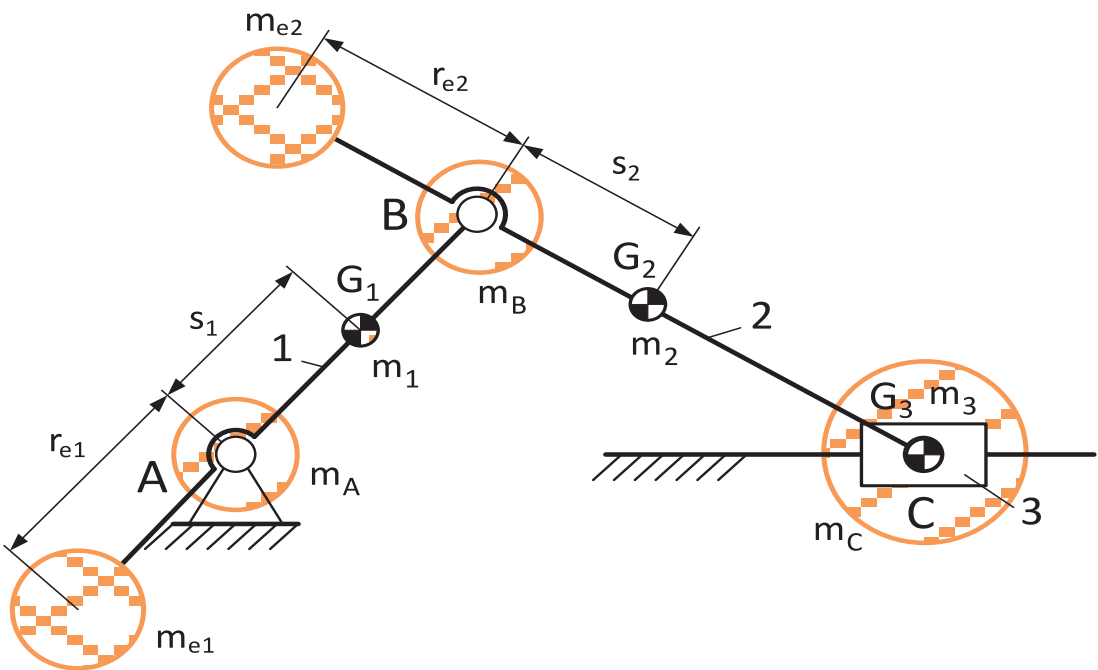


CĂLIN RUSU

MECANISME



U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2021
ISBN 978-606-737-501-5



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: ing. Călin Câmpean

Recenzia: Prof. dr. ing Mihai Olimpiu Tătar
Conf.dr.ing. Ciprian Lăpușan

Pregătire format electronic: Călin Câmpean

Copyright © 2021 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-501-5

Bun de tipar: 10.02.2021

CUPRINS

PREFAȚĂ.....	3
1.STRUCTURA MECANISMELOR.....	4
1.1 Element cinematic	4
1.2 Cupla cinematică	6
1.3 Lanțuri cinematice	12
1.4 Mecanisme.....	15
1.4.1 Elemente și cuple pasive	23
1.4.2 Grade de mobilitate pasive	25
1.4.3 Mecanisme înlocuitoare	27
1.4.4 Formarea mecanismelor plane.....	29
2. ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR.....	31
2.1 Introducere.....	31
2.2 Determinarea traiectoriilor.....	32
2.3 Analiza cinematică cu ajutorul funcțiilor de transmitere.....	36
2.3.1 Analiza cinematică a mecanismului manivelă piston.....	39
2.3.2 Analiza cinematică a mecanismului patruleter.....	43
2.3.3 Analiza cinematică a mecanismului culisă oscilantă	46
3. DINAMICA MECANISMELOR	49
3.1 Forțe care acționează asupra mecanismelor	49
3.2 Determinarea forțelor de inerție prin concentrarea maselor	53
3.2.1 Concentrarea maselor în două puncte	56
3.3 Echilibrarea mecanismelor	57
3.3.1 Echilibrarea rotorilor	58
3.3.2 Echilibrarea statică a mecanismelor	60
3.4 Ecuațiile de mișcare ale mecanismelor.....	63

4. ANALIZA MECANISMELOR CU CAMĂ	67
4.1 Clasificare	67
4.2 Elementele geometrice ale mecanismului cu camă și tchet de translație.....	69
4.3 Transmiterea forțelor în mecanismul cu camă și tchet de translație	70
5. SINTEZA MECANISMELOR CU CAMĂ	73
5.1 Introducere.....	73
5.2 Legi de mișcare.....	73
5.2.1 Legea de mișcare cu accelerație zero	73
5.2.2 Legea de mișcare cu accelerație constantă	75
5.2.3 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală	77
5.2.4 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală	79
5.3 Determinarea razei cercului de bază.....	81
5.4 Determinarea profilului camei	84
6. ANGRENAJE. GENERALITĂȚI.....	88
6.1 Clasificare	88
6.2 Evolventa de cerc.....	91
7. ANGRENAJE CU AXE PARALELE.....	93
7.1 Legea fundamentală a angrenării.....	93
7.2 Interferența la angrenajul evolventic.	95
7.3 Gradul de acoperire.....	97
7.4 Cremaliera de referință	99
7.5 Deplasările de profil.	101
7.6 Elemente geometrice ale angrenajului evolventic	102
8. SISTEME DE ANGRENAJE.....	104
8.1 Sisteme de angrenaje ordinare	104
8.2 Sisteme de angrenaje planetare și diferențiale.....	107
BIBLIOGRAFIE.....	114

PREFAȚĂ

Lucrarea a fost realizată pe baza programei analitice a disciplinei *Mecanisme*, pentru studenții specializărilor Inginerie Electrică, Managementul Energiei și Inginerie Medicală. Conținutul este structurat pe 8 capitole și tratează aspectele de bază ale studiului mecanismelor cu bare articulate, came și roți dințate.

În prima parte a lucrării sunt prezentate noțiuni privind analiza structurală, cinematica și dinamica mecanismelor cu bare articulate. Următoarele capitole tratează elemente de analiză și sinteză a mecanismelor cu camă iar în ultima parte a lucrării sunt expuse câteva noțiuni privind angrenajele cu axe paralele și sistemele de angrenaje ordinare și planetare. Fiecare capitol al lucrării conține, pe lângă noțiunile teoretice, exemple menite să faciliteze aplicarea acestor noțiuni în practică.

Prin tematica abordată și modul de prezentare lucrarea își propune să ofere noțiunile necesare pentru studiul și proiectarea mecanismelor întâlnite în diverse sisteme mecanice. În acest sens, lucrarea poate fi utilă și pentru studenții altor specializări.

Cluj-Napoca, Februarie 2021

Autorul

1.STRUCTURA MECANISMELOR

1.1 Element cinematic

Elementul cinematic este constituit dintr-o piesă (organ de mașină), sau mai multe piese asamblate, prin care se transmite mișcarea în mecanisme. În majoritatea situațiilor, elementele cinematice sunt considerate rigide, distanțele dintre diferite puncte ale lor fiind mărimi constante. În figura 1.1 este reprezentat un element cinematic (biela unui motor cu ardere internă), format din mai multe piese îmbinate între ele: corpul bielei 1, capacul bielei 2, cuzineții 3 și 4, bucșa 5 și șuruburile 6.

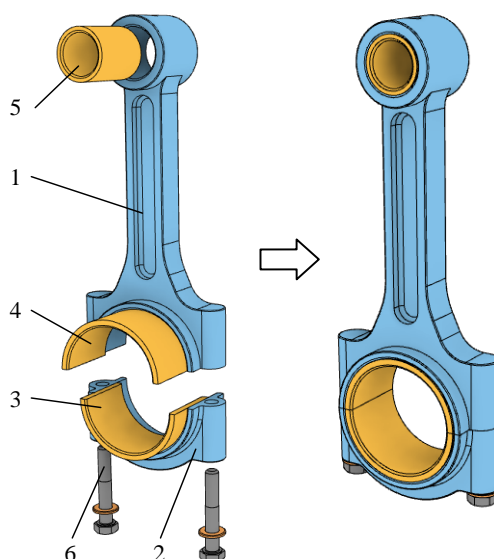


Fig.1.1 Exemplu de element cinematic

În structura mecanismelor există *elemente mobile* care au mișcări relative unele față de altele și *elementul fix*, sau considerat fix, față de care se raportează mișcarea celorlalte elemente.

anumită direcție sau impun o relație între anumite componente ale mișcărilor de rotație și translație

1.2 Cupla cinematică

Cupla cinematică este materializată de zona de contact dintre două elemente cinematice care determină posibilitățile de mișcare relativă ale acestora.

Dacă se notează cu f numărul mișcărilor relative pe care o cuplă cinematică le permite elementelor aflate în contact și cu k numărul mișcărilor relative blocate, se poate scrie:

$$k = 6 - f \quad (1.1)$$

După numărul de mișcări relative suprimate k , cuplele cinematice se clasifică în cinci clase. Elementele și cuplele cinematice se reprezintă grafic prin simboluri convenționale conform SR EN ISO 3952:1. Astfel, în figurile următoare, lângă cele mai utilizate cuple vor fi reprezentate și simbolurile acestora.

Cupla cinematică de clasa 1 ($k = 1, f = 5$) se formează, de exemplu, la contactul dintre sfera 2 care se rostogolește fără alunecare pe suprafața plană 1 (figura 1.3 a).

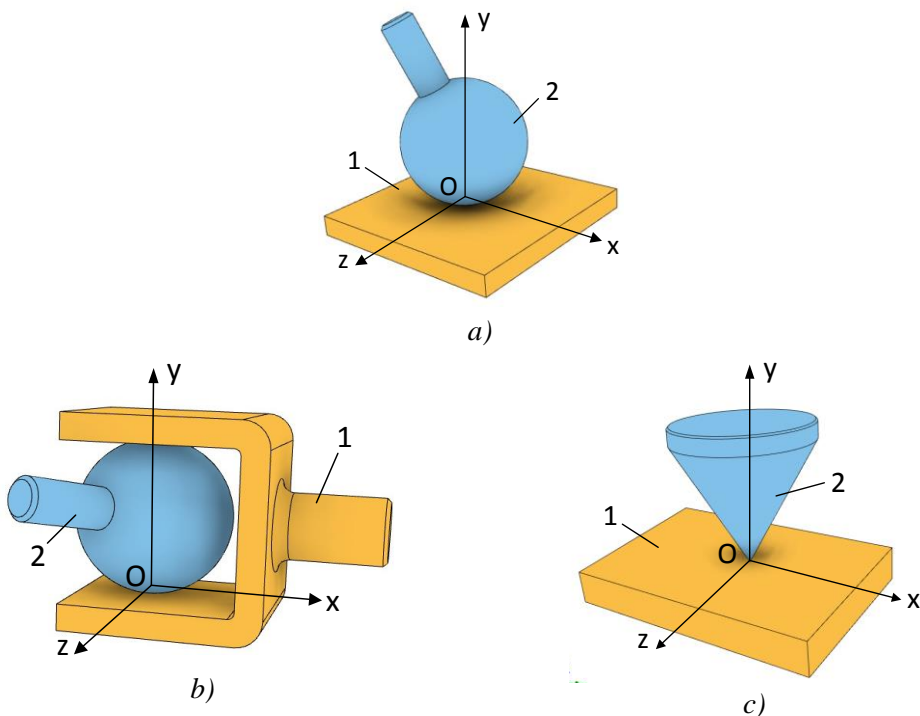


Fig. 1.3 Cuple de clasa 1

Înainte de a intra în contact fiecare din cele două elemente are câte șase posibilități de mișcare. După realizarea contactului, cupla cinematică formată permite doar cinci mișcări relative între cele două elemente cinematice: trei rotații în jurul axelor cu vitezele unghiulare $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ și două mișcări de translație de-a lungul axelor Ox și Oz cu vitezele v_x, v_z . Deplasarea sferei de-a lungul axei Oy este exclusă deoarece într-un sens este blocată de suprafața plană iar în sens contrar ar duce la desfacerea contactului, deci cupla nu ar mai exista. Același lucru se întâmplă și în cazul contactului dintre un con și o suprafață plană, exemplu prezentat în figura 1.3 c. În cazul cuplei din figura 1.3 b, mișcarea de-a lungul axei Oy este blocată în ambele sensuri.

Cuplele cinematice de clasa 1, se formează la contactul punctiform dintre două elemente cinematice și blochează o singură mișcare de translație.

Cupla cinematică de clasa 2 ($k = 2, f = 4$) se poate forma la contactul dintre cilindrul 2 care se rostogolește fără alunecare pe suprafața plană 1, după cum se observă în figura 1.4 a.

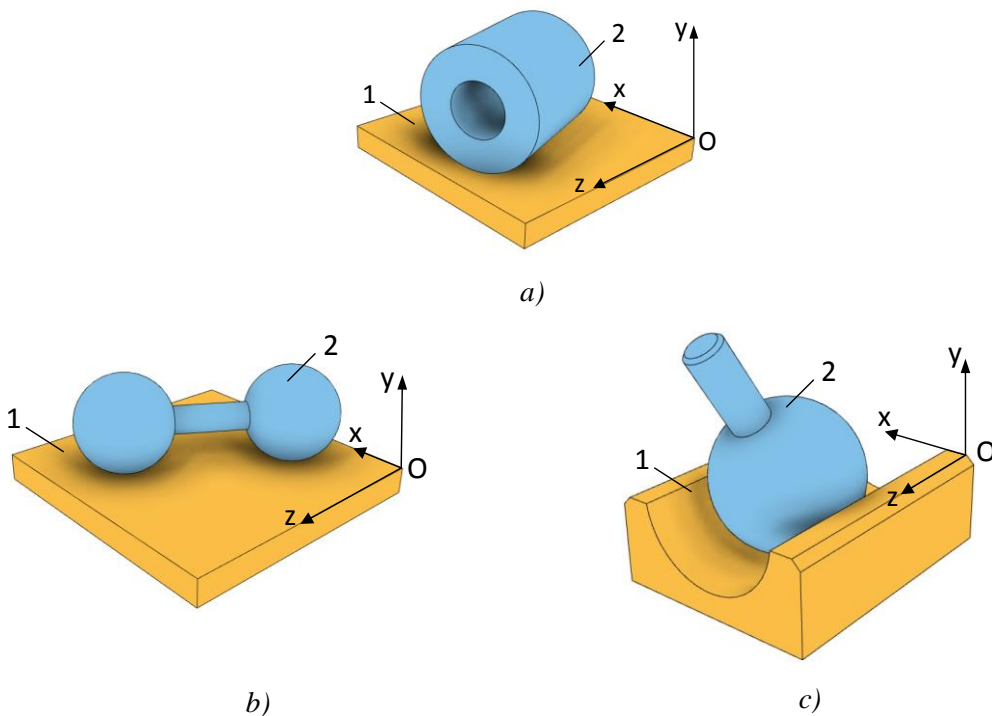


Fig. 1.4 Cuple de clasa 2

Contactul dintre cele două elemente poate fi de-a lungul unui segment de dreaptă (fig 1.4 a) sau în două puncte (fig 1.4 b) situații în care sunt permise două rotații

în jurul axelor Oy și Oz caracterizate de vitezele unghiulare ω_y, ω_z și două translații de-a lungul axelor Ox și Oz cu vitezele v_x, v_z . Translația de-a lungul axei Oy nu este posibilă deoarece duce la desfacerea contactului dintre cele două elemente iar rotația în jurul axei Ox transformă cupla într-una de clasa 1. În exemplul din figura 1.4 c, contactul dintre cele două elemente este teoretic, după un arc de cerc. Prin urmare sunt permise: translația de-a lungul axei Oz cu viteza v_z și trei rotații caracterizate de vitezele unghiulare $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Translațiile de-a lungul axelor Ox respectiv Oy nu pot avea loc.

În concluzie, cupla cinematică de clasa 2 se formează la contactul în două puncte, după o linie sau după un arc de cerc, dintre două elemente și blochează două din cele șase mișcări posibile.

Cupla cinematică de clasa 3 ($k = 3, f = 3$) apare de exemplu, la contactul dintre sfera 2 și calota sferică 1 după cum reiese din figura 1.5 a.

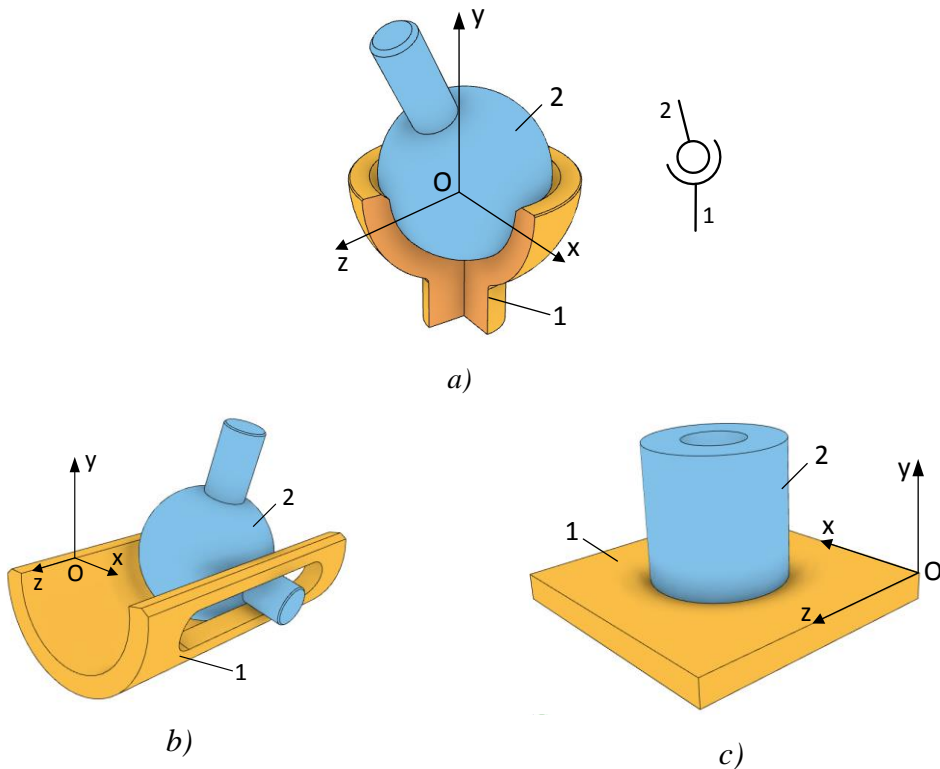


Fig. 1.5 Cuple de clasa 3

Cupla din figura 1.5 a, numită *cuplă sferică* este cea mai des utilizată cuplă de clasa 3 și permite mișcări de rotație în jurul celor trei axe cu vitezele unghiulare

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$. În exemplul din figura 1.5 b, sunt permise: translația de-a lungul axei Oz cu viteza v_z și două rotații în jurul axelor Ox și Oy cu vitezele unghiulare ω_x, ω_y , iar în figura 1.5 c sunt permise translațiile de-a lungul axelor Ox și Oz cu vitezele v_x, v_z respectiv rotația în jurul axei Oy , cu viteza unghiulară ω_y .

La cuplele cinematice de clasa 3, contactul dintre cele două elemente este delimitat de o suprafață și sunt blocate trei mișcări.

Cupla cinematică de clasa 4 ($k = 4, f = 2$) se poate forma când axul 1 este introdus în alezajul cilindric 2, reprezentat secționat în figura 1.6.a. Contactul dintre cele două elemente blochează patru mișcări și permite o mișcare de translație de-a lungul axei Ox cu viteza v_x și o rotație în jurul aceleiași axe cu viteza unghiulară ω_x . În exemplul din figura 1.6 b sunt posibile două mișcări de rotație în jurul axelor Ox și Oz cu vitezele unghiulare ω_x, ω_z .

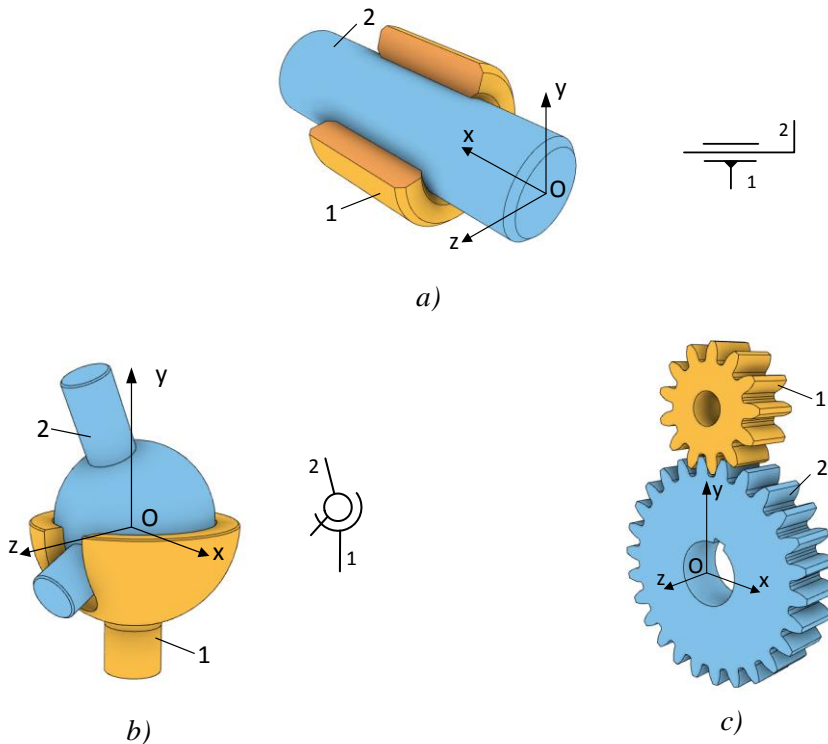


Fig. 1.6 Cuple de clasa 4

Contactul dintre flancurile dinților roților dințate aflate în angrenare determină o cuplă de clasa 4, după cum reiese din exemplul prezentat în figura 1.6 c. În acest caz

sunt posibile două mișcări relative independente: o rotație în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_z și o translație de lungul axei Ox cu viteza v_x .

Cuplele cinematice de clasa 4 blochează patru mișcări din cele șase posibile. Contactul dintre cele două elemente este delimitat de o suprafață sau de un segment de dreaptă (fig.1.6 c).

Cupla cinematică de clasa 5 ($k = 5, f = 1$) permite o singură mișcare relativă între cele două elemente aflate în contact. În figura 1.7 a este reprezentat un exemplu de cuplă de clasa 5 care permite mișcarea de rotație în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_z . Cupla este formată la contactul dintre axul 2, care constructiv are blocată mișcarea de translație de-a lungul axei Oz și alezajul 1. Cupla cinematică din figura 1.7 b, permite mișcarea relativă de translație de-a lungul axei Oz cu viteza v_z a elementului 1 față de elementul 2.

Cupla cinematică din figura 1.7 c, numită *cupă elicoidală*, formată la contactul dintre șurubul 2 și piulița 1, permite două mișcări: o translație de lungul axei Oz cu viteza \vec{v}_z și rotația în jurul aceleiași axe cu viteza unghiulară ω_z . Cele două mișcări nu sunt independente, deci practic există un singur grad de mobilitate.

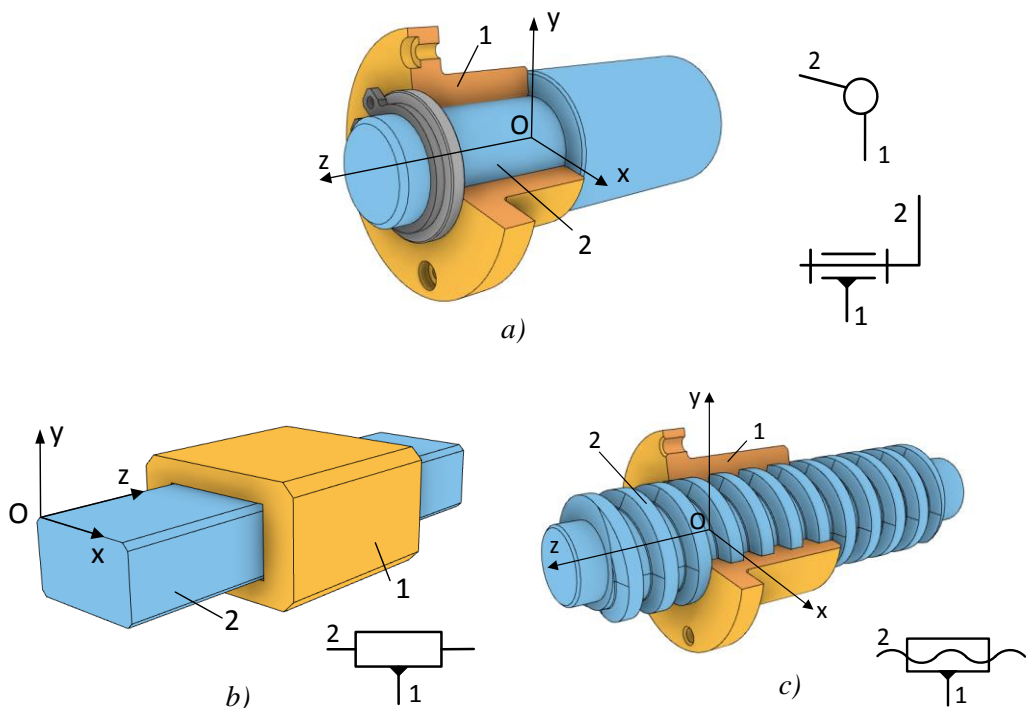


Fig. 1.7 Cuple de clasa 5

Considerăm un șurub cu pasul p și unghiul α de înclinare al elicei pe cilindrul cu raza r . Desfășurarea elicei șurubului în plan se observă în figura 1.8. Unei rotații a șurubului în jurul axei Oz cu unghiul φ , îi corespunde o deplasare s de-a lungul aceleiași axe. Pe baza notațiilor din figura 1.8 se poate scrie:

$$s = \varphi r \operatorname{tg} \alpha \quad (1.2)$$

iar prin derivarea în raport cu timpul, rezultă:

$$v_z = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r \operatorname{tg} \alpha = \omega_z r \operatorname{tg} \alpha \quad (1.3)$$

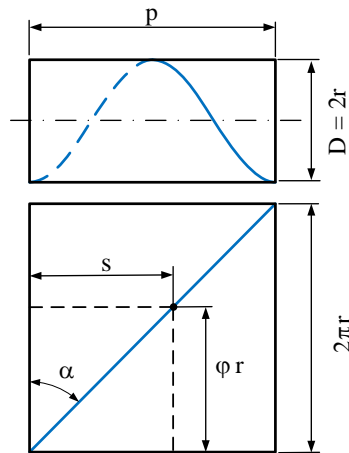


Fig. 1.8 Desfășurarea elicei șurubului

Prin urmare, mișcarea de translație a șurubului v_z este legată de mișcarea de rotație ω_z prin relația 1.3.

Cupla formată între șurub și piuliță reprezintă o generalizare a celorlalte cuple de clasa 5. În cazul în care pasul elicei șurubului are valoarea zero, cupla formată între șurub și piuliță se transformă într-o cuplă de rotație. Dacă pasul elicei tinde spre infinit, cupla se transformă într-una de translație [9].

În concluzie, cupla de clasa 5, introduce cinci constrângeri fiind posibilă astfel o singură mișcare. Contactul dintre cele două elemente este întotdeauna delimitat de o suprafață.

În afara criteriului privind numărul de mișcări relative suprimate, cuplele cinematice se mai pot clasifica după geometria zonelor de contact, după pozițiile

relative ale planelor în care este posibilă mișcarea și după caracterul legăturii dintre cele două elemente.

După geometria zonelor de contact dintre cele două elemente, cuplele pot fi:

- **superioare** dacă între cele două elemente contactul are loc într-unul sau mai multe puncte (fig. 1.3 și fig. 1.4 b) pe o linie (fig. 1.4 a și fig. 1.6 c) sau pe un arc de cerc (fig. 1.4 b);
- **inferioare** dacă cele două elemente intră în contact după o suprafață (fig. 1.5, fig. 1.6 a, b și fig. 1.7).

Indiferent de clasă cuplele cinematice pot transmite forțe doar pe direcția mișcărilor blocate. Astfel cuplele inferioare pot transmite sarcini mai mari comparativ cu cele superioare și se uzează mult mai puțin. Principalul avantaj al cuplelor superioare constă în posibilitatea realizării unor mișcări mai complicate .

După poziția relativă a planelor în care are loc mișcarea, cuplele pot fi:

- **plane** dacă permit mișcarea într-un singur plan sau în plane paralele (fig. 1.7 a și b);
- **spațiale** dacă mișcarea relativă dintre cele două elemente are loc în două sau mai multe plane neparalele (fig. 1.3, fig. 1.4, fig. 1.5, fig. 1.6 a, b, fig. 1.7 c)

După caracterul legăturii stabilite între cele două elemente, cuplele sunt:

- **geometric deschise** dacă se pot desface fără demontarea elementelor care o formează (fig. 1.3, fig. 1.4, fig. 1.5 c). Pentru ca aceste cuple să poată funcționa este necesar ca asupra celor două elemente cinematice să acționeze forțe exterioare care să mențină contactul pe tot timpul mișcării. Aceste forțe pot fi greutatea proprie a elementelor sau forța dezvoltată de un arc.
- **geometric închise** când nu se pot desface fără demontarea unuia dintre elemente (fig. 1.5 a, b, fig. 1.6 și fig. 1.7)

1.3 Lanțuri cinematice

Mai multe elemente cinematice legate între ele prin cuple cinematice formează un *lanț cinematic*. Considerăm că în structura unui lanț cinematic avem un număr de: e elemente cinematice, C_5 – cuple de clasa 5, C_4 – cuple de clasa 4, C_3 – cuple de clasa 3, C_2 – cuple de clasa 2 și C_1 – cuple de clasa 1.

Lanțurile cinematice pot fi *deschise* (fig. 1.9 a și c) sau *închise* (fig. 1.9 b), iar în funcție de poziția relativă a planelor în care are loc mișcarea pot fi *plane* sau *spațiale*.

Lanțurile cinematice pot fi *simple* dacă fiecare din elementele care îl formează este legat prin cuple de cel mult două alte elemente (fig. 1.9 a și b) sau pot fi *complexe* dacă cel puțin un element este legat prin cuple la mai mult de două elemente așa cum este prezentat în figura 1.9 c.

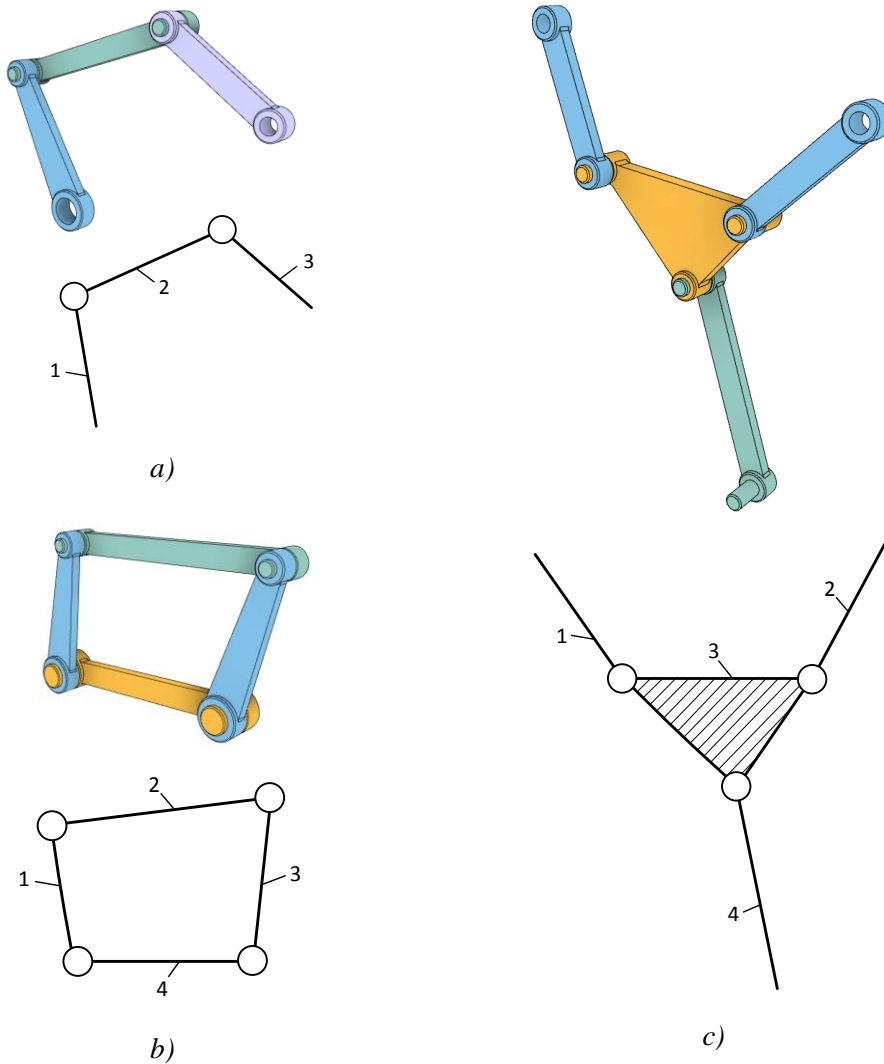


Fig.1.9 Exemple de lanțuri cinematice

În structura mecanismelor se întâlnesc lanțurile cinematice închise deoarece acestea pot fi *desmodrome*, adică modificarea poziției relative a unui element conduce la obținerea unor poziții determinate pentru toate celelalte elemente din structură.

Gradul de mobilitate L al unui lanț cinematic se obține prin scăderea din numărul total al mișcărilor celor e elemente cinematice libere în spațiu a numărului total b de mișcări blocate de cuplele cinematice (constrângeri). Se poate scrie astfel:

$$L = 6e - b \quad (1.4)$$

unde numărul de constrângeri b se determină din relația:

$$b = 5C_5 + 4C_4 + 3C_3 + 2C_2 + C_1 = \sum_{k=1}^5 kC_k \quad (1.5)$$

Din relațiile (1.4) și (1.5) rezultă formula gradului de mobilitate pentru lanțurile cinematice generale, sub forma:

$$L = 6e - \sum_{k=1}^5 kC_k \quad (1.6)$$

Un caz particular sunt lanțurile cinematice plane, de familia 3, formate din elemente între care există cuple de clasa 5 de rotație sau translație, numite *grupe structurale*.

Elementele marginale ale grupei se pot lega de alte elemente cinematice prin intermediul unor cuple de clasa 5, numite *cuple libere*. Dacă un astfel de lanț cinematic este legat prin cuplele sale libere la un element fix, rezultă o structură rigidă cu grad de mobilitate zero. Prin particularizarea relației (1.6) rezultă [9]:

$$L = 3e - 2C_5 = 0 \quad (1.7)$$

Deoarece numărul cuplelor de clasa 5, notat cu C_5 , trebuie să fie un număr întreg rezultă următoarele variante posibile pentru numărul de elemente și cuple ale unei grupe structurale:

e	2	4	6	8	10	12	14	...
C_5	3	6	9	12	15	18	21	...

Cele mai des întâlnite sunt grupele structurale formate din două elemente și trei cuple (una centrală și două libere) numite *diade*, prezentate în figura 1.10

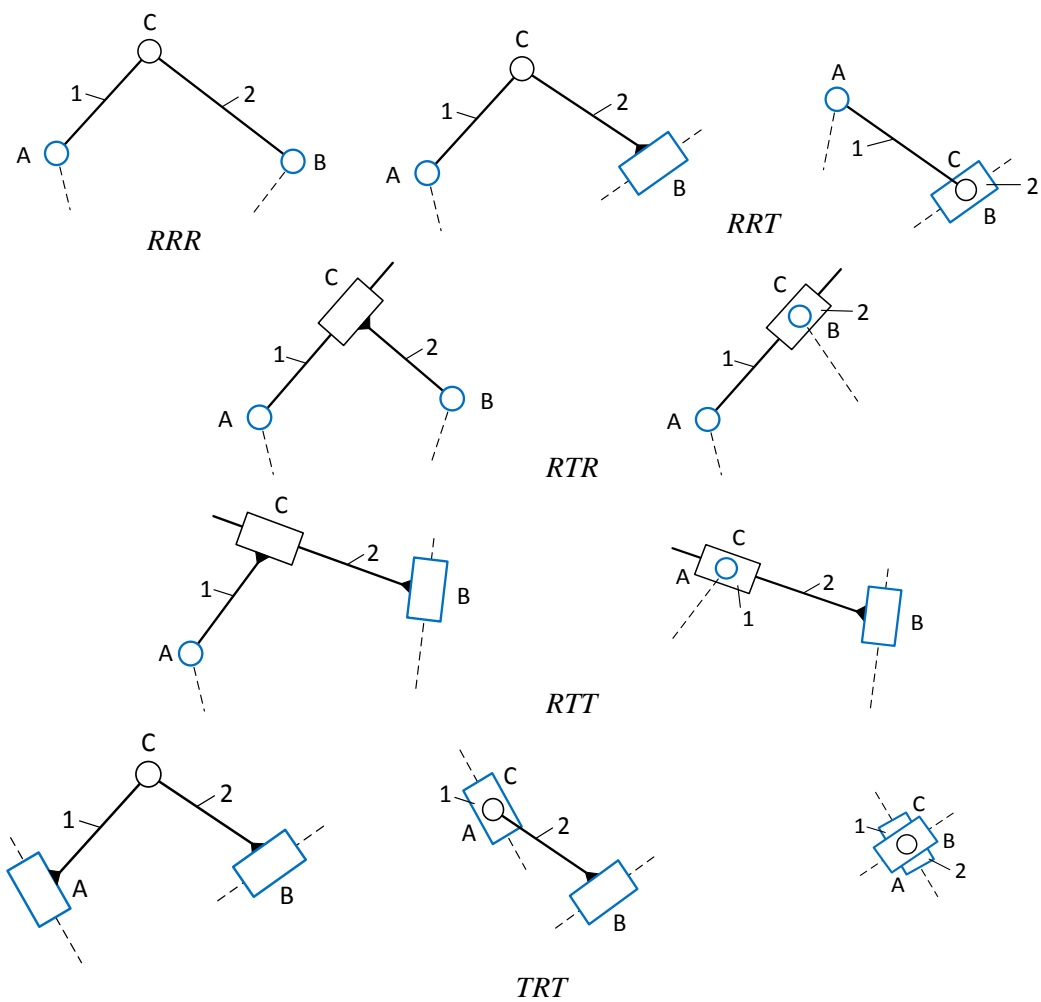


Fig.1.10 Grupe structurale

Sunt posibile cinci variante pentru aceste grupe structurale, în funcție de poziția și tipul cuplelor de clasa 5. În funcție de tipul cuplelor, diadele se notează cu: *RRR* (trei cuple de rotație), *RRT* (două rotații și o translație), etc.

1.4 Mecanisme

Mecanismul se poate defini ca fiind lanțul cinematic închis, la care o mișcare impusă unui element în raport cu elementul fix, duce la obținerea de mișcări complet determinate pentru toate celelalte elemente [2], [9]. Elementele cinematice ale căror legi de mișcare în raport cu elementul fix sunt cunoscute, se numesc *elemente conducătoare*. Elementele ale căror legi de mișcare sunt determinate de legile de mișcare ale elementelor conducătoare se numesc *elemente conduse*.

Mecanismele se reprezintă cu ajutorul schemelor cinematice în care elementele și cuplele cinematice sunt reprezentate prin simboluri conform SR EN ISO 3952:1. Pe elementul conducător al mecanismului se notează întotdeauna tipul mișcării pe care acesta o realizează precum și sensul acesteia.

Gradul de mobilitate M al unui mecanism reprezintă numărul de mișcări independente pe care acesta le poate primi din exterior prin urmare, este egal cu numărul elementelor conducătoare. Pentru ca un mecanism să poată funcționa este necesar ca gradul său de mobilitate să fie cel puțin egal cu 1. Conform definiției, mecanismele provin din lanțuri cinematice închise la care s-a fixat un element. Astfel, gradul de mobilitate se determină scăzând din gradul de mobilitate L al lanțului cinematic cele șase mișcări blocate de elementul fix [2]. Rezultă astfel:

$$M = 6 - L \quad (1.8)$$

sau:

$$M = 6n - 5C_5 - 4C_4 - 3C_3 - 2C_2 - C_1 = 6n - \sum_{k=1}^5 k C_k \quad (1.9)$$

unde: n – reprezintă numărul elementelor mobile ale mecanismului

C_k , $k = 1 \dots 5$ – reprezintă numărul cuplelor de clasa k

După numărul de constrângeri comune impuse tuturor elementelor, mecanismele se împart în cinci *familii* notate cu F_j , $j = 0 \dots 4$. Gradul de mobilitate al mecanismelor aparținând diferitelor familii se poate determina după cum urmează:

familia 0, F_0 :	$M_0 = 6n - 5C_5 - 4C_4 - 3C_3 - 2C_2 - C_1$	
familia 1, F_1 :	$M_1 = 5n - 4C_5 - 3C_4 - 2C_3 - C_2$	
familia 2, F_2 :	$M_2 = 4n - 3C_5 - 2C_4 - C_3$	(1.10)
familia 3, F_3 :	$M_3 = 3n - 2C_5 - C_4$	
familia 4, F_4 :	$M_4 = 2n - 2C_5$	

Mecanismele care se încadrează în primele trei familii sunt *mecanisme spațiale* iar mecanismele din ultimele două familii sunt *mecanisme plane*. Determinarea familiei unui mecanism se poate face utilizând un tabel cu șase coloane, câte una pentru fiecare mișcare posibilă. Pe rânduri se trec cele n elemente mobile ale mecanismului. În tabelul astfel obținut se marchează cu “+” mișcările independente pe care le au elementele în raport cu un sistem de coordonate atașat mecanismului, respectiv cu “-” mișcările care sunt suprimate. Dacă pe o coloană apare doar semnul “-” rezultă că acea mișcare este

suprimată tuturor elementelor mecanismului. Numărul de coloane de acest fel este egal cu familia mecanismului.

Pentru a exemplifica metoda de determinare a familiei, se utilizează mecanismul de antrenare al unui ștergător de parbriz, reprezentat în figura 1.11. Mișcarea de rotație a motorului electric M este transformată în mișcarea de oscilație a lamei ștergătorului de parbriz S , cu ajutorul mecanismului format din elementele cinematice notate cu 1, 2 și 3 numit *mecanism patrulater*. Schema cinematică a mecanismului și tabelul pentru determinarea familiei sunt prezentate în figura 1.12.

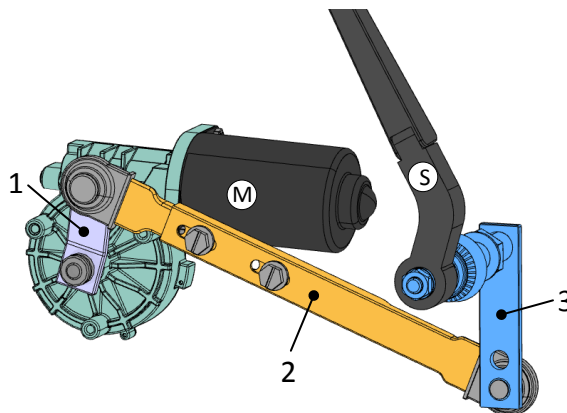
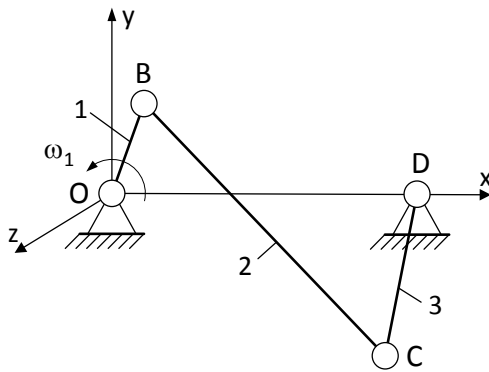


Fig.1.11 Mecanismul ștergătorului de parbriz

Elementul 1 reprezintă elementul conducător al mecanismului și se poate roti în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_1 dată de motorul electric. Astfel, în tabel la primul element se va trece semnul “+” în dreptul vitezei unghiulare ω_z . Restul mișcărilor elementului sunt blocate de cupla de clasa 5 notată cu O . Mișcarea este transmisă mai departe prin intermediul elementului 2 care se leagă de elementele 1 și 3 prin cuplele de clasa 5 de rotație B și C . Un capăt al elementului 2 se deplasează pe un cerc de rază OB iar celălalt capăt pe un arc de cerc de rază CD . Prin urmare mișcarea elementului cinematic 2 are loc în planul xOy și este compusă din două translații cu vitezele v_x, v_y și o rotație cu viteza unghiulară ω_z . În tabel, la al doilea element, se va trece semnul “+” în dreptul acestor trei mișcări. Elementul 3 al mecanismului, solidarizat cu brațul ștergătorului de parbriz, realizează o mișcare de oscilație în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_z . Restul mișcărilor sunt suprimate de cupla de clasa 5 notată cu D .

Mecanismul patrulater analizat, face parte din familia 3 deoarece trei coloane din tabel conțin numai semnul “-” ceea ce înseamnă că mișcările cu vitezele v_z, ω_x și ω_y nu sunt permise nici unui element al mecanismului (vezi fig. 1.12)



	v_x	v_y	v_z	ω_x	ω_y	ω_z
1	-	-	-	-	-	+
2	+	+	-	-	-	+
3	-	-	-	-	-	+

Fig.1.12 Schema cinematică mecanismului patrulater

Pentru determinarea gradului de mobilitate al mecanismului, din relațiile (1.10) se utilizează relația corespunzătoare familiei 3, adică:

$$M = 3n - 2C_5 - C_4 \quad (1.11)$$

în care: $n = 3$ – reprezintă numărul elementelor mobile,

$C_5 = 4$ – numărul cuplelor de clasa 5 (4 cuple de rotație notate O B C și D),

$C_4 = 0$ – numărul cuplelor de clasa 4.

Înlocuind valorile în relația (1.11) rezultă $M = 1$, deci mecanismului i se poate impune din exterior o singură mișcare independentă, care este în acest caz, mișcarea de rotație cu viteza ω_1 a elementului conducător 1. Altfel spus, mecanismul are un grad de mobilitate.

Alt exemplu reprezentativ este mecanismul *manivelă piston* din componența motoarelor cu ardere internă reprezentat în figura 1.13. Schema cinematică a mecanismului și tabelul pentru determinarea familiei sunt prezentate în figura 1.14.

Mișcarea de translație a *pistonului 1*, determinată de explozia amestecului de carburant, este transformată în mișcarea de rotație a *manivelei 3*. Elementul intermediar, numit *bielă*, este legat de celelalte două prin cuple cinematice de rotație.

Elementul cinematic 1 reprezintă elementul conducător al mecanismului și se deplasează de-a lungul axei Oy cu viteza \vec{v}_1 . În tabel la primul element se va trece “+” în dreptul acestei mișcări. Elementul intermediar 2 transmite mai departe mișcarea pistonului fiind legat de celelalte elemente prin cuplele de clasa 5 de rotație notate cu C și B. Un capăt al elementului 2 se deplasează pe un segment de dreaptă paralel cu axa Oy iar celălalt pe un cerc de rază AB .

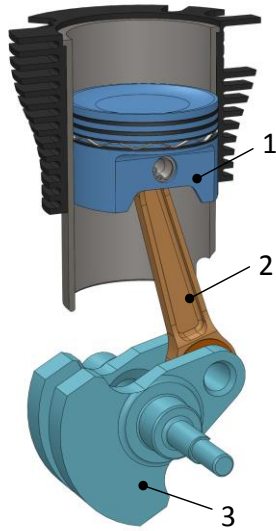
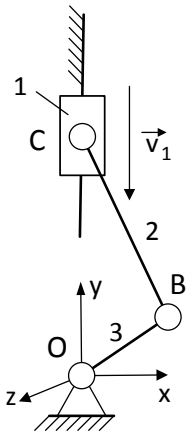


Fig.1.13 Mecanismul manivelă piston

Mișcarea elementului cinematic 2 are loc în planul xOy și este compusă din două translații cu vitezele v_x, v_y și o rotație cu viteza unghiulară ω_z . În tabel, la al doilea element, se va trece semnul “+” în dreptul acestor trei mișcări. Elementul 3 realizează o mișcare de rotație în jurul axei Oz cu viteza ω_z , restul mișcărilor fiind blocate de cupla de clasa 5 de rotație notată cu O .



	v_x	v_y	v_z	ω_x	ω_y	ω_z
1	-	+	-	-	-	-
2	+	+	-	-	-	+
3	-	-	-	-	-	+

Fig.1.14 Schema cinematică mecanismului manivelă-piston

Mecanismul analizat face parte din familia 3 deoarece în dreptul coloanelor v_z, ω_x și ω_y apare numai semnul “-” ceea ce înseamnă că aceste mișcări nu sunt permise nici unui element al mecanismului.

Determinarea gradului de mobilitate se face utilizând relația (1.11) în care se consideră $n = 3$, $C_5 = 4$ și $C_4 = 0$. După înlocuire rezultă $M = 1$, ceea ce înseamnă că mecanismul are un grad de mobilitate, mișcarea pe care o poate primi din exterior fiind în acest exemplu, translația elementului 1 cu viteza v_1 .

Cele mai multe mecanisme au elementul conducător legat de elementul fix printr-o cuplă de clasa 5 de rotație sau translație. O excepție este mecanismul prezentat în figura 1.15.

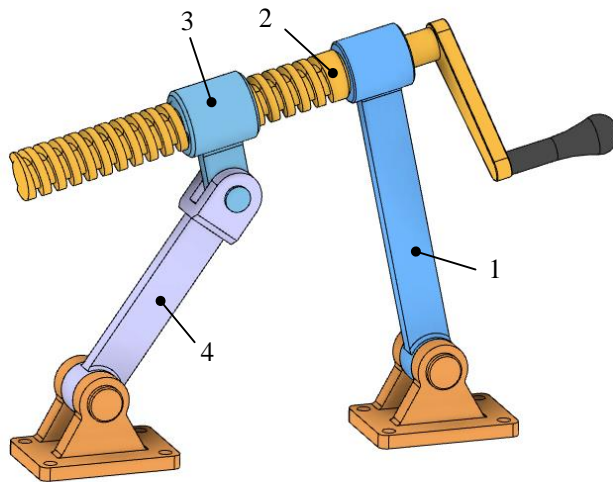
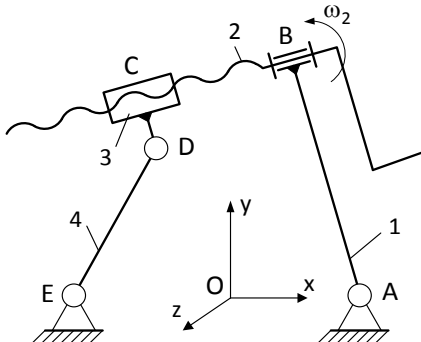


Fig.1.15 Mecanism cu cuplă elicoidală

Mecanismul conține o cuplă elicoidală formată între șurubul 2 și piulița 3. Elementul conducător al mecanismului este șurubul 2 care este legat de elementul fix prin intermediul elementului 1, ceea ce înseamnă că se va mișca împreună cu restul elementelor mecanismului. Schema cinematică a mecanismului și tabelul pentru determinarea familiei sunt prezentate în figura 1.16



	v_x	v_y	v_z	ω_x	ω_y	ω_z
1	-	-	-	-	-	+
2	+	+	-	+	-	+
3	+	+	-	-	-	+
4	-	-	-	-	-	+

Fig.1.16 Schema cinematică mecanismului cu cuplă elicoidală

Șurubul 2 se poate roti cu viteza unghiulară ω_2 în jurul axei Ox , ceea ce determină translația piuliței 3 și implicit modificarea distanței dintre cuplele de clasa 5 notate cu B și C . Micșorarea distanței dintre B și C are ca efect rotația elementului 1 în sens trigonometric, în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_z , mișcare permisă de cupla de rotație din A . În tabel la primul element, se va trece semnul “+” în dreptul acestei mișcări.

Unghiul dintre șurubul 2 și elementul cinematic 1 rămâne tot timpul 90^0 cele două elemente rotindu-se împreună în jurul axei Oz . La al doilea element, în tabel se vor nota cu “+” următoarele patru mișcări: translațiile pe Ox și Oy cu vitezele v_x, v_y respectiv rotațiile în jurul axelor Ox și Oz cu vitezele unghiulare ω_x și ω_z . Piulița 3 se mișcă împreună cu șurubul 2, deci va avea toate mișcărilor acestuia mai puțin rotația în jurul axei Ox care este blocată de elementul 4 și cuplele D și E . Ultimul element al mecanismului realizează o mișcare de oscilație în jurul axei Oz , aceasta fiind singura mișcare permisă de cupla de clasa 5 notată cu E .

Mecanismul din figura 1.15 face parte din familia 2 deoarece coloanele v_z și ω_y conțin numai semnul “-” ceea ce înseamnă că aceste două mișcări sunt suprimate tuturor elementelor mecanismului.

Gradul de mobilitate se calculează cu relația corespunzătoare familiei 2, adică

$$M_2 = 4n - 3C_5 - 2C_4 - C_3 \quad (1.12)$$

unde:

$n = 4$ – numărul elementelor mobile,

$C_5 = 5$ – numărul cuplelor de clasa 5,

$C_4 = 0$ – numărul cuplelor de clasa 4.

După înlocuire rezultă $M = 1$, deci mecanismului i se poate impune din exterior o singură mișcare independentă, care este în acest caz mișcarea de rotație cu viteza ω_2 a șurubului 2.

Pentru ca elementele mecanismelor să aibă mișcări determinate, este nevoie uneori de mai multe elemente conducătoare. Un astfel de mecanism este prezentat în figura 1.17. Schema cinematică a mecanismului și tabelul pentru determinarea familiei sunt prezentate în figura 1.18.

Elementele conducătoare ale mecanismului sunt elementele 1 și 2 care se pot roti în jurul axei Oz cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 fiind acționate de motoarele electrice M_1 și M_2 . În tabelul din figura 1.18 în dreptul elementelor 1 și 2 se vor nota

cu semnul “+” aceste mișcări. Mișcarea de rotație este transmisă mai departe elementelor conduse 3 și 4 care realizează mișcări în planul xOy. Mișcarea fiecărui element este compusă din două translații cu vitezele \vec{v}_x, \vec{v}_y și o rotație cu viteza unghiulară ω_z . În tabel la elementele 3 și 4 se va trece semnul “+” în dreptul acestor mișcări.

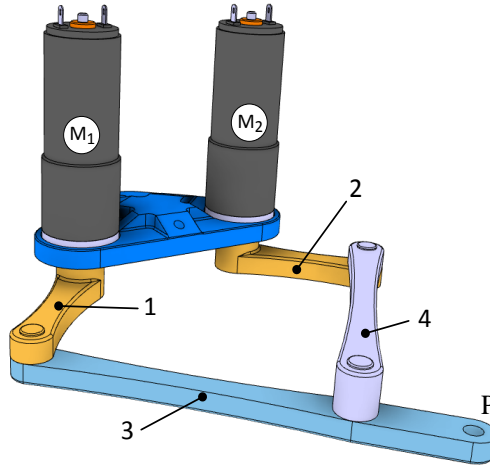
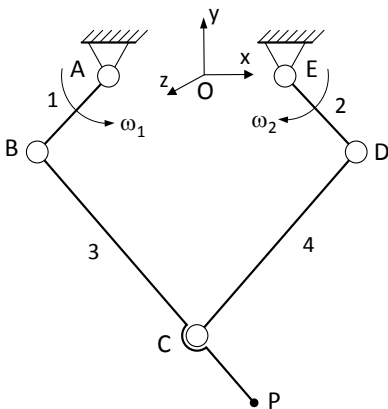


Fig.1.17 Mecanism cu două grade de mobilitate

Mecanismul analizat face parte din familia 3 deoarece coloanele v_z, ω_x și ω_y conțin numai semnul “-” ceea ce înseamnă că aceste mișcări sunt suprimate tuturor elementelor mecanismului



	v_x	v_y	v_z	ω_x	ω_y	ω_z
1	-	-	-	-	-	+
2	-	-	-	-	-	+
3	+	+	-	-	-	+
4	+	+	-	-	-	+

Fig.1.18 Schema cinematică mecanismului cu două grade de mobilitate

Determinarea gradului de mobilitate se face cu relația (1.11) în care se consideră: $n = 4, C_5 = 5$ și $C_4 = 0$. După înlocuire rezultă $M = 2$, deci mecanismul are

două grade de mobilitate, mișcările pe le o poate primi din exterior fiind rotațiile elementelor 1 și 2 cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 .

Uneori în structura mecanismelor, apar elemente și cuple care nu contribuie la mișcarea mecanismului. Ele sunt introduse din considerente constructive sau funcționale cum ar fi: creșterea rigidității sau înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire. Prezența acestor elemente și cuple poate duce la apariția unor grade de mobilitate pasive.

1.4.1 Elemente și cuple pasive

Elementele și cuplele cinematice care deși sunt prezente în structura mecanismelor, nu contribuie cu nimic la caracterul mișcării elementului condus, se numesc *elemente pasive* respectiv *cuple pasive*. Pentru o analiză structurală corectă, elementele și cuplele pasive trebuie eliminate din schema cinematică a mecanismului. Dacă nu sunt eliminate, la calculul gradului de mobilitate se obțin valori nule sau negative, deși mecanismul funcționează corect.

Există situații când prezența cuplelor pasive este necesară pentru a îmbunătăți rigiditatea structurală a mecanismului. Un exemplu îl constituie mecanismul a cărui schemă cinematică este prezentată în figura 1.19 a.

Mișcarea de oscilație cu viteza unghiulară ω_1 a elementului conducător 1 este transmisă mai departe prin intermediul elementelor 2, 3 și 5, elementului 4. În acest fel elementul 4 se poate roti în jurul axei perpendiculare pe planul mișcării fără a fi nevoie de o cuplă de rotație în punctul O .

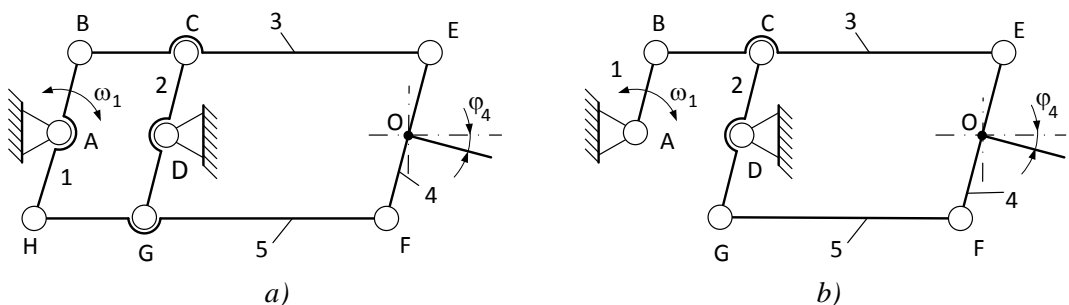


Fig. 1.19 Mecanism cu o cuplă pasivă

După cum se observă din figura 1.19 a, mecanismul este format din cinci elemente cinematice legate între ele prin opt cuple de rotație de clasă 5. Deoarece toate mișcările au loc în plan, mecanismul este de familia 3, iar pentru calculul gradului de mobilitate se aplică relația (1.11) unde $n = 5$, $C_5 = 8$.

După înlocuire rezultă: $M = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = -1$ ceea ce nu are sens deoarece gradul de mobilitate nu poate fi negativ. Cupla pasivă este în acest caz cupla de rotație dintre elementele 1 și 5 notată cu H . Prin eliminarea ei se obține mecanismul cu schema cinematică din figura 1.19 b care funcționează la fel și are același număr de elemente. Astfel, gradul de mobilitate devine $M = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

Cele două mecanisme au aceleași mișcări, dar cel din figura 1.19 a este mai rigid din punct de vedere structural datorită patrulaterului format din elementele 1, 2, 3 și 5 respectiv cuplele B , C , G și H .

În figura 1.20 este prezentată schema cinematică a unui mecanism la care între lungimile elementelor există următoarea relație: $AB = BC = BD$. În acest caz prin rotația elementului conducător 1 cu viteza unghiulară ω_1 , elementele 3 și 4 se vor deplasa pe orizontală respectiv pe verticală.

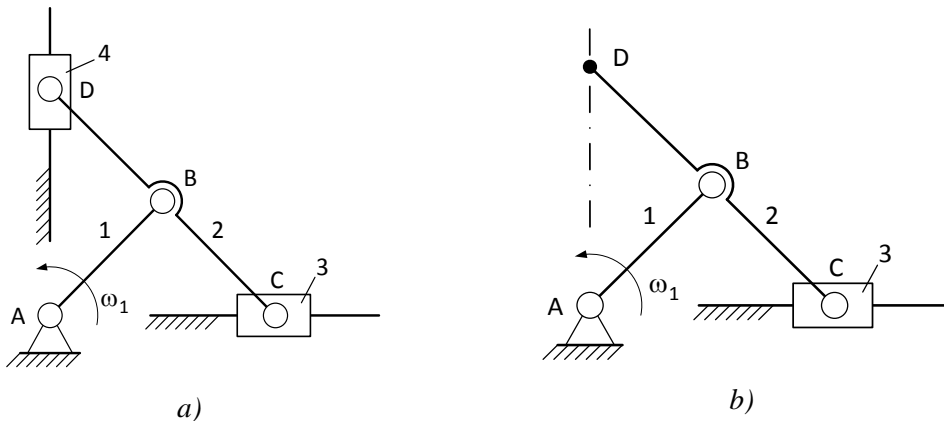


Fig. 1.20 Mecanism cu element și cuplă pasive

Similar cu exemplul anterior, mecanismul este unul plan de familia 3 și este format din patru elemente și șase cuple de clasa 5 (patru rotații și două translații). Înlocuind în relația (1.11) rezultă $M = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ cu toate că mecanismul este perfect funcțional.

În acest caz elementul 4 și cupla de rotație D sunt pasive deoarece prin eliminarea lor mecanismul își păstrează aceleași mișcări.

În figura 1.20 b se observă că punctul D de pe elementul 2 se deplasează după o dreaptă verticală chiar dacă elementul 4 lipsește. Prin eliminarea elementului 4 și implicit a cuplelor prin care acesta se leagă de elementul 2 și de elementul fix, gradul de mobilitate al mecanismului devine $M = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$. Prezența în structura mecanismului a elementului 4 și a cuplelor aferente facilitează transmiterea forțelor.

Un alt exemplu de mecanism cu elemente pasive are schema cinematică prezentată în figura 1.21 a. Între elementele mecanismului trebuie să existe următoarele relații de egalitate: $AB = EF = CD$ respectiv $AE = BF$ și $ED = FC$. În aceste condiții mișcarea de rotație a elementului conducător 1 este transmisă și celorlalte elemente ale mecanismului. Mecanismul este de familia 3 și este format din patru elemente și șase cuple de clasa 5 de rotație. Înlocuind valorile în relația (1.11) rezultă: $M = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ ceea ce ar însemna că mecanismul nu poate funcționa.

Cuplele B , F și C de pe elementul 2 se deplasează tot timpul pe arce de cerc cu raze egale, în consecință elementul 4 poate lipsi fără ca acest lucru să afecteze caracterul mișcărilor elementelor mecanismului. Prin urmare elementul 4 și cuplele aferente E și F sunt considerate pasive. Prin eliminarea lor se obține mecanismul din figura 1.21 b pentru care gradul de mobilitate devine: $M = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

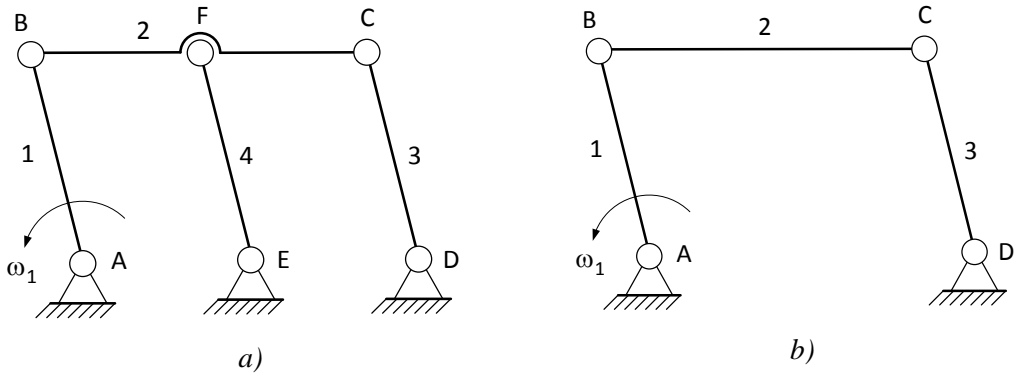


Fig. 1.21 Mecanism patrulater cu element și cuple pasive

1.4.2 Grade de mobilitate pasive

În structura mecanismelor pot să existe cuple introduse pentru a îmbunătăți condițiile de funcționare, de exemplu înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire. La calculul gradului de mobilitate, în aceste situații, rezultă valori mai mari decât sunt necesare pentru funcționarea corectă a mecanismului.

În exemplul prezentat în figura 1.22 a, mișcarea de rotație a elementului conducător 1 determină rostogolirea rolei 3 de-a lungul elementului considerat fix. Mecanismul este format din trei elemente, trei cuple de clasa 5 de rotație și o cuplă superioară de clasa 4 notată cu D , între elementul 3 și elementul fix. Gradul de mobilitate al mecanismului este $M = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$. În realitate rotația rolei 3 în jurul cuplei C cu viteza ω_3 , nu afectează mișcarea celorlalte elemente. Rotația rolei

poate avea loc și în cazul în care restul elementelor mecanismului sunt în repaus, motiv pentru care este considerat grad de mobilitate pasiv.

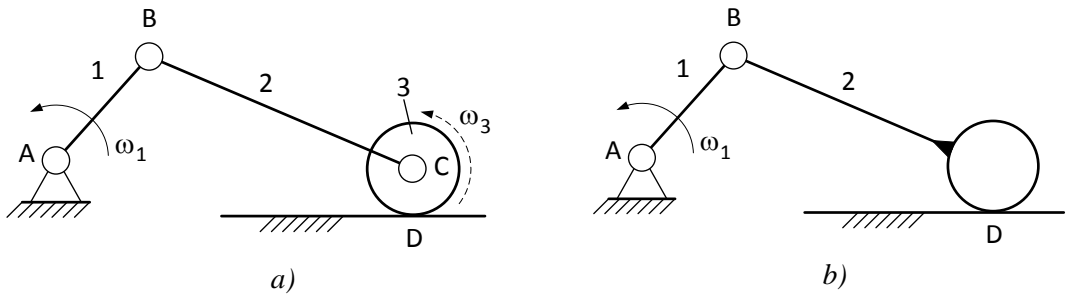


Fig. 1.22 Mecanism cu grad de mobilitate pasiv

Dacă rotația rolei este suprimată, elementele 2 și 3 devin un singur element și se obține mecanismul din figura 1.22 b, pentru care gradul de mobilitate este: $M = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$.

În figura 1.23 este prezentată schema cinematică a unui alt mecanism cu grad de mobilitate pasiv.

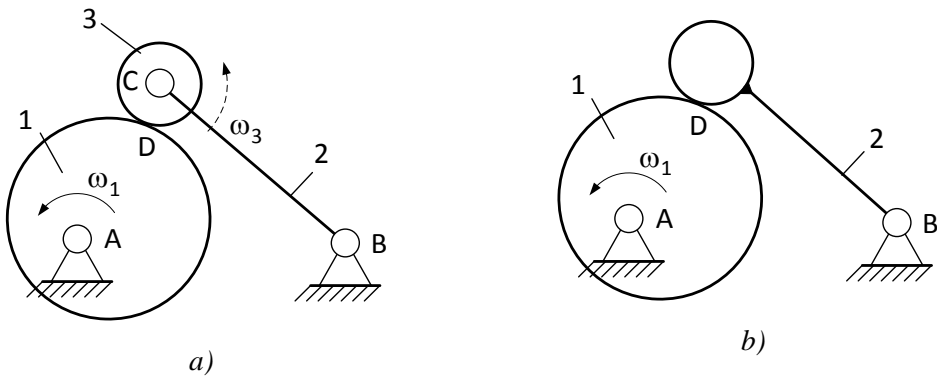


Fig. 1.23 Mecanism cu excentric

Elementul conducător 1 se rotește excentric cu viteza ω_1 în jurul cuplei A și determină oscilația elementului 2 în jurul cuplei B. Pentru reducerea uzurii, între cele două elemente s-a interpus rola 3. Mecanismul este format din trei elemente, trei cuple de clasa 5 (trei rotații) și o cuplă de clasa 4 între elementele 1 și 3. Înlocuind în relația de calcul al gradul de mobilitate al mecanismului rezultă $M = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$. La fel ca în exemplul anterior, rotația rolei 3 în jurul propriei axe nu afectează mișcarea celorlalte elemente, deci poate fi considerată grad de mobilitate pasiv. Prin eliminarea

rotației rolei, rezultă mecanismul din figura 1.23 b care are aceleași mișcări ale elementelor și gradul de mobilitate $M = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$.

În concluzie, pentru determinarea corectă a gradului de mobilitate al unui mecanism este necesar, pe lângă determinarea a familiei din care face parte, și identificarea și eliminarea elementelor, cuplelor și gradelor de mobilitate considerate pasive.

Majoritatea mecanismelor cu bare articulate sunt mecanisme plane de familia 3 în structura cărora se regăsesc cuple de clasa 5 și uneori cuple superioare de clasa 4 cu contact punctiform în plan. Pentru a simplifica analiza cinematică a mecanismelor, aceste cuple superioare se înlocuiesc cu cuple de clasa 5 de rotație sau translație.

1.4.3 Mecanisme înlocuitoare

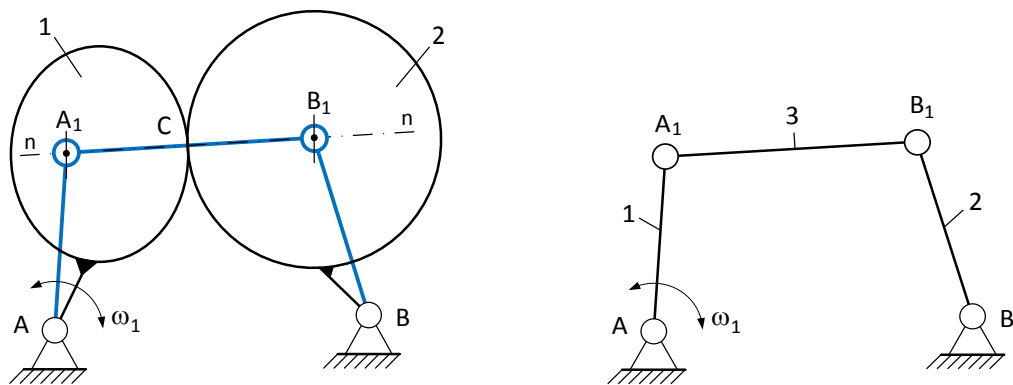
Mecanismul obținut prin echivalarea cuplelor superioare de clasa 4 cu lanțuri cinematice care conțin doar cuple de clasa 5, poartă denumirea de *mecanism înlocuitor* [2]. Înlocuirea trebuie făcută astfel încât mecanismul rezultat să fie echivalent cu mecanismul inițial. Pentru aceasta trebuie îndeplinite următoarele două condiții:

- Gradul de mobilitate al mecanismului nou format să fie același cu al mecanismului inițial.
- Mișcările relative ale elementelor care formau cupla superioară să nu se schimbe după înlocuire.

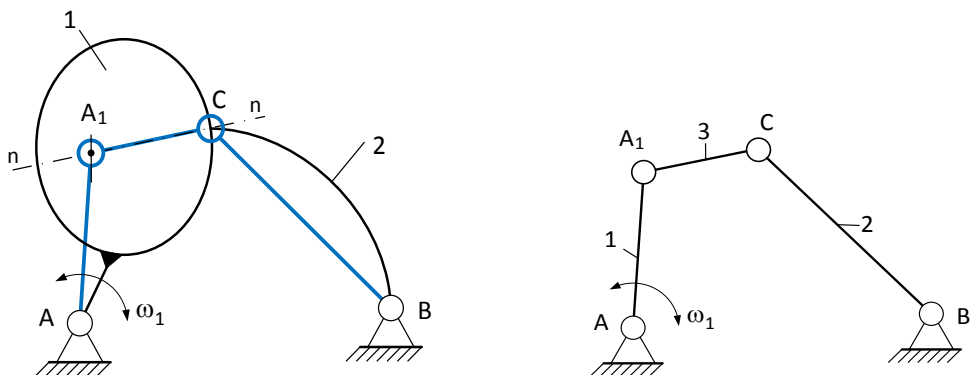
Din punct de vedere al numărului de restricții, fiecare cuplă superioară de clasa 4 din structura mecanismelor plane, se poate echivala cu un element cinematic care se leagă de restul elementelor mecanismului prin două cuple de clasa 5 de rotație sau translație așa cum rezultă și din figura 1.24 [9].

Pentru înlocuirea cuplei superioare se parcurg următoarele etape :

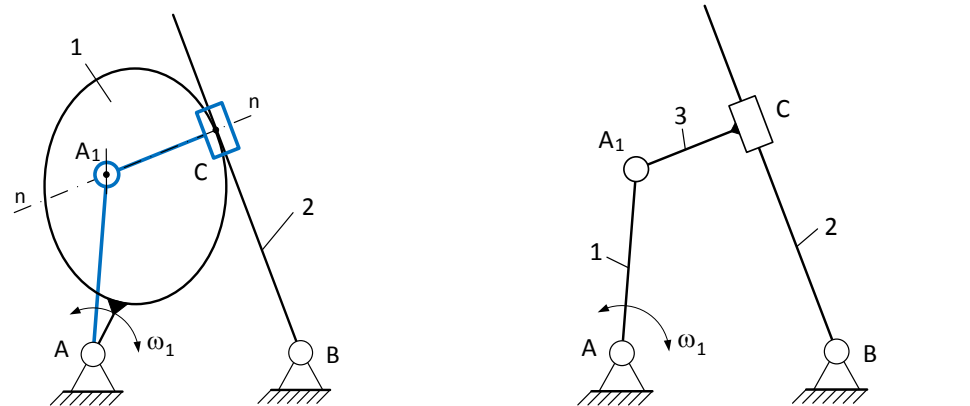
- Se duce normala comună $n-n$ în punctul de contact dintre cele două profiluri care formează cupla superioară care urmează a fi înlocuită;
- Pe această dreaptă se găsesc centrele de curbură A_1 și B_1 ale profilurilor, în care se plasează câte o cuplă de rotație (vezi fig. 1.24 a). Dacă unul din elementele care formează cupla superioară, este o dreaptă, se procedează similar cu diferența că în punctul de contact se plasează o cuplă de translație cu direcția de mișcare perpendiculară pe $n-n$ (fig.1.24 c).
- Cele două cuple de clasa 5 se unesc cu un element și apoi cu restul mecanismului rezultând astfel mecanismul înlocuitor.



a)



b)



c)

Fig.1.24 Mecanisme înlocuitoare

Când elementele mecanismului își modifică poziția relativă, se vor modifica și razele de curbură ale profilelor aflate în contact, prin urmare mecanismul înlocuitor

este valabil doar pentru o poziție instantanee a mecanismului inițial [2]. Dacă profilurile elementelor care formează cupla superioară sunt cercuri, atunci mecanismul înlocuitor rămâne același pentru orice poziție a mecanismului inițial.

1.4.4 Formarea mecanismelor plane

Se pleacă de la ideea că orice mecanism plan poate fi format prin legarea succesivă la elementul conducător și la elementul fix, a unor grupe structurale cu grad de mobilitate zero (vezi fig 1.10). În mod similar, orice mecanism poate fi descompus în grupe structurale și elemente conducătoare, cu mențiunea că modul de descompunere este unic pentru un element conducător precizat. De exemplu mecanismul manivelă piston poate fi format prin legarea la elementul conducător și la cel fix a unei grupe structurale *RRT*, după cum se observă din figura 1.25.

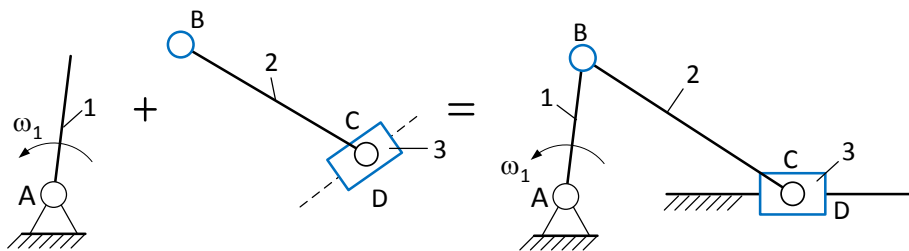


Fig.1.25 Formarea mecanismului manivelă piston

Deoarece grupele structurale au grad de mobilitate zero prin adăugarea sau eliminarea lor din structura unui mecanism, gradul de mobilitate al acestuia nu se modifică. Astfel, dacă la un mecanism patrulater $M = 1$ cu se mai adaugă o grupă structurală *RRT* se obține mecanismul din figura 1.26.

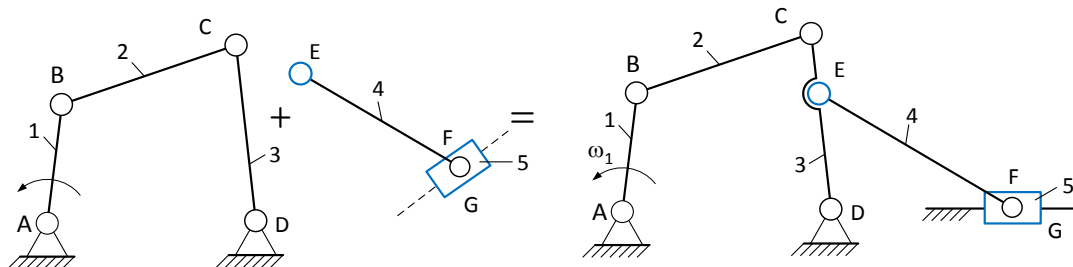


Fig.1.26 Mecanism compus

Pentru calculul mobilității noului mecanism se utilizează relația (1.11) în care $n = 5$, $C_5 = 7$ și $C_4 = 0$. După înlocuire rezultă $M = 1$.

Unele metode de analiză cinematică sau cinetostatică a mecanismelor prezentate în lucrările [2], [9] se bazează pe modele matematice dezvoltate pe baza grupelor structurale. Identificarea în structura mecanismului a grupelor structurale simplifică studiul acestuia deoarece permite utilizarea unor modele matematice deja existente.

Analiza structurală a mecanismelor își propune pe baza schemei cinemate, determinarea numărului de elemente, stabilirea numărului de cuple și a clasei acestora, identificarea familiei din care face parte mecanismul, determinarea corectă a gradului de mobilitate prin identificarea eventualelor cuple, elemente sau mobilități pasive iar dacă este cazul, găsirea mecanismului înlocuitor. În unele cazuri este utilă și identificarea grupelor structurale din care este format mecanismul.

2. ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR

2.1 Introducere

Analiza cinematică are ca obiectiv determinarea pozițiilor, vitezelor și accelerațiilor pentru elementele conduse ale unui mecanism, sau pentru puncte aparținând acestora, fără a lua în considerare forțele care intervin. Geometria mecanismului și legea de mișcare a elementului motor se consideră cunoscute.

Metodele de analiză cinematică pot fi: grafice, grafo-analitice sau analitice. Metodele grafice permit determinarea parametrilor cinematici prin construcții grafice fără a utiliza relații de calcul. Cele mai utilizate sunt: metoda derivării grafice, metoda centrului instantaneu de rotație, metoda rabaterii [6], [7]. Cinematica grafo-analitică constă în rezolvarea grafică a ecuațiilor lui Euler scrise pentru viteze și accelerații. Este o metodă relativ simplă și poate fi aplicată pentru determinarea vitezei și accelerației elementelor cinematice sau a unor puncte de pe acestea. Implică însă un volum mare de muncă deoarece rezolvarea grafică trebuie făcută secvențial pentru fiecare poziție relativă a elementelor mecanismului [2], [10].

Cinematica analitică, indiferent de metoda prin care este realizată, este mai laborioasă dar prezintă avantajul preciziei. Poate fi realizată prin: rezolvarea analitică a ecuațiilor vectoriale [6], [10], metoda contururilor vectoriale, metoda matricială [4], metoda funcțiilor de transmitere [1].

De regulă funcționarea mecanismelor cu bare articulate are un caracter periodic. Perioada după care toate elementele ajung în aceeași poziție se numește *ciclu cinematic*. Dacă elementul conducător al unui mecanism realizează o mișcare de rotație, ciclul cinematic corespunde unei rotații complete a elementului. Analiza cinematică indiferent de metodă, se realizează numai pentru un ciclu cinematic al mecanismului.

2.2 Determinarea traiectoriilor

Determinarea pozițiilor extreme ale elementelor și a traiectoriilor descrise de diferite puncte aparținând acestor elemente sunt importante deoarece ele delimitează spațiul ocupat de mecanism în timpul funcționării.

Trajectoriile descrise de puncte aparținând elementelor mobile ale mecanismelor se pot determina grafic sau prin metode analitice. Metoda grafică implică reprezentarea mecanismului la scară în mai multe poziții succesive, rezultând astfel puncte de pe traiectorie. În figura 2.1 sunt reprezentate curbe descrise de puncte aparținând unui mecanism manivelă piston, obținute prin metoda grafică. Această metodă este destul de laborioasă, implică un volum mare de muncă și este imprecisă deoarece traiectoriile obținute reprezintă aproximări ale traiectoriilor reale.

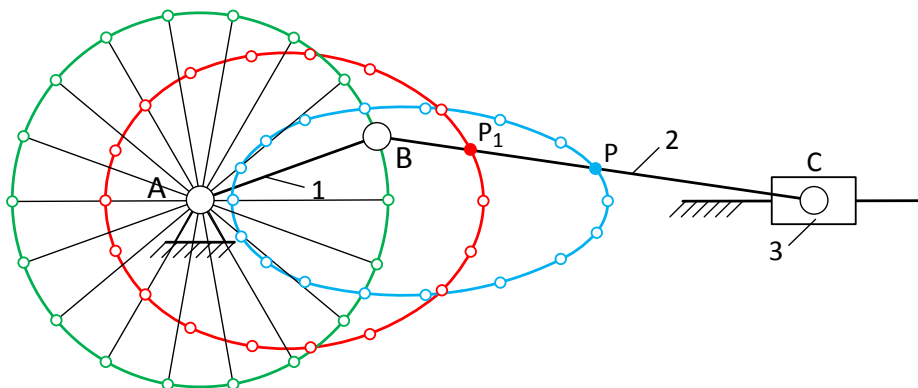


Fig. 2.1. Curbe descrise de puncte aparținând mecanismului manivelă piston

Pentru rezultate mai bune se utilizează metodele analitice. Acestea sunt mai precise dar, ecuațiile obținute devin complicate și dificil de rezolvat odată cu creșterea numărului de elemente al mecanismului. De exemplu, curba trasată de un punct aparținând unui mecanism patrulater este descrisă, în cazul general, de o ecuație de gradul șase. În situații particulare ecuația își poate reduce gradul [2].

Mecanismul prezentat în figura 2.2 este format din trei elemente și patru cuple de clasa 5. Elementele 1 și 3 se deplasează pe direcțiile axelor Ox respectiv Oy . Dacă se notează cu α unghiul format de elementul 2 cu direcția axei Ox , coordonatele punctului P se pot scrie astfel:

$$\begin{aligned}x_P &= (BP + AB)\cos\alpha \\y_P &= BP\sin\alpha\end{aligned}\tag{2.1}$$

Prin eliminarea unghiului α , rezultă forma canonică a ecuației elipsei cu centrul în O și semiaxele BP respectiv AP :

$$\frac{x_P^2}{(BP + AB)^2} + \frac{y_P^2}{BP^2} = 1 \quad (2.2)$$

Pentru punctele situate pe elementul 2 între cuplele B și A , relația (2.2) devine:

$$\frac{x_{P_i}^2}{(BP_i + AP_i)^2} + \frac{y_{P_i}^2}{BP_i^2} = 1 \quad (2.3)$$

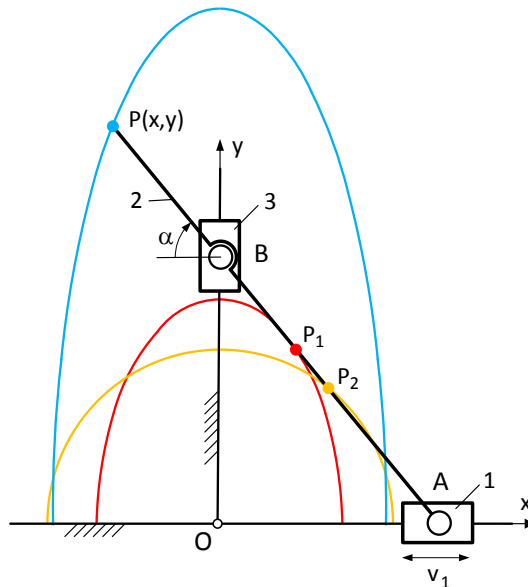


Fig. 2.2 Curbe descrise de puncte aparținând mecanismului elipsograf

Un caz particular al mecanismului patrulater este prezentat în figura 2.3. Între lungimile laturilor mecanismului există următoarele relații: $OC = 2OB$, $CD = DP = DB = 2,5OB$.

La o rotație completă a elementului conducător I puncte aparținând elementelor mecanismului descriu traiectoriile din figura 2.3. Când unghiul dintre elementul conducător I și axa Oy variază în intervalul $0...180^\circ$, traiectoria descrisă de punctul P de pe elementul 2 poate fi aproximată cu o dreaptă [2], [3].

Coordonatele punctului P pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned} x_P &= PC \cos(\alpha + \pi/2) \\ y_P &= PC \sin(\alpha + \pi/2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

unde:

$$\alpha = \arccos \frac{OC^2 + BC^2 - OB^2}{2 \cdot BC \cdot OC}$$

$$PC = BP \sin \beta$$

$$\beta = \arccos \frac{BC^2 + DC^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot DC}$$

(2.5)

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cos(\pi - \varphi_1)}$$

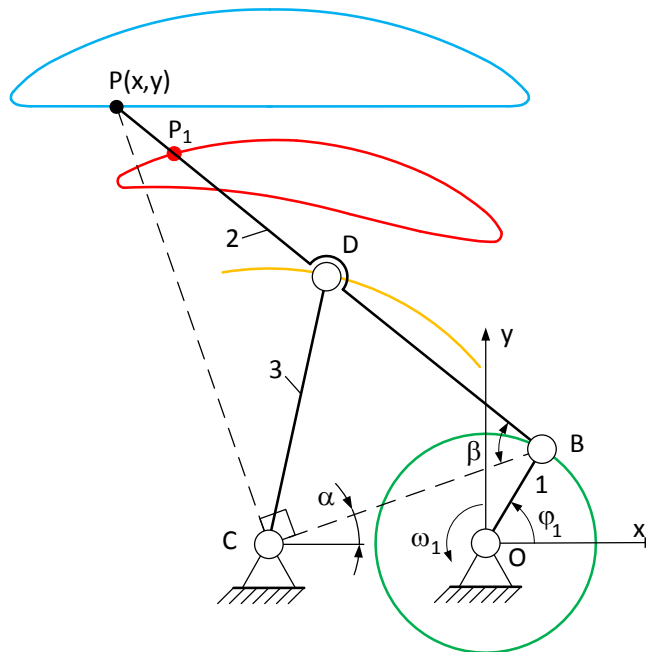


Fig.2.3 Curbe descrise de puncte aparținând mecanismului patrulater

Pe perioada unui ciclu cinematic, elementele mobile ale mecanismelor ajung în anumite poziții particulare, numite *poziții extreme* care duc la imposibilitatea transmiterii mișcării în anumite direcții [2]. Cea mai simplă și intuitivă metodă de determinare a acestor poziții, este metoda grafică.

Dacă elementele 1 și 2 ale mecanismului patrulater din figura 2.4 sunt coliniare, mișcarea elementului conducător 1 nu se mai poate transmite elementului condus 3.

Pentru determinarea pozițiilor extreme la mecanismul patruleter, se trasează două arce de cerc cu centrul în A și de raze $l_2 - l_1$ respectiv $l_2 + l_1$ care intersectează arcul de cerc cu centrul în C și rază l_3 în punctele C_1 și C_2 .

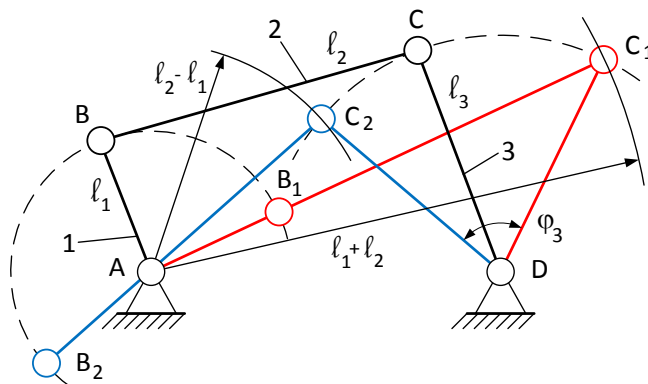


Fig.2.4 Pozițiile extreme ale mecanismul patruleter

Astfel, la o rotație completă a elementului conducător 1, elementul condus numit *balansier*, v-a descrie un sector de cerc cu unghiul la vârf egal cu φ_3 .

În md similar se procedează și pentru determinarea pozițiilor extreme ale mecanismului manivelă piston din figura 2.5, cu mențiunea că cele două arce de cerc de raze $l_2 - l_1$ respectiv $l_2 + l_1$ vor intersecta direcția de deplasare a elementului 3 în punctele C_1 și C_2 .

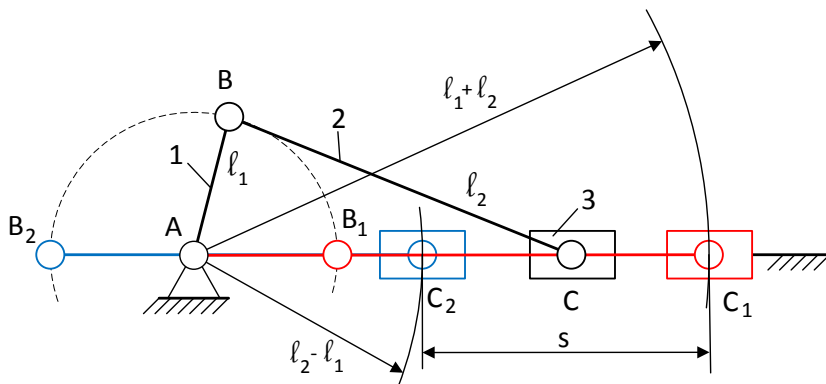


Fig.2.5 Pozițiile extreme ale mecanismul manivelă piston

Pentru o rotație completă a elementului conducător numit *manivelă*, elementul condus 3 numit *piston* v-a realiza o mișcare de translație pe o distanță s egală cu dublul

lungimii manivelei. Mecanismul din figura 2.6 ajunge în poziții extreme atunci când elementele 1 și 3 sunt perpendiculare unul pe celălalt, astfel că la o rotație completă a elementului conducător, elementul condus v-a descrie un sector de cerc cu unghiul la vârf φ_3 .

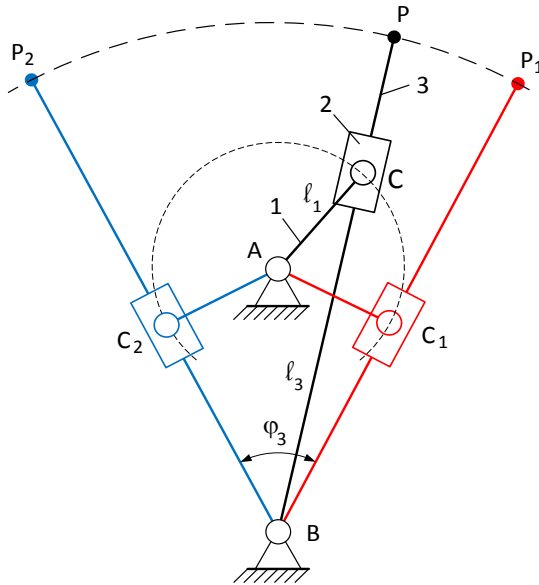


Fig.2.6 Poziții extreme pentru mecanismul culisă oscilantă

Mecanismele cu un grad de mobilitate pot fi utilizate pentru generarea diverselor traiectorii sau pentru transformarea mișcărilor, de exemplu mișcarea de rotație în mișcare de translație. Caracterul mișcărilor și curbele generate rămân tot timpul aceleași deoarece lungimile elementelor mecanismului sunt constante.

2.3 Analiza cinematică cu ajutorul funcțiilor de transmitere

Definirea funcțiilor de transmitere și modul de utilizare al acestora în studiul mecanismelor sunt tratate pe larg în [1]. În continuare sunt prezentate aspecte privind utilizarea acestor funcții în analiza cinematică a mecanismelor plane cu bare articulate.

Mecanismele cu bare pot fi considerate sisteme neliniare cu parametrii de intrare și ieșire. Legea de mișcare a elementului conducător constituie parametrul de intrare pe care mecanismul îl transformă, în funcție de structura lui, în legea de mișcare a elementului condus. Legătura între parametrii care definesc starea cinematică a elementului condus și cei ce definesc starea cinematică elementului conducător, este realizată cu ajutorul funcțiilor de transmitere de diferite ordine (fig. 2.7)

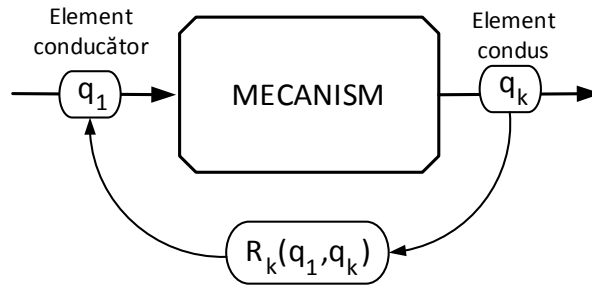


Fig. 2.7 Legătura între parametri cinematici

Funcția de transmitere de ordinul zero $\mathcal{R}_k(q_1, q_k)$ a elementului condus k , reprezintă funcția care face legătura între parametrul q_k care poziționează acest element și parametrul q_1 care poziționează elementul conducător. Se mai numește funcție de poziție, și poate fi scrisă sub formă implicită, astfel:

$$\mathcal{R}_k(q_1, q_k) = 0 \quad (2.6)$$

unde: q_1 și q_k reprezintă deplasări liniare (l_1, l_k) și/sau unghiulare (φ_1, φ_k).

Funcțiile de transmitere de ordinul zero sunt specifice fiecărui mecanism. În expresia lor se regăsesc sub formă de constante, lungimile elementelor mecanismului sau uneori unghiurile pe care acestea le fac cu axele sistemului de coordonate. Expresia funcției de transmitere de ordin zero poate fi obținută prin mai multe metode. Cea mai utilizată metodă pentru obținerea acestor funcții, se bazează pe ecuațiile de proiecții pe axe ale unui contur vectorial închis asociat mecanismului (fig.2.8).

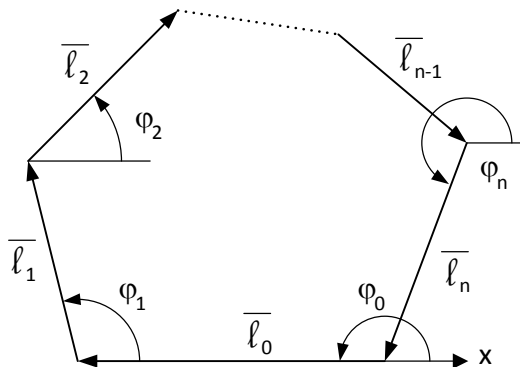


Fig. 2.8 Contur vectorial închis

Ecuțiile de proiecții pe axe pot fi scrise sub forma generală, astfel:

$$\begin{aligned} l_0 \cos \varphi_0 + l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + \dots + l_n \cos \varphi_n &= 0 \\ l_0 \sin \varphi_0 + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + \dots + l_n \sin \varphi_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Din relațiile (2.7), în care regăsim lungimile elementelor mecanismului și unghiurile pe care acestea le fac cu axa Ox , se elimină parametrii care poziționează elementele de legătură dintre elementul conducător și elementul condus. Rezultă astfel expresia funcției de ordinul zero.

Derivând relația (2.6) în raport cu timpul, se obține:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0, \quad (2.8)$$

sau:

$$\dot{q}_k = \mathcal{R}'_k \dot{q}_1 \quad (2.9)$$

cu notațiile:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{R}'_k = - \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_1}}{\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_k}}. \quad (2.11)$$

În relațiile de mai sus, \dot{q}_1 și \dot{q}_k au semnificația unor viteze liniare (\vec{v}_1, \vec{v}_k) și/sau unghiulare (ω_1, ω_k).

Relația (2.11) reprezintă *funcția de transmitere de ordinul întâi* \mathcal{R}'_k a elementului condus k , care face legătura între viteza \dot{q}_k a elementului condus și viteza \dot{q}_1 a elementului conducător [1]. Derivând relația (2.6) de două ori în raport cu timpul, rezultă:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_1^2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_1 \partial q_k} \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_k^2} \frac{d^2 q_k}{dt^2} = 0, \quad (2.12)$$

Dacă ținem cont și de relația (2.9) se poate scrie:

$$\ddot{q}_k = \mathcal{R}_k'' \dot{q}_1^2 + \mathcal{R}_k' \ddot{q}_1 \quad (2.13)$$

unde sau folosit următoarele notații:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \ddot{q}_1 = \frac{d^2q_1}{dt^2}, \quad \ddot{q}_k = \frac{d^2q_k}{dt^2}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{R}_k'' = - \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_1^2} + 2\mathcal{R}_k' \frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_1 \partial q_k} + (\mathcal{R}_k')^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}_k}{\partial q_k^2}}{\frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial q_k}} \quad (2.15)$$

în care \ddot{q}_1 și \ddot{q}_k reprezintă accelerații liniare (\vec{a}_1, \vec{a}_k) și/sau unghiulare ($\varepsilon_1, \varepsilon_k$).

Relația (2.15) reprezintă expresia *funcției de transmitere de ordinul doi* \mathcal{R}_k'' a elementului condus k , care împreună cu funcția de transmitere de ordinul întâi \mathcal{R}_k' , stabilește legătura între accelerația \ddot{q}_k a elementului condus și viteza \dot{q}_1 și accelerația \ddot{q}_1 ale elementului conducător [1].

Funcțiile de transmitere sunt caracteristici geometrice ale mecanismelor. Ele pot fi determinate independent de starea cinematică a elementului conducător și odată obținute, pot fi utilizate la analiza cinematică a tuturor mecanismelor cu aceeași structură dar cu lungimi diferite ale elementelor.

2.3.1 Analiza cinematică a mecanismului manivelă piston

Pentru mecanismul reprezentat în figura 2.9 se consideră cunoscute lungimile elementelor $l_1 = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 50 \text{ mm}$ și valoarea excentricității $e = 10 \text{ mm}$. Elementul conducător se rotește cu o viteză unghiulară constantă $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$. Prin analiza cinematică se urmărește determinarea legilor de variație pentru poziția, viteza și accelerația elementului condus 3. Se vor lua în considerare diferite valori ale excentricității e .

Într-o primă etapă trebuie găsită expresia funcției de transmitere de ordin zero care face legătura între deplasarea elementului 3 și rotația elementului 1, adică funcția $\mathcal{R}_3(\varphi_1, l_3) = 0$

Se atașează mecanismului un contur vectorial închis: $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{e} + \vec{l}_3 = 0$. Din ecuația de închidere a conturului, rezultă:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - e \cos \varphi_e + l_3 \cos \varphi_3 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - e \sin \varphi_e + l_3 \sin \varphi_3 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

unde: $l_1, l_2, e, \varphi_e, \varphi_3 = \text{const.}$

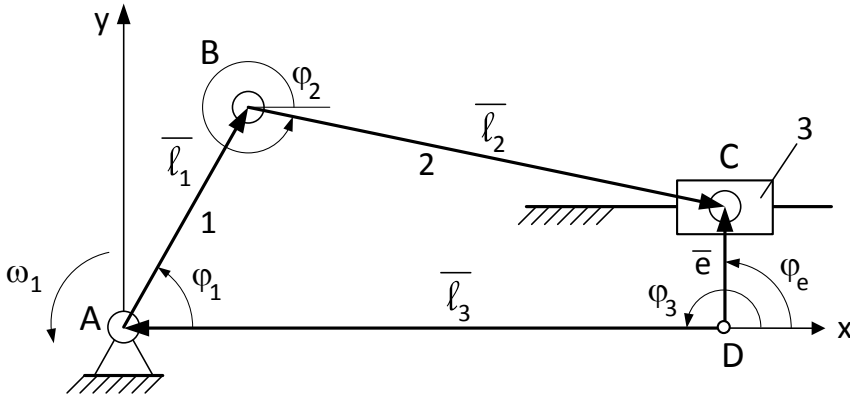


Fig. 2.9 Schema cinematică și conturul vectorial asociat mecanismului manivelă piston

Ținând cont de faptul că $\varphi_e = 90^\circ$ și $\varphi_3 = 180^\circ$, sistemul de ecuații (2.16) se poate scrie:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 - l_3 = -l_2 \cos \varphi_2 \\ l_1 \sin \varphi_1 - e = -l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Prin eliminarea unghiului φ_2 se obține expresia funcției de transmitere de ordin zero sub forma:

$$\mathcal{R}_3(\varphi_1, l_3) = l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + e^2 - 2l_1l_3 \cos \varphi_1 - 2el_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad (2.18)$$

de unde rezultă legea de variație a poziției elementului 3:

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin \varphi_1 - e)^2} \quad (2.19)$$

Viteza și accelerația elementului 3 se obțin scriind relațiile (2.9) și (2.13) după cum urmează:

$$\begin{aligned} v_3 &= \mathcal{R}'_3 \omega_1 \\ a_3 &= \mathcal{R}''_3 \omega_1^2 + \mathcal{R}'_3 \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

unde: \mathcal{R}'_3 și \mathcal{R}''_3 reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întâi respectiv doi iar ε_1 este accelerația unghiulară a elementului conducător. Viteza unghiulară a elementului conducător este constantă, prin urmare $\varepsilon_1 = 0$.

Pentru determinarea acestor funcții se fac următoarele derivate parțiale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1} &= 2l_1 l_3 \sin \varphi_1 - 2el_1 \cos \varphi_1 ; \\ \frac{\partial \mathcal{R}_3}{\partial l_3} &= 2l_3 - 2l_1 \cos \varphi_1 ; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1^2} &= 2l_1 l_3 \cos \varphi_1 + 2el_1 \sin \varphi_1 ; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial l_3^2} &= 2 ; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1 \partial l_3} &= 2l_1 \sin \varphi_1 .\end{aligned}\tag{2.21}$$

Prin înlocuirea în relațiile (2.11) și (2.15) se obțin expresiile funcțiilor de transmitere ordinul întâi respectiv doi, astfel:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'_3 &= -\frac{l_1(l_3 \sin \varphi_1 - e \cos \varphi_1)}{l_3 - l_1 \cos \varphi_1} \\ \mathcal{R}''_3 &= -\frac{l_1(l_3 \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_1) + 2\mathcal{R}'_3 l_1 \sin \varphi_1 + \mathcal{R}'_3{}^2}{l_3 - l_1 \cos \varphi_1}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Prin înlocuirea relațiilor (2.22) în (2.20) se obține forma finală a legii de mișcare pentru elementul 3. În figura 2.10 este reprezentată variația acestei legi de mișcare pentru un ciclu cinematic, considerând diferite valori ale excentricității e

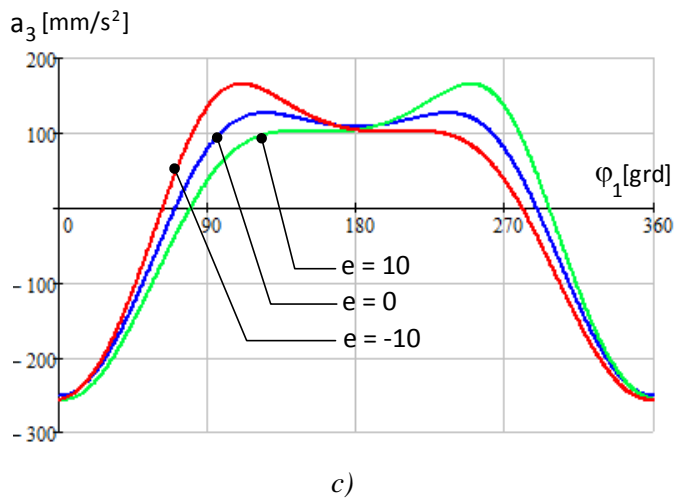
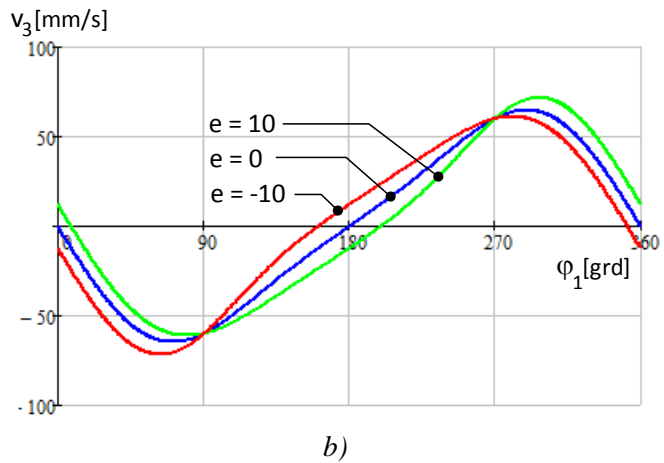
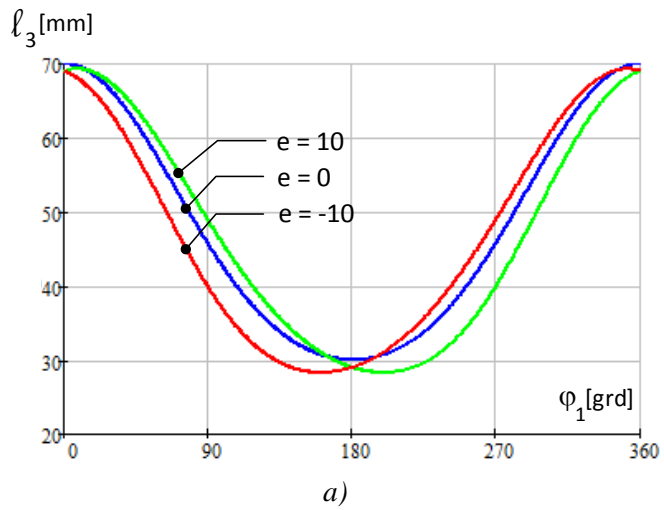


Fig. 2.10 Legi de mișcare pentru mecanismul manivelă piston

2.3.2 Analiza cinematică a mecanismului patrulater

Se consideră mecanismul patrulater din figura 2.11 la care sunt cunoscute lungimile elementelor $l_1 = 50 \text{ mm}$, $l_2 = 150 \text{ mm}$, $l_3 = 200 \text{ mm}$, și $l_0 = 220 \text{ mm}$. Viteza elementului conducător 1 este constantă $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$. Prin analiza cinematică se urmărește determinarea legii de mișcare a elementului condus 3. Se vor lua în considerare diferite valori ale lungimii elementului 1.

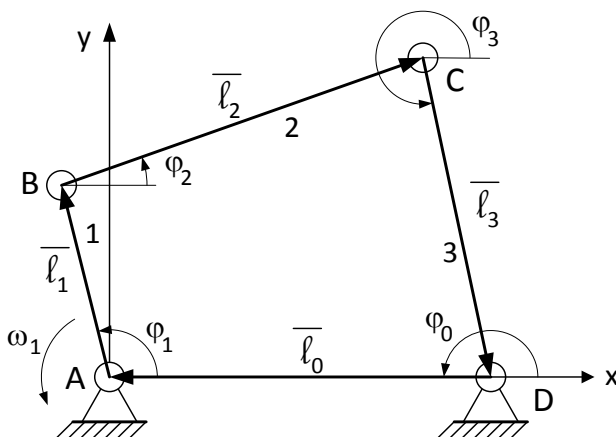


Fig. 2.11 Schema cinematică și conturul vectorial asociat mecanismului patrulater

Pentru determinarea expresiei funcției de transmitere de ordin zero, care face legătura între poziția elementului condus 3 și poziția elementului conducător 1, se atașează mecanismului un contur vectorial închis $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_0 = 0$. Ecuațiile de proiecții pe axe pot fi scrise astfel:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + l_0 \cos \varphi_0 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_0 \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

unde: $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_0 = \text{const.}$

Deoarece $\varphi_0 = 180^\circ$, sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = -l_2 \cos \varphi_2 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_3 \sin \varphi_3 = -l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

Prin eliminarea unghiului φ_2 se obține expresia funcției de transmitere de ordin zero sub forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(\varphi_1, \varphi_3) = & l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_0^2 + 2l_1l_3\cos(\varphi_1 - \varphi_3) - 2l_1l_0\cos\varphi_1 \\ & - 2l_3l_0\cos\varphi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

de unde se poate obține legea de variație a poziției elementului 3 în funcție de poziția elementului conducător:

$$\varphi_3 = 2\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{l_1 \sin\varphi_1}{l_0 - l_1 \cos\varphi_1}\right) - \arccos\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0 \cos\varphi_1}{2l_3 \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0 \cos\varphi_1}}\right) \quad (2.26)$$

Viteza și accelerația elementului unghiulară a elementului 3 se obțin din relațiile (2.9) și (2.13) după cum urmează:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \mathcal{R}'_3 \omega_1 \\ \varepsilon_3 &= \mathcal{R}''_3 \omega_1^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

unde: \mathcal{R}'_3 și \mathcal{R}''_3 reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întâi respectiv doi ale elementului condus 3

Pentru determinarea expresiilor funcțiilor de transmitere se fac următoarele derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1} &= -2l_1 l_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + 2l_1 l_0 \sin\varphi_1; \\ \frac{\partial \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_3} &= 2l_1 l_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + 2l_3 l_0 \sin\varphi_3; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1^2} &= -2l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2l_1 l_0 \cos\varphi_1; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_3^2} &= -2l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2l_3 l_0 \cos\varphi_3; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_3}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} &= 2l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Înlocuind relațiile (2.28) în (2.11) și (2.15) rezultă:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_3 &= \frac{l_1 l_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - l_0 \sin\varphi_1}{l_3 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_0 \sin\varphi_3}; \\ \mathcal{R}''_3 &= \frac{l_1 [l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_0 \cos\varphi_1] - 2\mathcal{R}'_3 l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_3 [l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_0 \sin\varphi_3]} \\ &\quad + \frac{\mathcal{R}'_3{}^2 l_3 [l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_0 \cos\varphi_3]}{l_3 [l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_0 \sin\varphi_3]} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Prin înlocuirea relațiilor (2.29) în (2.27) se obține forma finală a legii de mișcare pentru elementul 3. Variația acesteia pentru un ciclu de funcționare este reprezentată în figura 2.12

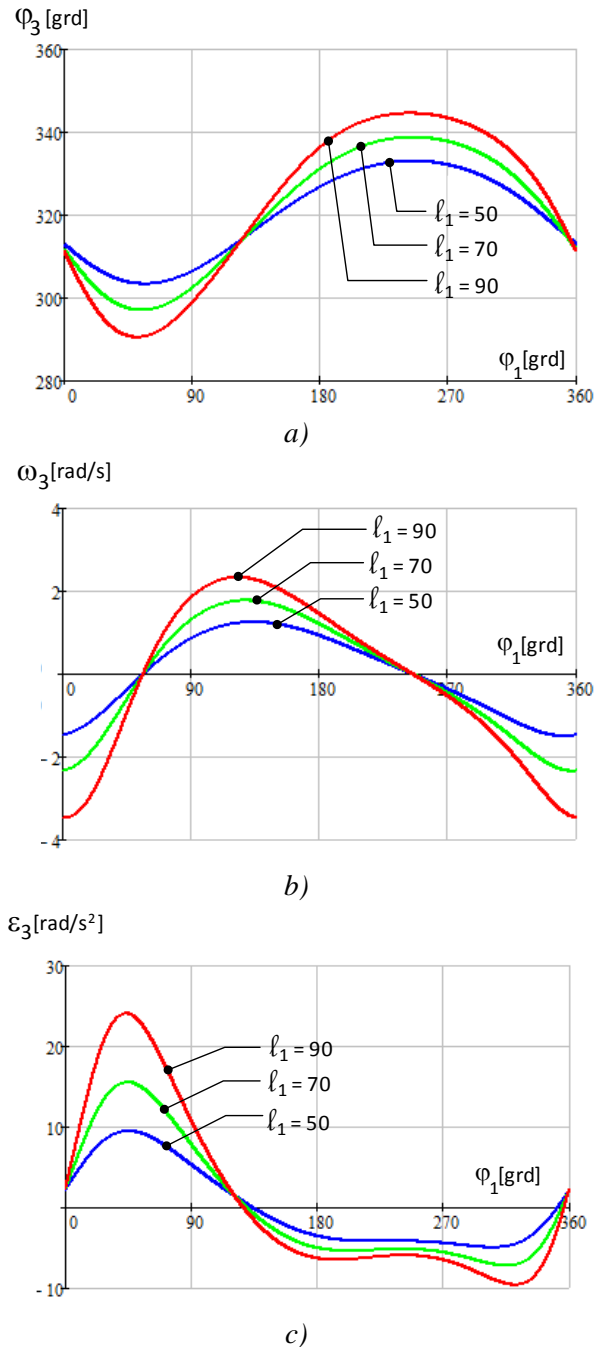


Fig. 2.12 Legi de mișcare pentru mecanismul patrulater

2.3.3 Analiza cinematică a mecanismului culisă oscilantă

Se consideră mecanismul cu culisă oscilantă reprezentat în figura 2.13, pentru care se cunosc lungimea elementului conducător $l_1 = 40 \text{ mm}$ și viteza unghiulară a acestuia $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ respectiv lungimea elementului fix $l_0 = 70 \text{ mm}$. Prin analiza cinematică se urmărește determinarea legii de mișcare a elementului 2 pentru diferite valori ale lungimii l_0 a elementului fix .

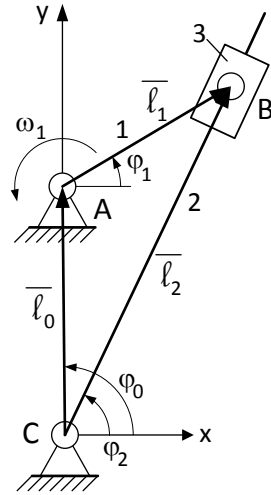


Fig. 2.13 Schema cinematică și conturul vectorial asociat mecanismului culisă oscilantă

Pentru a obține expresia funcției de transmitere de ordin zero care face legătura între rotația elementului 2 și rotația elementului 1, adică funcția $\mathcal{R}_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, se atașează mecanismului un contur vectorial închis: $\bar{l}_1 + \bar{l}_0 - \bar{l}_2 = 0$. Din ecuația de închidere a conturului, rezultă:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_0 \cos \varphi_0 - l_2 \cos \varphi_2 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_0 \sin \varphi_0 - l_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

unde: $l_1, l_0, \varphi_0 = \text{const.}$

Ținând cont de faptul că $\varphi_0 = 90^\circ$, sistemul de ecuații se poate scrie:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_0 - l_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Prin eliminarea lui l_2 se obține expresia funcției de transmitere de ordin zero sub forma:

$$\mathcal{R}_2(\varphi_1, \varphi_2) = l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_0 \cos \varphi_2 = 0 \quad (2.32)$$

de unde rezultă legea de variație a poziției elementului 2:

$$\varphi_2 = \text{atan2}(l_0 + l_1 \sin \varphi_1, l_1 \cos \varphi_1) \quad (2.33)$$

Viteza și accelerația unghiulară a elementului 2 se obțin scriind relațiile (2.9) și (2.13) astfel:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \mathcal{R}'_2 \omega_1 \\ \varepsilon_2 &= \mathcal{R}''_2 \omega_1^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

unde: \mathcal{R}'_2 și \mathcal{R}''_2 reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întâi respectiv doi ale elementului condus 2

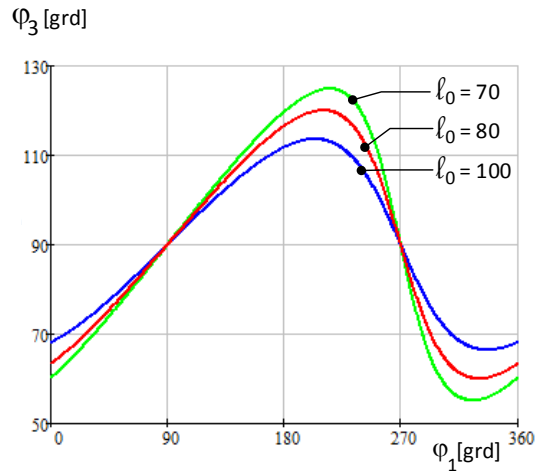
Pentru determinarea acestor funcții se fac următoarele derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial \varphi_1} &= l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial \varphi_2} &= -l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_0 \sin \varphi_2; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_2}{\partial \varphi_1^2} &= -l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_2}{\partial \varphi_2^2} &= -l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - l_0 \cos \varphi_2; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} &= l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

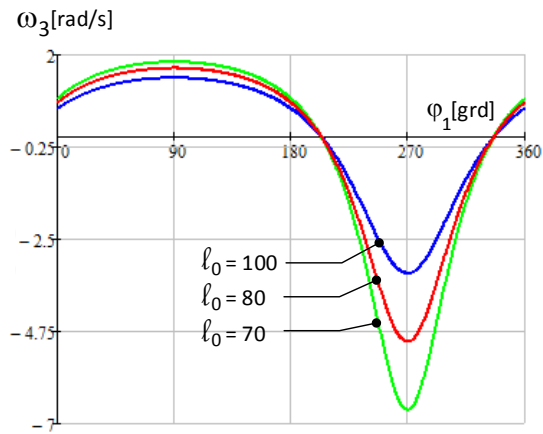
Prin înlocuirea în relațiile (2.11) și (2.15) se obțin expresiile funcțiilor de transmitere ordinul întâi respectiv doi, sub forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_2 &= \frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_0 \sin \varphi_2}; \\ \mathcal{R}''_2 &= \frac{-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\mathcal{R}'_2 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_0 \sin \varphi_2} \\ &\quad - \frac{\mathcal{R}'_2{}^2 [l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_0 \cos \varphi_2]}{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_0 \sin \varphi_2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

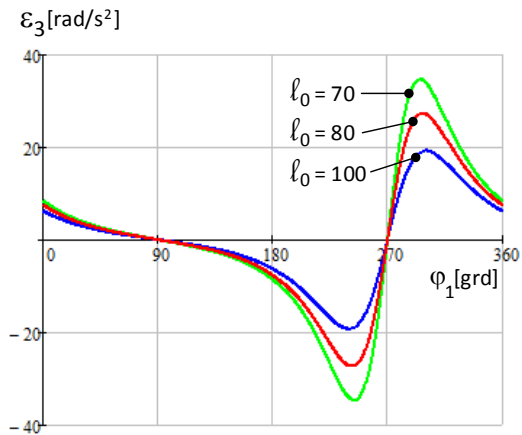
Prin înlocuirea relațiilor (2.36) în (2.34) se obține forma finală a legii de mișcare pentru elementul 3. Variația acesteia este reprezentată în figura 2.14 pentru diferite valori ale lungimii l_0 a elementului fix.



a)



b)



c)

Fig. 2.14 Legi de mișcare pentru mecanismul culisă oscilantă

3. DINAMICA MECANISMELOR

3.1 Forțe care acționează asupra mecanismelor

În cadrul analizei cinematice, legea de mișcare a elementului conducător a fost considerată cunoscută și de cele mai multe ori constantă. În realitate, legea de mișcare a elementului conducător este influențată de forțele și momentele care însoțesc mișcarea elementelor mecanismului. *Dinamica mecanismelor* are drept scop studiul mișcării reale a elementelor mecanismelor aflate sub acțiunea forțelor [2],[10].

Elementele cinematice ale mecanismelor sunt supuse acțiunii următoarelor tipuri de forțe (momente):

1. *Forțe motoare* (\vec{F}_m). Elementele conducătoare ale mecanismelor pot fi puse în mișcare de forțe motoare aplicate în anumite puncte ale elementelor (Fig. 3.1) sau de momente motoare care acționează asupra elementelor.

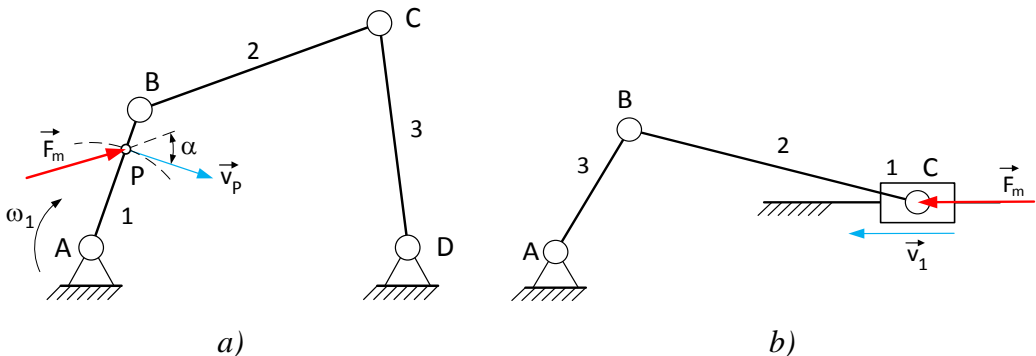


Fig. 3.1 Forțe motoare aplicate mecanismelor

Forța motoare tinde să mărească viteza elementului conducător, prin urmare lucrul mecanic elementar dezvoltat va fi pozitiv: $dL_m = F_m \cos \alpha \cdot ds > 0$.

2. *Forțe rezistente* (\vec{F}_r). Acționează asupra elementului condus al mecanismului în sens contrar mișcării acestuia după cum se observă din figura 3.2

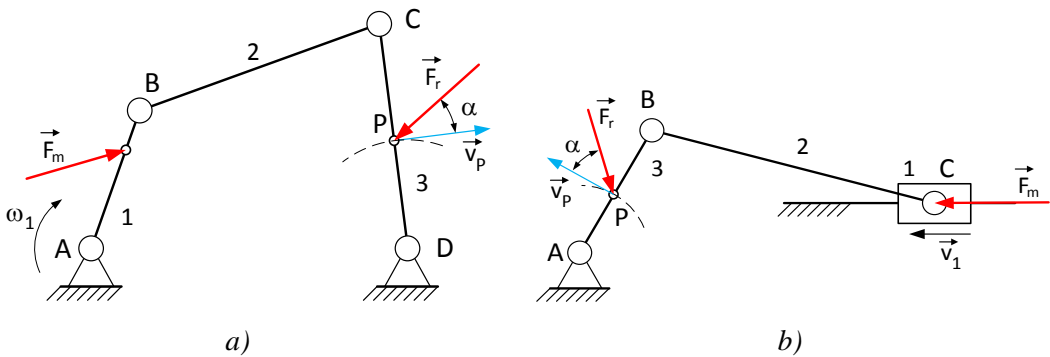


Fig. 3.2 Forțe rezistente aplicate mecanismelor

Forțele rezistente tind să micșoreze viteza mecanismului prin urmare realizează un lucru mecanic negativ: $dL_r = F_r \cos \alpha \cdot ds < 0$. Mecanismele trebuie proiectate astfel încât să învingă aceste forțe.

3. *Forțe de greutate* (\vec{G}). Au punctul de aplicație în centrul de greutate al elementului și dezvoltă lucru mecanic pozitiv sau negativ în funcție de direcția de deplasare a acestuia. Dacă elementul realizează mișcare de rotație sau o mișcare plan paralelă periodică, lucrul mecanic, dezvoltat de forța de greutate, corespunzător unei perioade este zero $dL_G = \int G \cdot ds = 0$

4. *Forțe de inerție*. Sunt forțe masice repartizate pe elementele mecanismului. În general forțele de inerție pot fi reduse la un torses adică la un vector principal \vec{F}_i și un moment de inerție M_i . Dacă se alege ca punct de reducere centrul de greutate al elementului, torsesul forțelor de inerție are următoarea formă:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m\vec{a}_G \\ M_i = -I_G\varepsilon \end{cases} \quad (3.1)$$

unde: m – reprezintă masa elementului,
 \vec{a}_G – vectorul accelerației centrului de greutate,
 ε – accelerația unghiulară a elementului,
 I_G – momentul de inerție masic în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate.

Forța de inerție \vec{F}_i este un vector cu aceeași direcție cu accelerația \vec{a}_G dar cu sens opus și care are punctul de aplicație în centrul de greutate al elementului.

Momentul forțelor de inerție M_i are sensul opus accelerației unghiulare ε a elementului,.

În funcție de tipul mișcărilor realizate de elementele mecanismelor, torsorul forțelor de inerție poate avea diferite forme. Situațiile posibile sunt reprezentate în figura 3.3 [7].

Pentru elemente care execută mișcări de translație, torsorul forțelor de inerție se reduce la o forță $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$, care acționează, pe direcția mișcării, în centrul de greutate și are sensul opus accelerației, după cum rezultă din figura 3.3 a.

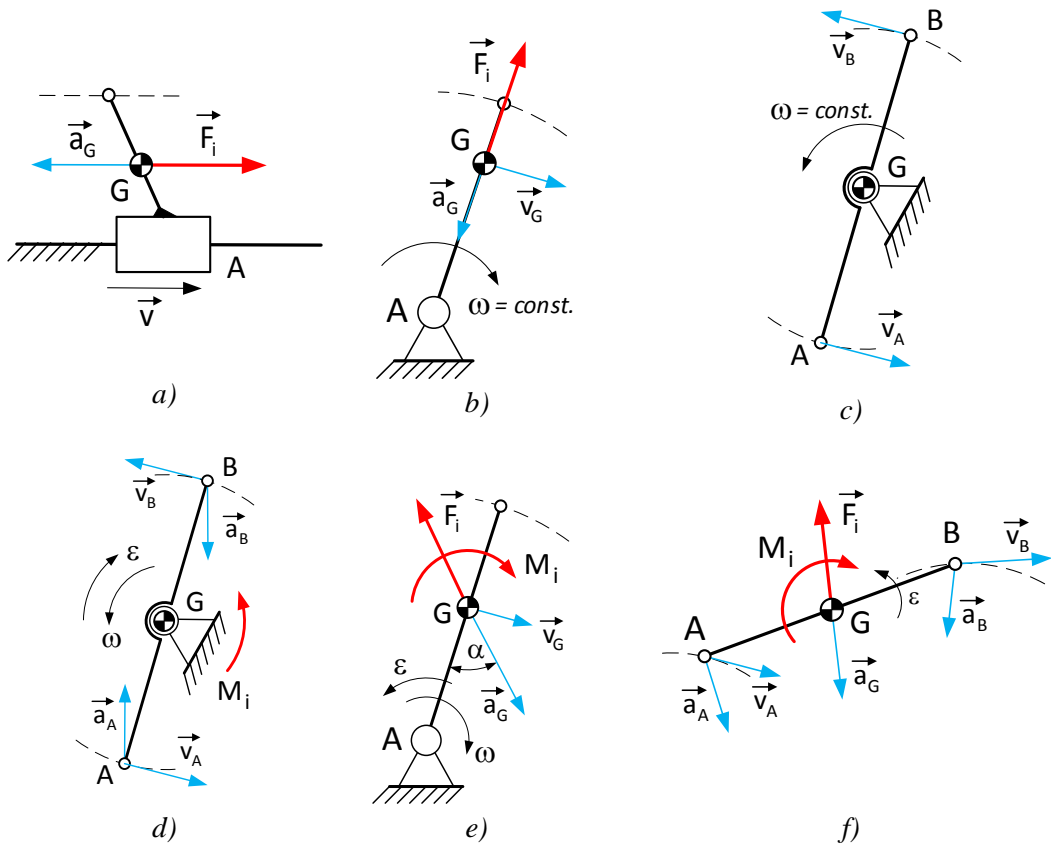


Fig. 3.3 Cazuri particulare ale torsorului forțelor de inerție

Dacă elementul cinematic realizează o mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă în jurul unei axe care nu trece prin centrul de greutate (fig. 3.3 b) torsorul se reduce la o forță de inerție $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$ cu aceeași direcție cu accelerația \vec{a}_G dar cu sens opus. În cazul elementului cinematic care se rotește cu viteză unghiulară constantă în jurul centrului de greutate, torsorul forțelor de inerție se anulează (fig. 3.3 c).

Mișcarea de rotație neuniformă ($\varepsilon \neq 0$) a unui element cinematic în jurul centrului său de greutate este caracterizată de un torsor format doar din momentul de inerție $M_i = -I_G \varepsilon$, după cum rezultă din figura 3.3 d. Momentul de inerție are sensul opus accelerației unghiulare ε .

Pentru elementul care realizează o mișcare de rotație neuniformă în jurul unui punct care nu coincide cu centrul său de greutate ca în figura 3.3 e, torsorul forțelor de inerție are forma generală dată de relația (3.1). Aceeași formă a torsorului apare și în cazul elementului care realizează o mișcare plan paralelă, caz prezentat în figura 3.3 f.

Determinarea forțelor de inerție se poate realiza prin mai multe metode, prezentate pe larg în lucrările [2],[6],[9],[10]. Cea mai utilizată metodă, care presupune distribuirea masei elementului într-un număr de puncte, se numește *metoda concentrării masei*.

5. *Forțe de legătură* (\vec{F}_{ij}). Se mai numesc *reacțiuni* și apar în cuplele cinematice ca efect al tuturor forțelor și momentelor care acționează asupra elementelor mecanismului. Dacă nu se ține seama de frecări, reacțiunea \vec{F}_{12} dintr-o cuplă de rotație are punctul de aplicație în centrul cuplei și direcția necunoscută. În cazul cuplei de translație reacțiunea \vec{F}_{03} este perpendiculară pe direcția mișcării iar mărimea și suportul x sunt necunoscute (fig. 3.4).

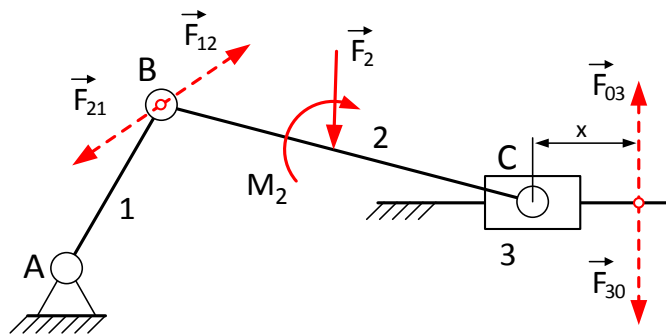


Fig.3.4 Reacțiuni în cuple

Metodele de determinare a reacțiunilor în cuplele cinematice se bazează pe grupele structurale prezentate în paragraful 1.3. Acestea sunt considerate static determinate sub acțiunea forțelor și momentelor exterioare. Determinarea reacțiunilor fără frecare poate fi făcută prin metode grafo-analitice [2],[6],[9] sau analitice [6],[10] și este utilă pentru calculele de dimensionare a cuplelor.

Dacă se ține seama de frecare, reacțiunea dintr-o cuplă de rotație nu mai trece prin centrul acesteia. În cupla de rotație reprezentată în figura 3.5 a, reacțiunea normală \vec{F}_{12}^0 a elementului 1 față de elementul 2, generează forța de frecare $F_{12f} = \mu F_{12}^0$ (μ reprezintă coeficientul de frecare). Se observă că reacțiunea totală \vec{F}_{12} este tangentă la cercul de rază ρ numit *cerc de frecare*. Această reacțiune determină față de centrul cuplei, un moment de torsiune în același sens cu viteza unghiulară ω_{12} . Dacă proiecția forței ce acționează asupra elementului 2, este mai mică decât F_{12f} , mișcarea nu mai poate avea loc și se produce fenomenul de *blocare* a cuplei.

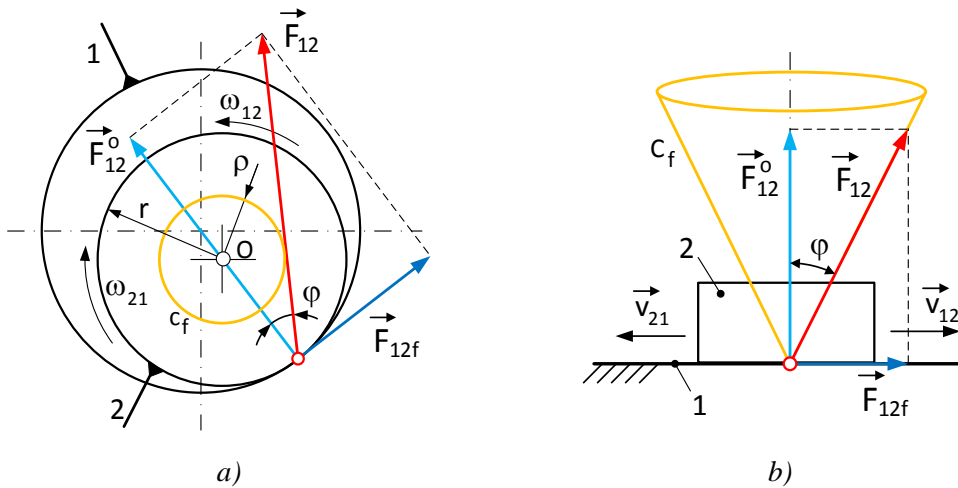


Fig.3.5 Reacțiuni cu frecare în cuple de clasă 5 (rotație și translație)

În cazul cuplei de translație din figura 3.5 b, formată din elementul 2 care se mișcă cu viteza \vec{v}_{21} față de elementul 1, reacțiunea normală \vec{F}_{12}^0 produce forța de frecare \vec{F}_{12f} . Reacțiunea totală $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^0 + \vec{F}_{12f}$ este înclinată, față de normala pe direcția mișcării, cu unghiul φ , după generatoarea unui con C_f numit *con de frecare*. Dacă proiecția pe direcția mișcării a forței care acționează asupra elementului 2, este mai mică decât forța de frecare \vec{F}_{12f} , atunci mișcarea nu mai poate avea loc.

3.2 Determinarea forțelor de inerție prin concentrarea maselor

Pentru determinarea forțelor de inerție prin această metodă se înlocuiește elementul cu masa m repartizată, cu un sistem de mase fictive concentrate în n puncte, care vor avea același torsesor al forțelor de inerție (fig.3.6) [2].

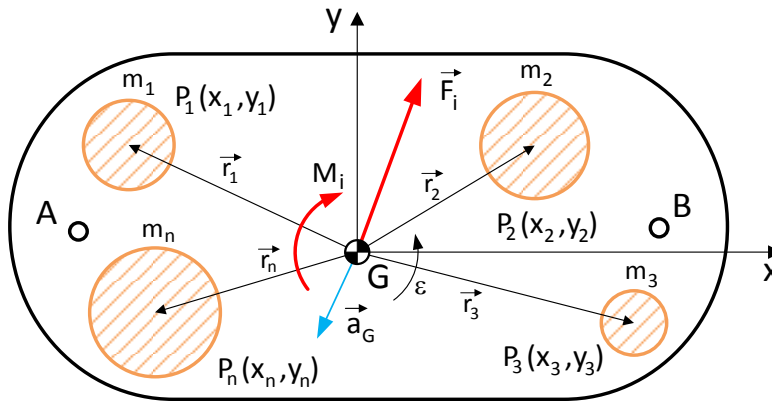


Fig. 3.6 Concentrarea maselor unui element cinematic

Se poate scrie astfel:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \end{cases} \quad (3.2)$$

unde: - \vec{F}_i și M_i reprezintă torsorul forțelor de inerție al elementului cu masa m ;

- \vec{F}_{ij} și M_{ij} reprezintă torsorul forțelor de inerție ale maselor concentrate.

Concentrarea maselor presupune respectarea următoarelor condiții:

1. Suma maselor concentrate în cele n puncte trebuie să fie egală cu masa elementului, adică:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{j=1}^n m_j = m \quad (3.3)$$

2. Centrul de greutate al maselor concentrate să se suprapună peste centrul de greutate al elementului, adică suma momentelor statice ale maselor concentrate în raport cu centrul de greutate să fie egală cu zero. Dacă poziția centrului de greutate se suprapune cu cea a sistemului de referință, adică $x_G = 0$ și $y_G = 0$, se poate scrie:

$$\begin{aligned}
m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n &= \sum_{j=1}^n m_jx_j = 0 \\
m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_ny_n &= \sum_{j=1}^n m_jy_j = 0
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

3. Suma momentelor de inerție masice ale maselor concentrate în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate să fie egală cu momentul de inerție masic al elementului în raport cu aceeași axă, adică:

$$\sum_{j=1}^n m_j(x_j^2 + y_j^2) = I_G
\tag{3.5}$$

În relațiile (3.3), (3.4) și (3.5) valorile maselor concentrate precum și coordonatele x_j , y_j ale punctelor în care se află acestea, nu sunt cunoscute. Prin urmare, fiecare punct de concentrare introduce câte $3n$ necunoscute.

Dacă sunt îndeplinite toate cele trei condiții se realizează *concentrarea dinamică* a maselor. În acest caz numărul parametrilor arbitrari care pot fi aleși pentru definirea punctelor este:

$$p_D = 3n - 4
\tag{3.6}$$

Pentru *concentrarea statică* a maselor, este suficientă respectarea primelor două condiții, caz în care numărul parametrilor arbitrari este dat de relația:

$$p_S = 3n - 3
\tag{3.7}$$

Pentru concentrarea maselor într-un punct $n = 1$, din relațiile (3.6) și (3.7) se obține: $p_D = -1$ și $p_S = 0$. În acest caz este posibilă doar concentrarea statică iar din relațiile (3.3) și (3.4) rezultă: $m_1 = m$, $m_1x_1 = 0$ și $m_1y_1 = 0$. Punctul de concentrare este centrul de greutate al elementului deoarece $x_1 = y_1 = 0$. Acest tip de concentrare este indicat pentru elemente cinematice care realizează mișcări de translație.

Indiferent de tipul concentrării, după determinarea maselor și a coordonatelor punctelor de concentrare, forțele de inerție ce acționează în aceste puncte se determină cu relația:

$$\vec{F}_{ij} = -m_j\vec{a}_{P_j}; \quad j = 1 \dots n
\tag{3.8}$$

unde accelerațiile \vec{a}_{P_j} ale punctelor P_j sunt considerate cunoscute fiind determinate în urma analizei cinematice.

3.2.1 Concentrarea maselor în două puncte

Pentru *concentrarea statică* a maselor în două puncte, se consideră originea sistemului de coordonate în centrul de greutate G al elementului ca în figura 3.7. Masa m a elementului este distribuită în punctele A și B aflate la distanțele a și $-b$ considerate cunoscute.

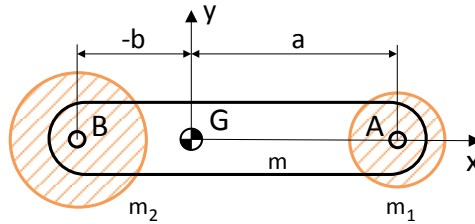


Fig.3.7 Concentrarea statică a maselor în două puncte

Pentru concentrarea statică în două puncte ($n = 2$), relațiile (3.3) și (3.4) se scriu astfel:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Numărul parametrilor ce pot fi aleși pentru definirea punctelor de concentrare este în acest caz $p_s = 3$. Conform notațiilor din figura 3.7, rezultă: $x_1 = a$, $x_2 = -b$, $y_1 = y_2 = 0$ iar relațiile (3.9) devin:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 a - m_2 b = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Prin rezolvarea sistemului (3.10) se obțin valorile maselor concentrate în punctele A și B :

$$m_1 = m \frac{b}{a+b}; \quad m_2 = m \frac{a}{a+b} \quad (3.11)$$

Pentru *concentrarea dinamică* în două puncte (fig. 3.8) se consideră cunoscută poziția punctului A în care este concentrată masa m_1 . Este de asemenea cunoscut momentul de inerție masic I_G în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate al elementului. Trebuie determinate poziția celui de al doilea punct de concentrare și valorile maselor.

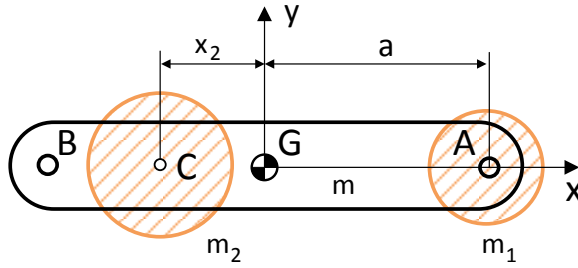


Fig.3.8 Concentrarea dinamică a maselor în două puncte

În cazul concentrării dinamice în două puncte relațiile (3.3), (3.4) și (3.5) se scriu astfel:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \\ m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) = I_G \end{cases} \quad (3.12)$$

Numărul parametrilor care se pot alege arbitrar este $p_D = 2$, adică $x_1 = a$ și $y_1 = y_2 = 0$. Relațiile (3.12) devin:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 a + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 a^2 + m_2 x_2^2 = I_G \end{cases} \quad (3.13)$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$m_1 = \frac{m I_G}{m a^2 + I_G}; \quad m_2 = \frac{m^2 a^2}{m a^2 + I_G}; \quad x_2 = -\frac{I_G}{m a} \quad (3.14)$$

Forțele de inerție care acționează asupra elementului în cele două puncte de concentrare se determină cu relațiile:

$$\vec{F}_{i1} = -m_1 \vec{a}_A; \quad \vec{F}_{i2} = -m_2 \vec{a}_C \quad (3.15)$$

3.3 Echilibrarea mecanismelor

Echilibrarea mecanismelor urmărește micșorarea sau anularea acțiunii torsorului forțelor de inerție. Forțele de inerție, care au mărimi și direcții variabile, produc în cuplele și elementele cinematice ale mecanismelor, solicitări dinamice.

Mecanismele realizează de obicei mișcări periodice, prin urmare forțele de inerție vor avea și ele un caracter periodic fapt ce poate duce la apariția vibrațiilor. Dacă frecvența acestor oscilații coincide cu frecvența oscilațiilor proprii ale unui element sau mecanism, se produce fenomenul de *rezonanță mecanică* [9].

Echilibrarea se poate aplica elementelor care realizează mișcări de rotație (rotori) sau întregului mecanism, mai ales dacă elementele acestuia au mase mari neuniform repartizate sau dacă funcționează la viteze ridicate.

În funcție de elementele tursorului forțelor de inerție care se anulează, sunt posibile două tipuri de echilibrări:

- *echilibrarea statică* unde se anulează numai efectul forțelor de inerție \vec{F}_i
- *echilibrarea dinamică* la care se anulează forțele de inerție \vec{F}_i și momentele forțelor de inerție M_i care pot produce solicitări suplimentare [2].

3.3.1 Echilibrarea rotorilor

Elementele care realizează mișcări de rotație, numite *rotori*, sunt des întâlnite în practică (ex: rotoarele motoarelor electrice, arbori cotiți, rotoare de turbine etc). Deoarece acestea funcționează la turații ridicate, echilibrarea lor este o necesitate. Există două modalități de realizare a echilibrării:

- *echilibrarea prin proiectare*, utilizată la elemente cu o distribuție neuniformă a masei (ex: arbori cotiți). Repartizarea maselor se alege în faza de proiectare, astfel încât centrul lor de greutate să fie cât mai apropiat de axa de rotație [9]
- *echilibrarea experimentală*, realizată pe mașini de echilibrat static sau dinamic, prin adăugare sau îndepărtare de masă.

Cea mai simplă echilibrare experimentală este *echilibrarea statică* a rotorilor care se reduce la suprapunerea centrului de greutate peste axa de rotație.

Acest tip de echilibrare este suficientă pentru rotori a căror lățime este mult mai mică comparativ cu diametrul, adică pentru *discuri*. Este important ca planul de simetrie al discului să fie perpendicular pe axa de rotație.

Pentru realizarea echilibrării, discul I este pus pe două prisme cu muchii ascuțite, notate cu 2 în figura 3.9. Discul fiind dezechilibrat, va oscila până când centrul său de greutate ocupă o poziție stabilă, pe direcție verticală sub axa de rotație.

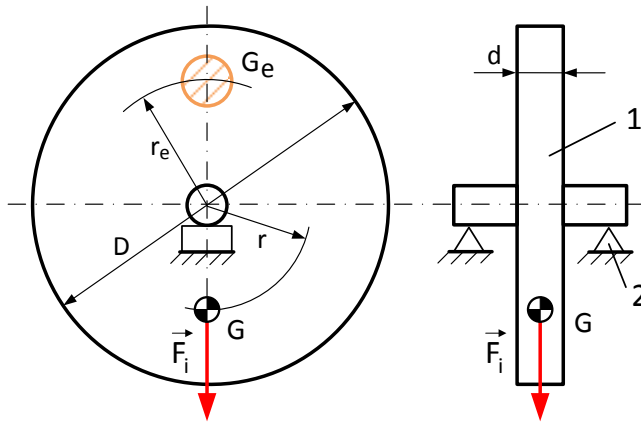


Fig.3.9 Echilibrarea statică a discurilor

Forța de inerție care provoacă dezechilibrul este dată de relația:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_G = m\vec{r}\omega^2 \quad (3.16)$$

în care: m este masa discului, ω viteza de oscilație a discului iar r reprezintă distanța unde se găsește centrul de greutate în raport cu de axa de rotație. Cu excepția masei m , toate celelalte mărimi sunt necunoscute, prin urmare mărimea și sensul forței nu pot fi determinate analitic. Din acest motiv se recurge la echilibrarea experimentală.

Pentru realizarea echilibrării experimentale, este necesară plasarea unei mase de echilibrare m_e , în partea opusă punctului de aplicare a forței \vec{F}_i , care să genereze o forță de echilibrare dată de relația:

$$\vec{F}_{ie} = m_e\vec{r}_e\omega^2 = -\vec{F}_i \quad (3.17)$$

Echilibrarea se realizează prin încercări, cu diferite mase de echilibrare, până când discul va sta în echilibru pe cele două prisme indiferent de poziție. În această situație este valabilă relația:

$$m_e = m \frac{r}{r_e} \quad (3.18)$$

Echilibrarea se poate realiza și prin îndepărtarea de material, prin găurire sau pilire, din aceeași parte a discului în care acționează forța \vec{F}_i .

Teoretic se consideră că dezechilibrul are loc în planul median al discului. În realitate nu se cunoaște exact planul în care acționează forța care produce dezechilibrul. Adăugarea sau eliminarea de masă în vederea echilibrării se face de obicei pe una din

fețele discului, sau mai rar pe periferia acestuia. Prin urmare forțele \vec{F}_i și \vec{F}_{ie} nu sunt situate în același plan și determină un cuplu de forțe care rămâne neechilibrat. Practic se realizează numai echilibrarea forțelor de inerție, prin urmare se obține numai o *echilibrare statică* a discului [9].

3.3.2 Echilibrarea statică a mecanismelor

Echilibrarea mecanismelor cu bare are ca obiectiv reducerea sau anularea componentelor tursorului forțelor de inerție generate de fiecare element cinematic al mecanismului. Echilibrarea dinamică, adică anularea totală a tursorului de inerție, este un procedeu complicat care duce la creșterea exagerată a maselor aflate în mișcare, motiv pentru care se realizează numai în situații speciale. De cele mai multe ori este suficient să se anuleze doar efectul forțelor de inerție, adică să se realizeze o echilibrare statică [9].

Un mecanism plan este echilibrat dacă centrul său de greutate are o poziție fixă pe tot timpul mișcării, caz în care $\vec{a}_G = 0$ și $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G = 0$.

De exemplu, pentru echilibrarea statică a mecanismului manivelă piston, se adaugă mase suplimentare în prelungirea bielei și a manivelei. Se realizează mai întâi concentrarea statică în două puncte a maselor m_1 și m_2 ale manivelei și bielei și concentrarea într-un punct a masei m_3 a pistonului, după cum rezultă din figura 3.10.

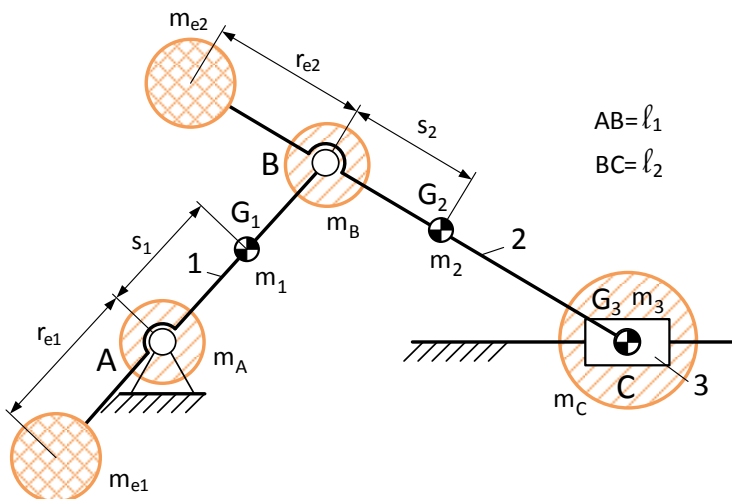


Fig.3.10 Echilibrarea statică a mecanismului manivelă piston

Pentru fiecare element trebuie cunoscute: lungimea, masa și poziția centrului de greutate. Masele concentrate se determină din următoarele relații:

$$\begin{aligned}
m_A &= m_1 \frac{l_1 - s_1}{l_1} \\
m_B &= m_{1B} + m_{2B} = m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2} \\
m_C &= m_3 + m_2 \frac{s_2}{l_2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Prin plasarea masei m_{e2} în prelungirea elementului 2, se aduce centrul de greutate al bielei și pistonului 3 în centrul cuplei B . În acest caz suma momentelor statice ale acestor mase în raport cu punctul B trebuie să fie zero adică:

$$m_{e2}r_{e2} = m_c l_2 \tag{3.20}$$

Masa m_{e1} aflată în prelungirea elementului 1 la distanța r_{e1} , aduce centrul de greutate al bielei 2, pistonului 3 și manivelei 1 în centrul cuplei A . Se poate scrie astfel:

$$m_{e1}r_{e1} = (m_{e2} + m_{1B} + m_2 + m_3)l_1 \tag{3.21}$$

Dacă distanțele r_{e1} și r_{e2} se aleg constructiv în funcție de gabaritul mecanismului, din relațiile (3.19) (3.20) și (3.21) se pot determina mărimile maselor de echilibrare după cum urmează:

$$\begin{aligned}
m_{e2} &= m_c \frac{l_2}{r_{e2}} \\
m_{e1} &= \left(m_c \frac{l_2}{r_{e2}} + m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 + m_3 \right) \frac{l_1}{r_{e1}}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

În acest fel centrul de greutate al mecanismului este adus în punctul A , care este un punct fix. Masa m_{e2} plasată în prelungirea bielei mărește gabaritul mecanismului, motiv pentru care acest tip de echilibrare nu este des utilizat. De cele mai multe ori se preferă o echilibrare parțială prin adăugarea unei singure mase m_e în prelungirea manivelei, ca în figura 3.11 [2].

Cu această masă se echilibrează doar masa concentrată în punctul B , adică:

$$m_e r_e = m_B l_1 \tag{3.23}$$

Dacă se alege r_e , din relațiile (3.19) și (3.23) se poate obține mărimea masei de echilibrare:

$$m_e = \left(m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2} \right) \frac{l_1}{r_e} \tag{3.24}$$

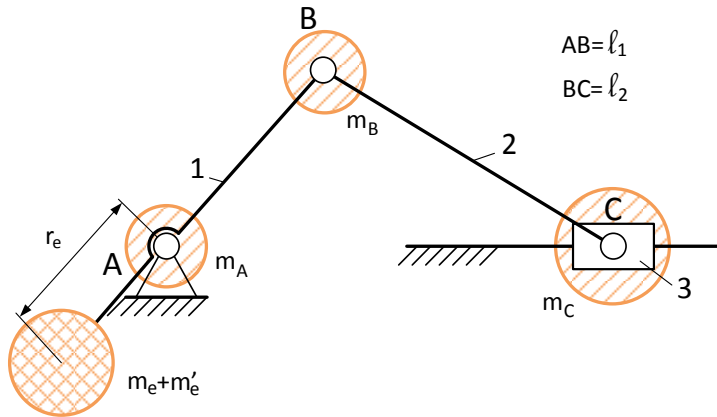


Fig.3.11 Echilibrarea parțială a mecanismului manivelă piston

În acest mod rămâne neechilibrată masa m_C concentrată în punctul C . Elementul 3 execută o mișcare de translație, prin urmare forța de inerție produsă de masa m_C are direcția mișcării elementului și dacă $\omega_1 = const$, poate fi determinată cu relația [2]:

$$F_{iC} = -m_C a_C = m_C l_1 \omega_1^2 (A_1 \cos \varphi + 4A_2 \cos 2\varphi + 16A_4 \cos 4\varphi + \dots) \quad (3.25)$$

sau:

$$F_{iC} = \sum_{k=1}^n m_C l_1 \omega_1^2 k A_k \cos k\varphi, \quad k = 1 \dots n \quad (3.26)$$

Se poate spune că forța de inerție produsă de masa m_C este formată dintr-o serie de forțe de inerție de diferite ordine (armonici). În practică se echilibrează doar forțele de inerție de ordin inferior, deoarece dezechilibrul maxim este produs de primele două armonici [6], [9]. Dacă în prelungirea manivelei, la masa de echilibrare m_e se mai adaugă o masă suplimentară m'_e (fig 3.11), forța de inerție generată de această masă va echilibra prima armonică a forței de inerție din piston. Se poate scrie astfel:

$$m'_e r_e = m_B l_1 A_1, \quad A_1 = 1 \quad (3.27)$$

Prin plasarea acestei mase, se mută dezechilibrul din planul orizontal în cel vertical. Celelalte armonici ale forței de inerție rămân neechilibrate. În cazul motoarelor cu ardere internă, deoarece sunt mai multe astfel de mecanisme ale căror manivele sunt decalate în funcție de numărul de cilindri, unele armonici ale forțelor de inerție se pot echilibra fără adăugarea unor mase suplimentare [9], [10].

3.4 Ecuațiile de mișcare ale mecanismelor

Pentru determinarea ecuațiilor de mișcare, mecanismul se înlocuiește cu un model dinamic echivalent la baza căruia stă *elementul de reducere*.

Ecuația de mișcare a unui mecanism este relația cu care se poate determina legea de mișcare reală a elementului conducător, cunoscând sistemul de forțe ce acționează asupra elementelor cinematice. Pentru a determina legea de mișcare a unui mecanism utilizând modelul dinamic echivalent, se utilizează noțiunile de *masă redusă* și *moment de inerție redus* respectiv *forță redusă* și *moment redus* [2].

Masa redusă este o masă fictivă plasată într-un punct al elementului de reducere care, mișcându-se împreună cu acesta, dezvoltă o energie cinetică egală cu cea dezvoltată de întregul mecanism (fig.3.12). Dacă masa se reduce la un element cinematic care are o mișcare de rotație, nu la un punct de pe acesta, se definește noțiunea de moment de inerție redus.

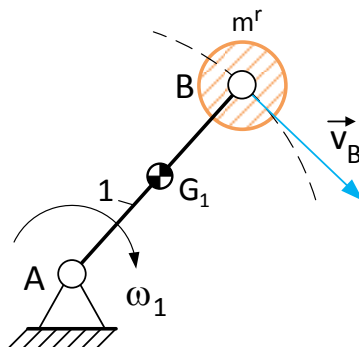


Fig.3.12 Masa redusă

Momentul de inerție redus este momentul fictiv creat de un element cinematic care, rotindu-se cu o viteză unghiulară egală cu cea a elementului de reducere, dezvoltă o energie cinetică egală cu energia dezvoltată de întregul mecanism.

Pe baza definițiilor de mai sus, se poate scrie:

$$E_c = m^r \frac{v_B^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left(I_{Gj} \frac{\omega_j^2}{2} + m_j \frac{v_{Gj}^2}{2} \right) \quad (3.28)$$

$$E_c = I^r \frac{\omega_1^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left(I_{Gj} \frac{\omega_j^2}{2} + m_j \frac{v_{Gj}^2}{2} \right)$$

unde: - v_B și ω reprezintă viteza punctului de reducere a masei respectiv viteza unghiulară a elementului de reducere,

- m_j și I_{Gj} sunt masa respectiv momentul de inerție mecanic în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate al elementului j ,

- v_{Gj} și ω_j reprezintă viteza centrului de greutate respectiv viteza unghiulară a elementului j .

Din relațiile (3.28) rezultă expresiile masei și a momentului de inerție redus, după cum urmează:

$$m^r = \sum_{j=1}^n \left[I_{Gj} \left(\frac{\omega_j}{v_B} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{Gj}}{v_B} \right)^2 \right]$$

$$I^r = \sum_{j=1}^n \left[I_{Gj} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{Gj}}{\omega_1} \right)^2 \right]$$
(3.29)

Atât masa cât și momentul de inerție redus nu depind de viteza elementului de reducere. Depind de poziția elementelor, de natura mișcărilor efectuate de acestea precum și de masele aflate în mișcare [2].

Forța redusă sau *momentul redus* este forța sau momentul fictiv care acționează asupra elementului de reducere și dezvoltă aceeași putere ca întregul sistem de forțe și momente care acționează asupra mecanismului. Astfel se poate scrie:

$$P = F^r v_B = \sum_{j=1}^n (F_j v_j \cos \alpha_j + M_j \omega_j)$$

$$P = M^r \omega_1 = \sum_{j=1}^n (F_j v_j \cos \alpha_j + M_j \omega_j)$$
(3.30)

unde: - v_B și ω reprezintă viteza punctului de reducere a forței respectiv viteza unghiulară a elementului de reducere,

- F_j și M_j sunt forța respectiv momentul ce acționează asupra elementului j ,

- v_j și ω_j reprezintă viteza punctului de aplicație al forței F_j respectiv viteza unghiulară a elementului j .

- α_j este unghiul format între direcțiile vectorilor F_j și v_j

Din relațiile (3.30) se obțin expresiile forței și momentului redus sub forma:

$$F^r = \sum_{j=1}^n \left(F_j \frac{v_j}{v_B} \cos \alpha_j + M_j \frac{\omega_j}{v_B} \right)$$

$$M^r = \sum_{j=1}^n \left(F_j \frac{v_j}{\omega_1} \cos \alpha_j + M_j \frac{\omega_j}{\omega_1} \right)$$
(3.31)

Forța și momentul redus depind de poziția elementelor, de natura mișcărilor efectuate de acestea precum și de mărimile forțelor și momentelor. Cunoscând m^r , I^r , F^r și M^r orice mecanism poate fi echivalat cu un element de reducere. Astfel ecuația de mișcare a mecanismului va fi identică cu cea a elementului de reducere, care este de obicei elementul conducător al mecanismului.

Variația energiei cinetice a unui element cinematic între două poziții discrete 1 și 2, este egală cu lucrul mecanic prestat de element pentru a ajunge dintr-o poziție în alta. Astfel, pentru elementul de reducere se poate scrie relația [2]:

$$\Delta E_{C12} = L_{12} \quad (3.32)$$

Relația (3.31) reprezintă de fapt legea conservării energiei în intervalul dintre cele două poziții ale elementului [9]. Lucrul mecanic L_{12} se descompune în lucrul mecanic prestat de forțele motoare L_{m12} și lucrul mecanic al forțelor rezistente L_{r12} (vezi paragraful 3.1).

Pentru că elementul de reducere este în majoritatea cazurilor elementul motor de rotație, rezultă:

$$E_{C12} = I_2^r \frac{\omega_2^2}{2} - I_1^r \frac{\omega_1^2}{2}$$

$$L_{12} = L_{m12} - L_{r12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_m^r - M_r^r) d\varphi$$
(3.33)

Ținând cont de expresia (3.32) *ecuația de mișcare* a mecanismului, se poate scrie sub forma:

$$E_{C12} = I_2^r \frac{\omega_2^2}{2} - I_1^r \frac{\omega_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_m^r - M_r^r) d\varphi$$
(3.34)

unde: $-I_1^r$ și I_2^r reprezintă momentele de inerție reduse în pozițiile 1 și 2

- ω_1 și ω_2 sunt vitezele unghiulare ale elementului de reducere în cele două poziții

- M_m^r reprezintă momentul motor redus

- M_r^r este momentul rezistent redus

Ecuția (3.33) permite determinarea vitezei unghiulare ω_2 a elementului de reducere dacă se cunoaște viteza unghiulară în faza inițială ω_1 și variațiile momentelor motoare și rezistente.

Dacă forțele și momentele care acționează asupra mecanismului mai depind, pe lângă poziție, și de viteză și timp, se preferă scrierea ecuației de mișcare sub formă diferențială. Aceasta se obține plecând de la o relație similară cu (3.32) în care se consideră distanța dintre cele două poziții, infinit de mică [9]. Rezultă astfel:

$$dE_C = dL \quad (3.35)$$

unde:

$$E_C = I^r \frac{\omega_1^2}{2} \quad (3.36)$$

$$dL = (M_m^r - M_r^r)d\varphi = M^r$$

Din relațiile (3.35) și (3.36) se poate scrie [2]:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(I^r \frac{\omega_1^2}{2} \right) = M^r \quad (3.37)$$

După efectuarea derivatelor, rezultă:

$$\frac{dI^r}{d\varphi} \frac{\omega_1^2}{2} + \omega_1 I^r \frac{d\omega}{d\varphi} = M^r \quad (3.38)$$

sau:

$$I^r \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{dI^r}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2} = M^r \quad (3.39)$$

Relația (3.39) reprezintă *ecuația de mișcare în formă diferențială*. Deoarece M^r depinde de mai multe variabile, rezolvarea ecuației de mișcare se poate face doar pe cale aproximativă, de exemplu prin metoda diferențelor finite [2], [9].

4. ANALIZA MECANISMELOR CU CAMĂ

4.1 Clasificare

Aceste mecanisme sunt formate dintr-un element profilat numit *camă* care transmite mișcarea unui element condus numit *tachet*. Pentru a se asigura continuitatea transmiterii mișcării, cama și tachetul trebuie să se afle permanent în contact. Între cele două elemente se formează o cuplă superioară de clasa 4. Deoarece camele pot avea o gamă variată de profiluri, tachetul poate realiza cele mai diverse legi de mișcare [2].

Mecanismele cu camă se pot clasifica după mai multe criterii. De exemplu, în funcție de forma profilului camei, există mecanisme cu *camă plană* (fig. 4.1 a, b, e) și mecanisme cu *camă spațială* (fig. 4.1 c, d). După felul mișcării realizate de elementul condus sunt mecanisme cu camă și *tachet de translație* (fig. 4.1 a, c, d, e) respectiv mecanisme cu camă și *tachet oscilant* (fig. 4.1 b). Dacă se ia în considerare felul mișcării realizate de camă, avem mecanisme cu *camă de rotație* (fig. 4.1 a, b, c, d) și mecanisme cu *camă de translație* (fig. 4.1 e).

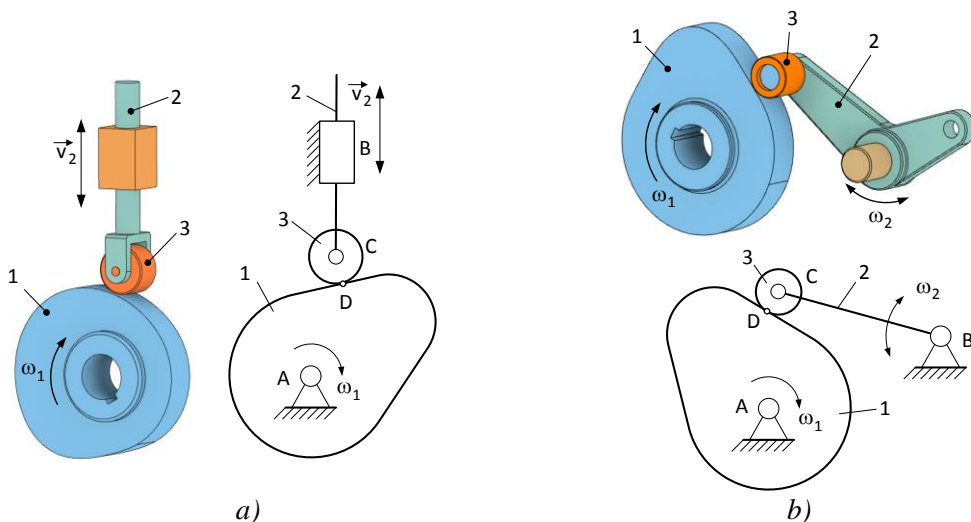


Fig.4.1 Mecanisme cu camă

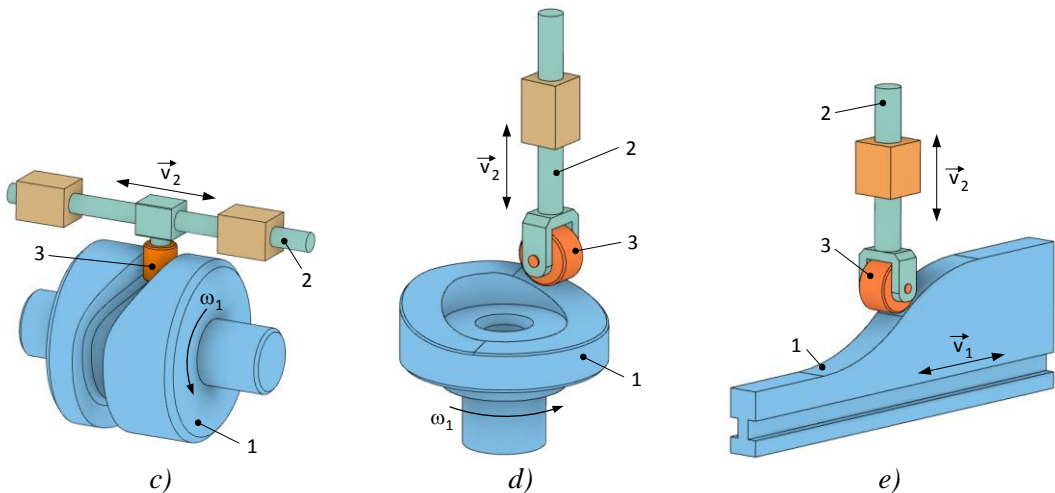


Fig.4.1 Mecanisme cu camă (continuare)

Din punct de vedere constructiv, tachelul poate avea mai multe forme. Cele mai des întâlnite sunt prezentate în figura 4.2.

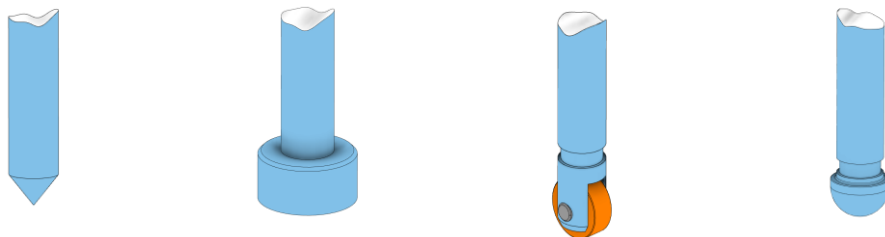


Fig.4.2 Variante constructive pentru tacheți

Mecanismele cu camă, prin comparație cu mecanismele cu bare, prezintă câteva avantaje: gabarit redus, durabilitate, funcționare silențioasă și nu în ultimul rând posibilitatea de modificare a legii de mișcare a tachelului prin schimbarea camei, păstrând același gabarit al mecanismului. În schimb uzura camei sau a tachelului poate duce la modificări importante ale legilor de mișcare [7].

Studiul mecanismelor cu camă cuprinde mai multe etape. *Sinteza dimensională* are ca scop determinarea profilului camei și a elementelor geometrice ale mecanismului cunoscând legea de mișcare a tachelului, cursa tachelului și unghiurile de rotație ale camei. *Analiza structurală și cinematică* are ca scop validarea rezultatelor obținute în urma sintezei. Mai exact analiza structurală urmărește determinarea gradului de mobilitate, utilizând relațiile din teoria mecanismelor cu bare articulate și găsirea mecanismului înlocuitor (vezi 1.4.3). Mecanismul înlocuitor poate fi apoi utilizat

pentru analiza cinematică prin care se urmărește validarea legii de mișcare a tachelului. *Analiza cinetostatică* studiază transmiterea forțelor în cazul mecanismelor cu camă și are ca principal obiectiv determinarea forțelor de legătură (reacțiuni) [7].

Toate aceste etape sunt prezentate pe larg în [2], [6], [8], [10]. În continuare se vor prezenta câteva aspecte legate de analiza cinetostatică și sinteza mecanismului cu camă și tachel de translație

4.2 Elementele geometrice ale mecanismului cu camă și tachel de translație

Indiferent de forma camei sau de felul mișcării tachelului, mecanismele cu camă au un singur grad de mobilitate. În cele mai multe cazuri cama, care este elementul conducător, se rotește cu o viteză unghiulară cunoscută și imprimă elementului condus adică tachelului, o lege de mișcare periodică. Legea de mișcare a tachelului poate fi divizată în patru faze distincte: faza de *urcare* sau înaintare, faza de *repaus superior*, faza de *coborâre* sau revenire și faza de *repaus inferior*. În timpul fazei de urcare, tachelul se deplasează pe o distanță h numită *cursa tachelului*.

Profilul camei are de asemenea patru zone corespunzătoare celor patru faze de mișcare ale tachelului. Pentru mecanismul cu camă și tachel de translație din figura 4.3, aceste zone sunt: $a - b$ pentru urcare, $b - c$ pentru repaus superior, $c - d$ la coborâre respectiv $d - a$ pentru repausul inferior.

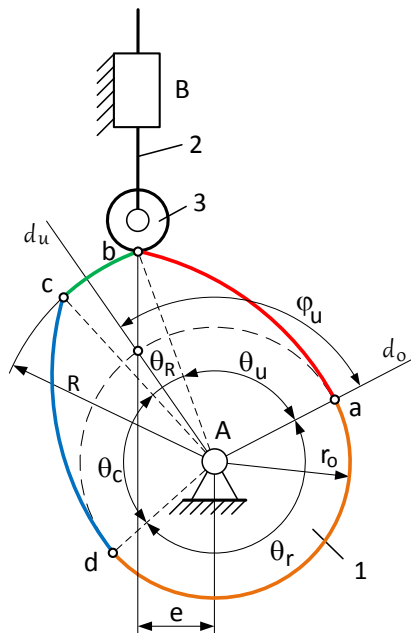


Fig.4.3 Unghiurile de profil la mecanismul cu camă și tachel de translație

Unghiul măsurat la centrul camei corespunzător fiecărei faze se numește *unghi de profil* și se notează cu θ_u pentru faza de urcare, θ_c pentru faza de coborâre, respectiv θ_R și θ_r pentru cele două faze de repaus. Profilul camei corespunzător fazelor de repaus superior și inferior a tachelului este format din arce de cerc cu centrele în A și raze R respectiv r_0 . Profilul camei pentru fazele de urcare și coborâre se determină, prin sinteza dimensională, în funcție de legea de mișcare impusă tachelului.

Cercul cu raza r_0 se numește *cerc de bază* al camei iar distanța la care se găsește tachelul față de centrul de rotație al camei se notează cu e și se numește *excentricitate*. Cercul de bază împreună cu excentricitatea tachelului determină dimensiunile de gabarit ale mecanismului

Unghiul cu care se rotește cama pentru realizarea unei faze din legea de mișcare a tachelului, se numește *unghi de rotație* sau *unghi de fază* și se notează cu φ_u , φ_c , respectiv φ_R și φ_r . Pentru mecanismul cu camă din figura 4.3, unghiul de rotație pentru faza de urcare φ_u se obține între dreapta d_o , față de care se măsoară unghiul de profil θ_u și dreapta d_u ce unește punctul A cu punctul de intersecție al direcției de deplasare a tachelului cu cercul de rază r_0 .

Dacă excentricitatea tachelului este nulă atunci unghiurile de rotație sunt egale cu cele de profil iar distanța parcursă de tachel este $h = R - r_0$.

4.3 Transmiterea forțelor în mecanismul cu camă și tachel de translație

Realizarea unei anumite legi de mișcare impusă tachelului este condiționată de evitarea fenomenului de autoblocare a mecanismului cu camă. Prin urmare, mecanismul trebuie proiectat astfel încât să asigure transmiterea în bune condiții a forțelor.

Se consideră mecanismul cu camă și tachel de translație reprezentat în figura 4.5, asupra căruia acționează din exterior, forța \vec{F} . Cama 1 se rotește cu viteza unghiulară ω_1 și pune în mișcare tachelul 2 acționând asupra lui cu forța \vec{F}_{12} pe direcția normalei în punctul de contact B. Forța \vec{F}_{12} trebuie să învingă forța rezistentă \vec{F} , și forțele de frecare produse de reacțiunile \vec{N}_1 și \vec{N}_2 .

Între vectorii \vec{F}_{12} și \vec{v}_B se formează unghiul α numit *unghi de presiune*, iar între vectorul \vec{F}_{12} și direcția axei x este unghiul τ numit *unghi de transmitere*. Cele două unghiuri sunt complementare $\alpha + \tau = 90^\circ$.

Se consideră întregul sistem în echilibru static, prin urmare suma proiecțiilor forțelor pe axa y trebuie să fie egală cu zero:

$$F_{12} \cos \alpha - F - \mu N_1 - \mu N_2 = 0 \quad (4.1)$$

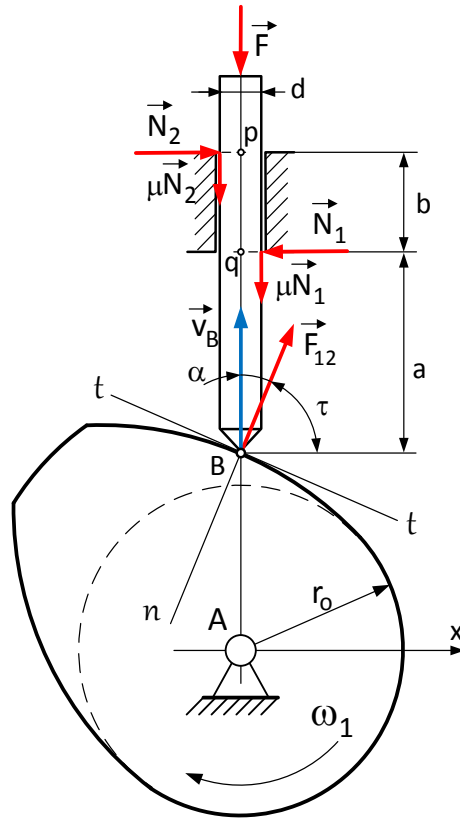


Fig. 4.5 Forțele din mecanismul cu camă și tchet de translație

Se scriu ecuațiile de momente față de punctele q și p situate axa de simetrie a tchetului:

$$\begin{aligned} -aF_{12} \sin \alpha + bN_2 + \mu N_1 \frac{d}{2} - \mu N_2 \frac{d}{2} &= 0 \\ -(a + b)F_{12} \sin \alpha + bN_1 + \mu N_1 \frac{d}{2} - \mu N_2 \frac{d}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Momentele de frecare $\mu N_1 \frac{d}{2}$ și $\mu N_2 \frac{d}{2}$ din relațiile de mai sus nu se iau în considerare deoarece au valori neglijabile. Rezultă astfel expresiile reacțiunilor N_1 și N_2 sub forma:

$$N_1 = \frac{a+b}{b} F_{12} \sin \alpha \quad (4.3)$$

$$N_2 = \frac{a}{b} F_{12} \sin \alpha \quad (4.4)$$

Înlocuind relațiile (4.3) și (4.4) în relația (4.1) se obține expresia forței F_{12} astfel:

$$F_{12} = \frac{F}{\cos \alpha - \mu \left(\frac{2a+b}{b} \right) \sin \alpha} \quad (4.5)$$

unde: μ – reprezintă coeficientul de frecare dintre tchet și ghidaj,

b – lungimea ghidajului,

a – distanța între punctul de contact și ghidaj (în general $b \approx 2a$).

Dacă $\alpha = 0$ reacțiunile N_1 și N_2 sunt nule și $\vec{F}_{12} = \vec{F}$. Dacă valoarea unghiului de presiune α crește, valoarea numitorului relației (4.5) scade. Prin urmare valoarea forței \vec{F}_{12} , necesară pentru învingerea forței rezistente \vec{F} , crește. În cazul în care numitorul se anulează, forța \vec{F}_{12} are teoretic o valoare infinită. Unghiul de presiune corespunzător acestei situații, se numește *unghi de presiune critic* α_{cr} și se poate determina în funcție de lungimea tchetului și a ghidajului, cu relația:

$$\operatorname{tg} \alpha_{cr} = \frac{1}{\mu \left(\frac{2a+b}{b} \right)} \quad (4.6)$$

Ajungerea în această situație echivalează cu autoblocarea mecanismului deoarece pentru învingerea unui forțe \vec{F} oricât de mică, este necesar din partea camei o forță \vec{F}_{12} exagerat de mare. Pentru o funcționare corespunzătoare a mecanismului cu camă și tchet de translație este necesar să se respecte următoarea condiție:

$$\alpha \leq \alpha_{adm} < \alpha_{cr} \quad (4.7)$$

în care $\alpha_{adm} = 15 \dots 45^\circ$ este unghiul de presiune admisibil, iar α_{cr} reprezintă unghiul de presiune critic [7], [8].

Pentru a putea ține seama de limitarea valorii unghiului de presiune, este necesar să se stabilească o legătură între acest unghi și dimensiunile camei (vezi paragraful 5.3).

5. SINTEZA MECANISMELOR CU CAMĂ

5.1 Introducere

Sinteza mecanismelor cu camă urmărește în principal, determinarea profilului camei care să asigure tchetului o lege de mișcare impusă. Legea de mișcare poate fi dată în mai multe forme, în funcție de destinația mecanismului cu camă. De exemplu, pentru un mecanism din structura unui sistem automat de sortare se poate impune legea de variație a spațiului parcurs de tchet. Sau în cazul în care cama funcționează la turații ridicate, se poate impune legea de variație a accelerației tchetului. În această situație trebuie să se țină cont de faptul că variațiile bruște ale accelerației, duc la apariția șocurilor în funcționarea mecanismului [2].

5.2 Legi de mișcare

5.2.1 Legea de mișcare cu accelerație zero

Se consideră că, în faza de urcare, spațiul s parcurs de tchet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după următoarea relație:

$$s = C_1\varphi + C_2 \quad (5.1)$$

Prin derivarea relației (5.1) de două ori în raport cu timpul se obține:

$$\frac{v}{\omega} = C_1 \quad (5.2)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = 0 \quad (5.3)$$

unde: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const$, iar C_1 și C_2 reprezintă constante ale căror valori se determină din condițiile la limită pentru faza de urcare.

La începutul fazei de urcare unghiul de rotație al camei și spațiul parcurs de tchet sunt egale cu zero, adică $\varphi = 0$, $s = 0$ iar la finalul fazei unghiul de rotație are

valoarea $\varphi = \varphi_u$ iar spațiul parcurs este egal cu cursa impusă tachelului, adică $s = h$. Înlocuind aceste valori în relațiile (5.1) și (5.5) rezultă expresiile constantelor: $C_2 = 0$ și $C_1 = \frac{h}{\varphi_u}$. Astfel pentru faza de urcare, legea de mișcare cu accelerație zero se poate exprima cu următoarele relații:

$$s = \frac{h}{\varphi_u} \varphi; \quad \frac{v}{\omega} = \frac{h}{\varphi_u}; \quad \frac{a}{\omega^2} = 0 \quad (5.4)$$

În figura 5.1 este prezentată variația legii de mișcare cu accelerație zero pentru fazele de urcare și coborâre.

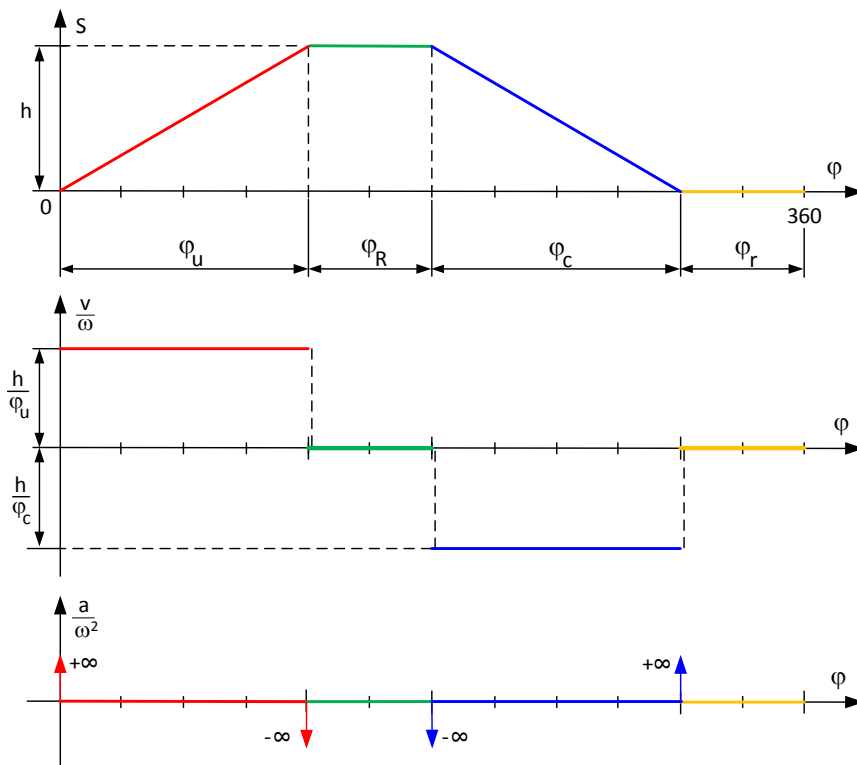


Fig.5.1 Legea de mișcare cu accelerație zero

La această lege de mișcare, spațiul parcurs de tachel variază liniar, prin urmare viteza este constantă. Trecerea de la o fază la alta este însoțită de variația bruscă a valorilor vitezei care determină, teoretic, valori infinite ale accelerației. Acest fenomen duce la apariția unor șocuri puternice în funcționarea mecanismului, motiv pentru care legea de mișcare cu accelerație zero se recomandă pentru came cu viteze foarte mici de rotație.

5.2.2 Legea de mișcare cu accelerație constantă

Această lege de mișcare este numită și *legea de mișcare parabolică*, deoarece spațiul parcurs de tchet este format din două arce de parabolă. Viteza tchetului variază liniar având la începutul și sfârșitul fazei valoarea zero iar la mijlocul fazei valoarea maximă. Din acest motiv legea de mișcare este studiată pe două intervale [2].

În faza de urcare spațiul s parcurs de tchet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după următoarea relație:

$$s = C_1\varphi^2 + C_2\varphi + C_3 \quad (5.5)$$

Se derivează relația (5.5) de două ori succesiv în raport cu timpul. Rezultă astfel:

$$\frac{v}{\omega} = 2C_1\varphi + C_2 \quad (5.6)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = 2C_1 \quad (5.7)$$

La începutul primului interval, condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$. Pentru sfârșitul primului interval condițiile sunt: $\varphi = \frac{\varphi_u}{2}$, $s = \frac{h}{2}$. Cu aceste valori, din relațiile (5.5) și (5.6) se obțin expresiile constantelor sub forma: $C_1 = \frac{2h}{\varphi_u^2}$, $C_2 = 0$ și $C_3 = 0$. Astfel, pentru prima jumătate a fazei de urcare, legea de mișcare cu accelerație constantă se poate scrie sub forma [2]:

$$s = \frac{2h}{\varphi_u^2}\varphi^2; \quad \frac{v}{\omega} = \frac{4h}{\varphi_u^2}\varphi; \quad \frac{a}{\omega^2} = \frac{4h}{\varphi_u^2} \quad (5.8)$$

Cel de-al doilea interval al fazei de urcare este caracterizat de următoarele condiții la limită: la începutul intervalului $\varphi = \frac{\varphi_u}{2}$, $s = \frac{h}{2}$ iar la final $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Cu aceste valori rezultă expresiile constantelor sub forma $C_1 = -\frac{4h}{\varphi_u^2}$, $C_2 = \frac{4h}{\varphi_u}$ și $C_3 = -h$. Înlocuind constantele în relațiile (5.5), (5.6) și (5.7) se obține expresia legii de mișcare cu accelerație constantă pentru cea de a doua jumătate a intervalului [2]:

$$s = h - \frac{2h}{\varphi_u^2}(\varphi_u - \varphi)^2; \quad \frac{v}{\omega} = \frac{4h}{\varphi_u^2}(\varphi_u - \varphi); \quad \frac{a}{\omega^2} = -\frac{4h}{\varphi_u^2} \quad (5.9)$$

Pentru determinarea legii de mișcare pentru faza de coborâre se utilizează relațiile (5.5), (5.6) și (5.7) și se scriu condițiile la limită pentru această fază. Variația

legii de mișcare cu accelerație constantă pentru faza de urcare și coborâre este reprezentată în figura 5.2

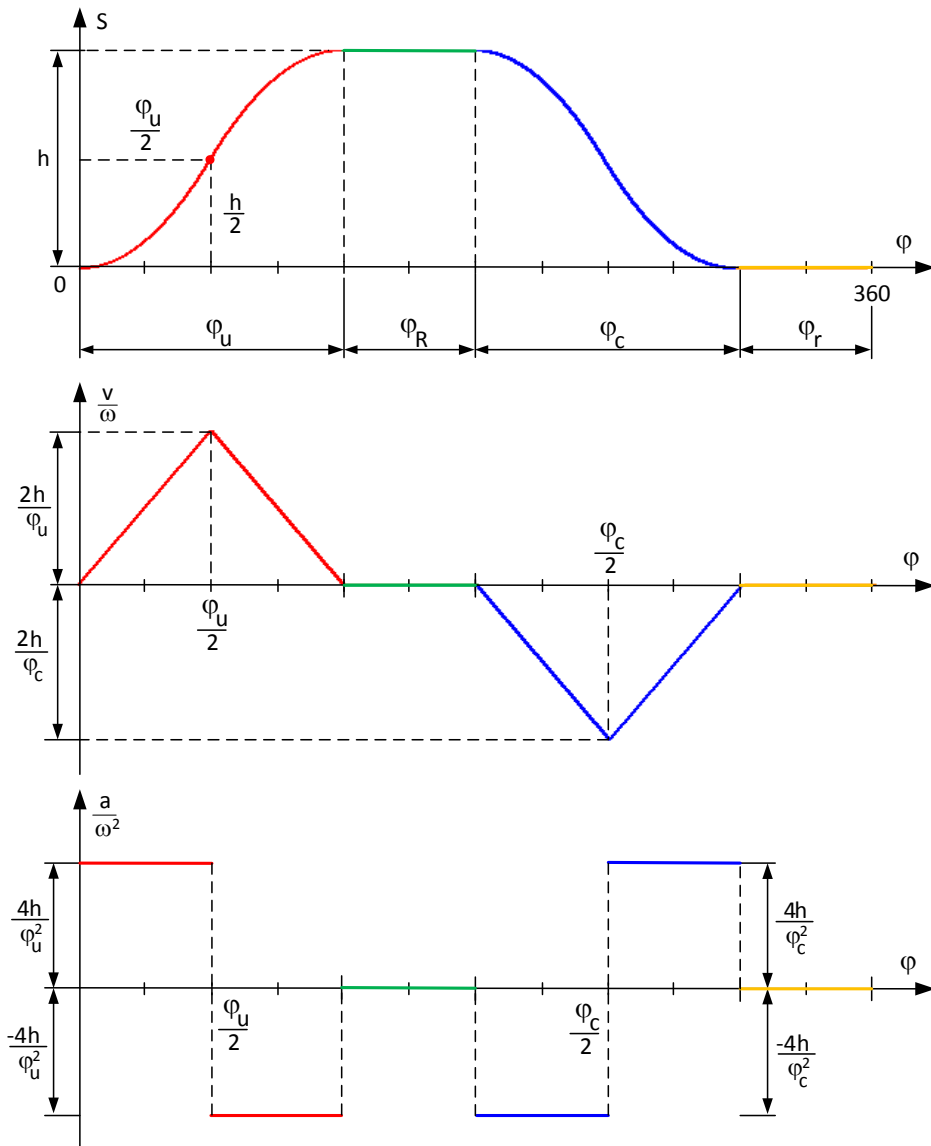


Fig.5.2 Legea de mișcare cu accelerație constantă

Se observă că la începutul, mijlocul și finalul fazelor, accelerația are salturi bruște cu valori finite, care au ca efect apariția unor mici șocuri în funcționarea mecanismului. Această lege de mișcare se utilizează pentru came cu viteze de rotație moderate.

5.2.3 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală

La această lege de mișcare numită și *legea armonică*, perioada de variație a accelerației este egală cu dublul fazei active (urcare sau coborâre). Pentru faza de urcare spațiul s parcurs de tchet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după relația:

$$s = C_1 \cos k\varphi + C_2\varphi + C_3 \quad (5.10)$$

Pentru obținerea expresiilor vitezei și accelerației se derivează relația (5.10) succesiv de două ori în raport cu timpul. Rezultă astfel:

$$\frac{v}{\omega} = -kC_1 \sin k\varphi + C_2 \quad (5.11)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = -k^2 C_1 \cos k\varphi \quad (5.12)$$

La începutul fazei de urcare condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$, iar la finalul fazei: $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Pe baza acestora, din relațiile de mai sus se obțin expresiile constantelor sub forma: $C_1 = -\frac{h}{2}$, $C_2 = 0$, $C_3 = \frac{h}{2}$ și $k = \frac{\pi}{\varphi_u}$.

Înlocuind constantele în relațiile (5.10), (5.11) și (5.12), legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală poate fi scrisă sub forma[2]:

$$\begin{aligned} s &= \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi \right), \\ \frac{v}{\omega} &= \frac{\pi h}{2\varphi_u} \cdot \sin \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi, \\ \frac{a}{\omega^2} &= \frac{\pi^2 h}{2\varphi_u^2} \cdot \cos \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Valoarea maximă a vitezei se obține la jumătatea fazei active iar accelerația maximă la începutul și sfârșitul fazei active. Acestea pot fi exprimate cu relațiile :

$$v_{max} = \frac{\pi h}{2\varphi_u} \cdot \omega ; \quad a_{max} = \frac{\pi^2 h}{2\varphi_u^2} \cdot \omega^2 \quad (5.14)$$

Pentru determinarea expresiei legii de mișcare pentru faza de coborâre se utilizează relațiile (5.10), (5.11) și (5.12), cu condițiile la limită pentru această fază,

adică $\varphi = \varphi_u + \varphi_r$, $s = h$, $v = 0$ la începutul fazei și $\varphi = \varphi_u + \varphi_r + \varphi_c$, $s = 0$, $v = 0$ la final.

În figura 5.3 este reprezentată variația legii de mișcare cu accelerație cosinusoidală pentru fazele de urcare și coborâre.

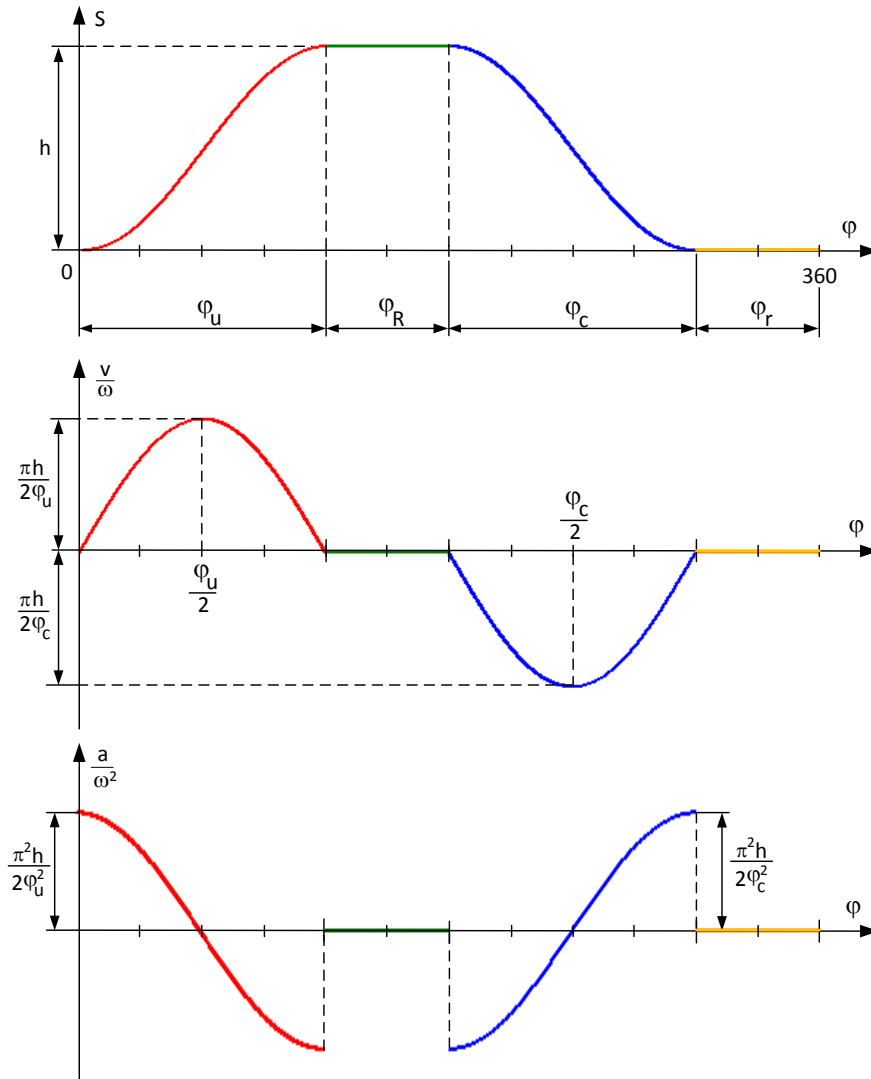


Fig.5.3 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală

La începutul și sfârșitul fazelor, există salturi finite ale valorii accelerației, ceea ce poate duce la apariția șocurilor în funcționarea mecanismului.

5.2.4 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală

Pentru această lege de mișcare, perioada de variație a accelerației este egală cu faza activă (urcare sau coborâre). Pentru faza de urcare, spațiul s parcurs de tchet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, conform relației:

$$s = C_1 \sin k\varphi + C_2\varphi + C_3 \quad (5.15)$$

Se derivează relația (5.15) succesiv de două ori în raport cu timpul. Rezultă astfel expresiile vitezei și accelerației sub forma:

$$\frac{v}{\omega} = kC_1 \cos k\varphi + C_2 \quad (5.16)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = -k^2 C_1 \sin k\varphi \quad (5.17)$$

Pentru începutul fazei de urcare condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$, iar pentru finalul fazei: $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Din relațiile (5.15) și (5.16) rezultă valorile constantelor: $C_1 = -\frac{h}{2\pi}$, $C_2 = \frac{h}{\varphi_u}$, $C_3 = 0$ și $k = \frac{2\pi}{\varphi_u}$.

Înlocuind constantele în relațiile (5.15), (5.16) și (5.17), legea de mișcare cu accelerație sinusoidală poate fi scrisă astfel [2]:

$$\begin{aligned} s &= h \left(\frac{\varphi}{\varphi_u} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi \right), \\ \frac{v}{\omega} &= \frac{h}{\varphi_u} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi \right), \\ \frac{a}{\omega^2} &= \frac{2\pi h}{\varphi_u^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Viteza maximă a tchetului este la jumătatea fazei active și are expresia:

$$v_{max} = \frac{2h}{\varphi_u} \cdot \omega \quad (5.19)$$

Accelerația maximă se obține pentru $\varphi = \varphi_u/4$ și este dată de relația:

$$a_{max} = \frac{2\pi h}{\varphi_u^2} \cdot \omega^2 \quad (5.20)$$

Pentru determinarea expresiei legii de mișcare pentru faza de coborâre, se procedează ca și în cazul legii de mișcare cu accelerație cosinusoidală. În figura 5.4

este reprezentată variația legii de mișcare cu accelerație sinusoidală pentru fazele de urcare și coborâre.

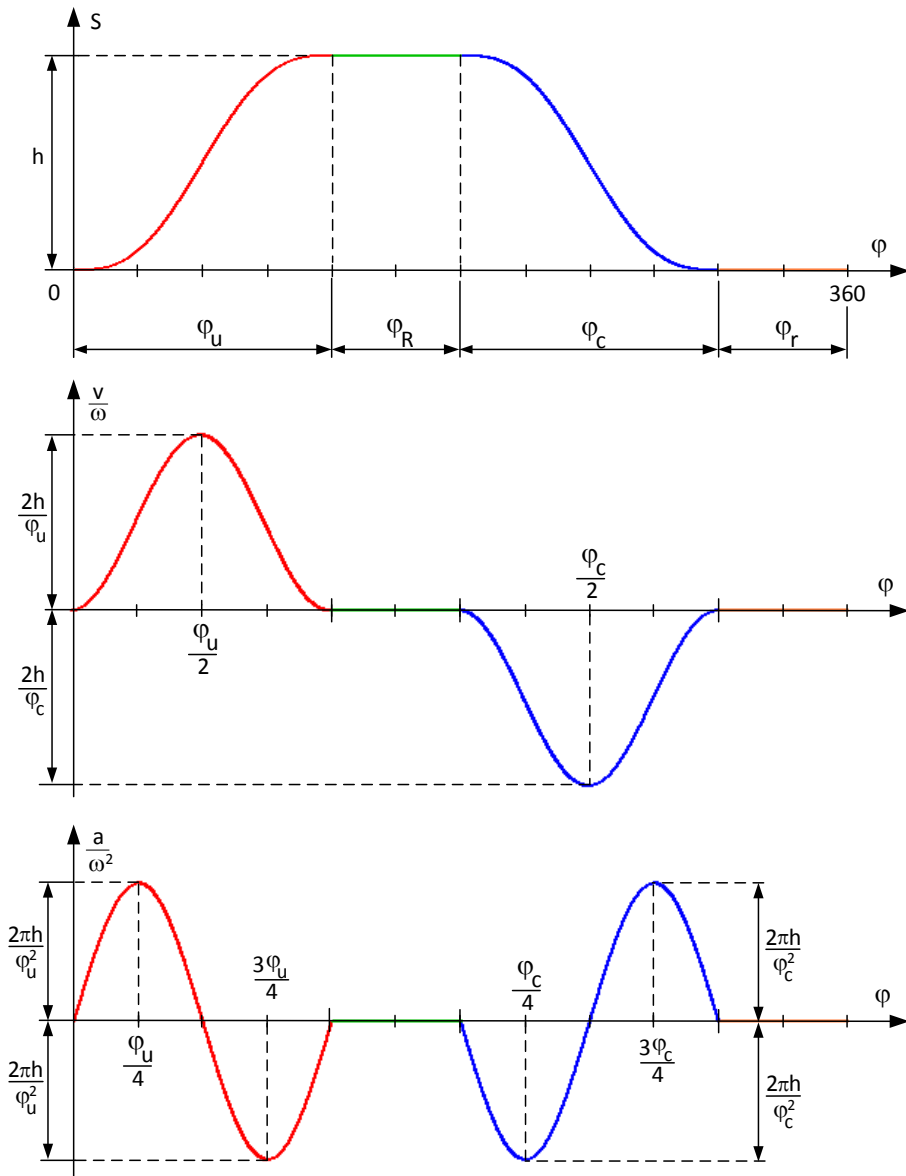


Fig.5.4 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală

În cazul acestei legi de mișcare, accelerația nu prezintă salturi prin urmare nu vor apărea șocuri în funcționarea mecanismului.

5.3 Determinarea razei cercului de bază

Profilul camei pe care se găsește tachelul în faza de repaus inferior este determinat de *cercul de bază* al camei. Pentru o cursă h impusă tachelului, mărimea acestui cerc împreună cu excentricitatea e a tachelului definesc dimensiunile de gabarit ale mecanismului cu camă.

După cum s-a precizat în capitolul anterior, buna funcționare a acestor mecanisme este influențată de valoarea *unghiului de presiune*. Din acest motiv, determinarea razei cercului de bază este precedată de stabilirea unei relații de legătură între unghiul de presiune și dimensiunile geometrice ale camei [2], [8].

Se consideră mecanismul cu camă și tachel de translație din figura 5.5.

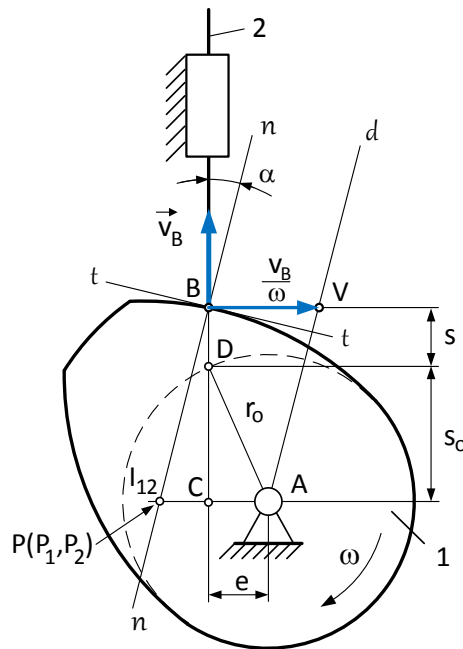


Fig.5.5 Legătura între unghiul de presiune și dimensiunile geometrice ale camei

La intersecția normalei $n-n$ la profilul camei cu perpendiculara prin A la direcția de deplasare a tachelului se găsește *centrul instantaneu de rotație* I_{12} . În acest punct viteza relativă dintre punctele P_1 și P_2 suprapuse dar aparținând camei respectiv tachelului, este nulă. Se poate scrie astfel:

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2} + \vec{v}_{P_1 P_2} \text{ unde } \vec{v}_{P_1 P_2} = 0. \quad (5.21)$$

Ținând cont de faptul că $\vec{v}_{P_1} = \omega \cdot AP$ și $\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_B$, din relația (5.21) rezultă:

$$AP = \frac{v_B}{\omega} \quad (5.22)$$

În triunghiul dreptunghic BCP se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PC}{s_0 + s} \quad (5.23)$$

unde: $PC = AP - e$ sau ținând cont de relația (5.22), $PC = \frac{v_B}{\omega} - e$

s – distanța parcursă de tchet

În funcție de raza r_0 și excentricitatea e , tchetul nu va putea coborî, mai jos de cota s_0 măsurată față de centrul de rotație al camei. Aceasta se determină din triunghiul dreptunghic ACD cu relația:

$$s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2} \quad (5.24)$$

Pentru o excentricitate e impusă, relația (5.24) stabilește o legătură directă între cota s_0 și raza r_0 . Înlocuind relația (5.24) în (5.23) rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v_B}{\omega} \pm e}{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}} \quad (5.25)$$

Din relația (5.25) se observă că valoarea unghiului de presiune este în funcție de valoarea razei r_0 și a excentricității e . Relația este valabilă pentru orice poziție a tchetului față de camă, prin urmare valoarea unghiului de presiune este variabilă.

Pentru a se asigura o bună transmitere a forțelor, ceea ce înseamnă un unghi de presiune cu valori reduse, trebuie ca raza r_0 a cercului de bază al camei să fie mare. Aceasta duce la un gabarit crescut al mecanismului cu camă. Un mecanism cu camă cu dimensiuni mai reduse, duce la creșterea valorii unghiului de presiune ceea ce are ca efect înrăutățirea condițiilor de transmitere a forțelor sau chiar blocarea mecanismului. Determinarea razei cercului de bază trebuie deci făcută în strânsă legătură cu limitarea valorii unghiului de presiune, respectându-se condiția $\alpha \leq \alpha_{adm}[2], [8]$.

Dacă prin centrul de rotație al camei se duce o paralelă la normala $n - n$ iar prin punctul B o perpendiculară la direcția mișcării tchetului, rezultă un segment a cărui valoare, conform figurii 5.5, este dată de relația:

A situat, sub punctul B , de o parte sau de alta a direcției de deplasare a tachelului. În cazuri particulare, punctul de intersecție al dreptelor d_u și d_c se poate găsi chiar pe direcția de deplasare a tachelului. Pentru ca să nu fie depășită valoarea unghiului de presiune admisibil, centrul de rotație al camei se alege în zona dublu hașurată.

- Dacă valoarea excentricității tachelului este egală cu zero, atunci punctul A este centrul de rotație al camei iar raza minimă a cercului de bază este $r_o = AB$

- În cazul în care valoarea excentricității e este diferită de zero, se trasează la o distanță egală cu e , o dreaptă paralelă cu dreapta $y - y$. Aceasta va intersecta zona dublu hașurată de exemplu în punctul A_I . Centrul de rotație al camei va fi punctul A_I iar raza minimă a cercului de bază, $r_o = A_I B$.

5.4 Determinarea profilului camei

După stabilirea valorii razei cercului de bază al camei în funcție de unghiul de presiune admisibil, se poate determina profilul camei. Acesta poate fi determinat analitic sau grafic.

Coordonatele polare ale unui punct C_i de pe *profilul teoretic* al camei sunt date de relațiile [2]:

$$r_i = \sqrt{(s_o + s_i)^2 + e^2} \text{ unde } s_o = \sqrt{r_o^2 - e^2}$$

$$\theta_i = \varphi_i \mp \arctg \frac{e \cdot s_i}{e^2 + (s_o + s_i)s_o} \quad (5.27)$$

unde: r_o – reprezintă raza cercului de bază,

e – este excentricitatea tachelului,

s_i – spațiul parcurs de tachel în faza activă (urcare sau coborâre),

φ_i – unghiul de rotație (fază) al camei.

La mecanismele cu camă la care tachelul este prevăzut cu rolă, *profilul teoretic* trece prin centrul rolei. *Profilul practic* al camei este cel care vine în contact cu rola.

Pentru determinarea grafică a profilului camei trebuie cunoscute: legea de mișcare și cursa h impuse tachelului, sensul de rotație al camei, raza cercului de bază r_o , raza rolei tachelului r , excentricitatea e și unghiurile de rotație ale camei corespunzătoare celor patru faze adică φ_u , φ_c , φ_R , φ_r . Se parcurg următoarele etape:

- Pe graficul de variație al spațiului parcurs de tachtet în funcție de unghiul de rotație al camei, se împart fazele de urcare și coborâre într-un număr egal de intervale după cum rezultă din figura 5.7. Pentru unghiurile de rotație $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ se obțin astfel distanțele parcurs de tachtet notate cu $s_1, s_2 \dots$

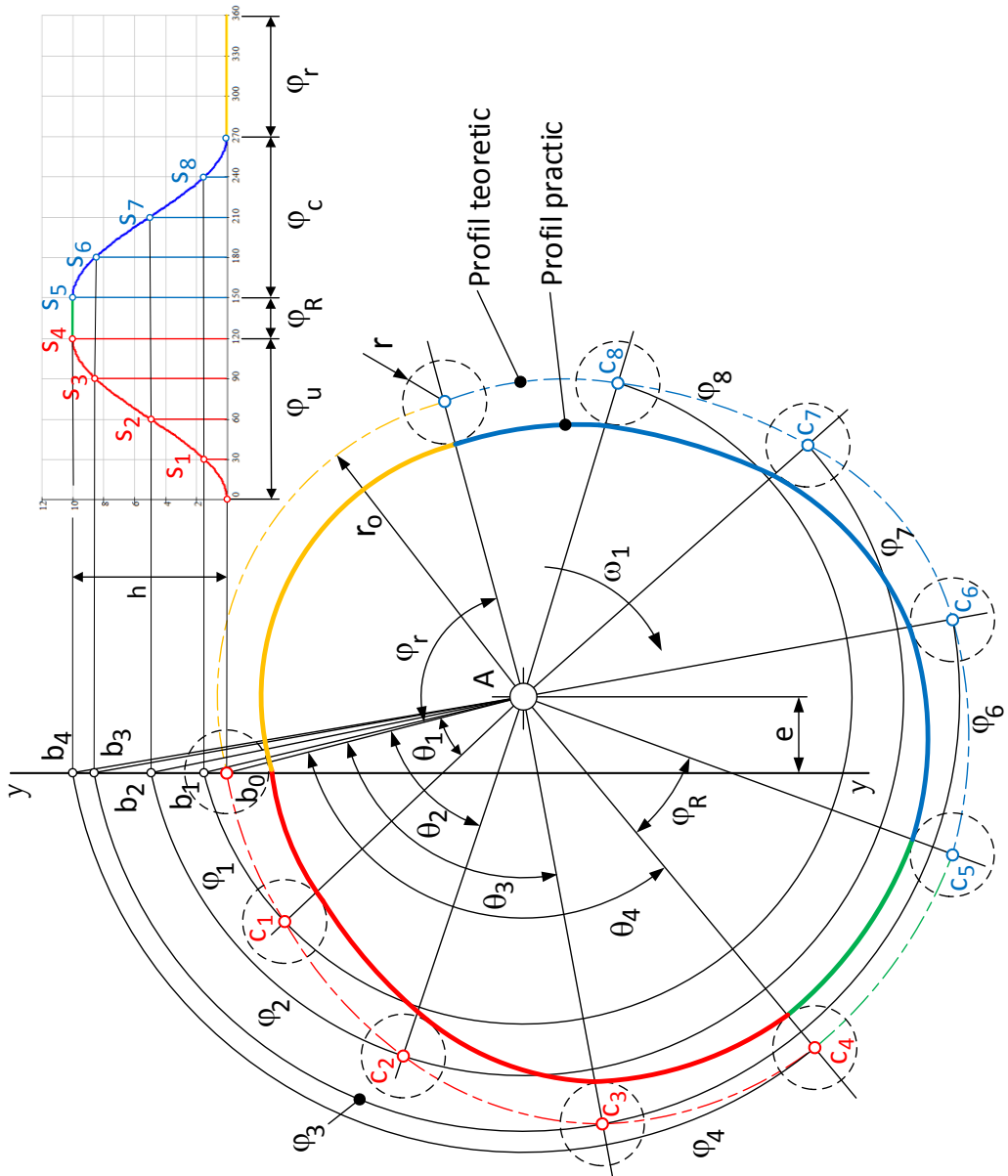


Fig.5.7 Construirea profilului camei cu tachtet de translație

- Față de dreapta verticală $y - y$ care reprezintă direcția de deplasare a tachelului se trasează o dreaptă la distanța e (la dreapta sau la stânga în funcție de semnul excentricității). Cunoscând raza r_0 , se determină centrul de rotație al camei care în figura 5.7, este punctul A . Cercul de rază r_0 și dreapta $y - y$ se intersectează în punctul b_0 care reprezintă poziția de referință a tachelului.

- Pornind din punctul b_0 se măsoară distanțele $s_1, s_2 \dots$ rezultând astfel punctele $b_1, b_2 \dots$ pe dreapta $y - y$.

- Pentru determinarea primului punct C_1 de pe profilul camei, se rotește segmentul Ab_1 cu unghiul φ_1 în sens invers vitezei unghiulare ω_1 . Dacă profilul camei ar fi cunoscut, atunci la o rotație a acesteia cu unghiul φ_1 , tachelul se va deplasa din b_0 în b_1 și va veni în contact cu cama în punctul C_1 .

- Pentru determinarea punctului C_2 de pe profilul camei, se va roti segmentul Ab_2 cu unghiul φ_2 în sens invers vitezei unghiulare ω_1 . Se procedează similar și pentru celelalte puncte de pe profilul camei în faza de urcare.

- În faza de repaus superior profilul camei este un arc de cerc cu raza Ab_4 cu unghiul la centru egal cu φ_R , după cum reiese și din figura 5.7.

- Pentru determinarea punctelor de pe profilul camei corespunzător fazei de coborâre se procedează similar. În faza de repaus inferior profilul camei este un arc de cerc cu raza r_0 și unghiul la centru φ_r .

- Se aproximează cu o curbă punctele $C_1, C_2 \dots$ determinate anterior rezultând astfel *profilul teoretic* al camei. *Profilul practic* se obține scăzând din profilul teoretic raza rolei de pe tachel.

Legea de mișcare impusă tachelului determină forma profilului camei. Pentru a evidenția acest aspect, s-a considerat un exemplu în care legea de mișcare impusă tachelului are următoarele caracteristici: cursa maximă a tachelului $h = 10 \text{ mm}$, excentricitatea tachelului $e = 5 \text{ mm}$, unghiurile de fază pentru urcare $\varphi_u = 120^\circ$, coborâre $\varphi_c = 90^\circ$, repaus superior $\varphi_R = 30^\circ$ și repaus inferior $\varphi_r = 120^\circ$ iar raza cercului de bază are valoarea $r_0 = 20 \text{ mm}$

În figura 5.8a, s-a reprezentat grafic profilul camei obținut în situația în care legea de mișcare a tachelului în fazele de urcare și coborâre are accelerația zero. În figura 5.8b este reprezentat profilul camei obținut pentru legea de mișcare cu accelerație constantă. Iar în figurile 5.8 c și d profilurile camelor pentru legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală respectiv sinusoidală.

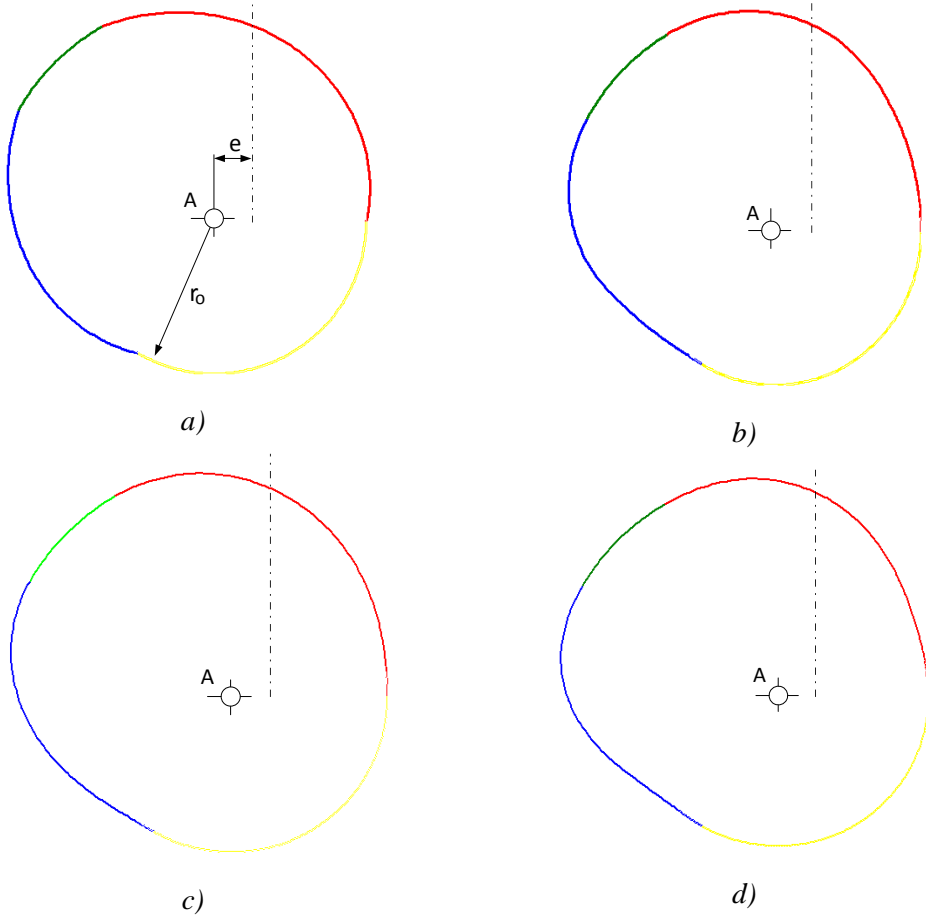


Fig.5.8 Influența legii de mișcare a tachetului asupra profilului camei

6. ANGRENAJE. GENERALITĂȚI

6.1 Clasificare

Mecanismele cu roți dințate, numite pe scurt *angrenaje*, transmit mișcarea de rotație de la o roată conducătoare la o roată condusă, prin intermediul unor dinți aflați succesiv și continuu în contact. Numărul de dinți ai unei roți dințate se notează cu z . Suprafețele laterale ale dinților roților dințate poartă denumirea de *flancuri*. Pentru ca mișcarea să poată fi transmisă în ambele sensuri dinții trebuie să aibă flancurile simetrice. Procesul continuu de contact dintre flancurile dinților celor două roți dințate se numește *angrenare*.

Roțile dințate și implicit angrenajele pe care le formează sunt de mai multe tipuri și în funcție de domeniul de utilizare, au diverse variante constructive. Există astfel mai multe criterii după care se pot clasifica angrenajele. După poziția axelor roților dințate există angrenaje cu axe: *paralele* (fig. 6.1 a, b, c, d), *concurente* (fig. 6.1 e, f) și *încrucișate* (fig. 6.1g). În funcție de poziția relativă a celor două roți sunt angrenaje *exterioare* (fig. 6.1 a, b, d, e, f, g) respectiv *interioare* (fig.6.1 c). În cazul angrenajelor exterioare, roțile dințate se rotesc în sensuri opuse, iar la angrenajele interioare, se rotesc în același sens. După forma roților avem angrenaje *cilindrice* (fig. 6.1 a, b, c, d) sau *conice* (fig. 6.1 e, f).

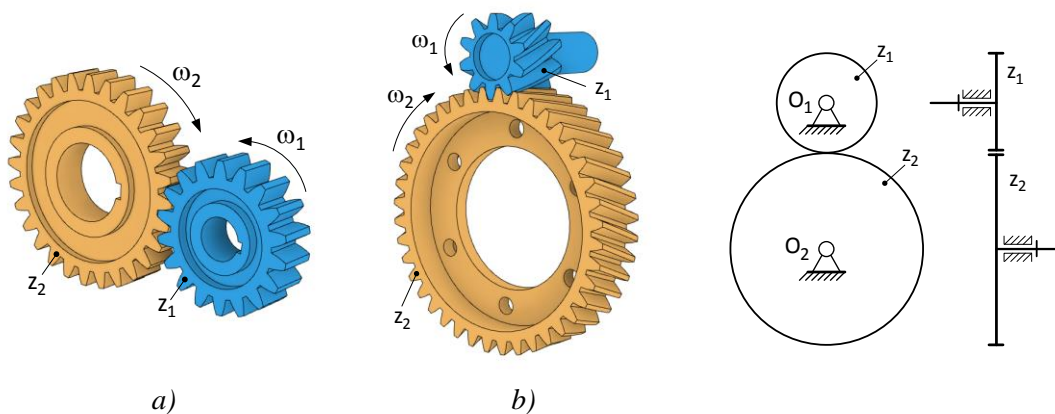


Fig. 6.1 Mecanisme cu roți dințate

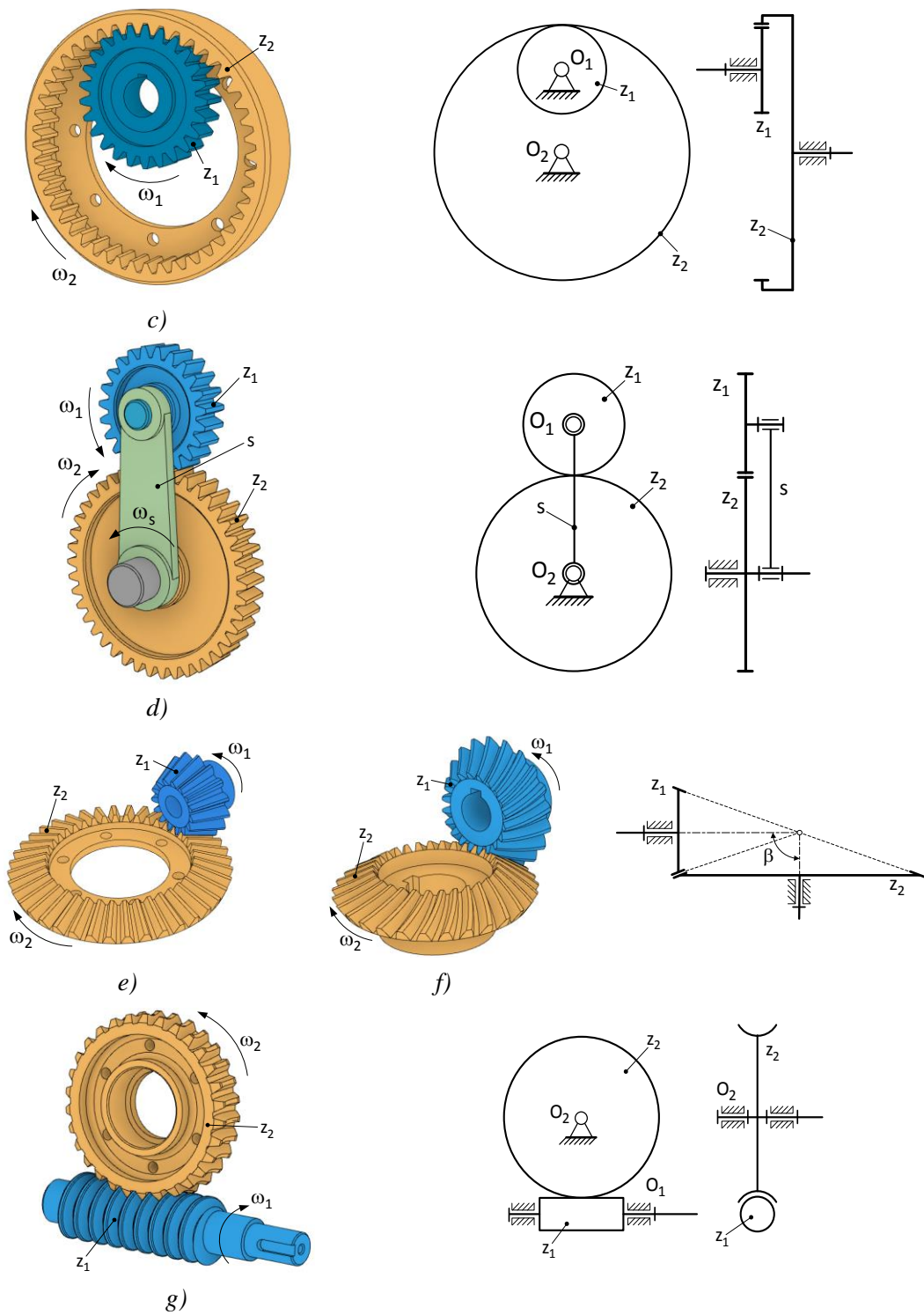


Fig. 6.1 Mecanisme cu roți dințate(continuare)

După forma dinților roților, angrenajele pot fi cu: *dinți drepecți* (fig. 6.1 a, c, d, e), *dinți înclinați* (fig. 6.1 b) sau *curbi* (fig. 6.1 f). În funcție de modul de mișcare al axelor roților dințate, există angrenaje: *ordinare* la care axele roților sunt fixe (fig. 6.1 a b, c, e, f, g) și *planetare* la care cel puțin o roată are axa mobilă (fig. 6.1 d). Angrenajele planetare cu două grade de mobilitate se numesc angrenaje *diferențiale*.

Între orice două roți dințate aflate în angrenare se poate stabili un *raport de transmitere* i_{12} . Acesta este egal cu raportul vitezelor unghiulare ale celor două roți:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (6.1)$$

Dacă valoarea raportului de transmitere este $i_{12} > 1$, angrenajul se numește *reductor* iar dacă $0 < i_{12} < 1$ angrenajul este numit *multiplicator*.

O roată dințată cu un număr foarte mare de dinți (teoretic infinit), va degenera într-o *cremalieră dințată*. Roata dințată care angrenează cu cremaliera se numește *pinion*. Un astfel de angrenaj, reprezentat în figura 6.2, este utilizat pentru transformarea mișcării de rotație în mișcare de translație sau invers.

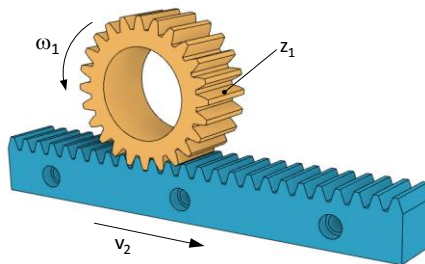


Fig.6.2 Angrenaj pinion-cremalieră

Flancurile dinților secționare cu un plan perpendicular pe axa de rotație definesc *profilurile* dinților. Forma profilurilor dinților trebuie aleasă astfel încât: realizarea roții să fie cât mai simplă din punct de vedere tehnologic, angrenajul rezultat să aibă o capacitate de transmitere a forțelor cât mai bună, transmiterea mișcării să fie uniformă și raportul de transmitere să fie constant. În acest scop se pot utiliza curbe ciclice obținute prin: rostogolirea fără alunecare a unui cerc peste o dreaptă (*ortocicloida*), rostogolirea unui cerc peste alt cerc în exterior (*epicicloida*), în interior (*hipocicloida*) sau a unei drepte peste un cerc (*evolventa*). Toate aceste curbe pot fi generate de puncte care sunt situate pe cercul sau pe dreapta care se rostogolește [2], [7], [10].

Majoritatea roților dințate au profilul dinților definit de o evolventă de cerc.

6.2 Evolventa de cerc

Dacă dreapta d se rostogolește fără alunecare peste un cerc fix de rază r_b , un punct M aparținând dreptei va descrie o curbă numită *evolventă de cerc*. Evolventa are două ramuri E și E' și un punct de întoarcere M_0 pe cercul de rază r_b numit *cerc de bază*. Aceeași evolventă poate fi obținută dacă cercul se rotește în jurul punctului O cu viteza unghiulară ω , iar dreapta d realizează o mișcare de translație cu viteza $v = \omega r_b$ astfel încât între cerc și dreaptă să aibă loc o rostogolire fără alunecare.

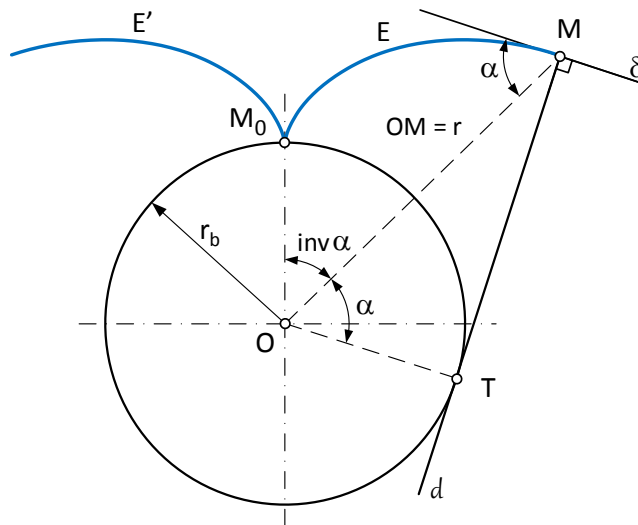


Fig. 6.3 Generarea evolventei

În figura 6.3 se observă că:

$$\widehat{M_0T} = r_b (\text{inv } \alpha + \alpha) \quad (6.2)$$

și

$$\overline{MT} = r_b \text{tg } \alpha \quad (6.3)$$

Din triunghiul dreptunghic MOT se poate scrie:

$$r_b = r \cos \alpha \quad (6.4)$$

Deoarece între dreapta d și cerc există o mișcare de rostogolire fără alunecare, rezultă că $\widehat{M_0T} = \overline{MT}$. Ținând cont de relația (6.4), ecuațiile evolventei în coordonate polare pot fi scrise după cum urmează:

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha}; \quad (6.5)$$

$$\text{inv } \alpha = \text{tg } \alpha - \alpha.$$

unde: $\text{inv } \alpha$ – este un parametru numit *involut de α* ;

α – unghi de presiune.

Ecuatiile evolventei precum și modul de generare al acesteia pun în evidență următoarele proprietăți [2]:

- normala la evolventă este chiar dreapta care o generează
- centrul de curbură al evolventei se găsește întotdeauna pe cercul de bază
- când $r_b \rightarrow \infty$ evolventa degenează într-o dreaptă perpendiculară pe d , adică în dreapta δ .

Pentru a ilustra modul de generare a profilelor evolventice, se consideră două cercuri cu centrele în O_1 și O_2 respectiv razele r_{b1} și r_{b2} . Când cele două cercuri se rotesc în sensuri contrare cu vitezele ω_1 și ω_2 punctul A de pe tangenta comună d va descrie în planul cercului C_1 evolventa E_1 iar în planul cercului C_2 evolventa E_2 . Cele două arce de evolventă vor fi tot timpul în contact formând o pereche de *profiluri conjugate*. Locul geometric al punctului de contact A dintre cele două profiluri este dreapta d tangentă la cele două cercuri.

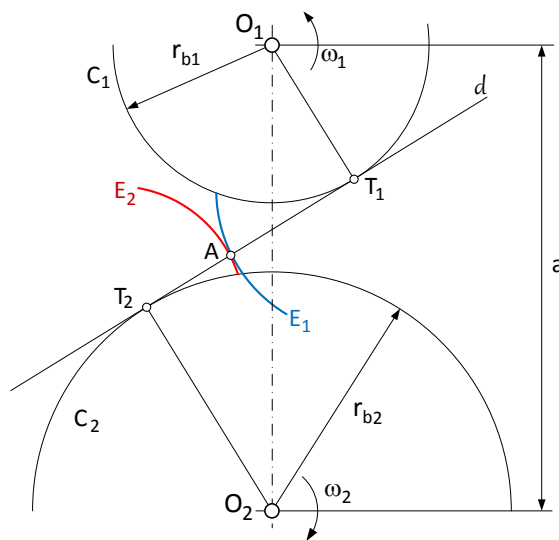


Fig. 6.4 Generarea profilurilor conjugate ale unui angrenaj

Prima roată dințată se rotește în jurul punctului fix O_1 cu viteza unghiulară constantă ω_1 și antrenează a doua roată dințată într-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω_2 în jurul punctului fix O_2 .

Profilurile p_1 și p_2 vin în contact în punctul A unde se formează o cuplă superioară de clasa 4 cu contact punctiform în plan. Pentru înlocuirea acestei cuple se construiește mecanismul înlocuitor $O_1B_1B_2O_2$. Cuplele de rotație din B_1 și B_2 se găsesc în centrele de curbură ale celor două profiluri situate pe normala comună $n - n$ dusă în punctul de contact A . La intersecția normalei cu linia care unește punctele O_1 și O_2 se găsește *centrul instantaneu de rotație* I_{12} al roții 1 în raport cu roata 2. În centrul instantaneu de rotație, viteza relativă dintre două puncte C_1 și C_2 suprapuse dar aparținând roților 1 respectiv 2, este egală cu zero. Se poate scrie astfel:

$$\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_{C_2} + \vec{v}_{C_1C_2}, \quad \vec{v}_{C_1C_2} = 0. \quad (7.1)$$

Pentru că:

$$\vec{v}_{C_1} = \omega_1 \times \overline{O_1C} \text{ iar } \vec{v}_{C_2} = \omega_2 \times \overline{O_2C} \quad (7.2)$$

din relația (7.1), rezultă:

$$\omega_1 \times \overline{O_1C} - \omega_2 \times \overline{O_2C} = 0 \quad (7.3)$$

sau:

$$\omega_1 \times \left(\overline{O_1C} - \frac{1}{i_{12}} \overline{O_2C} \right) = 0, \quad i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (7.4)$$

Deoarece viteza unghiulară ω_1 a roții 1 este constantă, relația (7.4) devine:

$$\overline{O_1C} - \frac{1}{i_{12}} \overline{O_2C} = 0, \quad (7.5)$$

Vectorii $\overline{O_1C}$ și $\overline{O_2C}$ au aceeași direcție dar sensuri contrare, astfel că relația (7.5) poate fi scrisă sub forma:

$$i_{12} = - \frac{O_2C}{O_1C} = - \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \text{const} \quad (7.6)$$

Deoarece punctele O_1 și O_2 sunt fixe, pentru ca relația (7.6) să fie adevărată, este necesar ca punctul C suprapus cu I_{12} , să rămână fix tot timpul angrenării.

Conform [2], legea fundamentală a angrenării poate fi enunțată astfel: ”pentru ca un angrenaj să asigure un raport de transmitere constant, profilurile conjugate ale dinților roților trebuie alese astfel încât normala comună în punctul de contact a celor două profiluri să treacă tot timpul printr-un punct fix C , numit *polul angrenării*, care împarte distanța axială O_1O_2 în segmente invers proporționale cu vitezele unghiulare ale roților”

Cercurile cu centrele în punctele fixe O_1 și O_2 având razele $r_{w1} = O_1C$ și $r_{w2} = O_2C$, în timpul angrenării, se rostogolesc fără alunecare motiv pentru care mai sunt numite *cercuri de rostogolire* (sau cercuri de rulare). Unghiul α format între normala $n - n$ și perpendiculara prin C la linia centrelor se numește *unghi de angrenare*.

7.2 Interferența la angrenajul evolventic.

Considerăm în figura 7.2, două cercuri de bază cu razele r_{b1} respectiv r_{b2} care se rotesc în sens contrar, în jurul a două puncte fixe O_1 și O_2 cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 . Dreapta d este tangenta comună la cele două cercuri în punctele T_1 respectiv T_2 . Când cele două cercuri se rotesc, un punct A de pe dreapta d se va deplasa de la T_1 spre T_2 și va genera în planul cercului C_1 evolventa E_1 iar în planul cercului C_2 evolventa E_2 . Cele două evolvente sunt tot timpul în contact de-a lungul dreptei d , materializând o pereche de profiluri conjugate, așa cum s-a prezentat și în paragraful 6.2.

În timpul rotației celor două cercuri, profilele conjugate vor fi în contact în punctul A^I iar apoi în punctul $T_2 \equiv A^{II}$ care este punctul de întoarcere al evolventei E_2^{II} . Dacă de continuă rotația, evolventa E_1 va ajunge în contact în punctul A^{III} cu ramura stângă a evolventei E_2 adică cu E_2^{IV} . Se poate observa că E_1^{III} intersectează profilul E_2^{III} , care materializează profilul roții 2, în zona dublu hașurată. Se produce astfel fenomenul de *interferență*. Când două roți dințate aflate în angrenare ajung în această situație se vor bloca. Dacă una dintre ele materializează o sculă așchietoare iar cealaltă semifabricatul (din care va rezulta roata dințată), scula va *subția* dintele roții la bază cauzând astfel o micșorare a rezistenței acestuia [2].

Pentru evitarea acestui fenomen, trebuie să îndeplinească condițiile:

$$\begin{aligned} r_{a1} &\leq O_1T_2 \\ r_{a2} &\leq O_2T_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

unde: r_{a1} și r_{a2} reprezintă razele cercurilor exterioare ale celor două roți dințate

Condițiile de mai sus, dacă sunt îndeplinite, limitează domeniul de contact al profilelor în intervalul T_1T_2 . Dreapta d se intersectează cu dreapta verticală care trece

prin centrele celor două roți, în punctul C care reprezintă polul angrenării. Cercurile cu centrele în punctele O_1 și O_2 tangente exterior în punctul C reprezintă cercurile de rostogolire.

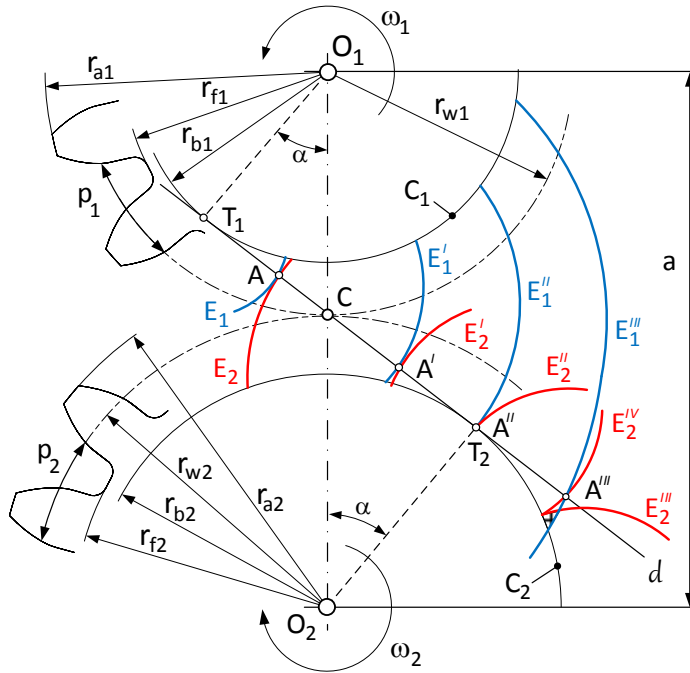


Fig. 7.2 Fenomenul de interferență la angrenajul evolventic

În triunghiurile dreptunghice $\Delta O_1 T_1 C$ și $\Delta O_2 T_2 C$ se poate scrie:

$$r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha}, \quad r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha}. \quad (7.8)$$

iar ținând cont de formula raportului de transmitere (7.6) rezultă:

$$i_{12} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (7.9)$$

Prin urmare raportul de transmitere pentru un angrenaj evolventic, poate fi exprimat și cu ajutorul razelor cercurilor de bază. Modificarea distanței axiale a nu duce la modificarea valorilor razelor cercurilor de bază deci, nici a valorii raportului de transmitere. Se modifică doar valoarea unghiului de angrenare α . Astfel, se poate spune că angrenajul evolventic este insensibil la variația distanței axiale.

Distanța dintre flancurile a doi dinți consecutivi ai unei roți dințate, măsurată pe un cerc oarecare, se numește *pas*. Pașii mășurați pe cercurile de bază, pot fi exprimați cu relațiile:

$$p_{b1} = \frac{2\pi r_{b1}}{z_1}, \quad p_{b2} = \frac{2\pi r_{b2}}{z_2}. \quad (7.10)$$

Ținând cont de relația (7.9) rezultă că $p_{b1} = p_{b2}$, ceea ce înseamnă că două roți dințate pot angrena numai dacă pașii pe cercurile de bază sunt egali.

7.3 Gradul de acoperire

Un angrenaj poate transmite mișcarea continuu doar dacă pe durata angrenării se află în contact cel puțin o pereche de dinți. Prin urmare înainte să iasă din angrenare o pereche de dinți, următoarea pereche trebuie să fie intrată deja în angrenare. Pentru a evidenția acest fenomen se utilizează noțiunea de *grad de acoperire* [2], [7].

Gradul de acoperire ε al unui angrenaj reprezintă raportul dintre *arcul de angrenare* e_b și *pasul circular* p_b al unei roți dințate, ambele măsurate pe cercul de bază.

$$\varepsilon = \frac{e_b}{p_b} \quad (7.11)$$

În figura 7.3 este reprezentată o pereche de dinți la începutul procesului de angrenare, când profilurile conjugate p_1 și p_2 sunt în contact în punctul A , respectiv la sfârșitul angrenării când profilurile conjugate sunt în contact în punctul B .

Arcul de angrenare e_b reprezintă arcul pe care îl parcurge un punct de pe profilul evolventic al dintelui din momentul intrării în angrenare și până în momentul ieșirii din angrenare [2]. În figura 7.3 arcele de angrenare măsurate pe cercurile de bază ale celor două roți sunt:

$$e_{b1} = \widehat{M_{10}M_{11}}, \quad e_{b2} = \widehat{M_{20}M_{21}}. \quad (7.12)$$

Contactul dintre perechile de dinți aflate în angrenare are loc de-a lungul segmentului $AB = g$ numit *segment de angrenare*.

În figura 7.3 se observă că pe baza principiului de generare a evolventei segmentul de angrenare este egal cu arcul de angrenare al celor două roți. Se poate scrie:

$$e_{b1} = e_{b2} = AB = e_b \quad (7.13)$$

Deoarece $p_{b_1} = p_{b_2} = p_b$, relația (7.11) poate fi scrisă după cum urmează:

$$\varepsilon = \frac{e_{b_1}}{p_{b_1}} = \frac{e_{b_2}}{p_{b_2}} = \frac{AB}{p_b} \quad (7.14)$$

Dacă $\varepsilon \leq 1$ nu există continuitate în angrenare. Pentru ca transmiterea mișcării să fie continuă este necesar $\varepsilon \geq 1,2$ adică arcul de angrenare să fie mai mare decât pasul [2].

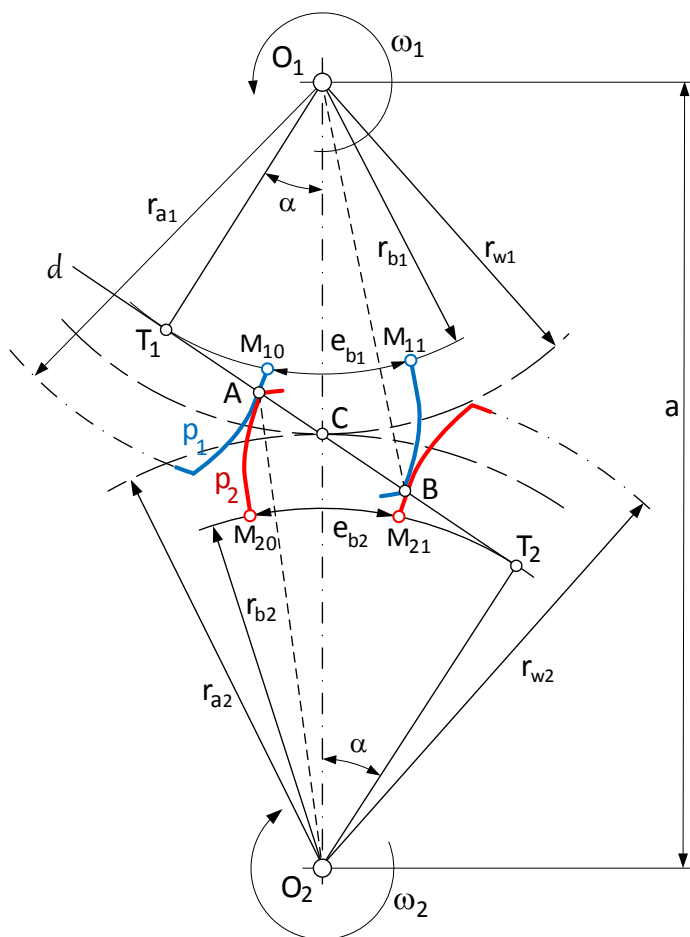


Fig. 7.3 Gradul de acoperire al unui angrenaj

Din figura 7.3 se observă că:

$$AB = BC + AC = T_1B - CT_1 + T_2A - CT_2 \quad (7.15)$$

Din triunghiurile dreptunghice $\Delta O_1 T_1 B$ și $\Delta O_2 T_2 A$ se poate scrie:

$$T_1 B = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}, \quad T_2 A = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (7.16)$$

iar din triunghiurile dreptunghice $\Delta O_1 T_1 C$ și $\Delta O_2 T_2 C$ rezultă:

$$CT_1 = r_{w1} \sin \alpha, \quad CT_2 = r_{w2} \sin \alpha \quad (7.17)$$

Dacă se introduc relațiile (7.16) și (7.17) în relația (7.15), expresia pentru segmentul de angrenare AB devine:

$$AB = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha \quad (7.18)$$

unde: $a = r_{w1} + r_{w2}$ reprezintă distanța între axele celor două roți dințate

Ținând seama de relația (7.14), expresia gradului de acoperire poate fi scrisă astfel:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha}{p_b} \quad (7.19)$$

7.4 Cremaliera de referință

Într-un angrenaj format din două roți dințate, se consideră că una din roți, de exemplu roata 2 din figura 7.4, are cercul de bază foarte mare, deci teoretic $r_{b2} \rightarrow \infty$.

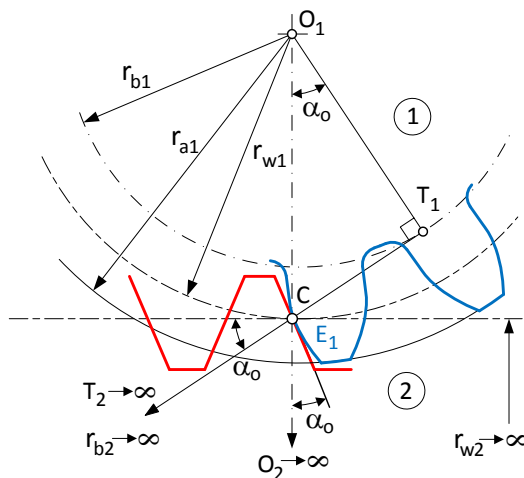


Fig. 7.4 Degenerarea unei roți dințate într-o cremalieră

În acest caz profilurile dinților roții 2 vor degenera în drepte tangente la profilurile dinților roții 1, iar cercul de rostogolire se va transforma într-o dreaptă tangentă la cercul de rostogolire al roții 1. Astfel roata dințată 2 va degenera într-o *cremalieră*. Unghiul de angrenare α_0 al angrenajului astfel format între roata dințată 1 și cremaliera 2, este egal cu unghiul de înclinare al flancului dintelui cremalierii. Această cremalieră poate fi materializată de o sculă așchietoare care astfel, va genera (prelucra) dantura roții dințate 1.

Cremaliera care generează dantura unei roți dințate, poartă numele de *cremaliera generatoare*. Cremaliera fictivă, negativ al cremalierii generatoare, care definește elementele geometrice ale dinților roților dințate cu profil evolventic, se numește *cremaliera de referință* și este prezentată în figura 7.5.

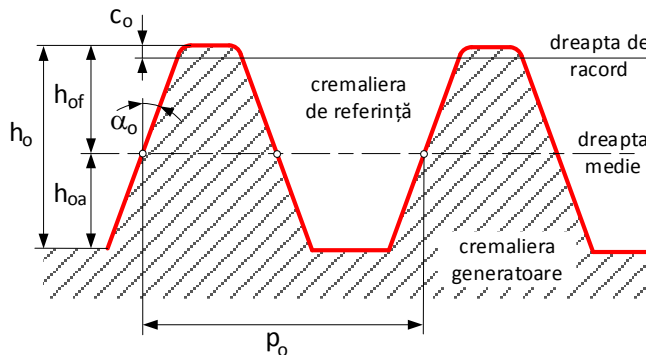


Fig. 7.5 Cremaliera de referință

Elementele geometrice ale cremalierii de referință, standardizate conform ISO 53:1998, sunt:

- Unghiul normal al profilului de referință: $\alpha_0 = 20^\circ$
- Pasul cremalierii de referință: $p_0 = \pi \cdot m$
- Înălțimea capului de referință: $h_{oa} = m$
- Înălțimea piciorului de referință: $h_{of} = 1,25m$
- Înălțimea dintelui de referință: $h_o = h_{oa} + h_{of}$
- Profil de racord: $c_0 = 0,25m$

unde: m – reprezintă *modulul* cremalierii, se măsoară în mm și are valorile standardizate conform ISO 54:1996

Cercul de rază r de pe roata dințată, pe care pasul și modulul sunt egale cu cele ale cremalierii de referință, se numește *cerc de divizare* [2], [9]:

$$r = \frac{m \cdot z}{2} \quad (7.20)$$

7.5 Deplasările de profil.

În timpul generării unei roți dințate, cremaliera generatoare poate ocupa diverse poziții față de centrul O al roții. Dacă roata dințată se rotește cu viteza unghiulară ω iar cremaliera se deplasează cu viteza liniară $v = \omega \cdot r$, atunci dreapta δ va înfășura evolventa E , după cum rezultă din figura 7.6.

Dacă dreapta medie a cremalierii este tangentă la cercul de divizare de rază r al roții, atunci se va genera o dantură *zero deplasată* (normală) iar dintele va avea profilul M_1M_2 . În cazul în care dreapta medie a cremalierii nu mai este tangentă la cercul de divizare, se va genera o dantură *deplasată*. Dacă cremaliera se apropie de centrul roții cu cantitatea $-mx$, deplasarea danturii va fi *negativă*, caz în care dintelul poate avea profilul $M_1^-M_2^-$. În situația în care cremaliera se îndepărtează de centrul roții cu cantitatea $+mx$ atunci deplasarea danturii este *pozitivă*, iar dintelul poate avea profilul $M_1^+M_2^+$ [2].

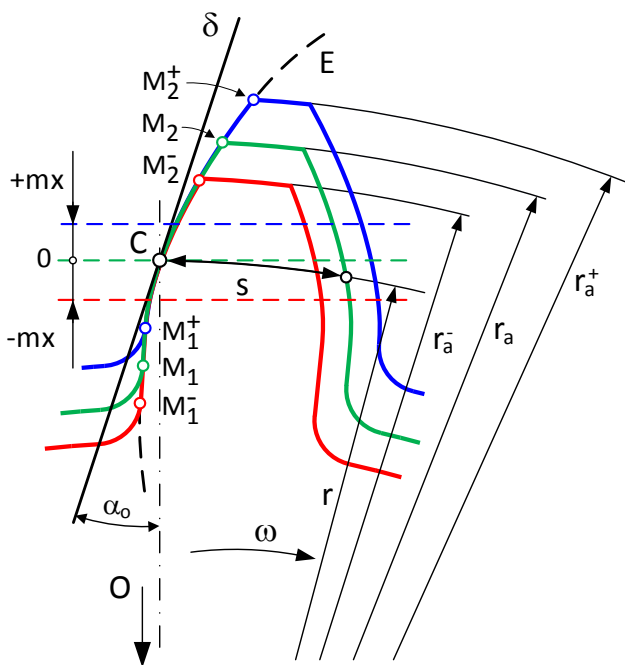


Fig. 7.6 Influența deplasării de profil asupra formei dinților

Cota $\pm mx$ se numește *deplasare de profil* iar x reprezintă *coeficientul deplasării de profil*. Arcul s al dintelui măsurat pe cercul de divizare se poate determina cu relația [2]:

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2mx \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (7.21)$$

în care x are valori pozitive sau negative în funcție de tipul deplasării de profil

Prin comparație cu dantura zero deplasată, se poate observa că la deplasarea pozitivă de profil dintele tinde să se ascute la vârf și să se îngroașe la bază iar la deplasarea negativă tinde să se îngroașe la vârf și să se subțieze la bază. Modul de alegere al coeficienților deplasărilor de profil influențează foarte mult performanțele angrenajului. În general se preferă coeficienții de deplasare pozitivă cu evitarea pe cât posibil a ascuțirii dinților dar, în literatura de specialitate, sunt prezentate mai multe criterii pentru alegerea coeficienților de deplasare de profil [2], [6], [10].

7.6 Elemente geometrice ale angrenajului evolventic

Pentru determinarea elementelor geometrice ale unui angrenaj se consideră că cele două roți angrenează fără joc tangențial, adică dinții unei roți intră perfect în golurile dintre dinții celeilalte roți, după cum rezultă din figura 7.7. În această situație se poate considera că arcul dintelui primei roți s_w este egal cu arcul golului celeilalte roți e_w , ambele arce fiind măsurate pe cercurile de rostogolire [2],[9].

Angrenajele pot fi normale sau *zero deplasate* dacă $x_1 = x_2 = 0$, *compensate* dacă $x_1 = -x_2$, *deplasate negativ* dacă $x_1 + x_2 < 0$, respectiv *deplasate pozitiv* când $x_1 + x_2 > 0$. În continuare se vor prezenta principalele elemente geometrice pentru angrenajele zero deplasate.

La aceste angrenaje *razele de divizare* r și *razele de rostogolire* r_w coincid și pot fi determinate din relațiile:

$$r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_0} = \frac{mz_1}{2}, \quad r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_0} = \frac{mz_2}{2} \quad (7.22)$$

unde: m – reprezintă modulul angrenajului,

r_{b1}, r_{b2} – sunt razele cercurilor de bază,

z_1, z_2 – sunt numerele de dinți ale celor două roți dințate,

$\alpha_0 = 20^\circ$ – este unghiul normal al profilului de referință.

Pasul p_w pe cercul de rostogolire se calculează cu relația:

$$p_w = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{w2}}{z_2} = \pi m \quad (7.23)$$

Razele (exterioare) r_a respectiv razele cercurilor de picior r_f se obțin din relațiile:

$$\begin{aligned} r_{a1} &= m \left(\frac{z_1}{2} + 1 \right), & r_{a2} &= m \left(\frac{z_2}{2} + 1 \right) \\ r_{f1} &= m \left(\frac{z_1}{2} - 1.25 \right), & r_{f2} &= m \left(\frac{z_2}{2} - 1.25 \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

iar înălțimea dintelui este $h = 2.25m$.

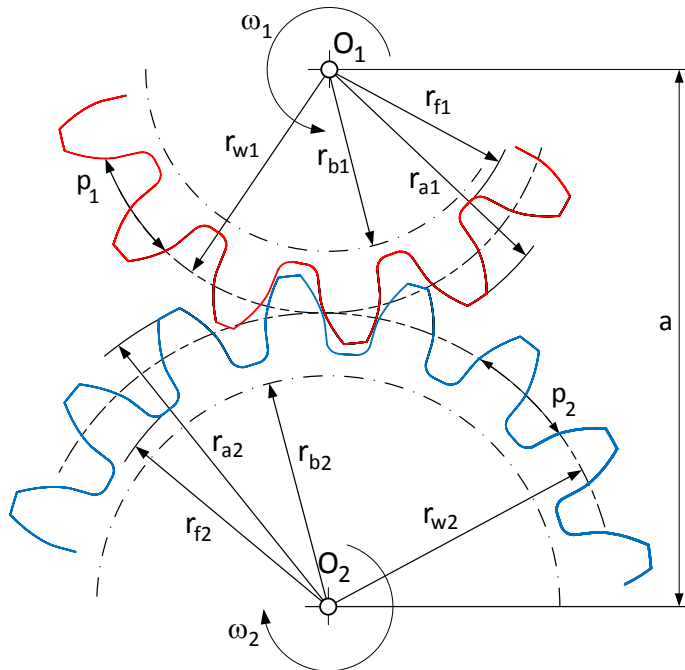


Fig. 7.7 Angrenajul evolventic exterior

Distanța axială a dintre centrele celor două roți dințate ale unui angrenaj zero deplasat, poate fi calculată cu următoarea formulă:

$$a = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \quad (7.25)$$

La angrenajele cu deplasări de profil, cercurile de divizare ale celor două roți nu mai sunt tangente, distanța dintre ele fiind egală cu my unde y este coeficientul de variație a distanței axiale. Relațiile de calcul pentru aceste angrenaje se găsesc în [2], [5], [6], [10].

8. SISTEME DE ANGRENAJE

8.1 Sisteme de angrenaje ordinare

După cum s-a precizat în paragraful 6.1, angrenajele la care toate roțile dințate au axele fixe, se numesc *angrenaje ordinare*. Pentru a se realiza angrenaje cât mai compacte, de regulă, roțile dințate au un număr limitat de dinți. Din acest motiv angrenajele simple din două roți dințate nu pot realiza rapoarte de transmitere prea mari, de obicei $i_{12} < 10$. Pentru obținerea unui raport de transmitere mai mare sau pentru transmiterea mișcării la mai multe axe, se leagă mai multe angrenaje între ele rezultând astfel un *sistem de angrenaje* (tren de angrenaje). La sistemele de angrenaje se urmărește determinarea raportului total de transmitere între prima și ultima roată din angrenaj, cunoscând numerele de dinți ale roților dințate.

Se consideră sistemul de angrenaje format din n roți dințate, din figura 8.1. Prin definiție raportul de transmitere total i_{1n} este egal cu raportul dintre viteza unghiulară a primei roți respectiv a ultimei roți din angrenaj.

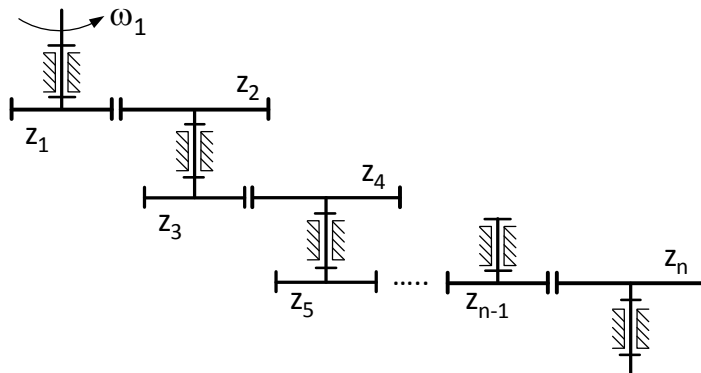


Fig. 8.1 Sistem de angrenaje ordinare

Se poate scrie:

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (8.1)$$

Între roțile dințate z_1 și z_2 , z_3 și z_4 terminând cu z_{n-1} și z_n , se pot scrie succesiv rapoartele de transmitere:

$$\begin{aligned} i_{1,2} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1} \\ i_{3,4} &= \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ i_{n-1,n} &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = -\frac{z_n}{z_{n-1}} \end{aligned} \quad (8.2)$$

în care semnul minus semnifică faptul că roțile care formează angrenaje cilindrice exterioare se rotesc în sensuri contrare.

Înmulțind rapoartele de transmitere parțiale definite în relațiile (8.2) și ținând seama de relația (8.1) rezultă:

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{1,2} \cdot i_{3,4} \cdots i_{n-1,n} = (-1)^k \frac{z_2 z_4 \cdots z_n}{z_1 z_3 \cdots z_{n-1}} \quad (8.3)$$

unde: k – reprezintă numărul de perechi de angrenaje exterioare.

La un sistem de angrenaje ordinare, raportul total de transmitere $i_{1,n}$ este egal cu produsul rapoartelor de transmitere parțiale semnul fiind dat de numărul de perechi de angrenaje exterioare.

Se consideră, de exemplu, angrenajul reprezentat în figura 8.2 la care se cunosc numerele de dinți pentru fiecare roată dințată. Raportul total de transmitere între prima și ultima roată dințată se calculează cu ajutorul relației (8.3) considerând $n = 6$. Rezultă astfel:

$$i_{1,6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_{1,2} \cdot i_{3,4} \cdot i_{5,6} = (-1)^2 \frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5} = \frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5} \quad (8.4)$$

Semnul raportului este pozitiv deoarece există 2 angrenaje exterioare, între roțile z_1 și z_2 respectiv între z_3 și z_4 . Roțile z_5 și z_6 care formează un angrenaj cilindric

interior, se rotesc în același sens prin urmare nu schimbă sensul de rotație al sistemului de angrenaje, schimbă doar valoarea raportului total de transmitere.

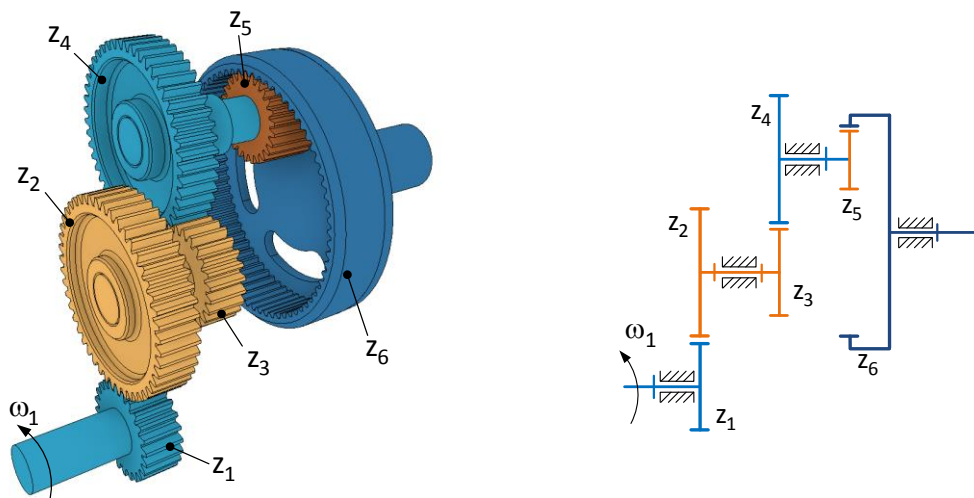


Fig. 8.2 Sistem de angrenaje

Dacă într-un sistem de angrenaje există roți ale căror numere de dinți nu influențează valoarea raportului total de transmitere, acestea se numesc *roți parazite*. De exemplu la sistemul de angrenaje din figura 8.3 roțile z_2 și z_3 sunt parazite pentru că:

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} = (-1)^3 \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3} = -\frac{z_4}{z_1} \quad (8.5)$$

În acest caz roțile intermediare fac parte în câte două angrenaje. De exemplu roata z_2 angrenează atât cu z_1 cât și cu z_3 . Roțile parazite deși nu modifică valoarea raportului total de transmitere, pot modifica semnul acestuia și distanța dintre axele primei și ultimei roți din angrenaj.

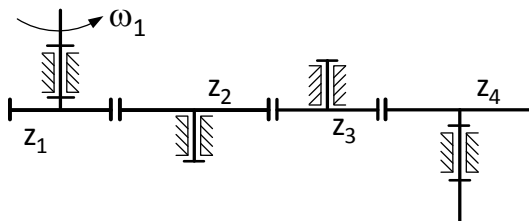


Fig. 8.3 Sistem de angrenaje în serie

În cazul sistemelor de angrenaje conice ordinare, dacă prima și ultima roată se găsesc în plane paralele, raportul total de transmitere se calculează cu relația de mai jos. În caz contrar nu se poate preciza semnul raportului de transmitere [2], [9].

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12}i_{23} \dots i_{n-1,n} = (-1)^n \frac{z_n}{z_1} \quad (8.6)$$

unde: n – reprezintă numărul de roți ale angrenajului.

Pentru sistemul de angrenaje din figura 8.4, valoarea raportului de transmitere total se calculează cu relația:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{12}i_{23}i_{34} = (-1)^4 \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_4}{z_1} \quad (8.7)$$

Se observă că roțile z_2 și z_3 nu influențează valoarea raportului total de transmitere, prin urmare sunt considerate roți parazite.

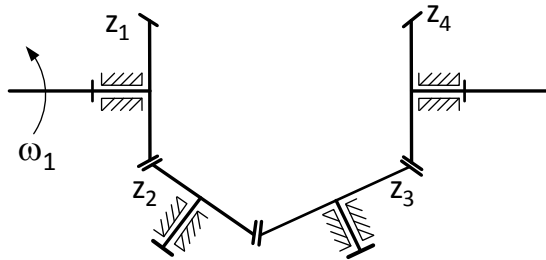


Fig. 8.4 Sistem de angrenaje conice

8.2 Sisteme de angrenaje planetare și diferențiale

Angrenajele la care cel puțin una din roțile dințate are axa de rotație mobilă în spațiu, se numesc *angrenaje planetare* dacă au gradul de mobilitate $M = 1$ sau *angrenaje diferențiale* dacă $M = 2$.

Aceste tipuri de angrenaje, ca de exemplu cel prezentat în figura 8.5, sunt formate în principal din:

- Roata centrală z_1 cu axul fix, numită *roată solară*
- Roata z_2 cu axa mobilă, numită *roată satelit*
- *Bara port-satelit* s care se rotește împreună cu roata satelit în jurul axei roții solare cu viteza unghiulară ω_s .

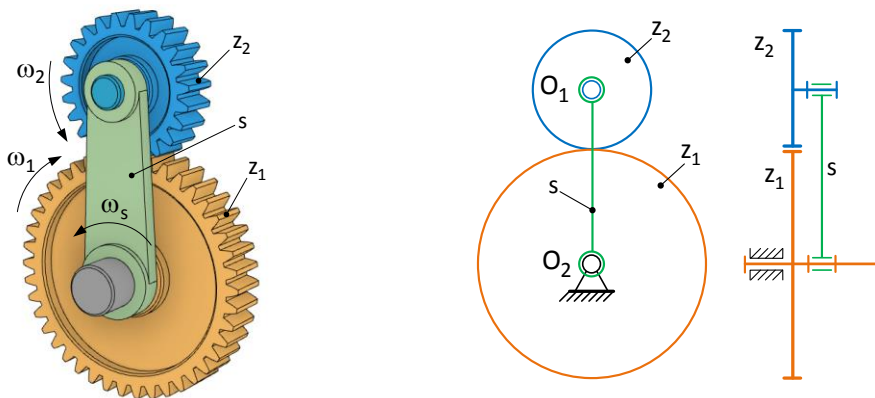


Fig. 8.4 Angrenaj diferențial

Acest angrenaj poate fi considerat un mecanism plan cu trei elemente mobile (cele două roți și bara port-satelit). Se poate aplica astfel formula pentru calculul gradului de mobilitate, corespunzătoare mecanismelor de familia 3:

$$M = 3n - 2C_5 - C_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2 \quad (8.8)$$

În acest caz angrenajul este diferențial, prin urmare trebuie să avem două elemente conducătoare, de exemplu roata solară și bara port-satelit, iar roata satelit va fi elementul condus. Pentru a determina viteza unghiulară a roții satelit z_2 se imprimă întregului angrenaj o mișcare de rotație în jurul axei roții z_1 cu viteza unghiulară $-\omega_s$. Vitezele unghiulare ale elementelor ce compun angrenajul se pot calcula cu relațiile [2], [9]:

$$\begin{aligned} \omega_1^s &= \omega_1 + (-\omega_s) \\ \omega_2^s &= \omega_2 + (-\omega_s) \\ \omega_s^s &= \omega_s + (-\omega_s) = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Prin aplicarea mișcării suplimentare cu viteza unghiulară $-\omega_s$ bara port satelit devine fixă iar angrenajul diferențial se transformă într-unul ordinar, pentru care raportul de transmitere se calculează cu relația:

$$i_{12}^s = \frac{\omega_1^s}{\omega_2^s} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (8.10)$$

sau ținând cont de relațiile (8.9):

$$i_{12}^s = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (8.11)$$

Relația (8.11) permite determinarea vitezei unghiulare ω_2 a roții port-satelit dacă sunt cunoscute numerele de dinți ale roților și vitezele unghiulare ω_1 și ω_s . Angrenajele de tipul celui din figura 8.4 sunt dificil de utilizat deoarece roata satelit realizează o mișcare plană iar culegerea acestei mișcări este posibilă doar prin introducerea unor roți suplimentare. O alternativă o constituie angrenajul planetar din figura 8.5 la care s-a adăugat încă o roată solară fixă z_3 cu dinți interiori. Roata z_2 este satelit pentru două angrenaje planetare: unul exterior în care z_1 este roata solară și unul interior la care z_3 este roata solară. În schema cinematică s-a reprezentat doar unul din cei trei sateliți.

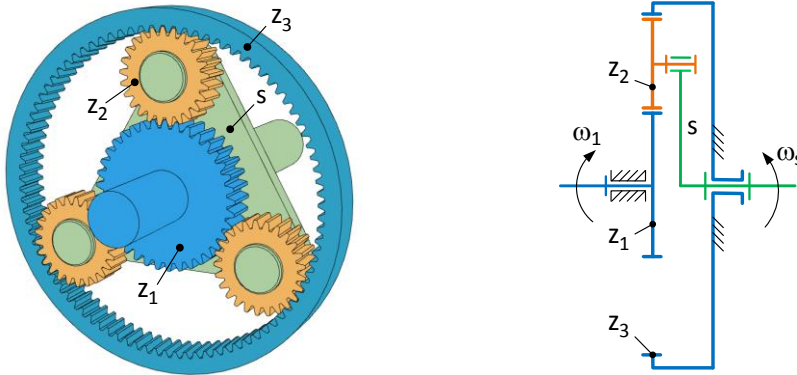


Fig. 8.5 Angrenaj planetar interior

Cunoscând numerele de dinți ale roților dințate, raportul total de transmitere se poate scrie astfel:

$$i_{13}^s = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_3 - \omega_s} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} = -\frac{z_3}{z_1} \quad (8.12)$$

Deoarece roata solară z_3 este fixă și deci $\omega_3 = 0$, din relația (8.12) se poate exprima ω_s în funcție de ω_1 după cum urmează:

$$\omega_s = \frac{\omega_1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} \quad (8.13)$$

O altă variantă o constituie angrenajul planetar din figura 8.6 la care roata z_4 este fixă. În caz contrar cele patru roți vor forma un angrenaj diferențial care are nevoie de două elemente conducătoare.

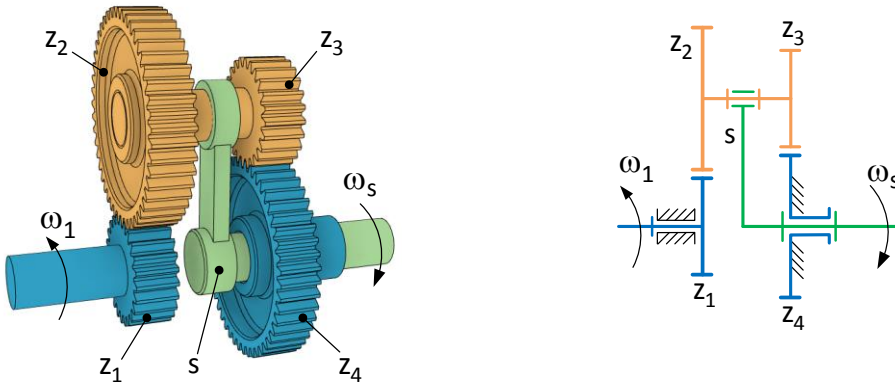


Fig. 8.6 Angrenaj planetar exterior

Se formează astfel două angrenaje planetare exterioare alcătuite din roțile solare z_1 și z_4 împreună roțile satelit z_2 și z_3 . Cunoscând numerele de dinți ale roților dințate, raportul total de transmitere are următoarea formă:

$$i_{14}^s = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_4 - \omega_s} = -\frac{z_2}{z_1} \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \quad (8.14)$$

Dacă roata z_4 este considerată fixă cu $\omega_4 = 0$, din relația (8.14) se poate exprima ω_s în funcție de ω_1 astfel:

$$\omega_s = \frac{\omega_1}{1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \quad (8.15)$$

În cazul în care se dorește obținerea unui raport mare de transmitere, se pot utiliza angrenajele diferențiale cu *lanț de închidere* cum este cel prezentat în figura 8.7. Aceste tipuri de angrenaje sunt formate dintr-un *nucleu diferențial central* format, în exemplul prezentat, din roțile $z_1 \dots z_4$ și bara port-satelit s și un sistem de angrenaje ordinar format din roțile $z_5 \dots z_8$ care constituie *lanțul de închidere*.

Pentru aceste angrenaje se pune problema determinării vitezei unghiulare ω_8 a ultimei roți cunoscând numerele de dinți ale roților și viteza unghiulară ω_1 . Se scrie pentru început raportul de transmitere pentru nucleul diferențial, sub forma:

$$i_{14}^s = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_4 - \omega_s} = -\frac{z_2}{z_1} \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = a \quad (8.16)$$

În relația (8.16) ω_s și ω_4 sunt necunoscute, prin urmare trebuie exprimate în funcție de viteza unghiulară a ultimei roți din angrenaj adică în funcție de ω_8 .

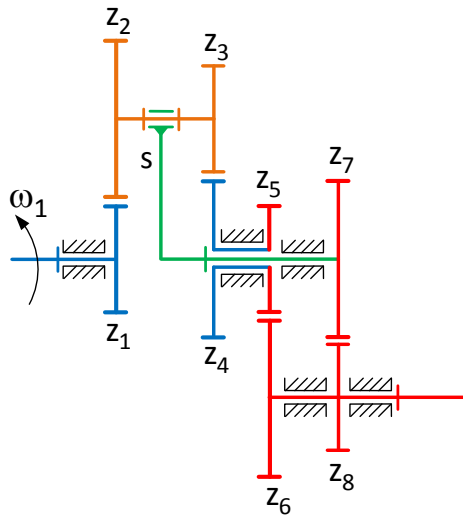


Fig. 8.7 Angrenaj planetar cu lanț de închidere

Din figura 8.7 se observă că $\omega_s = \omega_7$ deoarece bara port-satelit și roata z_7 au axa de rotație comună. Roata dințată z_7 angrenează cu roata z_8 iar raportul de transmitere va fi egal cu:

$$i_{78} = \frac{\omega_7}{\omega_8} = \frac{\omega_s}{\omega_8} = -\frac{z_8}{z_7} = -b \quad (8.17)$$

de unde:

$$\omega_s = -b\omega_8 \quad (8.18)$$

Perechile de roți dințate z_4 și z_5 respectiv z_6 și z_8 au axele de rotație comune, prin urmare $\omega_4 = \omega_5$ și $\omega_6 = \omega_8$. Între roțile z_5 și z_6 se poate scrie raportul de transmitere, astfel:

$$i_{56} = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{\omega_4}{\omega_8} = -\frac{z_6}{z_5} = -c \quad (8.19)$$

de unde:

$$\omega_4 = -c\omega_8 \quad (8.20)$$

Prin înlocuirea relațiilor (8.18) și (8.20) în relația (8.16) rezultă:

$$i_{14}^s = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_4 - \omega_s} = \frac{\omega_1 + b\omega_8}{-c\omega_8 + b\omega_8} = a \quad (8.21)$$

de unde viteza unghiulară ω_8 poate fi exprimată în funcție de ω_1 sub forma:

$$\omega_8 = \frac{\omega_1}{a(b - c) - b} \quad (8.22)$$

unde: a, b, c reprezintă constante egale cu valoarea rapoartelor de transmitere parțiale.

Angrenajele planetare și diferențiale pot conține și angrenaje formate din roți conice, cum este exemplul prezentat în figura 8.8 care stă la baza construcției diferențialului de automobil. Datorită acestui angrenaj roțile automobilelor pot avea viteze unghiulare diferite la deplasarea pe traiectoria curbe. Lanțul de închidere se realizează practic prin forțele de frecare ce apar între roțile autovehiculului și drum.

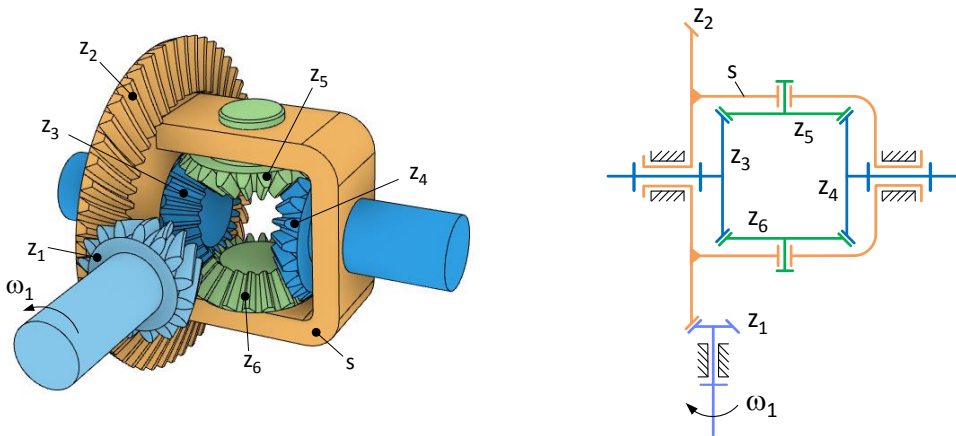


Fig. 8.8 Diferențialul de automobil

Raportul total de transmitere pentru angrenajul diferențial format din roțile solare cu același număr de dinți z_3 și z_4 și satelitul z_5 , se poate scrie astfel:

$$i_{34}^s = \frac{\omega_3 - \omega_s}{\omega_4 - \omega_s} = (-1)^3 \frac{z_5 z_4}{z_3 z_5} = -\frac{z_4}{z_3} = -1 \quad (8.23)$$

Bara port-satelit s este conectată de roata dințată z_2 care angrenează cu pinionul z_1 . Pentru acest angrenaj, raportul de transmitere are expresia:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (8.24)$$

de unde:

$$\omega_2 = \omega_s = \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (8.25)$$

Prin înlocuirea relației (8.23) în (8.21), rezultă:

$$\frac{\omega_3 - \frac{\omega_1}{i_{12}}}{\omega_4 - \frac{\omega_1}{i_{12}}} = -1 \quad (8.26)$$

sau:

$$\omega_3 + \omega_4 = 2 \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (8.27)$$

unde: ω_3 și ω_4 sunt vitezele unghiulare ale axelor de ieșire (pe care se montează roțile autovehiculului).

Analizând relația (8.27) se constată următoarele situații posibile:

1) Mersul în linie dreaptă, când coeficienții de frecare dintre roți și drum sunt aproximativ egali:

$$\omega_3 = \omega_4 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (8.28)$$

2) Viraj brusc într-o direcție sau o diferență foarte mare de coeficienți de frecare astfel încât $\omega_3 = 0$ sau $\omega_4 = 0$:

$$\omega_4 = 2 \frac{\omega_1}{i_{12}}, \quad \omega_3 = 2 \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (8.29)$$

3) Dacă $\omega_1 = 0$ adică motorul nu funcționează și ambele roți ale autovehiculului nu au contact cu drumul (este întrerupt lanțul de închidere):

$$\omega_3 = -\omega_4 \quad (8.30)$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Handra-Luca, V – *Funcții de transmitere în studiul mecanismelor*, Editura Academiei, București 1983.
- [2] Handra-Luca, V, Stoica, I.A – *Introducere în teoria mecanismelor*. vol I și II, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1983.
- [3] Lu, S., Zlatanov, D., Ding, X., Molfino, R. – *A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage*, Mechanism and Machine Theory, No.73 pp 130–153, 2014.
- [4] Manafi, N – *Bazele Mecanicii aplicate. Cinematica*. Disponibilă online la adresa: <https://cursmecanica.blogspot.com>.
- [5] Myszka, D.H – *Machines and Mechanisms. Applied Kinematic Analysis*. Prentice Hall, USA, 2012.
- [6] Norton, R.L – *Design of Machinery. An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*, McGraw-Hill Inc. 1999.
- [7] Popovici, Gh.A – *Mecanisme. Note de curs*. Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași, 2009.
- [8] Rothbart, H.A., (Ed) – *Cam Design Handbook*, McGraw-Hill, USA, 2004.
- [9] Szekely, I, Dali, A. – *Mecanisme*. Litografia UTCN 1992.
- [10] Uicker, J.J, Pennock, G.R, Shigley, J.E – *Theory of Machines and Mechanisms*, International 4th Edition, Oxford University Press, 2011.
- [11] Vinogradov, O – *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms*, CRC Press, USA, 2000.
- [12] Vișa, I., Alexandru, P., Talabă, D., Alexandru, C. – *Proiectarea funcțională a mecanismelor. Metode clasice și moderne*, Editura Lux Libris, Brașov, 2004.