capabil al barei:

$$N_{cap} = 2 \cdot A \cdot R = 6804 \cdot \Delta t_{2max} \rightarrow \Delta t_{2max} = \frac{2 \cdot 1350 \cdot 235}{6804} = 93.25^\circ\text{C},$$

rezultând în final:

$$\Delta t_{max} = \Delta t_1 + \Delta t_{2max} = 13.89 + 93.25 = 107.14^\circ\text{C}.$$

**Ex.4.** Grinda infinit rigidă sollicitată ca în Fig. 7.7. este suspendată prin intermediul tiranților metalici 1 și 2 ( $E = 210000\text{N/mm}^2$ ,  $R = 235\text{N/mm}^2$ ,  $A_{1L} = 691\text{mm}^2$ ).

Se cere:

- Determinarea eforturilor în tiranți în funcție de încărcarea  $P$ ;
- Verificarea secțiunilor tiranților pentru încărcarea  $P = 400\text{kN}$ , în ipoteza prinderilor sudate;
- Determinarea valorii maxime a forței  $P$  care poate acționa sistemul ( $P_{cap}$ ).

REZOLVARE

a) Structura studiată este o dată static nedeterminată. Pentru determinarea eforturilor din tiranți, nu este necesară și determinarea componentelor reacțiunii din articulația A; ecuația de echilibru static se scrie sub forma ecuației de momente în raport cu punctul A:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3 \cdot N_1 + N_2 \cdot 5 = 4 \cdot P.$$

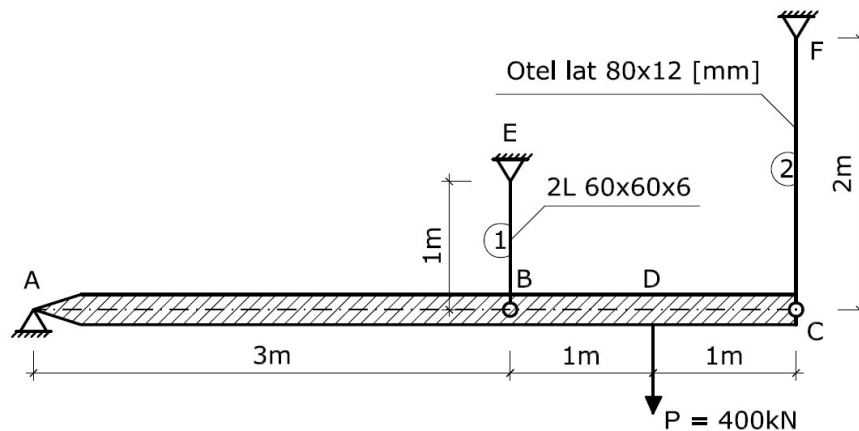


Fig. 7.7.

Cea de-a doua ecuație este ecuația de compatibilitate a deplasărilor. Având în vedere că grinda infinit rigidă nu se deformează și rămâne rectilinie (Fig. 7.8.) rotindu-se numai în jurul punctului A, pe baza ipotezei micilor deplasări, între alungirile tiranților este valabilă relația:

$$\frac{\Delta l_1}{3} = \frac{\Delta l_2}{5} \rightarrow \frac{N_1 \cdot l_1}{3 \cdot E \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{5 \cdot E \cdot A_2} \rightarrow N_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot N_2 = 1.7275 \cdot N_2;$$

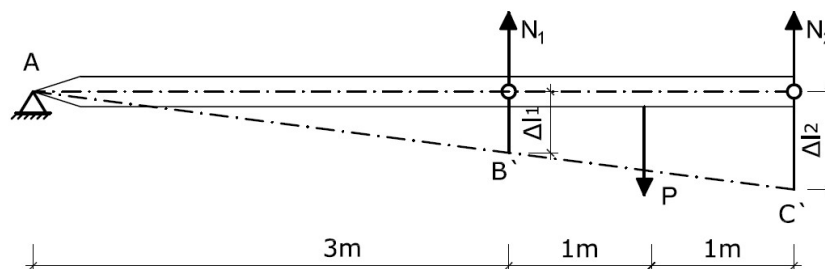


Fig. 7.8.

Rezolvând sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 3 \cdot N_1 + 5 \cdot N_2 = 4 \cdot P; \\ N_1 = 1.7275 \cdot N_2; \end{cases}$$

obținem (folosind P=400kN):

$$N_1 = 0.6785 \cdot P = 271.4 \text{ kN} \text{ și } N_2 = 0.3928 \cdot P = 157.12 \text{ kN}.$$

b) Verificarea secțiunii barei 1

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{271.4 \cdot 10^3}{2 \cdot 691} = 196.38 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifică.}$$

Verificarea secțiunii barei 2

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{157.12 \cdot 10^3}{80 \cdot 12} = 163.67 \frac{N}{mm^2} \leq 235 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifică.}$$

c) Atingerea încărcării capabile a structurii presupune atingerea efortului capabil al unuia din tiranți.

$$N_{1, \text{cap}} = A_1 \cdot R = 2 \cdot 691 \cdot 235 = 324770 \text{ N} = 324.77 \text{ kN};$$

$$N_{2, \text{cap}} = A_2 \cdot R = 80 \cdot 12 \cdot 235 = 225600 \text{ N} = 225.6 \text{ kN};$$

Presupunem că tirantul 1 își atinge limita de rezistență. Avem deci:

$$N_{1, \text{cap}} = 0.6785 \cdot P_{1, \text{cap}} \rightarrow P_{1, \text{cap}} = \frac{N_{1, \text{cap}}}{0.6785} = 478.66 \text{ kN};$$

Presupunem că tirantul 2 își atinge limita de rezistență. Avem deci:

$$N_{2, \text{cap}} = 0.3928 \cdot P_{2, \text{cap}} \rightarrow P_{2, \text{cap}} = \frac{N_{2, \text{cap}}}{0.3928} = 574.34 \text{ kN};$$

$$P_{\text{cap}} = \min(P_{1, \text{cap}}, P_{2, \text{cap}}) = 478.66 \text{ kN}.$$

**Ex.5.** Bara infinit rigidă EABCD sollicitată ca în Fig. 7.9. este susținută de trei tiranți metalici ( $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ), de arii diferite ( $A_1 = A$ ,  $A_2 = 2A$ ,  $A_3 = 1.5A$ ). Cunoscând  $a = 3 \text{ m}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $q = 12 \text{ kN/m}$ ,  $A = 5 \text{ cm}^2$ , se cere să se determine încărcarea capabilă  $P_{\text{cap}}$ .

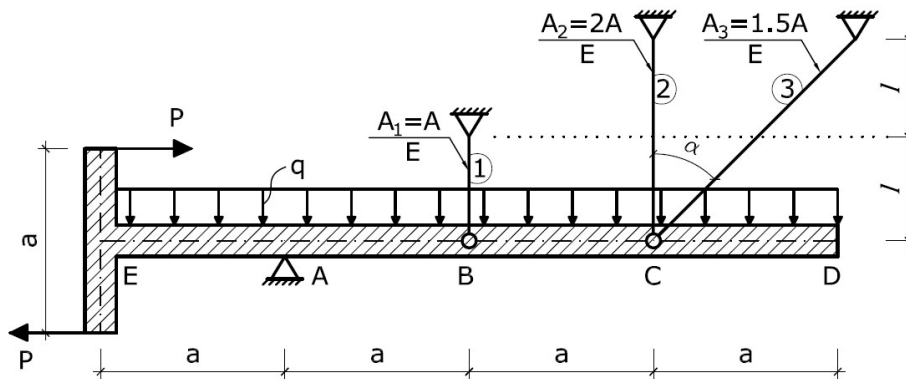


Fig. 7.9.

### REZOLVARE

Structura studiată este static nedeterminată având gradul de nedeterminare doi. În vederea determinării încărcării capabile, trebuie preliminar determinate eforturile din tiranți. În acest scop, nu este necesară determinarea componentelor reacțiunii din articulația A și astfel ecuația de echilibru folosită în continuare este ecuației de momente în raport cu punctul A:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2 \cdot a + N_3 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot a - 2 \cdot P \cdot \frac{a}{2} - q \cdot 4 \cdot a \cdot a = 0.$$

Suplimentar trebuie introduse două ecuații de compatibilitate a deplasărilor în care intervin alungirile celor trei tiranți. Adoptând ipoteza micilor deplasări, configurația deformată a sistemului poate fi schematizată ca în Fig. 7.10. Trebuie menționat că, pentru claritate, bara rigidă s-a reprezentat în configurația deformată prin axa ei. Analizând configurația deformată, pot fi deduse următoarele relații de compatibilitate a deplasărilor:

(1) *Compatibilitatea dintre alungirile tiranților 1 și 2:*

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2 \cdot a} \rightarrow \frac{N_1 \cdot l_1}{a \cdot E \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{2 \cdot a \cdot E \cdot A_2} \rightarrow \frac{N_1 \cdot l}{a \cdot E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot a \cdot E \cdot 2 \cdot A};$$

$$\rightarrow N_1 = \frac{N_2}{2} = 0.5 \cdot N_2;$$

(2) *Compatibilitatea dintre alungirile tiranților 2 și 3:*

$$\Delta l_2 \cdot \cos \alpha = \Delta l_3 \rightarrow \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} \cdot \cos \alpha = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3};$$

$$\rightarrow \frac{N_2 \cdot 2 \cdot l}{E \cdot 2 \cdot A} \cdot \cos \alpha = \frac{N_3 \cdot \frac{2 \cdot l}{\cos \alpha}}{E \cdot 1.5 \cdot A};$$

$$\rightarrow N_3 = \frac{1.5 \cdot \cos^2 \alpha}{2} \cdot N_2 = 0.375 \cdot N_2;$$

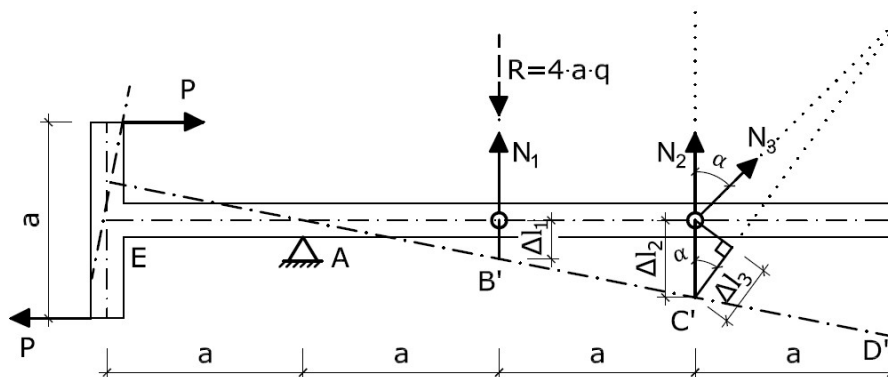


Fig. 7.10.

Se cuplează ecuația de echilibru cu cele două ecuații de compatibilitate, rezultând sistemul:

$$\begin{cases} N_1 + 2 \cdot N_2 + 2 \cdot N_3 \cdot \cos \alpha = P + 4 \cdot a \cdot q; \\ N_1 = 0.5 \cdot N_2; \\ N_3 = 0.375 \cdot N_2; \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele expresii ale eforturilor din tiranți:

$$\begin{cases} N_1 = 0.165 \cdot (P + 4 \cdot a \cdot q); \\ N_2 = 0.333 \cdot (P + 4 \cdot a \cdot q); \\ N_3 = 0.1237 \cdot (P + 4 \cdot a \cdot q); \end{cases}$$

Se calculează tensiunile normale în fiecare tirant pentru a identifica tirantul cel mai sollicitat:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = 0.165 \cdot \frac{(P + 4 \cdot a \cdot q)}{A};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0.33 \cdot (P + 4 \cdot a \cdot q)}{2 \cdot A} = 0.165 \cdot \frac{(P + 4 \cdot a \cdot q)}{A};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0.1237 \cdot (P + 4 \cdot a \cdot q)}{1.5 \cdot A} = 0.0825 \cdot \frac{(P + 4 \cdot a \cdot q)}{A};$$

Se observă că tensiunile normale dezvoltate în tiranții 1 și 2 sunt egale, de valoare maximă, în timp ce tirantul 3 este mai puțin sollicitat. În consecință, prin impunerea condiției de rezistență pentru oricare din tiranții 1 și 2, obținem încărcarea capabilă ce poate fi aplicată sistemului:

$$0.165 \cdot \frac{(P + 4 \cdot a \cdot q)}{A} \leq R \rightarrow P_{cap} \leq \frac{A \cdot R}{0.165} - 4 \cdot a \cdot q;$$

Folosind datele numerice ale problemei, la limită, obținem:

$$P_{cap} = \frac{A \cdot R}{0.165} - 4 \cdot a \cdot q = 568.12 \cdot 10^3 N = 568.12 kN.$$

**Ex.6.** Pentru structura din Fig. 7.11, considerând că bara cotită este înfinit rigidă, se cere:

a) Să se verifice condiția de rezistență pentru tiranții 1 și 2 cunoscând  $R = 300 N/mm^2$ ,  $A_1 = 30 cm^2$ ,  $A_2 = 12 cm^2$ ;

b) Să se determine variația maximă de temperatură (încălzirea) pentru cele două bare flexibile știind că  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ,  $E = 210000 N/mm^2$ ,  $A_1 = A_2 = A = 14 cm^2$ .

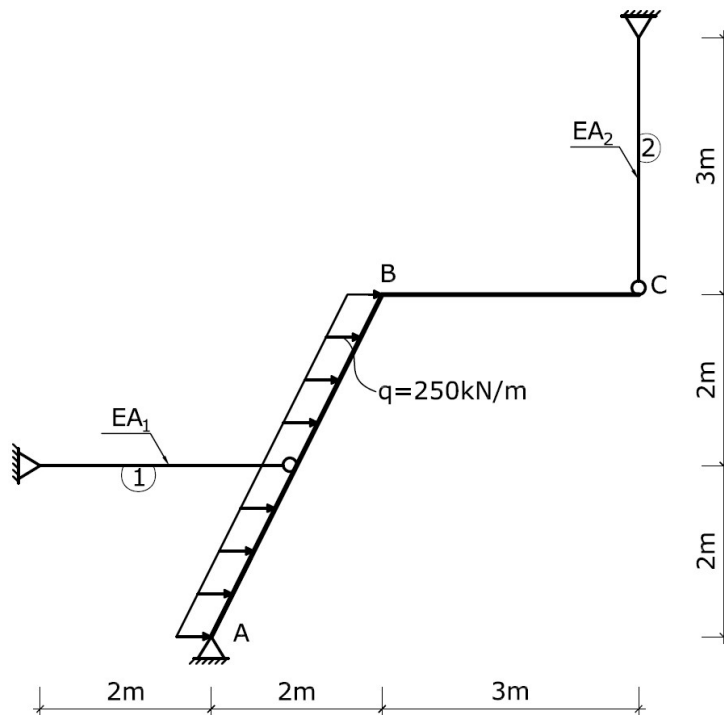


Fig. 7.11.

REZOLVARE

a) Structura studiată este static nedeterminată, având gradul de nedeterminare 1. Din cele trei ecuații de echilibru static, o reținem pe cea în care intervin numai eforturile de întindere în tiranți:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 5 - 250 \cdot \sqrt{20} \cdot 2 = 0 \rightarrow 2 \cdot N_1 + 5 \cdot N_2 = 2236.068 \text{ kN.}$$

Ținând seama că bara cotită ABC este rigidă și de ipoteza deplasărilor mici, se obține relația de compatibilitate (Fig. 7.12):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l_1 \cdot \cos \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\Delta l_2}{3};$$

Folosind expresiile alungirilor și știind că  $l_1 = l_2$ , relația de compatibilitate devine:

$$\frac{2 \cdot N_1}{5 \cdot A_1} = \frac{N_2}{3 \cdot A_2} \rightarrow N_1 = 2.08 \cdot N_2;$$

Se cuplează ecuația de echilibru cu cea de compatibilitate, rezultând sistemul:

$$\begin{cases} 2 \cdot N_1 + 5 \cdot N_2 = 2236.068 ; \\ N_1 = 2.08 \cdot N_2 ; \end{cases}$$

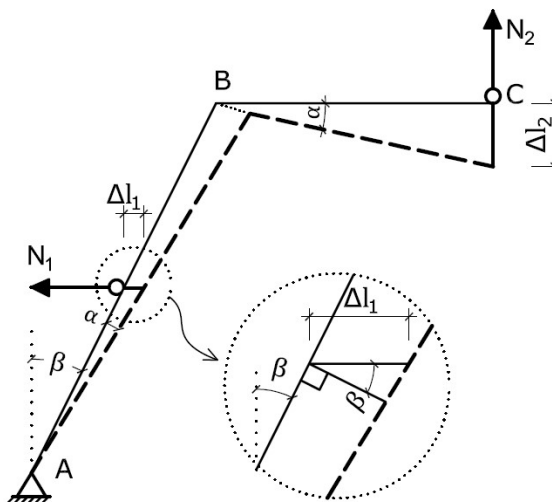


Fig. 7.12.

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele eforturi în tiranți:

$$\begin{cases} N_1 = 507.75 \text{ kN} ; \\ N_2 = 244.11 \text{ kN} ; \end{cases}$$

Se calculează și se verifică apoi tensiunile normale din secțiunile celor două bare flexibile:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{507.75 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^2} = 169.25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifică.};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{244.11 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} = 203.43 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifică.};$$

b) Dacă  $A_1 = A_2 = A = 14 \text{ cm}^2$ , relația de compatibilitate devine:

$$\frac{2 \cdot N_1}{5 \cdot A_1} = \frac{N_2}{3 \cdot A_2} \rightarrow N_1 = \frac{5}{6} \cdot N_2;$$

Cuplând relația anterioară cu ecuația de echilibru se obține sistemul de ecuații următor:

$$\begin{cases} 2 \cdot N_1 + 5 \cdot N_2 = 2236.068 ; \\ N_1 = \frac{5}{6} \cdot N_2 ; \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obțin eforturile în tiranți:

$$\begin{cases} N_1 = 279.51 \text{ kN} ; \\ N_2 = 335.41 \text{ kN} ; \end{cases}$$

și, mai departe, tensiunile:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{279.51 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^2} = 199.65 \frac{N}{mm^2};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{335.41 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^2} = 239.58 \frac{N}{mm^2};$$

Rezervele de rezistență ale barelor sunt:

$$\Delta \sigma_{(1)} = R - \sigma_{(1)} = 300 - 199.65 = 100.35 \frac{N}{mm^2};$$

$$\Delta \sigma_{(2)} = R - \sigma_{(2)} = 300 - 239.58 = 60.42 \frac{N}{mm^2};$$

Aceste rezerve pot fi consumate prin variație de temperatură. Efortul axial de întindere suplimentar, necesar pentru atingerea capacității portante a barei 2 (cea cu rezervă de rezistență mai mică) este:

$$\Delta N_2 = \Delta \sigma_{(2)} \cdot A = 60.42 \cdot 14 \cdot 10^2 = 84588N = 84.59kN;$$

Considerând că structura este supusă doar la variație de temperatură, ecuația de echilibru static este:

$$2 \cdot N'_1 + 5 \cdot N'_2 = 0,$$

iar condiția de compatibilitate:

$$\frac{\Delta l_1 \cdot \cos \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\Delta l_2}{3} \rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{5}{6}$$

unde:

$$\Delta l_1 = \frac{N'_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l_1;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N'_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l_2;$$

În relațiile anterioare, termenul secund al sumelor reprezintă alungirea liberă datorată creșterii temperaturii barei drepte. Introducând expresiile alungirilor în relația de compatibilitate și știind că  $l_1 = l_2, A_1 = A_2 = A$  se obține:

$$N'_1 + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A = \frac{5}{6} (N'_2 + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A) \rightarrow$$

$$N'_1 - 0.833 \cdot N'_2 = -0.167 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A;$$

Din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2 \cdot N'_1 + 5 \cdot N'_2 = 0; \\ N'_1 - 0.833 \cdot N'_2 = -0.167 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N'_1 = -0.125 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \text{ (compresiune)}; \\ N'_2 = 0.05 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \text{ (întindere)}; \end{cases}$$

rezultă eforturile axiale în bare datorate variației de temperatură:

$$\begin{cases} N'_1 = -0.125 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \text{ (compresiune)}; \\ N'_2 = 0.05 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \text{ (întindere)}; \end{cases}$$

Din condiția:

$$N'_2 = \Delta N_2,$$



se obține:

$$\Delta t = \frac{\Delta N_2}{0.05 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot A} = \frac{84.59 \cdot 10^3}{0.05 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 14 \cdot 10^2} = 479.54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Mai departe:

$$\begin{cases} N'_1 = -0.125 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 479.54 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 14 \cdot 10^2 = 211477.14\text{N} = 211.48\text{kN}; \\ N'_2 = 0.05 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 479.54 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 14 \cdot 10^2 = 84590.86\text{N} = 84.59\text{kN}; \end{cases}$$

Eforturile axiale finale sunt:

$$\begin{cases} N_1 = 279.51 - 211.48 = 68.03 \text{ kN}; \\ N_2 = 335.41 + 84.59 = 420 \text{ kN} = N_{2\text{cap}}; \end{cases}$$

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru bara din Fig. 7.13. se cunosc

$A_1 = 10\text{cm}^2$ ,  $A_2 = 5\text{cm}^2$ ,  $E_1 = E_2 = 210000\text{N/mm}^2$ . Se cere:

- Determinarea reacțiilor;
- Trasarea diagramei de efort axial;
- Verificarea secțiunii barei știind că  $P = 250\text{kN}$ ,  $R = 235\text{N/mm}^2$ ;
- Determinarea forței capabile ( $P_{\text{cap}}$ ).

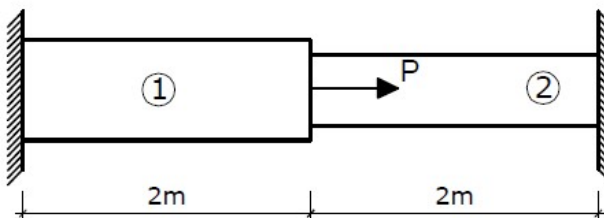


Fig. 7.13.

Rezultate parțiale:

$$N_1 = 0.67 \cdot P;$$

$$N_2 = 0.33 \cdot P.$$

**P2.** Bara rigidă din Fig. 7.14, este articulată în punctul A, suspendată prin intermediul a doi tiranți metalici ( $E = 210000\text{N/mm}^2$ ,  $R = 235\text{N/mm}^2$ ) și încărcată cu forța P. Se cere:

- Determinarea eforturilor în tiranți ca funcție de încărcarea P;
- Verificarea secțiunii barelor pentru  $P = 150\text{kN}$ ;
- Determinarea valorii maxime a forței P ( $P_{\text{cap}}$ ).

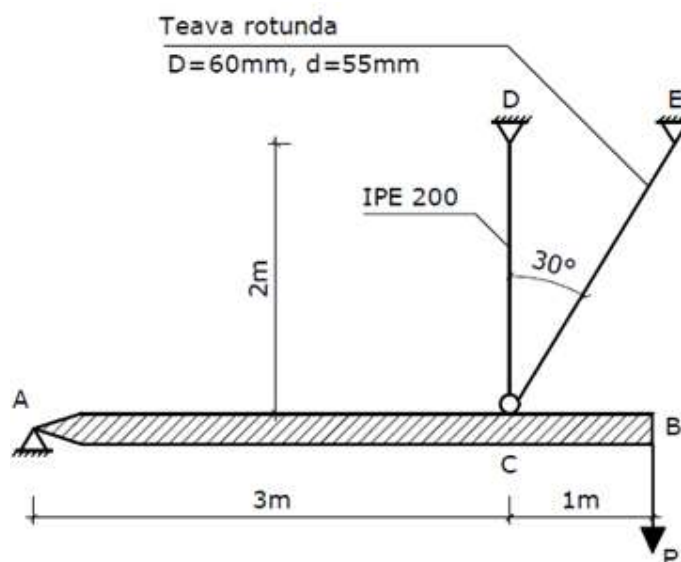


Fig. 7.14.

Rezultate parțiale:

$$N_1 = 1.209 \cdot P;$$

$$N_2 = 0.143 \cdot P.$$

**P3.** Bara din Fig. 7.15. este alcătuită dintr-un profil metallic ( $E = 210000N/mm^2$ ,  $R = 235N/mm^2$ ) laminat IPE200 și este confecționată cu  $\delta = 1.5mm$  mai scurtă decât distanța dintre reazeme ( $l = 5m$ ). Știind că valoarea coeficientului de dilatare termică liniară al oțelului este  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ , se cere:

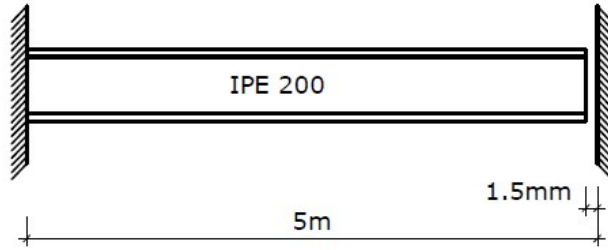


Fig. 7.15.

- Determinarea variației maxime de temperatură la care poate fi supusă bara ( $N = N_{cap}$ );
- Determinarea variației de temperatură care produce în bară un efort axial de 350kN.

Rezultat parțial:  $\Delta t_{max} = 118.25^\circ C$ .

**P4.** Pentru sistemul de bare articulate din Fig. 7.16. acționat de forța  $P = 735kN$  se cere să se determine eforturile în cele trei bare știind că  $A_1 = 2 \cdot A_2$  și că acestea sunt confecționate din oțel ( $E = 210000N/mm^2$ ,  $R = 235N/mm^2$ ). Se cunoaște  $l = 3m$ .

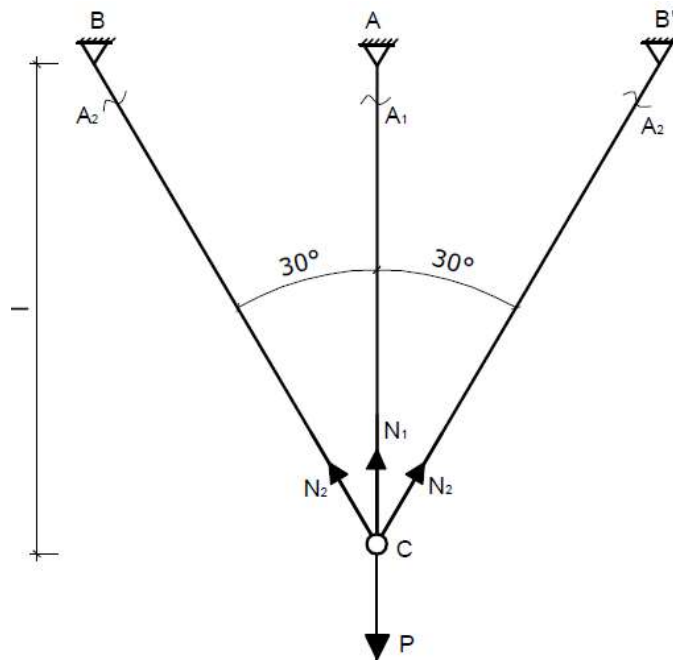


Fig. 7.16.

**P5.** Considerând bara rigidă orizontală susținută de 3 tiranți (bare dublu articulate) și acționată ca în Fig. 7.17 se cere:

- Determinarea eforturilor axiale din tiranți;
  - Calcularea tensiunilor normale în secțiunile barelor știind că A reprezintă aria secțiunii unei bare circulare de diametru  $d = 12mm$ ;
  - Stabilirea deplasării verticale a secțiunii C, situate la mijlocul deschiderii barei rigide.
- Se cunosc:  $R = 235N/mm^2$ ,  $E = 210000N/mm^2$ .

Rezultate parțiale:

Bara 1 este întinsă.

$$\sigma_{max} = \sigma_{(2)} = 238.94 \frac{N}{mm^2}.$$

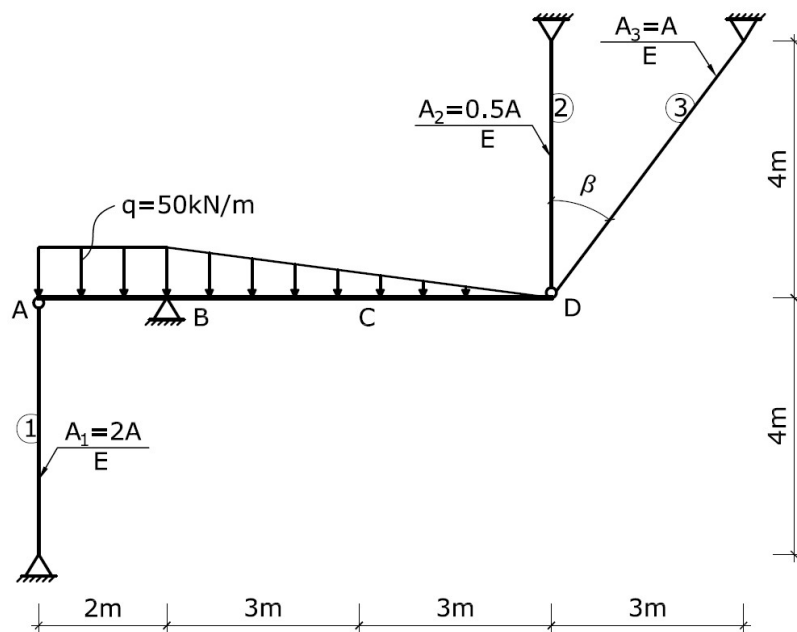


Fig. 7.17.

## LUCRAREA 8

## CALCULUL ÎMBINĂRILOR CU NITURI SAU CU ȘURUBURI

## A. NOȚIUNI TEORETICE

Elementele unei bare îmbinate sunt: bara propriu-zisă sollicitată axial și niturile/șuruburile din îmbinare.

## 1. Bara propriu-zisă sollicitată axial

Barele îmbinate cu nituri/șuruburi au secțiunea slăbită datorită golurilor în care urmează să se introducă elementele de prindere. Aceste slăbiri se iau în considerare în calcul doar dacă bara este sollicitată la întindere. Prin compresiune se reduc spațiile dintre bară și nit/șurub, iar secțiunea lucrează ca o secțiune plină, ca și cum niturile/șuruburile ar face parte din material. Calculul practic al barelor solcitate axial presupune:

- **Verificare** – se verifică condiția de rezistență:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \leq R; \quad (8.1)$$

unde:  $\sigma$  este tensiunea normală în secțiunea barei solcitate axial;

$N$  – efortul axial în bară;

$A_{ef}$  – aria secțiunii transversale a barei;

- Pentru barele întinse  $\rightarrow A_{ef} = A_{netă} = A_{brută} - A_{goluri}$ ;
- Pentru barele comprimate  $\rightarrow A_{ef} = A_{brută}$ ;

$R$  – rezistența de calcul a materialului.

- **Dimensionare** – din condiția de rezistență (8.1) rezultă:

$$A_{nec} \geq \frac{N}{\alpha \cdot R}; \quad (8.2)$$

unde:  $\alpha$  este un coeficient care ține seama de slăbiri. Prin acest coeficient sporim aria necesară cu 15...20% la barele întinse pentru a lua în considerare aria golurilor care în etapa de dimensionare a secțiunii nu poate fi cunoscută cu exactitate.

- Pentru barele întinse  $\rightarrow \alpha = 0.85$ ;
- Pentru barele comprimate  $\rightarrow \alpha = 1.00$  (nu se ține seama de slăbiri).
- în funcție de  $A_{nec}$  se alege secțiunea barei;
- se alege diametrul permis pentru gaură din tabel (Anexa 2) în funcție de forma și de dimensiunile elementelor care se îmbină;
- se verifică secțiunea efectivă a barei cu relația (8.1).

- **Efort capabil** – din condiția de rezistență (8.1) rezultă:

$$N_{cap}^{sect} = A_{ef} \cdot R. \quad (8.3)$$

*Obs. Efortul axial din bară trebuie preluat de niturile/șuruburile din îmbinare. Dacă efortul din bară nu este precizat, atunci îmbinarea se calculează la efortul capabil al barei (8.3).*

## 2. Niturile/șuruburile din îmbinare

Eforturile pe care le preiau niturile/șuruburile într-o îmbinare nu sunt egale. Modul real de lucru al unei îmbinări este foarte complex, cu concentrări mari de tensiuni în apropierea golurilor, iar niturile extreme preluând un efort mai mare (în domeniul elastic). Deoarece prin creșterea încărcării și atingerea limitei de curgere, solicitările în nituri tind să se uniformizeze, în calcule se admite, în mod simplificat, că toate niturile/șuruburile unei îmbinări se încarcă uniform (din acest motiv numărul de nituri dispuse pe un rând se limitează la 5). Niturile/șuruburile sunt solicitate la forfecare și la presiune pe pereții găurii (strivire).

### a) Forfecarea tijei niturilor

Rolul nitului este de a transmite efortul de la grupul de piese cu tendința de deplasare într-un sens la grupul de piese cu tendința de deplasare în sens opus prin solicitarea de forfecare a tijei, care apare în planele care delimitează piesele cu tendințe de deplasare diferite (Fig. 8.1).

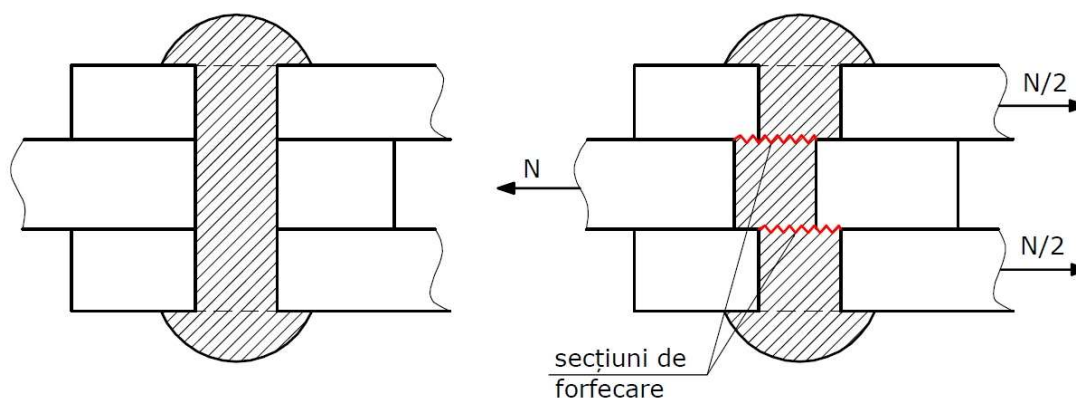


Fig. 8.1. Forfecarea niturilor.

În exemplul din Fig. 8.1 se consideră îmbinarea a trei piese, iar distrugerea niturilor se poate face prin forfecare în două secțiuni. În general, dacă un nit strânge un pachet de  $n+1$  piese, el se poate distruge prin forfecarea concomitentă a  $n$  secțiuni. Aria secțiunii de forfecare este egală cu aria secțiunii tijei nitului ( $\frac{\pi d^2}{4}$ ).

Condiția de rezistență la forfecare a niturilor este:

$$\tau = \frac{N}{n \cdot n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq R_f^n, \quad (8.4)$$

unde:  $\tau$  sunt tensiuni tangențiale în secțiunile forfecate ale nitului;

$N$  – efortul axial în bară;

$n$  – numărul de nituri din îmbinare;

$n_f$  – numărul secțiunilor de forfecare ( $n_f = \text{numărul de piese-1}$ );

$d$  – diametrul tijei nitului;

$R_f^n$  – rezistența la forfecare a materialului din care este confecționat nitul. Pentru cazurile curente se poate considera  $R_f^n = 0.8 \cdot R$ .

### b) Presiunea pe pereții găurii (strivirea)

În realitate, distribuția presiunilor pe pereții găurii este neuniformă, dar în calcule se admite o distribuție uniformă a presiunilor pe secțiunea diametrală, după cum se poate vedea în Fig. 8.2.

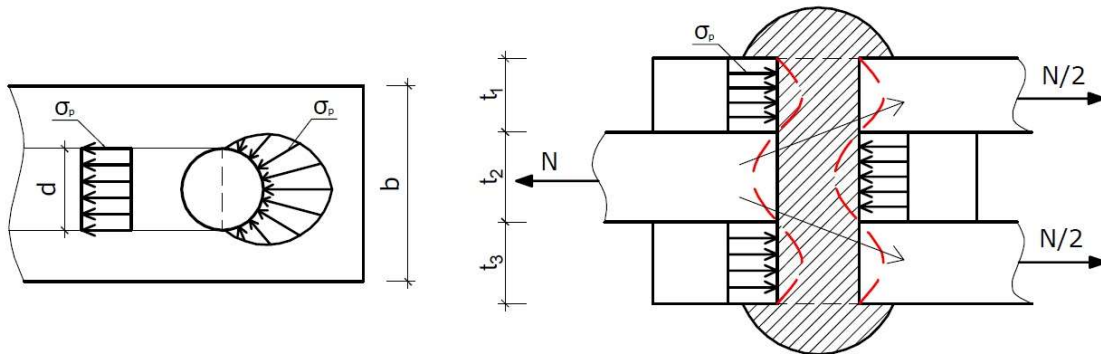


Fig. 8.2. Strivirea niturilor.

Dacă se îmbină mai multe elemente, în calcule se va considera aria pe care se produce în mod convențional presiunea pe gaură (strivirea):

$$A_p = d \cdot (\Sigma t)_{min}, \quad (8.5)$$

unde:  $d$  este diametrul tijei nitului;

$(\Sigma t)_{min}$  – grosimea minimă a pachetului de piese care se deplasează într-o direcție. Pentru exemplul din Fig. 8.2  $\rightarrow (\Sigma t)_{min} = \min(t_1 + t_3; t_2)$ .

Condiția de rezistență la presiune pe gaură (strivire) a niturilor este:

$$\sigma_p = \frac{N}{n \cdot d \cdot (\Sigma t)_{min}} \leq R_p^n, \quad (8.6)$$

unde:  $\sigma_p$  este tensiunea normală pe peretele găurii;

$N$  – efortul axial în bară;

$n$  – numărul de nituri din îmbinare;

$R_p^n$  – rezistența la strivire a materialului din care este confecționat nitul. Pentru cazurile curente se poate considera  $R_p^n = 2 \cdot R$ .

În continuare sunt prezentate cele trei probleme ale Rezistenței materialelor:

- **Verificare** – se verifică condițiile de rezistență la forfecare (8.4) și la strivire (8.6), iar îmbinarea verifică doar dacă ambele condiții de rezistență sunt satisfăcute simultan.
- **Dimensionarea** presupune parcurgerea următorilor pași:
  - (1) se alege din tabel (Anexa 2) diametrul nitului  $d$ , în funcție de dimensiunile pieselor care se îmbină;
  - (2) se determină efortul capabil al unui nit cu relația:

$$N_{cap,1} = \min(N_{cap,1}^f; N_{cap,1}^p), \quad (8.7)$$

în care  $N_{cap,1}^f$  este efortul capabil al unui singur nit la forfecare, care se determină din relația (8.4) pentru  $n = 1$ :

$$N_{cap,1}^f = n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot R_f^n, \quad (8.8)$$

$N_{cap,1}^p$  este efortul capabil al unui singur nit la presiune pe pereții găurii (strivire), care se determină din relația (8.6) pentru  $n = 1$ :

$$N_{cap,1}^p = d \cdot (\Sigma t)_{min} \cdot R_p^n, \quad (8.9)$$

- (3) dimensionarea constă în determinarea numărului necesar de nituri pentru preluarea efortului total din bară:

$$n_{nec} \geq \frac{N}{N_{cap,1}}, \quad (8.10)$$

care se rotunjește superior la un număr întreg de nituri.

- **Efortul capabil** reprezintă forța maximă pe care o poate prelua îmbinarea și se calculează cu relația:

$$N_{cap}^{imb} = n \cdot N_{cap,1}, \quad (8.11)$$

unde:  $n$  este numărul de nituri din îmbinare;

$N_{cap,1}$  – efortul capabil al unui singur nit, care se determină cu relația (8.7).

*Obs. Îmbinările cu șuruburi se calculează identic îmbinărilor cu nituri. Șuruburile se notează cu litera  $M$  urmată de diametrul nominal al șurubului  $d$  în milimetri. În calcule, diametrul găurii se consideră cu un milimetru mai mare decât diametrul nominal al șurubului:*

$d_g = d + 1 \text{ mm}$ . De exemplu, pentru un șurub  $M20 \rightarrow d_g = 21 \text{ mm}$ .

Alcătuirea îmbinărilor cu nituri sau șuruburi se face în funcție de distanțele minime și maxime prevăzute în coduri (Anexa 2).

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Tirantul din Fig. 8.3 este alcătuit din 2L 60x60x6 și este prins cu 4 șuruburi M20 de un guseu cu grosimea  $t_g = 14\text{mm}$ . Se cere:

- să se verifice tirantul;
  - să se verifice îmbinarea;
  - să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului C, știind că bara AC este infinit rigidă.
- Se dau:  $R = 235\text{N/mm}^2$ ,  $R_f^n = 190\text{N/mm}^2$ ,  $R_p^n = 470\text{N/mm}^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5\text{N/mm}^2$ .

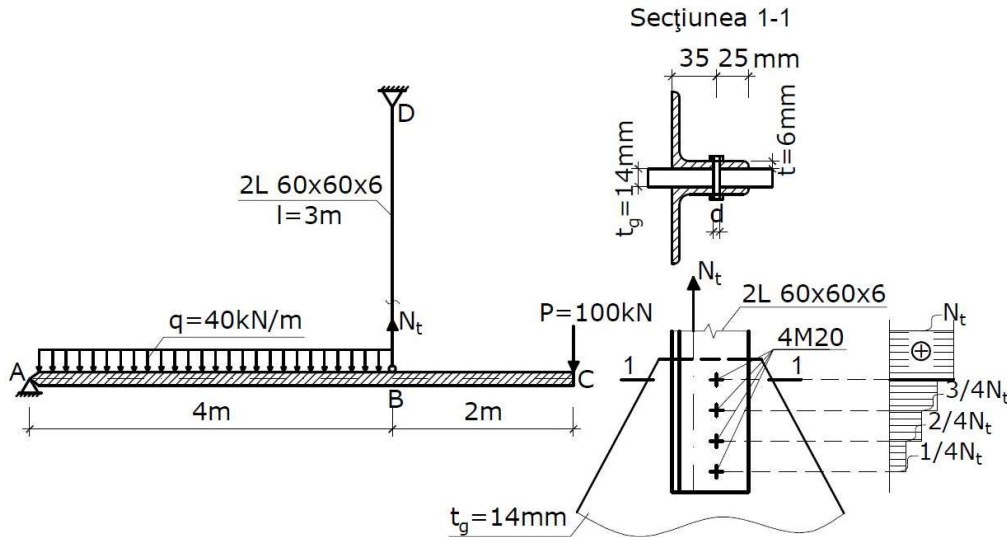


Fig. 8.3.

### REZOLVARE

a) Se determină efortul în tirant din ecuația de echilibru static (scrisă astfel încât necunoscutele din articulația A să nu intervină):

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N_t \cdot 4 - P \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow N_t = 230\text{kN}.$$

Verificarea tirantului (bară întinsă cu slăbiri) se face cu relația:  $\sigma = \frac{N_t}{A_{ef}} \leq R$ , în secțiunea periculoasă (prin dreptul primului șurub);

- din tabel (Anexa 3) L60x60x6 are aria  $A = 6.91\text{cm}^2$ ;
- pentru șurub M20  $\rightarrow d_g = 20 + 1 = 21\text{mm}$ ;

$$A_{ef} = A_{netă} = A_{brută} - A_{goluri} = 2 \cdot 6.91 - 2 \cdot 2.1 \cdot 0.6 = 11.3\text{cm}^2;$$

$$\sigma = \frac{230 \cdot 10^3}{11.3 \cdot 10^2} = 203.54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$\rightarrow$  este verificată condiția de rezistență pentru tirant.



b) Se verifică cele două condiții de rezistență pentru îmbinare: la dublă forfecare și la presiune pe pereții găurii (strivire):

- la forfecare:

$$\tau = \frac{N_t}{n \cdot n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{230 \cdot 10^3}{4 \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 91.51 \frac{N}{mm^2} < R_f^n = 190 \frac{N}{mm^2};$$

- la presiune pe pereții găurii (strivire):

$$\sigma_p = \frac{N_t}{n \cdot d \cdot (\Sigma t)_{min}} = \frac{230 \cdot 10^3}{4 \cdot 20 \cdot 12} = 239.58 \frac{N}{mm^2} < R_p^n = 470 \frac{N}{mm^2},$$

unde  $(\Sigma t)_{min} = \min(6 + 6 ; 14) = 12mm$ ;

→ îmbinarea verifică ambele condiții de rezistență.

c) Pentru a determina deplasarea pe verticală a punctului C se calculează alungirea tirantului cu relația de mai jos, în care se introduce aria brută ( $A_{brută}$ ):

$$\Delta l = \frac{N_t \cdot l}{E \cdot A} = \frac{230 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 6.91 \cdot 10^2} = 2.38mm.$$

În Fig. 8.4 se poate vedea deformata, iar deplasarea pe verticală a capătului C ( $CC'$ ) rezultă din ipoteza micilor deplasări ( $\Delta ACC' \sim \Delta ABB'$ ):  $\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} \rightarrow CC' = 3.57mm$ .

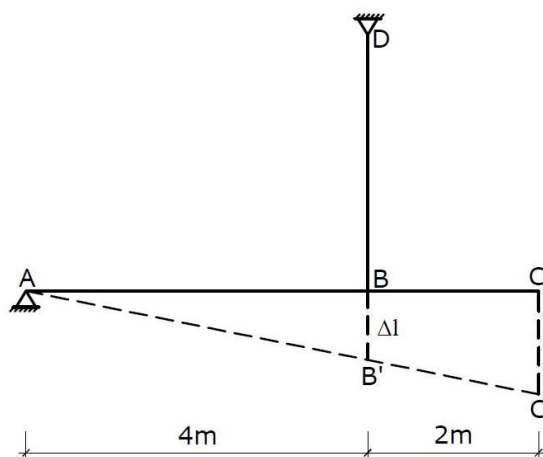


Fig. 8.4.

**Ex.2.** Bara din Fig. 8.5, alcătuită din două profile cornier, este prinsă cu șuruburi M16 de un guseu cu grosimea  $t_g = 12mm$ . Bara este solicitată la întindere axială de o forță  $P = 200kN$ . Se cere:

- să se dimensioneze bara;
- să se dimensioneze îmbinarea cu șuruburi și să se realizeze schița îmbinării.

Se cunosc:  $R = 235\text{N/mm}^2$ ,  $R_f^n = 190\text{N/mm}^2$ ,  $R_p^n = 470\text{N/mm}^2$ .

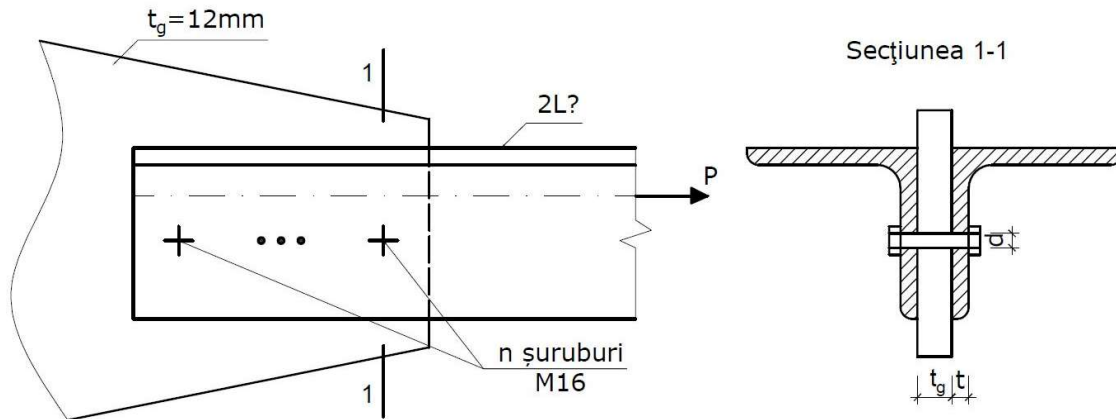


Fig. 8.5.

REZOLVARE

a) Dimensionarea barei întinse cu slăbiri:

$$A_{nec} \geq \frac{N}{\alpha \cdot R} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.85 \cdot 235} = 1001.25\text{mm}^2 = 10.01\text{cm}^2;$$

- pentru 1 profil:  $A_{1,nec} \geq 5.0\text{cm}^2$ ;
- din tabel (Anexa 3) se alege un profil cornier cu aria apropiată, dar mai mare decât  $A_{1,nec}$ ;
- se alege L55x55x5, care are  $A_{1,ef} = 5.32\text{cm}^2$ .

Pentru a verifica secțiunea dimensionată aproximativ, se alege diametrul găurii (Anexa 2) →  $d_g = 17\text{mm}$ , deci pot fi utilizate pentru îmbinarea secțiunii șuruburi M16. În continuare se face verificarea secțiunii alese:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{200 \cdot 10^3}{8.94 \cdot 10^2} = 223.71 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$A_{ef} = A_{netă} = A_{brută} - A_{goluri} = 2 \cdot 5.32 - 2 \cdot 1.7 \cdot 0.5 = 8.94\text{cm}^2,$$

→ bara este corect dimensionată.

b) Dimensionarea îmbinării presupune să se determine numărul de șuruburi M16 necesar preluării efortului axial  $N$  din bară, cu relația:

$$n_{nec} \geq \frac{N}{N_{cap,1}};$$

$$N_{cap,1} = \min(N_{cap,1}^f; N_{cap,1}^p).$$

$$N_{cap,1}^f = n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot R_f^n = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} \cdot 190 = 76403.53\text{N} = 76.40\text{kN};$$

$$N_{cap,1}^p = d \cdot (\Sigma t)_{min} \cdot R_p^n = 16 \cdot 10 \cdot 470 = 75200N = 75.2kN,$$

unde  $(\Sigma t)_{min} = \min(5 + 5 ; 12) = 10mm$ .

→  $N_{cap,1} = 75.2kN$ ;  $n_{nec} \geq 2.66$ , astfel că în îmbinare se vor dispune 3 șuruburi M16.

Pentru a realiza schița îmbinării (Fig. 8.6), șuruburile sunt poziționate în îmbinare respectând distanțele date în tabelul A.2.2. din Anexa 2:

- distanța între axele șuruburilor:  $e \geq 3d$ , se alege  $e = 55mm$ ;
- distanța de la primul/ultimul șurub până la margine:  $e_2 \geq 2d$ , se alege  $e_2 = 35mm$ ;
- linia șuruburilor (pentru profilul cornier):  $w = \frac{b}{2} + 5mm = \frac{55}{2} + 5 = 32.5mm$ , se alege  $w = 35mm$ ;

Obs. Dacă din calcule distanțele dintre nituri/șuruburi nu rezultă multiplu de 5mm, acestea se vor rotunji superior la multiplu de 5mm. Iar numărul maxim de nituri/șuruburi dispuse pe o linie în lungul efortului este 5.

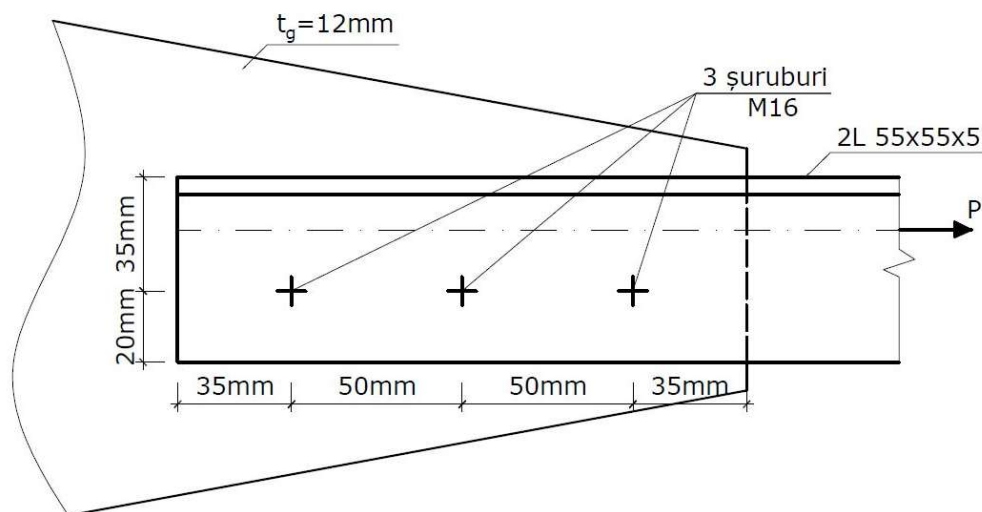


Fig. 8.6. Schița îmbinării.

**Ex.3.** Pentru bara din Fig. 8.7, având secțiunea alcătuită din 2 profile UPE 100, îmbinate cu 8 nituri ( $d = 13mm$ ) de un guseu cu grosimea  $t_g = 10mm$ , se cere:

- a) să se determine efortul capabil al secțiunii barei ( $N_{cap}^{sect}$ );
- b) să se determine efortul capabil al îmbinării cu nituri ( $N_{cap}^{imb}$ );
- c) să se determine efortul de întindere capabil ( $P_{cap}$ ).

Se cunosc:  $R = 235N/mm^2$ ,  $R_f^n = 190N/mm^2$ ,  $R_p^n = 470N/mm^2$ .

1UPE 100 are aria  $A = 12.5cm^2$ , grosimea inimii  $t_w = 4.5mm$ .

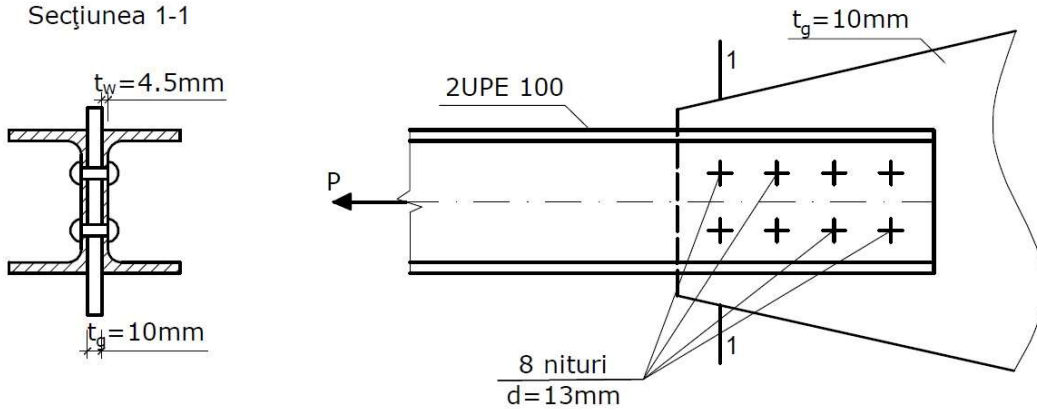


Fig. 8.7.

REZOLVARE

a) Efortul capabil al secțiunii barei se determină în zona în care apar slăbiri, cu relația:

$$N_{cap}^{sect} = A_{ef} \cdot R,$$

$$A_{ef} = A_{netă} = A_{brută} - A_{goluri} = 2 \cdot 12.5 - 4 \cdot 1.3 \cdot 0.45 = 22.66 \text{ cm}^2,$$

$$\rightarrow N_{cap}^{sect} = 22.66 \cdot 10^2 \cdot 235 = 532510 \text{ N} = 532.51 \text{ kN}.$$

b) Efortul capabil al îmbinării cu nituri se determină cu relația:  $N_{cap}^{imb} = n \cdot N_{cap,1}$ ,

$$N_{cap,1} = \min(N_{cap,1}^f; N_{cap,1}^p).$$

$$N_{cap,1}^f = n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot R_f^n = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 13^2}{4} \cdot 190 = 50438.27 \text{ N} = 50.44 \text{ kN};$$

$$N_{cap,1}^p = d \cdot (\Sigma t)_{min} \cdot R_p^n = 13 \cdot 9 \cdot 470 = 54990 \text{ N} = 54.99 \text{ kN},$$

$$\text{unde } (\Sigma t)_{min} = \min(4.5 + 4.5; 10) = 9 \text{ mm};$$

$$\rightarrow N_{cap,1} = 50.44 \text{ kN};$$

$$N_{cap}^{imb} = 8 \cdot 50.44 = 403.52 \text{ kN}.$$

c) Sarcina maximă de întindere care poate fi aplicată este:

$$P_{cap} = N_{cap} = \min(N_{cap}^{sect}; N_{cap}^{imb}) = 403.52 \text{ kN}.$$

**Ex.4.** Pentru platbanda din Fig. 8.8 îmbinată cu eclise și solidarizată cu nituri așezate pe 3 rânduri, se cere:

- să se dimensioneze platbanda și cele două eclise;
- să se dimensioneze îmbinarea.

Se cunosc:  $P = 360kN, R = 235N/mm^2, R_f^n = 190N/mm^2, R_p^n = 470N/mm^2$ .

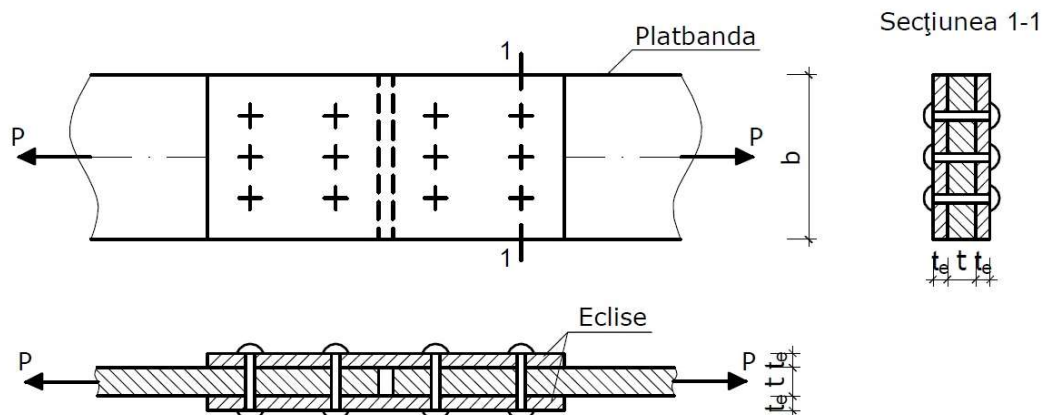


Fig. 8.8.

### REZOLVARE

a) Transmiterea efortului se face de la platbandă la eclise prin intermediul niturilor de pe o jumătate din îmbinare, apoi procesul are loc invers, de la eclise la platbandă prin intermediul niturilor de pe cealaltă jumătate a îmbinării. Rezultă că secțiunea barei (platbanda), secțiunea celor două eclise și jumătate din numărul de nituri din îmbinare trebuie să preia fiecare efortul axial din bară.

Se alege lățimea platbandei și a ecliselor suficient de mare pentru a încăpea 3 nituri: fie  $b = 200mm$ .

Dimensionarea platbandei se face ca și bară întinsă cu slăbiri:

$$A_{nec} \geq \frac{N}{\alpha \cdot R} = \frac{360 \cdot 10^3}{0.85 \cdot 235} = 1802.25mm^2;$$

știind că  $A_{pb} = b \cdot t$ , rezultă:

$$t_{nec} \geq \frac{A_{nec}}{b} = \frac{1802.25}{200} = 9.01mm,$$

→ se alege platbanda de 200x10 [mm].

Cele două eclise se dimensionează din condiția:

$$A_{ecl} \geq \frac{A_{nec}}{2} = \frac{1802.25}{2} = 901.13mm^2;$$

știind că  $A_{ecl} = b \cdot t_e$ , rezultă:

$$t_{e,nec} \geq \frac{A_{ecl}}{b} = 4.51mm,$$

→ pentru eclise se aleg 2 platbande de 200x5 [mm].

În funcție de grosimea minimă a pieselor care se îmbină ( $t_e = 5mm$ ), din tabel (Anexa 2) se alege diametrul nitului  $d = 13mm$ .

Verificarea platbandei:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{360 \cdot 10^3}{16.1 \cdot 10^2} = 223.60 \frac{N}{mm^2} < R = 235 \frac{N}{mm^2},$$

$$\text{în care } A_{ef} = A_{net\grave{a}} = A_{brut\grave{a}} - A_{goturi} = 20 \cdot 1 - 3 \cdot 1.3 \cdot 1 = 16.1cm^2,$$

→ platbanda este corect dimensionată.

Verificarea celor două eclise nu mai este necesară deoarece ele au aceeași arie efectivă ca și platbanda.

b) Dimensionarea îmbinării cu nituri având diametrul  $d = 13mm$  se face cu relația:

$$n_{nec} \geq \frac{N}{N_{cap,1}},$$

$$\text{în care } N_{cap,1} = \min(N_{cap,1}^f; N_{cap,1}^p).$$

$$N_{cap,1}^f = n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot R_f^n = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 13^2}{4} \cdot 190 = 50438.27N = 50.44kN;$$

$$N_{cap,1}^p = d \cdot (\Sigma t)_{min} \cdot R_p^n = 13 \cdot 10 \cdot 470 = 61100N = 61.10kN,$$

$$\text{unde } (\Sigma t)_{min} = \min(5 + 5; 10) = 10mm.$$

$$\rightarrow N_{cap,1} = 50.44kN;$$

$$n_{nec} \geq 7.14 \rightarrow \text{pe jumătate din îmbinare se vor dispune 8 nituri.}$$

În final, în îmbinare este necesar să se dispună cel puțin 16 nituri cu diametrul  $d = 13mm$ , câte 8 pe fiecare parte.

**Ex.5.** Pentru sistemul de bare din Fig. 8.9, se cere:

- să se verifice barele alcătuite din două profile UPE 160;
- să se dimensioneze îmbinarea cu nituri dispuse pe două rânduri;
- să se determine deplasarea pe verticală a nodului C.

Se cunosc:  $P = 1500kN$ ,  $R = 235N/mm^2$ ,  $R_f^n = 190N/mm^2$ ,  $R_p^n = 470N/mm^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ .

1UPE 160 are aria  $A = 21.7cm^2$ , grosimea inimii  $t_w = 5.5mm$ .

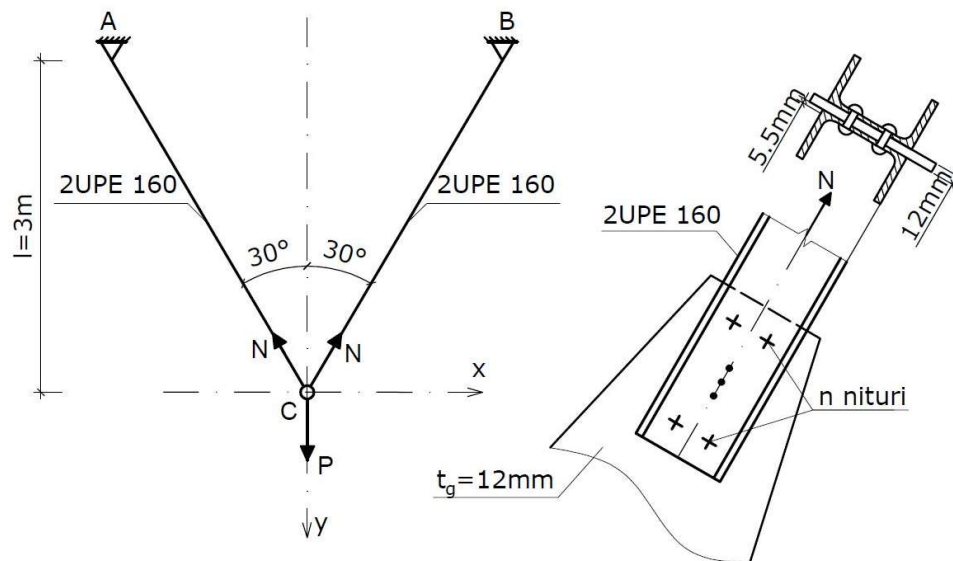


Fig. 8.9.

**REZOLVARE**

a) Utilizând metoda izolării nodurilor se determină eforturile axiale în cele două bare, care datorită simetriei sunt egale ( $N_1=N_2=N$ ) și rezultă din ecuația de echilibru static:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2 \cdot N \cdot \cos 30^\circ = P \rightarrow N = 866.03 \text{ kN}.$$

Conform tabelului A.2.1. pentru profilul UPE 160 se alege diametrul găurii  $d_g = 21 \text{ mm}$ , iar verificarea barei se face cu relația:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{866.03 \cdot 10^3}{38.78 \cdot 10^2} = 223.32 \frac{N}{\text{mm}^2} < R = 235 \frac{N}{\text{mm}^2},$$

$$A_{ef} = A_{netă} = A_{brută} - A_{goluri} = 2 \cdot 21.7 - 4 \cdot 2.1 \cdot 0.55 = 38.78 \text{ cm}^2,$$

→ bara verifică condiția de rezistență.

b) Dimensionarea îmbinării presupune să se determine numărul de nituri necesar preluării efortului axial  $N$  din bară, cu relația:

$$n_{nec} \geq \frac{N}{N_{cap,1}};$$

$$N_{cap,1} = \min(N_{cap,1}^f; N_{cap,1}^p).$$

$$N_{cap,1}^f = n_f \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot R_f^n = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 21^2}{4} \cdot 190 = 131617 \text{ N} = 131.62 \text{ kN};$$

$$N_{cap,1}^p = d \cdot (\Sigma t)_{min} \cdot R_p^n = 21 \cdot 11 \cdot 470 = 108570 \text{ N} = 108.57 \text{ kN},$$

$$\text{unde } (\Sigma t)_{min} = \min(5.5 + 5.5; 12) = 11 \text{ mm}.$$

→  $N_{cap,1} = 108.57kN$ ;  $n_{nec} \geq 7.98$ , astfel că în îmbinare se vor dispune 8 nituri pe două rânduri.

c) Deplasarea pe verticală a nodului C (Fig. 8.10) se determină în triunghiul dreptunghic CC'C'' în funcție de alungirea barei  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l'}{E \cdot A} = \frac{866.03 \cdot 10^3 \cdot 3.46 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 21.7 \cdot 10^2} = 3.29mm;$$

$$\text{unde } l' = \frac{l}{\cos 30^\circ} = 3.46m;$$

$$\rightarrow CC' = \frac{\Delta l}{\cos 30^\circ} = 3.80mm.$$

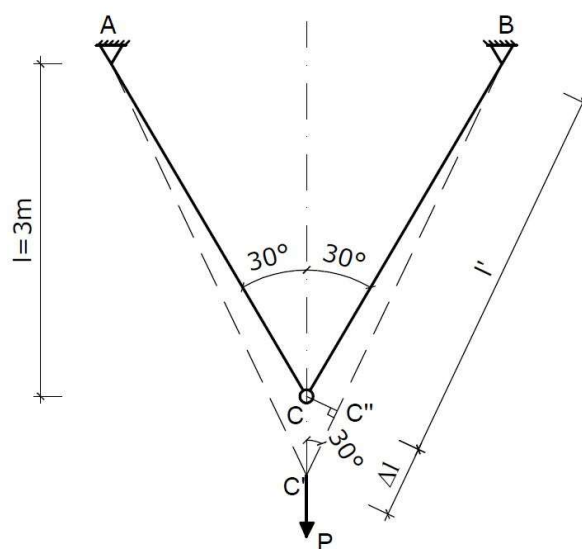


Fig. 8.10.

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru bara din Fig. 8.11 alcătuită din 2 profile L 120x120x12, se cere:

- să se verifice secțiunea barei;
- să se verifice îmbinarea cu nituri;
- să se determine alungirea barei, știind lungimea acesteia  $l = 6m$ ;
- să se determine efortul de întindere capabil ( $P_{cap}$ ).

Se cunosc:  $P = 800kN$ ,  $R = 235N/mm^2$ ,  $R_f^n = 190N/mm^2$ ,  $R_p^n = 470N/mm^2$ ,  
 $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ .



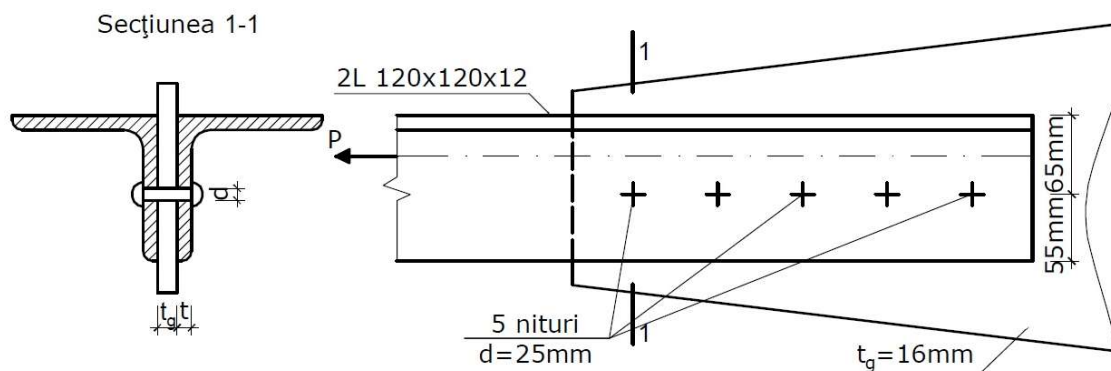


Fig. 8.11.

Rezultate parțiale:  $P_{cap} = 932.66kN$ .

**P2.** Pentru bara din Fig. 8.12 alcătuită din 2 profile UPE 200, să se dimensioneze îmbinarea cu șuruburi M20. În final să se realizeze schița îmbinării.

Se cunosc:  $P = 500kN$ ,  $R_f^n = 190N/mm^2$ ,  $R_p^n = 470N/mm^2$ .

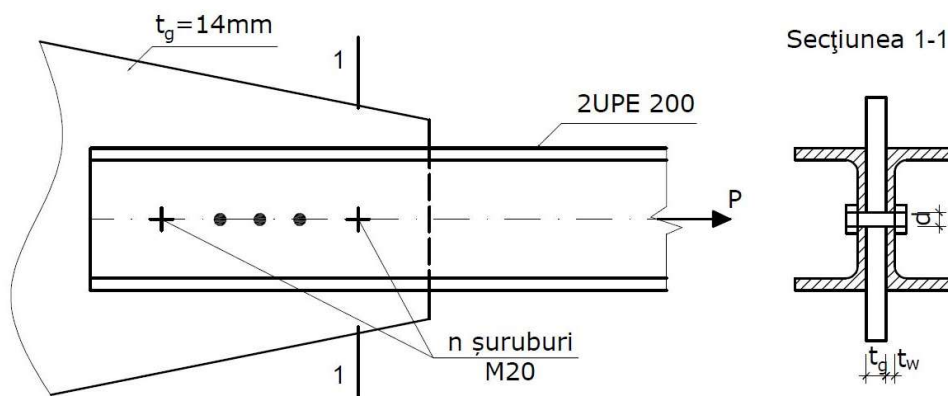


Fig. 8.12.

Rezultate parțiale:  $N_{cap,1}^f = 119.38kN$ .

**P3.** Pentru bara din Fig. 8.13 alcătuită din 2 profile cornier și prinsă cu șuruburi M22 de un guseu cu grosimea  $t_g = 16mm$ , se cere:

a) să se dimensioneze bara;

b) să se dimensioneze îmbinarea cu șuruburi și să se realizeze schița îmbinării.

Se cunosc:  $P = 450kN$ ,  $R = 235N/mm^2$ ,  $R_f^n = 190N/mm^2$ ,  $R_p^n = 470N/mm^2$ .

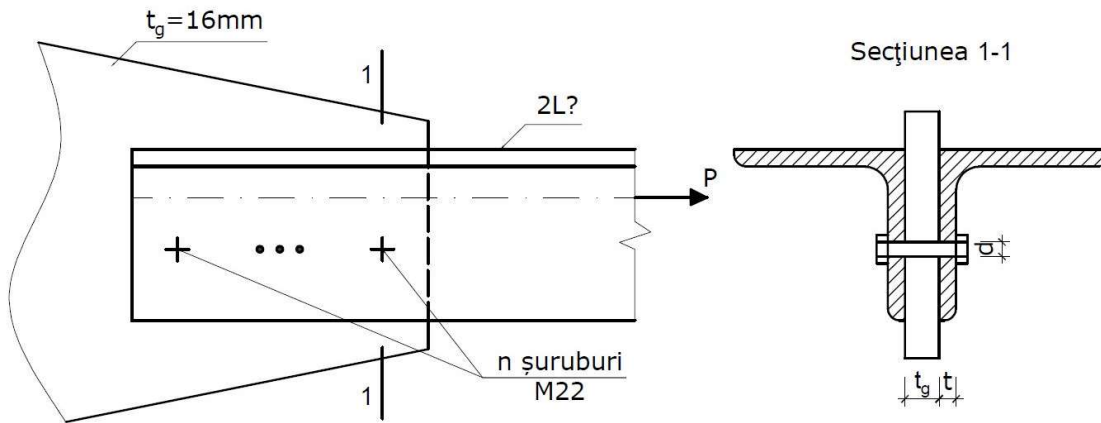


Fig. 8.13.

Rezultate parțiale:  $A_{nec} \geq 22.53 \text{ cm}^2$ .

**P4.** O platbandă din oțel solicitată la întindere este prinsă de un guseu cu grosimea  $t_g = 12 \text{ mm}$  prin 4 nituri cu diametrul  $d = 23 \text{ mm}$ , după cum se poate vedea în Fig. 8.14.

Se cere să se verifice platbanda și îmbinarea cu nituri.

Se cunosc:  $P = 200 \text{ kN}$ ,  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^n = 190 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_p^n = 470 \text{ N/mm}^2$ .

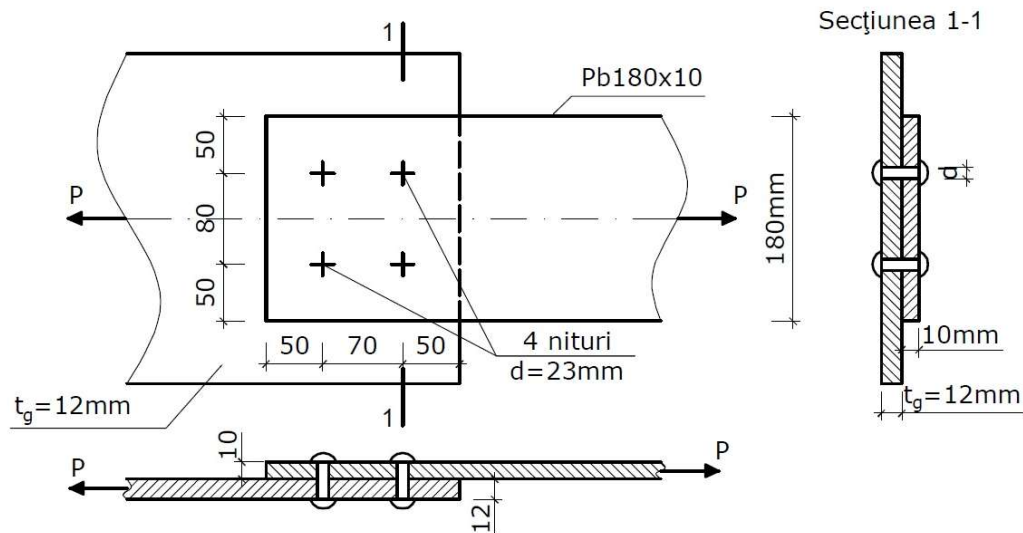


Fig. 8.14.

Rezultate parțiale:  $\tau = 120.34 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f^n = 190 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .

## LUCRAREA 9

## CALCULUL ÎMBINĂRILOR SUDATE

## A. NOȚIUNI TEORETICE

Elementele metalice solicate axial pot fi îmbinate prin sudură. **Sudarea** este un procedeu tehnologic prin intermediul căruia îmbinarea a două piese metalice se realizează cu ajutorul căldurii, cu sau fără adaus de material. Prinderea pieselor se poate realiza prin diferite tipuri de suduri: sudură de colț, sudură cap la cap, etc.

**Sudurile în colț**, cele mai frecvent întâlnite la elementele de construcții, sunt solicate la forfecare (singurul efort diferit de zero este forța tăietoare). Determinarea eforturilor și a tensiunilor în cordoanele de sudură se face urmând etapele detaliate în continuare:

## Determinarea eforturilor

Efortul axial din bară  $N$  este transmis cordoanelor de sudură pe care le solită la forfecare. Valoarea forței de forfecare (tăietoare),  $T$  care solită un cordon de sudură, se determină astfel:

- în cazul cordoanelor de sudură egale și simetrice în raport cu axa barei (Fig. 9.1) se consideră:

$$T = \frac{N}{n}, \quad (9.1)$$

unde  $N$  reprezintă efortul axial din bară, iar  $n$  reprezintă numărul cordoanelor de sudură.

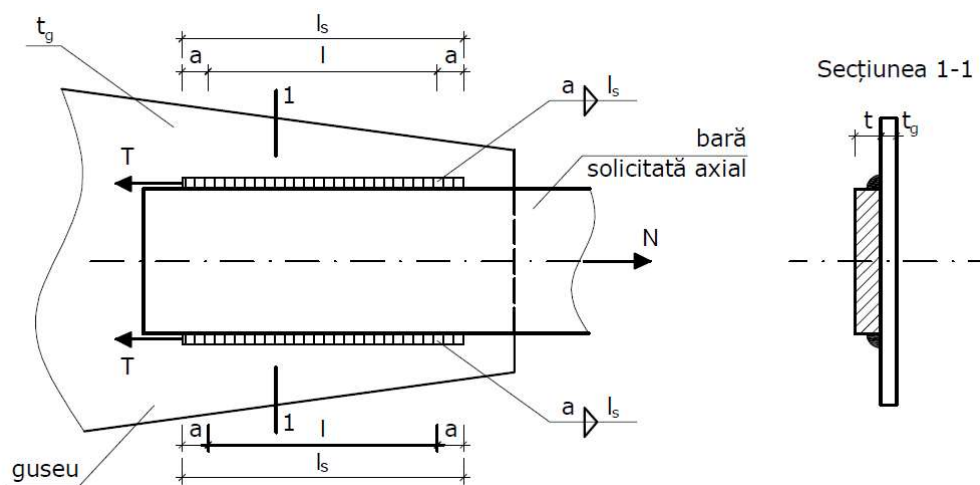


Fig. 9.1. Îmbinare sudată – cordoane simetrice de sudură.

- în cazul cordoanelor de sudură nesimetrice, de exemplu cazul profilului cornier, eforturile de forfecare în cele două cordoane de sudură superioare, respectiv inferioare vor rezulta ca reacțiuni ale unei grinzi simplu rezemate de deschidere  $b$  (Fig. 9.2):

$$T_1 = \frac{N(b - e)}{b} ; \quad (9.2)$$

$$T_2 = \frac{N \cdot e}{b} , \quad (9.3)$$

unde  $b$  reprezintă lățimea profilului cornier, iar  $e$  determină poziția axei barei.

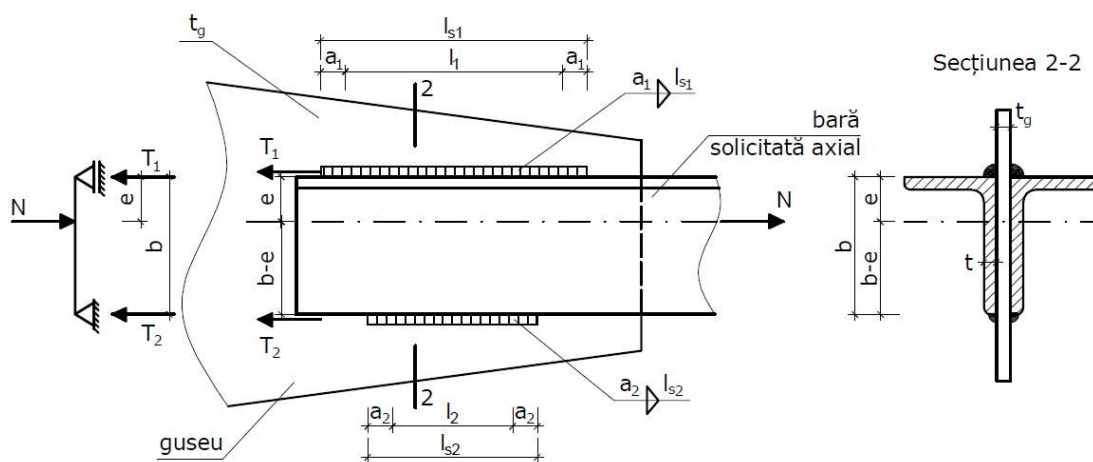


Fig. 9.2. Îmbinare sudată – cordoane nesimetrice de sudură.

### Determinarea tensiunilor de forfecare

Valoarea tensiunilor tangențiale  $\tau$  (presupuse uniform distribuite), care apar în cordoanele de sudură de colț, se determină cu relația:

$$\tau_s = \frac{T_i}{A_s} , \quad (9.4)$$

unde  $T_i$  este efortul de forfecare în cordonul de sudură, iar  $A_s$  reprezintă aria de calcul a cordonului de sudură, ce poate fi calculată cu relația:

$$A_s = a \cdot l , \quad (9.5)$$

unde  $a$  reprezintă grosimea cordonului de sudură (Fig. 9.3), care trebuie să satisfacă următoarele condiții constitutive:

$$a \geq 3mm;$$

$$a \leq 0.7 \cdot t_{min} \text{ sau } a \leq 0.85 \cdot t_{min};$$

$a$  – multiplu de 1mm.

Experimental, s-a constatat că sudurile în colț se rup în secțiuni la  $45^\circ$  față de piesele suprapuse, astfel că grosimea  $a$  a cordonului de sudură este înălțimea triunghiului isoscel format cu  $t_{min}$  sau  $t$  (se neglijează bombamentul sudurii),

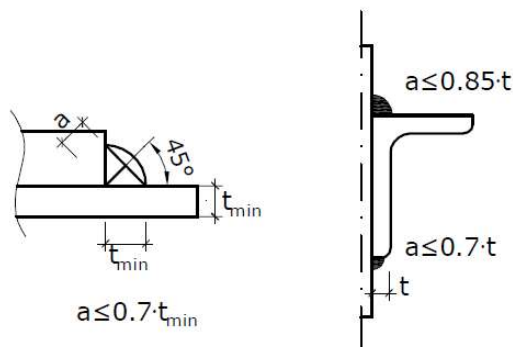


Fig. 9.3. Grosimea maximă a sudurilor de colț pentru profile laminate.

iar  $l = l_s - 2 \cdot a$  reprezintă lungimea de calcul a cordonului de sudură,  $l_s$  fiind lungimea de execuție a cordonului (reprezentată în desen), considerând că în extremități sudura este de proastă calitate; condițiile constructive pentru  $l_s$  sunt:

$$l_s \geq 6 \cdot a, \text{ respectiv } l_s \geq 15 \cdot a \text{ pentru profile;}$$

$$l_{s,min} = 40mm;$$

$$l_s \leq 60 \cdot a, \text{ respectiv nelimitat în cazul solicitării uniforme;}$$

$$l_s - \text{multiplu de } 5mm.$$

**Problemele Rezistenței Materialelor** pentru îmbinările executate prin sudură în colț:

- VERIFICAREA:

$$\tau_s = \frac{T_i}{a \cdot l} \leq R_s^f, \quad (9.6)$$

unde  $T_i$  este efortul de forfecare în cordonul de sudură, determinat cu relația (9.1) pentru cordoane simetrice, respectiv folosind relațiile (9.2) și (9.3) pentru cordoane nesimetrice,  $a$  este grosimea cordonului de sudură,  $l$  este lungimea de calcul a cordonului de sudură, iar  $R_s^f = 0.7R$  este rezistența de calcul la forfecare a cordoanelor de sudură de colț.

- DIMENSIONAREA:

(1) Se impune grosimea cordonului de sudură ( $a$  – multiplu de 1 mm)

$$3mm \leq a \leq 0.7 \cdot t_{min} (0.85 \cdot t_{min}). \quad (9.7)$$

- (2) Se determină lungimea de calcul minimă necesară a sudurii

$$l_{nec} \geq \frac{T}{n \cdot a \cdot R_s^f} \quad (9.8)$$

- (3) Se determină lungimea de execuție a sudurii, care se rotunjește în sus ( $l_s$  -multiplu de 5 mm)

$$l_s = l_{nec} + 2 \cdot a. \quad (9.9)$$

- EFORTUL CAPABIL:

$$N_{cap}^{sud} = \Sigma A_s \cdot R_f^s, \quad (9.10)$$

unde  $A_s$  reprezintă aria tuturor cordoanelor de sudură care formează îmbinarea (indiferent dacă acestea sunt simetrice sau nu).

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Diagonala întinsă a unei grinzi cu zăbrele este confecționată din 2L 100x100x10 ( $A_{ef} = 19.2 \text{ cm}^2$ ,  $e = 2.82 \text{ cm}$ ) și este sollicitată de o forță exterioară  $P = 600 \text{ kN}$  (Fig. 9.4).

Să se dimensioneze îmbinarea sudată a barei și să se realizeze schița îmbinării.

Se dau:  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^s = 165 \text{ N/mm}^2$ .

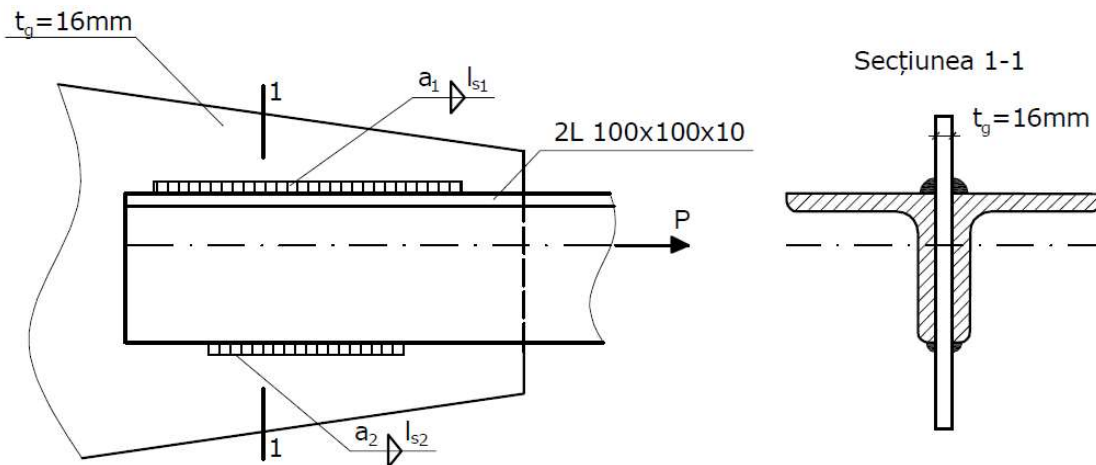


Fig. 9.4.

### REZOLVARE

Se verifică secțiunea barei la întindere axială:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_{ef}} = \frac{600 \cdot 10^3}{2 \cdot 1920} = 156.25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \ll R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Se determină valoarea eforturilor din cele două cordoane de sudură:

$$T_1 = \frac{P(b - e)}{b} = 600 \cdot \frac{(100 - 28.2)}{100} = 430.80kN;$$

$$T_2 = \frac{P \cdot e}{b} = 600 \cdot \frac{28.2}{100} = 169.20kN;$$

Se impune grosimea cordoanelor de sudură:

$$\begin{array}{l} 3mm \leq a_1, a_2 \leq 0.7t_{min} = 7mm \\ t_{min} = \min(10mm, 16mm) \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow \text{alegem } a_1 = a_2 = \mathbf{6mm};$$

Se determină lungimile de calcul necesare ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1,nec} = \frac{T_1}{n \cdot a \cdot R_s^f} = \frac{430.80 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 165} = 217.58mm;$$

$$l_{s2,nec} = \frac{T_2}{n \cdot a \cdot R_s^f} = \frac{169.20 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 165} = 85.45mm.$$

Se determina lungimile de execuție ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1} = l_{s1,nec} + 2 \cdot a_1 = 217.58mm + 2 \cdot 6mm = 229.58mm \quad \Rightarrow \mathbf{l_{s1} = 230mm};$$

$$l_{s2} = l_{s2,nec} + 2 \cdot a_2 = 85.45mm + 2 \cdot 6mm = 97.45mm \quad \Rightarrow \mathbf{l_{s2} = 100mm};$$

Se verifică îndeplinirea condițiilor constructive:

$$15 \cdot a_1 \leq l_{s1} \leq 60 \cdot a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 90mm \leq 230mm \leq 360mm;$$

$$l_{s1} = 230mm \geq l_{s,min} = 40mm;$$

$$15 \cdot a_2 \leq l_{s2} \leq 60 \cdot a_2 \quad \Leftrightarrow \quad 90mm \leq 100mm \leq 360mm;$$

$$l_{s2} = 100mm \geq l_{s,min} = 40mm.$$

În consecință, dimensionarea îmbinării sudate este corectă. Schema îmbinării dimensionate este prezentată în Fig. 9.5.

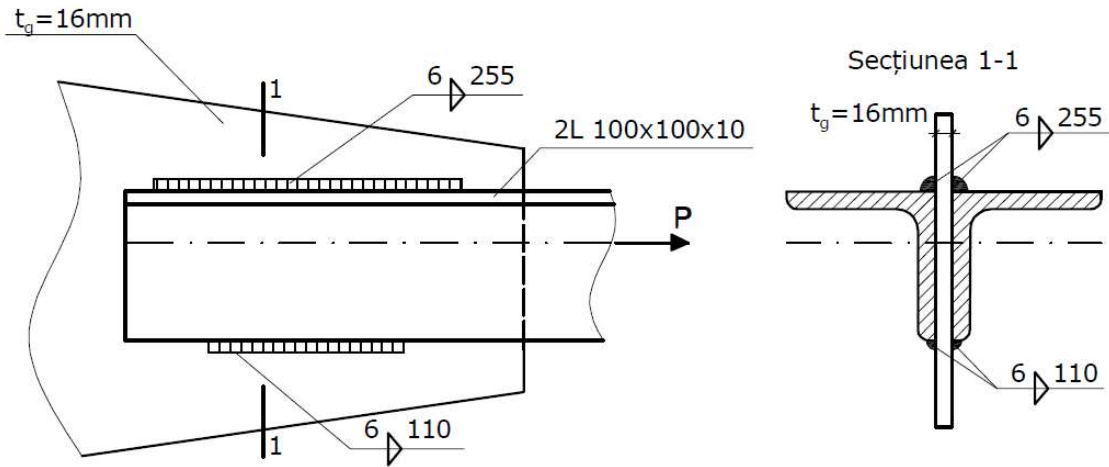


Fig. 9.5. Schema îmbinării sudate.

**Ex.2.** Tirantul din Fig. 9.6 are secțiunea alcătuită din 2 profile UPE200, prinse cu cordoane de sudură de colț. Sudurile sunt executate pe ambele fețe ale unui guseu având  $t_g = 10\text{mm}$ . Grosimea cordoanelor de sudură este  $a = 7\text{mm}$ , iar lungimea acestora  $l_s = 270\text{mm}$ . Se cere:

- Determinarea sarcinii capabile a barei,  $P_{cap,bară}$  ;
- Determinarea sarcinii capabile a îmbinării sudate,  $P_{cap,îmbinare}$  ;
- Determinarea sarcinii capabile a structurii,  $P_{cap}$ .

Se cunosc:  $R = 235\text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^s = 165\text{ N/mm}^2$ .

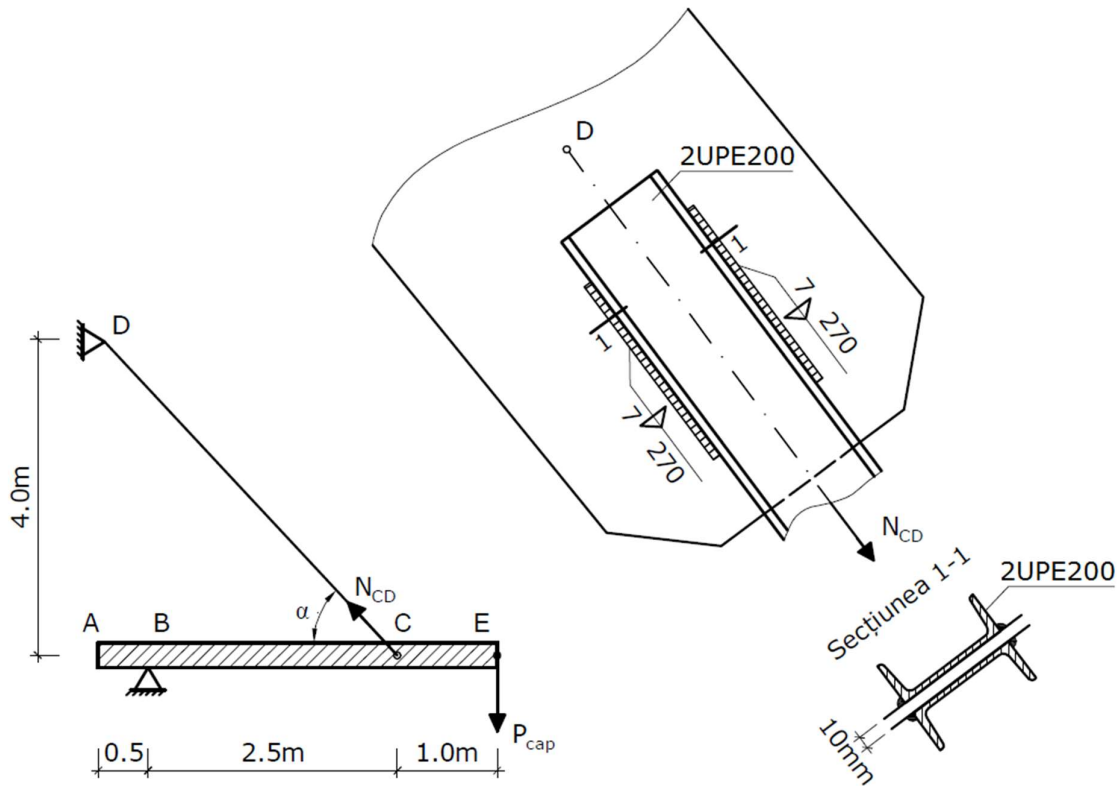


Fig. 9.6.



REZOLVARE

a) Determinarea sarcinii capabile a barei ( $P_{cap,bară}$ ) se face pornind de la ecuația de echilibru static:

$$\Sigma M_B = 0 \Leftrightarrow P \cdot 3.5 - 2.5N_{CD} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$tg \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{4}{3} = 53.13^\circ .$$

Se obține o relație între forța exterioară  $P$  și efortul de întindere din tirant:

$$P = \frac{N_{CD} \cdot 2.5 \cdot \sin 53.13}{3.5} = 0.57N_{CD}.$$

Evaluând în continuare efortul capabil din tirant, se poate obține sarcina capabilă a barei,  $P_{cap}$ , pentru o arie a profilului UPE 200,  $A_{UPE 200} = 29 \text{ cm}^2$  (Anexa 3):

$$N_{CD_{cap}} = A \cdot R = 2 \cdot A_{UPE 200} \cdot R = 2 \cdot 2900 \cdot 235 = 1363000N = 1363kN;$$

$$\Rightarrow P_{cap,bară} = 0.57 \cdot N_{CD_{cap}} = \mathbf{776.91kN}.$$

b) Determinarea sarcinii capabile a îmbinării sudate ( $P_{cap,îmbinare}$ ) se face utilizând aceeași relație de legătură între forța exterioară și efortul din tirant, ulterior evaluării sarcinii capabile a sudurii:

$$N_{cap,sudură} = n \cdot a \cdot (l_s - 2 \cdot a) \cdot R_f^s = 4 \cdot 7 \cdot (270 - 2 \cdot 7) \cdot 165 = 1182.72kN;$$

$$\Rightarrow P_{cap,îmbinare} = 0.57 \cdot N_{cap,sudură} = \mathbf{674.15kN}.$$

c) Determinarea sarcinii capabile a întregii structuri ( $P_{cap}$ ) presupune stabilirea valorii minime pentru care una dintre cele două componente ale ansamblului (bara, respectiv îmbinarea) va ceda. În consecință:

$$P_{cap} = \min(P_{cap,bară}, P_{cap,îmbinare}) = \mathbf{674.15kN}.$$

**Ex.3.** Bara de secțiune dreptunghiulară din Fig. 9.7 este confecționată din oțel și este prevăzută în afara zonei de rezemare cu goluri circulare ( $d=40\text{mm}$ ) din 10 în 10cm, pe o lungime de 5m. Știind că aceasta este prinsă cu sudură de colț de o piesă de reazem cu grosimea  $t_g = 20\text{mm}$ , respectiv că grosimea cordoanelor de sudură este  $a = 7\text{mm}$ , iar lungimea acestora este  $l_{s1} = 240\text{mm}$ ,  $l_{s2} = 180\text{mm}$ , se cere:

a) Determinarea sarcinii capabile a barei,  $P_{cap,bară}$  ;

b) Determinarea sarcinii capabile a îmbinării sudate,  $P_{cap,îmbinare}$  ;

c) Determinarea sarcinii capabile a structurii,  $P_{cap}$ .

Se cunosc:  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^s = 165 \text{ N/mm}^2$ .

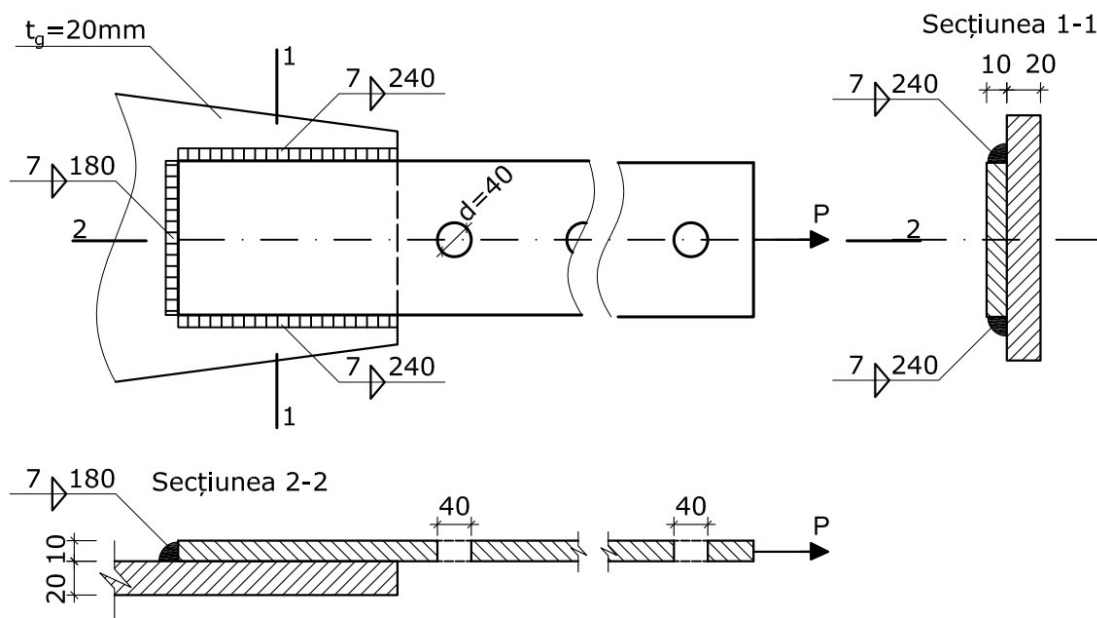


Fig. 9.7.

**REZOLVARE**

- a) Determinarea sarcinii capabile a barei ( $P_{cap,bară}$ ) se face ținând cont de faptul că efortul de întindere care apare în bară este egal cu valoarea forței P:

$$N_{bară} = P$$

În consecință, vom evalua efortul capabil al barei ( $N_{cap,bară}$ ) luând în considerare faptul că pe lungimea acesteia sunt prevăzute goluri cu diametrul 40mm (din 10 în 10 cm), deci implicit aria secțiunii transversale a barei este afectată:

$$N_{cap,bară} = A_{net} \cdot R;$$

$$A_{net} = A_{brut} - A_{gol} = (180 \cdot 10) - (40 \cdot 10) = 1400 \text{ mm}^2 = 14 \text{ cm}^2;$$

$$\Rightarrow N_{cap,bară} = 1400 \cdot 235 = 329000 \text{ N} = 329.00 \text{ kN};$$

$$\Rightarrow P_{cap,bară} = N_{cap,bară} = \mathbf{329.00 \text{ kN}}.$$

- b) Ulterior evaluării sarcinii capabile a sudurii, determinarea sarcinii capabile a îmbinării sudate ( $P_{cap,îmbinare}$ ) se face utilizând aceeași relație de legătură între forța exterioară și efortul din bară:

$$\begin{aligned} N_{cap,sudură} &= n \cdot a \cdot (l_s - 2 \cdot a) \cdot R_f^s = \{[2 \cdot 7 \cdot (240 - 2 \cdot 7)] + [7 \cdot (180 - 2 \cdot 7)]\} \cdot 165 \\ &= 713790 \text{ N} = 713.79 \text{ kN}; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{cap,îmbinare} = N_{cap,sudură} = \mathbf{713.79 \text{ kN}}.$$

- c) Determinarea sarcinii capabile a întregii structuri ( $P_{cap}$ ) presupune stabilirea valorii minime pentru care una dintre cele două componente ale ansamblului (bara, respectiv îmbinarea) va ceda. În consecință:

$$P_{cap} = \min(P_{cap,bară}, P_{cap,îmbinare}) = 329.00kN.$$

**Ex.4.** Pentru sistemul de bare articulate din Fig. 9.8, se cere:

- Determinarea eforturilor în bare, știind ca raportul  $A_1/A_2 = 2$ ;
- Dimensionarea barei 1 din două profile UPE sudate, respectiv a barelor 2 din profile 2L sudate;
- Deplasarea pe verticală a punctului C.

Se cunosc:  $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f^s = 165 N/mm^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ .

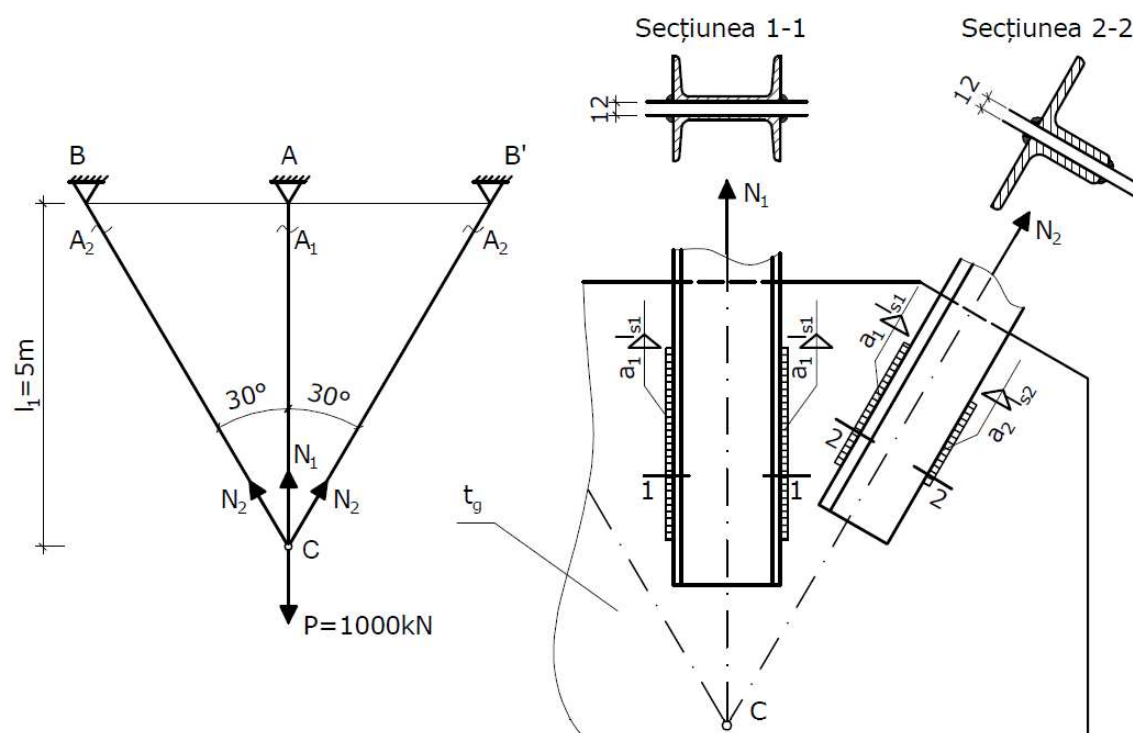


Fig. 9.8

### REZOLVARE

- Determinarea eforturilor în cei trei tiranți se face utilizând metoda izolării nodurilor. Întrucât sistemul este simetric, eforturile în cele două bare marginale sunt egale. Astfel, în cazul nodului C, se poate scrie ecuația de echilibru static (1):

$$N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\alpha - P = 0. \quad (1)$$

Pentru că sistemul este o dată static nedeterminat, pentru aflarea necunoscutelor se impune utilizarea unei ecuații suplimentare. În general, se apelează la compatibilitatea deplasărilor. Odată cu aplicarea forței  $P$ , barele sistemului se deformează, nodul comun al barelor aflat inițial în poziția  $C$  ajungând, ulterior deformării, în poziția  $C'$ . Utilizând ipoteza micilor deformații, unde unghiul  $\alpha \approx \alpha'$ , din triunghiul  $CC'C''$  se poate scrie condiția de compatibilitate a deplasărilor (Fig. 9.9):

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos\alpha.$$

Înlocuind în relația anterioară expresiile  $\Delta l_1$  și  $\Delta l_2$ , se ajunge la cea de-a doua ecuație a sistemului:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2};$$

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} \cdot \cos\alpha. \quad (2)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (1) și (2), pentru raportul  $A_1/A_2 = 2$ , rezultă:

$$\begin{aligned} N_2 &= 0.375N_1 \\ N_1 + 2(0.375 \cdot N_1 \cdot \cos\alpha) &= P \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_1 &= \frac{1000}{1.65} = \mathbf{606.25kN}; \\ N_2 &= 0.375 \cdot 606.25 = \mathbf{227.34kN}. \end{aligned}$$

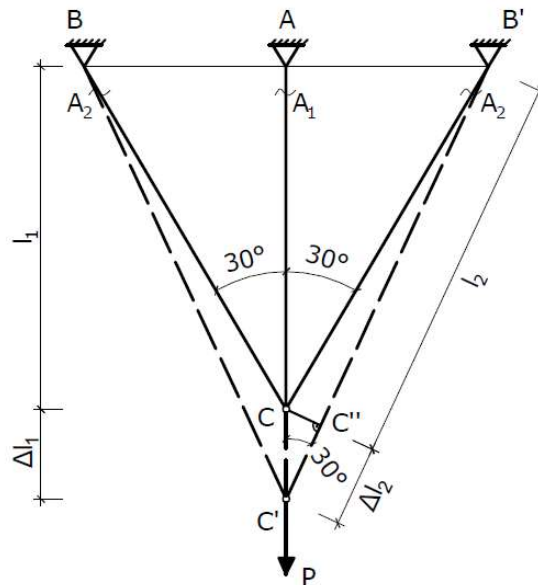


Fig. 9.9

b) Dimensionarea îmbinării sudate se va face pentru fiecare bară separat (Fig. 9.10). Mai întâi, vom dimensiona barele 1 și 2, mai exact vom alege tipul profilului:

- Dimensionarea barei 1 (2 profile UPE - sudate)

$$2 \cdot A_{nec1} \geq \frac{N_1}{R} \Leftrightarrow A_{nec1} \geq \frac{606.23 \cdot 10^3}{2 \cdot 235} = 1289.85 \text{ mm}^2 = 12.90 \text{ cm}^2;$$

- se alege profil UPE 120,  $A_{ef1} = 15.4 \text{ cm}^2$ .

- Dimensionarea barei 2 (2 profile L - sudate)

$$2 \cdot A_{nec2} \geq \frac{N_2}{R} \Leftrightarrow A_{nec2} \geq \frac{227.34 \cdot 10^3}{2 \cdot 235} = 483.70 \text{ mm}^2 = 4.84 \text{ cm}^2;$$

- se alege profil L50x50x6,  $A_{ef2} = 5.69 \text{ cm}^2$ .

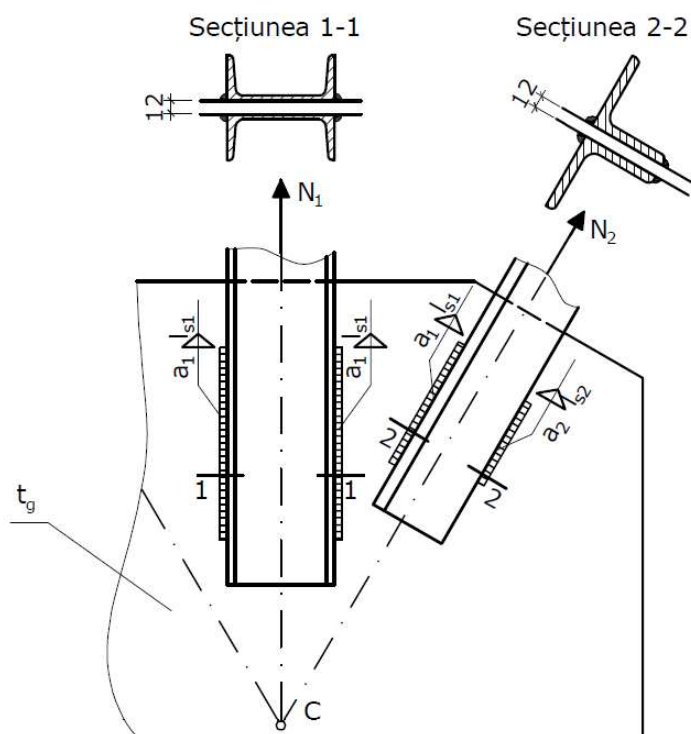


Fig. 9.10

Odată cu alegerea profilelor, raportul  $A_1/A_2 = 2$  nu mai este valabil, în consecință este necesară reevaluarea eforturilor  $N_1$  și  $N_2$  în funcție de noul raport  $A_1/A_2 = 15.4/5.69 = 2.71$ , respectiv verificarea condiției de rezistență pentru cele două bare:

- Dimensionarea îmbinării sudate pentru bara 1 (2 profile UPE)

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \frac{A_2}{A_1} \cos^3 \alpha} = \frac{1000 \cdot 10^3}{1 + 2 \frac{2 \cdot 569}{2 \cdot 1540} \cos^3 30^\circ} = 675.69 \text{ kN};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{675.69 \cdot 10^3}{2 \cdot 1840} = 183.61 \frac{N}{mm^2} < R = 235 \frac{N}{mm^2}.$$

Se impune grosimea cordoanelor de sudură:

$$\begin{array}{l} 3mm \leq a_1 \leq 0.85t_{min} = 6.80mm \\ t_{min} = \min(12mm, 8mm) \end{array} \quad \left| \Rightarrow \text{aleg } a_1 = 6mm. \right.$$

Se determină lungimile de calcul necesare ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1,nec} = \frac{N_1}{n \cdot a_1 \cdot R_s^f} = \frac{675.69 \cdot 10^3}{4 \cdot 6 \cdot 165} = 170.63mm.$$

Se determină lungimile de execuție ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1} = l_{s1,nec} + 2 \cdot a_1 = 170.63mm + 2 \cdot 6mm = 182.63mm \Rightarrow l_{s1} = \mathbf{185mm}.$$

Se verifică îndeplinirea condițiilor constructive:

$$15 \cdot a_1 \leq l_{s1} \leq 60 \cdot a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 90mm \leq 185mm \leq 360mm;$$

$$l_{s1} = 185mm \geq l_{s,min} = 40mm.$$

În consecință, dimensionarea îmbinării sudate pentru bara 1 este corectă.

- Dimensionarea îmbinării sudate pentru bara 2 (2 profile L)

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \cos^2 \alpha = 675.69 \cdot \frac{2 \cdot 569}{2 \cdot 1540} \cdot \cos^2 30^\circ = 187.24kN;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{174.96 \cdot 10^3}{2 \cdot 569} = 164.53 \frac{N}{mm^2} < R = 235 \frac{N}{mm^2}.$$

Se determină valoarea eforturilor din cele două cordoane de sudură:

$$T_1 = \frac{N_2(b - e)}{b} = 187.24 \cdot \frac{(50 - 14)}{50} = 134.81kN;$$

$$T_2 = \frac{N_2 \cdot e}{b} = 187.24 \cdot \frac{14}{50} = 52.43kN.$$

Se impune grosimea cordoanelor de sudură:

$$\begin{array}{l} 3mm \leq a_1 \leq 0.85 \cdot t_{min} = 5.1mm \\ 3mm \leq a_2 \leq 0.70 \cdot t_{min} = 4.2mm \end{array} \quad \left| \Rightarrow \text{aleg } a_1 = 5mm, a_2 = 4mm. \right.$$

$$t_{min} = \min(12mm, 6mm);$$

Se determină lungimile de calcul necesare ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1,nec} = \frac{T_1}{n \cdot a_1 \cdot R_s^f} = \frac{134.81 \cdot 10^3}{2 \cdot 5 \cdot 165} = 81.70mm;$$

$$l_{s2,nec} = \frac{T_2}{n \cdot a_2 \cdot R_s^f} = \frac{52.43 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 165} = 39.72mm.$$

Se determină lungimile de execuție ale cordoanelor de sudură:

$$l_{s1} = l_{s1,nec} + 2 \cdot a_1 = 81.70mm + 2 \cdot 5mm = 91.70mm \quad \Rightarrow l_{s1} = \mathbf{95mm};$$

$$l_{s2} = l_{s2,nec} + 2 \cdot a_2 = 39.72mm + 2 \cdot 4mm = 47.72mm \quad \Rightarrow l_{s2} = \mathbf{50mm}.$$

Se verifică îndeplinirea condițiilor constructive:

$$15 \cdot a_1 \leq l_{s1} \leq 60 \cdot a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 75mm \leq 95mm \leq 300mm ;$$

$$l_{s1} = 95mm \geq l_{s,min} = 40mm ;$$

$$15 \cdot a_2 \leq l_{s2} \leq 60 \cdot a_2 \quad \Leftrightarrow \quad 60mm \leq 50mm \leq 240mm.$$

Deoarece condiția privind lungimea sudurii celui de-al doilea cordon nu este îndeplinită, se crește lungimea acestuia,  $l_{s2}$ , la  $60mm$ . Astfel:

$$15 \cdot a_2 \leq l_{s2} \leq 60 \cdot a_2 \quad \Leftrightarrow \quad 60mm \leq 60mm \leq 240mm;$$

$$l_{s2} = 60mm \geq l_{s,min} = 40mm.$$

În consecință, dimensionarea îmbinării sudate pentru bara 2 este de asemenea corectă.

c) Deplasarea pe verticală a nodului C

$$\Delta l_C = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{675.69 \cdot 10^3 \cdot 5000}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 1540} = 5.223mm .$$

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru bara din Fig. 9.11, se cere:

a) Să se verifice bara și să se calculeze prinderea sudată a acesteia știind că secțiunea ei este alcătuită din 2 profile cornier 2L90x90x9 și că forța  $P = 580 kN$ . Sudurile se execută pe ambele fețe ale unui guseu cu grosimea de 12mm. Lungimea barei este de 6m;

b) Să se determine deplasarea capătului liber al barei.

Se cunosc:  $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f^s = 165 N/mm^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ .

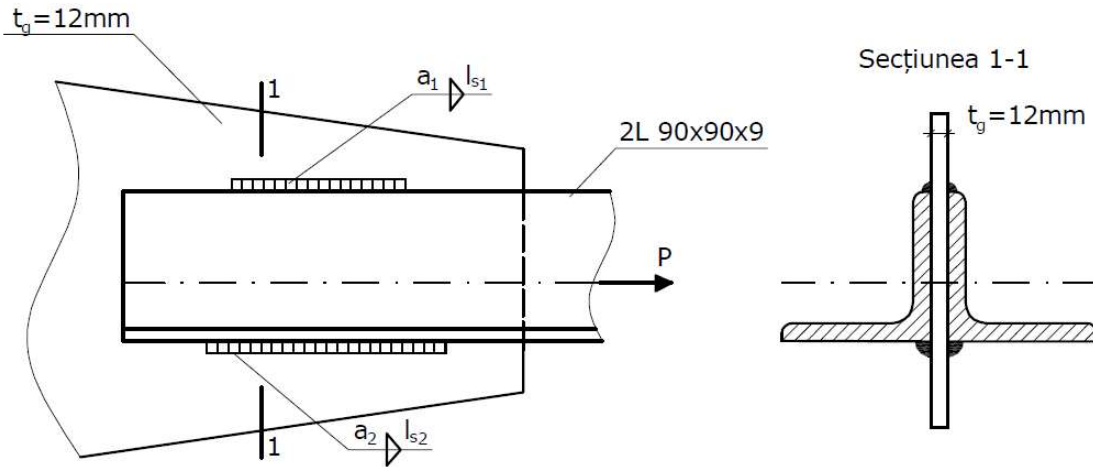


Fig. 9.11

Rezultate parțiale:  $\Delta l = 5.35\text{mm}$ .

**P2.** Bara din Fig. 9.12 are secțiunea alcătuită din 2 profile L100x100x10, solidarizate cu cordoane de sudură de colț. Sudurile sunt executate pe ambele fețe ale unui guseu având  $t_g = 14\text{mm}$ . Grosimea cordoanelor de sudură este  $a_1 = 7\text{mm}$ ,  $a_2 = 4\text{mm}$ , iar lungimile acestora sunt  $l_{s1} = 250\text{mm}$ ,  $l_{s2} = 180\text{mm}$ . Se cere:

- Determinarea sarcinii capabile a barei,  $P_{cap,bară}$ ;
  - Determinarea sarcinii capabile a îmbinării sudate,  $P_{cap,îmbinare}$ ;
  - Determinarea sarcinii capabile a structurii,  $P_{cap}$ .
- Se cunosc:  $R = 235\text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^s = 165\text{ N/mm}^2$ .

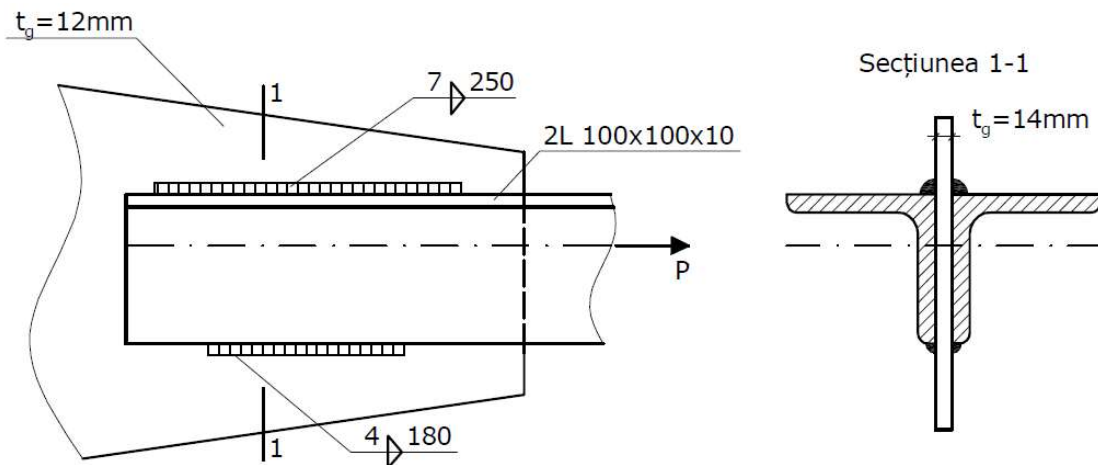


Fig. 9.12

Rezultate parțiale:  $P_{cap,bară} = 902.40\text{ kN}$ .



**P3.** Pentru bara rigidă din Fig. 9.13, prinsă prin intermediul unui tirant la capătul B și acționată de forța exterioară  $P = 700 \text{ kN}$ , se cere:

- Dimensionarea tirantului BC, din două profile cornier;
- Dimensionarea prinderii sudate a tirantului (nodul B) știind că grosimea guseului este  $t_g = 12 \text{ mm}$ ;
- Determinarea deplasării pe verticală a nodului B, ținând cont de faptul că bara AB este infinit rigidă.

Se cunosc:  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f^s = 165 \text{ N/mm}^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ .

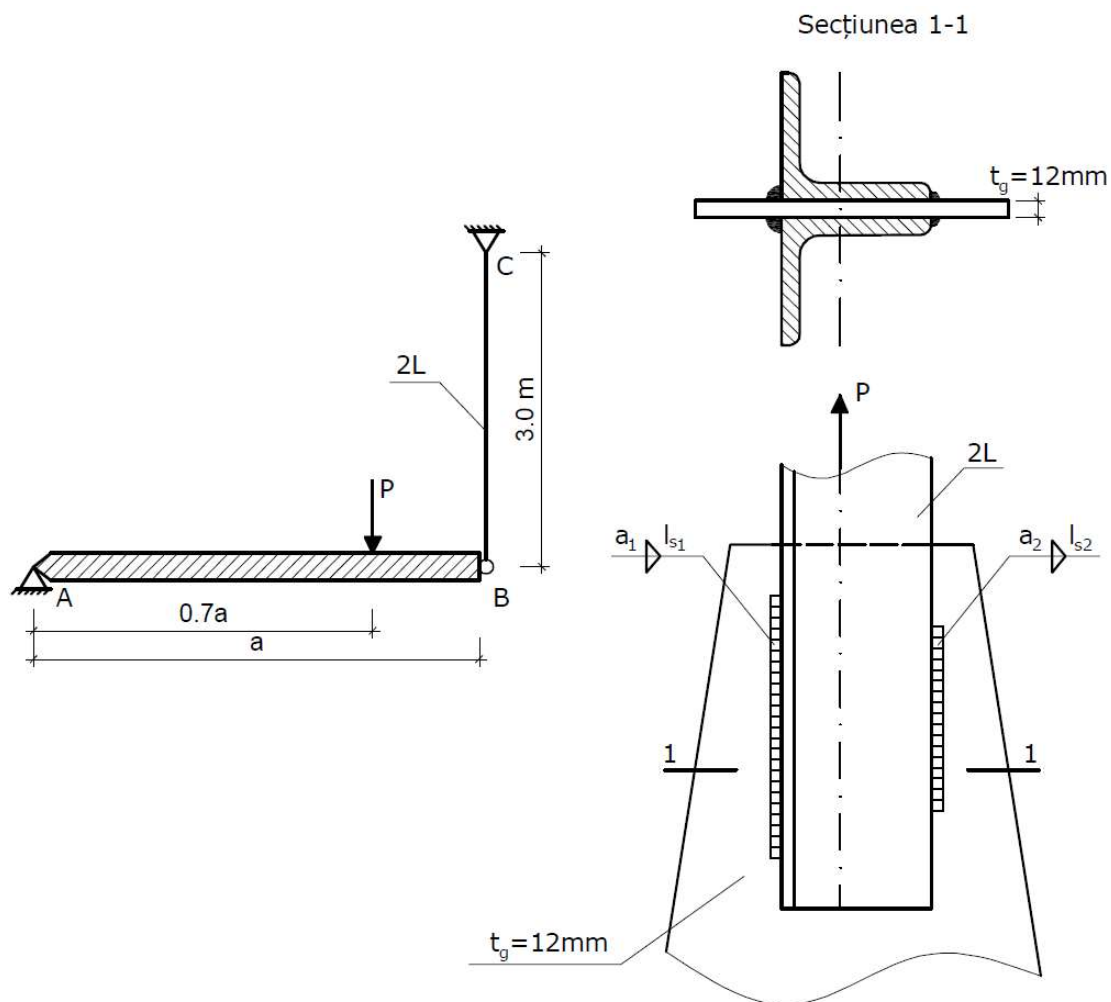


Fig. 9.13

Rezultate parțiale:  $N_{BC} = 490 \text{ kN}$ ,  $\Delta l = 3.27 \text{ mm}$  (pt.  $L70 \times 70 \times 8$ ).

## LUCRAREA 10

### CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL GRINZILOR ÎNCOVOIATE (DIAGrame DE EFORTURI, CARACTERISTICI GEOMETRICE, VERIFICARE, DIMENSIONARE)

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

Solicitarea la încovoiere simplă plană este caracterizată prin prezența a două eforturi secționale: momentul încovoiător „M” și forța tăietoare „T”. Barele solicitate la încovoiere sunt numite grinzi. În secțiunile transversale ale acestora apar tensiuni normale  $\sigma$  datorate momentului încovoiător, având valori maxime în dreptul fibrelor extreme ale secțiunii transversale, respectiv tensiuni tangențiale  $\tau$  datorate forțelor tăietoare, având valori maxime în dreptul axei neutre. Axa neutră este locul geometric al punctelor de pe secțiune unde tensiunile normale  $\sigma$  sunt nule și poate fi identificată ca intersecția fâșiei neutre longitudinale cu axa după care este dirijat momentul încovoiător „M”. Pentru solicitarea la încovoiere, această axă este o axă centrală (trece prin centrul de greutate al secțiunii) și principală de inerție (în raport cu ea, momentul de inerție este minim). Pentru secțiuni simetrice în raport cu axa  $G_z$ , axa neutră este axa  $G_y$ , normală la axa  $G_z$ . Valorile maxime ale tensiunilor normale și ale tensiunilor tangențiale se determină cu relațiile 10.1 și 10.2:

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} \quad (10.1)$$

$$\tau_{max} = \frac{|T|_{max} \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y} \quad (10.2)$$

Ca și în cazul celorlalte tipuri de solicitări simple studiate în cadrul Rezistenței Materialelor, și în cazul solicitării la încovoiere cu forță tăietoare sunt identificate trei categorii de probleme: verificare, dimensionare și efort capabil. Relațiile utilizate în rezolvarea categoriilor de probleme menționate sunt prezentate în cadrul tabelului 10.1.

Tab.10.1. Tipuri de probleme.

Tipul problemei	Relații de calcul	
	Moment încovoiător	Forță tăietoare
Verificare	$\sigma_{max} = \frac{ M _{max}}{W_y} \leq R$	$\tau_{max} = \frac{ T _{max} \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y} \leq R_f$
Efort capabil	$M_{cap} = W_y \cdot R$	$T_{cap} = \frac{R_f \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y}$
Dimensionare	$W_{y,nec} = \frac{ M _{max}}{R}$	Nu se utilizează

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru grinda metalică ( $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ) din Fig. 10.1, se cere:

- Trasarea diagramelor de eforturi T și M;
- Determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale;
- Verificarea secțiunii grinzii.

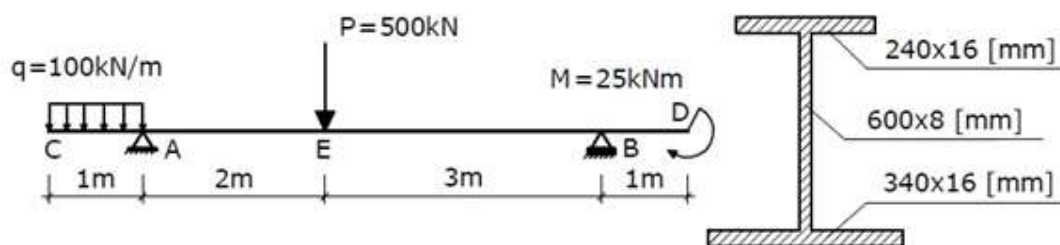


Fig. 10.1.

### REZOLVARE

- Trasarea diagramelor de eforturi:

*Determinarea reacțiunilor* (Fig. 10.2).

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 500 \cdot 2 + 25 - 100 \cdot 1 \cdot 0.5 - V_B \cdot 5 = 0 \rightarrow V_B = 195 \text{ kN};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -25 + 500 \cdot 3 + 100 \cdot 1 \cdot 5.5 - V_A \cdot 5 = 0 \rightarrow V_A = 405 \text{ kN}.$$

Verificare (suma proiecțiilor forțelor date și de legătură pe verticală)

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 405 + 195 - 100 \cdot 1 - 500 = 0 \rightarrow \text{Reacțiuni corecte.}$$

Calculul valorilor eforturilor în secțiunile caracteristice

$$T_C = 0; T_A^{st} = -100 \text{ kN};$$

$$T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = 305 \text{ kN};$$

$$T_E^{st} = T_A^{dr} = 305 \text{ kN};$$

$$T_E^{dr} = T_E^{st} - 500 \text{ kN} = -195 \text{ kN};$$

$$T_B^{st} = T_E^{dr} = -195 \text{ kN};$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 0; T_D = T_B^{dr} = 0;$$

$$M_C = 0; M_A = -100 \cdot 1 \cdot 0.5 = -50 \text{ kNm};$$

$$M_E = -100 \cdot 1 \cdot 2.5 + 405 \cdot 2 = 560 \text{ kNm};$$

$$M_B = -100 \cdot 1 \cdot 5.5 + 405 \cdot 5 - 500 \cdot 3 = -25 \text{ kNm}; M_D^{st} = -25 \text{ kNm}.$$

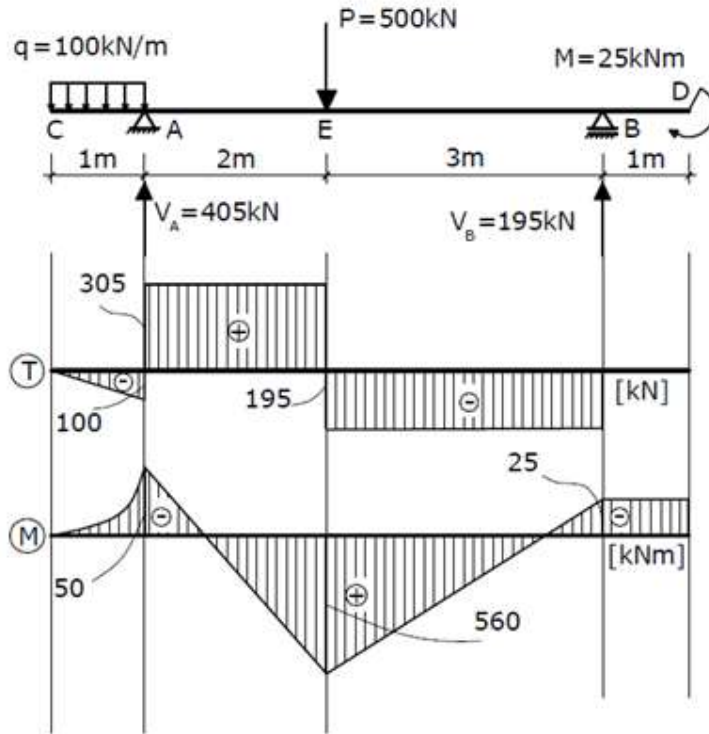


Fig. 10.2.

b) Pentru verificarea secțiunii grinzii este necesară mai întâi determinarea caracteristicilor geometrice ale acesteia (Lucrarea 5).

Secțiunea transversală a grinzii prezintă o axă de simetrie verticală, centrul de greutate aflându-se pe aceasta. Pentru determinarea poziției a centrului de greutate se va utiliza o axă auxiliară  $y_1$ , prin fața inferioară a tălpii inferioare a profilului alcătuit (Fig. 10.3).

– aria

$$A = 24 \cdot 1.6 + 34 \cdot 1.6 + 60 \cdot 0.8 = 140.8 \text{ cm}^2;$$

– poziția centrului de greutate

$$z_g = [24 \cdot 1.6 \cdot (-62.4) + 34 \cdot 1.6 \cdot (-0.8) + 60 \cdot 0.8 \cdot (-31.6)] / 140.8 = -28.1 \text{ cm};$$

– momentul de inerție în raport cu axa neutră  $O_y$

$$I_y = \frac{24 \cdot 1.6^3}{12} + 24 \cdot 1.6 \cdot (35.1 - 0.8)^2 + \frac{0.8 \cdot 60^3}{12} + 60 \cdot 0.8 \cdot (35.1 - 31.6)^2 + \frac{34 \cdot 1.6^3}{12} + 34 \cdot 1.6 \cdot (28.1 - 0.8)^2 = 100728.788 \text{ cm}^4.$$

– modulul de rezistență în raport cu axa neutră  $O_y$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{100728.788}{35.1} = 2869.766 \text{ cm}^3.$$

c) Verificarea tensiunilor normale ( $\sigma$ ) se face în secțiunea maxim sollicitată la moment încovoietor și pentru punctele secțiunii aflate la cea mai mare distanță față de axa neutră.

$$|M|_{max} = |M|_E = 560 \text{ kNm};$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} = \frac{560 \cdot 10^6}{2869.766 \cdot 10^3} = 195.14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

Verificarea tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) se face în secțiunea unde forța tăietoare este extremă, în axa neutră a secțiunii.

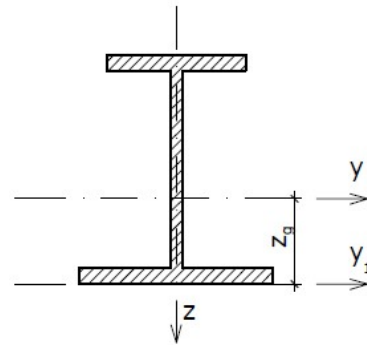


Fig. 10.3.

$$|T|_{max} = |T|_A^{dr} = 305 \text{ kNm};$$

$$\tau_{max} = \frac{|T|_{max} \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y} = \frac{305 \cdot 10^3 \cdot \left(240 \cdot 16 \cdot 343 + 335^2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}\right)}{8 \cdot 100728.788 \cdot 10^4} = 66.84 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$66.84 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

Deoarece ambele condiții sunt satisfăcute, secțiunea grinzii este verificată.

Obs. (1) Verificarea celor două tipuri de tensiuni s-a făcut în secțiuni diferite ale grinzii, respectiv în puncte diferite ale acestor secțiuni

Obs. (2) În cazul grinzilor obișnuite ( $h/l$  are valori între  $1/5$  și  $1/10$ ), dacă tensiunile normale  $\sigma$  verifică, tensiunile tangențiale  $\tau$  verifică în mod automat condiția de rezistență.

**Ex.2.** Pentru grinda metalică ( $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ) din Fig. 10.4, de secțiune transversală T, se cere:

- Trasarea diagramelor de eforturi N, T și M;
- Determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale.
- Verificarea secțiunii grinzii.

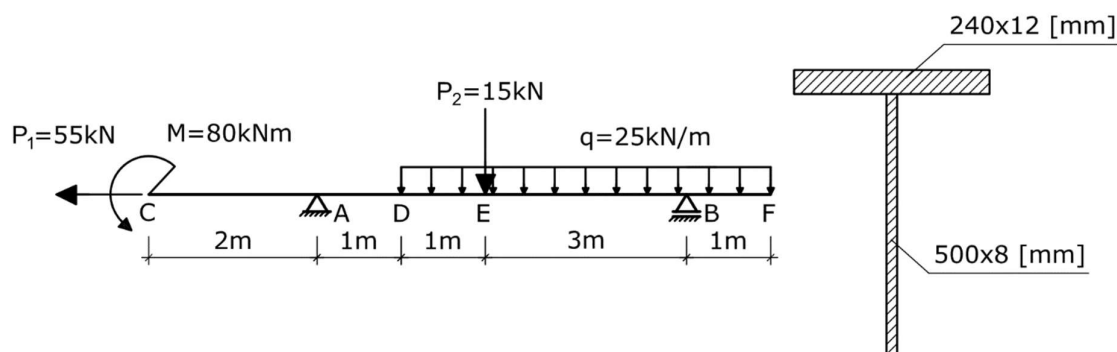


Fig. 10.4.

### REZOLVARE

- Trasarea diagramelor de eforturi:

Determinarea reacțiunilor (Fig. 10.5).

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -55 + H_A = 0 \rightarrow H_A = 55 \text{ kN};$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -80 + 15 \cdot 2 + 25 \cdot 5 \cdot 3.5 - V_B \cdot 5 = 0 \rightarrow V_B = 77.5 \text{ kN};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -80 + V_A \cdot 5 - 15 \cdot 3 - 25 \cdot 5 \cdot 1.5 = 0 \rightarrow V_A = 62.5 \text{ kN}.$$

Verificare (suma proiecțiilor forțelor date și de legătură pe verticală)

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 15 + (25 \cdot 5) - 62.5 - 77.5 = 0 \rightarrow \text{Reacțiuni corecte.}$$

Calculul valorilor eforturilor în secțiunile caracteristice

Efortul axial, N:

$$N_C^{dr} = 55kN;$$

$$N_A^{st} = N_C^{dr} = 55kN;$$

$$N_A^{st} = N_C^{dr} - H_A = 0.$$

Forța tăietoare, T:

$$T_C = 0;$$

$$T_A^{st} = 0;$$

$$T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = 62.5kN;$$

$$T_D^{st} = T_A^{dr} = 62.5kN;$$

$$T_D^{dr} = T_D^{st} = 62.5kN;$$

$$T_E^{st} = T_D^{dr} - (25 \cdot 1) = 37.5kN;$$

$$T_E^{dr} = T_E^{st} - 15 = 22.5kN;$$

$$T_B^{st} = T_E^{dr} - (25 \cdot 3) = -52.5kN;$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 25kN;$$

$$T_F^{st} = T_B^{dr} - (25 \cdot 1) = 0;$$

Se observă că pe tronsonul EB al barei, forța tăietoare se anulează. Cum în acea secțiune diagrama de moment încovoietor va înregistra o valoare de extrem local, este necesar să determinăm poziția exactă a lui  $x_0$  pentru care  $T_{x_0} = 0$ .

$$\begin{array}{l} T_{x_0} = 0 \\ T_{x_0} = T_E^{dr} - 25 \cdot x_0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \rightarrow 22.5 - 25 \cdot x_0 = 0 \\ \rightarrow x_0 = 0.90m; \end{array} \right.$$

Momentul încovoietor, M:

$$M_C^{dr} = -80kNm;$$

$$M_A = -80kNm;$$

$$M_D = -80 + 62.5 \cdot 1 = -17.5kNm;$$

$$M_E = -80 + 62.5 \cdot 2 - (25 \cdot 1) \cdot 0.5 = -32.5kNm;$$

$$M(x_0) = -80 + 62.5 \cdot 2.9 - 15 \cdot 0.9 - (25 \cdot 1.9) \cdot 0.95 = 42.625kNm;$$

$$M_B = -80 + 62.5 \cdot 5 - 15 \cdot 3 - (25 \cdot 4) \cdot 2 = -12.5kNm;$$

$$M_F = 0.$$

Pornind de la valorile obținute anterior pentru eforturile secționale, putem trasa diagramele de eforturi pentru grinda dată (Fig. 10.5).

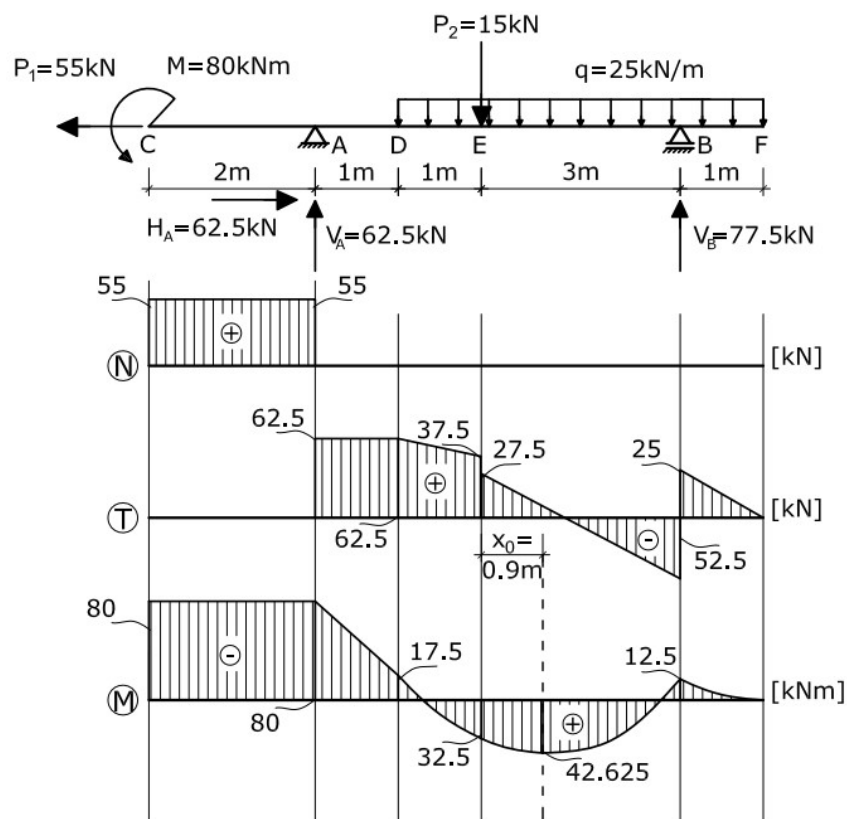


Fig. 10.5.

b) Calculul pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale T, se va face similar celui de la problema anterioară, luând în considerare și de această dată faptul că secțiunea admite o axă de simetrie (Fig. 10.6).

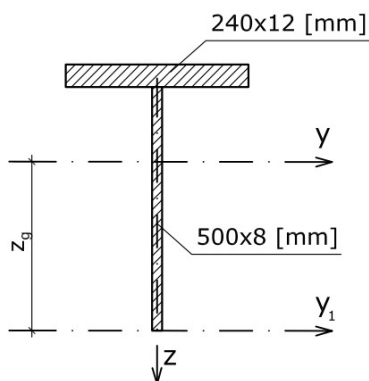


Fig. 10.6.

– aria

$$A = 24 \cdot 1.2 + 50 \cdot 0.8 = 68.8 \text{ cm}^2;$$

– poziția centrului de greutate

$$z_g = [24 \cdot 1.2 \cdot (-50.6) + 50 \cdot 0.8 \cdot (-25)] / 68.8 = -35.72 \text{ cm};$$

– momentul de inerție în raport cu axa neutră  $O_y$

$$I_y = \frac{24 \cdot 1.2^3}{12} + 24 \cdot 1.2 \cdot (35.72 - 50.6)^2 + \frac{0.8 \cdot 50^3}{12} + 50 \cdot 0.8 \cdot (35.72 - 25)^2 = 19310.26 \text{ cm}^4.$$

– modulul de rezistență în raport cu axa neutră  $O_y$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{19310.26}{35.72} = 540.60 \text{ cm}^3.$$

– momentul static al ariei de sub axa neutră  $O_y$

$$S_y^{inf} = (35.72 \cdot 0.8) \cdot \frac{35.72}{2} = 510.36 \text{ cm}^3.$$

c) *Verificarea tensiunilor normale ( $\sigma$ )* se face în secțiunea maxim solicitată la moment încovoietor și pentru punctele secțiunii aflate la cea mai mare distanță față de axa neutră.

$$|M|_{max} = |M|_C = 80 \text{ kNm};$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} = \frac{80 \cdot 10^6}{540.60 \cdot 10^3} = 147.98 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

*Verificarea tensiunilor tangențiale ( $\tau$ )* se face în secțiunea unde forța tăietoare este extremă, în axa neutră a secțiunii.

$$|T|_{max} = |T|_A^{dr} = 62.5 \text{ kNm};$$

$$\tau_{max} = \frac{|T|_{max} \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y} = \frac{62.5 \cdot 10^3 \cdot 510.36 \cdot 10^3}{8 \cdot 19310.26 \cdot 10^4} = 20.65 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$20.65 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

Deoarece ambele condiții sunt satisfăcute, secțiunea grinzii este verificată.

*Obs. (1) Verificarea celor două tipuri de tensiuni s-a făcut în secțiuni diferite ale grinzii, respectiv în puncte diferite ale acestor secțiuni*

*Obs. (2) În cazul grinzilor obișnuite ( $h/l$  are valori între  $1/5$  și  $1/10$ ), dacă tensiunile normale  $\sigma$  verifică, tensiunile tangențiale  $\tau$  verifică în mod automat condiția de rezistență.*



**Ex.3.** Se cere dimensionarea grinzii din lemn ( $R = 13.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 3 \text{ N/mm}^2$ ) încărcată ca în Fig. 10.7, utilizând o secțiune dreptunghiulară știind că raportul dintre înălțimea și lățimea secțiunii este  $h/b=1.5$ .

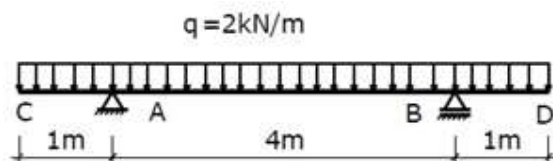


Fig. 10.7.

REZOLVARE

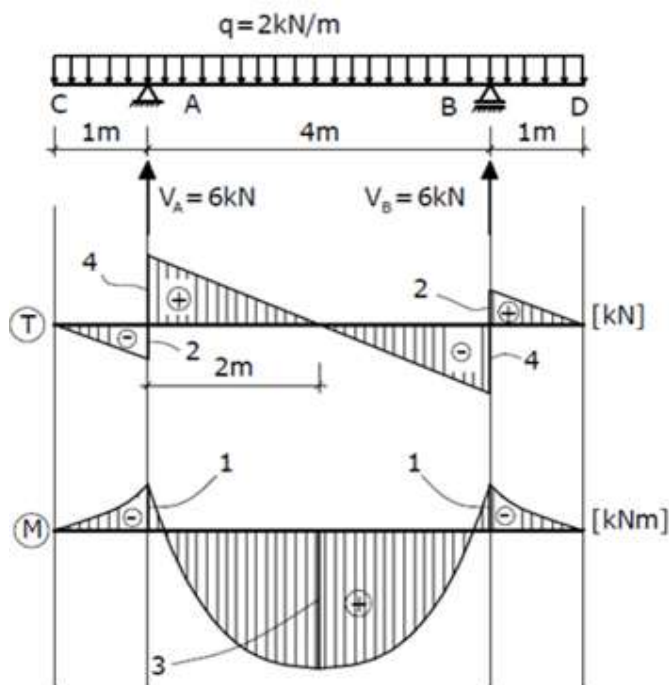


Fig. 10.8

Determinarea reacțiilor.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 2 - V_B \cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow V_B = 6 \text{ kN};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow V_A = 6 \text{ kN}.$$

Verificare:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 6 + 6 - 6 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow \text{Reacțiuni corecte.}$$

Calculul eforturilor secționale.

$$T_C = 0; T_A^{st} = -2 \text{ kN};$$

$$T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = 4 \text{ kN}$$

$$T_B^{st} = T_A^{dr} - 4 \cdot 2 = -4 \text{ kN};$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 2 \text{ kN};$$

$$T_D = 0.$$

Se constată anularea forței tăietoare la mijlocul deschiderii grinzii, secțiune unde momentul încovoietor va fi maxim. De asemenea, se remarcă faptul că diagrama T este antisimetrică.

$$M_C = M_B = 0;$$

$$M_A = -2 \cdot 1 \cdot 0.5 = -1 \text{ kNm} = M_B;$$

În secțiunea în care se anulează forța tăietoare se obține momentul încovoietor maxim. Se remarcă faptul că diagrama de moment încovoietor este simetrică.

$$M_{max} = -2 \cdot 3 \cdot 1.5 + 6 \cdot 2 = 3 \text{ kNm};$$

Dimensionarea secțiunii grinzii (se face pe baza valorii maxime a momentului încovoietor și se verifică la forfecare)

$$|M|_{max} = 3kNm;$$

$$W_{y,nec} \geq \frac{|M|_{max}}{R} = \frac{3 \cdot 10^6}{13.5} = 222.222cm^3;$$

Știind că  $h/b = 1.5$ , se determină modulul de rezistență astfel:

$$W_{y,dreptunghi} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2.25 \cdot b^3}{6} = 222.222cm^3;$$

$$b_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 222.222}{2.25}} \rightarrow b_{nec} \geq 8.4cm;$$

Alegem  $b = 9$  cm și  $h = 14$  cm.

Verificarea condiției de rezistență la încovoiere pentru soluția aleasă:

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} = \frac{3 \cdot 10^6}{294 \cdot 10^3} = 10.2 \frac{N}{mm^2} < 13.5 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

Verificarea condiției de rezistență la forfecare pentru soluția aleasă:

$$\tau_{max} = \frac{|T|_{max} \cdot S_{oy}}{b \cdot I_y} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot (90 \cdot 70 \cdot 35)}{90 \cdot \frac{90 \cdot 140^3}{12}} = 0.476 \frac{N}{mm^2} < 3 \frac{N}{mm^2} \rightarrow \text{Verifica.}$$

Se constată și în acest caz că efortul care impune dimensionarea secțiunii este momentul încovoietor.

**Ex.4.** Pentru grinda metalică ( $R = 235$  N/mm<sup>2</sup>,  $R_f = 140$  N/mm<sup>2</sup>) din Fig. 10.9, se cere:

- a) Trasarea diagramelor de eforturi T și M;
- b) Dimensionarea grinzii în două variante:
  - i. Utilizând un profil laminat IPE;
  - ii. Utilizând două profile laminate UPN.

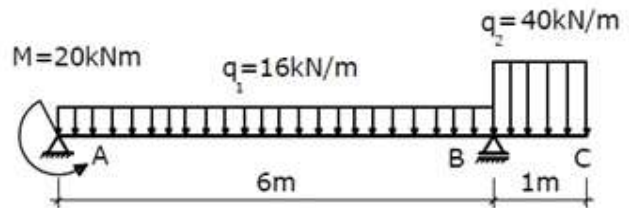


Fig. 10.9.

### REZOLVARE

a) Determinarea reacțiunilor.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 16 \cdot 6 \cdot 3 + 40 \cdot 1 \cdot 6.5 - V_B \cdot 6 - 20 \rightarrow V_B = 88kN;$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 40 \cdot 1 \cdot 0.5 - 20 - 16 \cdot 6 \cdot 3 + V_A \cdot 6 = 0 \rightarrow V_A = 48kN.$$

Verificare (suma proiecțiilor forțelor date și de legătură pe verticală)

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 48 + 88 - 16 \cdot 6 - 1 \cdot 40 = 0 \rightarrow \text{Reacțiuni corecte.}$$

Calculul valorilor eforturilor în secțiunile caracteristice.

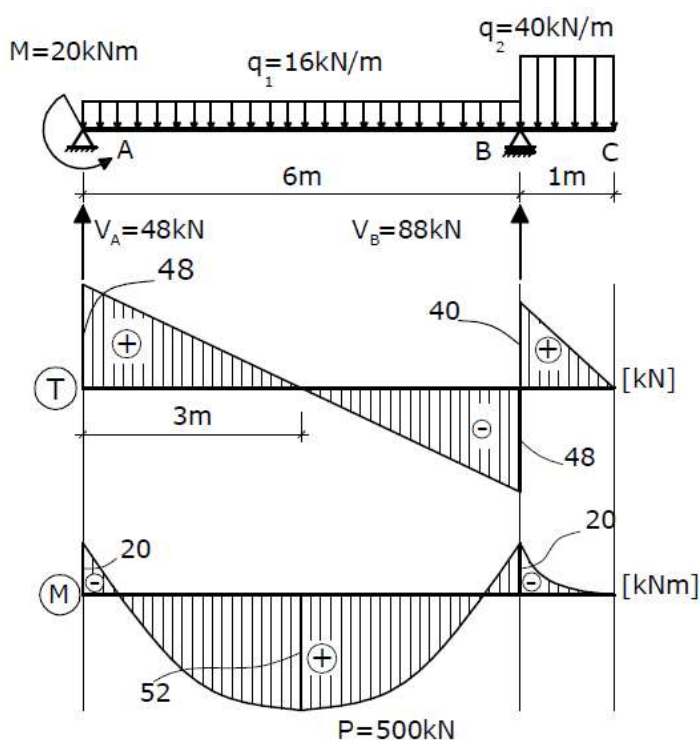


Fig. 10.10.

$$T_A^{dr} = V_A = 48kN;$$

$$T_B^{st} = T_A^{dr} - 16 \cdot 6 = -48kN;$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = 40kN;$$

$$T_C = 0;$$

Se observă anularea forței tăietoare la mijlocul deschiderii grinzii.

$$M_A^{dr} = -20kNm;$$

În punctul în care se anulează forța tăietoare se obține momentul încovoietor maxim.

$$M_{max} = -20 + 48 \cdot 3 - 16 \cdot 3 \cdot 1.5 = 52kNm$$

$$M_B = -20 + 48 \cdot 6 - 16 \cdot 6 \cdot 3 = -20kNm; M_C = 0$$

b) Dimensionare

$$|M|_{max} = 52kNm \rightarrow W_{y,nec} \geq \frac{|M|_{max}}{R} = \frac{52 \cdot 10^6}{235} = 221.28 \cdot 10^3 mm^3 = 221.28 cm^3.$$

- Profil laminat IPE: se alege un profil laminat IPE 220,  $W_y = 252 cm^3$ .
- Două profile laminate UPN:  $W_{y,nec, 1UPN} = 221.28/2 = 110.64 cm^3$ . Se aleg două profile UPN 160,  $W_{y,1UPN} = 116 cm^3$ .

### C. PROBLEME PROPUSE

P1. Pentru grinda metalică ( $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f = 140 N/mm^2$ ) din Fig. 10.11, se cere:

- a) Trasarea diagramelor de eforturi T și M;
- b) Verificarea secțiunii grinzii.

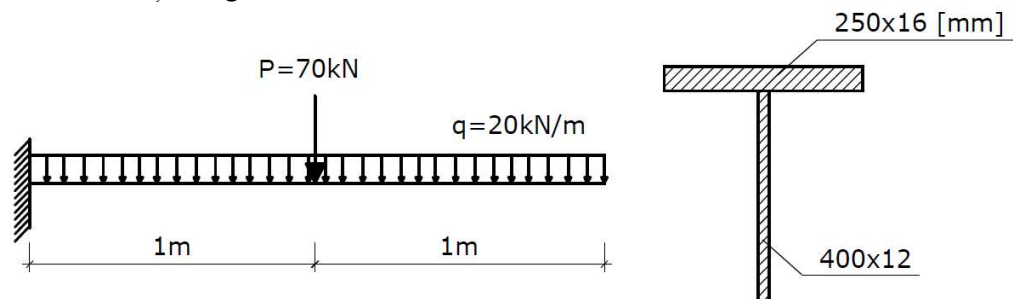


Fig. 10.11.

Rezultate parțiale:  $M_{min} = -110kNm$ ;  $W_y = 538.13 cm^3$ .

- P2.** Pentru grinda metalică ( $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ) din Fig. 10.12, se cere:  
 a) Trasarea diagramelor de eforturi T și M;  
 b) Dimensionarea secțiunii grinzii folosind un profil laminat de tip IPE.

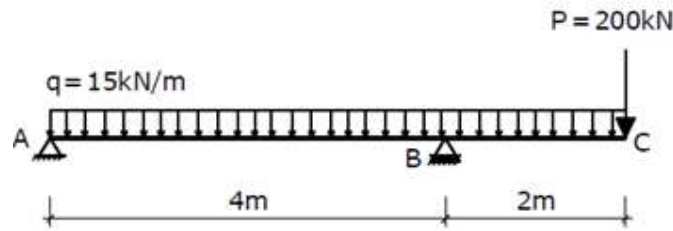


Fig. 10.12.

Rezultate parțiale:  $M_B = -430 \text{ kNm}$ .

- P3.** Să se dimensioneze, utilizând o secțiune dreptunghiulară ( $h/b = 1.5$ ), grinda din lemn ( $R = 13.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 3 \text{ N/mm}^2$ ) încărcată ca în Fig. 10.13.

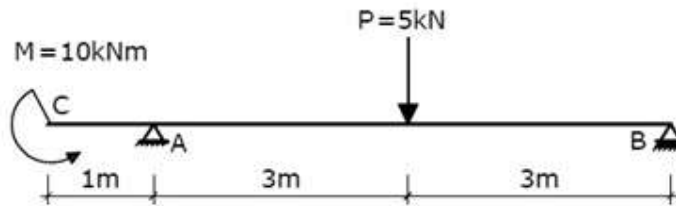


Fig. 10.13.

Rezultate parțiale:  $|M|_{max} = 10 \text{ kNm}$ .

- P4.** Să se dimensioneze, utilizând o secțiune circulară, stâlpul de lemn ( $R = 13.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 3 \text{ N/mm}^2$ ) încărcat ca în Fig. 10.14.

Rezultate parțiale:  $W_{y,nec} = 1666.67 \text{ cm}^3$ .

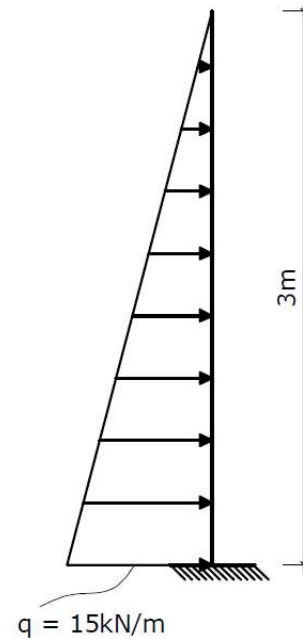


Fig. 10.14.

## LUCRAREA 11

### CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL GRINZILOR ÎNCOVOIATE. DETERMINAREA SARCINII CAPABILE. TRASAREA DIAGRAMELOR DE TENSIUNI

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

##### A.1. Determinarea sarcinii capabile

Suplimentar problemelor de verificare și dimensionare, discutate în lucrarea anterioară, în cazul elementelor supuse la încovoiere simplă plană se poate pune problema determinării încărcărilor maxime ( $P_{cap}$ ,  $q_{cap}$ ,  $M_{0, cap}$ ) pe care le poate suporta elementul de construcție în condiții de siguranță sub aspectul rezistenței.

Etaple ce trebuie parcurse în vederea determinării încărcării capabile sunt următoarele:

- (1) Se trasează diagrama de momente încovoietoare. Aceasta poate fi trasată prin suprapunere de efecte când, prin această metodă, este posibilă identificarea tuturor secțiunilor susceptibile a prezenta valori extreme ale momentului încovoietor (denumite formal secțiuni periculoase). În caz contrar, diagrama de momente încovoietoare trebuie trasată direct, prin calculul prealabil al reacțiunilor;
- (2) Se calculează modulul de rezistență al secțiunii grinzii;
- (3) Se calculează momentul capabil al secțiunii grinzii folosind următoarea relație:

$$M_{cap} = W_y \cdot R; \quad (11.1)$$

- (4) Pentru fiecare secțiune periculoasă 'k' (susceptibilă a prezenta moment încovoietor maxim), se pune următoarea condiție:

$$|M_k| = M_{cap} \quad (11.2)$$

Practic, prin această condiție, se limitează momentul încovoietor din fiecare secțiune periculoasă (care este exprimat în funcție de o încărcare necunoscută) la momentul capabil al secțiunii. Rezolvarea ecuației (11.2) conduce la determinarea sarcinilor capabile din fiecare secțiune periculoasă;

- (5) Din totalitatea soluțiilor determinate în etapa precedentă se alege valoarea **minimă**, aceasta reprezentând încărcarea capabilă a grinzii. Soluțiile negative rezultate în etapa (4) nu convin deoarece acestea nu respectă schema de încărcare dată.

##### A.2. Trasarea diagramelor de tensiuni

În secțiunile elementelor supuse la încovoiere simplă plană apar tensiuni normale ( $\sigma_x$ ) datorate momentului încovoietor și tensiuni tangențiale ( $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$ ) datorate forței tăietoare. În cele ce urmează se prezintă succint particularitățile diagramelor  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$ .

a) Diagrama  $\sigma_x$ :

- prezintă variație liniară pe înălțimea secțiunii și constantă pe lățimea ei (consecințe ale formulei lui Navier);
- are valori extreme (maxime și minime) în punctele maxim depărtate de axa neutră (axa Oy);
- prezintă valoare nulă la nivelul axei neutre;
- secțiunea prezintă două zone, delimitate de axa neutră: una întinsă (tensiuni  $\sigma_x$  pozitive) respectiv una comprimată (tensiuni  $\sigma_x$  negative);

*Obs. În general, semnul „+” în diagramele de tensiuni normale se reprezintă în zona în care fibrele sunt întinse. Astfel, dacă  $M = M_y > 0$  atunci porțiunea de secțiune situată sub axa neutră prezintă tensiuni normale pozitive (+), fibrele corespunzătoare acestei porțiuni fiind întinse, iar dacă  $M = M_y < 0$  atunci zona întinsă corespunde porțiunii de secțiune situate deasupra axei neutre.*

- tensiunile normale, în orice punct curent 'i' (situat la distanța  $z_i$  față de axa neutră) se determină folosind formula lui Navier:

$$\sigma_{x,i} = \frac{M}{I_y} \cdot z_i \quad (11.3)$$

unde:

$M = M_y$  - momentul încovoiator din secțiunea considerată;

$I_y$  - momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa neutră.

În Fig. 11.1. se prezintă distribuția tensiunilor normale  $\sigma_x$  pe înălțimea unei secțiuni dreptunghiulare solicitate de un moment încovoiator pozitiv.

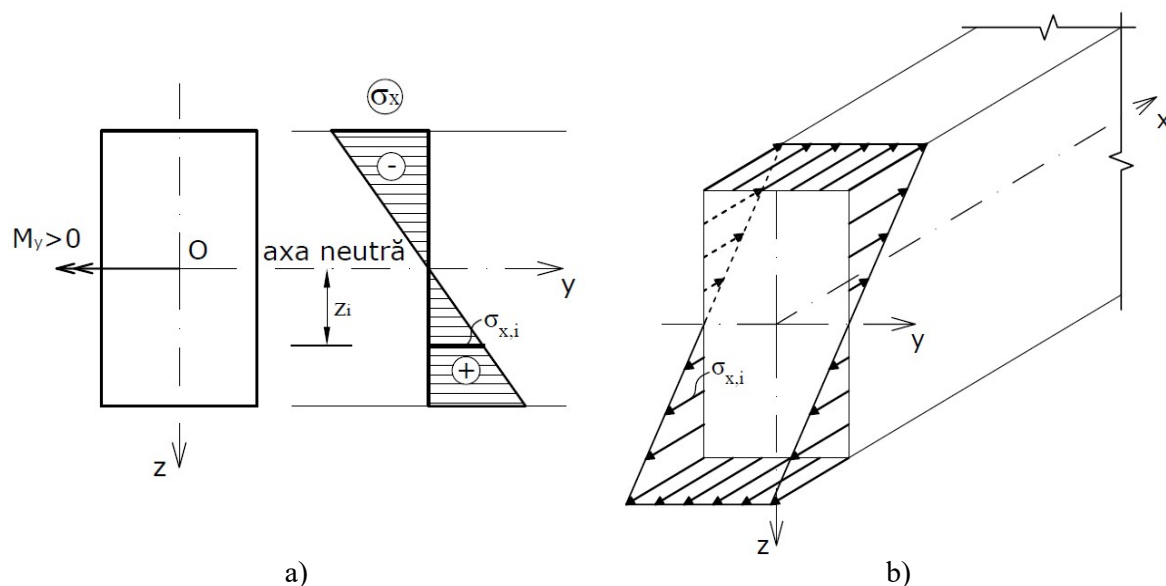


Fig. 11.1. Distribuția tensiunilor normale pe înălțimea unei secțiuni dreptunghiulare:  
a. În planul secțiunii; b. În perspectivă.

b) Diagrama  $\tau_{xz}$ :

- prezintă variație parabolică pe înălțimea secțiunii;
- are valoare extremă la nivelul axei neutre;
- are valoare nulă la extremitățile secțiunii;
- înregistrează salturi în zonele unde secțiunea prezintă discontinuități ale lățimii (de exemplu, la nivelul contactelor dintre inima și tăpile unor profile  $I$  sau  $T$ );
- tensiunile tangențiale  $\tau_{xz}$ , în orice punct curent 'i' (secțiunea având lățimea  $b_i$ ) se determină folosind formula lui Juravski:

$$\tau_{xz,i} = \frac{T \cdot S_{y,\Omega_i}}{b_i \cdot I_y} \quad (11.4)$$

unde:

$T = T_z$  - forța tăietoare din secțiunea considerată;

$S_{y,\Omega_i}$  - momentul static al porțiunii de secțiune care lunecă (porțiunea de arie  $\Omega_i$ , situată fie sub nivelul punctului 'i', fie deasupra acestuia), calculat în raport cu axa neutră  $O_y$ ; aria  $\Omega_i$  se delimitează printr-o paralelă la axa neutră dusă prin punctul curent 'i';

$I_y$  - momentul de inerție al secțiunii.

- semnul și sensul tensiunilor tangențiale  $\tau_{xz}$  sunt aceleași cu cel al forței tăietoare.

În Fig. 11.2. se prezintă variația tensiunilor tangențiale  $\tau_{xz}$  pentru două secțiuni transversale uzuale, solícitate de forțe tăietoare pozitive.

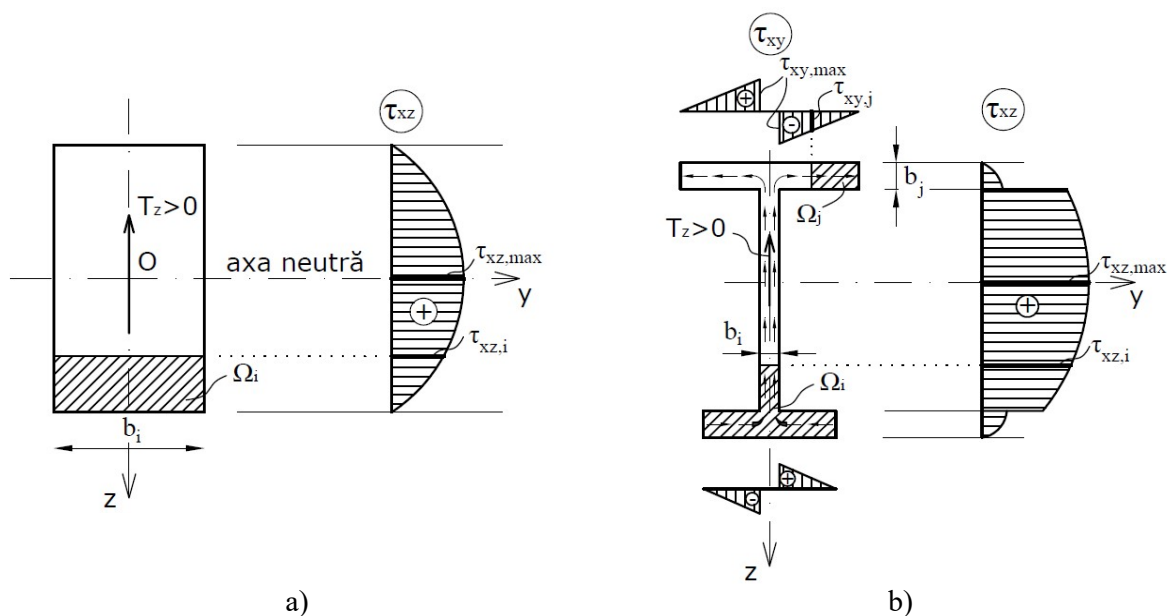


Fig. 11.2. Distribuția tensiunilor tangențiale pe: a. Secțiune dreptunghiulară; b. Secțiune I.

c) Diagrama  $\tau_{xy}$ :

În tălpile secțiunilor de tip I și T (secțiuni cu pereți subțiri), apar tensiuni tangențiale  $\tau_{xy}$  nenule distribuite uniform pe grosimea tălpileor și având direcție paralelă cu axa mediană a

acestora, deci cu axa  $O_y$  a secțiunii (Fig. 11.2). Diagramele  $\tau_{xy}$  prezintă următoarele particularități:

- au variație liniară pe lățimea tălpilor;
- au valori nule la extremitățile tălpilor;
- au valori maxime în dreptul liniilor de intersecție dintre tălpi și inimă;
- tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$ , în orice punct curent 'j' din tălpile secțiunii (de grosime  $b_j$ ) se determină folosind formula lui Juravski:

$$\tau_{xy,j} = \frac{T \cdot S_{y,\Omega_j}}{b_j \cdot I_y} \quad (11.5)$$

unde:

$S_{y,\Omega_j}$  - momentul static al porțiunii de secțiune care lunecă (porțiunea hasurată de arie  $\Omega_j$  din Fig. 11.2.b), calculat în raport cu axa neutră  $O_y$ ;

- sensul tensiunilor tangențiale  $\tau_{xy}$  din tălpi se stabilește știind că fluxul tensiunilor tangențiale de pe întreaga secțiune este continuu și că sensul tensiunilor tangențiale  $\tau_{xz}$  din inimă este cunoscut, fiind aceleași cu cel al forței tăietoare. Astfel, pentru secțiunea I reprezentată în Fig. 11.2.b, solicitată de o forță tăietoare pozitivă, fluxul tensiunilor pornește din cele două aripi ale tălpii inferioare, se unește în inimă și se separă din nou în talpa superioară. Dacă sensul fluxului tensiunilor din tălpi corespunde cu sensul pozitiv al axei  $O_y$  atunci tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  sunt negative. Se deduce deci că pe cele două aripi ale tălpilor tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  au semne diferite.

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru grinda de lemn din figura Fig.11.3.a ( $R = 13.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 3 \text{ N/mm}^2$ ), având secțiunea dreptunghiulară, se cere:

- determinarea încărcării capabile  $P_{cap}$  în două situații distincte de dispunere a secțiunii (Fig.11.3.b, Fig.11.3.c);
- cu  $P_{cap}$  determinat, pentru prima varianta de dispunere a secțiunii, se cere trasarea diagramei de tensiuni  $\sigma_x$  și  $\tau_{xz}$  în secțiunea  $C_{St}$ .

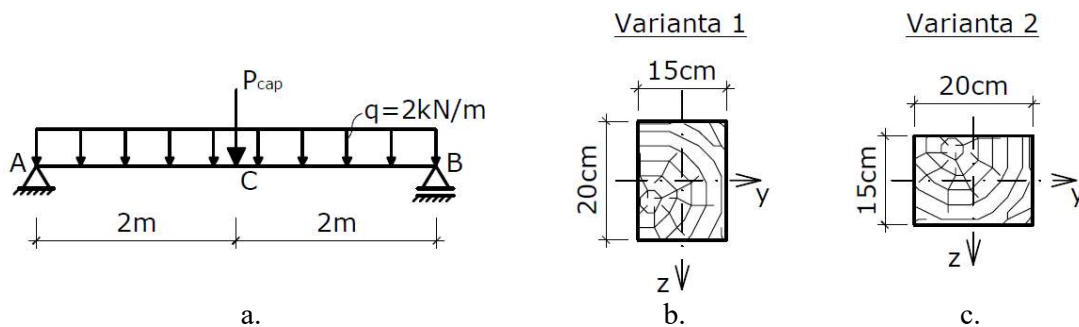


Fig. 11.3.



REZOLVARE:

a) Se trasează diagrama de momente încovoietoare prin suprapunere de efecte.

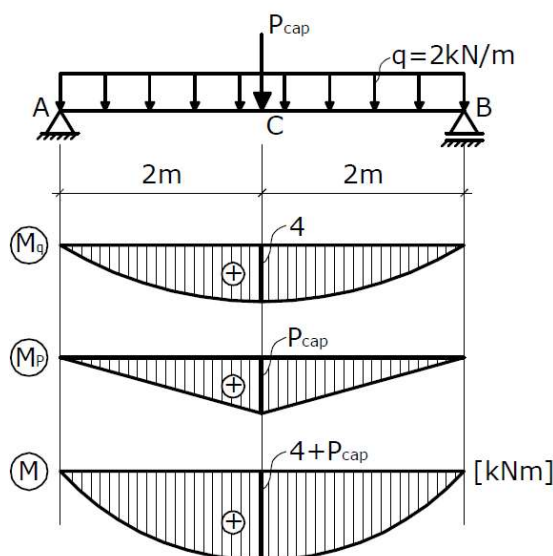


Fig. 11.4.

Se calculează modulul de rezistență al secțiunii pentru ambele variante de dispunere:

$$W_{y,1} = \frac{15 \cdot 20^2}{6} = 1000\text{cm}^3;$$

$$W_{y,2} = \frac{20 \cdot 15^2}{6} = 750\text{cm}^3;$$

Se calculează momentul capabil al secțiunii grinzii pentru ambele situații:

$$\begin{aligned} M_{cap,1} &= W_{y,1} \cdot R = 1000 \cdot 10^3 \cdot 13.5 = \\ &= 13500000\text{Nmm} = 13.5\text{kNm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{cap,2} &= W_{y,2} \cdot R = 750 \cdot 10^3 \cdot 13.5 = \\ &= 10125000\text{Nmm} \\ &= 10.125\text{kNm}. \end{aligned}$$

Din analiza diagramei de momente încovoietoare se constată că momentul maxim poate apărea într-o singură secțiune. Astfel, momentul din secțiunea periculoasă se egalează cu momentul capabil al grinzii și se determină valoarea încărcării capabile pentru ambele situații de dispunere a secțiunii. Astfel, pentru prima variantă de așezare:

$$\begin{aligned} |4 + P| &= M_{cap,1} \rightarrow 4 + P = \pm 13.5 \rightarrow P_{cap,1}^1 = -13.5 - 4 = -17.5\text{kN}; \\ &\rightarrow P_{cap,1}^2 = +13.5 - 4 = +9.5\text{kN}; \end{aligned}$$

Se alege valoarea pozitivă  $\rightarrow P_{cap,1} = 9.5\text{kN}$ .

Pentru cea de-a doua variantă de dispunere:

$$\begin{aligned} |4 + P| &= M_{cap,2} \rightarrow 4 + P = \pm 10.125 \rightarrow P_{cap,2}^1 = -10.125 - 4 = -14.125\text{kN}; \\ &\rightarrow P_{cap,2}^2 = +10.125 - 4 = +6.125\text{kN}; \end{aligned}$$

Se alege valoarea minimă (pozitivă)  $\rightarrow P_{cap,2} = 6.125\text{kN}$ .

b) Cu valoarea  $P = 9.5\text{kN}$  determinată anterior se trasează diagramele de eforturi (Fig. 11.5), după calculul prealabil al reacțiilor. În acest caz, grinda fiind încărcată simetric, reacțiunile verticale sunt egale:

$$V_A = V_B = 8.75\text{kN}$$

În secțiunea  $C_{st}$  eforturile sunt:

$$M_C = 13.5\text{kNm}; T_C^{st} = 4.75\text{kN};$$

Se trasează diagramele de tensiuni (Fig.11.6.) și se calculează valorile extreme:

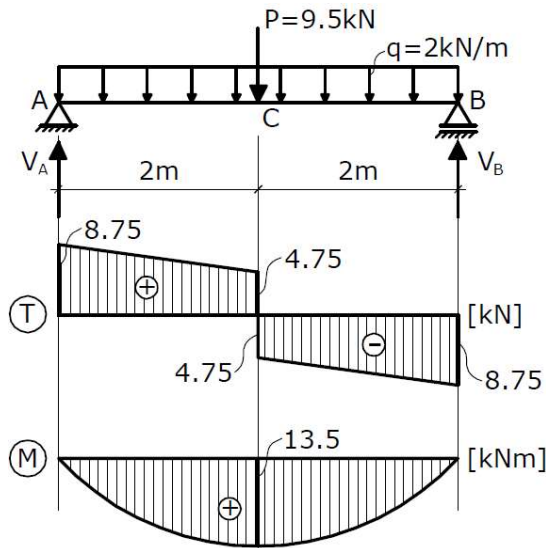


Fig. 11.5.

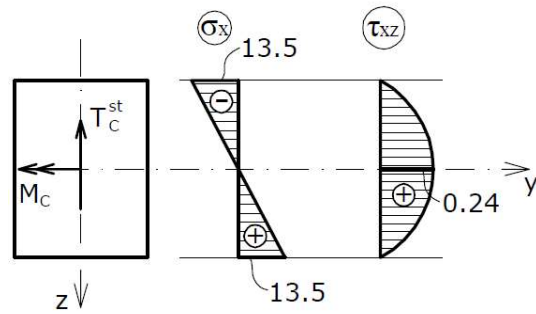


Fig. 11.6.

În cazul secțiunii dreptunghiulare tensiunile extreme pot fi calculate folosind următoarele relații:

$$\sigma_{max/min} = \pm \frac{M}{W_y};$$

$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}.$$

Astfel, pentru cazul curent:

$$\sigma_{max/min} = \pm \frac{13.5 \cdot 10^6}{1000 \cdot 10^3} = \pm 13.5 \frac{N}{mm^2};$$

$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4.75 \cdot 10^3}{15 \cdot 20 \cdot 10^2} = 0.24 \frac{N}{mm^2}.$$

**Ex.2.** Pentru grinda metalică din figura Fig.11.7 ( $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f = 140 N/mm^2$ ), având secțiune alcătuită, se cere :

- determinarea sarcinii capabile  $q_{cap}$ ;
- cu  $q_{cap}$  determinat, se cere trasarea diagramei de tensiuni  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$  în secțiunea  $B_{dr}$ .

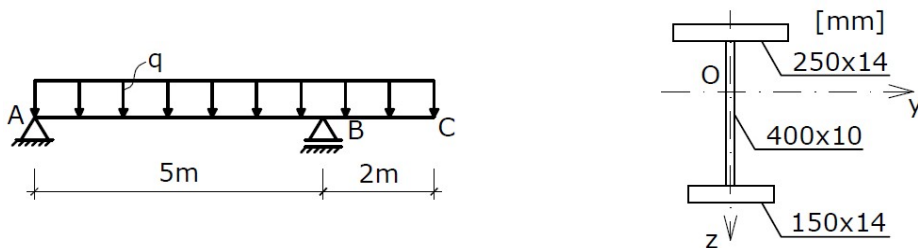


Fig. 11.7

**REZOLVARE:**

- Se calculează reacțiunile, se trasează diagrama de forțe tăietoare, iar apoi se trasează diagrama de momente încovoietoare. S-a ales această variantă deoarece suprapunerea de efecte,

în acest caz, nu indică momentul maxim din deschiderea AB.

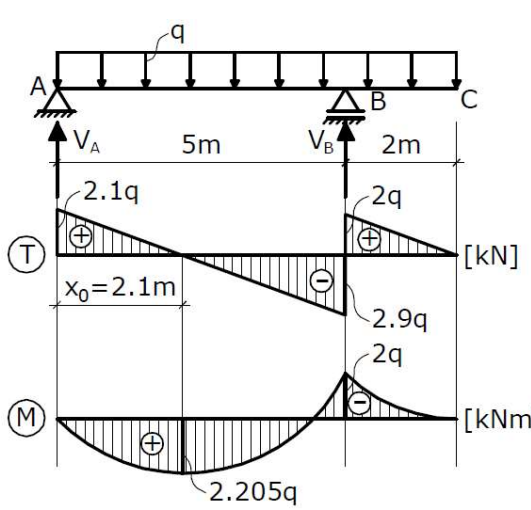


Fig. 11.8

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B = \frac{7 \cdot q \cdot 3.5}{5} = 4.9q;$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A = \frac{7 \cdot q \cdot 1.5}{5} = 2.1q;$$

$$T_A^{dr} = V_A = 2.1q;$$

$$T_B^{st} = 2.1q - 5q = -2.9q;$$

$$T_B^{dr} = -2.9q + V_B = 2q;$$

Forța tăietoare se anulează în secțiunea:

$$x_0 = \frac{T_A^{dr}}{q} = \frac{2.1q}{q} = 2.1m;$$

$$M_{max} = M_{x_0} = V_A \cdot x_0 - q \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} = 2.1 \cdot 2.1q - 0.5 \cdot 2.1^2 q = 2.205q;$$

$$M_B = -2q \cdot \frac{2}{2} = -2q;$$

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii:

$$A = 25 \cdot 1.4 + 40 \cdot 1 + 15 \cdot 1.4 = 96cm^2;$$

$$z_G = \frac{25 \cdot 1.4 \cdot 0.7 + 40 \cdot 1 \cdot 21.4 + 15 \cdot 1.4 \cdot 42.1}{96} = 18.38cm;$$

$$I_y = \frac{25 \cdot 1.4^3}{12} + 25 \cdot 1.4 \cdot 17.68^2 + \frac{1 \cdot 40^3}{12} + 1 \cdot 40 \cdot 3.02^2 + \frac{15 \cdot 1.4^3}{12} + 15 \cdot 1.4 \cdot 23.72^2 = 28463.086cm^4$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{28463.086}{24.42} = 1165.564cm^3$$

Se calculează momentul capabil al secțiunii grinzii:

$$M_{cap} = W_y \cdot R = 1165.564 \cdot 10^3 \cdot 235 = 273.907 \cdot 10^6 Nmm = 273.907kNm$$

Din analiza diagramei de momente încovoietoare se constată că momentul maxim este în secțiunea  $x_0$ . Acesta se egalează cu momentul capabil al grinzii și se determină valoarea sarcinii capabile:

$$|2.205q| = M_{cap} \rightarrow 2.205q = \pm 273.907 \rightarrow q_{cap}^1 = \frac{-273.907}{2.205} = -124.22kN/m;$$

$$\rightarrow q_{cap}^2 = \frac{273.907}{2.205} = 124.22kN/m;$$

Se alege valoarea minimă (pozitivă)  $\rightarrow q_{cap} = 124.22kN/m$ ;

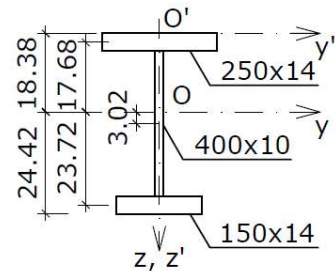


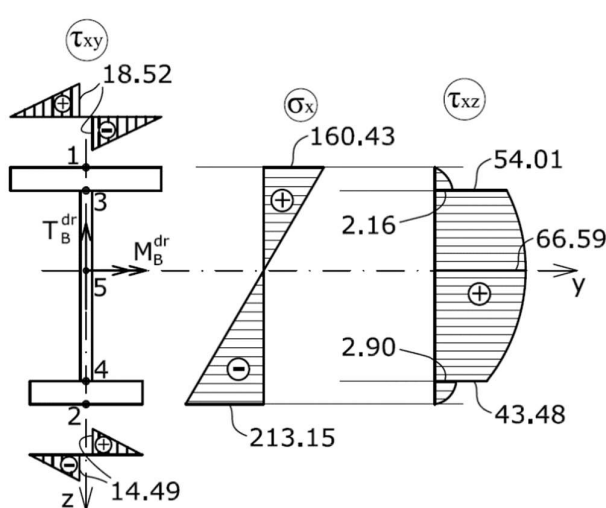
Fig. 11.9

b) Cu valoarea  $q$  determinată anterior se evaluează eforturile în secțiunea  $B_{dr}$  (pe fața din dreapta):

$$M_B = -2 \cdot 124.22 = 248.44 \text{ kNm};$$

$$T_B^{dr} = 2 \cdot 124.22 = 248.44 \text{ kN};$$

Se trasează diagramele de tensiuni și se calculează valorile în punctele caracteristice ale secțiunii:



$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} = \sigma_{max} &= \frac{M_B}{I_y} \cdot z_1 = \\ &= \frac{248.44 \cdot 10^6}{28463.086 \cdot 10^4} \cdot 18.38 \cdot 10 = \\ &= 160.43 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \\ \sigma_{x,2} = |\sigma_{min}| &= \frac{M_B}{I_y} \cdot z_2 = \\ &= \frac{248.44 \cdot 10^6}{28463.086 \cdot 10^4} \cdot 24.42 \cdot 10 = \\ &= 213.15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \end{aligned}$$

Fig. 11.10

$$\tau_{xz,3}^{talpa} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega_3}}{b_{3,talpa} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 618.8 \cdot 10^3}{250 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 2.16 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$S_{y,\Omega_3} = 25 \cdot 1.4 \cdot 17.68 = 618.8 \text{ cm}^3 \text{ – momentul static al tăpii superioare};$$

$$\tau_{xz,3}^{inima} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega_3}}{b_{3,inima} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 618.8 \cdot 10^3}{10 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 54.01 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$\tau_{xz,4}^{talpa} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega_4}}{b_{4,talpa} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 498.12 \cdot 10^3}{150 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 2.90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$S_{y,\Omega_4} = 15 \cdot 1.4 \cdot 23.72 = 498.12 \text{ cm}^3 \text{ – momentul static al tăpii inferioare};$$

$$\tau_{xz,4}^{inima} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega_4}}{b_{4,inima} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 498.12 \cdot 10^3}{10 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 43.48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$\tau_{xz,5} = \tau_{max} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega_5}}{b_5 \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 762.96 \cdot 10^3}{10 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 66.59 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$S_{y,\Omega_5} = 25 \cdot 1.4 \cdot 17.68 + 16.98 \cdot 1 \cdot 16.98/2 = 762.96 \text{ cm}^3 \text{ – momentul static al porțiunii de secțiune situate deasupra axei neutre};$$

$$S_{y,\Omega_{t\_sup}} = 12 \cdot 1.4 \cdot 17.68 = 297.02 \text{ cm}^3 \text{ – momentul static al unei aripi a tăpii superioare};$$

$$\tau_{xy,max}^{t\_sup} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega t\_sup}}{h_{talpa} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 297.02 \cdot 10^3}{14 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 18.52 \frac{N}{mm^2};$$

$S_{y,\Omega t\_inf} = 7 \cdot 1.4 \cdot 23.72 = 232.46 cm^3$  – momentul static al unei aripi a tălpii inferioare;

$$\tau_{xy,max}^{t\_inf} = \frac{T_B^{dr} \cdot S_{y,\Omega t\_inf}}{h_{talpa} \cdot I_y} = \frac{248.44 \cdot 10^3 \cdot 232.46 \cdot 10^3}{14 \cdot 28463.086 \cdot 10^4} = 14.49 \frac{N}{mm^2};$$

**Ex.3.** Pentru grinda metalică din figura Fig.11.11 ( $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f = 140 N/mm^2$ ), având secțiune alcătuită, se cere :

- determinarea valorii maxime a momentului încovoietor concentrat  $M_{0,cap}$ ;
- cu  $M_{0,cap}$  determinat, se cere trasarea diagramelor de tensiuni  $\sigma_x$  și  $\tau_{xz}$  în secțiunea  $D_{st}$ .

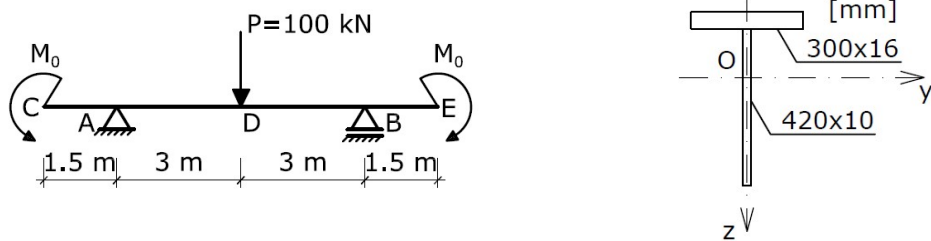


Fig.11.11

REZOLVARE:

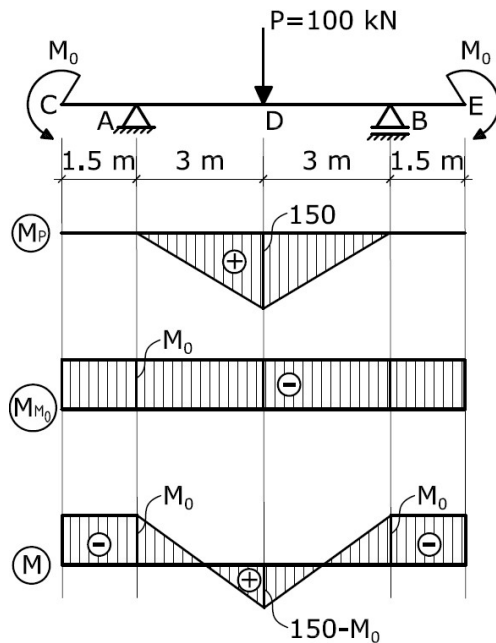


Fig.11.12

a) Se trasează diagrama de momente încovoietoare, prin suprapunere de efecte și se calculează apoi caracteristicile geometrice ale secțiunii:

$$A = 30 \cdot 1.6 + 42 \cdot 1 = 90 cm^2;$$

$$z_G = \frac{30 \cdot 1.6 \cdot 0.8 + 42 \cdot 1 \cdot 22.6}{90} = 10.97 cm;$$

$$I_y = \frac{30 \cdot 1.6^3}{12} + 30 \cdot 1.6 \cdot 10.17^2 + \frac{1 \cdot 42^3}{12} + 1 \cdot 42 \cdot 11.63^2 = 16829.617 cm^4;$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{16829.617}{32.63} = 515.77 cm^3.$$

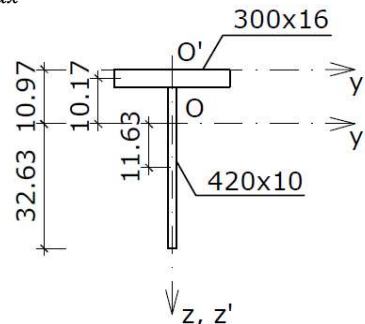


Fig.11.13

Se calculează momentul capabil al secțiunii grinzii:

$$M_{cap} = W_y \cdot R = 515.77 \cdot 10^3 \cdot 235 = 121.20 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 121.20 \text{ kNm}$$

Din analiza diagramei de momente încovoietoare se constată că există două valori posibile ale momentului maxim (la jumătatea deschiderii respectiv pe lungimea celor două console). În consecință, fiecare dintre aceste valori se egalează cu momentul capabil al grinzii:

- în secțiunea D:

$$\begin{aligned} |120 - M_0| = M_{cap} &\rightarrow 150 - M_0 = \pm 121.20 \rightarrow M_{0,cap}^1 = 150 - 121.20 = 28.80 \text{ kNm}; \\ &\rightarrow M_{0,cap}^2 = 150 + 121.20 = 271.20 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

- în secțiunea A:

$$\begin{aligned} |M_0| = M_{cap} &\rightarrow M_0 = \pm 121.20 \rightarrow M_{0,cap}^3 = +121.20 \text{ kNm}; \\ &\rightarrow M_{0,cap}^4 = -121.20 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

Se alege valoarea minimă (pozitivă)  $\rightarrow M_{0,cap} = 28.80 \text{ kNm}$ .

b) Cu valoarea  $M_0$  determinată anterior se trasează diagramele de eforturi după calculul prealabil al reacțiunilor. În acest caz, grinda fiind încărcată simetric, reacțiunile verticale sunt egale:

$$V_A = V_B = 50 \text{ kN}$$

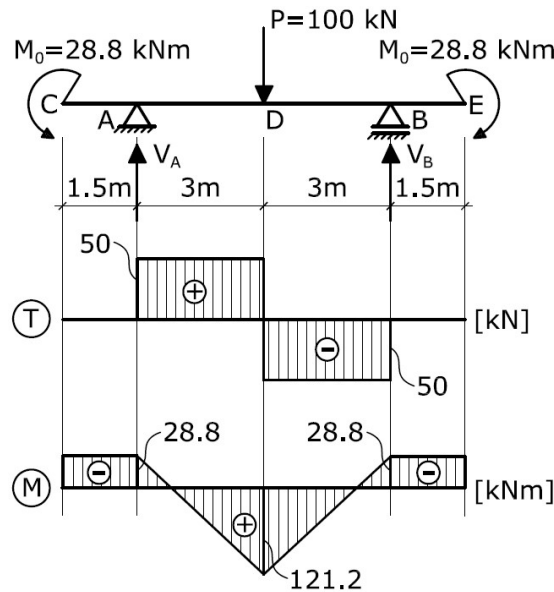


Fig. 11.14

În secțiunea  $D_{st}$  eforturile sunt:

$$M_D = 121.20 \text{ kNm};$$

$$T_D^{st} = 50 \text{ kN};$$

Se trasează diagramele de tensiuni și se calculează valorile în punctele caracteristice ale secțiunii:

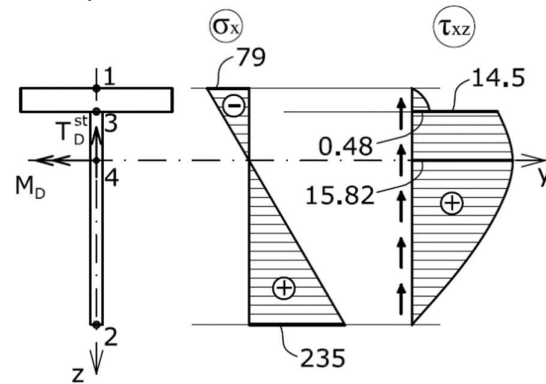


Fig. 11.15

$$\sigma_{x,1} = |\sigma_{min}| = \frac{M_D}{I_y} \cdot z_1 = \frac{121.20 \cdot 10^6}{16829.617 \cdot 10^4} \cdot 10.97 \cdot 10 = 79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$\sigma_{x,2} = \sigma_{max} = \frac{M_D}{I_y} \cdot z_2 = \frac{M_D}{W_y} = \frac{121.20 \cdot 10^6}{16829.617 \cdot 10^4} \cdot 32.63 \cdot 10 = 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = R;$$

$$\tau_{xz,3}^{talpa} = \frac{T_D^{st} \cdot S_{y,\Omega 3}}{b_{3,talpa} \cdot I_y} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 488.16 \cdot 10^3}{300 \cdot 16829.617 \cdot 10^4} = 0.48 \frac{N}{mm^2};$$

$$S_{y,\Omega 3} = 30 \cdot 1.6 \cdot 10.17 = 488.16 cm^3 - \text{momentul static al tălpii};$$

$$\tau_{xz,3}^{inima} = \frac{T_D^{st} \cdot S_{y,\Omega 3}}{b_{3,inima} \cdot I_y} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 488.16 \cdot 10^3}{10 \cdot 16829.617 \cdot 10^4} = 14.5 \frac{N}{mm^2};$$

$$\tau_{xz,4} = \tau_{max} = \frac{T_D^{st} \cdot S_{y,\Omega 4}}{b_4 \cdot I_y} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 532.36 \cdot 10^3}{10 \cdot 16829.617 \cdot 10^4} = 15.82 \frac{N}{mm^2};$$

$$S_{y,\Omega 4} = 32.63 \cdot 1 \cdot 32.63/2 = 532.36 cm^3 - \text{momentul static al porțiunii de secțiune situate sub axa neutră.}$$

**Ex.4.** Se dă grinda metalică din figura Fig.11.16 ( $R = 235 N/mm^2$ ,  $R_f = 140 N/mm^2$ ), având secțiunea variabilă în două trepte. Secțiunea din zona centrală se obține prin adăugarea câte unei platbande exterioare la fiecare din cele două tălpi. Se cere :

- determinarea sarcinii capabile  $q_{cap}$ ;
- cu  $q_{cap}$  determinat, se cere să se determine lungimea  $l_2$  pe care trebuie să se dispună secțiunea 2, astfel încât tensiunea extremă din oricare secțiune să fie mai mică ca  $R$ .

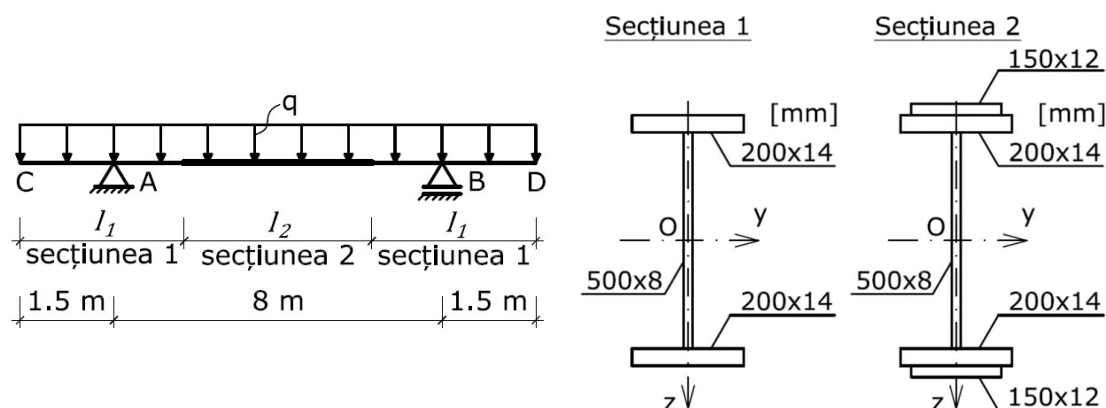


Fig.11.16

**REZOLVARE:**

a) Se trasează diagrama de momente încovoietoare (Fig. 11.17), prin suprapunere de efecte, diagrama  $M_1$  fiind produsă de sarcina distribuită de pe cele două console, iar diagrama  $M_2$  de încărcarea de pe deschiderea grinzii.

Secțiunile fiind dublu simetrice, centrul de greutate se află la intersecția axelor de simetrie, rămânând astfel de determinat doar momentele de inerție și modulii de rezistență.

Secțiunea 1:

$$I_{y1} = 2 \cdot \left( \frac{20 \cdot 1.4^3}{12} + 20 \cdot 1.4 \cdot \left( \frac{1.4}{2} + \frac{50}{2} \right)^2 \right) + \frac{0.8 \cdot 50^3}{12} = 45329.92 cm^4;$$

$$W_{y1} = \frac{I_{y1}}{z_{1max}} = \frac{45329.92}{26.4} = 1717.04 cm^3;$$

Secțiunea 2:

$$I_{y2} = I_{y1} + 2 \cdot \left( \frac{15 \cdot 1.2^3}{12} + 15 \cdot 1.2 \cdot \left( \frac{1.2}{2} + 1.4 + \frac{50}{2} \right)^2 \right) = 71578.24 \text{ cm}^4;$$

$$W_{y2} = \frac{I_{y2}}{z_{2max}} = \frac{71578.24}{27.6} = 2593.41 \text{ cm}^3;$$

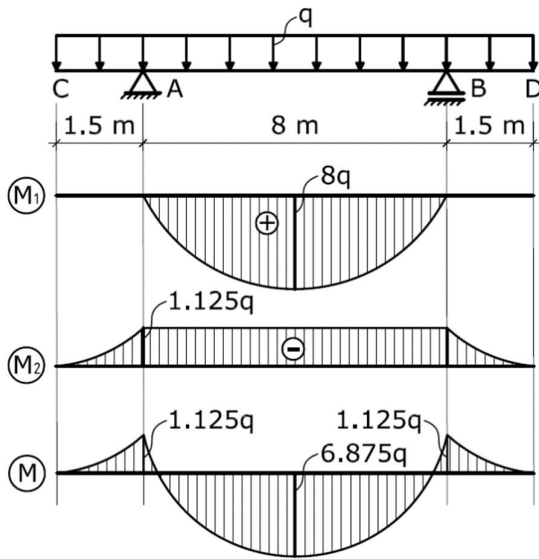


Fig.11.17

Se calculează apoi momentele capabile ale celor două secțiuni:

$$M_{cap1} = W_{y1} \cdot R = 1717.04 \cdot 10^3 \cdot 235 = 403.50 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 403.50 \text{ kNm};$$

$$M_{ca} = W_{y2} \cdot R = 2593.41 \cdot 10^3 \cdot 235 = 609.45 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 609.45 \text{ kNm};$$

Analizând diagrama de momente încovoietoare, se constată că momentul maxim este la mijlocul deschiderii și, în consecință, valoarea sarcinii capabile  $q_{cap}$  se va determina din condiția:

$$|6.875q| = M_{cap2} \rightarrow 6.875q = \pm 609.45 \rightarrow$$

$$\rightarrow q_{cap}^1 = \frac{-609.45}{6.875} = -88.64 \text{ kN/m};$$

$$\rightarrow q_{cap}^2 = \frac{609.45}{6.875} = 88.64 \text{ kN/m};$$

Se alege valoarea minimă (pozitivă)  $\rightarrow q_{cap} = 88.64 \text{ kN/m}$ ;

Pentru verificare, se calculează momentul încovoietor din secțiunile A și B (folosind  $q_{cap}$  calculat anterior) și se compară cu valoarea momentului capabil aferent secțiunii 1:

$$M_A = M_B = 1.25 \cdot 88.64 = 110.8 \text{ kNm} < M_{cap1};$$

Se poate concluziona că s-a determinat corect valoarea sarcinii capabile.

b) Cu valoarea  $q_{cap}$  determinată anterior se calculează reacțiunile și se evaluează momentul încovoietor într-o secțiune curentă de pe deschidere, situată la distanța  $x$  față de punctul A:

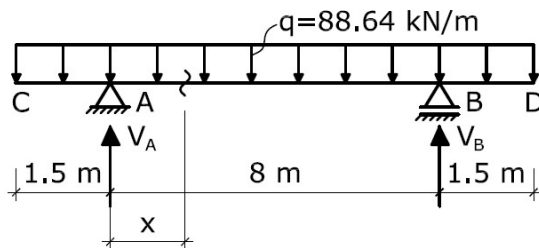


Fig. 11.18

$$V_A = V_B = 5.5 \cdot q = 487.52 \text{ kN};$$

$$M_x = V_A \cdot x - q \cdot (1.5 + x) \cdot \frac{1.5 + x}{2} = -44.32 \cdot x^2 + 354.56 \cdot x - 99.72;$$

Se trasează diagramele de tensiuni și se calculează valorile în punctele caracteristice ale secțiunii:

Pentru determinarea secțiunii  $x$  în care se face trecerea de la secțiunea 1 la secțiunea 2 se impune condiția ca momentul încovoietor să fie cel mult egal cu momentul capabil al secțiunii 1:



$$M_x \leq M_{cap1};$$

Practic, se determină limitele până la care varianta 1 de secțiune verifică condiția de rezistență. La limita, condiția precedentă devine:

$$-44.32 \cdot x^2 + 354.56 \cdot x - 99.72 = 403.50;$$

sau, mai departe:

$$44.32 \cdot x^2 - 354.56 \cdot x + 503.22 = 0;$$

Rezolvând ecuația de gradul 2, se obțin următoarele valori pentru  $x$ :

$$x_1 = 1.845m \text{ și } x_2 = 6.155m;$$

Folosind soluțiile de mai sus, lungimea  $l_2$  pe care trebuie să se dispună secțiunea 2 este:

$$l_2 = x_2 - x_1 = 4.31m.$$

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru grinda metalică din Fig.11.15 ( $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ), având secțiunea alcătuită, se cere:

- determinarea sarcinii capabile  $q_{cap}$ ;
- cu  $q_{cap}$  determinat, se cere trasarea diagramelor de tensiuni  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$  în secțiunea  $B_{dr}$ .

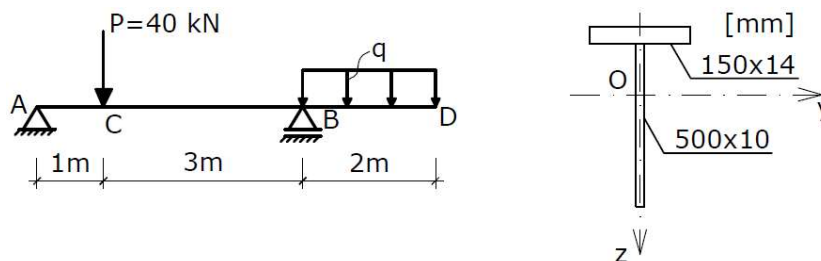


Fig. 11.15

Rezultate parțiale:  $W_y = 619.26 \text{ cm}^3$ ;  $M_B = -145.52 \text{ kNm}$ .

**P2.** Pentru grinda de lemn din Fig.11.16 ( $R = 13.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 3 \text{ N/mm}^2$ ), având secțiune dreptunghiulară (12x18cm), se cere:

- determinarea încărcării capabile  $P_{cap}$ ;
- cu  $P_{cap}$  determinat, se cere trasarea diagramelor de tensiuni  $\sigma_x$  și  $\tau_{xz}$  în secțiunea  $B_{dr}$ .

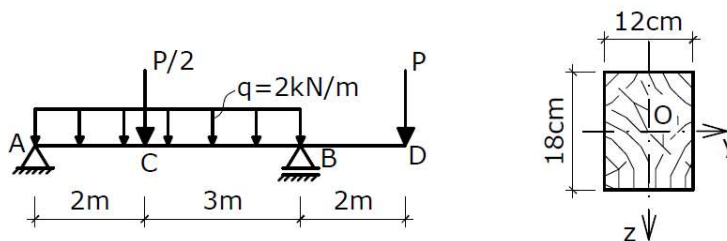


Fig. 11.16

Rezultate parțiale:  $M_B = -8.748 \text{ kNm}$ .

**P3.** Pentru grinda metalică din Fig.11.17 ( $R = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ), având secțiune alcătuită, se cere :

- determinarea valorii maxime a momentului încovoietor concentrat  $M_{0,cap}$ ;
- cu  $M_{0,cap}$  determinat, să se traseze diagramele de tensiuni  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$  în secțiunea  $A_{St}$ .

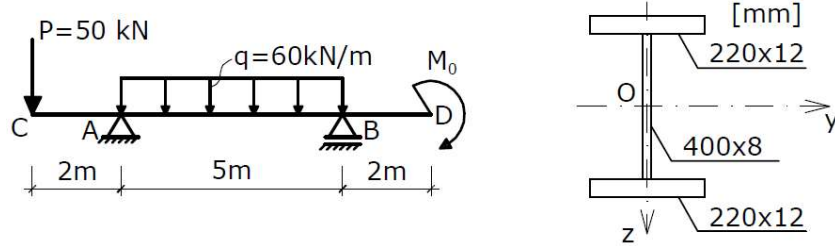


Fig. 11.17

Rezultate parțiale:  $W_y = 1258.45 \text{ cm}^3$ ;  $M_{0,cap} = 295.73 \text{ kNm}$ .

## LUCRAREA 12

## CALCULUL DEPLASĂRILOR GRINZILOR SUPUSE LA ÎNCOVOIERE PLANĂ. METODA GRINZII CONJUGATE/FICTIVE (MOHR)

## A. NOȚIUNI TEORETICE

## A.1. Introducere

Calculul practic al grinzilor supuse la încovoiere plană presupune, pe lângă verificarea condițiilor de rezistență, și satisfacerea condițiilor de rigiditate, prin limitarea deplasărilor și a deformațiilor produse de încărcările exterioare aplicate. În cazul particular al grinzilor curente, deplasările datorate forțelor tăietoare sunt mici și, în consecință, în cele ce urmează se vor determina doar deplasările produse de momentele încovoietoare.

Ca rezultat al încovoierii, axa barei, dreaptă înainte de deformare, se transformă într-o curbă plană după deformare (Fig. 12.1). Astfel, orice punct de pe axa barei (de ex. K) prezintă două deplasări distincte:

- **deplasare** verticală, normală la axa inițială a barei, notată în continuare cu  $w$  și denumită **săgeată**;
- **rotire** exprimată prin unghiul format de tangenta la axa deformată și dreapta orizontală, după deformare, prin punctul considerat ( $K'$ ). Acceptând ipoteza lui Bernoulli, această rotire corespunde cu unghiul de rotire al secțiunii transversale în jurul axei neutre. **Rotirea** va fi notată în continuare cu  $\varphi$  și, având în vedere semnificația geometrică a derivatei de ordinul I a unei funcții, poate fi exprimată în funcție de săgeata  $w$  astfel:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (12.1)$$

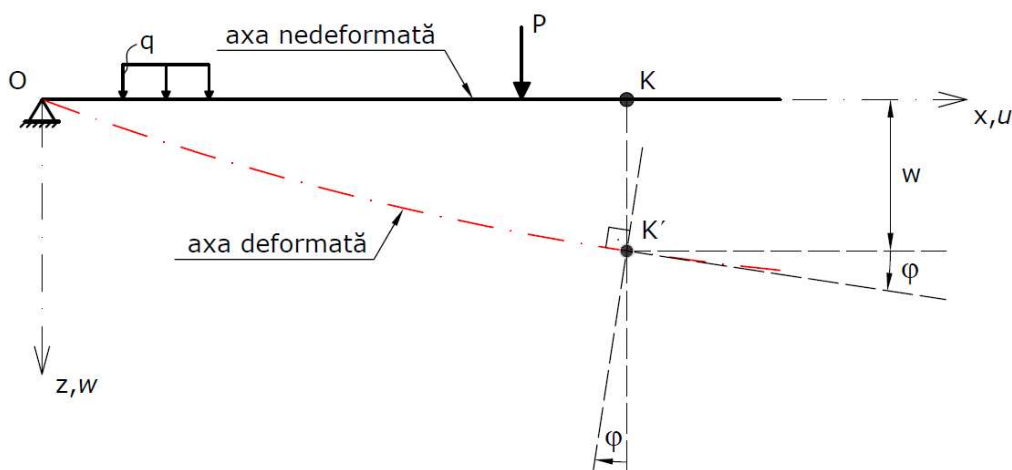


Fig. 12.1. Deplasările grinzilor încovoiate.

Obs. 1. Acceptând ipoteza micilor deformații, deplasările orizontale  $u$  ale punctelor de pe axa barei sunt mici și se pot astfel neglija;

Obs. 2. Săgeata  $w$  se consideră pozitivă când se produce în sensul axei  $z$  (descendentă);

Obs. 3. În sistemul de axe adoptat (cel din Fig. 12.1), rotirea  $\varphi$  se consideră pozitivă când se produce în sens orar.

## A.2. Forme ale ecuației diferențiale a axei deformată

În baza ipotezelor mai sus amintite se poate afirma că deplasările generalizate ( $w$  și  $\varphi$ ) ale oricărui punct al barei încovoiate sunt complet determinate de soluția ecuației  $w = w(x)$  a axei deformată.

În ipoteza micilor deformații, ecuația diferențială de ordinul doi a axei deformată se reduce la următoarea relație:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (12.2)$$

unde:

$w(x)$  - expresia săgeții axei deformată în lungul barei;

$M_y(x)$  - expresia analitică a momentului încovoietor;

$E$  - reprezintă modulul de elasticitate longitudinal al materialului;

$I_y$  - momentul de inerție axial principal al secțiunii transversale calculat în raport cu axa neutră

$O_y$ .

Obs. Produsul  $EI_y$  reprezintă rigiditatea la încovoiere a secțiunii transversale și este considerată constantă în lungul barei.

Determinarea deplasărilor grinzilor încovoiate pornind de la ecuația (12.2) se poate face aplicând una dintre următoarele metode:

- integrarea directă a ecuației diferențiale de ordinul doi și impunerea de condiții la limită pentru determinarea constantelor de integrare. Necesită cunoașterea prealabilă a legii de variație a momentului încovoietor în lungul barei;
- metoda grinzii conjugate/fictive (Mohr).

Derivând de două ori expresia (12.2) și ținând cont de relația diferențială dintre momentul încovoietor  $M_y$  și încărcarea transversală  $q$ , se obține ecuația diferențială de ordinul patru a axei deformată:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI_y} \quad (12.3)$$

Determinarea deplasărilor grinzilor încovoiate pornind de la ecuația (12.3) se poate face aplicând una dintre următoarele metode:

- integrarea directă a ecuației diferențiale de ordinul patru și impunerea de condiții la limită pentru determinarea constantelor de integrare. Necesită cunoașterea prealabilă a legii de variație a încărcării transversale în lungul barei, pe fiecare interval;

- metoda parametrilor inițiali.

În cele ce urmează, se prezintă metoda grinzii conjugate pentru determinarea deplasărilor punctuale (săgeți și rotiri) ale grinzilor supuse la încovoiere simplă plană.

### A.3. Metoda grinzii conjugate/fictive (Mohr)

Această metodă este utilă atunci când se dorește determinarea deplasărilor punctuale în anumite secțiuni caracteristice ale barei. Mai mult, această metodă devine convenabilă în situațiile în care numărul intervalelor de variație ale momentului încovoiator este mare, situații în care aplicarea celorlalte metode, mai sus amintite, devine complicată și anevoioasă. Metoda a fost dezvoltată de profesorul *Otto Mohr* și are la bază analogia dintre relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări, respectiv între deplasări și  $M_y/EI_y$  așa cum se prezintă în Tab. 12.1.

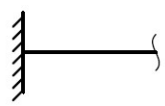
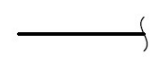
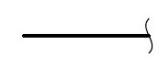
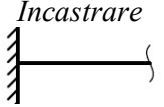
Tab. 12.1.

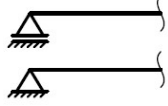
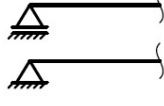

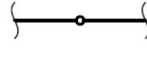
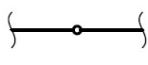

Relații diferențiale între eforturi și încărcări	Relații diferențiale între deplasări și $M_y/EI_y$
$\frac{d^2M_y(x)}{dx^2} = -q(x)$	$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$
$\frac{dM_y(x)}{dx} = T_z(x)$	$\frac{dw(x)}{dx} = \varphi(x)$

Corespondența prezentată în Tab. 12.1 indică faptul că determinarea deplasărilor generalizate  $w$  și  $\varphi$  se reduce la calculul eforturilor  $M$  și  $T$  produse de încărcări transversale elastice  $q_f = M_y(x)/EI_y$ .

Aplicarea acestei metode presupune transformarea *grinzii reale* într-o *grindă fictivă (conjugată)* care să asigure analogia între condițiile impuse în deplasări (pe grinda reală) respectiv cele impuse în eforturi (pe grinda fictivă). Mai exact, reazemele grinzii reale se transformă în reazeme fictive în baza corespondenței prezentate în Tab. 12.2.

Tab. 12.2. Corespondența dintre grinda reală și cea conjugată.

Grinda reală		Grinda conjugată (fictivă)	
Tip reazem real	Condiții existente	Condiții necesare	Tip reazem fictiv
<p>Încastrare</p> 	$\begin{cases} w = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_f = 0 \\ T_f = 0 \end{cases}$	<p>Capăt liber</p> 
<p>Capăt liber</p> 	$\begin{cases} w \neq 0 \\ \varphi \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_f \neq 0 \\ T_f \neq 0 \end{cases}$	<p>Încastrare</p> 

<p>Reazem simplu sau articulație marginale</p> 	$\begin{cases} w = 0 \\ \varphi \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_f = 0 \\ T_f \neq 0 \end{cases}$	<p>Reazem simplu sau articulație marginale</p> 
<p>Reazem simplu intermediar</p> 	$\begin{cases} w = 0 \\ \varphi_{st} = \varphi_{dr} \end{cases}$	$\begin{cases} M_f = 0 \\ T_{fst} = T_{fdr} \end{cases}$	<p>Articulație intermediară nesprijinită</p> 
<p>Articulație intermediară nesprijinită</p> 	$\begin{cases} w \neq 0 \\ w_{st} = w_{dr} \\ \varphi_{st} \neq \varphi_{dr} \end{cases}$	$\begin{cases} M_f \neq 0 \\ M_{fst} = M_{fdr} \\ T_{fst} \neq T_{fdr} \end{cases}$	<p>Reazem simplu intermediar</p> 

Etape de calcul pentru determinare deplasărilor generalizate ( $w$  și  $\varphi$ ) ale grinzilor cu rigiditate la încovoiere ( $EI_y$ ) constantă:

- (1) Se trasează diagrama de momente încovoietoare  $M$  pe **grinda reală**. Dacă există mai multe încărcări simple, atunci se trasează, pentru fiecare dintre acestea, diagrama  $M$  corespunzătoare (se utilizează astfel principiul suprapunerii efectelor);
- (2) Se construiește **grinda conjugată (fictivă)**, prin înlocuirea reazemelor reale cu cele fictive conform Tab. 12.2;

Obs.: Unei grinzii reale static determinate îi corespunde o grindă fictivă static determinată;

- (3) Asupra **grinzii fictive** se aplică o încărcare fictivă ( $q_f$ ) a cărei variație este echivalentă cu diagrama  $M$  determinată în etapa (1); de fapt,  $q_f = M_y(x)/EI_y$ , dar dacă rigiditatea la încovoiere ( $EI_y$ ) este constantă atunci se poate considera  $q_f = M_y(x)$  urmând ca rigiditatea la încovoiere să se introducă în etapa (5);

Obs. Semnul momentelor încovoietoare de pe **grinda reală** trebuie să fie identic cu semnul încărcărilor aplicate pe **grinda fictivă**. Încărcările pozitive sunt considerate a fi cele ce au sensul axei  $Oz$ , în timp ce momentele încovoietoare pozitive sunt reprezentate sub linia de referință a diagramei. Astfel, momentele încovoietoare pozitive de pe grinda reală trebuie rabătute pentru a deveni încărcări fictive pozitive aplicate grinzii fictive. Analog se procedează și în cazul momentelor încovoietoare negative.

- (4) Pe grinda conjugată astfel încărcată, se determină eforturile fictive ( $M_f$  și/sau  $T_f$ ) în secțiunile în care se dorește determinarea deplasărilor generalizate ( $w$  și/sau  $\varphi$ ).
- (5) Se determină deplasările grinzii reale în secțiunile cerute folosind următoarele relații:

$$w = \frac{M_f}{EI_y}; \quad \varphi = \frac{T_f}{EI_y}. \quad (12.4)$$

În cazul existenței mai multor încărcări simple, etapele (3) și (4) se repetă pentru fiecare diagramă simplă de moment încovoietor (având aria și poziția centrului de greutate indicate în Tab. 12.) trasată în etape (1), iar deplasările finale se determină utilizând următoarele relații:

$$w = \frac{M_f^{(1)} + M_f^{(2)} + \dots + M_f^{(n)}}{EI_y}; \quad \varphi = \frac{T_f^{(1)} + T_f^{(2)} + \dots + T_f^{(n)}}{EI_y} \quad (12.5)$$

unde

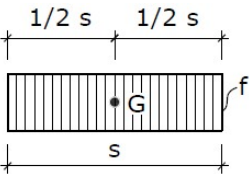
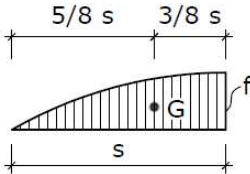
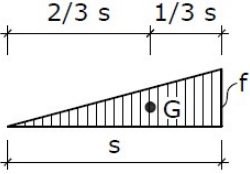
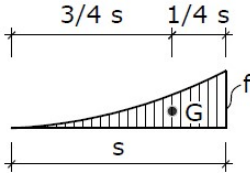
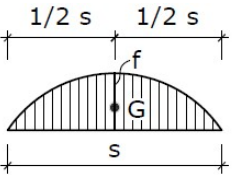
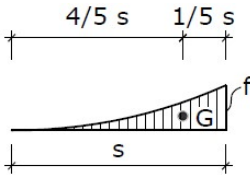
$M_f^{(i)}$  și  $T_f^{(i)}$  - eforturi fictive în secțiunea de calcul, datorate încărcării simple (i).

Obs. 1. Încărcările fictive sunt măsurate în kNm;

Obs. 2. Forțele tăietoare fictive se măsoară în kNm<sup>2</sup>;

Obs. 3. Momentele încovoietoare fictive se măsoară în kNm<sup>3</sup>.

Tab. 12.3. Ariile și pozițiile centrelor de greutate ale diagramelor simple de momente M.

Diagrama M	Aria diagramei	Diagrama M	Aria diagramei
<p><i>Constantă</i></p> 	$A = f \cdot s$	<p><i>Parabolă de gradul II</i></p> 	$A = \frac{2}{3} \cdot f \cdot s$
<p><i>Liniară</i></p> 	$A = \frac{1}{2} \cdot f \cdot s$	<p><i>Parabolă de gradul II</i></p> 	$A = \frac{1}{3} \cdot f \cdot s$
<p><i>Parabolă de gradul II</i></p> 	$A = \frac{2}{3} \cdot f \cdot s$	<p><i>Parabolă de gradul III</i></p> 	$A = \frac{1}{4} \cdot f \cdot s$

## B. EXEMPLE DE CALCUL

**Ex.1.** Pentru grinda metalică de secțiune IPE 200 ( $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ) reprezentată în Fig. 12.2, se cere calculul săgeții în punctul B și al rotirilor în punctele A și B.

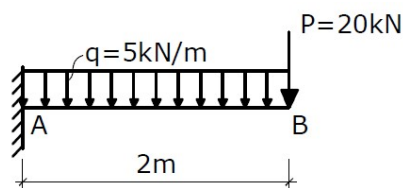


Fig. 12.2.

REZOLVARE:

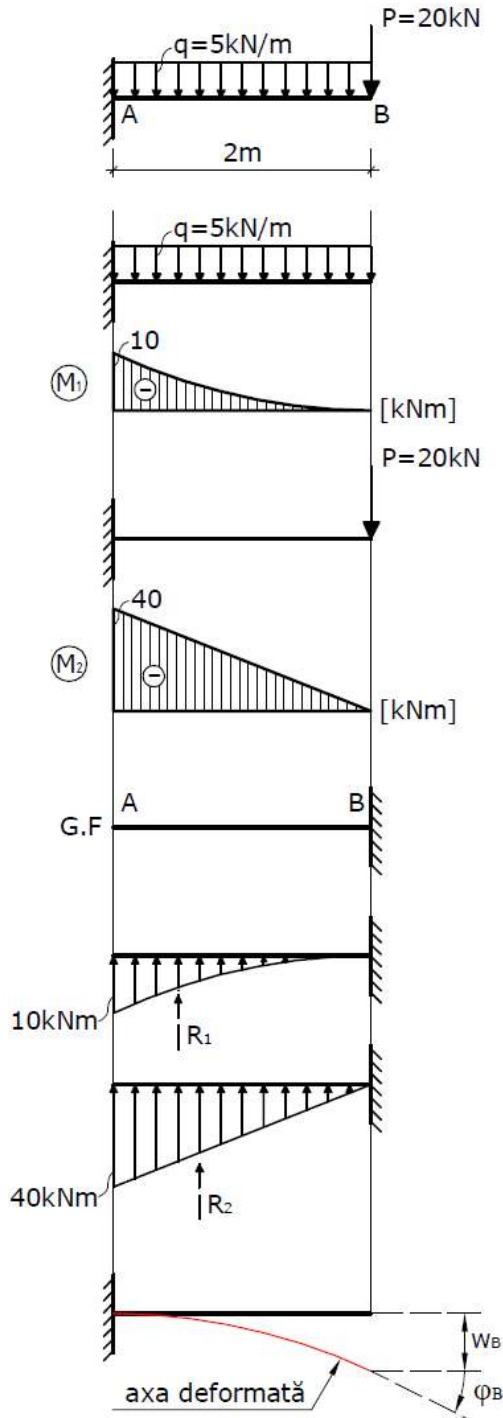


Fig. 12.3.

Dintr-un catalog de profile laminate (vezi Anexa 3) se extrage valoarea momentului de inerție al profilului IPE200:

$$I_y = 1943 \text{ cm}^4;$$

Pe grinda reală, se trasează diagramele de momente încovoietoare  $M_1$  și  $M_2$  din sarcina uniform distribuită  $q$  respectiv din forța concentrată  $P$ .

Se construiește apoi grinda fictivă G.F.

Aceasta se încarcă succesiv cu încărcările obținute prin rabaterea diagramei de momente încovoietoare trasate anterior.

Se calculează apoi eforturi fictive în punctele în care se cere calcularea deplasărilor:

$$T_{f,A} = T_{f,A}^{(1)} + T_{f,A}^{(2)} = 0;$$

$$T_{f,B} = T_{f,B}^{(1)} + T_{f,B}^{(2)} = R_1 + R_2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 46.67 \text{ kNm}^2;$$

$$M_{f,B} = M_{f,B}^{(1)} + M_{f,B}^{(2)} = R_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + R_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 =$$

$$= 63.33 \text{ kNm}^3;$$

Se calculează deplasările cerute:

$$w_B = \frac{M_{f,B}}{EI_y} = \frac{63.33 \cdot 10^{12}}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4} =$$

$$= 15.52 \text{ mm};$$

$$\varphi_A = \frac{T_{f,A}}{EI_y} = \frac{0}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4} = 0;$$

$$\varphi_B = \frac{T_{f,B}}{EI_y} = \frac{46.67 \cdot 10^9}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4} =$$

$$= 0.0114 \text{ rad} = 0.0114 \cdot 180^\circ / \pi = 0^\circ 39'.$$

**Ex.2.** Pentru grinda din lemn ( $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$ ) de secțiune dreptunghiulară ( $15 \times 20 \text{ cm}$ ) reprezentată în Fig. 12.4 se cere determinarea săgeții maxime (în punctul C) și a rotirii secțiunii din reazemul B.

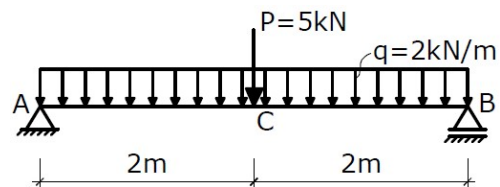


Fig. 12.4.



REZOLVARE:

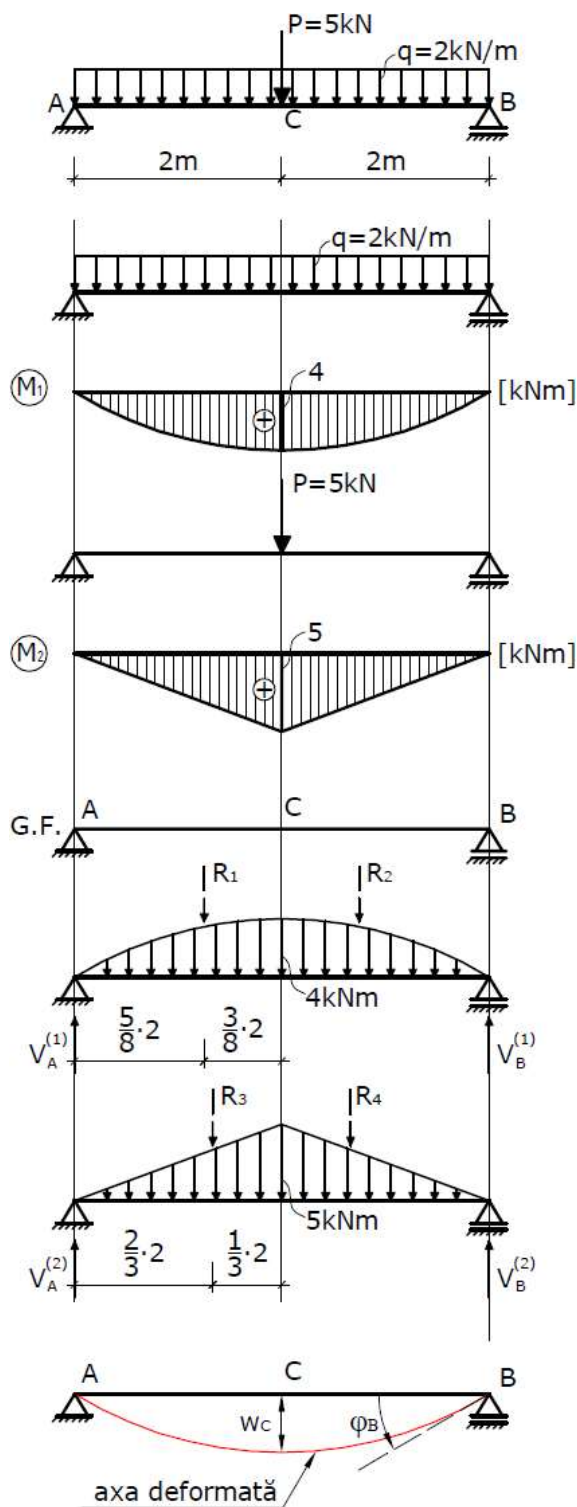


Fig. 12.5.

$$\phi_B = \frac{T_{f,B}^{(1)} + T_{f,B}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(-5.33 - 5) \cdot 10^9}{10^4 \cdot 10000 \cdot 10^4} = -0.0103\text{ rad} = -0^\circ 35'$$

Se calculează momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare în raport cu axa  $O_y$ :

$$I_y = \frac{15 \cdot 20^3}{12} = 10000\text{ cm}^4;$$

Pe grinda reală, se trasează diagramele de momente încovoietoare  $M_1$  și  $M_2$  din sarcina uniform distribuită  $q$  respectiv din forța concentrată  $P$ .

Se stabilește apoi grinda fictivă G.F.

Aceasta se încarcă cu diagrama  $M_1$  rabătută și se determină eforturile fictive în punctele în care se cere calculul deplasărilor, după ce în prealabil se calculează reacțiunile fictive:

$$V_A^{(1)} = V_B^{(1)} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 5.33\text{ kNm}^2$$

$$T_{f,B}^{(1)} = -V_B^{(1)} = -5.33\text{ kNm}^2$$

$$M_{f,C}^{(1)} = V_A^{(1)} \cdot 2 - R_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 =$$

$$= 5.33 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 =$$

$$= 6.67\text{ kNm}^3$$

Se încarcă G.F. cu diagrama  $M_2$  rabătută și se determină eforturi fictive în punctele în care se cere calcularea deplasărilor, după ce în prealabil se calculează reacțiunile fictive:

$$V_A^{(2)} = V_B^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5\text{ kNm}^2$$

$$T_{f,B}^{(2)} = -V_B^{(2)} = -5\text{ kNm}^2$$

$$M_{f,C}^{(2)} = V_A^{(2)} \cdot 2 - R_3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 =$$

$$= 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 =$$

$$= 6.67\text{ kNm}^3$$

Se calculează deplasările cerute:

$$w_C = \frac{M_{f,C}^{(1)} + M_{f,C}^{(2)}}{EI_y} = \frac{6.67 \cdot 2 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 10000 \cdot 10^4} =$$

$$= 13.34\text{ mm}$$

Ex.3. Pentru grinda metalică reprezentată în Fig. 12.6 ( $E = 2.1 \cdot 10^5 N/mm^2$ ), realizată din țevă dreptunghiulară, se cere calculul săgeților punctelor C, D și a rotirii secțiunii din D.

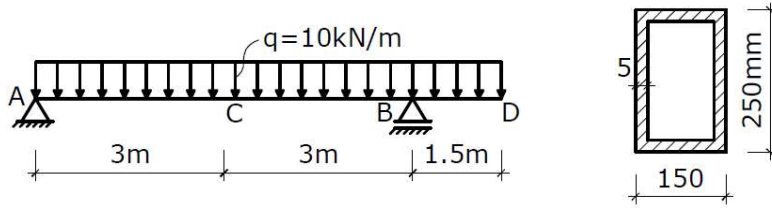
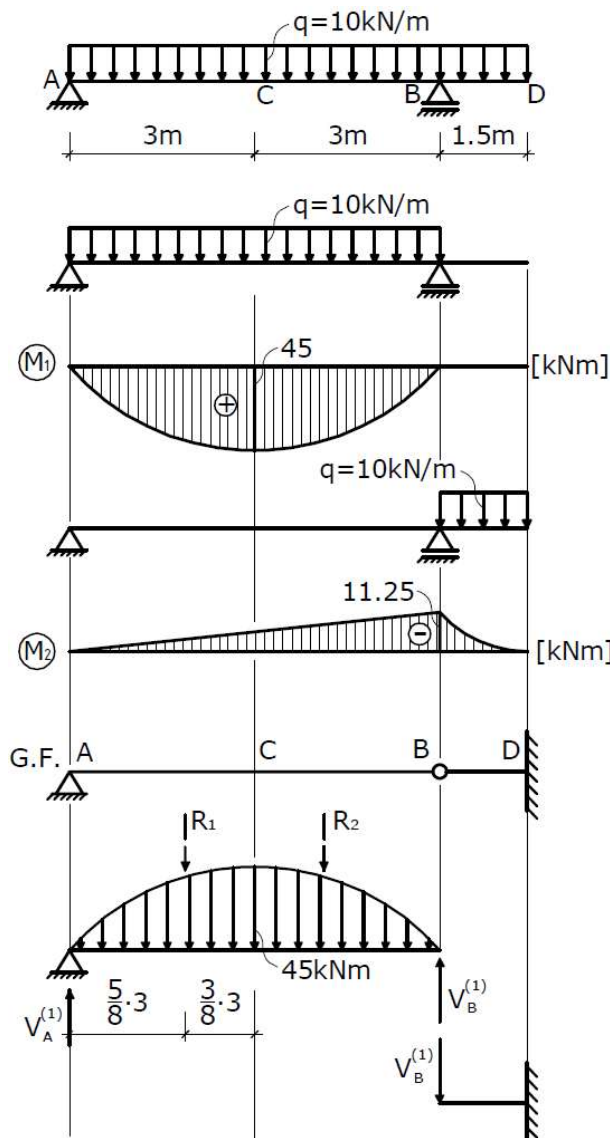


Fig. 12.6.

REZOLVARE:



Se calculează momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa  $O_y$ :

$$I_y = \frac{15 \cdot 25^3}{12} - \frac{14 \cdot 24^3}{12} = 3403.25 cm^4;$$

Pe grinda reală, se trasează diagramele de momente încovoietoare  $M_1$  și  $M_2$  din sarcina uniform distribuită  $q$  aplicată pe deschiderea AB respectiv pe consola BD.

Se stabilește apoi grinda fictivă G.F. Se observă că aceasta prezintă articulație interioară (se tratează ca o grindă Gerber – Lucrarea 4).

Se încarcă G.F. cu diagrama  $M_1$  rabățută și se determină eforturile fictive în punctele în care se cere calculul deplasărilor, după ce în prealabil se calculează reacțiunile fictive:

$$V_A^{(1)} = V_B^{(1)} = \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 3 = 90 kNm^2;$$

$$T_{f,D}^{(1)} = -V_B^{(1)} = -90 kNm^2;$$

$$\begin{aligned} M_{f,C}^{(1)} &= V_A^{(1)} \cdot 3 - R_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 = \\ &= 90 \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 = \\ &= 168.75 kNm^3; \end{aligned}$$

$$M_{f,D}^{(1)} = -V_B^{(1)} \cdot 1.5 = -135 kNm^3.$$

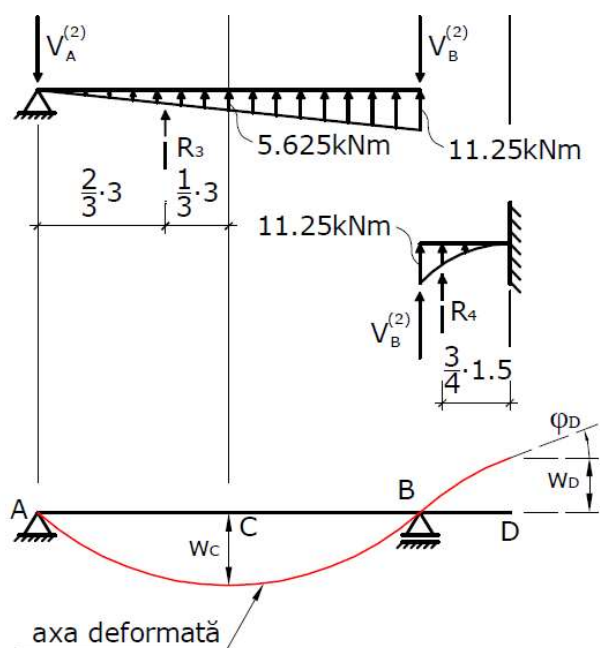


Fig. 12.7.

Se încarcă G.F. cu diagrama  $M_2$  rabătută și se determină eforturi fictive în punctele în care se cere calculul deplasărilor, după determinarea prealabilă a reacțiunilor fictive:

$$V_A^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{11.25 \cdot 6}{2} = 11.25 \text{ kNm}^2;$$

$$V_B^{(2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{11.25 \cdot 6}{2} = 22.5 \text{ kNm}^2;$$

$$T_{f,D}^{(2)} = V_B^{(2)} + R_4 = 22.5 + \frac{1}{3} \cdot 11.25 \cdot 1.5 = 28.125 \text{ kNm}^2;$$

$$M_{f,C}^{(2)} = -V_A^{(2)} \cdot 3 + R_3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = -11.25 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{11.25}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = -25.3125 \text{ kNm}^3;$$

$$M_{f,D}^{(2)} = V_B^{(2)} \cdot 1.5 + R_4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1.5 = 22.5 \cdot 1.5 + \frac{1}{3} \cdot 11.25 \cdot 1.5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1.5 = 40.078 \text{ kNm}^3.$$

Se calculează deplasările cerute:

$$w_C = \frac{M_{f,C}^{(1)} + M_{f,C}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(168.75 - 25.3125) \cdot 10^{12}}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3403.25 \cdot 10^4} = 20.07 \text{ mm};$$

$$w_D = \frac{M_{f,D}^{(1)} + M_{f,D}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(-135 + 40.078) \cdot 10^{12}}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3403.25 \cdot 10^4} = -13.28 \text{ mm};$$

$$\varphi_D = \frac{T_{f,D}^{(1)} + T_{f,D}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(-90 + 28.125) \cdot 10^9}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3403.25 \cdot 10^4} = -0.0087 \text{ rad} = -0^\circ 30'.$$

**Ex.4.** Pentru grinda din lemn ( $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$ ) de secțiune dreptunghiulară, reprezentată în Fig. 12.8, se cer:

- determinarea încărcării  $P$  (în funcție de  $q$  și  $l$ ) astfel încât săgeata capătului liber al consolei  $w_D$  să fie nulă;
- pentru  $q = 3 \text{ kN/m}$  și  $l = 4.8 \text{ m}$  să se dimensioneze secțiunea grinzii din condiția de rigiditate  $w_C = 20 \text{ mm}$ , știind că raportul  $h/b = 2$ .

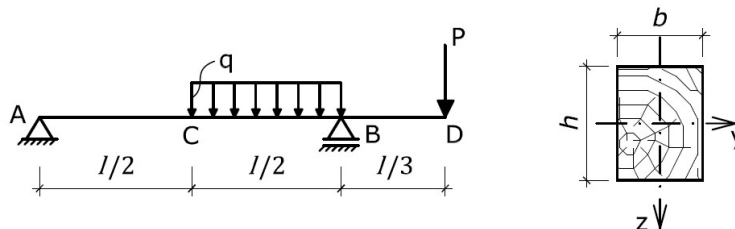
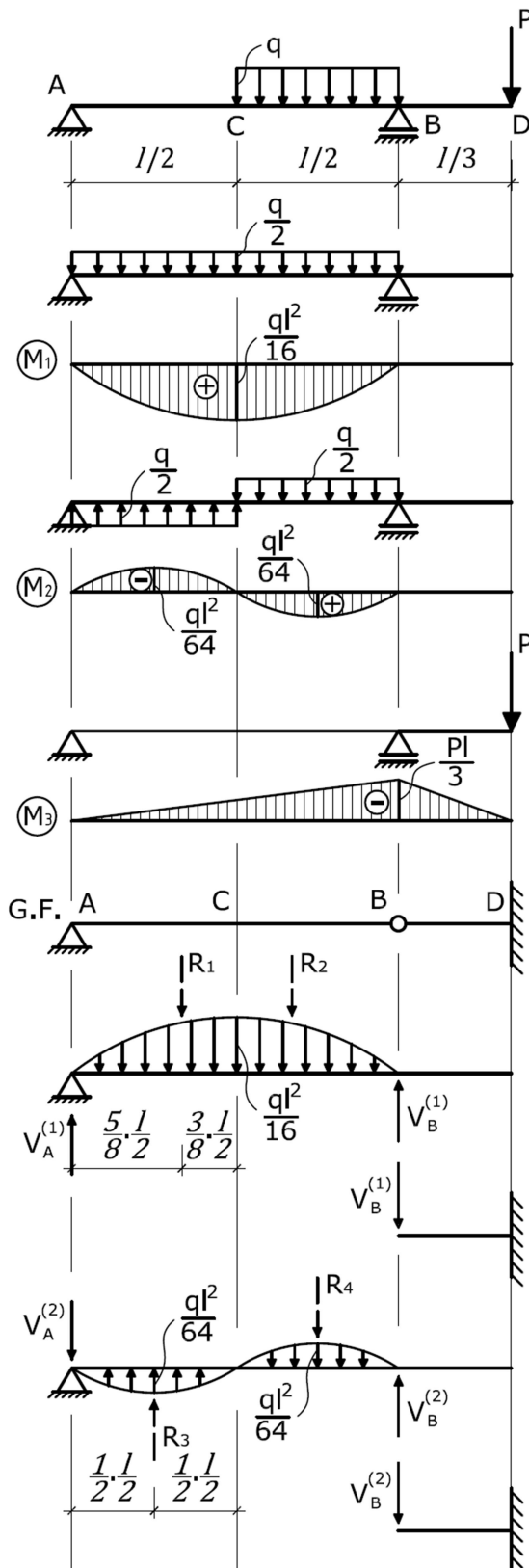


Fig. 12.8.

REZOLVARE:



a) Pentru aplicarea convenabilă a metodei grinzii fictive, încărcarea distribuită de pe deschidere, se compune din două cazuri de încărcare distincte, așa cum se poate observa în figura alăturată, rezultând astfel diagramele de momente încovoietoare \$M\_1\$ și \$M\_2\$. Suplimentar, se trasează și diagrama \$M\_3\$ datorată forței \$P\$.

Se stabilește apoi grinda fictivă G.F. și se încarcă succesiv cu diagramele \$M\_1, M\_2\$ și \$M\_3\$ rabătute. În vederea determinării săgeții capătului liber al consolei, trebuie să se evalueze momentul încovoietor fictiv în punctul D, din fiecare caz de încărcare considerat.

Astfel, pentru primul caz de încărcare:

$$V_A^{(1)} = V_B^{(1)} = R_1 = R_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l^3}{48} \text{ kNm}^2;$$

$$M_{f,D}^{(1)} = -V_B^{(1)} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{q \cdot l^4}{144} \text{ kNm}^3;$$

Pentru cel de-al doilea caz de încărcare, reacțiunile nu pot fi determinate direct și, în consecință, se exprimă o ecuație de echilibru de momente încovoietoare în raport cu punctul A:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\rightarrow \\ &\rightarrow R_3 \cdot \frac{l}{4} - R_4 \cdot \frac{3 \cdot l}{4} + V_B^{(2)} \cdot l = 0; \\ &\rightarrow \frac{q \cdot l^3}{192} \cdot \frac{l}{4} - \frac{q \cdot l^3}{192} \cdot \frac{3 \cdot l}{4} + V_B^{(2)} \cdot l = 0; \\ &\rightarrow V_B^{(2)} = V_A^{(2)} = \frac{q \cdot l^3}{384} \text{ kNm}^2; \end{aligned}$$

Se evaluează apoi \$M\_{f,D}^{(2)}\$:

$$M_{f,D}^{(2)} = -V_B^{(2)} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{q \cdot l^4}{1152} \text{ kNm}^3;$$

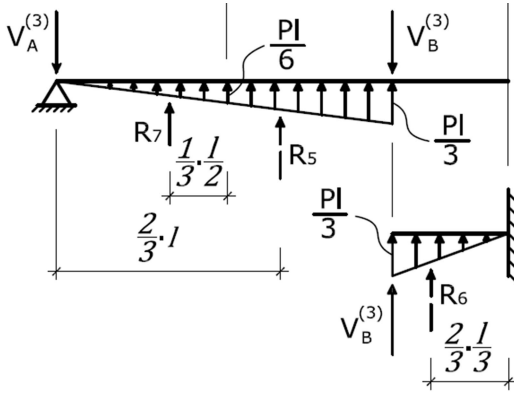


Fig. 12.9.

Pentru ultimul caz de încărcare avem:

$$V_A^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot R_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot l = \frac{P \cdot l^2}{18};$$

$$V_B^{(3)} = \frac{2}{3} \cdot R_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot l = \frac{P \cdot l^2}{9};$$

$$\begin{aligned} M_{f,D}^{(3)} &= V_B^{(3)} \cdot \frac{l}{3} + R_6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \\ &= \frac{P \cdot l^2}{9} \cdot \frac{l}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} = \\ &= \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{81} \text{ kNm}^3; \end{aligned}$$

Se evaluează săgeata totală a punctului D și se egalează cu zero:

$$\begin{aligned} w_D &= \frac{M_{f,D}^{(1)} + M_{f,D}^{(2)} + M_{f,D}^{(3)}}{EI_y} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{q \cdot l^4}{144} - \frac{q \cdot l^4}{1152} + \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{81} = 0 \rightarrow P = \frac{9 \cdot q \cdot l^4}{1152} \cdot \frac{81}{4 \cdot l^3} = 0.1582 \cdot q \cdot l. \end{aligned}$$

b) Se evaluează  $M_{f,C}$  din fiecare caz de încărcare. Astfel:

$$M_{f,C}^{(1)} = V_A^{(1)} \cdot \frac{l}{2} - R_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l^3}{48} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l^3}{48} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768} \text{ kNm}^3$$

$$M_{f,C}^{(2)} = -V_A^{(2)} \cdot \frac{l}{2} + R_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{q \cdot l^3}{384} \cdot \frac{l}{2} + \frac{q \cdot l^3}{192} \cdot \frac{l}{4} = 0;$$

$$M_{f,C}^{(3)} = -V_A^{(3)} \cdot \frac{l}{2} + R_7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{P \cdot l^2}{18} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{3 \cdot P \cdot l^3}{144} \text{ kNm}^3;$$

Se evaluează săgeata totală a punctului C și se egalează cu valoarea admisibilă:

$$w_C = \frac{M_{f,C}^{(1)} + M_{f,C}^{(2)} + M_{f,C}^{(3)}}{EI_y} = 20 \text{ mm} \rightarrow \frac{\left( \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768} - \frac{3 \cdot P \cdot l^3}{144} \right) \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot I_y} = 20 \text{ mm};$$

$$\text{Pentru } q = 3 \text{ kN/m}, l = 4.8 \text{ m} \rightarrow P = 2.278 \text{ kN};$$

$$\rightarrow I_{y,nec} = 2559.74 \text{ cm}^4;$$

Cunoscând raportul  $h/b = 2$ , momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare este:

$$\rightarrow I_y = \frac{b \cdot 8 \cdot b^3}{12};$$

Impunând  $I_y = I_{y,nec}$  se determină valoarea minimă a lățimii secțiunii:

$$\rightarrow b_{nec} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 2559.74}{8}} = 7.87 \text{ cm} \rightarrow h_{nec} = 2 \cdot b_{nec} = 15.74 \text{ cm};$$

Se aleg dimensiunile secțiunii transversale:

$$\begin{cases} b = 8 \text{ cm}; \\ h = 16 \text{ cm}; \end{cases}$$

### C. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Pentru grinda metalică din figura alăturată, se cere calculul săgeților punctelor C și D. Se cunosc:  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $I_y = 9800 \text{ cm}^4$ .

Rezultate parțiale:  $M_{f,D} = 144.802 \text{ kNm}^3$ .

**P2.** Pentru grinda metalică de secțiune IPE 300 ( $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ), reprezentată în figura alăturată, se cere calculul săgeții punctului C și a rotirii secțiunii din D.

Rezultate parțiale:  $w_C = 18.736 \text{ mm}$ .

**P3.** Pentru grinda din lemn ( $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$ ) de secțiune dreptunghiulară (12x18cm) din figura alăturată se cere determinarea săgeții punctului D și a rotirii secțiunii din E.

Rezultate parțiale:  $M_{f,D} = 16.5 \text{ kNm}^3$ .

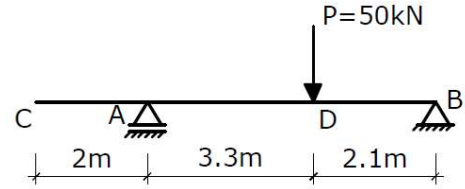


Fig. 12.10.

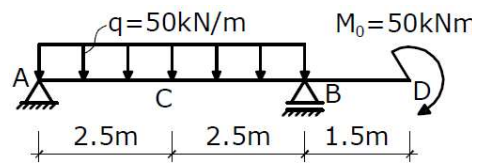


Fig. 12.11.

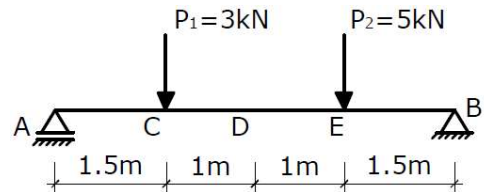


Fig. 12.12.

## LUCRAREA 13

### TORSIUNEA LIBERĂ A BARELOR DREPTE

#### A. NOȚIUNI TEORETICE

##### A.1. GENERALITĂȚI

O bară este **solicitată la torsiune** (răsucire) dacă forțele interioare se reduc, în secțiunea transversală, la un moment al cărui vector este dirijat după axa barei  $Ox$ . Momentul de torsiune  $M_t$  este pozitiv dacă vectorul are sensul normalei exterioare a secțiunii (ca și în cazul forței axiale  $N$  de întindere); în caz contrar este negativ.

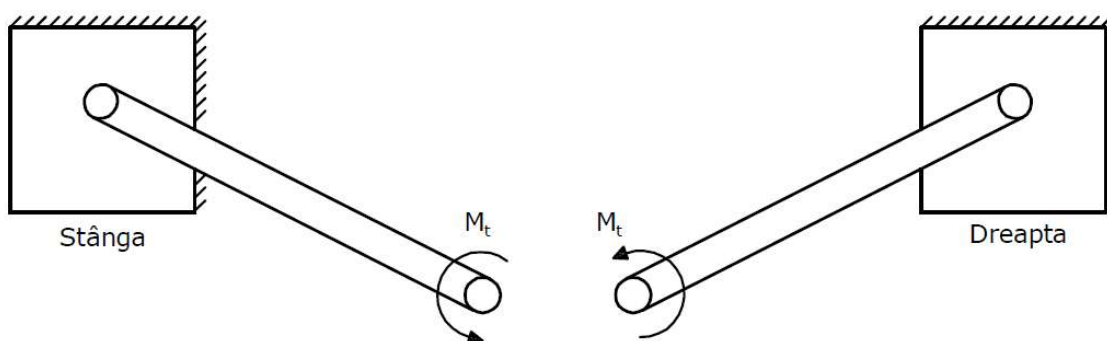


Fig. 13.1. Convenția de semn pozitiv pentru momentul de torsiune

Variația momentului de torsiune în lungul barei este similară cu variația forței tăietoare ( $T$ ) la grinzi; altfel spus, are loc relația diferențială:

$$\frac{dM_t}{dx} = -m_t(x), \quad (13.1)$$

unde  $m_t$  reprezintă momentul de torsiune continuu repartizat pe bară (uniform distribuit).

Tab. 13.1.

Tipul forței generalizate aplicate	Influența forței aplicate în trasarea diagramelor	
	Forță tăietoare ( $T$ )	Moment de torsiune ( $M_t$ )
Forță concentrată	Produce un salt egal cu intensitatea forței	Produce un salt egal cu intensitatea momentului de torsiune
Forțe uniform distribuite	Produc o variație liniară	Produc o variație liniară

Diagramele de variație ale momentului de torsiune ( $M_t$ ) se vor trasa deci, prin analogie, cu diagramele de forță tăietoare ( $T$ ).

În secțiunile transversale ale barelor supuse la torsiune apar tensiuni tangențiale  $\tau$ . Caracterul deformației, respectiv mărimea și distribuția acestor tensiuni sunt determinate de forma secțiunii transversale a barei. În cele ce urmează, se vor indica metode de calcul practic pentru trei categorii de bare:

- Bare cu secțiune circulară sau inelară;
- Bare cu pereți subțiri (BPS) – secțiune profil deschis;
- Bare cu pereți subțiri (BPS) – secțiune profil închis.

## A.2. BARE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ/INELARĂ

În cazul barelor de secțiune circulară și inelară, determinarea valorii tensiunii tangențiale într-un punct se poate face cu relația (stabilită pe baza ipotezei lui Bernoulli):

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r, \quad (13.2)$$

unde  $r$  reprezintă distanța de la centrul de greutate al secțiunii la punctul considerat (coordonata polară), iar  $I_p$  este momentul de inerție polar al secțiunii. În acest punct,  $\tau$  este normal la raza polară  $r$ , iar semnul este definit de sensul lui  $M_t$ .

Valoarea extremă a tensiunilor tangențiale se produce în punctele de pe conturul secțiunii (sunt tangente la contur) și poate fi calculată astfel:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}, \quad (13.3)$$

unde  $W_p$  reprezintă modulul de rezistență polar al secțiunii. Valoarea acestuia se calculează cu relația:

$$W_p = \frac{I_p}{R}, \quad (13.4)$$

în care  $R$  este raza secțiunii transversale.

În funcție de diametru secțiunii, modulul de rezistență polar ( $W_p$ ) se determină folosind următoarele relații:

- pentru secțiuni circulare:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}; \quad (13.5)$$

- pentru secțiuni inelare:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad (13.6)$$

$D$  fiind diametru exterior, iar  $d$  diametrul interior al secțiunii.



Pornind de la condiția de rezistență, **problemele Rezistenței Materialelor**, în cazul torsiunii barelor circulare sau inelare, iau următoarele forme:

- VERIFICAREA:

Pentru barele cu secțiune constantă, verificare se face în secțiunea cu efort maxim, utilizând **condiția de rezistență**:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} \leq R_f, \quad (13.7)$$

unde  $R_f$  este rezistența la forfecare a materialului. În cazurile obișnuite,  $R_f=0.6R$ .

- DIMENSIONAREA:

Se determină din condiția de rezistență:

$$W_{p,nec} \geq \frac{|M_t|_{max}}{R_f}, \quad (13.8)$$

iar apoi se stabilesc dimensiunile reale ale secțiunii și se verifică.

- EFORTUL CAPABIL

Momentul de torsiune capabil al secțiunii este:

$$M_{t,cap} = W_p \cdot R_f. \quad (13.9)$$

**Condiția de rigiditate** în cazul barelor supuse la torsiune atât în cazul secțiunilor circulare, cât și în cazul celor inelare este:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p} \leq \theta_{adm}, \quad (13.10)$$

unde  $\theta$  este unghiul de torsiune specific și  $G$  este modulul de elasticitate transversal;  $GI_p$  reprezintă rigiditatea la torsiune a secțiunii.  $\theta_{adm} = (0.15...0.30) \text{ } ^\circ/\text{m}$ .

În cazul secțiunilor curente, valoarea momentului de inerție polar ( $I_p$ ) se determină cu următoarele relații:

- pentru secțiuni circulare:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad (13.11)$$

- pentru secțiuni inelare:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]. \quad (13.12)$$

### A.3. BARE CU PEREȚI SUBȚIRI (BPS) - PROFIL DESCHIS

În cazul barelor cu pereți subțiri – profil deschis, a căror secțiune este formată din “n” dreptunghiuri înguste, legate între ele rigid, se consideră că fiecare dreptunghi lucrează independent și preia o cotă parte din  $M_t$  proporțională cu rigiditatea sa la torsiune.

Tensiunea tangențială extremă, apare în cazul acestor profile în punctele situate pe laturile dreptunghiului de grosime maximă ( $b_{max}$ ), **condiția de rezistență** fiind în acest caz:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{I_t} \cdot b_{max} \leq R_f, \quad (13.13)$$

unde  $I_t$  reprezintă momentul de inerție convențional la torsiune al secțiunii. Valoarea acestuia se calculează cu relația:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i \cdot b_i^3, \quad (13.14)$$

în care  $h_i$  este lungimea, iar  $b_i$  este grosimea dreptunghiului (i). Relația (13.14) poate fi aplicată numai în cazul în care raportul  $h_i/b_i \geq 10$ , teoria fiind una aproximativă.

În cazul unor astfel de secțiuni transversale, **condiția de rigiditate** devine:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t} \leq \theta_{adm}, \quad (13.15)$$

unde  $GI_t$  reprezintă rigiditatea inițială la torsiune a secțiunii.

**Problemele Rezistenței Materialelor** în cazul torsiunii barelor cu pereți subțiri – profil deschis, iau următoarele forme:

- VERIFICAREA:

Verificare se face în secțiunea cu efort maxim, utilizând **condiția de rezistență** enunțată anterior (13.13):

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{I_t} \cdot b_{max} \leq R_f.$$

- DIMENSIONAREA

Nu se poate face decât prin încercări; totuși pentru  $h_i$  date, se pot determina  $b_i$  dacă se consideră proportionale cu o mărime comună ( $b$ ), cu respectarea condiției  $h_i/b_i \geq 10$ .

- EFORTUL CAPABIL

Momentul de torsiune capabil al secțiunii este:

$$M_{t,cap} = \frac{I_t}{b_{max}} \cdot R_f. \quad (13.16)$$

#### A.4. BARE CU PEREȚI SUBȚIRI (BPS) - PROFIL ÎNCHIS

În cazul barelor cu pereți subțiri – profil închis, rezolvarea are la bază principiul conform căruia tensiunile tangențiale formează un flux care este constant pe grosimea pereților ( $\tau \cdot \delta = cst.$ ). Tensiunea tangențială are direcția tangentei la axa mediană a peretelui, putând fi calculată într-un perete cu relația:

$$\tau_i = \frac{M_t}{\Omega \cdot \delta_i}; \quad \tau_i \cdot \delta_i = \frac{M_t}{\Omega} = cst., \quad (13.17)$$

unde  $\delta_i$  reprezintă grosimea peretelui, iar  $\Omega$  este dublul ariei mărginite de conturul median al secțiunii.

Tensiunea tangențială maximă apare în acest caz în peretele de grosime minimă ( $\delta_{min}$ ), **condiția de rezistență** fiind dată de relația (formula lui Bredt):

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}} \leq R_f. \quad (13.18)$$

Similar cazului anterior, **condiția de rigiditate** este dată de relația (13.15) unde, în acest caz, momentul de inerție convențional la torsiune ( $I_t$ ) se determină cu relația:

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \quad (13.19)$$

În cazul în care secțiunea este alcătuită numai din pereți drepecți, integrala pe contur se poate scrie ca și o sumă de rapoarte, după cum urmează:

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \sum \frac{h_i}{\delta_i}, \quad (13.20)$$

unde  $h_i$  este lungimea peretelui, iar  $\delta_i$  este grosimea presupusă constantă pe porțiuni rectilinii de perete.

**Problemele Rezistenței Materialelor** în cazul torsiunii barelor cu pereți subțiri – profil închis iau următoarele forme:

- VERIFICAREA:

Verificare se face în secțiunea cu efort maxim, utilizând **condiția de rezistență** enunțată anterior (13.18):

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}} \leq R_f.$$

- DIMENSIONAREA

Nu se poate face decât prin încercări; eventual la un  $\Omega$  ales, se determină  $\delta_{min}$ .

• EFORTUL CAPABIL

Momentul de torsiune capabil al secțiunii este:

$$M_{t, cap} = \Omega \cdot \delta_{min} \cdot R_f. \quad (13.21)$$

*Obs. 1. În cazul barelor cu pereți subțiri supuse la torsiune, ipoteza secțiunilor plane (Bernoulli) nu mai rămâne valabilă căci diferitele secțiuni se deplanează (punctele din secțiunea transversală capătă deplasări diferite după axa barei). Ca relațiile de calcul stabilite să-și păstreze valabilitatea, trebuie ca aceste deplanări să se producă liber (inclusiv reazemele trebuie să permită asta), în caz contrar avem de-a face cu torsiune împiedicată.*

*Obs. 2. Secțiunea inelară se poate rezolva și pe baza relațiilor din cazul BPS – profil închis, grosimea  $\delta$  fiind mică.*

**B. EXEMPLE DE CALCUL**

**Ex.1.** Pentru bara din Fig. 13.2 fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) se cere:

- Să se verifice secțiunile barei.
- Să se reprezinte diagramele tensiunilor tangențiale în secțiunile maxim solicitate de pe fiecare tronson.
- Să se verifice rigiditatea barei, știind că unghiul de torsiune specifică admisibil are valoarea  $\theta_{adm} = 0.2^\circ/m$ .
- Se cunosc:  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

*REZOLVARE*

- Pentru verificarea condiției de rezistență este necesară trasarea diagramei de moment de torsiune, trasare ce se efectuează prin analogie cu trasarea diagramei de forță tăietoare (Fig. 13.2). Întrucât secțiunea transversală a barei diferă pe cele două tronsoane, [AC] și [CE], verificarea condiției de rezistență se va face pentru fiecare dintre acestea, considerând valoarea maximă a momentului de torsiune înregistrat pentru fiecare interval.

- Tronson [AC] – secțiune inelară

$$M_{t, max} = 2.7 \text{ kNm};$$

$$\tau_{max}^{1-1} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} = \frac{2.7 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 51^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{27}{51} \right)^4 \right]} = 112.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$\tau_{min}^{1-1} = \frac{|M_t|_{max} \cdot \frac{d_1}{2}}{I_p} = \frac{2.7 \cdot 10^6 \cdot 13.5}{\frac{\pi \cdot 51^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{27}{51} \right)^4 \right]} = 59.56 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

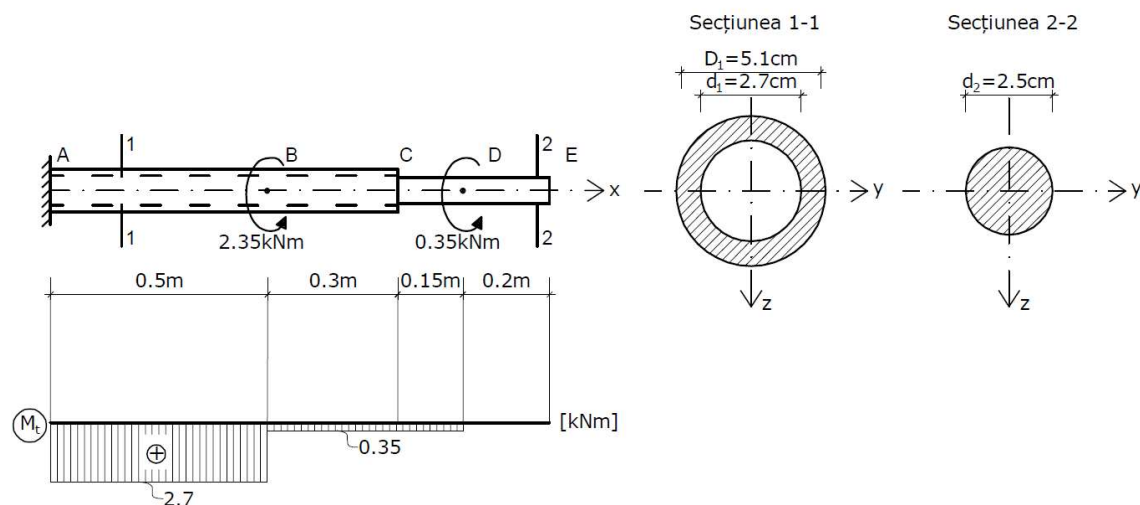


Fig. 13.2.

- Tronson [CE] – secțiune circulară

$$M_{t,max} = 0.35 \text{ kNm};$$

$$\tau_{max}^{2-2} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} = \frac{0.35 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 25^3}{16}} = 114.08 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < R_f = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

Deoarece pe ambele tronsoane se înregistrează valori ale tensiunilor tangențiale maxime mai mici decât valoarea rezistenței la forfecare, **condiția de rezistență este îndeplinită.**

- b) Diagramele corespunzătoare acestor tensiuni sunt reprezentate în Fig. 13.3.

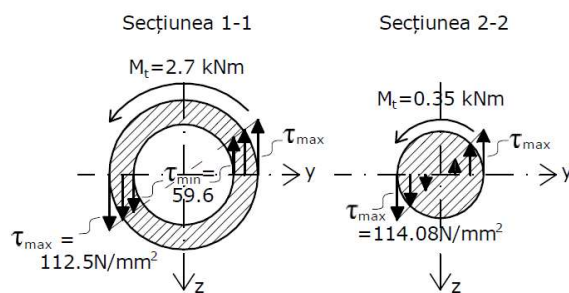


Fig.13.2. Diagramele tensiunilor tangențiale

- c) Similar cazului anterior, unde verificarea secțiunii barei s-a efectuat pentru fiecare tronson în parte, și verificarea condiției de rigiditate va respecta același principiu.

- Tronson [AC] – secțiune inelară

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2.7 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 51^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{27}{51} \right)^4 \right]} = 0.000055 \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 0.055 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = 0.055 \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 3.15^\circ/\text{m} > \theta_{adm} = 0.2^\circ/\text{m};$$

- Tronson [CE] – secțiune circulară

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{0.35 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 25^4}{32}} = 0.00011 \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 0.11 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = 0.11 \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 6.3^\circ/\text{m} > \theta_{adm} = 0.2^\circ/\text{m}.$$

Deoarece pentru ambele tronsoane valoarea unghiului de torsiune specific depășește valoarea admisibilă, **condiția de rigiditate nu este îndeplinită.**

**Ex.2.** Pentru consola de secțiune circulară din Fig. 13.4, fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă), se cere:

- Să se dimensioneze din condiția de rezistență și din cea de rigiditate bara supusă la torsiune ( $D$  – multiplu de 5mm).
- Stiind că diametrul secțiunii transversale este  $D = 15\text{cm}$ , să se determine valoarea efortului  $M_t$  pentru care tensiunile tangențiale maxime pe contur,  $\tau_{max}$ , înregistrează valoarea de  $50\text{ N/mm}^2$ .

Se cunosc:  $R_f = 140\text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4\text{ N/mm}^2$ ,  $\theta_{adm} = 0.2^\circ/\text{m}$ .

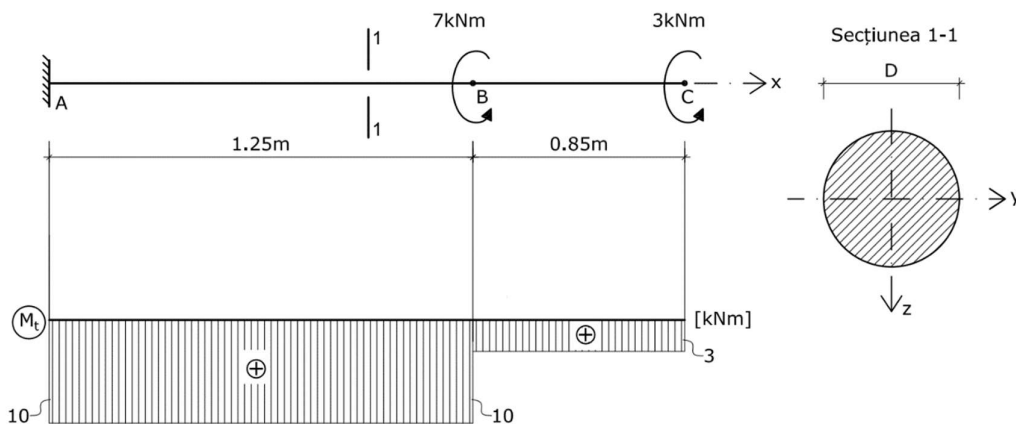


Fig.13.4.

### REZOLVARE

- Pentru determinarea secțiunii maxim solicitată la torsiune, respectiv a valorii maxime a efortului, se trasează diagrama momentului de torsiune, ilustrată în Fig. 13.4.

- dimensionarea secțiunii din condiția de rezistență:

$$M_{t,max} = 10kNm;$$

$$W_{nec} \geq \frac{|M_t|_{max}}{R_f} = \frac{10 \cdot 10^6}{140} = 71.42cm^3;$$

$$W_{nec} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \geq 71.42cm^3 \quad \Leftrightarrow \quad D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{71.42 \cdot 16}{\pi}} = 7.14cm;$$

- se alege **D = 7.50cm**

- dimensionarea secțiunii din condiția de rigiditate:

$$M_{t,max} = 10kNm;$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_p} \leq \theta_{adm} \Leftrightarrow I_{p,nec} \geq \frac{|M_t|_{max}}{G \cdot \theta_{adm}} = \frac{10 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0.2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{1}{10^3}} =$$

$$= 3580.99 \cdot 10^4 mm^4 = 3580.99 cm^4;$$

$$I_{p,nec} \geq 3580.99 cm^4;$$

$$I_{p,nec} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \geq 3580.99 cm^4 \quad \Leftrightarrow \quad D \geq \sqrt[4]{36475.66} = 13.81cm ;$$

- se alege **D = 14cm.**

Deoarece dimensionarea din condiția de rigiditate este mai restrictivă, pentru verificarea consolei se va utiliza diametrul obținut în cel de-al doilea caz (**D=14cm**):

- verificarea condiției de rezistență:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} = \frac{10 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 140^3}{16}} = 18.56 \frac{N}{mm^2} < R_f = 140 \frac{N}{mm^2}.$$

- verificarea condiției de rigiditate:

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_p} = \frac{10 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 140^4}{32}} = 0.0033 \frac{rad}{m} =$$

$$= 0.190^\circ/m < 0.2^\circ/m.$$

Întrucât ambele condiții sunt verificate, putem spune că dimensionarea efectuată este corectă.

- b) Știind că secțiunea barei este solicitată la torsiune astfel încât valoarea maximă a tensiunilor tangențiale pe contur este  $\tau_{max} = 50 \text{ N/mm}^2$  (Fig. 13.5), determinarea momentului de torsiune corespunzător acestei stări de solicitare se poate face pornind de la relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p};$$

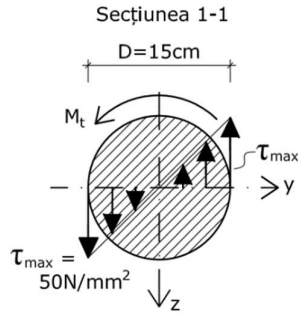


Fig.13.5.

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 15^3}{16} = 662.68 \text{ cm}^3; \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow M_t = \tau_{max} \cdot W_p = 50 \cdot 662.68 \cdot 10^3 = \\ = 33.134 \text{ kNm}. \end{array} \right.$$

$$\tau_{max} = 50 \text{ N/mm}^2$$

**Ex.3.** Pentru bara din Fig. 13.6 fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) se cere:

- Să se dimensioneze din condiția de rezistență și din cea de rigiditate bara supusă la torsiune având secțiunea inelară cu raportul  $d/D = 0.8$  ( $d, D$  – multiplu de 5mm).
- Să se stabilească ulterior rezerva de rezistență a secțiunii (raportul  $M_{t,cap}/M_{t,max}$ ).

Se cunosc:  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2, G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2, \theta_{adm} = 0.2^\circ/\text{m}$ .

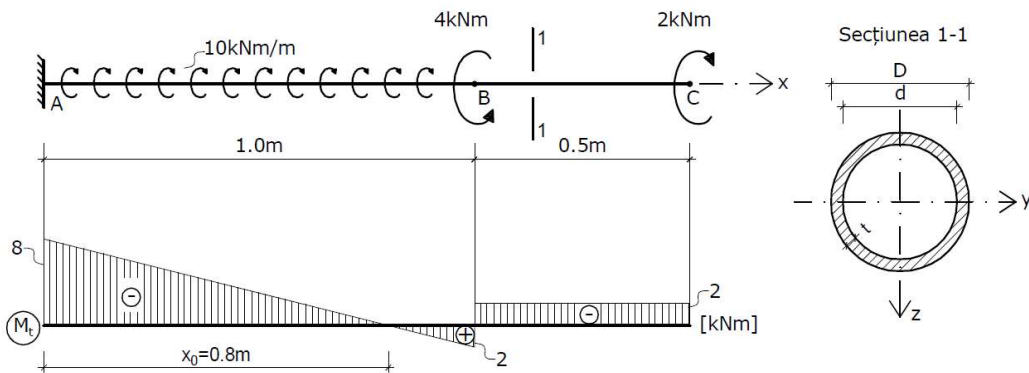


Fig.13.6.

**REZOLVARE**

- Pentru dimensionarea secțiunii, este necesară determinarea valorii maxime a momentului de torsiune. În acest scop, se trasează diagrama momentului de torsiune (Fig. 13.6).



- dimensionarea secțiunii din condiția de rezistență:

$$|M_t|_{max} = 8kNm;$$

$$W_{nec} \geq \frac{|M_t|_{max}}{R_f} = \frac{8 \cdot 10^6}{140} = 57.14cm^3;$$

$$W_{nec} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \geq 57.14cm^3 \quad \Leftrightarrow \quad D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{57.14 \cdot 16}{\pi \cdot (1 - (0.8)^4)}} = 7.90cm;$$

- se alege **D = 8.00cm**       $\Leftrightarrow$      $d = 0.8 \cdot 8.00cm = 6.40cm;$

- se alege **d = 6.00cm.**

- dimensionarea secțiunii din condiția de rigiditate:

$$|M_t|_{max} = 8kNm;$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_p} \leq \theta_{adm} \Leftrightarrow I_{p,nec} \geq \frac{|M_t|_{max}}{G \cdot \theta_{adm}} = \frac{8 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0.2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{1}{10^3}} =$$

$$= 2864.79 \cdot 10^4 mm^4 = 2864.79 cm^4;$$

$$I_{p,nec} \geq 2864.79 cm^4;$$

$$I_{p,nec} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} [1 - (0.8)^4] \geq 2864.79 cm^4 \quad \Leftrightarrow \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{29180.51}{1 - 0.8^4}} = 14.91cm ;$$

- se alege **D = 15cm**       $\Leftrightarrow$      $d = 0.8 \cdot 15cm = 12cm;$

- se alege **d = 12cm.**

Deoarece dimensionarea din condiția de rigiditate este mai restrictivă, pentru verificarea grinzii se vor utiliza dimensiunile obținute în cel de-al doilea caz (**D=15cm, d=12cm**):

- verificarea condiției de rezistență:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} = \frac{8 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 150^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{120}{150} \right)^4 \right]} = 20.45 \frac{N}{mm^2} < R_f = 140 \frac{N}{mm^2}.$$

- verificarea condiției de rigiditate:

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_p} = \frac{8 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 150^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{120}{150} \right)^4 \right]} = 0.0034 \frac{rad}{m} =$$

$$= 0.195^\circ/m < 0.2^\circ/m.$$

Întrucât sunt verificate atât condiția de rezistență cât și cea de rigiditate, dimensionarea efectuată este corectă, iar secțiunea transversală a barei este prezentată în Fig. 13.7.

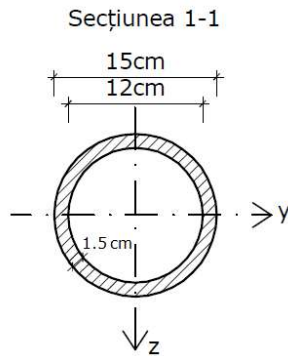


Fig.13.7. Dimensiunile finale ale secțiunii transversale

c) Rezerva de rezistență a secțiunii se determină prin efectuarea raportului dintre valoare momentului capabil ce poate fi suportat de bară și a momentului maxim ce soliciță bara.

$$|M_t|_{max} = 8kNm;$$

$$M_{t,cap} = W_p \cdot R_f = \frac{\pi \cdot 150^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{120}{150} \right)^4 \right] \cdot 140 = 57.77kNm;$$

$$\Rightarrow \frac{M_{t,cap}}{|M_t|_{max}} = \frac{57.77kNm}{8kNm} = 6.85.$$

**Ex.4.** Pentru bara din Fig. 13.8 fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) se cere:

- Să se verifice BPS cu profil deschis precizând peretele unde apare tensiunea maximă.
- Să se determine valoarea unghiului de torsiune specific  $\theta$ .

Se cunosc:  $R_f = 140 N/mm^2, G = 8 \cdot 10^4 N/mm^2$ .

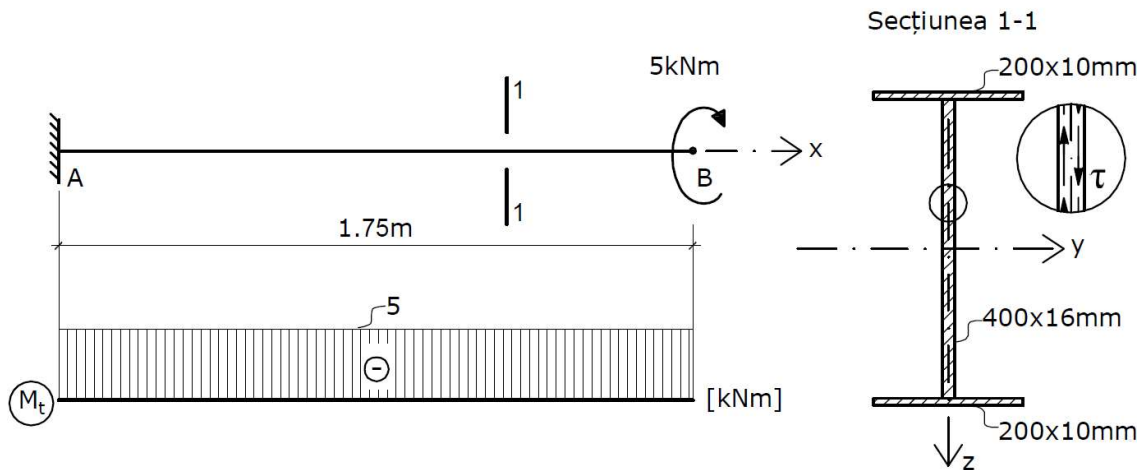


Fig. 13.8.

REZOLVARE

- a) Pentru verificarea condiției de rezistență este necesară trasarea diagramei momentului de torsiune (Fig. 13.8). Valoarea maximă a tensiunii tangențiale apare, în cazul BPS – profil deschis, în peretele laturii dreptunghiului de grosime maximă; în acest caz ( $\tau_{max}$ ) se înregistrează corespunzător inimii profilului I.

$$|M_t|_{max} = 5kNm;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_{max};$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n h_i \cdot b_i^3 = \frac{1}{3} (20 \cdot 1^3 + 40 \cdot 1.6^3 + 20 \cdot 1^3) = \frac{203.84}{3} = 67.95 cm^4;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_{max} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 16}{67.95 \cdot 10^4} = 117.73 \frac{N}{mm^2} < R_f = 140 \frac{N}{mm^2}.$$

Deoarece valoarea tensiunii tangențiale maxime este inferioară valorii rezistenței la forfecare a materialului, **condiția de rezistență este îndeplinită.**

- b) Determinarea valorii unghiului de torsiune specifică

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t} = \frac{5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 67.95 \cdot 10^4} = 0.919 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{mm} = 5.26^\circ/m.$$

**Ex.5.** Pentru bara din Fig. 13.9 fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) se cere:

- a) Să se verifice BPS cu profil închis precizând peretele în care apare tensiunea maximă.  
b) Să se determine valoarea unghiului de torsiune specific  $\theta$ .

Se cunosc:  $R_f = 140 N/mm^2, G = 8 \cdot 10^4 N/mm^2$ .

*Obs. Să se facă comentarii asupra rezultatelor obținute la Ex.4., respectiv Ex.5. ținând cont de faptul că Aria totală a secțiunii transversală a barelor supuse torsiunii, este identică.*

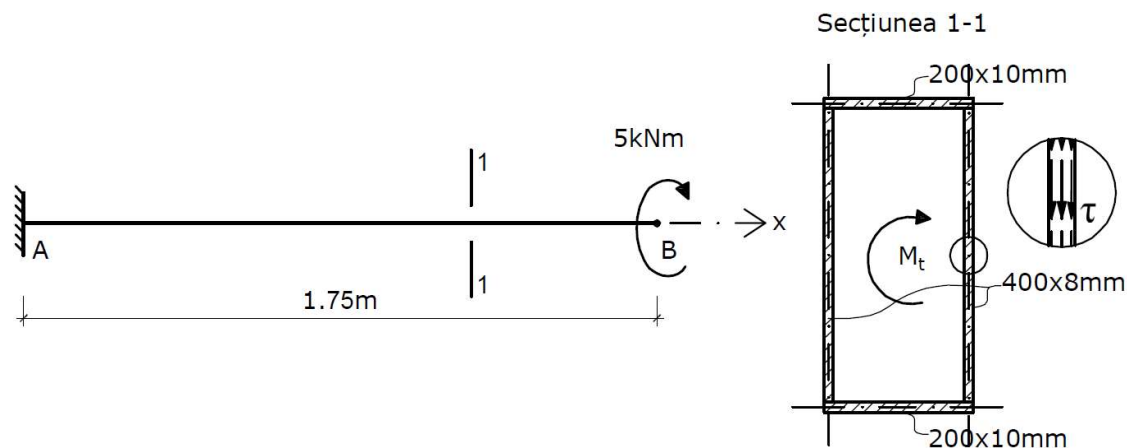


Fig. 13.9.

## REZOLVARE

- a) Pentru verificarea condiției de rezistență este necesară trasarea diagramei momentului de torsiune (Fig. 13.10). Valoarea maximă a tensiunii tangențiale apare în cazul BPS – profil închis acolo unde grosimea peretelui este minimă; în acest caz ( $\tau_{max}$ ) se înregistrează pe peretele vertical al profilului.

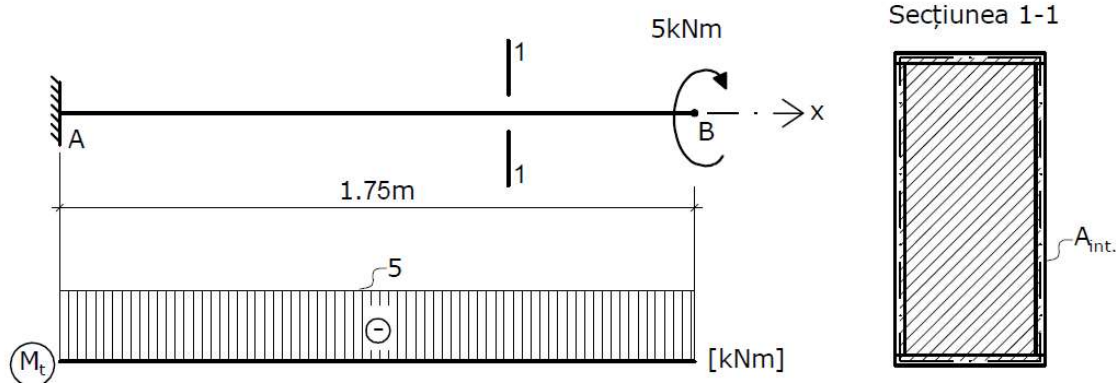


Fig. 13.10.

$$|M_t|_{max} = 5kNm;$$

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}};$$

$$\Omega = 2 \cdot A_{int} = 2(200 - 8)(400 + 10) = 1574.4cm^2;$$

$$\delta_{min} = 8mm;$$

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}} = \frac{5 \cdot 10^6}{1574.4 \cdot 10^2 \cdot 8} = 3.97 \frac{N}{mm^2} < R_f = 140 \frac{N}{mm^2}.$$

Întrucât valoarea tensiunii tangențiale maxime este mult inferioară valorii rezistenței la forfecare a materialului, **condiția de rezistență este îndeplinită.**

- b) Determinarea valorii unghiului de torsiune specifică

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t};$$

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{\Omega^2}{\sum_i \frac{h_i}{\delta_i}} = \frac{1574.40^2}{\left(2 \cdot \frac{20}{1} + 2 \cdot \frac{40}{0.8}\right)} = 17700.7cm^4;$$

$$\begin{aligned} \theta_{max} &= \frac{|M_t|_{max}}{GI_t} = \frac{5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 17700.7 \cdot 10^4} = 0.0035 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{mm} = \\ &= 0.0035 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{10^{-3}} = 0.02^\circ/m. \end{aligned}$$

**Ex.6.** Pentru bara solicitată la torsiune și fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) din Fig. 13.11, având secțiunea transversală constantă pe toată lungimea și tăiată (discontinuu) în colțul din dreapta jos, se cere:

- Să se stabilească valoarea momentului capabil  $M_{t, cap}$  ce poate fi aplicat la capătul barei.
- Să se evalueze valoarea unghiului de torsiune specifică, pentru o valoarea a momentului de la capătul barei  $M_t = 1.5kNm$ .

Se cunosc:  $R_f = 140 N/mm^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 N/mm^2$ .

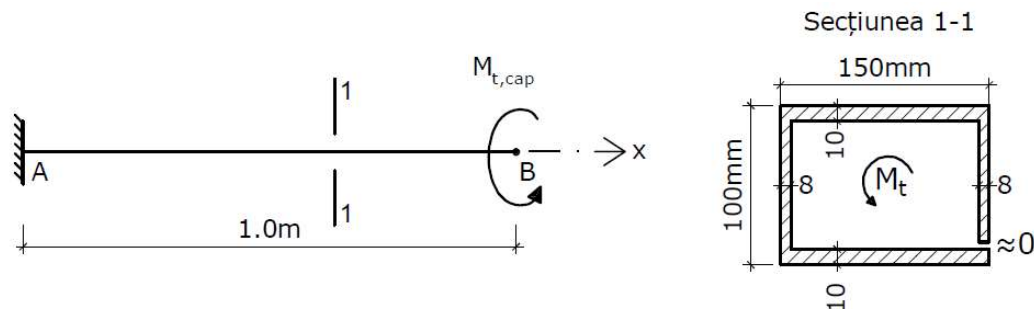


Fig. 13.11.

REZOLVARE

- Stabilirea momentului capabil al secțiunii, se face pornind de la condiția de rezistență a BPS – profil deschis.

$$M_{t, cap} = \frac{I_t}{b_{max}} \cdot R_f;$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n h_i \cdot b_i^3 = \frac{1}{3} (15 \cdot 1^3 + 8 \cdot 0.8^3) \cdot 2 = \frac{38.192}{3} = 12.73 cm^4;$$

$$b_{max} = 10mm;$$

$$\Rightarrow M_{t, cap} = \frac{I_t}{b_{max}} \cdot R_f = \frac{12.73 \cdot 10^4}{10} \cdot 140 = 1.78 \cdot 10^6 Nmm = 1.78kNm.$$

- Determinarea valorii unghiului de torsiune specifică, știind că valoarea momentului de la capătul consolei este,  $M_t = 1.5kNm$ .

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t};$$

$$|M_t|_{max} = 1.5kNm;$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 12.73 \cdot 10^4} = 0.000147 \frac{rad}{mm} = 0.000147 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{10^{-3}} = 8.42 \text{ } ^\circ/m.$$

**Ex.7.** Pentru bara solicitată la torsiune și fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) din Fig. 13.12, având secțiunea transversală constantă pe toată lungimea, se cere:

- Să se stabilească valoarea momentului capabil  $M_{t, cap}$  ce poate fi aplicat la capătul barei.
- Să se evalueze valoarea unghiului de torsiune specifică, pentru o valoarea a momentului de la capătul barei  $M_t = 20kNm$ .

Se cunosc:  $R_f = 140 N/mm^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 N/mm^2$ .

*Obs. Să se facă comentarii asupra rezultatelor obținute la Ex.6., respectiv Ex.7. ținând cont de faptul că singura diferență între secțiunile transversale ale barelor supuse torsiunii este discontinuitatea ( $\approx 0$ ) din colțul stânga jos al profilului de la Ex.5.*

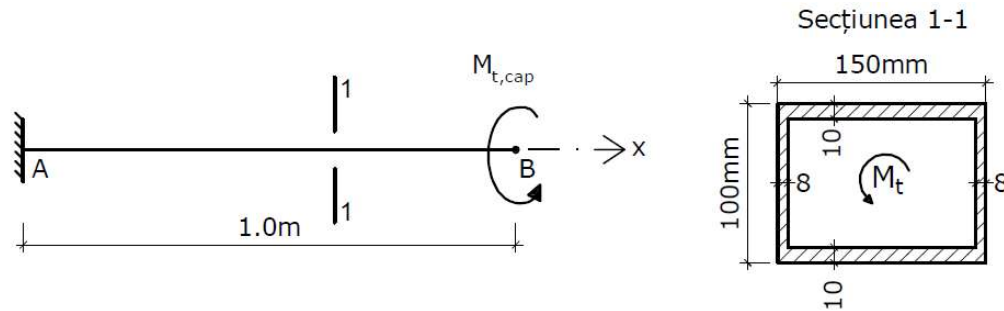


Fig. 13.12.

**REZOLVARE**

- Stabilirea momentului capabil al secțiunii se face pornind de la condiția de rezistență a BPS – profil închis.

$$M_{t, cap} = \Omega \cdot \delta \cdot R_f;$$

$$\Omega = 2 \cdot A_{int} = 2(150 - 8)(100 - 10) = 255.6cm^2;$$

$$\delta_{min} = 8mm;$$

$$\Rightarrow M_{t, cap} = \Omega \cdot \delta \cdot R_f = 255.6 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 140 \cdot 10^{-6} = 28.63 \cdot 10^6 Nmm = 28.63kNm.$$

Cu alte cuvinte,  $M_{t, cap}$  este de  $28.63/1.78 \approx 16$  ori mai mare decât în cazul secțiunii tăiate rezultând o foarte bună comportare la torsiune liberă a BPS – profil închis.

- Determinarea valorii unghiului de torsiune specifică, știind că valoarea momentului de la capătul consolei este  $M_t = 20kNm$ .

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t};$$

$$|M_t|_{max} = 20kNm;$$

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{\Omega^2}{\sum_i \frac{h_i}{\delta_i}} = \frac{255.6^2}{\left(2 \cdot \frac{15}{1} + 2 \cdot \frac{8}{0.8}\right)} = 1306.63cm^4;$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{GI_t} = \frac{20 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 1306.63 \cdot 10^4} = 0.000019 \frac{rad}{mm} =$$

$$= 0.000019 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{10^{-3}} = 1.09^\circ/m.$$

### A. PROBLEME PROPUSE

**P1.** Să se dimensioneze bara de secțiune inelară fixată în capătul D (cu deplanarea secțiunii permisă din Fig. 13.13, atât din condiția de rezistență cât și din condiția de rigiditate.

Se cunosc:  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\theta_{adm} = 0.2^\circ/m$ ,  $d/D = 0.8$  (d, D – multiplu de 5mm)

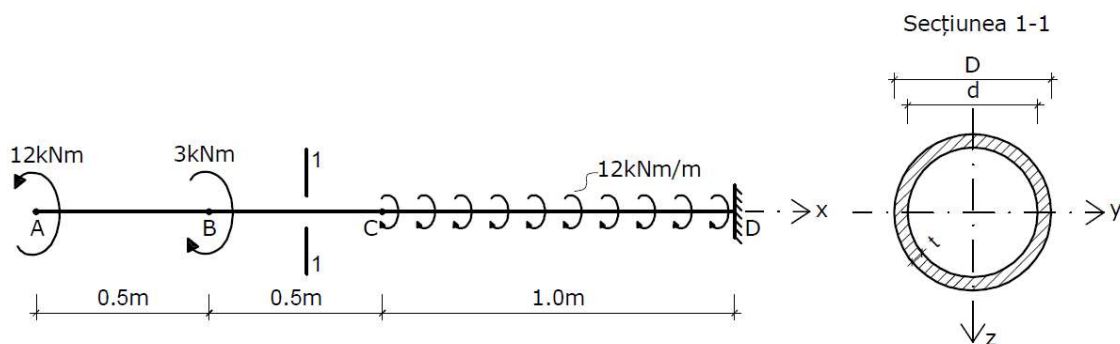


Fig. 13.13.

Rezultate parțiale:  $W_{p,nec} \geq 100 \text{ cm}^3$ ,  $I_{p,nec} \geq 4285.7 \text{ cm}^4$ .

**P2.** Să se calculeze  $M_{t,cap}$  pentru BPS cu profil deschis fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) din Fig. 13.14. Să se verifice apoi condiția de rigiditate.

Se cunosc:  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\theta_{adm} = 0.2^\circ/m$ .

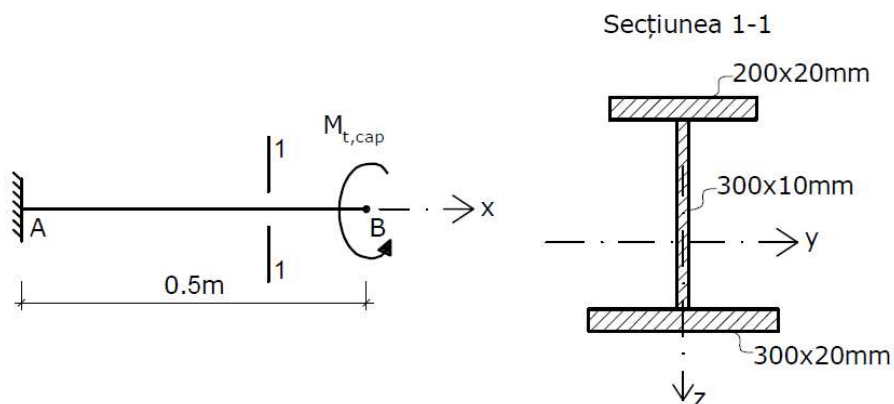


Fig. 13.14.

Rezultate parțiale:  $I_t = 143.33 \text{ cm}^4$ .

**P3.** Să se verifice BPS cu profil închis supusă la torsiune și fixată în capătul A (cu deplanarea secțiunii permisă) din Fig. 13.15. Să se calculeze apoi valoarea unghiului de torsiune specific,  $\theta$ . Se cunosc:  $R_f = 140 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

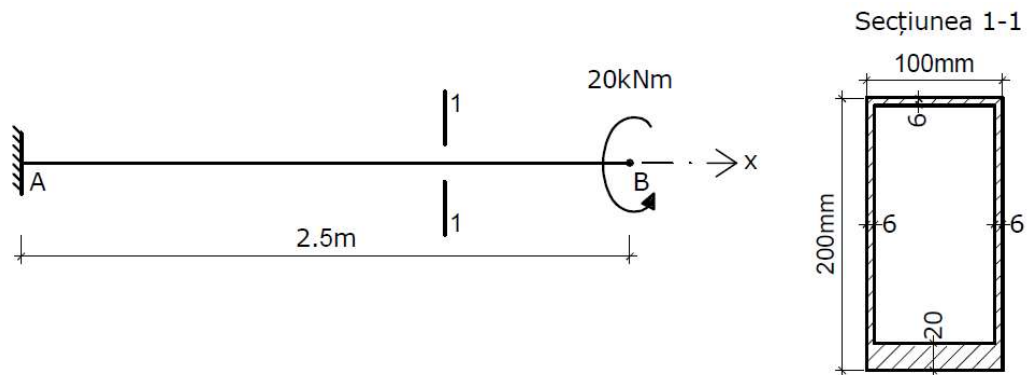


Fig. 13.15.

Rezultate parțiale:  $\Omega = 351.56 \text{ cm}^2$ ,  $I_t = 1693.07 \text{ cm}^4$ .



## TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

### LUCRAREA NR. 1

1. Reacțiunile sunt:

- a) forțe de legătură;
- b) echivalentul mecanic al unui reazem;
- c) forțele care se opun tendinței de deplasare a corpului.

2. O bară dreaptă, în starea de acțiune plană are:

- a) două grade de libertate: două translații și o rotație;
- b) trei grade de libertate: două translații și o rotație;
- c) trei grade de libertate: trei translații.

3. Barele cu trei legături simple se numesc:

- a) bare static determinate;
- b) bare static nedeterminate.

4. Grinda simplu rezemată este:

- a) un sistem static determinat;
- b) un sistem static nedeterminat.

5. Pentru determinarea reacțiilor unei bare simplu rezemate sunt necesare, în cazul încărcării cu forțe transversale, următoarele ecuații:

- a) două ecuații de moment;
- b) trei ecuații de echilibru;
- c) o ecuație de proiecție și una de moment.

6. Pentru determinarea reacțiilor unei console sunt necesare, în cazul general de încărcare, următoarele ecuații:

- a) două ecuații de moment: în încastrare și în capătul liber;
- b) o ecuație de moment în încastrare și o ecuație de proiecții de forțe;
- c) două ecuații de proiecții și una de moment.

7. Este posibil să se determine reacțiunile unei console scriind două ecuații de proiecții și una de moment în capătul liber?

- a) da;
- b) nu.

8. Este posibil să se determine reacțiunile pentru bara static nedeterminată din Fig. 14.1.1?

- a) da;
- b) nu.

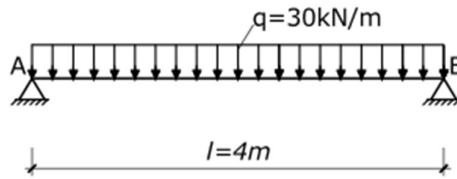


Fig. 14.1.1.

9. Care din valorile de mai jos reprezintă reacțiunile barei simplu rezemate din Fig. 14.1.2?

- a)  $V_A = P$ ;  $M_A = P \cdot l - M_0$ ;
- b)  $V_A = P$ ;  $M_A = P \cdot l - 5 \cdot M_0$ ;
- c)  $V_A = -P$ ;  $M_A = M_0 - P \cdot l$ .

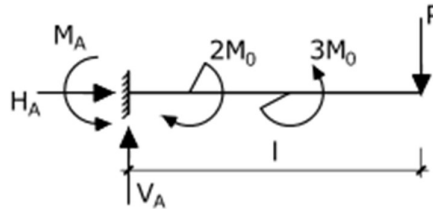


Fig. 14.1.2.

10. Precizați dacă ecuația de echilibru de mai jos, scrisă în reazemul B al barei din Fig. 14.1.3 este corectă:

$$P \cdot l - 5 \cdot M_0 - \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot l = M_B$$

- a) da;
- b) nu.

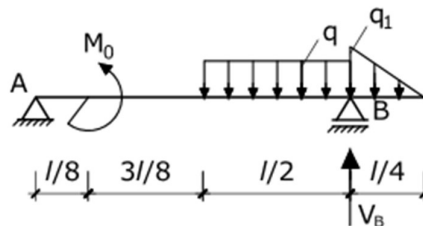


Fig. 14.1.3.

## LUCRAREA NR. 2

1. Efortul elementar este:

- a) componentă a torsorului obținut prin reducerea forțelor exterioare în centrul de greutate al secțiunii;
- b) rezultanta componentelor tensiunilor de pe elementul de arie;

rezultanta componentelor tensiunilor de pe secțiunea transversală.

2. Într-un punct curent al unei secțiuni transversale, pot exista următoarele tensiuni:

- a) N, T și M;
- b)  $\sigma$  și T;
- c)  $\sigma$  și  $\tau$ .

3. Câte componente are torsorul eforturilor pentru o bară dreaptă sollicitată în planul ei?

- a) două;
- b) trei;
- c) patru.

4. Efortul axial este pozitiv atunci când:

- a) are sensul normalei exterioare pe fața care se calculează;
- b) “trage” de secțiune;
- c) are sensul axei Ox.

5. Diagramele de eforturi reprezintă:

- a) variația eforturilor în lungul axei barei;
- b) graficele eforturilor, considerate ca funcții de variabila x;
- c) variația încărcărilor exterioare în lungul axei barei.

6. Valorile eforturilor într-o secțiune oarecare de abscisă x depind de:

- a) forma și dimensiunile secțiunii transversale;
- b) valoarea încărcărilor exterioare;
- c) tipul reazemelor;
- d) poziția încărcărilor exterioare.

7. Forma diagramelor de eforturi depinde de:

- a) forma și dimensiunile secțiunii normale;
- b) valoarea încărcărilor exterioare;
- c) poziția încărcărilor exterioare;
- d) modul de distribuție al încărcărilor exterioare.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

8. Dacă o bară este încărcată cu o forță uniform distribuită q, atunci diagrama M va fi o parabolă de gradul III.

- a) adevărat;
- b) fals.

9. Dacă într-o secțiune normală a unei bare forța tăietoare este nulă, atunci diagrama M va avea un extrem în acea secțiune.

- a) adevărat;
- b) fals.

10. Dacă o bară este încărcată numai cu forțe concentrate, atunci diagrama M va fi constantă între forțe.

- a) adevărat;
- b) fals.

### LUCRAREA NR. 3

1. Pentru o bară simplu rezemată încărcată simetric, sunt adevărate următoarele afirmații:

- a) diagrama T este simetrică;
- b) diagrama M este simetrică;
- c) eforturile sunt maxime la mijlocul deschiderii.

2. Pentru o bară simetrică din punct de vedere geometric și încărcată antisimetric, sunt adevărate următoarele afirmații:

- a) diagrama T este simetrică;
- b) diagrama M este antisimetrică;
- c) eforturile sunt nule la mijlocul deschiderii.

3. Diagramele de eforturi pe o consolă pot fi simetrice / antisimetrice?

- a) da;
- b) nu.

4. O diagramă simplă este o diagramă trasată pentru o singură încărcare pe bară?

- a) da;
- b) nu.

5. Principiul suprapunerii efectelor este valabil în baza următoarelor ipoteze:

- a) ipoteza micilor deformații;
- b) comportarea liniar elastică a materialului;
- c) comportarea post elastică a materialului.

6. Pentru grinda încărcată conform Fig. 14.3.1 este corect trasată diagrama de moment încovoietor?

- a) da;
- b) nu.

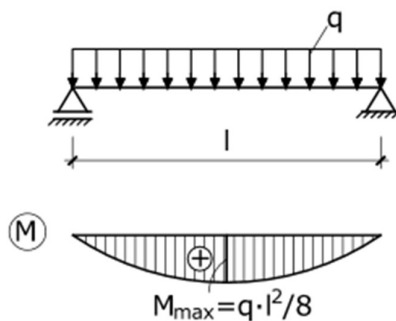


Fig. 14.3.1.

7. Pentru grinda încărcată conform Fig. 14.3.2 precizați valoarea corectă a momentului încovoietor în dreptul forței concentrate:

- a)  $M=1.61P$ ;
- b)  $M=1.75P$ ;
- c)  $M=2.5P$ .

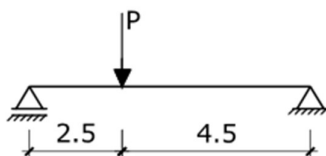


Fig. 14.3.2.

8. Pentru grinda încărcată conform Fig. 14.3.3 este corect trasată diagrama de moment încovoietor?

- a) da;
- b) nu.

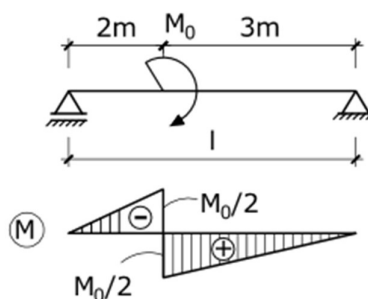


Fig. 14.3.3.

9. Pentru grinda încărcată conform Fig. 14.3.4 este corect trasată diagrama de moment încovoietor?

- a) da;

b) nu.

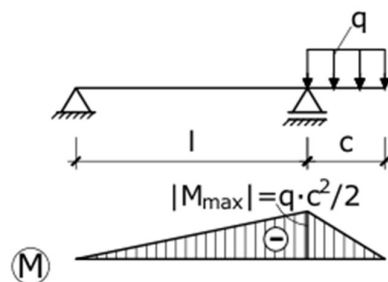


Fig. 14.3.4.

10. Pentru grinda încărcată conform Fig. 14.3.5 precizați valoarea corectă a momentului încovoietor la capetele barei:

- a) 0 și 0;
- b)  $-M_0$  și 0;
- c)  $M_0$  și 0.

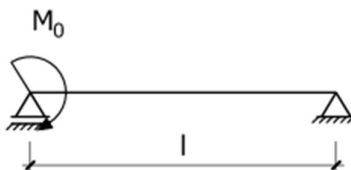


Fig. 14.3.5.

#### LUCRAREA NR. 4

1. Grinzile Gerber sunt sisteme statice:

- a) determinate;
- b) nedeterminate.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

2. Grinzile Gerber sunt sisteme statice compuse din bare legate între ele prin articulații interioare:

- a) adevărat;
- b) fals.

3. Grinzile Gerber se descompun în două sau mai multe bare independente:

- a) adevărat;
- b) fals.

4. Articulațiile interioare sunt legături ale grinzii Gerber cu terenul:

- a) adevărat;
- b) fals.

5. Reacțiunile de la barele independente ale grinzii Gerber pot fi determinate din ecuațiile de echilibru static:

- a) adevărat;
- b) fals.

6. Diagramele pe stâlpi sau bare cotite se trasează folosind principiile de trasare valabile pentru grinzi:

- a) adevărat;
- b) fals.

7. Pentru sistemul încărcat conform Fig. 14.4.1 precizați legea de variație a forței tăietoare  $T$  pe tronsonul C-D:

- a) constantă;
- b) liniară;
- c) parabolică.

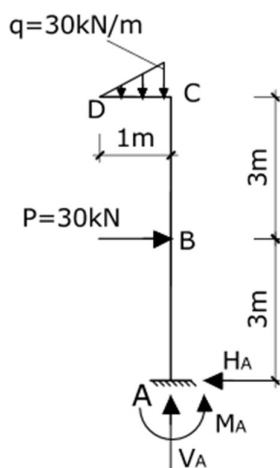


Fig. 14.4.1.

8. Pentru sistemul încărcat conform Fig. 14.4.1, identificați segmentele solicitate la efort axial:

- a) segmentele AC și CD;
- b) segmentul AC;
- c) segmentul CD.

9. Pentru sistemul încărcat conform Fig. 14.4.1, precizați legea de variație a momentului încovoiitor pe tronsonul CB:

- a) constantă;
- b) liniară;

c) parabolică.

10. Este corect sensul reacțiilor din încastrare marcate în Fig. 14.4.1?

a) da;

b) nu.

## LUCRAREA NR. 5

1. Care din următoarele ipoteze este aplicabilă numai în Rezistența materialelor (nu și în Teoria Elasticității)?

a) ipoteza micilor deformații;

b) ipoteza secțiunii plane;

c) principiul lui Saint-Venant.

2. Care din metodele de calcul de mai jos face parte din categoria celor semiprobabilistice?

a) metoda la rupere;

b) metoda stărilor limită;

c) metoda rezistențelor admisibile.

3. Care din ipotezele Rezistenței materialelor enumerate mai jos, conduc la probleme cu liniaritate geometrică?

a) ipoteza secțiunilor plane;

b) ipoteza micilor deformații;

c) legea lui Hooke.

4. Legea lui Hooke se poate aplica dacă:

a) curba caracteristică a materialului prezintă palier de curgere;

b) materialul este casant;

c) materialul este cristalin;

d) nici una din condițiile a)...c) nu este suficientă.

5. Care din următoarele materiale prezintă ruperi casante:

a) aluminiu;

b) fontă;

c) beton.

6. Care din factorii de mai jos nu influențează caracteristicile mecanice ale materialului?

a) viteza de încărcare;

b) durata de acțiune a încărcărilor;

c) direcția de acțiune a încărcărilor.

7. Curba caracteristică de calcul ideal elasto-plastică se utilizează pentru:

a) schematizarea comportării materialelor ductile;

b) schematizarea comportării materialelor casante.



8. Momentul de inerție axial al unei secțiuni în raport cu o axă centrală este:

- a) pozitiv;
- b) negativ;
- c) nul;

9. Momentul de inerție centrifugal al unei secțiuni având o axă de simetrie este:

- a) pozitiv;
- b) negativ;
- c) nul.

10. Momentul static al unei secțiuni în raport cu o axă centrală este:

- a) pozitiv;
- b) negativ;
- c) nul.

### LUCRAREA NR. 6

1. Ce tensiuni apar în secțiunile normale ale barelor supuse la întindere axială?

- a) tensiuni normale  $\sigma > 0$ ;
- b) tensiuni normale  $\sigma < 0$ ;
- c) tensiuni tangențiale  $\tau > 0$ ;
- d) tensiuni tangențiale  $\tau < 0$ .

2. O condiție de rezistență, în metoda stărilor limită, compară:

- a) eforturile cu rezistența de calcul;
- b) tensiunile cu rezistența de calcul;
- c) tensiunile cu eforturile.

3. O condiție de rigiditate, în cazul general, compară:

- a) deplasările maxime cu deplasările admisibile;
- b) deformațiile maxime cu deformațiile admisibile;
- c) deformațiile specifice cu deformația specifică admisibilă.

4. Alungirea unei bare solicitate axial depinde de:

- a) rezistența materialului din care e confecționată bara;
- b) rigiditatea axială;
- c) lungimea inițială a barei.

5. Verificarea unei bare solicitate axial se va realiza în secțiunile transversale, unde:

- a) efortul axial  $N$  este maxim;
- b) aria secțiunii transversale  $A$  este maximă;
- c) aria secțiunii transversale  $A$  este minimă;
- d) în nici una din situațiile a)...c).

6. Dimensionarea unei bare solicate axial presupune:

- determinarea lungimii inițiale a barei;
- determinarea dimensiunilor secțiunii transversale a barei;
- nici una din caracteristicile geometrice menționate la punctul a)...b).

7. Efortul capabil al unei bare solicate axial depinde de:

- lungimea inițială a barei și rezistența materialului;
- aria secțiunii transversale a barei și rezistența materialului;
- încărcările exterioare care acționează asupra barei.

8. Se dă bara din Fig. 14.6.1, având secțiune variabilă în trepte și sollicitată la întindere axială de forța  $P$ . În care secțiuni se va face verificarea barei?

- în secțiunea A;
- în secțiunea B;
- în secțiunea C;
- obligatoriu în toate cele trei secțiuni.

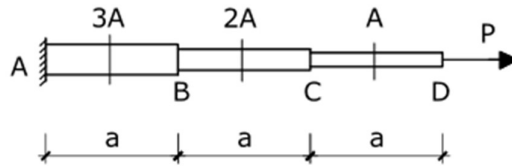


Fig. 14.6.1.

9. Pentru bara sollicitată ca în Fig. 14.6.1, identificați segmentul de bară cu alungirea cea mai mare:

- segmentul AB;
- segmentul BC;
- segmentul CD.

10. Se dă bara din Fig. 14.6.2. Ce fel de problemă se poate formula?

- de verificare;
- de dimensionare;
- de efort capabil.

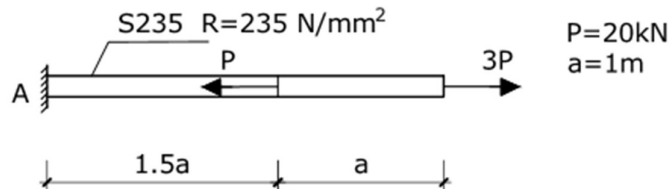


Fig. 14.6.2.

### LUCRAREA NR. 7

1. Un sistem static nedeterminat este un sistem structural la care numărul de legături (exterioare și interioare) este:
  - a) mai mic decât trei;
  - b) egal cu trei;
  - c) mai mare decât trei.
2. Gradul de nedeterminare statică al unui sistem structural indică:
  - a) numărul de legături exterioare și interioare;
  - b) numărul de ecuații suplimentare necesare pentru calculul reacțiilor;
  - c) dacă sistemul este static determinat sau static nedeterminat.
3. Pentru un sistem static nedeterminat, se pot determina reacțiunile folosind doar ecuațiile de echilibru static?
  - a) da;
  - b) nu.
4. Pentru sistemul solicitat conform Fig. 14.7.1, precizați ecuațiile de echilibru necesare pentru calculul reacțiilor:
  - a)  $\sum F_x = 0$  și  $\sum F_z = 0$ ;
  - b)  $\sum M_A = 0$  și  $\sum M_B = 0$ ;
  - c)  $\sum F_x = 0$  și alungirea barei  $\Delta l_{AB} = 0$ .

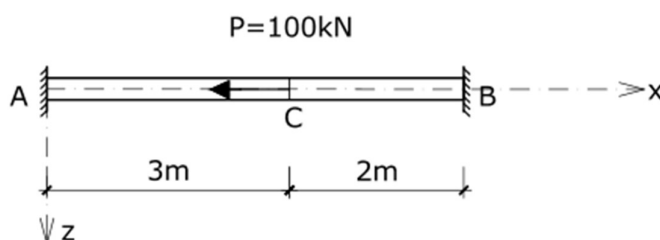


Fig. 14.7.1.

5. Pentru sistemul solicitat conform Fig. 14.7.1, precizați tipul efortului axial  $N$  pe tronsonul AC și respectiv CB:
  - a) tronsonul AC  $\rightarrow N > 0$ , tronsonul CB  $\rightarrow N < 0$ ;
  - b) tronsonul AC  $\rightarrow N < 0$ , tronsonul CB  $\rightarrow N > 0$ ;
  - c)  $N < 0$  pe ambele tronsoane;
  - d)  $N < 0$  pe ambele tronsoane.
6. Alungirea unei bare supuse unei variații de temperatură depinde de:
  - a) materialul din care e realizată bara;

- b) lungimea inițială a barei;
- c) modulul de elasticitate longitudinal.

7. Pentru sistemul din Fig. 14.7.2 și supus unei variații de temperatură  $\Delta t > 0$ , precizați dacă sensul reacțiilor ce apar în reazeme este corect.

- a) da;
- b) nu.

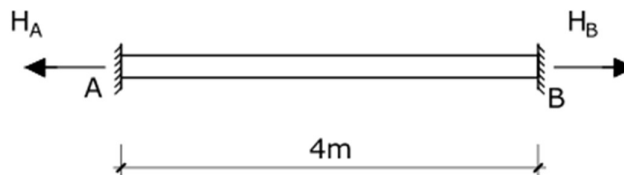


Fig. 14.7.2.

8. Pentru sistemul ilustrat în Fig. 14.7.3, identificați care este gradul de nedeterminare statică al acestuia (n):

- a)  $n=0$ ;
- b)  $n=1$ ;
- c)  $n=3$ .

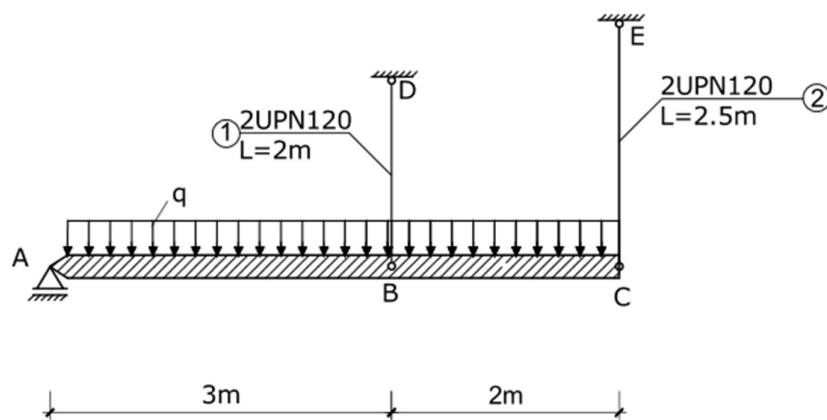


Fig. 14.7.3.

9. Pentru sistemul solicitat ca în Fig. 14.7.3, precizați valoarea alungirii tirantului BD în raport cu tirantul CE:

- a)  $\Delta l_{BD} = \Delta l_{CD}$ ;
- b)  $\Delta l_{BD} = 0.8 \cdot \Delta l_{CD}$ ;
- c)  $\Delta l_{BD} = 0.67 \cdot \Delta l_{CD}$ .

10. Pentru sistemul solicitat ca în Fig. 14.7.3, identificați ecuația de compatibilitate în deformații:

- a)  $3 \cdot \Delta l_{BD} = 2 \cdot \Delta l_{CD}$ ;

- b)  $\Delta l_{BD} = \Delta l_{CD}$ ;
- c)  $3 \cdot \Delta l_{BD} = 5 \cdot \Delta l_{CD}$ .

## LUCRAREA NR. 8

1. Niturile și șuruburile sunt solícitate la:

- a) efort axial;
- b) forfecare;
- c) presiune pe gaură.

2. În care din situația de mai jos se ține cont de slăbirile barei?

- a) la determinarea numărului de nituri din îmbinare;
- b) la verificarea barelor comprimate;
- c) la verificarea barelor întinse.

3. Care este diferența între calculul îmbinărilor nituite și al celor cu șuruburi?

- a) nici una, calculul e identic;
- b) calculul se face identic cu excepția cazului că la verificarea barei se folosește  $d_g = d + 1 \text{ mm}$ ;
- c) calculul se face identic, folosindu-se în toate relațiile diametrul de calcul al șurubului egal cu diametrul nominal plus 1mm.

4. Care este semnificația notației M20?

- a) șurub pășuit având diametrul nominal 20mm;
- b) șurub pășuit având diametrul de calcul 21mm;
- c) șurub brut având diametrul nominal 20mm.

5. La calculul îmbinărilor nituite și bulonate se admite că toate niturile/șuruburile din îmbinare se încarcă în mod egal. Este corectă această afirmație?

- a) este corectă;
- b) este o ipoteză simplificatoare.

6. Forfecarea niturilor se produce:

- a) în toată tija niturilor;
- b) la nivelul secțiunilor de contact dintre piesele care se îmbină.
- c) într-o singură secțiune de contact corespunzătoare pieselor celor mai solícitate.

7. Diametrul nitului sau șurubului:

- a) se dimensionează funcție de mărimea efortului axial din bară;
- b) se alege din tabel funcție de forma și dimensiunile secțiunii transversale;
- c) se dimensionează funcție de mărimea forței tăietoare din tija nitului.

8. Verificarea unei bare nituite presupune:

- a) verificarea tensiunilor normale în bară;
- b) verificarea tensiunilor tangențiale din forfecare în tija nitului;

c) verificarea tensiunilor normale pe pereții găurilor.

9. Dimensionarea unei îmbinări nituite presupune:

- determinarea prin calcul a diametrului nitului;
- determinarea numărului de nituri din îmbinare;
- determinarea efortului capabil al unui nit.

10. Se dă nitul din Fig. 14.8.1, având diametrul de 17mm și  $R_p^n=470 \text{ N/mm}^2$ . Specificați care dintre relațiile de mai jos reprezintă capacitatea portantă a nitului la presiune pe gaură?

- $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 10 \cdot 470 \cdot 10^{-3} = 79.90 \text{ kN}$ ;
- $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 26 \cdot 470 \cdot 10^{-3} = 207.74 \text{ kN}$ ;
- $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 16 \cdot 470 \cdot 10^{-3} = 127.84 \text{ kN}$ .

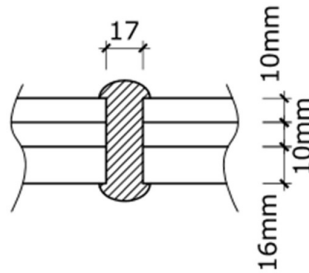


Fig. 14.8.1.

## LUCRAREA NR. 9

1. Ce tensiuni apar în cordoanele de sudură de colț?

- tensiuni normale  $\sigma$ ;
- tensiuni tangențiale  $\tau$ .

2. Efortul capabil al unei bare sudate este dat de:

- efortul capabil al secțiunii barei;
- efortul capabil al cordoanelor de sudură;
- cea mai mică valoare dintre cele două de mai sus.

3. Este corectă relația dintre lungimea de execuție și lungimea de calcul a cordoanelor de sudură de colț  $l_s = l - 2 \cdot a$  ?

- corect;
- incorect.

4. Precizați la ce tipuri de secțiuni ale barelor sudate de guseu, eforturile T din cordoanele de sudură de colț nu sunt egale:

- la platbenzi;
- la profile U;

c) la profile L.

5. Se dau platbenzile din Fig. 14.9.1, solidarizate printr-un cordon de sudură de colț având grosimea  $a=9\text{mm}$ . Este corect aleasă grosimea sudurii?

- a) corect;
- b) incorect.

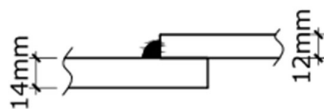


Fig. 14.9.1.

6. Se dă Fig. 14.9.2. Spuneți dacă relația de verificare de mai jos este scrisă corect:

$$\tau_s = \frac{P}{4 \cdot a \cdot l} \leq R_f^s$$

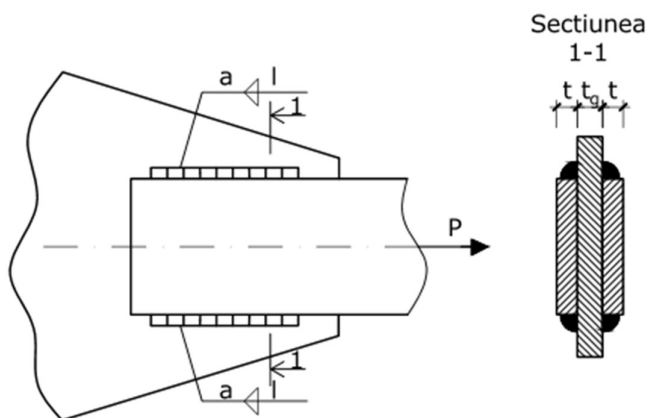


Fig. 14.9.2.

- a) corect;
- b) incorect.

7. Se dă profilul cornier din Fig. 14.9.3, sudat de un guseu prin două cordoane cu grosimi și lungimi egale. Poate fi făcută simultan verificarea acestor cordoane?

- a) da, pentru că au arii egale;
- b) nu, pentru că preiau eforturi diferite.

8. Pentru profilul cornier din Fig. 14.9.3 sudat de un guseu prin două cordoane de sudură. De cine depinde efortul  $T$  din cele două cordoane de sudură?

- a) de forța  $P$ ;
- b) de lungimea cordoanelor de sudură;
- c) de caracteristicile secțiunii transversale ale profilului.

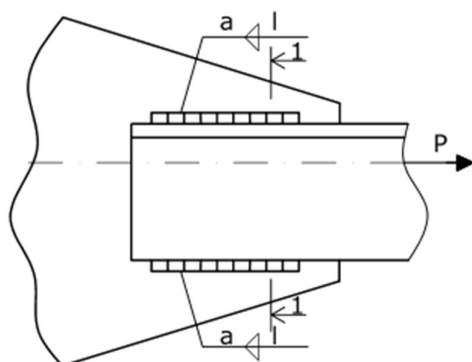


Fig. 14.9.3.

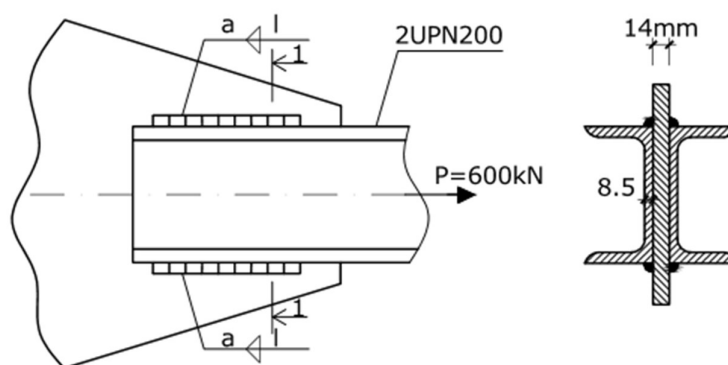


Fig. 14.9.4.

9. Pentru dimensionarea sudurilor din Fig. 14.9.4 s-au folosit următoarele relații:

- (i)  $3\text{mm} \leq a \leq 0.7 \cdot 8.5 = 5.95\text{mm}$ ;
- (ii) aleg  $a = 5\text{mm}$ ;
- (iii)  $l_{nec} \geq \frac{600 \cdot 10^3}{4 \cdot 5 \cdot 165}$ ,  $l_{nec} \geq 181.82\text{mm}$ ;
- (iv)  $l_{s,nec} \geq 181.82 + 2 \cdot 5$ ,  $l_{s,nec} \geq 191.82\text{mm}$ .

Care din relațiile de mai sus este incorectă?

- a) relația (i);
- b) relația (ii);
- c) relația (iii);
- d) relația (iv).

10. Se dă bara realizată din două profile UPN200 sudată de un guseu prin patru cordoane de sudură conform Fig. 14.9.4. Presupunând că grosimea "a" este aceeași, cum sunt lungimile de execuție a acestor cordoane?

- a) toate sunt egale;
- b) egale două câte două, cele superioare, respectiv cele inferioare;
- c) cordoanele au fiecare lungimi diferite.



### LUCRAREA NR. 10

1. Încovoierea simplă este o sollicitare:

- a) simplă;
- b) compusă.

2. Ce eforturi apar în secțiunile unei bare supuse la încovoiere pură?

- a) efort axial;
- b) forță tăietoare;
- c) moment încovoiător;
- d) moment de torsiune.

3. Ce tensiuni apar în secțiunile unei bare supuse la încovoiere simplă?

- a) tensiuni normale  $\sigma$ ;
- b) tensiuni tangențiale  $\tau$ .

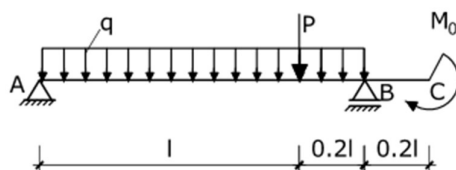


Fig. 14.10.1.

4. Spuneți dacă bara din Fig. 14.10.1 este sollicitată la încovoiere simplă:

- a) da;
- b) nu.

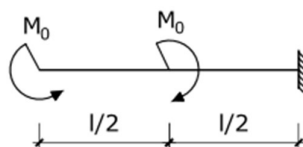


Fig. 14.10.2.

5. Spuneți dacă bara din Fig. 14.10.2 este sollicitată la încovoiere pură:

- a) da;
- b) nu.

6. Pentru a lucra în condiții de siguranță, o grindă încovoiată trebuie să satisfacă relația:

a)  $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq R$ ;

b)  $\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_o}{b \cdot I_y} \leq R_f$ ;

c) ambele relații.

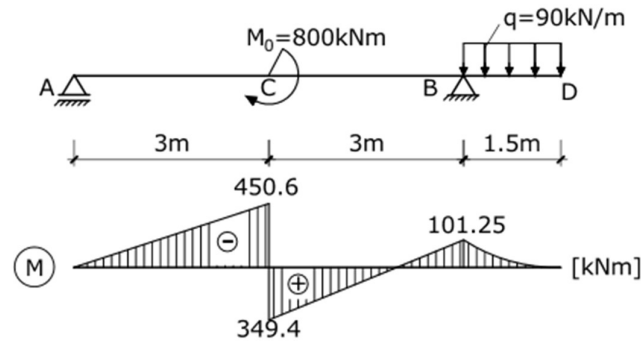


Fig. 14.10.3.

7. Se dă grinda din Fig. 14.10.3. În care secțiune se va face dimensionarea barei?

- a) în secțiunea C;
- b) în secțiunea C<sup>stg</sup>;
- c) în secțiunea C<sup>dr</sup>;
- d) în secțiunea B.

8. Pentru grinzile obișnuite (cu valori ale raportului  $h/l$  între  $1/5$  și  $1/10$ ), care din condițiile de rezistență sunt mai severe?

- a) condiția de rezistență în tensiuni normale;
- b) condiția de rezistență în tensiuni tangențiale.

9. Pentru o grindă supusă la încovoiere simplă, în ce secțiune se face verificarea:

- a) în secțiunea unde doar momentul încovoietor are valoarea maximă;
- b) în secțiunea unde doar forța tăietoare are valoarea maximă;
- c) în secțiunile unde ambele eforturi au valori maxime.

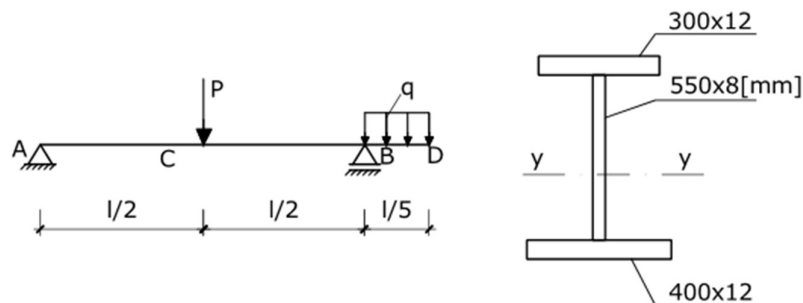


Fig. 14.10.4.

10. Se dă grinda simplu rezemată solicitată ca în Fig.14.10.4, având secțiunea transversală de tip I cu tălpi inegale. Unde se verifică tensiunile normale maxime?
- la mijlocul tălpii superioare;
  - la mijlocul tălpii inferioare;
  - la mijlocul inimii secțiunii;
  - la nivelul axei y-y.

### LUCRAREA NR. 11

- Cum variază tensiunile normale pe înălțimea secțiunii?
  - constant;
  - liniar;
  - parabolic.
- Cum variază tensiunile tangențiale pe înălțimea secțiunii?
  - constant;
  - liniar;
  - parabolic.
- Care este secțiunea în care tensiunile tangențiale ating valoarea maximă?
  - secțiunea cu efort maxim;
  - încastrarea;
  - fibra extremă.
- În care fibră a secțiunii tensiunile tangențiale ating valoarea extremă?
  - în fibra extremă cea mai îndepărtată de axa neutră;
  - în axa neutră.
- Momentul capabil al secțiunii unei grinzi depinde de:
  - aria secțiunii transversale;
  - modulul de rezistență al secțiunii;
  - lungimea inițială a grinzii;
  - nici una din variantele a)...c).

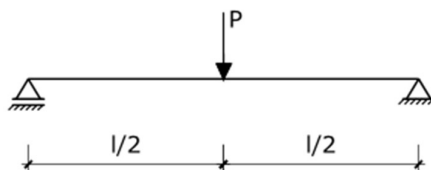


Fig. 14.11.1.

- Care este valoarea forței capabile pentru grinda din Fig. 14.11.1?
  - $P_{cap} = \frac{4 \cdot M_{cap}}{l}$ ;

- b)  $P_{cap} = \frac{M_{cap}}{l}$  ;  
 c)  $P_{cap} = \frac{3}{4} M_{cap}$ .

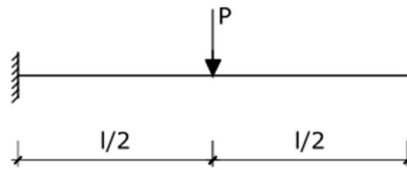


Fig. 14.11.2.

7. Care este valoarea forței capabile pentru grinda din Fig. 14.11.2?

- a)  $P_{cap} = \frac{2M_{cap}}{l}$  ;  
 b)  $P_{cap} = \frac{M_{cap}}{l}$  ;  
 c)  $P_{cap} = M_{cap}$ .

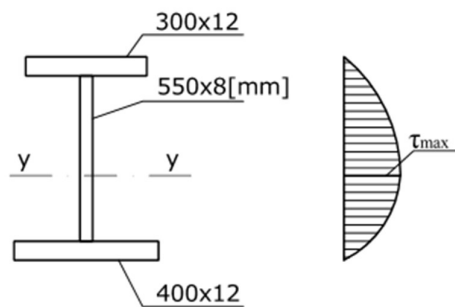


Fig. 14.11.3.

8. Este corect reprezentată diagrama  $\tau$  din Fig. 14.11.3?

- a) da, este corect;  
 b) nu, reprezentarea este greșită.

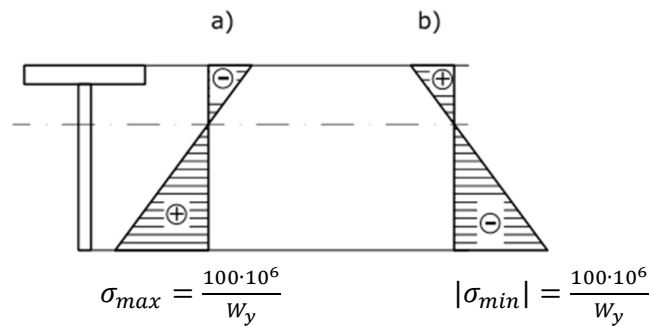


Fig. 14.11.4.

9. Momentul maxim al grinzii din Fig. 14.11.4 este  $|M|_{max}=100 \text{ kNm}$  și este negativ. Care este diagrama corectă a tensiunilor normale?

- a) diagrama corectă este a;
- b) diagrama corectă este b.

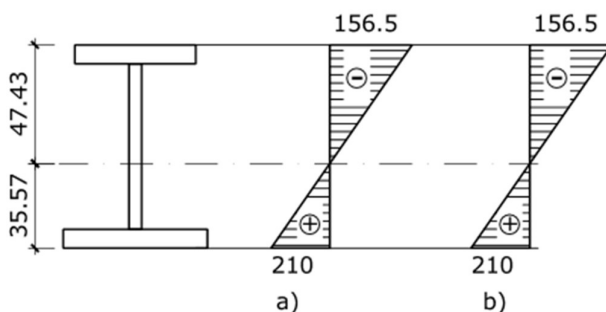


Fig. 14.11.5.

10. Grinda din Fig. 14.11.5 are  $I_y = 110241 \text{ cm}^4$ ;  $W_y = 2309.7 \text{ cm}^3$ ;  $M_{\max} = 485 \text{ kNm}$ . Care dintre diagramele de mai jos este corectă?

- a) diagrama corectă este a;
- b) diagrama corectă este b.

## LUCRAREA NR. 12

1. Grinzile încovoiate au deplasări longitudinale:

- a) mici și se pot neglija;
- b) mici, dar nu pot fi neglijate;
- c) mari și nu pot fi neglijate.

2. Care din următoarele ipoteze sunt admise la stabilirea ecuației axei deformată a grinzilor încovoiate?

- a) ipoteza secțiunilor plane;
- b) lungimea axei neutre nu se modifică după deformare;
- c) ipoteza micilor deformații.

3. Axa deformată a barei supusă la încovoiere simplă este:

- a) o curbă continuă;
- b) o curbă netedă;
- c) o curbă discontinuă (cu salturi) în anumite puncte.

4. Se dă grinda din Fig. 14.12.1. Care este schema statică a grinzii conjugate corespunzătoare?

- a) varianta a este corectă;
- b) varianta b este corectă;
- c) varianta c este corectă.

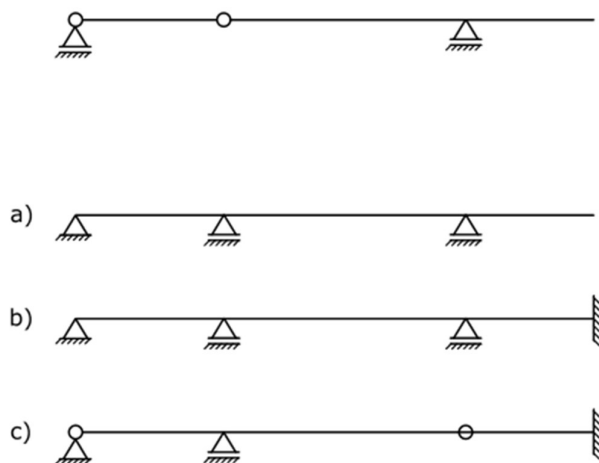


Fig. 14.12.1.

5. Pe grinda reală există un reazem simplu intermediar. Care sunt condițiile care se pun în vederea transformării lui în reazem conjugat?

- a)  $w = 0$ ;
- b)  $M^{stg} = M^{dr}$ ;
- c)  $\varphi^{stg} = \varphi^{dr}$ ;
- d)  $T^{stg} = T^{dr}$ .

6. Care este efectul forțelor tăietoare asupra deplasărilor grinzilor încovoiate?

- a) produc deplasări axiale;
- b) produc săgeți suplimentare;
- c) produc rotiri suplimentare.

7. Care este secțiunea unde se produce săgeata maximă?

- a) aproximativ la jumătatea deschiderii grinzilor simplu rezemate;
- b) în secțiunea unde se anulează rotirea.

8. Condiția de rigiditate se exprimă în:

- a) tensiuni;
- b) eforturi;
- c) deplasări.

9. Săgețile pozitive se măsoară în sens:

- a) ascendent (opus axei Oz);
- b) descendent (sensul axei Oz).

10. Se dă grinda cu rigiditate variabilă din Fig. 14.12.2. Care este grinda conjugată corespunzătoare?

- a) varianta a este corectă;

- b) varianta b este corectă;  
c) varianta c este corectă.

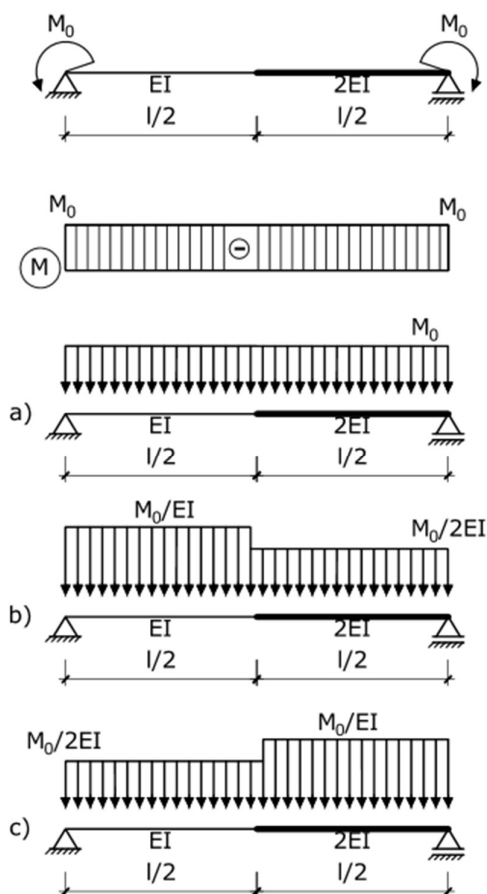


Fig. 14.12.2.

### LUCRAREA NR. 13

1. Momentul de torsiune pozitiv are sensul:

- a) normalei exterioare;  
b) axei barei;  
c) axei  $Ox$ .

2. Care dintre ipotezele de mai jos nu se aplică în cazul torsiunii barelor de secțiune dreptunghiulară?

- a) ipoteza micilor deformații;  
b) principiul lui Saint-Venant;  
c) ipoteza secțiunilor plane.

3. Ce fel de tensiuni apar în secțiunile barelor supuse la torsiune pură?

- a) tensiuni normale;

b) tensiuni tangențiale.

4. Ce direcție au tensiunile în cazul unei secțiuni inelare?

- a) tangente la rază;
- b) perpendiculare pe rază;
- c) tangente la contur.

5. Unde se obține tensiunea maximă într-o secțiune dreptunghiulară supusă la torsiune?

- a) la jumătatea laturii lungi;
- b) la jumătatea laturii scurte;
- c) în centrul de greutate al secțiunii.

6. Care sunt mărimile care caracterizează rigiditatea la torsiune a unei bare?

- a) modulul de elasticitate longitudinal;
- b) modulul de elasticitate transversal;
- c) momentul de inerție polar.

7. Care bare au o comportare mai bună la torsiune?

- a) barele cu pereți subțiri cu profil deschis;
- b) barele cu pereți subțiri cu profil închis.

8. Momentul de inerție convențional la torsiune se calculează în raport cu:

- a) axa neutră;
- b) axa centrală principală în raport cu care se produce torsiunea;
- c) nu depinde de sistemul de axe.

9. Ce fel de deformații se produc în bara circulară supusă la torsiune pură?

- a) deformații elastice;
- b) deformații longitudinale;
- c) deformații transversale;
- d) lunecări.

10. Ce condiții se pun în capătul încastrat al unei bare torsionate?

- a) momentul de torsiune să fie nul.
- b) unghiul de torsiune să fie nul;
- c) ambele condiții de mai sus.



## **RĂSPUNSURILE LA TESTUL DE VERIFICARE A CUNOȘTIȚELOR**

- LUCRAREA NR. 1.** 1:a,b,c; 2:b; 3:a; 4:a; 5:a,c; 6:c; 7:a; 8:b; 9:a; 10:a.
- LUCRAREA NR. 2.** 1:b; 2:c; 3:c; 4:a,b; 5:a,b; 6:b,c,d; 7:d; 8:b; 9:a; 10:b.
- LUCRAREA NR. 3.** 1:b; 2:b,c; 3:b; 4:a; 5:a,b; 6:a; 7:a; 8:b; 9:a; 10:c.
- LUCRAREA NR. 4.** 1:a; 2:a; 3:b; 4:b; 5:a; 6:a; 7:c; 8:b; 9:a; 10:a.
- LUCRAREA NR. 5.** 1:b; 2:b; 3:b; 4:d; 5:c; 6:b,c; 7:a; 8:a; 9:c; 10:c.
- LUCRAREA NR. 6.** 1:a; 2:b; 3:a; 4:b,c; 5:a,c; 6:b; 7:b; 8:c; 9:c; 10:b.
- LUCRAREA NR. 7.** 1:c; 2:b,c; 3:b; 4:c; 5:b; 6:a,b; 7:b; 8:b; 9:b; 10:c.
- LUCRAREA NR. 8.** 1:b,c; 2:c; 3:b; 4:a,b; 5:b; 6:b; 7:b; 8:a,b,c; 9:b,c; 10:a.
- LUCRAREA NR. 9.** 1:b; 2:c; 3:b; 4:c; 5:b; 6:b; 7:b; 8:a; 9: nici un răspuns nu e corect; 10:a.
- LUCRAREA NR. 10.** 1:b; 2:c; 3:a,b; 4:a; 5:a; 6:c; 7:b; 8:a; 9:c; 10:d.
- LUCRAREA NR. 11.** 1:b; 2:c; 3:a; 4:b; 5:b; 6:a; 7:a; 8:b; 9:b; 10:b.
- LUCRAREA NR. 12.** 1:a; 2:a,b,c; 3:a,b; 4:c; 5:a,c; 6:b,c; 7:b; 8:c; 9:b; 10:b.
- LUCRAREA NR. 13.** 1:a; 2:c; 3:c; 4:b,c; 5:a; 6:b,c; 7:b; 8:b,c; 9:a,d; 10:b.

# **ANEXE**

## Anexa 1

## Unități de măsură

Sistemul Internațional de Unități (Système International d'Unités), prescurtat SI, a fost adoptat la cea de-A XI-a Conferință Generală de Măsură și Greutăți, desfășurată la Paris, în anul 1960. Se bazează pe Sistemul MKS din 1954 (Metru – unitate de măsură pentru lungime, Kilogramul – unitate de măsură a masei, Secunda – unitatea de măsură a timpului).

Începând cu data de 31 august 1961, SI s-a introdus și în România, ca sistem unic, “legal și obligatoriu” pentru toate domeniile de măsură.

Din cele șapte mărimi fundamentale ale SI (lungimea, masa, timpul, intensitatea curentului electric, temperatura termodinamică, intensitatea luminoasă și cantitatea de substanță), ne interesează în mod deosebit primele trei: lungimea, masa și timpul, cu *unitățile de măsură fundamentale* respective, trecute în Tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Mărimia	Relația dimensională	Unitatea de măsură fundamentală	Simbolul
1	Lungimea	L	metrul	m
2	Masa	M	kilogramul	kg
3	Timpul	T	secunda	s

Unitățile derivate ale SI se pot forma combinând unitățile fundamentale pe baza unei relații dimensionale de forma  $L^{n_1}M^{n_2}T^{n_3}$ , din care se deduce unitatea de măsură corespunzătoare  $m^{n_1}kg^{n_2}s^{n_3}$ , uneori având denumiri și simboluri speciale;  $n_1$ ,  $n_2$  și  $n_3$  sunt exponenți. Cu ajutorul unor unități suplimentare (adimensionale) este posibilă exprimarea unor unități derivate. În Tabelul 2 sunt date unitățile derivate mai des întâlnite.

Tabelul 2

Nr. crt.	Mărimia	Relația dimensională	Unitatea de măsură (denumirea)	Simbolul
1	Aria	$L^2M^0T^0$	metru pătrat	$m^2$
2	Volumul	$L^3M^0T^0$	metru cub	$m^3$
3	Viteza	$L^1M^0T^{-1}$	metru pe secundă	m/s
4	Accelerația	$L^1M^0T^{-2}$	metru pe secundă la pătrat	$m/s^2$
5	Viteza unghiulară	$L^0M^0T^{-1}$	radian pe secundă	rad/s
6	Accelerația unghiulară	$L^0M^0T^{-2}$	radian pe secundă la pătrat	$rad/s^2$
7	Densit.; masa specifică ( $\rho$ )	$L^{-3}M^1T^0$	kilogram pe metru cub	$kg/m^3$
8	Volumul specific	$L^3M^{-1}T^0$	metru cub pe kilogram	$m^3/kg$

Tabelul 2 (continuare)

Nr. crt.	Mărimea	Relația dimensională	Unitatea de măsură (denumirea)	Simbolul
9	Forța	$L^1M^1T^{-2}$	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
10	Tensiunea mecanică; presiunea	$L^{-1}M^1T^{-2}$	newton pe metru pătrat, pascal (Pa)	$N/m^2$
11	Greutatea specifică ( $\gamma = \rho \cdot g$ )	$L^{-2}M^1T^{-2}$	newton pe metru cub	$N/m^3$
12	Deformația liniară ( $\epsilon$ ); unghiulară ( $\gamma$ )	$L^0M^0T^0$	milimetru pe metru, radian	mm/m rad
13	Răsucirea specifică ( $\Theta$ )	$L^{-1}M^0T^0$	radian pe metru	rad/m
14	Energia; lucrul mecanic	$L^2M^1T^{-1}$	joule (J)	$N \cdot m$
15	Puterea	$L^2M^1T^{-3}$	watt (W)	J/s
16	Frecvența	$L^0M^0T^{-1}$	hertz (Hz)	1/s

Multiplii și submultiplii zecimali ai unităților SI se formează cu ajutorul prefixelor date în Tabelul 3.

Tabelul 3

Factor	Prefix	Simbol	Factor	Prefix	Simbol
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	K	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hecto	H	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deca	da	$10^{-24}$	yocto	y

Exemple:

1 kN (kilonewton) =  $10^3$  N =  $10^2$  daN; 1 daN (decanewton) = 10 N,  
 1 MPa (megapascal) =  $10^6$  Pa =  $10^6$  N/m<sup>2</sup> = 1 N/mm<sup>2</sup>; 1 mm (milimetru) =  $10^{-3}$  m,  
 1 Km (kilometru) =  $10^3$  m =  $10^5$  cm =  $10^6$  mm; 1 cm (centimetru) =  $10^{-2}$  m,  
 1 fm (femtometru) =  $10^{-15}$  m,  
 1 Hm (hectometru) =  $10^2$  m.

Alte unități de măsură, care se mențin temporar împreună cu SI sunt

- pentru lungimi:
  - 1 in (inch - țol) = 25.40 mm (1 mm = 0.03937 in),
  - 1 stj (stânjen) = 1.962 m,
  - 1 Mt (milă terestră) = 1609.344 m; 1 Mm (milă marină) = 1851.850 m.
- pentru suprafețe:

- 1 Km<sup>2</sup> (kilometru pătrat) = 10<sup>6</sup> m<sup>2</sup> = 10<sup>10</sup> cm<sup>2</sup>,
  - 1 a (ar) = 10<sup>2</sup> m<sup>2</sup>,
  - 1 ha (hectar) = 10<sup>2</sup> a = 10<sup>4</sup> m<sup>2</sup>,
  - 1 stj<sup>2</sup> (stânjien pătrat) = 3.85 m<sup>2</sup>,
  - 1 ig (iugăr) = 1500 stj<sup>2</sup> = 5775 m<sup>2</sup> = 0.5775 ha. } unități de măsură  
pentru suprafețe de  
teren agricol sau  
silvic.
- pentru volume (capacitate):
    - 1 st (ster) = 1 m<sup>3</sup> (unitate de măsură pentru cubajul lemnului stivuit),
    - 1 m<sup>3</sup> (metru cub) = 10<sup>6</sup> cm<sup>3</sup> = 10<sup>3</sup> dm<sup>3</sup> = 10<sup>3</sup> ℓ, 1 ℓ (litru) = 1 dm<sup>3</sup>.
  - pentru masă, forțe, tensiuni mecanice și presiune:
    - 1 t (tonă) = 10<sup>3</sup> kg = 10<sup>6</sup> g,
    - 1 q (quintal) = 10<sup>2</sup> kg = 10<sup>5</sup> g,
    - 1 tf (tonă-forță) = 10<sup>3</sup> kgf = 10<sup>4</sup> N = 10<sup>3</sup> daN; 1 kgf = 1 daN = 10 N,
    - 1 dyn (dină) = 10<sup>-5</sup> N,
    - 1 Pa (pascal) = 1 N/m<sup>2</sup> = 10 dyn/cm<sup>2</sup> = 0.10 kgf/m<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> daN/cm<sup>2</sup>,
    - 1 bar = 10<sup>5</sup> Pa = 10<sup>6</sup> dyn/cm<sup>2</sup> = 1 daN/cm<sup>2</sup>,
    - 1 at (atmosferă tehnică) = 1 kgf/cm<sup>2</sup> = 10<sup>5</sup> Pa = 1 bar,
    - 1 atm (atmosferă fizică) = 760 torr = 101325 Pa,
    - 1 Torr (1 mm Hg) = 133.322 Pa.
  - pentru energie, lucru mecanic și putere:
    - 1 J (joule) = 1 Nm = 10<sup>7</sup> erg; 1 erg = 10<sup>-8</sup> kgfm = 10<sup>-8</sup> daNm = 10<sup>-10</sup> KNm,
    - 1 kWh (kilowattoră) = 36·10<sup>12</sup> erg = 859.845 kcal,
    - 1 kW = 10<sup>3</sup> W = 10<sup>2</sup> kgfm/s = 1.360 CP,
    - 1 CP (cal-putere) = 736 W = 75 kgfm/s = 0.986 CPel,
    - 1 W (watt) = 1 J/s.
  - pentru timp:
    - 1 min (minut) = 60 s,
    - 1 h (oră) = 60 min = 3 600 s,
    - 1 d (zi) = 24 h = 86 400 s.
  - pentru unghiuri sexagesimale:
    - 1<sup>0</sup> (grad) = (π/180) rad,
    - 1' (minut) = (1/60)<sup>0</sup> = (π/10 800) rad,
    - 1'' (secundă) = (1/60)' = (π/648 000) rad,
    - 1 rad = (180/ π)<sup>0</sup> = 57<sup>0</sup>17'45''(57.29578<sup>0</sup>).
  - pentru temperatură: cea mai utilizată în practică este temperatura în grade măsurate pe Scara Celsius (centesimală), gradată de la 0<sup>0</sup> C (temperatura de îngheț a apei) la 100<sup>0</sup> C (temperatura de fierbere a apei). Se notează cu simbolul t (°C). Extinderea la Scara Kelvin

se face dacă la  $0^{\circ}\text{C} \rightarrow 273.16^{\circ}\text{K}$ , iar la  $100^{\circ}\text{C} \rightarrow 373.16^{\circ}\text{K}$ , originea Scării Kelvin ( $-273.16^{\circ}\text{C}$ ) reprezentând “0 absolut”, cea mai scăzută temperatură posibilă.

Câteva definiții:

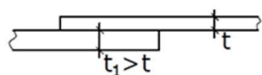
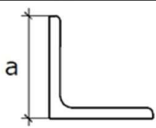
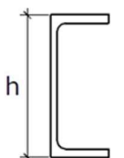
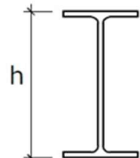
- *Newton*-ul reprezintă forța care imprimă unui corp cu masa de 1 kg o accelerație egală cu  $1 \text{ m/s}^2$ ;  $1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$ ,
- *Dina* (CGS) este forța care imprimă unui corp cu masa de 1 g o accelerație egală cu  $1 \text{ cm/s}^2$ ;  $1 \text{ dyn} = 1 \text{ gcm/s}^2$ ;
- *Pascal*-ul este presiunea – tensiunea mecanică produsă de o forță egală cu 1 N pe o suprafață de  $1 \text{ m}^2$ ;  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ,
- *Joule*-ul constituie lucrul mecanic (energia) efectuat de o forță egală cu 1 N prin deplasarea punctului său de aplicație cu 1 m pe direcția forței;  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$ ,
- *Watt*-ul este lucrul mecanic (energia) produs de 1 J timp de 1 s;  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ ,
- *Densitatea* (masa specifică) reprezintă masa unității de volum ( $\rho$ );  $\text{kg/m}^3$ ,
- *Greutatea specifică* reprezintă greutatea unității de volum ( $\gamma = \rho \cdot g$ );  $\text{N/m}^3$ ,
- *Radianul* este unghiul cu vârful în centrul unui cerc delimitând pe acest cerc un arc de lungime egală cu raza cercului; *rad*,
- *Viteza* – în mișcarea rectilinie, reprezintă spațiul parcurs de un mobil în unitatea de timp;  $\text{m/s}$ ,
- *Viteza unghiulară* – în mișcarea circulară, este unghiul cu care s-a rotit un corp în unitatea de timp;  $\text{rad/s}$ ,
- Variațiile vitezelor în unitatea de timp reprezintă *acclerația* ( $\text{m/s}^2$ ) și, respectiv, *acclerația unghiulară* ( $\text{rad/s}^2$ ).

*Obs.:* S-a considerat accelerația gravitațională  $g = 10 \text{ m/s}^2$  (valoare exactă,  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ ).

**Anexa 2**

**Date pentru îmbinările cu nituri sau cu șuruburi**

**A.2.1. Alegerea diametrului maxim al găurii pentru nit sau șurub**

Elementul care se îmbină și dimensiunea caracteristică	Diametru maxim al găurii de nit/șurub ( $d_g$ ), în funcție de valoarea: $t, a, h$ (dimensiuni în mm)					
	13	17	21	23	25	28
	4...6	7...8	9...12	10...14	13...18	> 18
	≥ 45	≥ 50	≥ 70	≥ 80	≥ 90	≥ 140
	≥ 80	≥ 120	≥ 160	≥ 200	≥ 240	-
	≥ 180	≥ 240	≥ 300	≥ 360	-	-

**A.2.2. Distanțele dintre nituri/șuruburi (construcții civile, industriale și agricole)**

Distanțe	Bare supuse la		Distanțe (vezi Fig. A.2.)				
			e	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>
minime	întindere	când marginile sunt tăiate la profile laminate	3d	3d	2d	1.5d 1.2d	2.6d
		compresiune	3d	3d	2d	1.5d 1.2d	2.6d
maxime	întindere	pe șirurile marginale, când marginea nu este întărită cu corniere de margine	8d sau 12t	8d sau 12t	4d sau 8t	4d sau 8t	7d sau 10.4t
		pe șirurile interioare și pe cele marginale, când există corniere de margine	16d sau 24t	16d sau 24t			
	compresiune	pe șirurile marginale, când marginea nu este întărită cu corniere de margine	8d sau 12t	8d sau 12t	4d sau 8t	4d sau 8t	7d sau 10.4t
		pe șirurile interioare și pe cele marginale, când există corniere de margine	16d sau 18t	16d sau 18t			

$d$  – diametrul găurii pentru nituri sau șuruburi;  
 $t$  – grosimea celui mai subțire element exterior din pachet.

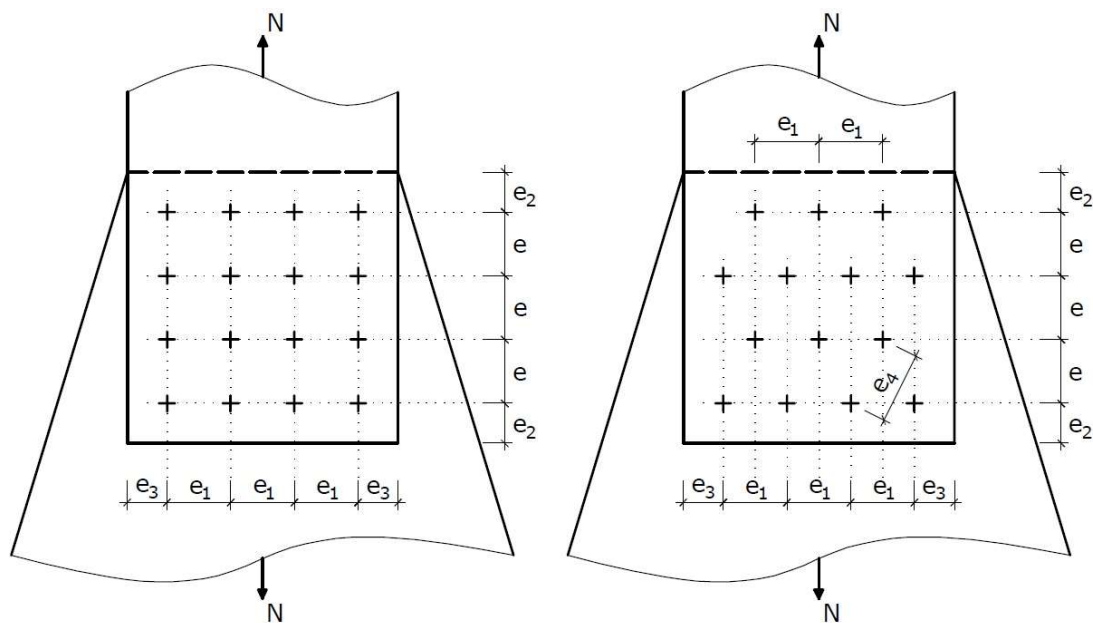


Fig. A.2.

### A.2.3. Distanțele dintre nituri/șuruburi (poduri)

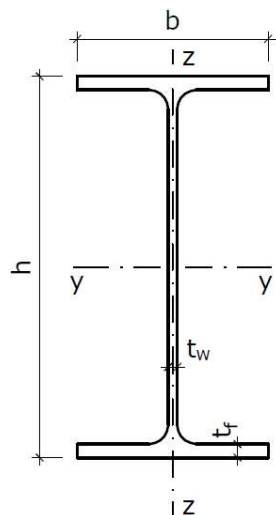
Distanțe	Bare supuse la	Distanțe (Fig. A.2.)				
		$e$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
minime	întindere sau compresiune	$3.5d$	$3.5d$	$2d$	$1.5d$	$3d$
maxime	întindere	$10d$ sau $20t$	$10d$ sau $20t$	$3d$ sau $6t$	$3d$ sau $6t$	$8.7d$ sau $17.3t$
	compresiune	$6d$ sau $12t$	$6d$ sau $12t$	$3d$ sau $6t$	$3d$ sau $6t$	$5.2d$ sau $10.4t$

Notă: Pentru distanțele care depind de diametrul  $d$  și de grosimea  $t$  se alege valoarea minimă.



### Anexa 3.1

### Profile IPE laminate la cald



Raportate la axa respectivă:

$I$  = momentul de inerție;

$W$  = modulul de rezistență;

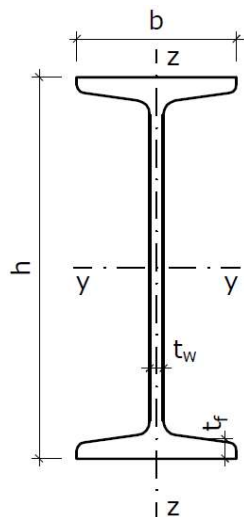
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  - raza de girație.

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria A (cm <sup>2</sup> )	Mărimile statice pentru axele					
						Y-Y			Z-Z		
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)
IPE 80	80	46	3.8	5.2	7.64	80.1	20.0	3.24	8.49	3.69	1.05
IPE 100	100	55	4.1	5.7	10.3	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24
IPE 120	120	64	4.4	6.3	13.2	318	53.0	4.90	27.7	8.65	1.45
IPE 140	140	73	4.7	6.9	16.4	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria  A (cm <sup>2</sup> )	Mărimile statice pentru axe					
						Y-Y			Z-Z		
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)
IPE 160	160	82	5	7.4	20.1	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84
IPE 180	180	91	5.3	8	23.9	1317	146	7.42	101	22.2	2.05
IPE 200	200	100	5.6	8.5	28.5	1943	194	8.26	142	28.5	2.24
IPE 220	220	110	5.9	9.2	33.4	2772	252	9.11	205	37.3	2.48
IPE 240	240	120	6.2	9.8	39.1	3892	324	9.97	284	47.3	2.69
IPE 270	270	135	6.6	10.2	45.9	5790	429	11.2	420	62.2	3.02
IPE 300	300	150	7.1	10.7	53.8	8356	557	12.5	604	80.5	3.35
IPE 330	330	160	7.5	11.5	62.6	11770	713	13.7	788	98.5	3.55
IPE 360	360	170	8.0	12.7	72.7	16270	904	15.0	1043	123	3.79
IPE 400	400	180	8.6	13.5	84.5	23130	1160	13.3	1318	146	3.95
IPE 450	450	190	9.4	14.6	98.8	33740	1500	18.5	1676	176	4.12
IPE 500	500	200	10.2	16.0	116	48200	1930	20.4	2142	214	4.31
IPE 550	550	210	11.1	17.2	134	67120	2440	22.4	2668	254	4.45
IPE 600	600	220	12.0	19.0	156	92080	3070	24.3	3387	308	4.66

### Anexa 3.2

### Profile IPN laminate la cald



Raportate la axa respectivă:

$I$  = momentul de inerție;

$W$  = modulul de rezistență;

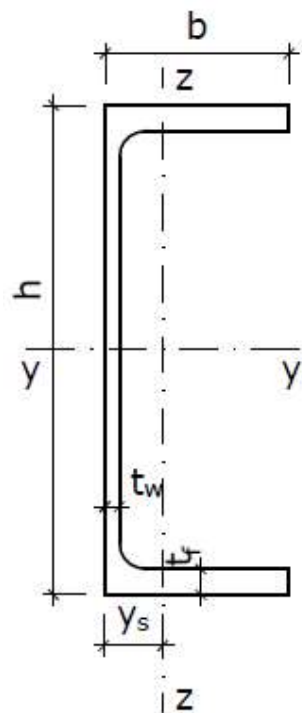
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  - raza de girație.

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria A (cm <sup>2</sup> )	Mărimile statice pentru axele					
						Y-Y			Z-Z		
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)
IPN 80	80	42	3.9	5.9	7.57	77.8	19.5	3.20	6.29	3.00	0.91
IPN 100	100	50	4.5	6.8	10.6	171	34.2	4.01	12.2	4.88	1.07
IPN 120	120	58	5.1	7.7	14.2	328	54.7	4.81	21.5	7.41	1.23
IPN 140	140	66	5.7	8.6	18.2	573	81.9	5.61	35.2	10.7	1.40

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria A (cm <sup>2</sup> )	Mărimile statice pentru axe					
						Y-Y			Z-Z		
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)
IPN 160	160	74	6.3	9.5	22.8	935	117	6.40	54.7	14.8	1.55
IPN 180	180	82	6.9	10.4	27.9	1450	161	7.20	81.3	19.8	1.71
IPN 200	200	90	7.5	11.3	33.4	2140	214	8.00	117	26.0	1.87
IPN 220	220	98	8.1	12.2	39.5	3060	278	8.80	162	33.1	2.02
IPN 240	240	106	8.7	13.1	46.1	4250	354	9.59	221	41.7	2.20
IPN 260	260	113	9.4	14.1	53.3	5740	442	10.4	288	51.0	2.32
IPN 280	280	119	10.1	15.2	61.0	7590	542	11.1	364	61.2	2.45
IPN 300	300	125	10.8	16.2	69.0	9800	653	11.9	451	72.2	2.56
IPN 320	320	131	11.5	17.3	77.7	12510	782	12.7	555	84.7	2.67
IPN 340	340	137	12.2	18.3	86.7	15700	923	13.5	674	98.4	2.80
IPN 360	360	143	13.0	19.5	97.0	19610	1090	14.2	818	114	2.90
IPN 380	380	149	13.7	20.5	107	24010	1260	15.0	975	131	3.02
IPN 400	400	155	14.4	21.6	118	29210	1460	15.7	1160	149	3.13
IPN 450	450	170	16.2	24.3	147	45850	2040	17.7	1730	203	3.43
IPN 500	500	185	18.0	27.0	179	68740	2750	19.6	2480	268	3.72
IPN 550	550	200	19.0	30.0	212	99180	3610	21.6	3490	349	4.02
IPN 600	600	215	21.6	32.4	254	139000	4630	23.4	4670	434	4.30

### Anexa 3.3

#### Profil UPE – profil U cu flanșe paralele și lărgite



Raportate la axa respectivă:

$I$  = momentul de inerție;

$W$  = modulul de rezistență;

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  - raza de girație.

$h$  = înălțimea profilului;

$b$  = lățimea profilului;

$t_w$  = grosimea inimii;

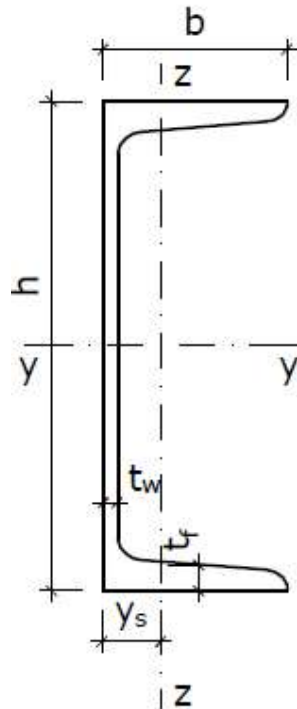
$t_f$  = grosimea tălpilor;

$y_s$  = distanța axei Z-Z față de marginea exterioară a inimii.

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria  A (cm <sup>2</sup> )	Mărimile statice pentru axele						
						Y-Y			Z-Z			
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)	y <sub>s</sub> (cm)
UPE 80	80	50	4.0	7.0	10.1	107	26.8	3.26	25.5	8.0	1.59	1.82
UPE 100	100	55	4.5	7.5	12.5	207	41.4	4.07	38.3	10.6	1.75	1.91
UPE 120	120	60	5.0	8.0	15.4	364	60.6	4.86	55.5	13.8	1.90	1.98
UPE 140	140	65	5.0	9.0	18.4	600	85.6	5.71	78.8	18.2	2.07	2.17
UPE 160	160	70	5.5	9.5	21.7	911	114	6.48	107	22.6	2.22	2.27
UPE 180	180	75	5.5	10.5	25.1	1350	150	7.34	144	28.6	2.39	2.47
UPE 200	200	80	6.0	11.0	29.0	1910	191	8.11	187	34.5	2.54	2.56
UPE 220	220	85	6.5	12.0	33.9	2680	244	8.90	247	42.5	2.70	2.70
UPE 240	240	90	7.0	12.5	38.5	3600	300	9.67	311	50.1	2.84	2.79
UPE 270	270	95	7.5	13.5	44.8	5250	389	10.8	401	60.7	2.99	2.89
UPE 300	300	100	9.5	15.0	56.6	7820	522	11.8	538	75.6	3.08	2.89
UPE 330	330	105	11.0	16.0	67.8	11010	667	12.7	681	89.7	3.17	2.90
UPE 360	360	110	12.0	17.0	77.9	14830	824	13.8	844	105	3.29	2.97
UPE 400	400	115	13.5	18.0	91.9	20980	1050	15.1	1045	123	3.37	2.98

Anexa 3.4

Profil UPN – profil U normal cu margini înclinate



Raportate la axa respectivă:

$I$  = momentul de inerție;

$W$  = modulul de rezistență;

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  - raza de girație.

$h$  = înălțimea profilului;

$b$  = lățimea profilului;

$t_w$  = grosimea inimii;

$t_f$  = grosimea medie a tălpilor;

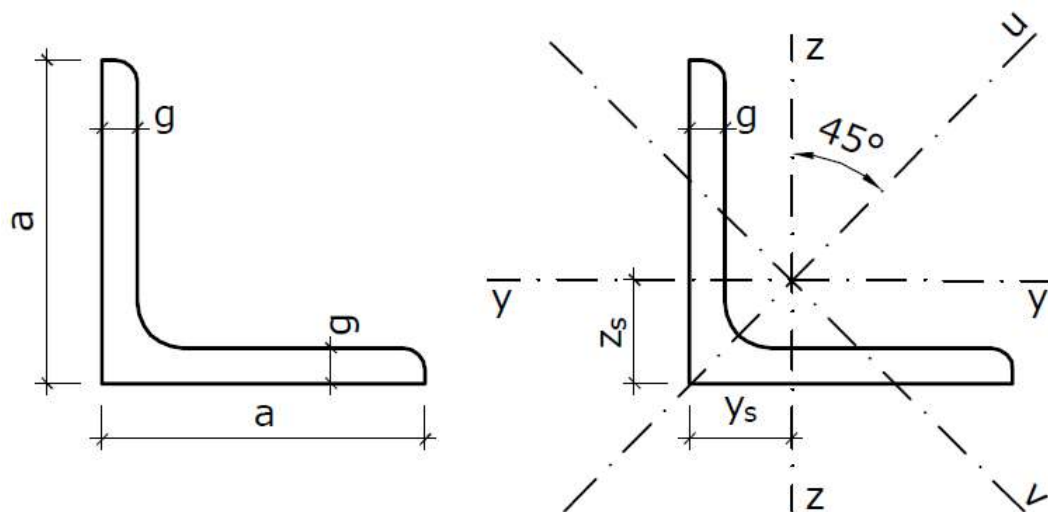
$y_s$  = distanța axei Z-Z față de marginea exterioară a inimii.

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)				Aria	Mărimile statice pentru axele						
	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>		A (cm <sup>2</sup> )	Y-Y			Z-Z		
					I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )		W <sub>y</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> (cm)	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>z</sub> (cm)	
UPN 50	50	38	5.0	7.0	7.12	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37
UPN 65	65	42	5.5	7.5	9.03	57.5	17.7	2.52	14.1	5.07	1.25	1.42
UPN 80	80	45	6.0	8.0	11.0	106	26.5	3.10	19.4	6.36	1.33	1.45
UPN 100	100	50	6.0	8.5	13.5	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55
UPN 120	120	55	7.0	9.0	17.0	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.60
UPN 140	140	60	7.0	10.0	20.4	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75
UPN 160	160	65	7.5	10.5	24.0	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84
UPN 180	180	70	8.0	11.0	28.0	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92
UPN 200	200	75	8.5	11.5	32.2	1910	191	7.70	148	27.0	2.14	2.01
UPN 220	220	80	9.0	12.5	37.4	2690	245	8.48	197	33.6	2.30	2.14
UPN 240	240	85	9.5	13.0	42.3	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23
UPN 260	260	90	10.0	14.0	48.3	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36
UPN 280	280	95	10.0	15.0	53.3	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53
UPN 300	300	100	10.0	16.0	58.8	8030	535	11.7	495	67.8	2.90	2.70
UPN 320	320	100	14.0	17.5	75.8	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.60
UPN 350	350	100	14.0	16.0	77.3	12840	734	12.9	570	75.0	2.72	2.40
UPN 380	380	102	13.5	16.0	80.4	15760	829	14.0	615	78.7	2.77	2.38
UPN 400	400	110	14.0	18.0	91.5	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65



Anexa 3.5

Oțel laminat la cald cu aripi egale (Oțel cornier)



Raportate la axa respectivă:

$I$  = momentul de inerție;

$W$  = modulul de rezistență;

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  - raza de girație.

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea $A$ (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea $z_s=y_s$ (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					$I_y=I_z$ (cm <sup>4</sup> )	$W_y=W_z$ (cm <sup>3</sup> )	$i_y=i_z$ (cm)	$I_u$ (cm <sup>4</sup> )	$i_u$ (cm)	$I_v$ (cm <sup>4</sup> )	$i_v$ (cm)
L 20 x 20 x 3	20	3	1.12	0.596	0.388	0.276	0.589	0.614	0.740	0.162	0.380
L 25 x 25 x 3	25	3	1.42	0.721	0.796	0.448	0.749	1.26	0.944	0.329	0.481
L 25 x 25 x 4	25	4	1.85	0.761	1.01	0.582	0.740	1.60	0.930	0.425	0.479

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 30 x 30 x 3	30	3	1.74	0.835	1.40	0.649	0.899	2.23	1.13	0.579	0.578
L 30 x 30 x 4	30	4	2.27	0.878	1.80	0.850	0.892	2.86	1.12	0.749	0.575
L 35 x 35 x 4	35	4	2.67	1.00	2.95	1.18	1.05	4.69	1.33	1.22	0.68
L 35 x 35 x 5	35	5	3.28	1.04	3.56	1.45	1.04	5.64	1.31	1.49	0.67
L 40 x 40 x 4	40	4	3.08	1.12	4.47	1.55	1.21	7.10	1.52	1.84	0.77
L 40 x 40 x 5	40	5	3.79	1.16	5.43	1.91	1.20	8.61	1.51	2.25	0.77
L 40 x 40 x 6	40	6	4.48	1.20	6.31	2.26	1.19	9.99	1.49	2.64	0.77
L 45 x 45 x 3	45	3	2.66	1.18	4.93	1.49	1.36	7.81	1.71	2.04	0.88
L 45 x 45 x 4	45	4	3.49	1.23	6.43	1.97	1.36	10.21	1.71	2.65	0.87
L 45 x 45 x 4.5	45	4.5	3.90	1.26	7.15	2.20	1.35	11.35	1.71	2.95	0.87
L 45 x 45 x 5	45	5	4.30	1.28	7.84	2.43	1.35	12.45	1.70	3.24	0.87
L 45 x 45 x 6	45	6	5.09	1.32	9.16	2.88	1.34	14.52	1.69	3.81	0.86
L 45 x 45 x 7	45	7	5.86	1.36	10.40	3.31	1.33	16.44	1.67	4.36	0.86
L 50 x 50 x 4	50	4	3.89	1.36	8.97	2.46	1.52	14.25	1.91	3.70	0.97
L 50 x 50 x 5	50	5	4.80	1.40	10.96	3.05	1.51	17.41	1.90	4.52	0.97
L 50 x 50 x 6	50	6	5.69	1.45	12.84	3.61	1.50	20.37	1.89	5.31	0.97
L 50 x 50 x 7	50	7	6.56	1.49	14.61	4.16	1.49	23.14	1.88	6.09	0.96
L 50 x 50 x 8	50	8	7.41	1.52	16.28	4.68	1.48	25.71	1.86	6.85	0.96
L 50 x 50 x 9	50	9	8.24	1.56	17.86	5.20	1.47	28.11	1.85	7.61	0.96

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 55 x 55 x 4	55	4	4.31	1.47	12.00	2.98	1.67	19.05	2.10	4.95	1.07
L 55 x 55 x 5	55	5	5.32	1.52	14.71	3.70	1.66	23.37	2.10	6.06	1.07
L 55 x 55 x 6	55	6	6.31	1.56	17.29	4.39	1.66	27.44	2.09	7.13	1.06
L 60 x 60 x 4	60	4	4.71	1.60	15.78	3.58	1.83	25.04	2.31	6.54	1.18
L 60 x 60 x 5	60	5	5.82	1.64	19.37	4.45	1.82	30.77	2.30	7.97	1.17
L 60 x 60 x 6	60	6	6.91	1.69	22.79	5.29	1.82	36.20	2.29	9.38	1.17
L 60 x 60 x 7	60	7	7.98	1.73	26.05	6.10	1.81	41.34	2.28	10.76	1.16
L 60 x 60 x 8	60	8	9.03	1.77	29.15	6.89	1.80	46.19	2.26	12.11	1.16
L 60 x 60 x 10	60	10	11.1	1.85	34.93	8.41	1.78	55.10	2.23	14.76	1.15
L 63 x 63 x 5	63	5	6.14	1.71	22.42	4.88	1.91	35.61	2.41	9.24	1.23
L 63 x 63 x 6	63	6	7.29	1.75	26.44	5.82	1.90	41.99	2.40	10.89	1.22
L 63 x 63 x 6.5	63	6.5	7.85	1.78	28.37	6.27	1.90	45.06	2.40	11.69	1.22
L 65 x 65 x 4	65	4	5.13	1.71	20.09	4.19	1.98	31.86	2.49	8.32	1.27
L 65 x 65 x 5	65	5	6.34	1.76	24.74	5.22	1.98	39.29	2.49	10.19	1.27
L 65 x 65 x 6	65	6	7.53	1.80	29.19	6.21	1.97	46.36	2.48	12.01	1.26
L 65 x 65 x 7	65	7	8.70	1.85	33.43	7.18	1.96	53.08	2.47	13.78	1.26
L 65 x 65 x 8	65	8	9.85	1.89	37.49	8.13	1.95	59.46	2.46	15.52	1.26
L 65 x 65 x 9	65	9	11.0	1.93	41.37	9.05	1.94	65.52	2.44	17.22	1.25
L 65 x 65 x 10	65	10	12.1	1.97	45.08	9.94	1.93	71.26	2.43	18.91	1.25
L 65 x 65 x 11	65	11	13.2	2.00	48.64	10.82	1.92	76.69	2.41	20.58	1.25

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 70 x 70 x 5	70	5	6.84	1.88	31.24	6.10	2.14	49.61	2.69	12.86	1.37
L 70 x 70 x 6	70	6	8.13	1.93	36.88	7.27	2.13	58.60	2.69	15.16	1.37
L 70 x 70 x 7	70	7	9.40	1.97	42.30	8.41	2.12	67.19	2.67	17.41	1.36
L 70 x 70 x 8	70	8	10.7	2.01	47.27	9.46	2.10	75.01	2.65	19.52	1.35
L 70 x 70 x 9	70	9	11.9	2.05	52.47	10.6	2.10	83.18	2.65	21.76	1.35
L 70 x 70 x 10	70	10	13.1	2.09	57.24	11.66	2.09	90.60	2.63	23.88	1.35
L 75 x 75 x 4	75	4	5.93	1.96	31.43	5.67	2.30	49.85	2.90	13.01	1.48
L 75 x 75 x 5	75	5	7.34	2.01	38.77	7.06	2.30	61.59	2.90	15.96	1.47
L 75 x 75 x 6	75	6	8.73	2.05	45.83	8.41	2.29	72.84	2.89	18.82	1.47
L 75 x 75 x 7	75	7	10.1	2.10	52.61	9.74	2.28	83.60	2.88	21.62	1.46
L 75 x 75 x 8	75	8	11.4	2.14	59.13	11.03	2.27	93.91	2.86	24.35	1.46
L 75 x 75 x 9	75	9	12.8	2.18	65.40	12.29	2.26	103.8	2.85	27.03	1.45
L 75 x 75 x 10	75	10	14.1	2.22	71.43	13.52	2.25	113.2	2.83	29.68	1.45
L 80 x 80 x 5	80	5	7.86	2.12	47.14	8.02	2.45	74.83	3.09	19.45	1.57
L 80 x 80 x 6	80	6	9.35	2.17	55.82	9.57	2.44	88.69	3.08	22.96	1.57
L 80 x 80 x 7	80	7	10.8	2.21	64.19	11.09	2.44	102.0	3.07	26.38	1.56
L 80 x 80 x 8	80	8	12.3	2.26	72.25	12.58	2.43	114.8	3.06	29.72	1.56
L 80 x 80 x 9	80	9	13.7	2.30	80.01	14.03	2.42	127.0	3.05	33.01	1.55
L 80 x 80 x 10	80	10	15.1	2.34	87.50	15.45	2.41	138.8	3.03	36.24	1.55
L 90 x 90 x 5	90	5	8.88	2.35	67.67	10.18	2.76	107.3	3.48	27.98	1.78
L 90 x 90 x 6	90	6	10.5	2.42	80.72	12.26	2.77	128.3	3.49	33.16	1.77

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 90 x 90 x 7	90	7	12.2	2.45	92.55	14.13	2.75	147.1	3.47	38.03	1.76
L 90 x 90 x 8	90	8	13.9	2.50	104.4	16.05	2.74	165.9	3.46	42.89	1.76
L 90 x 90 x 9	90	9	15.5	2.54	115.8	17.93	2.73	184.0	3.44	47.65	1.75
L 90 x 90 x 10	90	10	17.1	2.58	126.9	19.77	2.72	201.5	3.43	52.33	1.75
L 90 x 90 x 11	90	11	18.7	2.62	137.6	21.57	2.71	218.3	3.42	56.94	1.74
L 90 x 90 x 16	90	16	26.4	2.81	186.4	30.11	2.66	293.5	3.34	79.40	1.74
L 100 x 100 x 6	100	6	11.8	2.64	111.1	15.09	3.07	176.3	3.87	45.80	1.97
L 100 x 100 x 7	100	7	13.7	2.69	128.2	17.54	3.06	203.7	3.86	52.72	1.96
L 100 x 100 x 8	100	8	15.5	2.74	144.8	19.94	3.06	230.2	3.85	59.49	1.96
L 100 x 100 x 9	100	9	17.3	2.78	161.0	22.30	3.05	255.9	3.84	66.13	1.95
L 100 x 100 x 10	100	10	19.2	2.82	176.7	24.62	3.04	280.7	3.83	72.66	1.95
L 100 x 100 x 11	100	11	20.9	2.86	191.9	26.89	3.03	304.7	3.81	79.09	1.94
L 100 x 100 x 12	100	12	22.7	2.90	206.7	29.12	3.02	327.9	3.80	85.44	1.94
L 100 x 100 x 14	100	14	26.2	2.98	235.0	33.48	3.00	372.1	3.77	97.92	1.93
L 100 x 100 x 16	100	16	29.6	3.06	261.7	37.70	2.97	413.3	3.74	110.2	1.93
L 110 x 110 x 6	110	6	13.0	2.89	149.5	18.43	3.39	237.3	4.27	61.60	2.18
L 110 x 110 x 7	110	7	15.1	2.94	172.7	21.43	3.39	274.4	4.27	70.94	2.17
L 110 x 110 x 8	110	8	17.1	2.99	195.3	24.37	3.38	310.5	4.26	80.11	2.16
L 110 x 110 x 9	110	9	19.1	3.03	217.3	27.26	3.37	345.5	4.25	89.10	2.16
L 110 x 110 x 10	110	10	21.2	3.06	238.0	29.99	3.35	378.2	4.23	97.74	2.15
L 110 x 110 x 11	110	11	23.2	3.11	258.8	32.79	3.34	411.2	4.21	106.4	2.14
L 110 x 110 x 12	110	12	25.1	3.15	279.1	35.54	3.33	443.2	4.20	115.0	2.14

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 120 x 120 x 7	120	7	16.5	3.18	225.6	25.57	3.70	358.4	4.66	92.80	2.37
L 120 x 120 x 8	120	8	18.7	3.23	255.4	29.11	3.69	406.0	4.65	104.8	2.37
L 120 x 120 x 9	120	9	21.0	3.27	284.5	32.59	3.68	452.4	4.64	116.7	2.36
L 120 x 120 x 10	120	10	23.2	3.31	312.9	36.03	3.67	497.6	4.63	128.3	2.35
L 120 x 120 x 11	120	11	25.4	3.36	340.6	39.41	3.66	541.5	4.62	139.8	2.35
L 120 x 120 x 12	120	12	27.5	3.40	367.7	42.73	3.65	584.3	4.61	151.1	2.34
L 120 x 120 x 13	120	13	29.7	3.44	394.0	46.01	3.64	625.8	4.59	162.2	2.34
L 120 x 120 x 14	120	14	31.8	3.48	419.8	49.25	3.63	666.3	4.58	173.3	2.33
L 120 x 120 x 15	120	15	33.9	3.51	444.9	52.43	3.62	705.6	4.56	184.2	2.33
L 120 x 120 x 16	120	16	36.0	3.55	469.4	55.57	3.61	743.8	4.54	195.0	2.33
L 130 x 130 x 8	130	8	20.4	3.46	326.7	34.26	4.00	519.2	5.05	134.3	2.57
L 130 x 130 x 9	130	9	22.8	3.51	364.4	38.39	4.00	579.2	5.04	149.5	2.56
L 130 x 130 x 10	130	10	25.2	3.55	401.1	42.47	3.99	637.8	5.03	164.5	2.55
L 130 x 130 x 11	130	11	27.6	3.60	437.1	46.48	3.98	694.9	5.02	179.2	2.55
L 130 x 130 x 12	130	12	30.0	3.64	472.2	50.44	3.97	750.6	5.00	193.7	2.54
L 130 x 130 x 13	130	13	32.3	3.68	506.5	54.35	3.96	804.9	4.99	208.1	2.54
L 130 x 130 x 14	130	14	34.7	3.72	540.1	58.20	3.95	857.8	4.98	222.3	2.53
L 130 x 130 x 15	130	15	37.0	3.76	572.9	62.00	3.94	909.4	4.96	236.3	2.53
L 130 x 130 x 16	130	16	39.3	3.80	605.0	65.75	3.93	959.7	4.94	250.3	2.53
L 140 x 140 x 9	140	9	24.6	3.75	457.8	44.66	4.31	727.6	5.44	188.0	2.76
L 140 x 140 x 10	140	10	27.2	3.79	504.4	49.43	4.30	802.0	5.43	206.9	2.76
L 140 x 140 x 11	140	11	29.8	3.84	550.1	54.14	4.29	874.7	5.41	225.5	2.75

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 140 x 140 x 12	140	12	32.4	3.88	594.8	58.78	4.28	945.7	5.40	243.9	2.74
L 140 x 140 x 13	140	13	35.0	3.92	638.5	63.37	4.27	1015	5.39	262.0	2.74
L 140 x 140 x 14	140	14	37.5	3.96	681.4	67.89	4.26	1083	5.37	208.0	2.73
L 140 x 140 x 15	140	15	40.0	4.00	723.3	72.36	4.25	1149	5.36	297.7	2.73
L 140 x 140 x 16	140	16	42.5	4.04	764.4	76.77	4.24	1214	5.34	315.2	2.72
L 150 x 150 x 10	150	10	29.3	4.03	624.0	56.91	4.62	992.0	5.82	256.1	2.96
L 150 x 150 x 12	150	12	34.8	4.12	736.9	67.75	4.60	1172	5.80	302.1	2.94
L 150 x 150 x 13	150	13	37.6	4.17	791.7	73.07	4.59	1259	5.79	324.6	2.94
L 150 x 150 x 14	150	14	40.3	4.21	845.4	78.33	4.58	1344	5.77	346.9	2.93
L 150 x 150 x 15	150	15	43.0	4.25	898.1	83.52	4.57	1427	5.76	369.0	2.93
L 150 x 150 x 16	150	16	45.7	4.29	949.7	88.65	4.56	1509	5.74	390.8	2.92
L 150 x 150 x 18	150	18	51.0	4.37	1050	98.74	4.54	1666	5.71	433.8	2.92
L 150 x 150 x 20	150	20	56.3	4.44	1146	108.6	4.51	1817	5.68	476.2	2.91
L 160 x 160 x 14	160	14	43.2	4.45	1034	89.50	4.89	1644	6.17	423.9	3.13
L 160 x 160 x 15	160	15	46.1	4.49	1099	95.47	4.88	1747	6.16	450.9	3.13
L 160 x 160 x 16	160	16	49.0	4.53	1163	101.4	4.87	1848	6.14	477.7	3.12
L 160 x 160 x 17	160	17	51.8	4.57	1225	107.2	4.86	1947	6.13	504.2	3.12
L 160 x 160 x 18	160	18	54.7	4.61	1287	113.0	4.85	2043	6.11	530.4	3.11
L 160 x 160 x 19	160	19	57.5	4.65	1347	118.7	4.84	2138	6.10	556.5	3.11
L 180 x 180 x 13	180	13	45.5	4.90	1396	106.5	5.54	2220	6.99	571.7	3.55
L 180 x 180 x 14	180	14	48.8	4.94	1493	114.3	5.53	2375	6.98	611.4	3.54

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 180 x 180 x 15	180	15	52.1	4.98	1589	122.0	5.52	2527	6.96	650.6	3.53
L 180 x 180 x 16	180	16	55.4	5.02	1682	129.7	5.51	2675	6.95	689.4	3.53
L 180 x 180 x 17	180	17	58.7	5.06	1775	137.2	5.50	2822	6.94	727.9	3.52
L 180 x 180 x 18	180	18	61.9	5.10	1866	144.7	5.49	2965	6.92	766.0	3.52
L 180 x 180 x 19	180	19	65.1	5.14	1955	152.1	5.48	3106	6.91	803.8	3.51
L 180 x 180 x 20	180	20	68.3	5.18	2043	159.4	5.47	3244	6.89	841.3	3.51
L 200 x 200 x 13	200	13	50.7	5.40	1939	132.8	6.19	3085	7.80	792.8	3.96
L 200 x 200 x 15	200	15	58.1	5.48	2209	152.2	6.17	3516	7.78	903.0	3.94
L 200 x 200 x 16	200	16	61.8	5.52	2341	161.7	6.16	3725	7.76	957.2	3.94
L 200 x 200 x 17	200	17	65.5	5.56	2472	171.2	6.14	3932	7.75	1011	3.93
L 200 x 200 x 18	200	18	69.1	5.60	2600	180.6	6.13	4135	7.74	1064	3.92
L 200 x 200 x 19	200	19	72.7	5.64	2726	189.9	6.12	4335	7.72	1117	3.92
L 200 x 200 x 20	200	20	76.3	5.68	2851	199.1	6.11	4532	7.70	1169	3.91
L 200 x 200 x 21	200	21	79.9	5.72	2973	208.2	6.10	4725	7.69	1221	3.91
L 200 x 200 x 22	200	22	83.5	5.76	3094	217.3	6.09	4915	7.67	1273	3.90
L 200 x 200 x 23	200	23	87.1	5.80	3213	226.3	6.08	5102	7.66	1324	3.90
L 200 x 200 x 24	200	24	90.6	5.84	3331	235.2	6.06	5286	7.64	1375	3.90
L 200 x 200 x 25	200	25	94.1	5.88	3446	244.0	6.05	5467	7.62	1426	3.89
L 200 x 200 x 26	200	26	97.6	5.91	3560	252.7	6.04	5644	7.61	1476	3.89
L 200 x 200 x 28	200	28	105	5.99	3784	270.0	6.02	5991	7.57	1576	3.77



Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 250 x 250 x 17	250	17	82.1	6.79	4893	268.7	7.72	7789	9.74	1997	4.93
L 250 x 250 x 18	250	18	86.7	6.83	5156	283.8	7.71	8208	9.73	2104	4.93
L 250 x 250 x 19	250	19	91.4	6.87	5417	298.9	7.7	8622	9.71	2212	4.92
L 250 x 250 x 20	250	20	96.0	6.91	5674	313.8	7.69	9031	9.7	2318	4.91
L 250 x 250 x 21	250	21	100.6	6.96	5929	328.6	7.68	9435	9.69	2423	4.91
L 250 x 250 x 22	250	22	105.1	7.00	6180	343.3	7.67	9833	9.67	2528	4.9
L 250 x 250 x 23	250	23	109.7	7.03	6429	357.8	7.66	10230	9.66	2632	4.9
L 250 x 250 x 24	250	24	114.2	7.07	6674	372.3	7.64	10610	9.64	2735	4.89
L 250 x 250 x 25	250	25	118.7	7.11	6917	386.7	7.63	11000	9.63	2837	4.89
L 250 x 250 x 26	250	26	123.2	7.15	7156	400.9	7.62	11370	9.61	2939	4.88
L 250 x 250 x 27	250	27	127.7	7.19	7393	415.1	7.61	11750	9.59	3040	4.88
L 250 x 250 x 28	250	28	132.1	7.23	7627	429.2	7.6	12110	9.57	3141	4.88
L 250 x 250 x 29	250	29	136.6	7.27	7858	443.1	7.59	12480	9.56	3241	4.87
L 250 x 250 x 30	250	30	141.0	7.30	8087	457	7.57	12830	9.54	3340	4.87
L 250 x 250 x 31	250	31	145.4	7.34	8313	470.8	7.56	13190	9.53	3439	4.86
L 250 x 250 x 32	250	32	149.7	7.38	8536	484.4	7.55	13540	9.51	3538	4.86
L 250 x 250 x 33	250	33	154.1	7.42	8757	498	7.54	13880	9.49	3636	4.86
L 250 x 250 x 34	250	34	158.4	7.45	8975	511.5	7.53	14220	9.47	3734	4.86
L 250 x 250 x 35	250	35	162.7	7.49	9191	524.9	7.52	14550	9.46	3832	4.85
L 300 x 300 x 25	300	25	142.7	8.35	12150	561.1	9.23	19370	11.65	4930	5.88
L 300 x 300 x 26	300	26	148.2	8.39	12590	582.5	9.22	20060	11.63	5115	5.87
L 300 x 300 x 27	300	27	153.7	8.43	13020	603.5	9.2	20750	11.62	5294	5.87
L 300 x 300 x 28	300	28	159.1	8.47	13450	624.6	9.19	21420	11.6	5475	5.87

Denumirea	Dimensiunile secțiunii (mm)		Secțiunea A (cm <sup>2</sup> )	Excentricitatea z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub> (e) (cm)	Mărimile statice pentru axele						
	a	g			Y-Y	Z-Z		U-U		V-V	
					I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub> (cm)	I <sub>u</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>u</sub> (cm)	I <sub>v</sub> (cm <sup>4</sup> )	i <sub>v</sub> (cm)
L 300 x 300 x 29	300	29	164.6	8.5	13870	645.2	9.18	22090	11.59	5650	5.86
L 300 x 300 x 30	300	30	170	8.54	14290	666	9.17	22750	11.57	5828	5.86
L 300 x 300 x 31	300	31	175.4	8.58	14700	686.3	9.16	23400	11.55	5999	5.85
L 300 x 300 x 32	300	32	180.7	8.62	15120	707.2	9.15	24050	11.54	6184	5.85
L 300 x 300 x 33	300	33	186.1	8.66	15520	727.2	9.13	24690	11.52	6351	5.84
L 300 x 300 x 34	300	34	191.4	8.7	15930	747.7	9.12	25320	11.5	6532	5.84
L 300 x 300 x 35	300	35	196.7	8.73	16320	767.4	9.11	25950	11.49	6696	5.83

## ***Bibliografie***

1. C. Bia, V. Ille, M.V. Soare, *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Edit. Didactică și Pedagogică, București 1983.
2. V. Ille, *Rezistența materialelor I*, Ed. a 2-a, U.T. PRESS, Cluj-Napoca 2011.
3. E. Pañtel, A.M. Ioani, *Rezistența materialelor*, Vol. I, Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, Cluj-Napoca 1985.
4. Anca G. Popa, *Rezistența materialelor - Îndrumător de lucrări*, U.T. PRESS, Cluj-Napoca 2010.
5. A. Popa, T. Besoiu, M. Botez, L. Bredean, M. Buru, A. Marchiș, *Îndrumător de lucrări la Rezistența Materialelor (I)*, U.T: PRESS, Cluj-Napoca, 2017
6. V. Ille, C. Bia, C. Cocoves, P. Petrina, E. Pañtel, I. Marțian, A. Câmpeanu, A.M. Ioani, *Rezistența materialelor – Culegere de probleme*, Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, Cluj-Napoca 1987.
7. (Coord. gen. Aurora Chioreanu, Dr. M. Măciu, N. C. Nicolescu, G. Rădulescu, Dr. V. Șuteu), *Mic dicționar enciclopedic*, Ed. a II-a, Edit. Științifică și Enciclopedică, București 1978.
8. M. Bejan, *În lumea unităților de măsură*, Edit. AGIR, București 2000.
9. <http://www.ametektest.com/products/material-testers/dual-column-test-stands/ls-100-series-bench-mounted>