UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

UTPRESS

Curs de fizică generală

Lidia POP

ISBN 978-606-737-520-6

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Lidia POP

Curs de fizică generală

UTPRESS
Cluj-Napoca, 2021
ISBN 978-606-737-520-6

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: ing. Călin Câmpean

Recenzia: Prof. dr. Eugen Culea
Şef l. dr. Maria Boşca

Ilustrații: Katalin Viski

Grafică: Mircea Meseșan

ISBN 978-606-737-520-6
Bun de tipar: 17.06.2021

Cuprins

1. Introducere în fizică

1.1 Noțiuni fundamentale ale fizicii

Fizica este știința fundamentală care studiază: cele mai simple și mai generale forme de existență (structură) a materiei, proprietățile generale (prin mărimi fizice și instrumente de măsură), legile de mișcare și transformările (fenomenele) materiei.

Fizica studiază lumea înconjurătoare pornind de la nivelul macrocosmosului până la nivelul particulelor elementare. Așadar, Universul este format din materie, care la rândul său este compusă din *substanță* (formată din particule cu masa de repaus nenulă, fiind organizată într-un mod specific) și *câmp* (formă care asigură transmiterea interacțiunilor dintre corpuri).

Materia studiată poate avea forme și mărimi diferite. În situația în care dimensiunile nu influențează comportamentul unui corp fizic, folosim noțiunea de punct material. Așadar, *punctul material* este un corp fizic de dimensiuni neglijabile a cărui masă este concentrată într-un punct numit centru de masa. Un punct material în mișcare se numește *mobil*.

Mișcarea este proprietatea fundamentală a materiei. Aceasta are loc în *spațiu* și *timp*. *Spațiul* reprezintă ”locul” în care se desfășoară fenomenele fizice, iar *timpul* este măsura duratei fenomenelor fizice. *Fenomenul fizic* reprezintă succesiunea de modificări la care este supus un corp, sau sistem de corpuri, și care evoluează în timp după o anumită lege. Toate schimbările de acest fel formează obiectul de studiu al fizicii și sunt evaluate calitativ și cantitativ prin observații.

Legile fizicii sunt legi generale care guvernează fenomenele fizice, fiind obținute în urma unor observații sau determinări experimentale.

Experimentele fizice reprezintă acțiuni și observații dirijate, efectuate în laborator, în scopul înțelegerii unor fenomene fizice și a legilor care le guvernează.

1.2 Mărimi fizice

Descrierea cantitativă a fenomenelor fizice se realizează cu ajutorul ***mărimilor fizice***, care reflectă proprietăți ale realității obiective (tot ce se poate măsura).

Mărimile fizice pot fi clasificate astfel:

A. După natura lor:

- *mărimi fizice scalare* – caracterizate numai prin valoare numerică;
- *mărimi fizice vectoriale* – caracterizate pe lângă valoare numerică și de direcție și sens;
- *mărimi fizice tensoriale* – caracterizate printr-o serie de legi de transformare, la trecerea de la un sistem de coordonate la altul.

B. După modul de măsurare:

- *mărimi fizice măsurabile* – pentru care există mijloace directe de măsurare.
- *mărimi fizice calculabile* – pentru care nu există mijloace directe de măsurare; ele se determină prin calcul, cu ajutorul formulelor și a mărimilor fizice măsurabile.

C. După modul de definire:

- *mărimi fizice fundamentale* – acestea se definesc în mod direct, independent de alte mărimi fizice (vezi tabel 1.1).
- *mărimi fizice derivate* – se definesc indirect, în funcție de mărimile

fizice fundamentale care intră în formula de definiție a acestora.

Mărimile fizice sunt însoțite de unități de măsură corespunzătoare. De-a lungul timpului au existat diferite sisteme de unități de măsură folosite mai cu seamă în știință și în inginerie. În prezent, sistemul de unități de măsură cel mai larg acceptat și folosit în majoritatea țărilor lumii este Sistemul Internațional, prescurtat SI. Unitățile de măsură ale mărimilor fizice fundamentale (tabel 1.1) se stabilesc cu ajutorul etaloanelor, care se păstrează la Biroul Internațional de Mărimi și Greutăți de la Sèvres (Franța).

În ceea ce privește multiplii și submultiplii unităților de măsură, pentru a le exprima se folosesc prefixele din tabelul 1.2.

Tabel 1.1 Mărimi fizice fundamentale și unitățile de măsură ale acestora în Sistem Internațional

Mărime fizică fundamentală	**Simbolul mărimii**	**Denumire unitate de măsură**	**Simbolul unității de măsură**
Lungime	*l*	metru	*m*
Masă	*m*	kilogram	*kg*
Timp	*t*	secundă	*s*
Temperatură	*T*	Kelvin	*K*
Intensitate curent electric	*I*	amper	*A*
Intensitate luminoasă	J	candela	*cd*
Cantitate de substanță	υ	mol	*mol*
Unități suplimentare			
Unghi plan	α	radian	*rad*
Unghi solid	Ω	steradian	*sterad*

Tabel 1.2 Submultiplii și multiplii unităților de măsură

Submultiplii			Multiplii		
Factor multiplicator	**Denumire prefix**	**Simbol prefix**	**Factor multiplicator**	**Denumire prefix**	**Simbol prefix**
10^{-1}	deci	d	10^{1}	deca	da
10^{-2}	centi	c	10^{2}	hecto	h
10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	K
10^{-6}	micro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E
10^{-21}	zepto	z	10^{21}	zetta	Z
10^{-24}	yocto	y	10^{24}	yotta	Y

Cunoașterea dimensiunii mărimilor fizice este foarte importantă, deoarece operațiile matematice pot fi realizate doar cu mărimi fizice având aceleași dimensiuni. În consecință, în orice relație din fizică, dimensiunile fizice ale oricărui termen din ambii membri trebuie să fie identice.

1.3 Mărimi vectoriale

După cum se știe, mărimile fizice sunt fie **mărimi scalare**, caracterizate doar de ***o valoare numerică*** (ex.: masa, energia, puterea, densitatea, etc.), fie **mărimi vectoriale** caracterizate, pe lângă ***valoarea numerică***, și de ***alți parametrii specifici*** (ex.: viteza, accelerația, forța, câmpul electric, câmpul magnetic, etc.)

1.3.1 Reprezentarea unui vector

Există mai multe posibilități de exprimare a unui vector:

- geometrică,
- analitică,
- matricială.

Fiecare dintre ele prezintă avantaje și limite, de aceea reprezentările sunt alese și folosite în funcție de problema care se dorește a fi rezolvată.

Reprezentarea geometrică

Un vector se reprezintă cu ajutorul unui segment de dreaptă orientat, conform fig. 1.1.

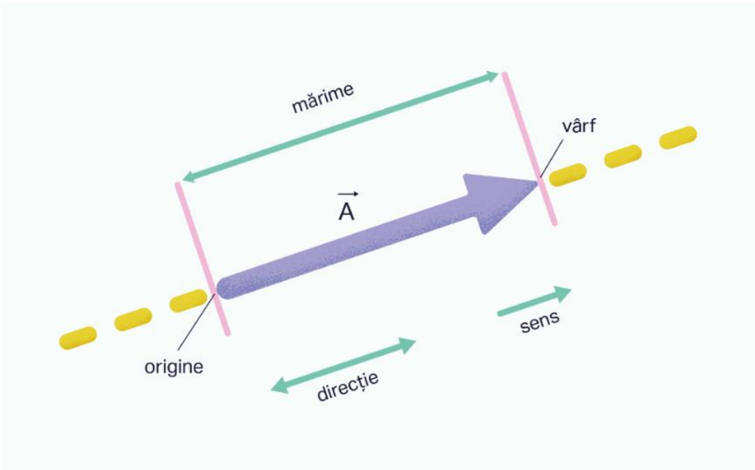


Fig. 1.1 Reprezentarea geometrică a unui vector

Așadar, ***vectorul*** este caracterizat de următoarele mărimi:

- **origine**– punct de aplicație (de pornire)
- **direcție** – dreapta suport pe care este așezat
- **sens** – indică încotro se îndreaptă
- **modul** (mărime) – valoare numerică

Modulul sau **mărimea** vectorului este proporțională cu lungimea segmentului orientat. Modulul vectorului $\vec{A}$ se notează $|\vec{A}|$ sau A.

Reprezentarea analitică

În reprezentarea analitică, un vector se exprimă prin proiecțiile sale pe un sistem de axe ortogonale, conform fig. 1.2. Pentru a ușura calculul componentelor unui vector, acesta se reprezintă cu ajutorul ***versorilor***. ***Versorii*** sunt vectori unitari a căror orientare coincide cu orientarea axei aleasă ca direcție de proiectare a vectorului. Astfel:

- Pentru axa *Ox* – versorul este notat cu $\vec{\imath}$
- Pentru axa *Oy* – versorul este notat cu $\vec{\jmath}$
- Pentru axa *Oz* – versorul este notat cu $\vec{k}$

Versorii amintiți au următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} &|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1 \\ &\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{\imath} = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

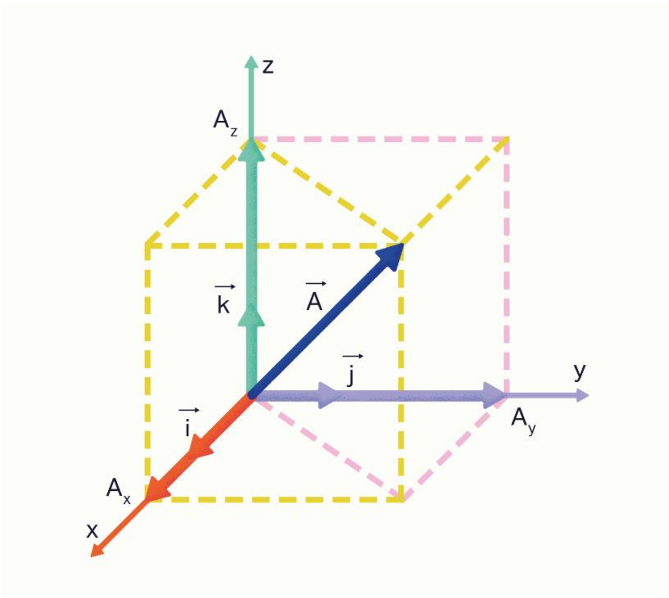


Fig. 1.2 Reprezentarea unui vector în coordonate carteziene

Într-un sistem de coordonate carteziene *Oxyz,* vectorul $\vec{A}$, având proiecțiile pe axe A_x, A_y și A_z, are expresia:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{1.2}$$

Mărimea vectorului se află din teorema lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.3}$$

Versorul vectorului $\vec{A}$ este dat de relația:

$$\vec{V}_A = \frac{\vec{A}}{A} \tag{1.4}$$

Unghiurile pe care le face vectorul $\vec{A}$ cu axele sistemului poartă numele de **cosinuși directori**:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{A},\vec{i}) &= \frac{A_x}{A} \\ \cos(\vec{A},\vec{j}) &= \frac{A_y}{A} \\ \cos(\vec{A},\vec{k}) &= \frac{A_z}{A} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Reprezentarea matricială

Orice vector poate fi exprimat ca o matrice cu o singură linie sau cu o singură coloană, fiecare element al acesteia reprezentând componenta (proiecția vectorului) pe o anumită direcție. De exemplu, vectorul reprezentat analitic prin relația (1.2), este reprezentat matricial astfel:

$$\vec{A} = (A_x \quad A_y \quad A_z)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.3.2 Operații cu vectori

A. Adunarea vectorilor

Fie $\vec{A}$ *și* $\vec{B}$ doi vectori oarecare pe care vrem să îi adunăm. Mărimea vectorului rezultant (fig. 1.3) se poate determina prin următoarele metode:

- *regula paralelogramului* – vectorul rezultant este diagonala mare a paralelogramului construit de cei doi vectori concurenți $\vec{A}$ *și* $\vec{B}$;
- *regula triunghiului (poligonului)* – vectorul rezultant a doi (sau mai mulți) vectori se află trasând segmentul ce închide conturul poligonal construit din vectorii așezați vârf-origine. Astfel, originea vectorului rezultant se află în originea primului vector, iar vârful – în vârful ultimului vector al sumei.

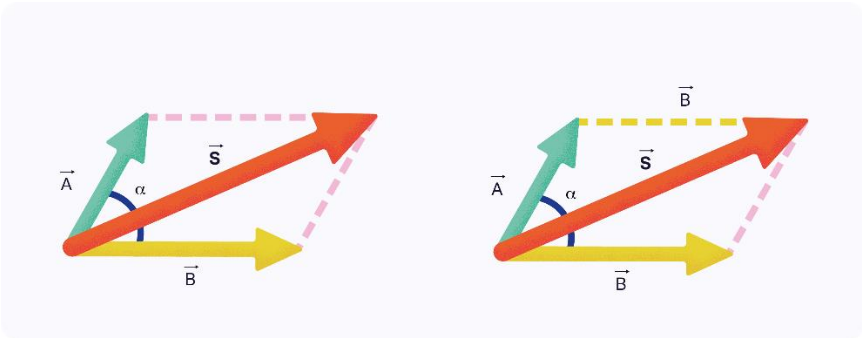


Fig. 1.3 Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului, respectiv regula triunghiului

Modulul rezultantei celor doi vectori se calculează cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizate:

$$S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos \propto} \qquad (1.7)$$

În cazul adunării a n vectori a căror proiecții pe axele sistemului de coordonate carteziene sunt S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} , modulul vectorului rezultant este dat de relația:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \tag{1.8}$$

unde:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}\,, S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}\,, S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz} \tag{1.9}$$

B. Scăderea vectorilor

Operația de *scădere* a doi vectori se definește ca adunarea dintre un vector, $\vec{A}$, cu vectorul opus, $-\vec{B}$. Rezultanta este de forma:

$$\vec{D} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + \left(-\vec{A}\right) \tag{1.10}$$

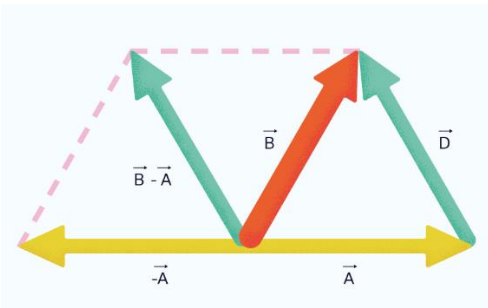


Fig. 1.4 Determinarea vectorului diferență $\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$

C. Produsul a doi vectori

În funcție de contextul problemei definim două moduri de înmulțire a vectorilor. Astfel, rezultatul înmulțirii poate fi o mărime scalară sau una vectorială.

- **Scalar** – prin operația:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{cases} |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|\, cos\alpha = A\, B\, cos\alpha \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{cases} \tag{1.11}$$

unde α este unghiul dintre vectorii $\vec{A}$ și $\vec{B}$, iar $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ sunt componentele celor doi vectori.

În urma operației produs scalar a doi vectori se obține un scalar.

➢ **Vectorial** – este mărimea vectorială dată de:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

Dacă se cunoaște unghiul format de cei doi vectori, atunci modulul vectorului obținut prin produsul vectorial este de forma:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A\ B\ sin \propto \tag{1.13}$$

unde α este unghiul dintre vectorii $\vec{A}$ și $\vec{B}$.

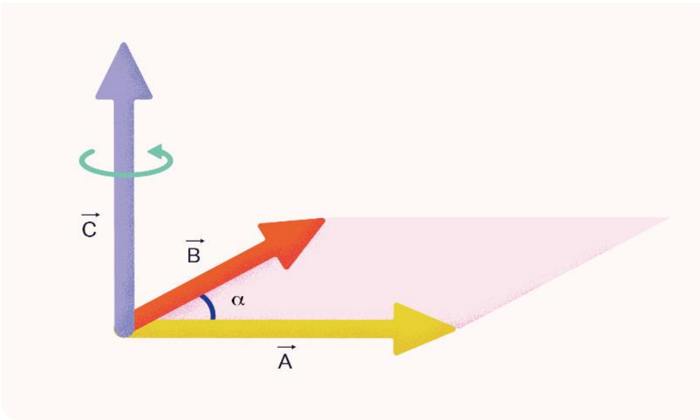


Fig. 1.5 Produsul vectorial a doi vectori

Direcția vectorului rezultant este perpendiculară pe planul format de cei doi vectori. Sensul este dat de regula burghiului (șurubului) sau mâinii drepte.

Din fig. 1.5 se observă faptul că *modulul vectorului rezultant reprezintă aria paralelogramului construit de cei doi vectori.*

➢ **Mixt** – include ambele tipuri de înmulțiri a vectorilor.

Rezultatul produsului scalar dintre vectorii $\vec{C}$ și produsul vectorial al altor doi vectori $\vec{A}$ și $\vec{B}$ este un scalar D.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = D \tag{1.14}$$

unde:

$$D = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.15)$$

Știind că interpretarea geometrică a:

- produsului scalar a doi vectori, $\vec{A} \cdot \vec{B}$, constă în proiecția vectorului $\vec{A}$ pe dreapta suport a lui $\vec{B}$,
- produsului vectorial a doi vectori, $\vec{A} \times \vec{B}$, reprezintă ***aria paralelogramului*** construit de cei doi vectori,

rezultă că *mărimea vectorului D este egală cu* ***volumul paralelipipedului*** ($aria\ bazei \times înălțimea$*) descris de cei trei vectori* (necoplanari).

1.4 Operatori vectoriali diferențiali

Operatorii vectoriali diferențiali permit exprimarea locală a legilor fizicii. Aceștia sunt exprimați cu ajutorul operatorului diferențial ***nabla***, care în coordonate carteziene este de forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.16)$$

Operatorul ***laplacean*** sau ***Laplace*** se obține din înmulțirea scalară a vectorilor nabla, astfel:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.18)$$

Funcție de modul în care ∇ se aplică unei mărimi fizice – scalară sau vectorială – se definesc trei operatori vectoriali distincți:

Operatorul gradient

Operatorul gradient se obține prin aplicarea operatorului ∇ unei funcții scalare γ(x,y,z), rezulatul fiind o mărime vectorială:

$$\nabla\gamma = grad\ \gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.19)$$

Se observă că mărimea gradientului este:

$$grad\ \gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2} \qquad (1.20)$$

Vectorul gradient este îndreptat pe direcția pe care se produce cea mai rapidă variație a lui γ. Prin convenție, se consideră că sensul vectorului $\nabla\gamma$ este acela în care γ este crescător. Principalele proprietăți ale gradientului sunt:

1. este o funcție vectorială definită într-un punct (funcție de punct);
2. indică direcția și sensul celei mai rapide creșteri în spațiu a funcției scalare;
3. are semnificația derivatei după acea direcție în care funcția scalară crește cel mai rapid;
4. este orientat perpendicular pe suprafețele echipotențiale $\gamma =$ const., oricare ar fi mărimea fizică γ, căreia i se aplică

Existența gradientului unei mărimi fizice scalare, undeva în spațiu, determină un fenomen de transport. Spre exemplu:

- un gradient al *temperaturii* determină un transport de căldura, din regiunea cu temperatura ridicată în regiunea cu temperatura scăzută;

- un gradient al *concentrației* determină un transport de substanță: moleculele de parfum dintr-o sticlă de parfum deschisă se vor deplasa dinspre zona cu concentrație mare spre aceea cu concentrație scăzută de molecule de parfum;

- un gradient al *energiei potențiale* generează o forță care acționează asupra corpului plasat în câmpul de forțe, fiind orientată dinspre un punct de energie maximă înspre unul cu energie minimă.

Operatorul divergență

Operatorul divergență constă din aplicarea operatorului ∇ asupra funcțiilor vectoriale prin operația de înmulțire scalară. Fie funcția vectorială definită prin relația:

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \tag{1.21}$$

expresia divergenței este:

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right)$$

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.22}$$

Dacă divergență unei mărimi fizice este diferită de zero, liniile de câmp ale acelei mărimi fizice sunt dispersive, adică se împrăștie, iar dacă este egală cu zero, liniile de câmp vor fi rotaţionale, adică vor fi curbe închise.

Operatorul rotor

Operatorul rotor constă din aplicarea operatorului ∇ asupra funcțiilor vectoriale prin operația de produs vectorial. Considerând funcția vectorială $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z\,)$ se obține:

$$\nabla \times \vec{A} = rot\,\vec{A}$$

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right)$$

$$\nabla \times \vec{A} = rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.24)$$

Dacă rotorul unei mărimi fizice este diferit de zero, liniile de câmp ale acelei mărimi fizice sunt rotaţionale (vor fi curbe închise), iar dacă este egal cu zero, liniile de câmp se împrăștie (sunt divergente).

Utilizarea operatorilor divergență și rotor este importantă în teoria câmpurilor (electrice, magnetice, gravitaționale).

2. Elemente de mecanică clasică

Cea mai veche dintre capitolele fizicii este ***mecanica***. *Mecanica* se ocupă cu studiul mișcării corpurilor și cu stabilirea condițiilor în care corpurile se află în echilibru. Mecanica clasică studiază mișcarea corpurilor cu viteze mai mici decât viteza luminii în vid.

În acest capitol ne vom ocupa mai întâi de descrierea mișcării fără a ține cont de cauzele care o determină, iar mai apoi studiem mișcarea ca efect al acțiunii unor forțe.

2.1 Cinematica punctului material

Cinematica se ocupă cu studiul modului în care se efectuează mișcarea, fără a cerceta cauzele apariției acesteia. Astfel, pentru a descrie mișcarea punctului material trebuie stabilite formulele matematice care exprimă poziția, viteza și accelerația în orice moment de timp.

Atunci când mișcarea unui obiect nu este influențată de forma și dimensiunile sale, el este reprezentat cu ajutorul unui ***punct material*** (un punct geometric care are masa obiectului studiat).

Traiectoria punctului material este drumul pe care se deplasează punctul material (mobilul) în decursul mișcării sale reprezentând deci locul geometric al punctelor prin care trece acesta. Traiectoria este descrisă cu ajutorul ***ecuațiilor de mișcare***. Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie (în particular, circulară).

2.1.1 Elementele mișcării rectilinii

Vectorul de poziție

Considerăm un punct material, aflat în mișcare, pe o traiectorie din spațiu (vezi fig. 2.1). Poziția punctului material la un moment dat, t, este determinată de coordonatele sale (x, y, z - într-un sistem de coordonate ortogonal) sau de ***vectorul de poziție*** (vectorul care unește originea sistemului de coordonate cu poziția punctului material pe traiectorie):

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad (2.1)$$

Între modulul vectorului de poziție și coordonatele punctului din spațiu în care se află corpul se stabilește relația:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2.2)$$

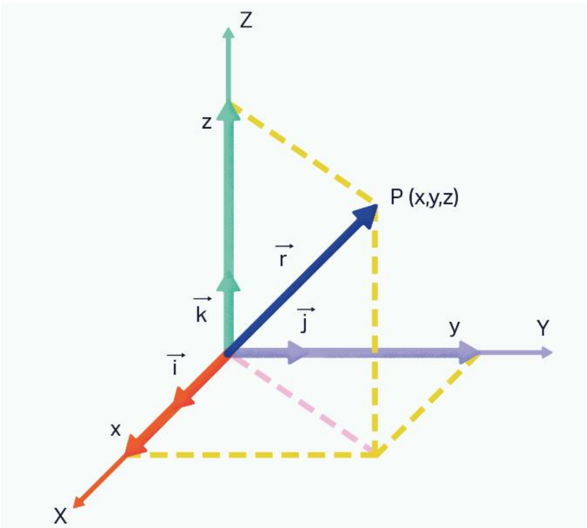


Fig. 2.1 Vectorul de poziție al punctului material

Vectorul viteză

Presupunem că un punct material P se mișcă pe o traiectorie oarecare (C). Fie P_1 și P_2 două poziții succesive, ocupate de mobil la momentele t_1 și

t_2, având vectorii de poziție $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$. Schimbarea poziției punctului material în decursul mişcării este dată de ***vectorul deplasare***:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.3)$$

corespunzător intervalului de timp $\Delta t = t_2 - t_1$.

Astfel, definim vectorul ***viteză medie*** a punctului material pe porțiunea P_1P_2 ca fiind rata de modificare în timp a poziției punctului material:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (2.4)$$

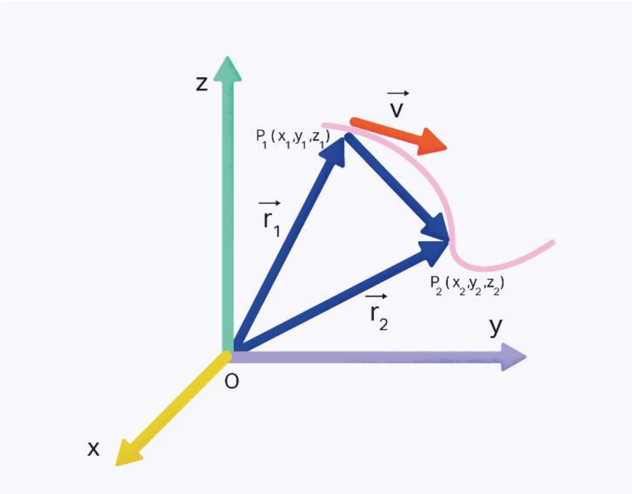


Fig. 2.2 Deplasarea punctului material pe traiectorie

Dacă intervalul de timp pentru care studiem deplasarea punctului material este forte mic, adică $\Delta t \to 0$ ($t_2 \to t_1$ și $P_2 \to P_1$) atunci ***viteza instantanee*** *(momentană*) a punctului material se definește:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2.5)$$

Așa cum se vede din figura 2.2 vectorul viteză $\vec{v}$ este tangent la traiectoria punctului material.

Dacă mișcarea este raportată la un sistem cartezian atunci:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \tag{2.6}$$

unde:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.7}$$

Modulul vectorului viteză este dat de relația:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.8}$$

În Sistem Internațional unitatea de măsură pentru viteză este:

$$[v]_{SI} = m/s$$

Vectorul accelerație

Dacă vectorul viteză al punctului material variază în timp, se definește vectorul ***accelerație* instantanee (***momentană***)**:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \tag{2.9}$$

În funcție de componentele pe axe avem:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \tag{2.10}$$

unde:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2};\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{2.11}$$

Modulul vectorului accelerație este dat de relația:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.12}$$

În Sistem Internațional unitatea de măsură pentru accelerație este:

$$[a]_{SI} = m/s^2$$

Se constată că vectorul accelerație este dat de variația vectorului viteză în timp. Așadar, avem accelerație atunci când avem o variație a vectorului viteză, prin aceasta înțelegând fie variația direcției, fie variația modulului sau ambele.

Observații!

Dacă se cunoaște vectorul de poziție al unui punct material prin derivări succesive se poate afla vectorul accelerație.

Dacă se cunoaște vectorul accelerație al unui punct material prin integrări succesive se poate afla vectorul de poziție.

$$\begin{aligned} &\vec{r} \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v} \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a} \\ &\vec{a} \xRightarrow{\int dt} \vec{v} \xRightarrow{\int dt} \vec{r} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Aplicații!

Mișcare rectilinie uniformă

Mișcarea rectilinie uniformă este mișcarea în care vectorul viteză este constant în timp (traiectoria este dreaptă, iar modulul vitezei este constant).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \tag{2.14}$$

integrăm:

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dt \tag{2.15}$$

Ținând seama de faptul că în cazul mișcării rectilinii uniforme vectorul viteză este constant din relația de mai sus obținem ***legea mișcării rectilinii uniforme*** sub formă vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + v(t - t_0) \tag{2.16}$$

Proiectând această ecuație pe axa *Ox*, rezultă:

$$x = x_0 + v(t - t_0) \tag{2.17}$$

Mișcare rectilinie uniform variată

Mișcarea rectilinie uniform variată este mișcarea în care vectorul accelerație este constant în timp $\vec{a} = const.$ (traiectoria este o dreaptă)

Dacă $\boldsymbol{a} > 0$ avem de-a face cu o mişcare ***rectilinie uniform accelerată***, iar dacă $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ mişcarea este ***rectilinie uniform încetinită***.

Mișcarea fiind rectilinie pentru studiul mișcării este suficient să ne alegem o singură axă (*Ox*) care să coincidă cu direcția și sensul de mișcare.

Astfel, pornind de la relația:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \tag{2.18}$$

prin integrare se obține:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \tag{2.19}$$

Ținând cont că în cazul mișcării rectilinii uniforme $\vec{a} = const.$ din relația de mai sus obținem ***legea vitezei***:

$$v = v_0 + a(t - t_0) \tag{2.20}$$

Pentru a găsi legea mișcării rectilinii uniform variate pornim de la legea vitezei pe care o integrăm în ambii membri:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt \tag{2.21}$$

iar, pentru $t_0 = 0$, rezultă ***legea mișcării rectilinii uniforme***:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{2.22}$$

Știind că $s = x - x_0$ este spațiul parcurs de mobil în timpul *t*, rezultă:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{2.23}$$

Dacă din ecuațiile (2.20) și (2.22) eliminăm timpul obținem viteza mobilului funcție de coordonata lui pe traiectorie, adică *formula lui Galilei*:

$$v^2 = v_0^2 \pm 2a(x - x_0) \tag{2.24}$$

2.1.2 Elementele mișcării curbilinii

Așa cum am menționat deja, vectorul viteză $\vec{v}$ este tangent la traiectoria punctului material. Astfel, fiecare punct material de pe un disc care se rotește are o accelerație (fig. 2.3). Vectorul accelerație, $\vec{a}$, va avea aceeași direcție cu $\Delta\vec{v}$. Dacă viteza punctului material variază atât în modul cât și în direcție, accelerația se descompune în:

- *Accelerația liniară – tangențială – ($\vec{a}_{tan} \parallel \vec{v}$)* care este o măsură a variației în modul a vitezei punctului material.
- *Accelerația normală ($\vec{a}_n \perp \vec{v}$)* care este o măsură a variației orientării punctului material.

Accelerația medie este dată de relația:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_n \qquad (2.25)$$

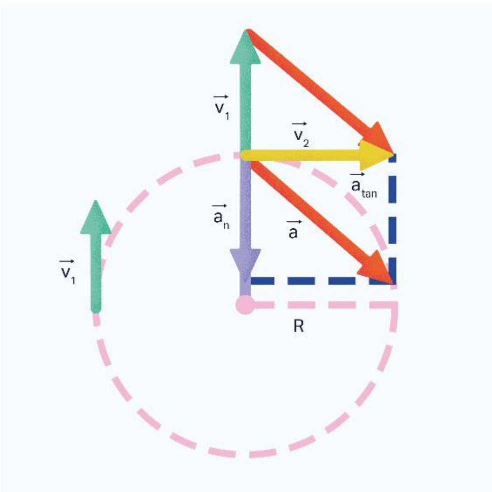


Fig. 2.3 Mișcarea pe o traiectorie curbilinie

Accelerația tangențială

- ***În mișcarea circulară uniformă*** $\Rightarrow$ viteza punctului material este constantă ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$), adică accelerația tangențială este zero ($\vec{a}_{tan} = 0$)

- ***În mișcarea circulară neuniformă*** $\Rightarrow$ viteza punctului material variază ($|\vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2|$), adică accelerația tangențială este diferită de zero ($\vec{a}_{tan} \neq 0$). Dacă:

  $\vec{a}_{tan} > 0$ punctul material accelerează

  $\vec{a}_{tan} < 0$ punctul material încetinește (frânează)

Accelerația normală

Accelerația normală (centripetă) este întotdeauna orientată spre centrul traiectoriei de rază R și are modulul:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \tag{2.26}$$

Mărimi caracteristice mișcării curbilinii

În cele ce urmează vom defini cele mai importante mărimi cinematice ale mișcării curbilinii (circulare): deplasarea unghiulară ($\Delta\theta$), vectorul viteză unghiulară ($\vec{\omega}$) și vectorul accelerație unghiulară ($\vec{\varepsilon}$).

Deplasarea unghiulară

Considerăm un disc care se rotește în jurul axei sale de simetrie (perpendiculară pe suprafața sa). Un punct material de pe disc, aflat la distanța R de centrul discului se deplasează în timp față de poziția sa inițială (fig. 2.4).

Legea de mișcare în acest caz este dată de dependența de timp a deplasării unghiulare ($\Delta\theta$).

Dacă Δs reprezintă spațiul parcurs de punctul material în mișcarea sa, iar R este raza cercului pe care acesta se mișcă, atunci deplasarea unghiulară este dată de relația:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \tag{2.27}$$

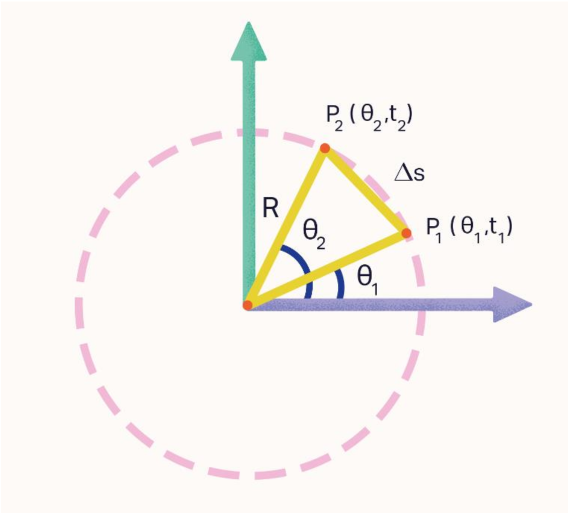


Fig. 2.4 Coordonatele mișcării circulare

Unitatea de măsură a deplasării unghiulare este radianul, care reprezintă unghiul la centru subîntins de un arc de cerc egal cu raza.

Vectorul viteză unghiulară

Viteza unghiulară reprezintă unghiul măturat de raza vectoare în unitatea de timp:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\vec{\theta}} \tag{2.28}$$

Viteza unghiulară este o mărime fizică vectorială, iar unitatea de măsură în Sistem Internațional este:

$$[\omega]_{SI} = rad/s$$

Relația dintre viteza unghiulară și viteza tangențială este:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta \cdot R)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R \cdot \omega \tag{2.29}$$

Adică:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{2.30}$$

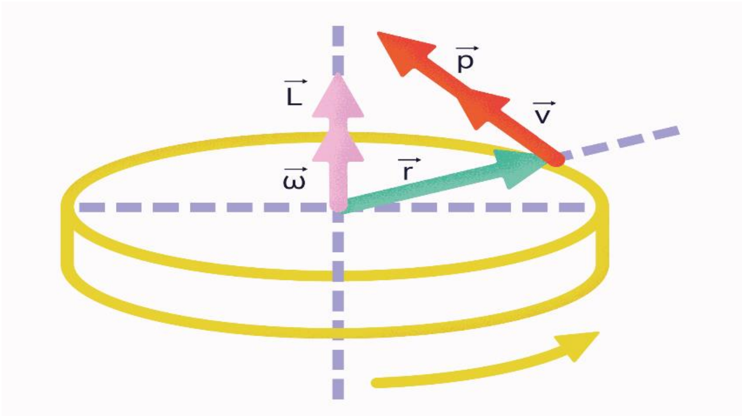


Fig. 2.5 Orientarea vectorilor în mișcarea circulară

Din punct de vedere vectorial (fig. 2.5) $\vec{\omega}$ este orientat perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{R}$ și $\vec{v}$, iar sensul este dat de sensul de orientare al unui burghiu drept care este rotit în sensul în care se rotește pe cerc punctul material studiat.

Relația dintre viteza unghiulară și accelerația normală sau *accelerația centripetă*:

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \qquad (2.31)$$

Vectorul accelerație unghiulară

Accelerația unghiulară este mărimea fizică vectorială definită de variația vitezei unghiulare, a unui punct material, într-un interval de timp infinitezimal. Astfel, *accelerația unghiulară instantanee* este:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \qquad (2.32)$$

Relația dintre accelerația tangențială și accelerația unghiulară:

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot R \qquad (2.33)$$

Adică:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} \qquad (2.34)$$

Perioada mișcării circulare notată cu *T* este timpul în care mobilul efectuează o rotație completă:

$$T = \frac{t}{n} \qquad (2.35)$$

unde: *n* reprezintă numărul de rotații complete, iar *t* reprezintă timpul în care s-au efectuat rotațiile.

Frecvența mișcării circulare reprezintă numărul de rotaţii complete efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{n}{t} \qquad (2.36)$$

În Sistem Internațional unitatea de măsură pentru perioadă respectiv frecvență este:

$$[T]_{SI} = s$$

$$[\nu]_{SI} = s^{-1} = Hz$$

Astfel:

$$\nu \cdot T = 1 \qquad (2.37)$$

Legătura dintre mărimile amintite este dată de viteza unghiulară (numită și pulsație):

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad (2.38)$$

Mișcare curbilinie uniformă

Mișcarea curbilinie uniformă este un caz particular al mișcării în care traiectoria este un cerc, iar modulul vitezei este constant în timp.

Legea mișcării curbilinii uniforme se obține integrând relația (2.28) și ținând cont de faptul că $\omega = const.$:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \qquad (2.39)$$

Mișcare curbilinie uniform variată

Mișcarea circulară în care viteza unghiulară a punctului material variază în timp se numește *mișcare curbilinie variată* sau *neuniformă*.

Ecuația vitezei unghiulare în mișcarea uniform variată se obține prin integrarea relației (2.33):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon(t - t_0) \qquad (2.40)$$

Legea de mișcare curbilinie uniform variată se obține din relațiile (2.32) și (2.40), unde ($t_0 = 0$):

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad (2.41)$$

Având în vedere cele discutate până acum se poate observa o analogie între mișcarea circulară (curbilinie) și mișcarea rectilinie, mai exact între mărimile unghiulare și cele liniare.

Astfel, eliminând timpul din relațiile (2.40) și (2.41) putem obține o relație ce leagă unghiul de rotație, viteza unghiulară și accelerația unghiulară:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\varepsilon(\theta - \theta_0) \qquad (2.42)$$

acesta, fiind echivalentul pentru mișcarea de rotație a formulei lui Galilei.

2.2 Dinamica punctului material

Dinamica este partea mecanicii care studiază *cauzele mișcării punctului material*, care sunt *forțele* ce acționează pe acesta. Dinamica se bazează pe principiul cauză-efect, adică studiază relația dintre forța care acționează asupra punctului material și mișcarea acestuia.

Forța reprezintă mărimea fizică vectorială care caracterizează interacțiunea dintre corpuri.

2.2.1 Principiile mecanicii clasice

Dinamica newtoniană se fundamentează pe câteva principii, care constituie adevăruri ce nu trebuie demonstrate, ci sunt verificate prin consecințe. Acestea au fost formulate de Isaac Newton și Galileo Galilei și sunt valabile doar pentru mișcări care se desfășoară cu viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid.

Principiul I (principiul inerției)

Un corp își păstrează starea de mișcare rectilinie și uniformă sau de repaus relativ atât timp cât asupra sa nu acționează nici o forță care să-i schimbe această stare.

Toate sistemele de referință ce se mișcă rectiliniu și uniform se numesc *sisteme de referință inerțiale*. În aceste sisteme de referință este valabil principiul inerției.

Inerția este proprietatea corpurilor de a se opune schimbării stării de repaus sau mișcare. Mișcarea unui corp asupra căruia acționează mai multe forțe a căror rezultantă este nulă sau asupra căruia nu acționează nici o forță se numește *mișcare inerțială*.

Masa este o măsură a inerției. Astfel, pentru un obiect mare este nevoie de o inerție pe măsură.

Principiul II (principiul fundamental)

Forța care acționează asupra unui corp îi imprimă acestuia o accelerație direct proporțională cu forța și invers proporțională cu masa acestuia:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.43)$$

Forța ce acționează asupra unui corp este:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \qquad (2.44)$$

În Sistem Internațional, unitatea de măsură pentru forță este Newtonul:

$$[F]_{SI} = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

Așadar, forța este o mărime vectorială care măsoară interacțiunea dintre corpuri, cauză a modificării stării de mișcare al acestora sau a deformării lor.

Observații!

- În mecanica clasică, masa corpurilor este constantă indiferent de mărimea forței.
- Dacă asupra corpului acționează mai multe forțe, atunci:

  $$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \qquad (2.45)$$

- Dacă mișcarea corpului se studiază în sistem cartezian:

  $$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \qquad (2.46)$$

unde:

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot a_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= m \cdot a_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= m \cdot a_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \qquad (2.47)$$

Relațiile anterioare reprezintă *principiul fundamental scris sub forma ecuațiilor diferențiale*.

Principiul III (principiul acțiunii și reacțiunii)

Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță numită acțiune atunci cel de-al doilea corp acționează asupra primului cu o forță egală în modul dar de sens contrar numită reacțiune.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{2.48}$$

Cu alte cuvinte, acțiunile corpurilor unele asupra altora sunt reciproce.

Principiul independenței acțiunii forțelor (superpoziției)

Fiecare dintre forțele la care este supus un corp acționează independent de celelalte forțe aplicate imprimând corpului propria sa accelerație.

Din acest principiu rezultă posibilitatea înlocuirii mai multor forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \dots \dots$, care acționează asupra unui corp, cu *rezultanta lor* $\vec{R}$, egală cu suma vectorială a forțelor:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{2.49}$$

Principiul relativității clasice (Galilei)

Starea de mișcare sau de repaus a unui corp sunt relative, depinzând de starea sistemului de referință considerat.

Spre exemplu, considerăm un călător așezat într-un vagon de tren, ce se deplasează rectiliniu şi uniform. Călătorul se poate găsi într-unul din următoarele cazuri:

(i) repaus, în raport cu sistemul de referință legat de tren,

(ii) mișcare rectilinie uniformă cu o viteză egală cu viteza trenului față de un sistem de referință legat de Pământ,

(iii) mişcare accelerată, în raport cu un sistem de referință legat de Soare, deoarece Pământul este în mişcare accelerată față de Soare.

2.2.2 Tipuri de forțe care influențează mişcarea

La începutul acestui subcapitol am menționat faptul că forța produce diverse efecte atunci când acționează asupra unui punct material. În cele ce urmează vom discuta despre tipuri de forțe care influențează mişcarea, în mod natural, anume: forța gravitațională, forța de frecare, forța de rezistență și forța elastică.

Forța gravitațională

Pentru a putea scrie formula de calcul a forței gravitaționale trebuie să enunțăm, mai întâi, legea atracției universale formulată de Isaac Newton în 1696, anume:

Oricare două corpuri punctiforme de masă m_1 și respectiv m_2 sunt atrase reciproc cu o forță direct proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței (r) dintre ele:

$$F = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{2.50}$$

unde: $k = 6.672 \cdot 10^{-11}\, N \cdot m^2/kg^2$ este constanta atracției universale.

Forța gravitațională se definește ca fiind forța cu care un corp este atras de pământ, adică:

$$G = k\frac{m \cdot M_P}{(R_P + h)^2} \tag{2.51}$$

unde: m este masa corpului care se află la altitudinea h față de Pământ, care are masa $M_P = 5.96 \cdot 10^{24} kg$ și raza $R_P = 6370\ km$.

Cazuri:

1. Dacă corpul se află în apropierea pământului ($h = 0$), atunci:

$$G = k\frac{m \cdot M_P}{{R_P}^2} = m \cdot g_0 \qquad (2.52)$$

unde: $g_0 = k\frac{M_P}{{R_P}^2} \cong 9.807\, m/s^2$ se numește accelerație gravitațională.

2. Dacă corpul este la o depărtare considerabilă de pământ:

$$G = k\frac{m \cdot M_P}{(R_P+h)^2} = m \cdot g \qquad (2.53)$$

Știind că:

$$\begin{aligned} g_0 &= k\frac{M_P}{{R_P}^2} \\ g &= k\frac{M_P}{(R_P+h)^2} \end{aligned} \qquad (2.54)$$

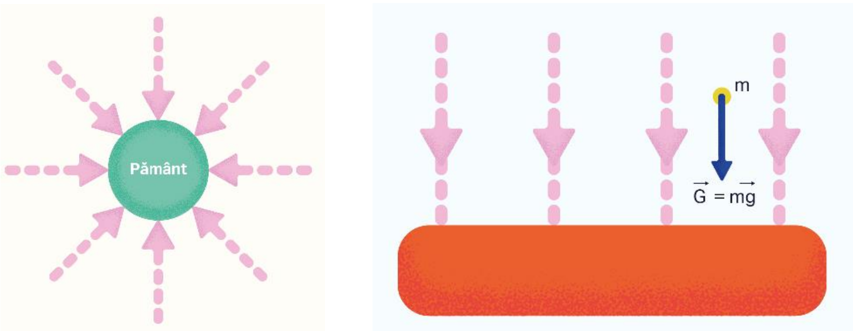
rezultă:

$$g = g_0 \left(\frac{R_P}{R_P+h}\right)^2 \qquad (2.55)$$

Adică, accelerația gravitațională scade cu creșterea altitudinii.

Forța de greutate (gravitațională) este îndreptată întotdeauna în jos (fig. 2.6) și se definește astfel:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} \qquad (2.56)$$



(a) (b)

Fig. 2.6 Reprezentarea liniilor de câmp gravitațional (a) în jurul Pământului, respectiv (b) în apropierea Pământului

Forța gravitațională se manifestă prin intermediul *câmpului gravitațional*. Acesta este o formă de existență a materiei ce se manifestă prin faptul că orice obiect introdus în câmp va suporta acțiunea unei forțe (de atracție sau respingere) din partea câmpului. Câmpul gravitațional (fig.2.6) este un câmp vectorial și este reprezentat prin *linii de câmp* (curbe geometrice la care vectorii intensitate sunt tangenți în orice punct). Acesta este și un câmp staționar, deoarece intensitatea câmpului este constantă în timp.

Forța de frecare și forța de rezistență

Aceste două tipuri de forțe se aseamănă între ele prin faptul că se opun înaintării corpurilor. Anume:

- forța de frecare apare la contactul dintre două solide
- forța de rezistență apare la contactul dintre solid și fluid (lichid sau gaz)

Astfel, ambele forțe ”frânează” corpurile aflate în mișcare.

Forța de frecare se opune mișcării relative a două corpuri solide aflate în contact, indiferent de mărimea suprafeței contactului dintre corpuri. *Forța de frecare* (fig. 2.7) poate fi:

- ***statică*** - corpurile sunt în repaus relativ,
- ***cinematică*** - corpurile sunt în mișcare unul față de altul.

Forța de frecare ($\vec{F}_f$) este orientată în sens invers mișcării, iar mărimea ei este direct proporțională cu normala ($\vec{N}$) la suprafață și depinde de natura suprafețelor aflate în contact prin constanta de material numită coeficient de frecare (μ):

$$\vec{F}_f = \mu \cdot \vec{N} \tag{2.57}$$

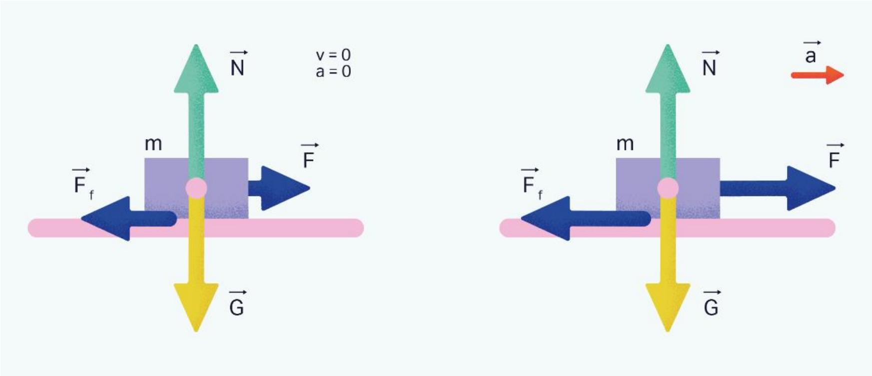


Fig. 2.7 Reprezentarea forței de frecare statică și cinematică

Coeficientul de frecare static este, de obicei, mai mare decât coeficientul de frecare cinematic.

Condiția de repaus este adevărată dacă valoarea forței de frecare este inferioară valorii maxime:

$$F_f \leq \mu \cdot N \tag{2.58}$$

Forța de rezistență apare la mișcarea corpurilor solide (ex.: automobil, avion, submarin) prin gaze sau lichide. Astfel, la mișcarea corpurilor prin fluidele în repaus apare o forță de rezistență (forța de frecare vâscoasă) la înaintare, orientată pe aceeași direcție cu viteza corpului, dar în sens opus.

Pentru viteze mici de deplasare a corpului prin fluid, forța de rezistență este direct proporțională cu viteza. Astfel, forța e data de legea lui Stokes:

$$\vec{F_r} = -k \cdot \eta \cdot \vec{v} \tag{2.59}$$

unde:

k este constantă ce depinde de forma geometrică a corpului

η este vâcozitatea dinamică a fluidului $[N \cdot s/m^2]$

v este viteza corpului în fluid $[m/s]$

Pentru mișcarea unei sfere omogene printr-un fluid vâscos, forța de rezistență este de forma:

$$\vec{F_r} = -6\,\pi\, r\, \eta\, \vec{v} \qquad (2.60)$$

unde: r este raza sferei, v este viteza ei relativă.

Viteza corpului în fluid joacă un rol extrem de important în ceea ce privește forța de rezistență. Astfel, la înaintarea unui automobil prin aer (acesta are viteze medii), forța de rezistență crește cu pătratul vitezei:

$$F_r = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 \qquad (2.61)$$

unde:

$\rho = 1.225\ [\frac{kg}{m^3}]$ este densitatea aerului

C_x este coeficientul de rezistență longitudinal al aerului (aerodinamic), mărime fizică adimensională

S este aria suprafeței transversale maxime $[m^2]$

v este viteza automobilului $[m/s]$

Aerul, datorită densității și vâscozității, se opune mișcării oricărui corp care-l pătrunde. Cu cât forma corpului este mai puțin aerodinamică cu atât forța de rezistență a aerului este mai mare.

Pentru mișcarea corpurilor cu viteze supersonice, în fluide, forța de rezistență e proporțională cu puterea a treia a vitezei.

Forța elastică

Sub acțiunea unei forțe externe un corp poate suferi o deformare:

- ***elastică*** – când forța deformatoare încetează să acționeze corpul revine la poziția inițială
- ***plastică*** – când după încetarea forței deformatoare corpul nu revine la poziția inițială

Legea care descrie deformarea elastică a materialelor supuse acțiunii forțelor deformatoare este ***legea lui HOOKE***:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{2.62}$$

unde:

F – forța deformatoare $[N]$

S – aria secțiunii corpului, perpendiculară pe direcția forței $[m^2]$

E – modulul longitudinal de elasticitate (a lui Young) $[N/m^2]$

l – lungime inițială $[m]$

Δl – alungire $[m]$

Pentru determinarea forței elastice considerăm un resort de care este atârnată o greutate (forță deformatoare).

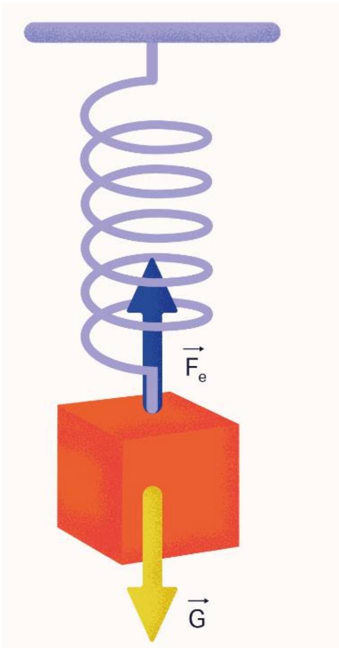


Fig. 2.8 Resort sub acțiunea unei forțe deformatoare

Din legea lui Hooke:

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l \tag{2.63}$$

Notăm:

$$k = \frac{ES}{l} \tag{2.64}$$

Adică, forța deformatoare va fi:

$$F = k\Delta l \tag{2.65}$$

Dar conform principiului acțiunii și reacțiunii în interiorul resortului apare o forță care se opune deformării numită forța elastică, care este egală și de sens opus cu forța deformatoare.

$$F = -k\Delta l \tag{2.66}$$

unde k este constantă elastică.

Observăm că forța elastică este îndreptată, întotdeauna, spre poziția de echilibru.

2.2.3 Lucrul mecanic. Puterea.

Considerăm că asupra unui corp acționează o forță $\vec{F}$. Lucrul mecanic descrie efectul acestei forțe care acționează un anumit timp asupra corpului. *Lucrul mecanic* reprezintă produsul scalar efectuat de forța $\vec{F}$ de-a lungul vectorului deplasare $\vec{r}$. Funcție de valoarea forței și de unghiul pe care aceasta o face cu vectorul deplasare, putem distinge următoarele cazuri:

Caz 1.

Dacă *forța este constantă și paralelă* cu vectorul deplasare, știind că:

$$\begin{gathered} L = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha = 1 \end{gathered} \tag{2.67}$$

rezultă că, în acest caz, lucru mecanic va fi de forma:

$$L = F \cdot r \tag{2.68}$$

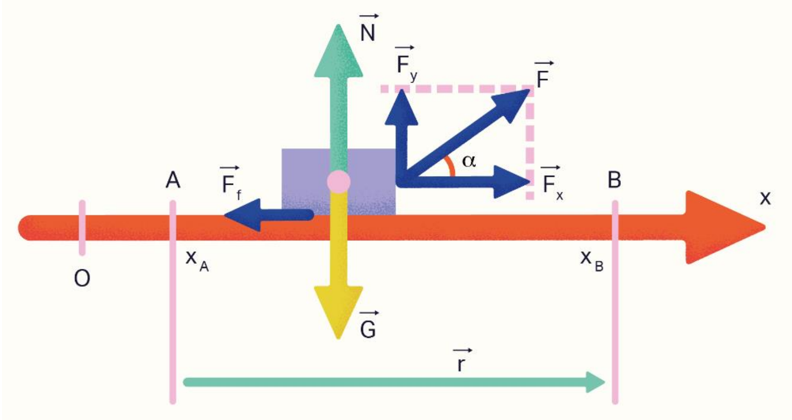


Fig. 2.9 Mişcarea unui corp de-a lungul axei Ox

Caz 2.

Dacă *forța este constantă și face unghiul α cu vectorul deplasare* (Fig. 2.9), atunci:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos\alpha \tag{2.69}$$

Caz 3.

Forța nu este constantă ci variază în spațiu $F = F(r)$. În acest caz, în fig. 2.10 se observă că împărțim intervalul AB în porțiuni mai mici Δr_i, astfel încât pe aceste intervale forța $F(\Delta r_i) = F_i = const.$ Pe aceste intervale mici lucrul mecanic este egal cu aria unui dreptunghi de lățime Δr_i și lungime F_i. Așadar:

$$L_{AB} = \sum L_i = \sum F_i \cdot \Delta r_i \tag{2.70}$$

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea punctului material între punctele A și B pe o traiectorie oarecare se află din relația:

$$L_{AB} = \int_A^B F(r) \cdot dr \tag{2.71}$$

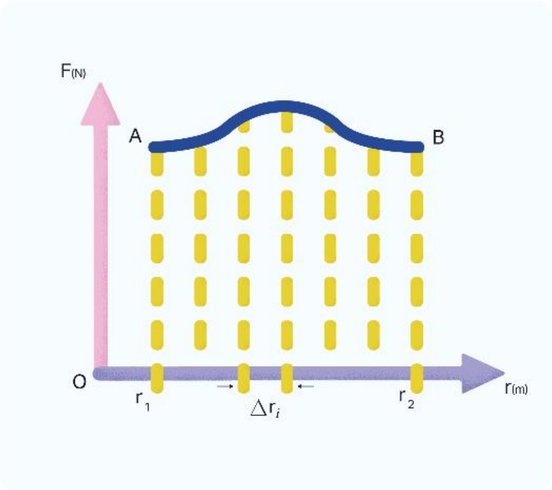


Fig. 2.10 Dependența forței de deplasare

Din punct de vedere geometric, lucrul mecanic reprezintă aria de sub graficul ce exprimă dependența forței de deplasare $F = F(r)$.

Puterea mecanică este mărimea fizică scalară ce reprezintă lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp:

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (2.72)$$

Așadar, puterea este o mărime de stare și are valori instantanee care se pot modifica de la un moment la altul.

Unitățile de măsură ale lucrului mecanic și puterii sunt:

$$[L]_{SI} = N \cdot m = J$$
$$[P]_{SI} = N \cdot m/s = J/s = W$$

Un Joule (J) este lucrul mecanic efectuat de o forță de 1N la deplasarea unui punct material pe distanța de 1m. Unitatea de măsură a puterii, în Sistem Internațional, este Watt-ul, prescurtat W.

2.2.4 Teoreme și legi de conservare

Teoremele generale ale dinamicii punctului material sunt consecințe ale principiilor dinamicii.

Teorema de conservare a impulsului

Vectorul impuls se definește ca produsul dintre masa corpului și vectorul viteza: $\vec{p} = m\vec{v}$. Legea fundamentală a mecanicii, scrisă cu ajutorul impulsului $\vec{p}$, este:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.73}$$

Dacă suma forțelor care acționează asupra punctului material de impuls $\vec{p}$ este zero $\vec{F} = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) = const. \tag{2.74}$$

Relație ce exprimă *conservarea impulsului mecanic*, respectiv: ***impulsul unui punct material izolat de exterior $(\vec{F} = \mathbf{0})$ se păstrează constant în timp, în raport cu un sistem de referință inerțial.***

Teoreme de conservare a energiei

Energia reprezintă proprietatea corpurilor prin care sunt capabile să efectueze lucru mecanic. Tipuri de energie:

- *cinetică* – asociată mișcării corpurilor
- *potențială* – asociată poziției relative a corpurilor
- *internă* – asociată mișcării moleculelor din interiorul unui gaz, fiind strâns legată de temperatura acestuia.

Teorema de conservare a energiei cinetice

Pornind de la relația de definire a lucrului mecanic, forței și respectiv vitezei:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$
$$dr = vdt \qquad (2.75)$$

Rezultă că:

$$dL = Fdr = m\frac{dv}{dt} \cdot vdt = mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \qquad (2.76)$$

Astfel definim:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \qquad (2.77)$$

energia cinetică a punctului material de masă m ce se deplasează cu viteza v. Ținând cont de notațiile făcute, rezultă:

$$dL = dE_c \qquad (2.78)$$

egalitate ce constituie ***teorema energiei cinetice: lucrul mecanic, dL, efectuat asupra unui punct material este egal cu variația, dE_c, energiei cinetice a acestuia***.

Dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material este nulă, energia cinetică se conservă. Energia cinetică este o mărime fizică scalară.

Forță conservativă. Proprietăți.

Forța conservativă este o forță care acționează asupra unui punct material, iar lucrul mecanic efectuat depinde doar de poziția inițială și finală (punctele A și B) între care are loc deplasarea. Astfel, indiferent de drumul urmat de punctul material, lucrul mecanic are aceeași valoare: $L_{AB} = L_{BA}$.

Forța conservativă se deduce din energia potențială:

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{d\vec{r}} \qquad (2.79)$$

ceea ce înseamnă că vectorul forță este egal cu gradientul energiei potențiale luat cu semnul minus. Altfel spus:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (2.80)$$

În concluzie, forțele care derivă dintr-un potențial sunt numite **forțe conservative**.

Exemple de ***forțe conservative***:

- forța elastică
- forța gravitațională
- forța electrică

Exemple de ***forțe neconservative***:

- forța de frecare (la frânare, roțile unei mașini și suprafața de frânare se încălzesc, iar energia internă crește)
- forțele disipative

Teorema conservării energiei potențiale.

Energia potențială reprezintă capacitatea unui sistem de-a efectua lucru mecanic. Astfel, observăm din relația (2.80) că vectorul forță este orientat pe direcția celei mai rapide creșteri a energiei potențiale, iar, lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ este:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\nabla E_p \cdot d\vec{r}$$

$$= -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right) \quad (2.81)$$

Deci:

$$dL = -dE_p \quad (2.82)$$

relație ce constituie ***teorema de conservare a energiei potențiale***: ***lucrul mecanic efectuat asupra unui punct material de un câmp de forțe conservative este egal variația energiei potențiale a acestuia, cu semn schimbat.***

Energia potențială este o energie de poziție. Dacă considerăm un corp de greutate G care cade pe pământ de la o înălțime h, din relațiile (2.68) și (2.82) se poate determina formula de calcul a energiei potențiale:

$$L = -G \cdot h = -mgh = -\Delta E_p \quad \Rightarrow \quad E_p = mgh \qquad (2.83)$$

Teorema conservării energiei mecanice

Din relațiile (2.79) și (2.82) rezultă:

$$E_c(B) - E_c(A) = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right] \qquad (2.84)$$

adică:

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E = const. \qquad (2.85)$$

Relație ce exprimă **teorema de conservare a energiei mecanice** a unui corp. Conform acesteia, ***energia mecanică a unui corp care se mișcă într-un câmp de forțe care derivă dintr-un potențial se păstrează constantă în timp dacă corpul nu este supus și altor interacţii***.

Energia cinetică de rotație. Moment de inerție.

Energia cinetică a unui corp aflat în mișcare de rotație este dată de suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor materiale care alcătuiesc acel corp. Dacă m_i și v_i sunt masa, respectiv viteza unui punct material, atunci *energia cinetică de rotație* este dată de:

$$E_{c,r} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega \cdot r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I \quad (2.86)$$

unde:

ω reprezintă viteza unghiulară a corpului care execută rotații în jurul axei ce trece prin centrul de masă;

r_i reprezintă poziția punctelor materiale de pe corp în raport cu axa de rotație;

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2.87}$$

I este moment de inerție ale particulelor din care este compus corpul considerat.

Așadar, energia cinetică de rotație depinde de viteza unghiulară și de momentul de inerție astfel:

$$E_{c,r} = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \tag{2.88}$$

Momentul de inerție pentru un element infinit mic al corpului aflat în mișcare de rotație este dat de relația:

$$dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \rho \cdot dV \tag{2.89}$$

unde ρ este densitatea corpului, iar dV este volumul elementului infinit mic, considerat. Momentul de inerție pentru întreg corpul se determină cu relația:

$$I = \iiint r^2 \cdot \rho \cdot dV \tag{2.90}$$

Această relație poate fi aplicată pentru calculul momentului de inerție a corpurilor solide având formă cunoscută. Câteva exemple de momente de inerție după forma corpurilor sunt:

- cilindru plin de rază R: $I = \frac{1}{2} m R^2$
- sferă plină de raza R: $I = \frac{2}{5} m R^2$
- băț subțire de lungime L: $I = \frac{1}{12} m L^2$

Teorema de conservare a momentului cinetic

Momentul forței este specific corpurilor rigide care se pot roti în jurul unei axe fixe, adică acționează asupra punctului material în raport cu originea. Dacă asupra unui punct material acționează o forță $\vec{F}$, se definește ***momentul forței*** în raport cu un punct, ca fiind:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.91}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material.

Dacă se cunosc mărimea forței, a vectorului de poziție și valoarea unghiului dintre acești vectori, putem determina mărimea momentului forței:

$$M = rF \sin \alpha \tag{2.92}$$

Unitatea de măsură, în Sistem Internațional pentru momentul forței este:

$$[M]_{SI} = N \cdot m$$

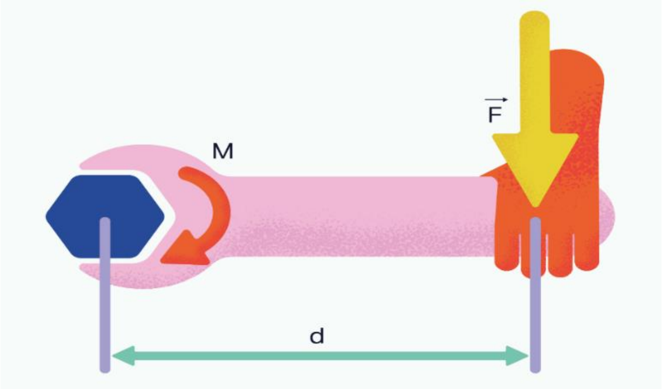


Fig. 2.11 Momentul forței

Momentul cinetic (momentul impulsului) al unui punct material, în mișcare în raport cu un punct fix (vezi fig. 2.5), este dat de relația:

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{2.93}$$

unde $\vec{p} = m\vec{v}$ este impulsul punctului material.

Unitatea de măsură corespunzătoare momentului cinetic este:

$$[\mathcal{L}]_{SI} = kg \cdot m^2/s = J \cdot s$$

Derivând relaţia (2.93) în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \qquad (2.94)$$

și, deoarece $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$ (produs vectorial a doi vectori coliniari) rezultă că:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{M} \qquad (2.95)$$

Așadar, *viteza de variație a momentului cinetic al unui corp este dată de momentul forței care acționează asupra sa*. Acest rezultat este cunoscut ca **teorema de variație a momentului cinetic**.

Momentul forței ce acționează asupra unui punct material, $\vec{M}$, este nul în următoarele cazuri:

- $\vec{F} = 0 \ \rightarrow \ \vec{M} = 0 \ \rightarrow \vec{\mathcal{L}} = const.$

  Astfel, dacă momentul forței rezultante este nul, momentul cinetic al punctului material se conservă: un punct material nu-și poate schimba momentul său cinetic decât sub acțiunea unui moment al forței.

- $\vec{F} \neq 0$; lucru care se întâmplă atunci când ***forța este de tip central***, adică direcția forței ce acționează asupra particulei trece printr-un punct fix, dat, numit ***centru de forță.***

Expresia unei forțe centrale este:

$$\vec{F} = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r} \qquad (2.96)$$

deci are direcția vectorului de poziție.

Momentul forței centrale este:

$$\begin{gathered} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r} = 0 \\ \vec{\mathcal{L}} = const. \end{gathered} \qquad (2.97)$$

Legea conservării momentului cinetic ne arată că *vectorul moment cinetic al unui corp izolat se păstrează constant în timp*.

Dacă ținem cont de modul de definire al vitezei $v = \omega \cdot r$, și de modul de definire al momentului de inerție, atunci momentul cinetic se poate determina din următoarea relație:

$$\mathcal{L} = r \cdot m \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega \qquad (2.98)$$

3. Mişcarea oscilatorie

M*işcarea oscilatorie* este una dintre cele mai importante mişcări întâlnite în natură atât la nivel microscopic (ex.: oscilațiile ionilor unei rețele cristaline) cât și la nivel macroscopic (ex.: bătăile inimii, mişcarea unui balansoar). Așadar, *mişcarea oscilatorie* apare în urma aplicării unei perturbații unui sistem, aflat inițial în echilibru stabil. Aceasta este o *mişcare periodică sau pseudoperiodică* în timp și spațiu, fiind însoțită de *transformarea energiei sistemului* dintr-o formă în alta. Astfel, oscilațiile pot fi:

A. *Din punct de vedere al formei de energie dezvoltată în timpul oscilației:*

- *oscilații elastice, mecanice* – au loc prin transformarea reciprocă a energiei cinetice în energie potențială;
- *oscilații electromagnetice* – au loc prin transformarea reciprocă a energiei electrice în energie magnetică;
- *oscilații electromecanice* – energia electrică se transformă în energie mecanică și invers.
- *oscilații magnetohidrodinamice* – constă în variația simultană a energiei unor câmpuri elastice și electromagnetice.

B. *Din punct de vedere al conservării energiei sistemului oscilant:*

- *oscilații armonice (ideale)* – energia totală se conservă;
- *oscilații amortizate (reale)* – energia se pierde în timp;
- *oscilații forțate (întreținute)* – se furnizează energie din exterior, pentru compensarea pierderilor.

3.1. Oscilații armonice

3.1.1 Ecuația de mișcare

Mișcarea oscilatorie armonică este cea mai simplă formă de mișcare periodică. Ea constă în deplasarea unui corp de-a lungul unei axe sub acțiunea forței elastice.

Orice mișcare periodică poate fi considerată ca fiind proiecția unei mișcări circulare uniforme. Un model în acest sens este mișcarea unui punct material de masă *m*, legat de un resort având constanta elastică *k*, care oscilează fără frecare în lungul axei OY (fig. 3.1).

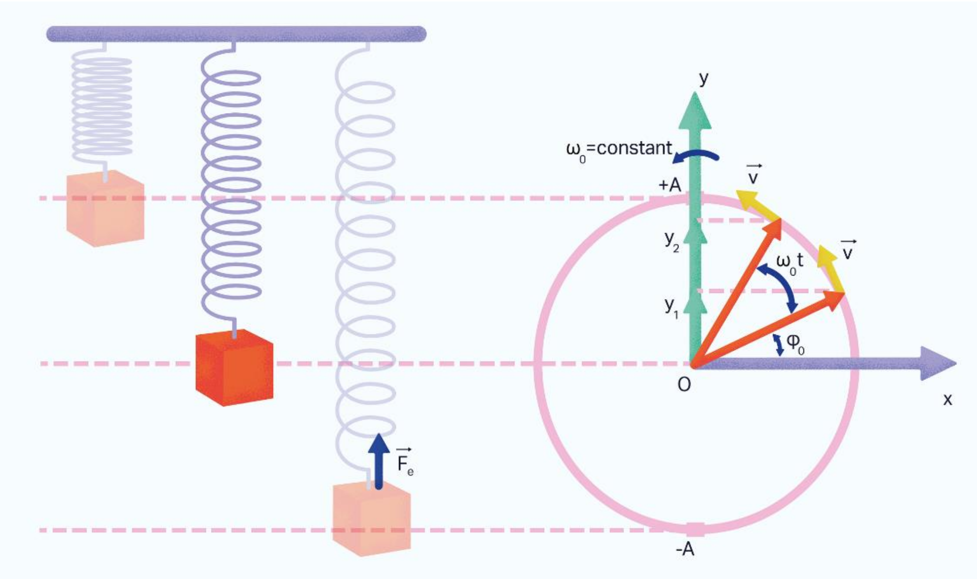


Fig. 3.1 Mișcarea oscilatorului armonic vs. mișcarea uniformă a unui punct material pe o traiectorie circulară

Forța care acționează asupra punctului material, fiind totdeauna îndreptată spre poziția de echilibru (forța care acționează în sens invers deplasării) este forța elastică:

$$F_e = -ky \tag{3.1}$$

unde k se numește *constantă elastică* sau *coeficient de elasticitate*, iar *y* reprezintă *elongația* sau poziția la care se afla corpul la un moment dat.

Ținând cont de legea a doua a dinamicii, ecuația de mișcare este de forma:

$$ma = -ky \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \tag{3.2}$$

rezultă o ecuație diferențială de ordinul al doilea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \tag{3.3}$$

unde am notat cu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.4}$$

pulsația proprie a mișcării oscilatorii.

Deoarece mișcarea este periodică soluția relației (3.3) este de forma:

$$y = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.5}$$

ceea ce reprezintă ***ecuația mișcării oscilatorii armonice*** de-a lungul axei OY.

Mărimile caracteristice mișcării oscilatorii (conform relației 3.5) sunt:

- ***Elongația*** – *y* – reprezintă distanța corpului față de poziția de echilibru, la un moment dat. Elongația poate fi notată cu x sau y, funcție de axa după care are loc mișcarea, iar în sistem internațional se măsoară în metri, *m*.
- ***Amplitudinea*** – *A* – este distanța maximă dintre poziția instantanee a mobilului și poziția sa de echilibru (elongația maximă). În Sistem Internațional, amplitudinea se măsoară în metri, *m*.
- ***Pulsația*** sau ***frecvența unghiulară*** – ω_0 – reprezintă numărul de oscilații efectuate în 2π secunde:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0} \ [rad/s] \tag{3.6}$$

- ***Frecvența*** – ν_0 – se definește ca fiind numărul de oscilații complete efectuate în unitatea de timp.
- ***Perioada*** – T_0 – reprezintă timpul în care punctul material efectuează o oscilație completă (pleacă dintr-o poziție și se întoarce înapoi în ea).

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad [s] \tag{3.7}$$

- ***Faza*** – $\omega_0 t + \varphi_0$ – reprezintă unghiul la centrul unui cerc care are raza egală cu amplitudinea, A, și pe care îl face raza la poziția instantanee a punctului material pe cerc, față de o poziție inițială, φ_0. În Sistem Internațional aceasta se măsoară în radiani, *rad*.

Cunoscând elongația, din relația (3.5), se pot determina viteza și accelerația oscilatorului armonic:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.8}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.9}$$

Astfel, viteza și accelerația maximă pentru oscilatorul armonic vor fi:

$$\begin{aligned} v_{max} &= \omega_0 A \\ a_{max} &= \omega_0^2 A \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.2 Energia oscilatorului armonic

Oscilatorul armonic se mișcă sub acțiunea forței elastice. Energia totală a oscilatorului armonic se conserve în timp și este data de relația:

$$E = E_c + E_p \tag{3.11}$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.12}$$

Știind că forța elastică este o forță conservativă (pentru care – lucrul mecanic efectuat de acestea depinde doar de poziția inițială și finală):

$$F = -gradE_p = -\frac{dE_p}{dy} = -ky \tag{3.13}$$

Atunci:

$$dL = Fdy = -kydy = -d\left(\frac{ky^2}{2}\right) \tag{3.14}$$

Și ținând cont de teorema de conservare a energiei potențiale, rezultă:

$$E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$
$$E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.15)$$

Știind că: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, energia totală (vezi fig. 3.2) a oscilatorului armonic se menține constantă în timp și este:

$$E = E_c + E_p = \frac{m\omega_0^2A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (3.16)$$

Totodată, din relațiile (3.12) și (3.15) observăm că la momentul de timp, când energia potențială este maximă $\left(E_{pmax} = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\right)$, energia cinetică este minima $(E_{cmax} = 0)$ și invers.

În concluzie, energia totală a oscilatorului este constantă în timp. Acest lucru este de așteptat deoarece forța elastică este conservativă, iar în sistem nu există forțe neconservative.

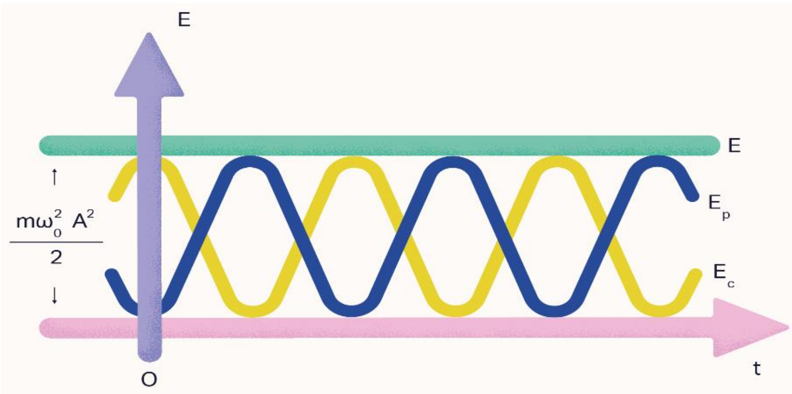


Fig. 3.2 Reprezentarea energiilor oscilatorului armonic

3.2 Oscilații amortizate

În realitate, pe lângă forța elastică $F_e = -ky$ care acționează asupra punctului material în mișcare, apare și forța de frecare care duce la pierderea în timp a energiei sistemului. Acest fapt determină amortizarea oscilațiilor. Forța de frecare (neconservativă) este proporțională cu viteza și de sens opus ei:

$$F_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dy}{dt} \tag{3.17}$$

unde γ este *coeficient de frecare* care depinde de vâscozitatea mediului.

Ecuația mișcării oscilatorii amortizate este de forma:

$$ma = -ky - \gamma v$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0 \tag{3.18}$$

adică:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \tag{3.19}$$

unde am făcut notațiile:

$\delta = \frac{\gamma}{2m}$ – coeficient de amortizare;

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – pulsația proprie a sistemului.

Observăm că ecuația (3.19) este diferențială omogenă, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți care se poate rezolva cu ajutorul ***ecuației caracteristice***, $\left(\frac{dy}{dt} \rightarrow \lambda\right)$:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.20}$$

admițând soluții de forma:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{3.21}$$

În funcție de semnul cantității de sub radical întâlnim următoarele situații:

- ***mișcare aperiodică supra-amortizată*** (cazul frecărilor mari)

  $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$, rădăcinile sunt reale și distincte;

- ***mișcare aperiodică critic amortizată***

  $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$, rădăcinile sunt reale și egale;

- ***mișcare periodică sub-amortizată*** (cazul frecărilor mici)

  $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, rădăcinile sunt imaginare, complex conjugate.

În cele ce urmează vom analiza cele trei cazuri.

• ***Mișcare aperiodică supra-amortizată*** – $\delta > \omega_0$ – cazul frecărilor mari

Forță de rezistență este *mare* $F_r = -\gamma v$, deoarece coeficientul de frecare $\gamma = 2m\delta$ este mare. În această situație, cantitatea de sub radical este pozitivă astfel că radicalul este un număr real. Caz în care soluția ecuației va fi de forma:

$$y(t) = C_1 e^{-(\delta-\omega)t} + C_2 e^{(\delta-\omega)t} \tag{3.22}$$

Astfel, corpul scos din poziția de echilibru la momentul $t = 0$, nu efectuează oscilații, ci revine la poziția neperturbată după un interval de timp considerabil. Regimul supra amortizat este ales, de exemplu, în funcționarea autovehiculelor, sau mașinilor unelte, când se dorește eliminarea oscilațiilor nedorite, care ar putea apărea în timpul funcționării. În acest scop, acestea sunt prevăzute cu *amortizoare*.

• ***Mișcare aperiodică critic amortizată*** – $\delta = \omega_0$

În acest caz, $\lambda_{1,2} = -\delta$, dar teoria ecuațiilor diferențiale arată că există și o soluție, de forma $te^{\lambda t}$. Ca urmare, soluția ecuației diferențiale a mișcării este de forma:

$$y(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) \tag{3.23}$$

În cazul mișcării critic amortizate, corpul revine la poziția de echilibru după ce o traversează o singură data. Acest regim este ales în funcționarea instrumentelor cu ac indicator, întrucât în acest caz deviația echipajului mobil are loc foarte rapid și se dorește evitarea oscilațiilor acului indicator în jurul valorii indicate. Totodată, în cazul microfoanelor și difuzoarelor, amortizarea membrane acestora asigură o captare și dedare mai fidelă a sunetelor.

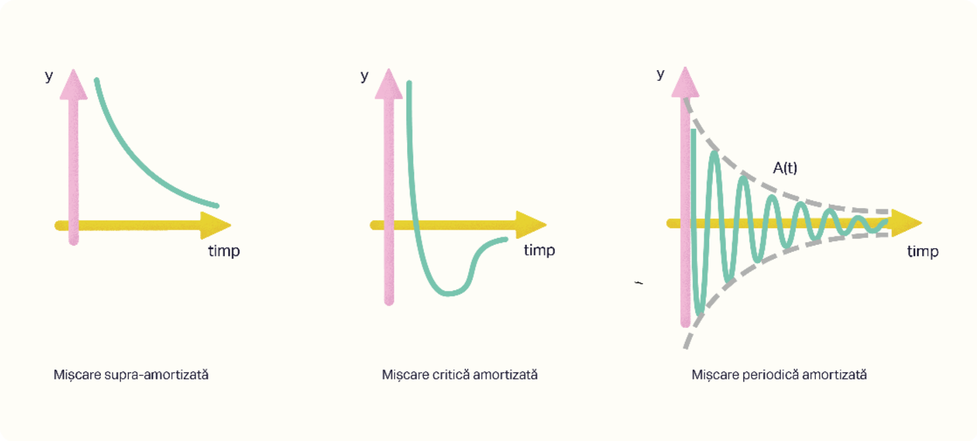


Fig. 3.3 Comportamentul sistemelor fizice în cazul diferitelor tipuri de oscilații amortizate

- ***Mişcare periodică sub-amortizată*** – $\delta < \omega_0$ – cazul frecărilor mici

În acest caz, rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere complexe de forma:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{3.24}$$

Ecuația de mişcare va fi de forma:

$$y(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{i\omega_a t} + C_2 e^{-i\omega_a t}\right] \tag{3.25}$$

adică, soluția oscilatorului amortizat va fi:

$$\boldsymbol{y(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin\left(\omega_a t - \varphi_0\right)} \tag{3.26}$$

Mărimile caracteristice oscilatorului amortizat sunt:

1. ***pulsația*** oscilatorului amortizat (pseudopulsația):

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{3.27}$$

în cazul oscilatorului slab amortizat ($\delta << \omega_0$) $\omega_a \cong \omega_0$.

2. ***perioada*** oscilațiilor amortizate este dată de relația:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}} \quad (3.28)$$

Aceasta ne dă informații despre timpul necesar efectuării unei oscilații complete (oscilatorul nu se mai întoarce exact de unde a plecat).

3. ***amplitudinea oscilațiilor (pseudoamplitudinea)***, scade exponențial în timp, după legea:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (3.29)$$

iar oscilatorul, datorită frecării cu mediul, își micșorează în mod continuu energia, cedând-o mediului.

4. ***timpul de relaxare*** este timpul după care amplitudinea scade de e ori. Astfel, pornind de la relația de definire:

$$A(\tau) = \frac{A_0}{e} \quad (3.30)$$

rezultă:

$$A_0 e^{-\delta\tau} = \frac{A_0}{e} \quad \Rightarrow \quad \delta\tau = 1 \ \Rightarrow \ \tau = \frac{1}{\delta} \quad (3.31)$$

5. ***decrementul logaritmic al amortizării*** – utilizat pentru a caracteriza ritmul (rata) de scădere în timp a amplitudinii oscilațiilor amortizate:

$$\Delta = \ln\frac{y(t)}{y(t+T)} = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T_a \quad (3.32)$$

Acesta este o mărime adimensională ce caracterizează gradul de amortizare al oscilațiilor (cu cât este mai mare cu atât oscilațiile se amortizează mai repede).

6. energia oscilatorului amortizat

Amortizarea oscilațiilor este legată de pierderea de energie a punctului material care execută mișcarea. Așa cum am arătat în cazul oscilatorului armonic, energia este direct proporțională cu pătratul amplitudinii. Acest lucru este valabil și pentru oscilatorul amortizat, adică:

$$E = E_0 e^{-2\delta t} \quad (3.33)$$

unde: $E_0 = \frac{kA_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2}$ este energia inițială.

7. ***puterea disipată*** prin frecare în mediul vâscos este egală cu variația energiei (care este negativă datorită pierderilor) în unitatea de timp, astfel că se obține:

$$P_d = -\frac{dE}{dt} = 2\delta E_0 e^{-2\delta t} = 2\delta E(t) \tag{3.34}$$

8. ***factorul de calitate*** al mișcării oscilatorii stabilește gradul de atenuare energetică a oscilației, fiind definit prin raportul:

$$Q = 2\pi\frac{E(t)}{\Delta E} = 2\pi\frac{E(t)}{P_d T_a} = \frac{2\pi E(t)}{2\delta E T_a} = \frac{\omega_a}{2\delta} \tag{3.35}$$

unde $E(t)$ reprezintă energia la momentul t, iar ΔE este energia disipată prin frecare cu mediul vâscos într-o perioadă.

Evident, oscilatorul va fi cu atât mai ”*bun*”, adică va avea un factor de calitate, Q, mare (oscilează un timp mai îndelungat), cu cât coeficientul de amortizare, δ, este mai mic. Dacă:

- $Q < 1$ mișcarea este aperiodică;
- $Q > 1$ mișcarea este periodică.

Oscilatorul amortizat are o perioadă de oscilație T_a mai mare (oscilează mai lent, deci cu o frecvență mai mică) decât perioada de oscilație a oscilatorului armonic liber (neamortizat), datorită pierderii continue de energie prin amortizarea oscilațiilor. Oscilațiile din natură sunt amortizate, deoarece, întotdeauna, asupra oscilatorului acționează forțe de frecare.

3.3 Oscilații forțate

Prezența forțelor de rezistență din partea mediului conduc la scăderea energiei oscilatorului. În scopul recuperării energiei pierdute, asupra oscilatorului trebuie să acționeze o forță periodică externă de forma:

$$F(t) = F_0 sin\omega t \tag{3.36}$$

Știind că în sistem acționează forța elastică, forța de frecare și forța periodică externă, și ținând cont de principiul fundamental al dinamicii, *ecuația mișcării oscilatorii forțate (întreținute)* este:

$$\begin{aligned} ma &= -ky - \gamma v + F_0 sin\omega t \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y &= \frac{F_0}{m} sin\omega t \end{aligned} \tag{3.37}$$

dar, utilizând notațiile deja cunoscute, rezultă:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} sin\omega t \tag{3.38}$$

Această ecuație este o ecuație diferențială liniară, de ordinul al doilea, *neomogenă*. Soluția generală a acestei ecuații este dată de suma dintre soluția ecuației omogene (y_o) și o soluție particulară de forma termenului neomogen (y_p):

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) \tag{3.39}$$

unde:

$$\begin{aligned} y_o(t) &= A_0 e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0\right) \\ y_p(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Semnificația constantelor din soluția omogenă este cea cunoscută. În soluția particulară (y_p), *A* reprezintă amplitudinea mișcării oscilatorului forțat, iar φ este diferența dintre faza forței excitatoare și faza elongației. Acestea sunt mărimi constante în timp iar expresiile lor urmează a fi determinate.

Deoarece amplitudinea soluției omogene scade exponențial, contribuția ei devenind neglijabilă în timp, pe termen lung comportarea sistemului va fi descrisă de soluția ecuației particulare (y_p). Astfel, viteza și accelerația sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega\, \mathrm{A} \cos(\omega t + \varphi) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2\, \mathrm{A} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Așadar, în relația (3.38), verificăm soluția ecuației particulare:

$$-\omega^2 \,\mathrm{A}\sin(\omega t+\varphi)+2\delta\omega\,\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)+\omega_0^2\,\mathrm{A}\sin(\omega t+\varphi)=\frac{F}{m}\sin(\omega t) \qquad (3.42)$$

Știind că:

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi$$

$$\cos(\omega t+\varphi)=\cos\omega t\cos\varphi-\sin\omega t\sin\varphi$$

Scriem explicit soluția ecuației particulare și apoi grupăm după $\sin(\omega t)$ şi $\cos(\omega t)$. După identificarea coeficienților din ambii membrii, se obține:

$$\begin{cases} A(\omega_0^2-\omega^2)cos\varphi-2\delta\omega A sin\varphi=\frac{F_0}{m} \\ A(\omega_0^2-\omega^2)sin\varphi+2\delta\omega A cos\varphi=0 \end{cases} \qquad (3.43)$$

Din a doua ecuație obținem faza mișcării oscilatorii:

$$tg\varphi=\frac{2\delta\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \qquad (3.44)$$

Dacă ridicăm ambele relații la pătrat și adunăm membru cu membru obținem amplitudinea oscilațiilor forțate:

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} \qquad (3.45)$$

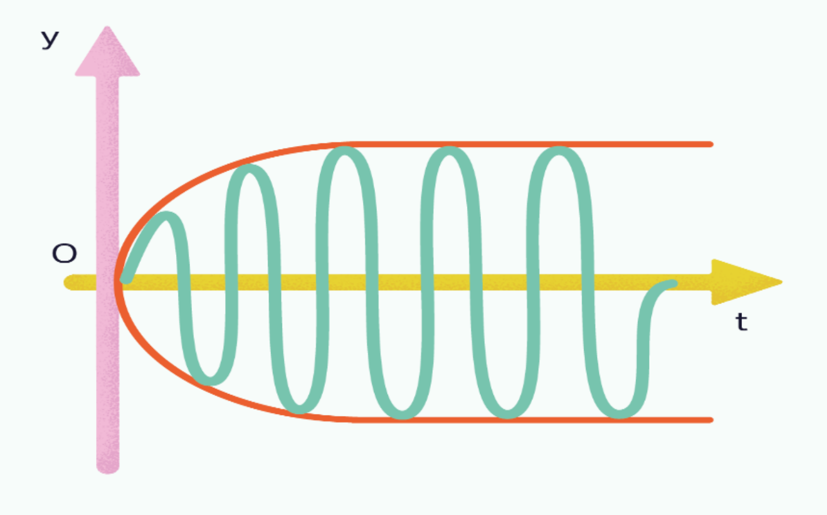


Fig.3.4 Dependența elongației de timp pentru oscilatorul forțat

Mişcarea se numeşte *oscilatorie întreținută,* pentru că forța externă compensează pierderile de energie ale sistemului și de asemenea se mai numeşte mişcare *oscilatorie forțată* deoarece sistemul este obligat de către forța externă să oscileze cu o amplitudine și o pulsație dependente de amplitudinea și pulsația acesteia (fig. 3.4).

Dependența amplitudinii de frecvența forței exterioare este neliniară, prezentând un maxim pentru $\omega = \omega_r$. Maximul amplitudinii se găsește din anularea derivatei de ordinul întâi:

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{2\omega(\omega_0^2-\omega^2)-4\delta^2\omega}{\sqrt{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\right)^3}} = 0 \qquad (3.46)$$

Dar:

$$\begin{matrix} \omega \neq 0 \\ F_0 \neq 0 \end{matrix} \Longrightarrow \omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta^2 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \qquad (3.47)$$

Astfel obținem ***pulsația de rezonanță***:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (3.48)$$

Pentru această valoare a pulsației forței externe, numită ***pulsație de rezonanță***, amplitudinea ia valoarea maximă egală cu:

$$A_{max} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \qquad (3.49)$$

Se observă că valoarea maximă a amplitudinii crește pe măsură ce frecarea este din ce în ce mai mică, tinzând la infinit$(A \to \infty)$ pe măsură ce coeficientul de amortizare tinde la zero $(\delta \to 0)$. Această situaţie nu se realizează practic, deoarece întotdeauna intervine rezistența mediului.

În absența frecării, pulsația de rezonanță devine egală cu pulsația proprie a sistemului $(\omega_r = \omega_0)$, asfel încât valoarea amplitudinii oscilaţiilor forţate tinde şi în acest caz la infinit $(A \to \infty)$.

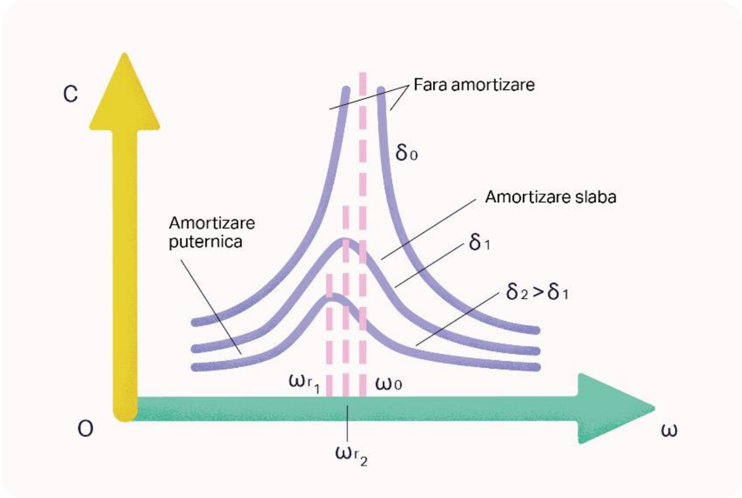


Fig. 3.5 Dependența amplitudinii oscilațiilor forțate de pulsația forței periodice

Rezonanța poate fi uneori utilă, dar alteori dăunătoare.

- Rezonanța are multiple aplicații tehnice. Astfel, fenomenul de rezonanță este întâlnit în diferite domenii ale tehnologiei, precum: transmisiunile radio-TV, medicină dar și rezonanța magnetică nucleară (RMN), rezonanța electronică de spin (RES), precum și funcționarea cuptorului cu microunde sau a laserului.
- Arborii mașinilor rapide tind să se rupă la rezonanță. Dacă se fixează motoare pe arbori este important ca turația motorului să nu depășească frecvența proprie de vibrație a arborilor pe care sunt puși pentru a nu se produce ruperea sau fisurarea acestora.
- Solicitarea ritmică a unui pod datorită mersului cadențat al oamenilor care îl traversează sau datorită unor rafale puternice de vânt poate duce la avarierea sau chiar distrugerea podului, dacă acesta nu e prevăzut cu amortizoare.

3.4 Compunerea oscilațiilor armonice

3.4.1 Compunerea oscilațiilor armonice paralele

Dacă un sistem se mișcă sub acțiunea simultană a două oscilații diferite, pe aceeași direcție, adică:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 &= A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{3.50}$$

el va executa o mișcare compusă.

În cele ce urmează ne vom ocupa de cele două cazuri de compuneri de oscilații armonice paralele:

A. de aceeași pulsație;
B. de pulsații diferite.

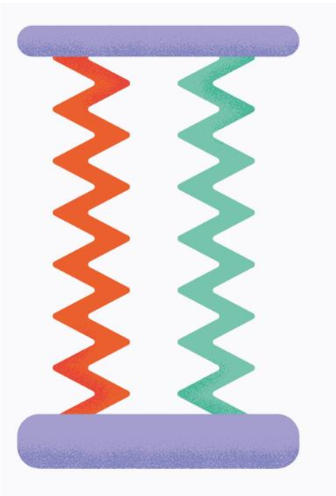


Fig. 3.6 Compunerea oscilațiilor armonice paralele

A. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de aceeași pulsație

În cazul studiat cele două oscilații care se compun au ecuațiile de forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 &= A_2 sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Ecuația de mișcare a sistemului va fi de forma:

$$\begin{gathered} y = y_1 + y_2 \\ y = A_1 sin\omega t \cdot cos\varphi_1 + A_1 cos\omega t \cdot sin\varphi_1 + \\ + A_2 sin\omega t \cdot cos\varphi_2 + A_2 cos\omega t \cdot sin\varphi_2 \\ y = (A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2) sin\omega t + (A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2) cos\omega t \end{gathered} \quad (3.52)$$

Relație care poate fi scrisă și sub forma:

$$y = C_1 sin\omega t + C_2 cos\omega t = Asin(\omega t + \varphi) \quad (3.53)$$

unde:

amplitudinea A și faza inițială φ sunt funcție de amplitudinile și fazele inițiale ale oscilațiilor care se compun,

iar:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2 \\ C_2 &= A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

sunt două constante care depind de amplitudinile și fazele inițiale ale celor două oscilații care se compun.

În cele ce urmează va trebui să determinăm valoarea amplitudinii rezultante și a fazei inițiale a mișcării compuse. Astfel, fie ne folosim de relația (3.54), fie de metoda fazorilor pentru determinarea celor două necunoscute. Știind că oscilatorii au aceeași pulsație, ω, (vezi fig. 3.7) fazorii corespunzători celor două oscilații, $y_1(t)$ și $y_2(t)$, se rotesc în fază.

Diferența de fază dintre cele de oscilații este:

$$\Delta\varphi = \varphi_{02}(t) - \varphi_{01}(t) = \omega t + \varphi_2 - \omega t - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (3.55)$$

Conform fig. 3.7 cei doi oscilatori au fazorii $\vec{A}_1$ și $\vec{A}_2$, care fac între ei unghiul $\Delta\varphi$ în cursul rotaţiei lor. Conform regulii de adunare a vectorilor, fazorul corespunzător amplitudinii oscilației rezultante este: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

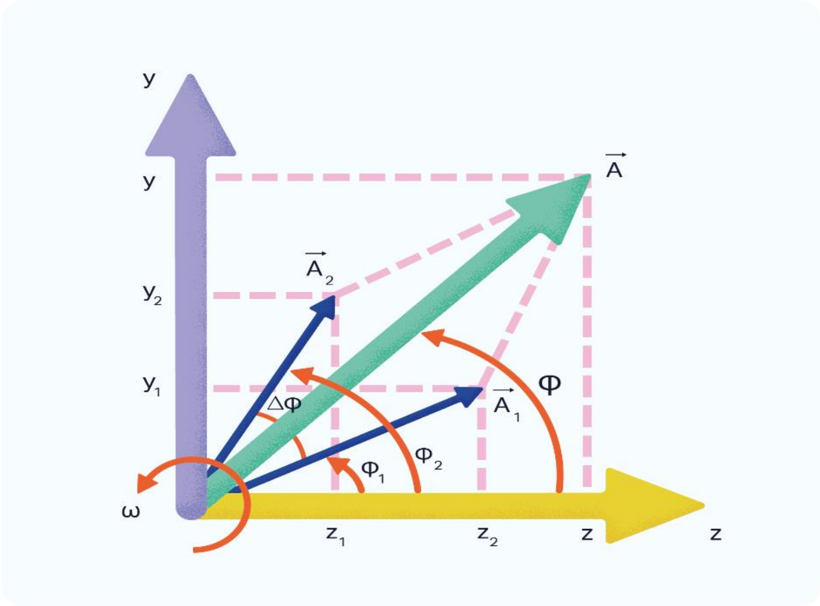


Fig. 3.7 Reprezentare fazorială a compunerii oscilațiilor paralele de aceeași pulsație

Modulului vectorului $\vec{A}$ se obține fie din formula lui Pitagora generalizată fie rezolvând sistemul de ecuații (3.54). Astfel, găsim pentru oscilația rezultantă expresia amplitudinii:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (3.56)$$

Faza inițială a oscilației rezultate poate fi aflată fie din relația (3.54), fie din fig. 3.6, anume:

$$\varphi = arctg\frac{C_2}{C_1} = arctg\frac{A_1sin\varphi_1 + A_2sin\varphi_2}{A_1cos\varphi_1 + A_2cos\varphi_2}$$
$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = arctg\frac{A_1sin\varphi_1 + A_2sin\varphi_2}{A_1cos\varphi_1 + A_2cos\varphi_2} \qquad (3.57)$$

În practică pot fi întâlnite următoarele cazuri particulare de compunere a oscilațiilor paralele de aceeași pulsație:

– ***oscilatorii sunt în fază***, amplitudinea rezultată e maximă dacă diferența de fază dintre oscilații este:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= 2n\pi \\ A &= A_1 + A_2 \end{aligned} \tag{3.58}$$

unde $n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$

– ***oscilatorii sunt în opoziție de fază,*** amplitudinea rezultată e minimă dacă diferența de fază dintre oscilații este:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= (2n+1)\pi \\ A &= A_1 - A_2 \end{aligned} \tag{3.59}$$

unde $n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$

Observație! Dacă $A_1 = A_2$ în urma compunerii $A = 0$, deci oscilația se stinge

- ***oscilatorii sunt în cuadratură***, amplitudinea rezultată și diferența de fază dintre oscilații este:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ A^2 &= A_1^2 + A_2^2 \end{aligned} \tag{3.60}$$

unde $n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$

B. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de pulsații diferite.

O importanță practică și teoretică deosebită o reprezintă situația în care pulsațiile celor două oscilații care se compun, sunt puțin diferite ($\omega_1 \neq \omega_2$), iar amplitudinile acestora sunt aceleași. Astfel, ecuațiile celor două oscilații care se compun sunt de forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= Asin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 &= Asin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ecuația mișcării oscilatorii rezultante este dată de relația:

$$y = Asin(\omega_1 t + \varphi_1) + Asin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{3.62}$$

Dacă ținem cont de relația trigonometrică:

$$sin\alpha + sin\beta = 2cos\frac{\alpha - \beta}{2}sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

ecuația de mișcare devine:

$$y = 2Acos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \qquad (3.63)$$

Pentru a simplifica lucrurile considerăm fazele inițiale ale celor două mișcări zero ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$).

Notând:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$
$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad (3.64)$$

ecuația de mișcare devine:

$$y = 2Acos(\Delta\omega t)sin(\omega t) = A(t)sin(\omega t) \qquad (3.65)$$

unde, amplitudinea este dependentă de timp: $A(t) = 2Acos(\Delta\omega t)$

Așadar, amplitudinea este modulată în timp și poate lua valori între $+2$A și -2A.

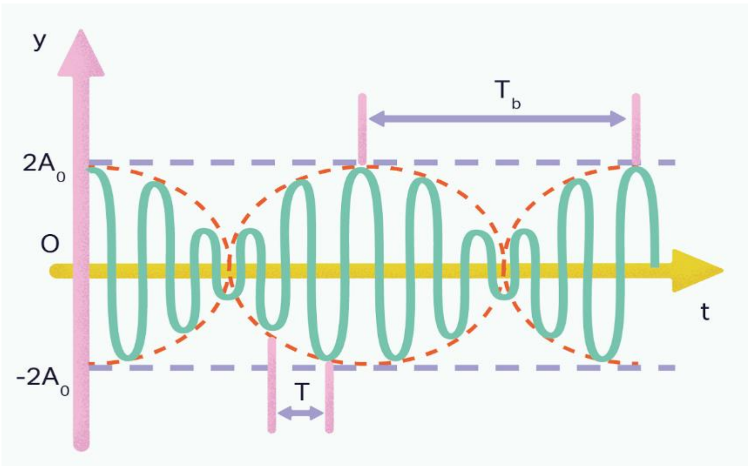


Fig. 3.8 Reprezentare grafică a fenomenului de bătăi

Succesiunea în timp a valorii maxime (sau minime) a amplitudinii mișcării rezultate din compunerea a două oscilații paralele de pulsații apropiate constituie ***fenomenul de bătăi***. Acest fenomen are numeroase aplicații în ***acustică*** și ***electronică***.

Pulsația și perioada bătăilor sunt descrise de relațiile:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_b} \Rightarrow T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2} \tag{3.66}$$

Perioada bătăilor reprezintă intervalul de timp între două treceri succesive ale amplitudinii rezultante prin valoarea maximă (sau minima).

Frecvența bătăilor, adică frecvența la care se succed maximele (sau minimele) amplitudinii este:

$$\nu_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\omega_1-\omega_2}{4\pi} \tag{3.67}$$

Pulsația și perioada oscilației rezultante se determină din relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2} \tag{3.68}$$

Din relațiile anterioare observăm că perioada oscilației rezultante este mai mică decât perioada bătăilor ($T \ll T_b$).

3.4.2 Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Considerăm un punct material de masă m, care execută oscilații sub acțiunea simultană a două resorturi elastice perpendiculare. Ecuațiile care descriu mișcarea punctului material după axele Ox și Oy sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= A_x sin(\omega_x t + \varphi_x) \\ y &= A_y sin(\omega_y t + \varphi_y) \end{aligned} \tag{3.69}$$

În continuare sunt tratate cele două cazuri de compuneri de oscilații armonice perpendiculare:

A. de aceeași pulsație;
B. de pulsații diferite.

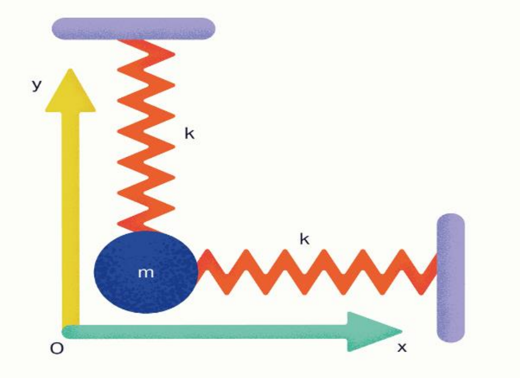


Fig. 3.9 Compunerea oscilațiilor perpendiculare

A. *Compunerea oscilațiilor perpendiculare de aceeași pulsație*

Considerăm un punct material de masă m care este supus acțiunii simultane a două oscilații perpendiculare de aceeași pulsație:

$$\begin{aligned} x &= A_x sin(\omega t + \varphi_x) \\ y &= A_y sin(\omega t + \varphi_y) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Ne propunem să determinăm ecuația traiectoriei punctului material. Aceasta se obține eliminând timpul din ecuațiile de mișcare. În acest sens rescriem ecuațiile de mișcare sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_x} &= sin(\omega t + \varphi_x) = sin\omega t \cdot cos\varphi_x + cos\omega t \cdot sin\varphi_x \\ \frac{y}{A_y} &= sin(\omega t + \varphi_y) = sin\omega t \cdot cos\varphi_y + cos\omega t \cdot sin\varphi_y \end{aligned} \tag{3.71}$$

Înmulțind relațiile (3.71) cu $cos\varphi_y$ și respectiv $cos\varphi_x$, apoi cu $sin\varphi_y$ și respectiv $sin\varphi_x$ și făcând diferența dintre relațiile înmulțite astfel, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_x}cos\varphi_y - \frac{y}{A_y}cos\varphi_x &= cos\omega t(sin\varphi_x \cdot cos\varphi_y - cos\varphi_x \cdot sin\varphi_y) \\ &= cos\omega t \cdot sin(\varphi_x - \varphi_y) \\ \frac{x}{A_x}sin\varphi_y - \frac{y}{A_y}sin\varphi_x &= sin\omega t(sin\varphi_y \cdot cos\varphi_x - cos\varphi_y \cdot sin\varphi_x) \\ &= sin\omega t \cdot sin(\varphi_x - \varphi_y) \end{aligned} \tag{3.72}$$

Apoi ridicăm la pătrat relațiile (3.72), le adunăm, iar în final obținem expresia:

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}cos(\varphi_x-\varphi_y)=sin^2(\varphi_x-\varphi_y) \quad (3.73)$$

Notând cu $\varphi=\varphi_x-\varphi_y$ diferența dintre fazele inițiale ale celor două oscilaţii armonice perpendiculare, obţinem expresia ecuaţiei de mişcare a sistemului:

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}cos\varphi=sin^2\varphi \quad (3.74)$$

Aceasta arată că *traiectoria punctului material este o **elipsă*** având semiaxele A_x şi A_y, iar sensul de parcurgere al acesteia depinde de diferența de fază dintre cele două oscilații perpendiculare care se compun.

Putem întâlni următoarele trei cazuri caracteristice:

1. $\varphi=n\pi$, atunci *traiectoria punctului material va fi o **dreaptă*** a cărei ecuație este:

$$y=\pm\frac{A_y}{A_x}x \quad (3.75)$$

2. $\varphi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, atunci *traiectoria punctului material va fi o **elipsă*** cu semiaxele orientate după axele *Ox* și *Ox*:

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=1 \quad (3.76)$$

Dacă $A_x=A_y=R$ relația degenerează într-un ***cerc*** de rază R:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (3.77)$$

unde $n=0,1,2,\ldots$.

Traiectoriile descrise de oscilația rezultantă și sensurile de parcurgere ale acestora, pentru diferite valori ale diferenței de fază φ sunt prezentate în figura 3.10.

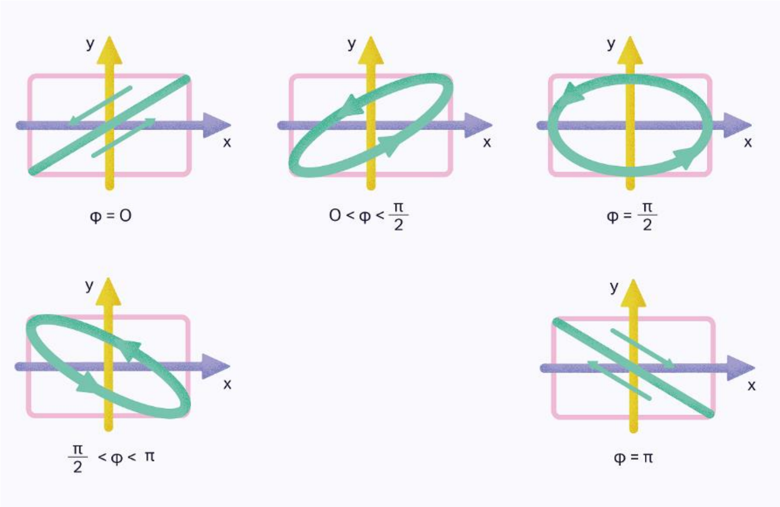


Fig. 3.10 Traiectorii descrise de oscilația rezultată în cazul compunerii oscilațiilor perpendiculare de aceeași pulsație

În funcție de sensul de parcurgere al traiectoriei, oscilația rezultantă poate fi:

- *polarizată eliptic spre dreapta*;
- *polarizată eliptic spre stânga*;
- *liniar polarizată*.

B. Compunerea oscilațiilor perpendiculare de pulsații diferite

Dacă cele două oscilații perpendiculare au pulsații diferite, descrise de ecuațiile:

$$\begin{aligned} x &= A_x sin(\omega_x t + \varphi_x) \\ y &= A_y sin(\omega_y t + \varphi_y) \end{aligned} \qquad (3.78)$$

atunci traiectoria descrisă de sistemul supus acțiunii simultane a celor două oscilații în planul *Oxy* poate fi o ***curbă închisă*** sau o ***curbă deschisă***.

Forma traiectoriei descrise de un sistem mecanic supus acțiunii simultane a două oscilații perpendiculare de pulsații diferite depinde de:

- raportul amplitudinilor,
- raportul pulsațiilor,
- diferența de faza φ dintre oscilații.

Pentru ca traiectoria să fie o ***curbă închisă*** trebuie ca după un interval de timp, sistemul să treacă prin același punct, în aceeași direcție și sens. Intervalul minim de timp T, după care mișcarea sistemului se repetă identic, trebuie să fie în același timp un multiplu atât al perioadei primei oscilații cât și al perioadei celei de-a doua oscilații. Deci:

$$T = k_1 \frac{2\pi}{\omega_x} = k_2 \frac{2\pi}{\omega_y} \qquad (3.79)$$

unde *raportul celor două pulsații este un număr rațional*:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{k_2}{k_1} \qquad (3.80)$$

Așadar traiectoria descrisă de sistem este o *curbă închisă*.

Dacă raportul pulsațiilor celor două oscilații care se compun este un *număr irațional*, traiectoria mișcării oscilatorii rezultante este o ***curbă deschisă***.

Figurile care descriu traiectoriile sistemului mecanic (fig. 3.11) sunt cunoscute sub numele de „***figurile lui Lissajous***” deoarece au fost prezentate pentru prima dată de fizicianul francez Jules Antoine Lissajous (1822-1880) în anul 1857. Figurile lui Lissajous sunt utilizate în electronică pentru determinarea frecvențelor cu ajutorul osciloscopului. Un semnal contribuie la deflexia orizontală, iar celălalt la deflexia verticală.

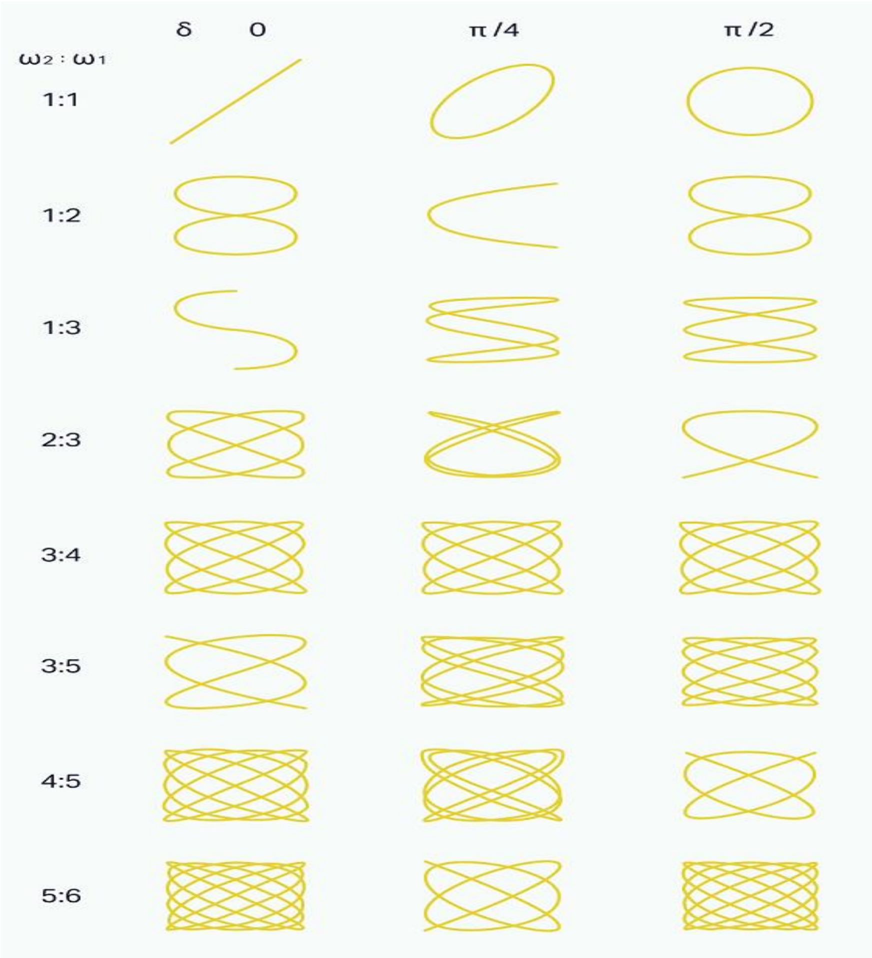


Fig. 3.11 Figuri ale lui Lissajous - traiectorii descrise de oscilația rezultată în cazul compunerii oscilațiilor perpendiculare de pulsații diferite

4. Unde în medii elastice

4.1 Noțiuni generale

Unda reprezintă fenomenul de propagare a unei oscilații (perturbații periodice) în spațiu și timp, fenomen însoțit de transport de energie prin mediu. Ca și exemple în acest sens, amintim: energia undelor luminoase care încălzesc Pământul sau energia undelor seismice care pot distruge clădirile.

Producerea unei unde elastice se poate realiza numai dacă există două elemente principale:

- sursă de oscilații,
- mediu elastic de propagare.

Mediul elastic este un mediu continuu (solid, lichid sau gazos) alcătuit din particule care interacționează între ele (molecule, atomi, ioni). Așadar, dacă una din particule oscilează, vor începe să oscileze și particulele vecine. Locul geometric al punctelor din spațiu la care a ajuns unda, la un moment dat, reprezintă ***suprafața de undă***. Suprafața de undă cea mai îndepărtată de sursa de unde se numește ***front de undă***.

Undele pot fi clasificate:

I. ***<u>După tipul de energie transportată</u>***

- *unde mecanice* = generate de perturbațiile mecanice locale ale unui sistem fizic, în medii materiale; se propagă în medii solide, lichide și gazoase, dar nu se propagă vid.
- *unde electromagnetice* = au ca suport al propagării câmpul electromagnetic; propagarea perturbațiilor electromagnetice are

loc atât în spațiul ocupat de substanță cât și în vid (ex: lumina, unde radio, infraroșii (IR), ultraviolete (UV), raze X, raze γ, etc.).

- *unde termice* = sunt generate de perturbații termice (sunt datorate diferențelor de temperatură) și caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;
- *unde magneto-hidrodinamice* = sunt generate prin perturbații electromagnetice și elastice ale mediului de propagare.

II. ***<u>După direcția de propagare a undei în raport cu direcția de oscilație a particulelor mediului</u>***

- *unde longitudinale* = oscilațiile particulelor mediului au loc paralel cu direcția de propagare a undei; se propagă în mediu *solid, lichid și gazos*
- *unde transversale* = oscilațiile particulelor mediului au loc perpendicular pe direcția de propagare a undei; se propagă în mediu *solid și la suprafața lichidelor.*

III. ***<u>După forma frontului de undă</u>***

- *unde plane*
- *unde circulare*
- *unde sferice*

Mărimile fizice pot avea variații locale în mediile în care se propagă unda. Dintre acestea amintim: deplasarea, viteza, densitatea, presiunea, temperatura, câmpul ş.a.m.d. Pentru fiecare caz în parte se poate construi un model teoretic care descrie propagarea perturbației. S-a observat că ecuațiile de propagare ale diverselor mărimi fizice au aceeași formă generală. Din acest motiv a fost elaborată o teorie aplicabilă oricărui tip de undă. Funcția $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ se numeşte ***funcție de undă***.

Mediul în care se propagă undele poate să aibă anumite particularități, astfel:

a. *După aplicarea principiului suprapunerii*:

- ***mediu liniar*** – unda rezultantă prin compunerea mai multor unde este descrisă de funcția de undă:

$$\Psi(x,y,z,t) = \sum_i \Psi_i(x,y,z,t)$$

- ***mediu neliniar***

b. *După cum variază proprietățile materialului în diferite puncte ale mediului*:

- ***mediu omogen*** – dacă proprietățile fizice sunt aceleași în orice punct, adică sunt independente de coordonatele de poziție;
- ***mediu neomogen***

c. *După cum variază cu direcția mărimile care caracterizează mediul*:

- ***mediu izotrop*** – proprietățile fizice sunt aceleași pentru orice direcție după care sunt măsurate;
- ***mediu anizotrop***

d. *După cum variază cu frecvența, viteza de propagare:*

- ***mediu dispersiv*** – pentru care viteza de propagare a perturbației depinde de frecvența oscilației inițiale;
- ***mediu nedispersiv*** – pentru care viteza de propagare este constantă, deci independentă de frecvență;

e. *După cum își păstrează unda, energia inițială*:

- ***mediu neabsorbant (conservativ)*** – fără generare de entropie;
- ***mediu absorbant (disipativ)*** – cu generare de entropie – dacă în procesul de propagare energia undei este cedată mediului sub formă de căldură.

În concluzie, **mediu ideal** *este liniar, omogen, izotrop, nedispersiv și conservativ.*

4.2 Ecuația undei

Considerăm o undă plană care se propagă într-un mediu ideal, de-a lungul axei Ox (Fig. 4.1). Sursa de oscilație care se află în originea axei oscilează, la momentul t, după legea:

$$\Psi(0,t) = A\sin\omega t \tag{4.1}$$

unde: A este amplitudinea, $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ este pulsația, iar $\Psi(0,t)$ este elongația oscilației sursei.

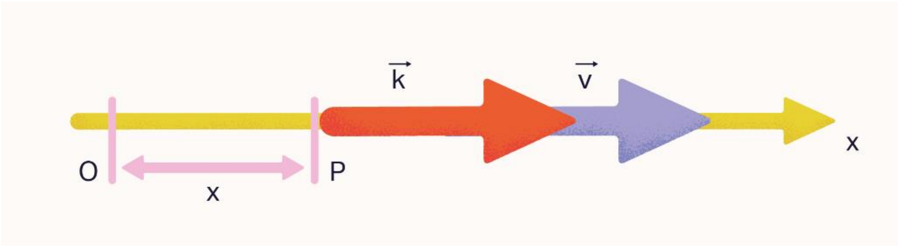


Fig. 4.1 Propagarea unei unde plane

Un punct *P*, situat la distanța x de sursă, va executa o oscilație identică cu cea a sursei, dar întârziată față de aceasta cu $(t - t')$. Întârzierea se datorează intervalului de timp $t' = \frac{x}{v}$ necesar ca oscilația care se propagă cu viteza v, să ajungă din sursa O în punctul P. Așadar, punctul P oscilează după legea:

$$\Psi(x,t) = A\,sin\,\omega(t - t') = A\,sin\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{4.2}$$

care reprezintă ***ecuația undei plane***.

Funcția $\Psi(x,t)$ este periodică atât în timp, cu perioada T, cât şi în spaţiu, cu perioada λ numită ***lungime de undă***. ***Lungimea de undă reprezintă spațiul parcurs de undă în timp de o perioadă,*** iar ecuația acesteia se obține din condiția de periodicitate spațială:

$$A \sin \omega\left(t-\frac{x+\lambda}{v}\right)=A\, sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)-2\pi\right]$$
$$\frac{\omega\lambda}{v}=2\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda=v\frac{2\pi}{\omega} \tag{4.3}$$

Așadar, ***lungimea de undă*** este descrisă de relația:

$$\lambda=v\cdot T \tag{4.4}$$

Ecuația undei plane (*forma integrală*) se poate exprima astfel:

$$\Psi(x,t)=A\, sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=A\, sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$
$$=A\, sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{v\cdot T}\right)=A\, sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$
$$=A\, sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=A\sin\left(\omega t-kx\right) \tag{4.5}$$

unde k, numit **număr de undă** (arată numărul de lungimi de undă cuprins pe o distantă de 2π), este modulul **vectorului de undă** $\vec{k}$ definit prin următoarele elemente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{directie}: paralelă\ cu\ direcția\ de\ propagare\ a\ undei \\ \boldsymbol{sens}: același\ cu\ sensul\ de\ propagare\ al\ undei \\ \boldsymbol{marime}: k=\dfrac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

Să notăm că numărul de undă mai poate fi exprimat sub forma:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{vT}=\frac{2\pi\upsilon}{v}=\frac{\omega}{v} \tag{4.6}$$

Pornind de la relația (4.5) calculăm derivatele parțiale de ordinul doi, în raport cu spațiul, respectiv cu timpul:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-k^2A\, sin\left(\omega t-kx\right)$$
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\omega^2A\, sin\left(\omega t-kx\right) \tag{4.7}$$

Din relațiile (4.6) și (4.7) rezultă:

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

relații ce reprezintă ***ecuația generală a undei unidimensionale***.

În cazul în care unda se propagă după o direcție oarecare $\vec{r}$ care nu coincide cu nici una dintre axele de coordonate, ecuația de propagare a undei are forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

sau:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

unde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.11}$$

reprezintă *laplacianul* funcției de undă.

4.3 Viteza de propagare a undelor

Dacă direcția de oscilație a particulelor mediului este paralelă cu direcția de propagare a undei, acestea se numesc ***unde longitudinale***, iar dacă cele două direcții sunt perpendiculare, undele sunt ***unde transversale*** (fig. 4.2).

Viteza de propagare a oscilațiilor într-un mediu elastic se mai numește ***viteza de fază***. Aceasta este dependentă de proprietățile și starea de agregare a mediului prin care se propagă unda, dar nu depinde de intensitatea perturbației. Astfel:

$$v = \upsilon \cdot \lambda = \frac{\lambda}{T} \tag{4.12}$$

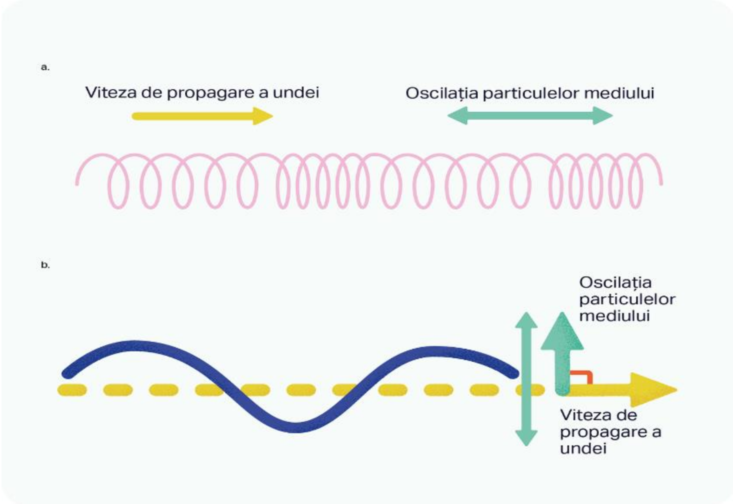


Fig. 4.2 Propagarea undelor longitudinale (a), respectiv transversale (b)

S-a observat că viteza de fază este determinată de proprietățile mediului și de starea de agregare.

Știind că undele longitudinale se propagă în mediile solide, lichide și gazoase, iar undele transversale se propagă în mediile solide și la suprafața lichidelor, în cele ce urmează vom determina viteza undelor funcție de natura lor și de mediul în care se propagă.

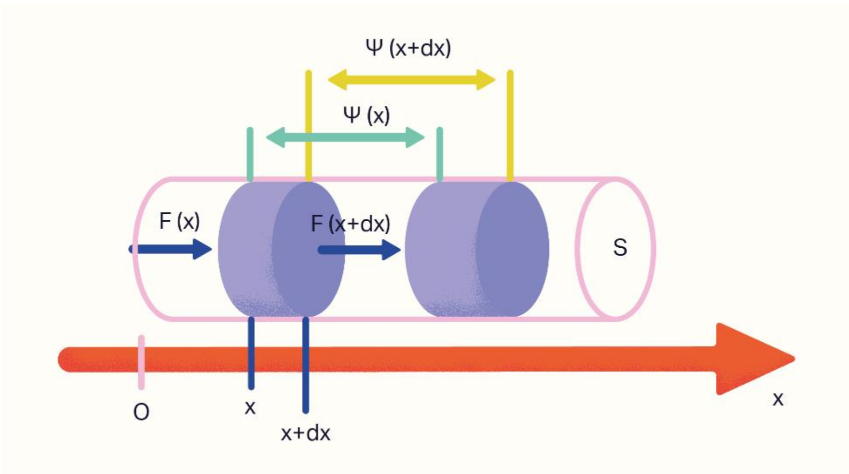


Fig. 4.3 Deplasarea undelor longitudinale printr-o bară metalică

4.3.1 Viteza undelor longitudinale

A. în solide:

Considerăm o bară elastică omogenă și izotropă de formă cilindrică de secțiune *S*, având masa *m*, densitate ρ, și modul de elasticitate (modulul lui Young) *E*, (fig. 4.3). Dacă există o sursă de unde longitudinale la capătul barei de lungime *l* atunci aceasta se va deforma cu Δl datorită faptului că în bară vor lua naștere forțe elastice (tensiuni) conform legii lui Hooke:

$$F = ES\frac{\Delta l}{l} \tag{4.13}$$

În această bară, considerăm un element de volum $dV = Sdx$ şi masă $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot Sdx$, cuprins între pozițiile x (unde deformația produsă este descrisă de funcția de undă $\Psi(x)$) și x+*dx* (unde deformația produsă este descrisă de funcția de undă $\Psi(x + dx)$) (fig. 4.3). O undă produsă de sursă va trece prin bară cauzând deformări (compresii și destinderi succesive) de-a lungul direcției de propagare. Pentru deplasările infinitezimale *dx*, elongația (deformarea produsă de undă) se poate dezvolta în serie Taylor:

$$\Psi(x + dx) = \Psi(x) + \frac{d\Psi}{dx}dx + \cdots \tag{4.14}$$

Astfel, forța elastică ce acționează asupra elementului infinit mic de bară de lungime inițială *dx*, conform relației (4.13) este:

$$F = ES\frac{d\Psi}{dx} \tag{4.15}$$

Diferențiind relația anterioară obținem forța elementară *dF*, care acționează asupra elementului de volum $dV = Sdx$

$$dF = \frac{dF}{dx}dx = \frac{d}{dx}\left(ES\frac{d\Psi}{dx}\right)dx = ES \cdot \frac{d^2\Psi}{dx^2}dx \tag{4.16}$$

Pe de altă parte, ținând seama de principiul fundamental al mecanicii, forța elementară *dF* ce acționează asupra elementului infinitezimal de masă *dm* poate fi scrisă funcție de accelerația oscilației $\left(a = \frac{d^2\Psi}{dt^2}\right)$ elementului de volum considerat:

$$dF = dm \cdot a = \rho dV \cdot \frac{d^2\Psi}{dt^2} = \rho S dx \cdot \frac{d^2\Psi}{dt^2} \qquad (4.17)$$

Ținând cont de relațiile (4.16) şi (4.17) rezultă

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (4.18)$$

Comparând rezultatul obținut cu diferențiala ecuației undelor (4.8), obținem ***viteza undelor longitudinale în solide***:

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (4.19)$$

unde:

E – modul longitudinal de elasticitate;

ρ – densitatea solidului.

Exemplu - pentru oțel:

$$E = 2 \cdot 10^{11}\, N/m^2\ ,\quad \rho = 7.7 \cdot 10^3\, kg/m^3 \quad \Rightarrow v_{oțel} \cong 5100\, m/s$$

B. *în lichide*:

Așa cum am știm deja, în lichide se pot propaga doar undele longitudinale, unde care se propagă prin dilatări și comprimări succesive ale mediului. Lichidele sunt caracterizate de ***modul de compresibilitate,*** notat în general cu $\boldsymbol{\beta}$. Astfel, pentru a putea exprima viteza undelor longitudinale în lichide, modulul longitudinal de elasticitate (Young) trebuie scris funcție de modulul de compresibilitate:

$$E = \frac{\frac{dF}{S}}{\frac{|dl|}{l}} = \frac{dp}{\frac{|dl|\cdot S}{l\cdot S}} = \frac{dp}{\frac{|dV|}{V}} = \beta \qquad (4.20)$$

unde *coeficientul de compresibilitate al lichidului*:

$$\chi = dp\frac{V}{|dV|} \qquad (4.21)$$

Acest coeficient caracterizează procesul de compresie (schimbarea relativă a volumului corespunzătoare unor variații de presiune) pentru mediile lichide și gazoase. Observăm că o creștere a presiunii ($dp > 0$) produce micșorarea volumului ($dV < 0$) motiv pentru care variația volumului este considerată în modul. Așadar, ***viteza undelor longitudinale în lichide*** este dată de relația:

$$v_l = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \tag{4.22}$$

unde:

$\beta = \frac{1}{\varepsilon}$ – modul de compresibilitate, iar ε – modul de elasticitate;

ρ – densitatea lichidului.

Exemplu - pentru apă:

$$\beta = 0.195 \cdot 10^{10}\, N/m^2,\ \rho \cong 10^3\, kg/m^3 \qquad \Rightarrow \qquad v_{apă} \cong 1400\, m/s$$

C. *în gaze*:

Doar undele longitudinale se pot propaga în mediul gazos. Procesul de propagare a unei unde elastice într-un gaz poate fi:

- **izoterm** ($T = const.$) pentru unde având frecvențe joase $\nu \leq 3Hz$
- **adiabatic** ($Q = 0$) pentru unde având frecvențe înalte $\nu > 3Hz$

Pentru frecvențe joase, procesul de comprimare/destindere este izoterm, iar din legea transformării izoterme, prin diferențiere obținem:

$$pV = const. \Rightarrow dp \cdot V + p \cdot dV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{p}dp \tag{4.23}$$

Comparând relația anterioară cu definiția modulului de compresibilitate, rezultă:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta}dp \quad \Rightarrow \qquad \beta = p \tag{4.24}$$

Când transformările suferite de gaz sunt izoterme, viteza undelor longitudinale, este dată de relația:

$$v_g = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \tag{4.25}$$

unde:

p – presiunea gazului;

ρ – densitatea gazului.

Pentru frecvențe înalte, procesul de comprimare/destindere este adiabat, iar din legea transformării adiabate, prin diferențiere obținem*:*

$$pV^{\gamma} = const. \Rightarrow dp \cdot V^{\gamma} + p \cdot \gamma \cdot dV = 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma p} dp \tag{4.27}$$

Ținând cont de definiția modulului de compresibilitate, rezultă:

$$\beta = \gamma \cdot p \tag{4.28}$$

Viteza undelor longitudinale, când transformările suferite de gaz sunt adiabate, este dată de relația:

$$v_g = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} \tag{4.29}$$

Știind că pentru un gaz ideal, ecuația de stare este:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V}\frac{RT}{\mu} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \tag{4.30}$$

Atunci, viteza undelor longitudinale în gaz este:

$$v_g = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \tag{4.31}$$

unde:

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – coeficient adiabatic;

$R = 8.31\, J/mol \cdot K$ – constanta universală a gazelor;

T – temperatura absolută;

μ – masa molară a mediului în care se propagă unda.

Exemplu - pentru aer:

$$\gamma = 1.4;\ R = 8.31\ J/mol \cdot K;\ T = 300K;\ \mu = 28.98 \cdot 10^{-3}\ kg/mol$$

$$\Rightarrow\ v_{aer} = 340\ m/s$$

4.3.2 Viteza undelor transversale

Undele transversale se propagă doar în mediile solide elastice. Astfel, considerăm o coardă elastică, omogenă de lungime l de-a lungul căreia se propagă unde transversale. De-a lungul corzii un element de lungime Δl, având masa Δm, formează un arc de cerc de rază R, asemănător fig. 4.4. Densitatea liniară a corzii (masa unității de lungime) se definește ca:

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta l} \qquad (4.32)$$

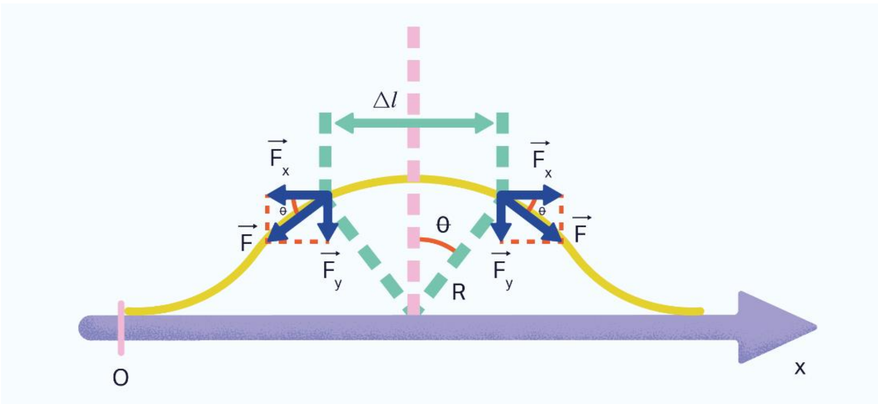


Fig. 4.4 Undă transversală care se propagă de-a lungul unei corzi

Forța $\vec{F}$ care acționează asupra corzii este tangentă la ambele capete ale segmentului de lungime Δl (fig. 4.4). Astfel:

- ***după axa Ox***: - componentele forței se anulează reciproc, deoarece ele acționează pe aceeași direcție fiind egale în modul dar de sens opus.

- ***după axa Oy***: - componentele forței acționează pe direcții diferite, și sunt egale cu:

  $$F_y = F \sin\theta \tag{4.33}$$

Rezultanta forțelor care acționează după axa Oy este:

$$F_r = 2F \sin\theta \tag{4.34}$$

dar, observăm că:

$$\sin\theta = \frac{\frac{\Delta l}{2}}{R} = \frac{\Delta l}{2R} \tag{4.35}$$

Atunci

$$F_r = 2F \sin\theta = 2F\ \frac{\Delta l}{2R} = F\ \frac{\Delta l}{R} \tag{4.36}$$

Dar forța rezultată este o forță de tip centripet, adică:

$$F\ \frac{\Delta l}{R} = \frac{\Delta m \cdot v^2}{R} \Longrightarrow F \cdot \Delta l = \Delta m \cdot v^2 \Longrightarrow\ v^2 = F\frac{\Delta l}{\Delta m} \tag{4.37}$$

Viteza undelor transversale este:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{4.38}$$

unde:

T – tensiunea din coardă;

μ – masa unității de lungime a corzii.

Observație! *În mediile solide viteza undelor longitudinale este mai mare decât viteza undelor transversale.*

Această deosebire este folosită *în seismologie* pentru determinarea epicentrelor cutremurelor deoarece: *unda longitudinală* este percepută prima ca o trepidație a podelei, iar *unda transversală* este percepută la o distanță de zeci de secunde ca o vibrație pe orizontală.

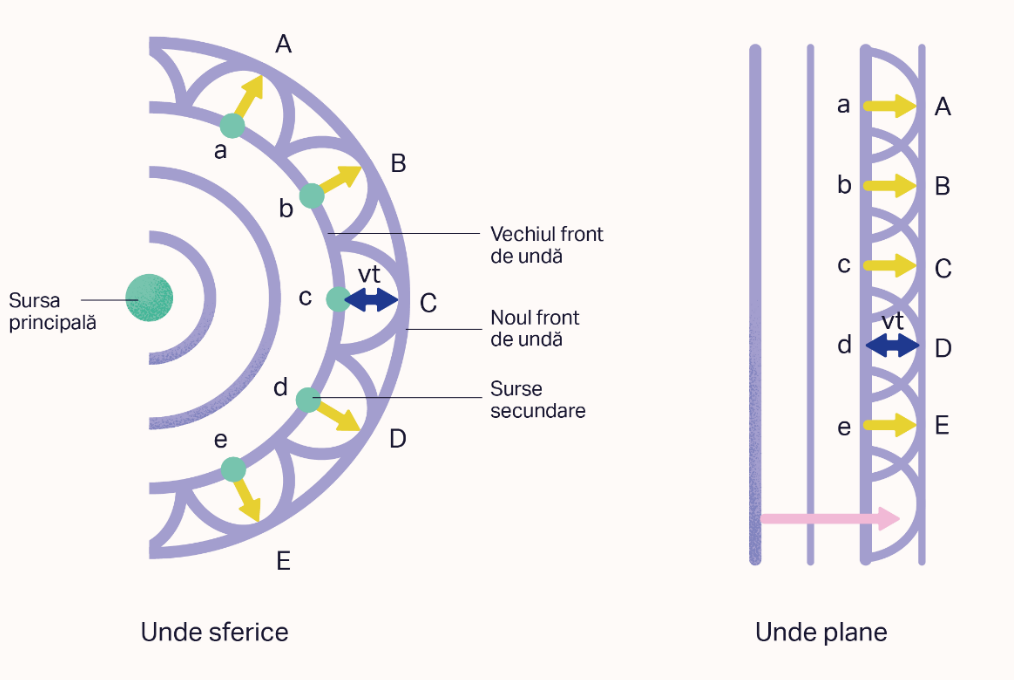


Fig. 4.5 Ilustrarea principiului lui Huygens

4.4 Fenomene caracteristice propagării undelor

În cele ce urmează vom trata numai câteva dintre fenomenele care pot să apară atunci când una sau mai multe unde elastice întâlnesc neomogenități ale mediului (reflexia, refracția, difracția) sau când undele interacționează între ele (interferența).

Principiul lui Huygens oferă o metodă experimentală pentru construcția suprafețelor de undă (fig. 4.5) și explicarea fenomenelor care apar la suprafața de separare dintre două medii elastice diferite.

Christian Huygens (cel care a perfecționat ceasurile) a propus, la mijlocul secolului al XVII−lea, următoarea explicație a propagării undelor:

Fiecare punct al unui front de undă se poate considera ca sursă secundară de perturbații, de la care se propagă unde secundare în toate

direcțiile. Noul front de undă este înfășurătoarea fronturilor de undă secundare.

4.4.1 Reflexia și refracția

La suprafața de separare dintre două medii pot apărea fenomene specifice: ***reflexia*** și/sau ***refracția*** undelor mecanice.

În funcție de natura suprafeței de separare, fenomenele pot avea loc fie separat, fie simultan. Totuși în ambele fenomene: raza incidentă, raza reflectată și normala la suprafața de separare în punctul de incidență se găsesc în același plan.

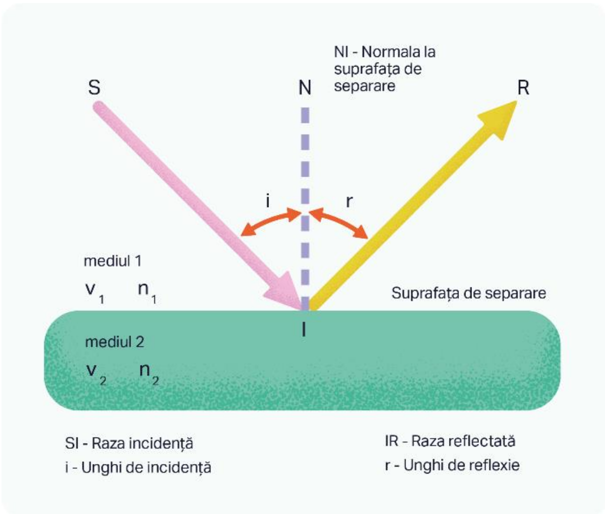


Fig. 4.6 Ilustrarea fenomenului de reflexie

Reflexia undei – reprezintă fenomenul de întoarcere a undei în mediul din care a venit atunci când întâlnește suprafața de separare dintre două medii (Fig. 4.6). Așadar, la suprafața de separare dintre cele două medii, unda își schimbă brusc direcția de propagare.

În cele ce urmează se impune a introduce noțiunile de unghi de incidență, respectiv unghi de reflexie.

Se numește ***unghi de incidență***, $\hat{\imath}$, unghiul format de frontul de undă incident descris de raza incidentă și normala la suprafață.

Se numește ***unghi de reflexie***, $\hat{r}$, unghiul format de frontul de undă reflectat descris de raza reflectată și normala la suprafață.

Unda formată prin reflexie se numește *undă reflectată*.

Ecuația undei reflectate este:

$$\Psi_r(x,t) = A \sin{(\omega t - kx + \varphi)} \tag{4.39}$$

unde în funcție de valoarea lui φ, reflexiile pot fi:

- pentru $\varphi = \pi \Rightarrow$ reflexiile sunt cu pierdere de jumătate de lungime de undă $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$;
- pentru $\varphi = 0 \Rightarrow$ reflexiile sunt fără pierderi – cazul ideal.

Legea reflexiei:

Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență: $\hat{r} = \hat{\imath}$

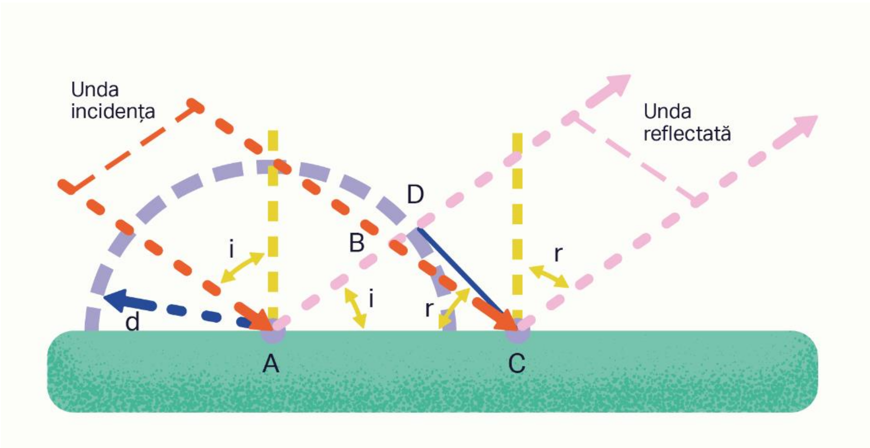


Fig. 4.7 Ilustrarea fenomenului de reflexie cu ajutorul principiului lui Huygens

Cu ajutorul fig. 4.7 se poate demonstra legea reflexiei pe baza principiului lui Huygens. Astfel:

$$AD\ este\ raza\ frontului\ de\ undă, a\ undei\ produse\ din\ punctul\ A$$
$$AD = BC = d$$
$$\Delta ABC = \Delta CDA\ sunt\ triunghiuri\ dreptunghice\ cu\ latura\ AC\ comună$$
$$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{ACD} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{r}}$$

Refracția undelor – reprezintă fenomenul de schimbare a direcției de propagare a undelor mecanice datorită schimbării vitezei de propagare, la interfața dintre două medii. Exemplul cel mai la îndemână de observat este cel al luminii, atunci când aceasta trece dintr-un mediu transparent (aer, apă, sticlă etc.) în altul. Totuși fenomenul se poate petrece identic în cazul oricărui tip de undă.

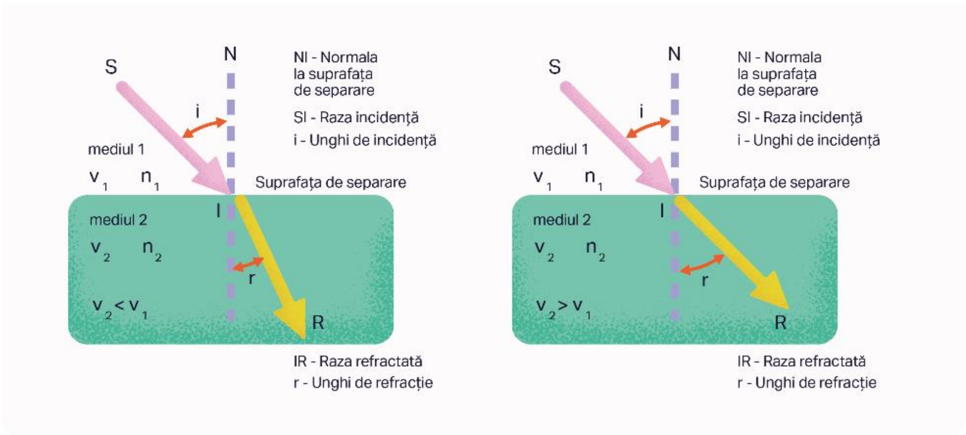


Fig. 4.8 Ilustrarea fenomenului de refracție când $v_2 < v_1$ și respectiv $v_2 > v_1$

Dacă unda mecanică trece dintr-un mediu cu viteza v_1 și indicele de refracție n_1 într-un mediu cu viteza v_2 și indicele de refracție n_2 atunci raza refractată:

a. se apropie de normală când $v_2 < v_1\ și\ n_2 > n_1$;

b. se îndepărtează de normală când $v_2 > v_1$ $și$ $n_2 < n_1$.

Unda formată prin refracție se numește *undă refractată*.

Legea refracției – Snell-Decartes:

Indicele de refracție relativ al mediului 2 în raport cu mediul 1 este dat de raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sin \boldsymbol{i}}{\sin \boldsymbol{r}} \tag{4.40}$$

unde:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_2}} = \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}} \tag{4.41}$$

iar:

n_1 – indicele de refracție al mediului 1;

n_2 – indicele de refracție al mediului 2;

v_1 – viteza de propagare în mediul 1;

v_2 – viteza de propagare în mediul 2.

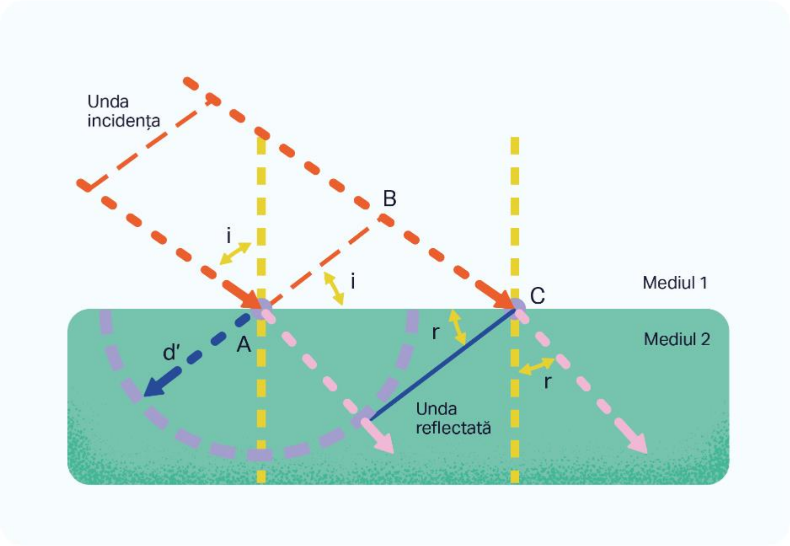


Fig. 4.9 Ilustrarea fenomenului de refracție cu ajutorul principiului lui Huygens

Pentru demonstrarea legii refracției vom utiliza principiul lui Huygens și ne vom folosi de fig. 4.9.

Observăm că AE este raza frontului de undă, iar din triunghiurile dreptunghice ΔABC și ΔCAE putem scrie:

$$\sin i = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 \Delta t}{AC}$$
$$\sin r = \frac{AE}{AC} = \frac{v_2 \Delta t}{AC} \qquad (4.42)$$

Din raportul celor două relații (5.27) rezultă:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (4.43)$$

Dacă unghiul de incidență este mai mare sau egal cu unghiul de incidență limită $(i \geq l)$, adică un unghi la care raza nu mai trece în al doilea mediu apare fenomenul de ***reflexie totală***. În acest caz:

$$n_1 \sin l = n_2 \sin 90^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\sin l = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (4.44)$$

4.4.2 Difracția undelor

Difracția undelor reprezintă fenomenul fizic de ocolire aparentă a unui obstacol de către unda elastică. Efectul difracției este cu atât mai evident cu cât dimensiunea fantei (obstacolului) este de ordinul de mărime al lungimii de undă, λ, a undelor care se propagă. Astfel, trebuie menționat faptul că în cazul difracției undele se propagă tot prin același mediu, deci nu își schimbă parametrii caracteristici.

Să considerăm o sursă de oscilații S care emite unde sferice. Dacă unda incidentă se apropie de un ecran în care este o deschidere *AB*, propagarea undelor în spatele ecranului depinde de lărgimea acestei deschideri (Fig. 4.10).

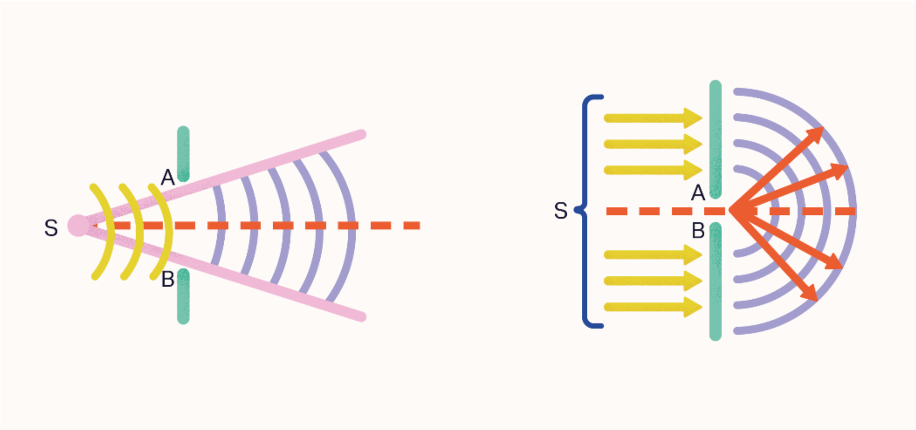


Fig. 4.10 Propagarea unei unde după trecerea printr-o fantă

Astfel, întâlnim următoarele cazuri:

- Dacă deschiderea fantei AB este suficient de mare ($AB >> \lambda$) se observă experimental că undele se propagă prin deschidere mentinându-și în continuare caracterul de unde sferice cu centrul în sursa S.
- Dacă deschiderea fantei AB este mică ($AB < \lambda$), iar sursa de oscilații S emite unde plane, atunci, în spatele ecranului apar unde sferice, concentrice cu centrul în deschiderea fantei.

Acest fenomen are explicație în principiul lui Huygens, adică deschiderea ($AB < \lambda$) devine o sursă secundară de oscilații care transmite și extinde procesul ondulatoriu în toată regiunea din spatele ecranului.

În practică întâlnim doua tipuri de difracție în funcție de distanța dintre centrul fantei și punctul de analiză a rezultatelor:

• ***difracție Fraunhoffer***, atunci când punctul de analiză se află departe de centrul fantei, caz în care undele incidentă și difractată sunt unde plane.

• ***difracție Fresnel,*** atunci când punctul de analiză se află aproape de centrul fantei, iar undele incidentă și difractată sunt unde sferice.

4.4.3 Interferența undelor. Unde staționare

Pentru a putea defini fenomenul de interferență trebuie mai întâi definită noțiunea de unde coerente. Așadar, două *unde sunt coerente* dacă oscilațiile surselor care le emit au aceeași frecvență și diferența de fază constantă în timp.

Fenomenul de suprapunere a două sau mai multe ***unde coerente***, obţinându-se o undă rezultantă a cărei amplitudine depinde de defazajul dintre cele două unde reprezintă ***interferența undelor***.

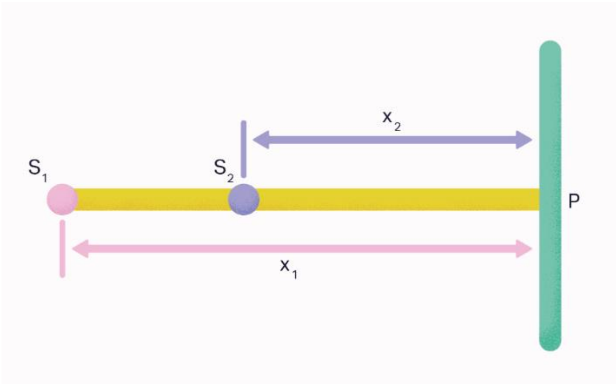


Fig. 4.11 Interferența a două unde provenite de la surse diferite

In fig. 4.11 considerăm două surse S_1 și S_2 care emit unde coerente pe direcția distanței dintre ele spre un punct P. Ecuațiile de propagare a celor două unde sunt:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_1 \sin(\omega t - kx_1) \\ \Psi_2 &= A_2 \sin(\omega t - kx_2) \end{aligned} \qquad (4.45)$$

Datorită caracterului liniar al ecuației diferențiale a undelor, unda rezultantă în punctul P se obţine însumând funcţiile de undă ale celor două unde.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \qquad (4.46)$$

Așadar, unda rezultantă în punctul P va avea aceeași pulsație ω, amplitudinea fiind dată de relația:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (4.47)$$

iar valoarea defazajului este:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - kx_1 - \omega t + kx_2 = k\,(x_2 - x_1) \qquad (4.48)$$

Astfel în punctul *P* se pot întâlni următoarele situații (fig. 4.11):

- ***interferență constructivă*** = *amplitudinea este maximă*

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

$$\Delta\varphi = k\,(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = n\pi$$

$$x_2 - x_1 = 2n\frac{\lambda}{4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

- ***interferență distructivă*** = *amplitudinea este minimă*

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

$$\Delta\varphi = k\,(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

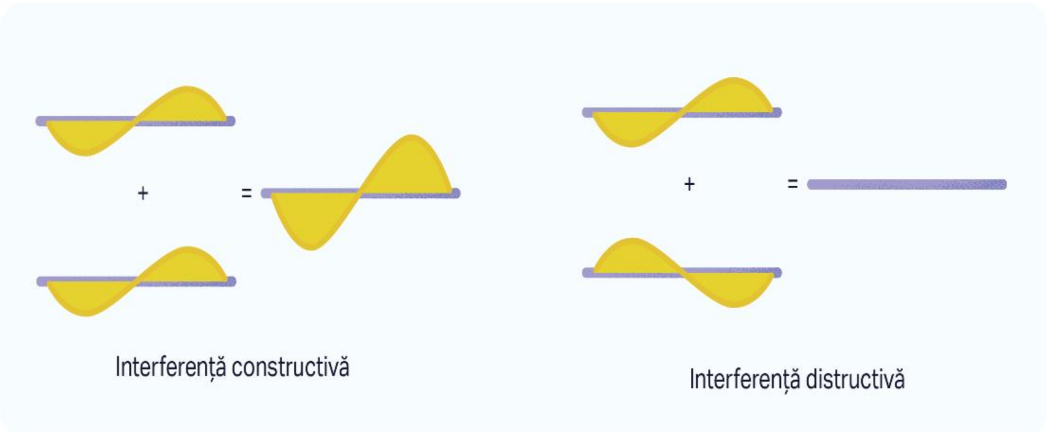


Fig. 4.12 Tipuri de interferență

Unde staționare.

Un caz particular de interferență îl constituie compunerea a două unde coerente de amplitudini egale, care se propagă în sensuri contrare, în urma căreia apar *undele staționare*.

Fie o undă de amplitudine A care se propagă de la o sursă O în direcția OM. Unda se reflectă fără pierdere în M, iar apoi se întâlnește cu unda incidentă (Fig. 4.13). Ecuațiile undelor incidente și reflectate în N sunt:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= A\ \sin\left(\omega t - kx_1\right) \\ \Psi_r &= A\ \sin\left(\omega t - kx_2\right) \end{aligned} \tag{4.49}$$

unde:

$$x_2 = d + x = 2d - x_1 \tag{4.50}$$

Astfel, în punctul N:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos k\frac{x_2 - x_1}{2}\sin\left(\omega t - k\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \tag{4.51}$$

Dacă notăm:

$$\begin{aligned} x_2 + x_1 &= 2d \\ x_2 - x_1 &= 2x \end{aligned} \tag{4.52}$$

atunci:

$$\Psi = 2A\cos kx\,\sin(\omega t - kd) \tag{4.53}$$

De unde se observă că punctul N oscilează cu aceeași frecvență, iar amplitudinea acestuia este:

$$A(x) = 2A\cos kx \tag{4.54}$$

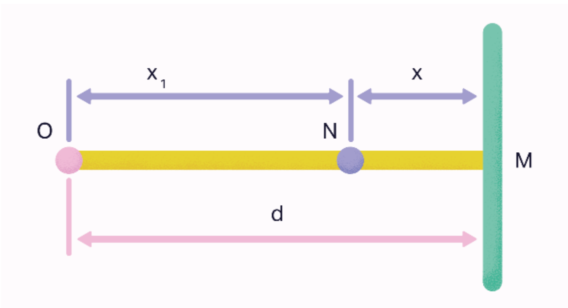


Fig. 4.13 Principiul apariției undelor staționare

Valorile amplitudinii pot fi:

a. ***maxime*** pentru $\boldsymbol{x = 2n\frac{\lambda}{4}}$

$$\cos kx = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot n\frac{\lambda}{2}\right) = \cos(n\pi) = \pm 1$$

$$\boldsymbol{A(x) = \pm 2A \;\; \Rightarrow A(x) = maxim}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Punctele pentru în care se obțin maximele amplitudinii se numesc ***ventre.***

b. ***minime*** pentru $\boldsymbol{x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}}$

$$\cos kx = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2n + 1)\frac{\lambda}{4}\right) = \cos(2n + 1)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{A(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{A(x)} = minim}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Punctele în care nu apar deloc perturbații se numesc ***noduri.***

Distanța dintre două ventre vecine este:

$$x_2 - x_1 = (2n + 2)\frac{\lambda}{4} - 2n\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} \tag{4.55}$$

distanța dintre două noduri vecine este:

$$x_2 - x_1 = (2n + 3)\frac{\lambda}{4} - (2n + 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} \tag{4.56}$$

distanța dintre un nod și ventrul cel mai apropiat este:

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} - 2n\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} \tag{4.57}$$

În cazul reflexiei undelor cu pierdere de $\frac{\lambda}{2}$, punctele de maxim devin puncte de minim și punctele de minim devin puncte de maxim.

Trebuie menționat faptul că atât undele transversale cât și cele longitudinale pot genera unde staționare.

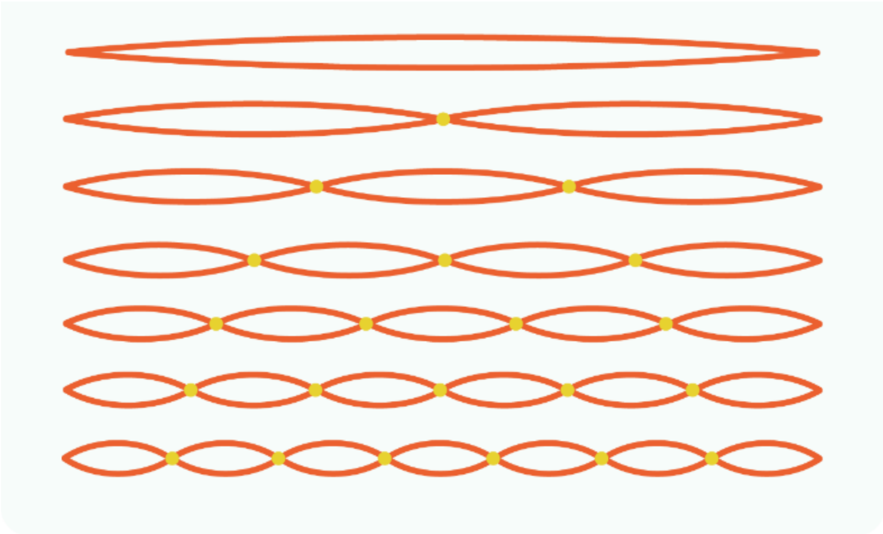


Fig. 4.14 Reprezentarea apariției undelor staționare într-o coardă fixată la capete: $\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

5. Elemente de acustică și ultraacustică

"Akoustikos" este un termen care provine din limba greacă și înseamnă a asculta sau a auzi. ***Acustica*** este știința care se ocupă cu studiul producerii, propagării și proprietăților sunetelor și a influenței lor asupra ființei umane. ***Sunetele*** sunt unde elastice longitudinale care pot fi studiate din punct de vedere:

- ***Obiectiv*** - Sunetul este ***fenomenul fizic*** produs de vibrația mecanică a corpurilor solide sau lichide. Astfel, sunetele sunt caracterizate prin mărimi specifice undelor: amplitudine, perioadă, lungime de undă, frecvență, pulsație, dar și prin: presiune, intensitate și densitate de energie sonoră.
- ***Subiectiv*** - Sunetul este ***fenomenul fiziologic*** produs de senzația percepută de urechea umană, fiind caracterizat de: tărie, înălțime și timbru.

Undele sonore pot fi clasificate în acord cu posibilitățile de percepție ale omului, în:

- ***Infrasunete*** – unde elastice cu frecvența sub 20Hz;
- ***Sunete*** – unde elastice având frecvența în limitele $20\ \mathrm{Hz} \leq \upsilon \leq 20\ \mathrm{kHz}$;
- ***Ultrasunete*** – unde elastice cu frecvența mai mare de 20 kHz.

Pentru ca o undă sonoră să provoace senzații auditive asupra creierului uman, au nevoie de un mediu elastic în care să se propage și trebuie să îndeplinească, simultan, următoarele condiții:

- ***durată mai mare de*** $0{,}06$ s***;***
- ***intensitate peste pragul de audibilitate*** $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$***;***
- ***frecvență cuprinsă în intervalul*** $20\ \mathrm{Hz} \leq \upsilon \leq 20\,000\mathrm{Hz}$**.**

Acustica se împarte în diferite subdomenii, dintre care amintim:

Acustica arhitecturală studiază distribuția undelor sonore în interiorul spațiilor închise și influența pe care elementele ce definesc spațiul (geometria, materialele, decorația etc.) o au asupra propagării acestora.

Acustica tehnică se preocupă cu predilecție de conceperea soluțiilor tehnice pentru izolare fonică între spațiile cu diferite utilizări.

Acustica muzicală se ocupă cu designul instrumentelor muzicale, precum şi cu modul în care sunetele influențează ascultătorul.

Acustica mediului înconjurător are ca obiect de studiu managementul și protecția împotriva zgomotului produs de sursele fixe (industrie, spații de învățământ și/sau divertisment) și mobile (trafic aerian, terestru sau subteran) din mediul ambiant.

Acustica ultrasunetelor se ocupă de undele sonore cu frecvențe peste pragul audibil și aplicațiile acestora în industrie și medicină.

5.1 Mărimi caracteristice undelor sonore

Sunetele pot fi generate de corpuri sau medii elastice care oscilează. Dintre acestea amintim: instrumente cu coarde, membrane, plăci vibrante sau tuburi sonore. Regiunea din spațiu în care se propagă undele sonore se numește *câmp sonor.* Particulele aflate în câmp sonor efectuează oscilații mecanice în jurul poziției de echilibru. Legea de mișcare a particulelor din câmpul sonor atinse de frontul de undă al unor unde armonice plane este:

$$\Psi(x,t) = A \sin\,(\omega t - kx) \tag{5.1}$$

unde: A reprezintă amplitudinea oscilației, ω este pulsația oscilației particulelor mediului, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ este număr de undă, t este timpul în care oscilația ajunge în punctul x, iar x este distanța parcursă de oscilații față de sursă.

Viteza instantanee a particulelor mediului elastic este:

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega\ A\ cos\ (\omega t - kx) \qquad (5.2)$$

Accelerația oscilațiilor particulelor mediului elastic este:

$$a = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\ \omega^2 A\ sin\ (\omega t - kx) \qquad (5.3)$$

O mărime care caracterizează câmpul sonor este ***presiunea sonoră*** care apare la deplasarea undei prin mediu și care permite caracterizarea câmpului sonor în fiecare punct al său.

Presiunea sonoră

Diferența dintre presiunea într-un punct din câmpul sonor în prezența undelor sonore și valoarea presiunii în absența acestora se numește ***presiune sonoră*** sau *presiune acustică*.

La înaintarea undei sonore printr-un mediu elastic apar comprimări și destinderi succesive ale particulelor mediului, de-a lungul direcției de propagare, datorită oscilațiilor particulelor mediului. În consecință, în prezența undelor sonore, apar modificări ale presiunii în mediul considerat. Astfel, ținând cont de relația de definire a presiunii și de legea lui Hooke, presiunea sonoră se determină pornind de la relația:

$$p = -\frac{F}{S} = -E\frac{\Delta l}{l_0} \qquad (5.4)$$

Semnul ”-” se datorează învingerii forței elastice care se opune deformării.

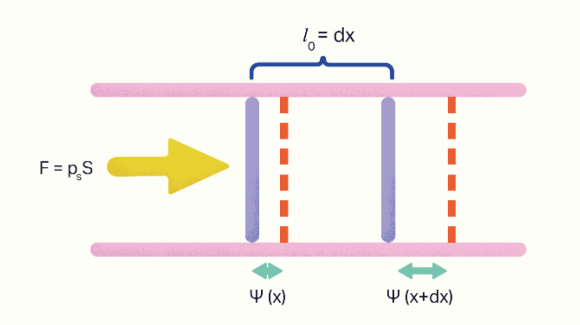


Fig. 5.1 Deformarea mediului elastic când este parcurs de unda sonoră

Pentru a deduce valoarea presiunii sonore instantanee, considerăm (vezi fig. 5.1) un element de volum infinit mic de lungime $l_0 = dx$ în mediul elastic prin care se propagă undele sonore. Acest element se va deforma sub acțiunea forțelor elastice cu: $\Delta l = \Psi(x + dx) - \Psi(x) = d\Psi$, deoarece capetele intervalului se deplasează în prezența undei cu $\Psi(x)$ şi respectiv $\Psi(x + dx)$. Atunci, ținând cont de relația (5.1) avem:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k\ A\ cos\ (\omega t - kx) = -\frac{\omega}{v} A\ cos\ (\omega t - kx) \qquad (5.5)$$

Deoarece viteza de propagare a undelor sonore (longitudinale) este dată de relația:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad E = \rho \cdot v^2 \qquad (5.6)$$

presiunea sonoră instantanee care se exercită asupra mediului este:

$$p = \rho \cdot v \cdot \omega\ \cdot A\ cos\ (\omega t - kx) \qquad (5.7)$$

Presiunea sonoră maximă este dată de relația:

$$p_{max} = \rho \cdot v \cdot \omega\ \cdot A = \rho \cdot v \cdot v_{max} \qquad (5.8)$$

unde: ρ = densitatea mediului;

v = viteza de propagare a undei sonore;

v_{max} = viteza maximă de propagare a oscilațiilor elementare.

Definim *presiunea sonoră efectivă* ca valoarea medie a presiunii sonore instantanee:

$$p_{eff} = \langle p \rangle = \rho \cdot v \cdot \omega \cdot A \langle \cos(\omega t - kx) \rangle$$
$$\Rightarrow \quad p_{eff} = \frac{\rho \cdot v \cdot \omega \cdot A}{\sqrt{2}} = \frac{p_{max}}{\sqrt{2}} \tag{5.9}$$

În Sistemul Internațional presiunea sonoră se măsoară în *Pascali* (Pa). Legătura dintre bar (o unitate de măsură folosită uzual pentru măsurarea presiunii, în practică) și pascal este: $1\ bar = 10^5\ N/m^2 = 10^5\ Pa$.

În aer la distanța de $1m$ se creează o presiune sonoră de:

$p \approx 0.01\ bari = 10^3\ Pa$ pentru vorbirea în șoaptă;

$p \approx 10\ bari = 10^6\ Pa$ pentru strigăt;

$p \approx 200\ bari = 2 \cdot 10^7\ Pa$ în cazul unui motor de avion.

Raportul dintre presiunea sunetului și viteza de propagare a acestuia se numește ***impedanță acustică***:

$$z = \frac{p_{max}}{v_{max}} = \rho \cdot v \tag{5.10}$$

Așadar, ***impedanța acustică*** reprezintă rezistența mediului de densitate ρ la propagarea unei unde, de viteză v. Cu cât impedanța acustică a unui mediu este mai mare, cu atât undele sonore se propagă mai rapid în acel mediu. Impedanța acustică este deseori luată în calcul în cazul materialelor folosite la izolarea fonică a clădirilor.

Intensitatea sonoră

Propagarea undelor sonore implică mișcare, ceea ce înseamnă un consum de energie. În cazul undelor, energia consumată reprezintă energia necesară învingerii forței elastice care se opune deformării. Astfel, definim ***puterea transmisă secțiunii vecine*** de către secțiunea deformată:

$$P = -Fv = -F\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -F\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{5.11}$$

Ținând cont și de relațiile anterioare rezultă:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -ES\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5.12)$$

Adică:

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = v\rho S\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (5.13)$$

ceea ce reprezintă puterea transmisă secțiunii vecine de către secțiunea deformată. Valoarea medie a puterii se obține știind că valoarea medie a funcției $\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}$, astfel:

$$\langle\frac{\partial W}{\partial t}\rangle = \frac{1}{2}v\rho S\,\omega^2 A^2 \quad (5.14)$$

În Sistemul Internațional, unitatea de măsură a puterii transmisă secțiunii vecine de către secțiunea deformată este watt-ul:

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_{SI} = W$$

Intensitatea undei *reprezintă fluxul de energie care trece prin unitatea de suprafață. Altfel spus: intensitatea undei este dată de energia transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață:*

$$I = \frac{1}{S}\langle\frac{\partial W}{\partial t}\rangle = \frac{1}{2}v\rho\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}v\rho\, v_{pmax}^2 \quad (5.15)$$

Legătura dintre intensitatea sonoră și presiunea sonoră maximă, se observă din relațiile (5.8) și (5.15), adică:

$$I = \frac{1}{2}v\,\rho\, v_{pmax}^2 = \frac{1}{2}\frac{p_{s\,max}^2}{\rho\, v} \quad (5.16)$$

Observație! Viteza de propagare a undelor, v_{max}, este diferită de viteza de oscilație (vibrație), v , a particulelor atinse de frontul de undă.

Densitatea de energie a undei, *w*, este definită ca energia de vibrație pe unitatea de volum și este dată de relația:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{m \cdot v_{max}^2}{2} \frac{1}{V} = \frac{1}{2} \rho \cdot v_{max}^2$$
$$\Rightarrow \quad w = \frac{1}{2} \rho \, \omega^2 A^2 \qquad (5.17)$$

unde: W reprezintă energia cinetică maximă a undei;

V reprezintă volumul;

ρ este densitatea mediului.

Așadar legătura intre intensitatea undei și densitatea de energie este dată de relația:

$$I = w \cdot v \qquad (5.18)$$

Unitatea de măsură pentru intensitate este:

$$[I]_{SI} = \frac{W}{m^2}$$

iar pentru densitatea de energie este:

$$[w]_{SI} = \frac{J}{m^3} = \frac{W \cdot s}{m^3}$$

5.2 Calitățile sunetelor

Sursele sonore determină oscilații care, între anumite limite, pot produce senzații auditive, datorită acțiunii undei elastice asupra urechii. Urechea, ca receptor, în intervalul de frecvențe în care dă un răspuns, are o sensibilitate neuniformă funcție de caracteristicile undei sonore.

Cunoașterea mecanismului auditiv, a raportului între excitația fizică și percepția fiziologică, sunt probleme importate atât în medicină, cât și în ingineria construcțiilor.

Din punct de vedere subiectiv, două sunete pot fi deosebite pe baza următoarelor mărimi caracteristice:

- **tărie** – corespunzătoare intensității;
- **înălțime** – corespunzătoare frecvenței;

- **timbru** – corespunzător conținutului în armonici al unui sunet compus.

Tăria (intensitatea) sunetului

Așa cum am discutat deja, *intensitatea sunetului* reprezintă energia transportată de unda sonoră în unitatea de timp prin unitatea de suprafață. De altă parte, intensitatea sunetului se definește prin însușirea senzației auditive prin care sunetele sunt clasificate în slabe și puternice.

În cazul sunetelor se deosebesc două feluri de intensități și anume:

- *intensitatea sonoră* (sau acustică)
- *intensitatea auditivă*.

Intensitatea sonoră este o mărime fizică obiectivă, valoarea sa putându-se determina cu diferite dispozitive experimentale. Sunetele auzite de om pot varia într-o gamă largă de ordine de mărime ale intensității sonore.

Limitele între care pot fi percepute sunetele auzite de om, din punctul de vedere al intensității sunt date de:

- *pragul de audibilitate* = reprezintă energia minimă transportată de undă prin unitatea de suprafață și necesară pentru ca urechea umană să perceapă sunetul. Aceasta este $I_{min} = 10^{-12} W/m^2$.
- *pragul senzațiilor dureroase (prag de durere)* = valoarea maximă a intensității unui sunet, valoare peste care apare senzația de durere la nivelul organului auditiv uman, adică $I_{max} = 10^2 W/m^2$.

Știind intervalul în care sunetul este perceput de urechea umană din punct de vedere al intensității $I_s \epsilon [10^{-12} \div 10^2\, W/m^2]$ și făcând raportul dintre valorile intensității sonore pentru cele două praguri superior și inferior:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{10^2}{10^{-12}} = 10^{14} \quad (5.19)$$

observăm că domeniul intensității sonore este foarte larg acoperind 14 ordine de mărime. Astfel, a fost necesară introducerea noțiunii de nivelul sonor:

$$N_s = 10\, log \frac{I}{I_{min}} \quad (5.20)$$

unde: I – intensitatea sonoră a sunetului considerat (W/m^2);

$I_{min} = 10^{-12}\, W/m^2$ – intensitatea sonoră de referință adică pragul inferior al intensității auditive ce poate fi percepută de om, la frecvența de $\nu = 1000Hz$.

Observație! Așa cum se va arăta ulterior, senzația fiziologică de tărie a sunetului este proporțională cu nivelul sonor și nu cu intensitatea sunetelor!

Nivelul sonor definit funcție de presiunea sonoră este:

$$N_s = 20\, log \frac{p}{p_{min}} \quad (5.21)$$

unde: p – presiunea sonoră a sunetului considerat (Pa sau N/m^2);

$p_{min} = 2 \cdot 10^{-5}\, N/m^2$ – presiunea sonoră la *pragul de audibilitate* al *sunetului normal* ($\nu = 1000Hz$);

$p_{max} = 2 \cdot 10^2\, N/m^2$ este presiunea sonoră la *pragul senzațiilor dureroase.*

Unitatea de măsură pentru nivelul sonor este *decibelul* (dB) care reprezintă diferența minimă de nivel ce poate fi percepută de ureche.

Nivelul intensității sonore corespunzător pragului senzației dureroase este:

$$N_s = 10 log \frac{I_{max}}{I_{min}} = 140\, dB \quad (5.22)$$

Observație! Pentru sunetele audibile $N_s \in [0 \div 140]\, dB$.

Legea Weber-Fechner

Trecerea de la excitația fizică a urechii la perceperea fiziologică este data de *legea lui Weber-Fechner*, conform căreia: creșterea minimă percepută a senzației auditive (ΔS) produsă de un sunet este direct proporțională cu creșterea relativă a intensității sonore a sunetului respectiv:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \log \frac{I_{s2}}{I_{s1}} \tag{5.23}$$

Adică:

intensitatea senzației auditive este proporțională cu logaritmul zecimal al raportului dintre intensitățile excitației sonore,

sau:

odată cu creșterea intensității undei sonore crește și senzația de audibilitate.

Dacă intensitatea excitației crește în progresie geometrică, intensitatea senzației crește în progresie aritmetică.

Deoarece urechea omului percepe două sunete cu aceeași intensitate sonoră, dar frecvențe diferite, ca două sunete de tărie diferită, a fost necesară introducerea unei noi mărimi denumită ***intensitate auditivă*** (I_a). ***Intensitatea auditivă*** a unui sunet este egală cu intensitatea sonoră a sunetului normal ($\nu = 1000Hz$) care produce aceeaşi senzaţie auditivă ca şi sunetul dat: $I_a \xleftrightarrow{\nu = 1000Hz} I_s$.

Corespunzător se definește nivelul auditiv (N_a):

$$N_a = 10\ log \frac{I_a}{I_{min}} \tag{5.24}$$

Unitatea de măsură a nivelului auditiv (senzației auditive) este *fonul* care corespunde aproximativ puterii de rezoluție a urechii relativ la tăria sunetului. În practică, se consideră acceptabilă aproximația echivalenței dintre decibel și fon, în domeniul de frecvențe audibile.

Urechea este mai sensibilă la frecvențele înalte decât la cele joase. Astfel, pentru același nivel de tărie, sunetele joase trebuie să aibă un nivel de presiune sonoră mult mai ridicată pentru a putea fi percepute.

Înălțimea sunetului

Înălțimea sunetului este o caracteristică a senzației auditive prin care pot fi diferențiate sunetele în joase ("grave") și înalte ("ascuțite"), în raport cu frecvența oscilațiilor care le-au produs. Sensibilitatea organului auditiv la variația înălțimii sunetului descrește odată cu scăderea nivelului de intensitate sonoră, ceea ce implică faptul că înălțimea sunetului nu depinde numai de frecvență ci și de nivelul presiunii sonore.

După senzația auditivă pe care o produc, sunetele pot fi: pure sau zgomote (fig. 5.2). Un *sunet pur* este senzația auditivă produsă de o variație sinusoidală a presiunii aerului. Sunetele produse de un număr mic de vibrații, adică de frecvență mică, se numesc *sunete joase*, iar cele produse de un număr mare de vibrații, adică de frecvență mare, se numesc *sunete înalte*. Spre deosebire de sunet, zgomotul este rezultatul unei variații aleatoare a presiunii sonore. Din punct de vedere fiziologic, zgomotul produce o senzație auditivă deranjantă.

Senzația auditivă produsă de un ***acord***, adică de cel puțin două sunete simultane, este plăcută atunci când frecvențele acestora se află într-un anumit raport numeric, numit ***interval***. Sunetele folosite în muzică au fost alese după frecvența lor și grupate în game muzicale cuprinzând nouă octave.

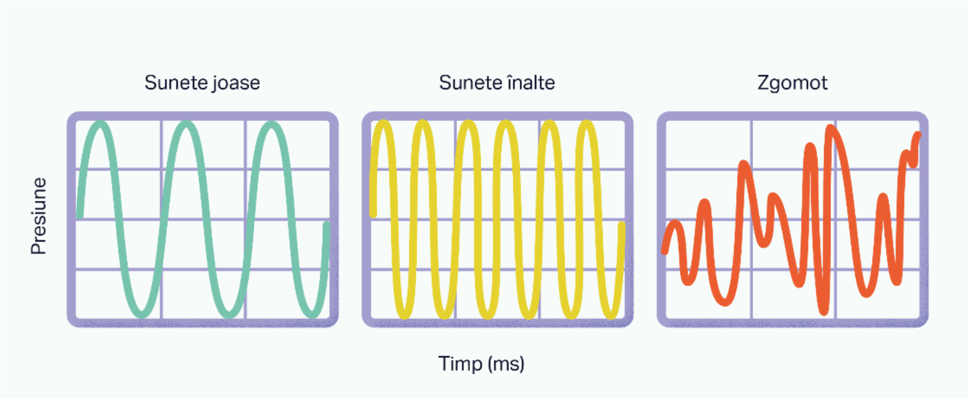


Fig. 5.2 Variația presiunii sunetului în raport cu timpul

Timbrul sunetului

Timbrul sunetului reprezintă caracteristica prin care se pot deosebi două sunete cu aceeași frecvență, dar cu număr de armonice diferite. Astfel putem afirma că: *timbrul sunetelor se datorează prezenței sau absenței anumitor armonice din spectrul sunetelor provenind de la surse sonore diferite*.

Explicarea obiectivă a acestei calități a sunetului, se poate realiza studiind clasificarea sunetelor după rezultatul analizei lor armonice. În raport cu frecvența un sunet poate fi *pur* sau *complex*. ***Sunetul pur*** este produs de o vibrație armonică (reprezentată de funcții trigonometrice sinusoidale), pe o singură frecvență, în timp ce ***sunetul complex*** conține un anumit număr de sunete pure – un sunet fundamental, având frecvență joasă și o serie de sunete cu frecvență superioară celei fundamentale.

Sunetele muzicale sunt sunete complexe la care frecvențele componentelor sunt multiplii întregi ai frecvenței fundamentale $(\nu, 2\nu, 3\nu, \dots)$. Dacă această regulă nu se respectă, sunetul respectiv poartă denumirea de ***zgomot***.

5.3 Absorbția și atenuarea sunetelor. Reverberația.

În cazul în care undele acustice întâlnesc în drumul lor un obstacol, acestea suferă modificări ale direcției de propagare și ale caracteristicilor energetice. Astfel (fig. 5.3), o parte din energia sonoră se reflectă (E_r), o parte este absorbită de material (E_a), iar o parte este transmisă (E_t) mai departe în spațiile învecinate:

$$E = E_r + E_a + E_t \qquad (5.25)$$

Performanța acustică depinde de două fenomene importante:

- *absorbția sunetului* – este o caracteristică de material ce constă în a nu reflecta sunetul;
- *atenuarea sunetului* – descrie proporția în care sunetul este redus la trecerea printr-un material (mediu).

Așadar, energia transportată de undă rămâne constantă atâta timp cât nu apar pierderi de energie în timpul propagării undei. Într-un asemenea caz există următoarele situații:

- *Intensitatea* undei va rămâne *constantă* în timpul propagării unei ***unde plane***;
- *Intensitatea* undei va *scădea* în cazul unei ***unde sferice***. În cazul undei sferice produsă de o sursă punctiformă ce emite cu puterea P:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad (5.26)$$

Atenuarea sunetului poate apărea:

- din cauze pur geometrice – se poate observa că intensitatea scade cu pătratul distanței sursă-suprafață;

- datorită mediului prin care se propagă sunetul.

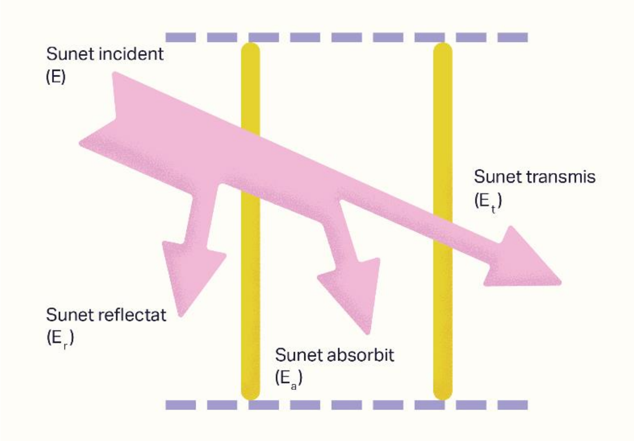


Fig. 5.3 Descompunerea undei acustice la întâlnirea unui obstacol

La propagarea undelor sonore printr-un mediu, pe lângă fenomenul de atenuare mai apare și fenomenul de absorbție. Undele sonore pierd treptat din energia lor, aceasta transformându-se în căldură.

Absorbția sunetului depinde de:

- *frecvență* ↔ sunetele mai înalte (frecvență mai mare) sunt mai puternic absorbite decât cele joase;
- *vâscozitatea mediului* de propagare; datorită frecării interne pe care o suferă particulele mediului la trecerea undei sonore, energia undei se transformă în căldură;
- *conductibilitatea termică a mediului*, datorită căreia se produce o absorbție suplimentară din energia sunetului pe seama schimbului de căldură.

Indiferent de cauzele care produc absorbția, coeficientul de absorbție este dat de raportul dintre energia acustică "pierdută" și cea incidentă, adică:

$$\alpha = \frac{E_a + E_t}{E} \tag{5.27}$$

Pentru materialele de construcții compacte (oțel, beton, cărămidă, lemn) coeficientul de absorbție are valori mici, de cca. $0{,}02 - 0{,}08$, deoarece în aceste cazuri energia acustică reflectată este mare. Materialele poroase (vată minerală, pâslă, plută) au proprietăți bune de absorbție a sunetului, astfel coeficientul de absorbție ia valori în intervalul $0{,}2 - 0{,}8$.

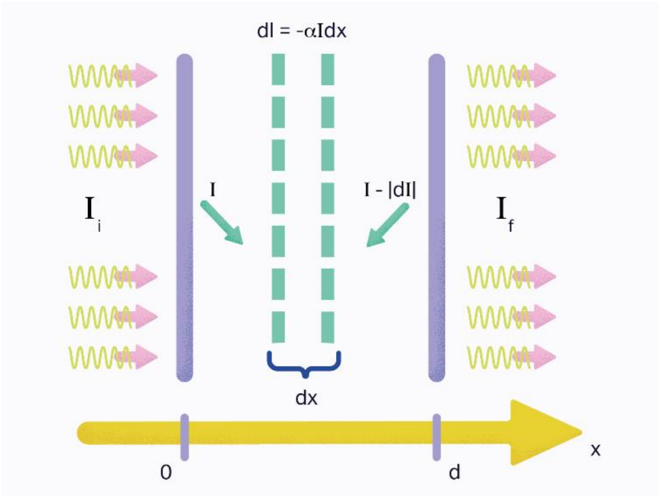


Fig. 5.4 Propagarea unei unde printr-un mediu absorbant

Atenuarea sunetului datorită mediului de propagare

Considerăm o undă plană care se propagă printr-un mediu absorbant, de-a lungul axei *Ox*, având intensitatea I_i în momentul în care pătrunde într-un mediu (fig. 5.4).

De-a lungul distanței dx parcursă de undă în mediu, are loc o *atenuare* infinitezimală a intensității, proporțională cu distanța parcursă și cu intensitatea la intrarea în acea porțiune, astfel că:

$$dI = -\alpha I dx \qquad (5.28)$$

unde α este coeficient de absorbție și depinde de natura mediului prin care se propagă unda. Semnul minus din relația anterioară indică scăderea intensității undei.

Separând variabilele și integrând între limitele corespunzătoare rezultă ***legea de atenuare prin absorbție***:

$$\int_{I_i}^{I_f} \frac{dI}{I} = -\int_{0}^{d} \alpha dx \quad \Rightarrow \boldsymbol{I_f = I_i e^{-\alpha d}} \tag{5.29}$$

unde I_i este intensitatea sunetului la intrarea în mediu, I_f este intensitatea sunetului la ieșirea din mediu, iar α este coeficientul de absorbție fiind egal cu inversul distanței parcursă de undă în mediu, în cazul în care intensitatea undei scade de *e*=2,71… ori.

Această lege este valabilă pentru toate tipurile de unde şi este în general, bine verificată experimental.

Reverberația

Reverberația reprezintă un fenomen aparte de amortizare a energiei acustice care se produce într-o încăpere închisă. El se datorează reflectării repetate a sunetului, respectiv suprapunerii sunetelor reflectate, ceea ce duce la prelungirea și întărirea sunetului respectiv un anumit interval de timp. Astfel, fenomenul constă în întărirea și prelungirea sunetului, un anumit interval de timp, după încetarea emisiei sunetului. Acest fenomen este mai evident în încăperile mari și intervine nefavorabil asupra calităților audiției. Timpul de reverberație are o importanță specială în proiectarea arhitecturală a spațiilor care trebuie să aibă timpi de reverberație specifici pentru a se obține performanțe acustice optime destinației spațiilor respective. Reverberația nu se limitează la spațiile interioare, ci există și în spațiile exterioare (păduri, munți) în care se poate produce reflexia sunetului.

Durata de reverberație este perioada de timp în care nivelul acustic dintr-o încăpere scade cu 60 dB după oprirea sursei de zgomot. Durata de reverberație poate fi calculată cu relația:

$$T = 0{,}163 \frac{V}{A} \tag{5.30}$$

unde:

V – volumul încăperii (m^3);

A – suprafața echivalentă de absorbție sonoră și se determină cu relația:

$$A = \sum \alpha_i S_i \tag{5.31}$$

iar:

α_i – coeficient de absorbție al materialului suprafeței S_i;

S_i – suprafața elementului de construcție i, sau a obiectelor din încăpere (m^2).

În Sistemul Internațional durata de reverberație se măsoară în secunde, iar valoarea optimă depinde de destinația și volumul încăperii.

5.4 Efectul Doppler

În anul 1842, C. Doppler a observat că dacă o sursă de unde și un receptor sunt în mișcare relativă unul față de altul, receptorul percepe sunetul cu o frecvență diferită față de cea emisă de sursă.

Considerăm o sursă S care are viteza v_S și emite unde ce se propagă cu viteza v, precum și un receptor care se mișcă cu viteza v_R. Notăm cu ϑ_S frecvența undei emisă de sursă, iar cu ϑ_R frecvența percepută la receptor. Mișcarea relativă a sursei S și a receptorului R se face pe direcția distanței dintre ele. Presupunem că sursa și receptorul se află în mișcare (fig. 5.5). Semnalul emis de sursă la momentul t_1 în punctul S_1 este perceput de receptor în punctul O_1 la momentul θ_1. Un semnal ulterior, emis la momentul t_2 de sursa aflată în punctul S_2 va fi perceput de receptor în punctul O_2, la momentul θ_2. Numărul oscilațiilor complete emise în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este egal cu numărul oscilaţiilor receptate în intervalul $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, adică:

$$\vartheta_s \Delta t = \vartheta_R \Delta \theta \tag{5.32}$$

Din fig. 5.6 observăm că:

$$S_2O_2 - S_1O_1 = O_1O_2 - S_1S_2 \tag{5.33}$$

unde

$$\begin{matrix} S_2O_2 = v(\theta_2 - t_2) & S_1S_2 = v_s\Delta t \\ S_1O_1 = v(\theta_1 - t_1) & O_1O_2 = v_R\Delta\theta \end{matrix} \tag{5.34}$$

Din ultimele trei relații se poate scrie ***forma generală*** a relației dintre frecvența undei percepute de receptor și frecvența undei emise de sursă:

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v \pm v_R}{v \mp v_S} \tag{5.35}$$

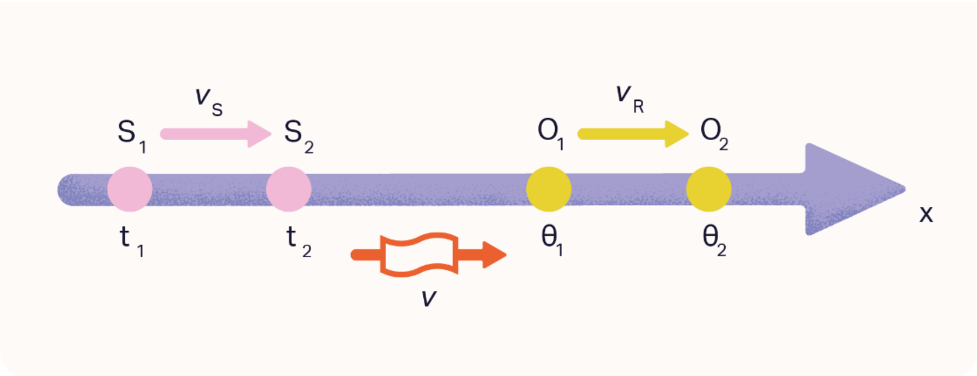


Fig. 5.5 Ilustrarea efectului Doppler

În cazul în care receptorul sau sursa se deplasează sub un unghi θ_R, respectiv θ_S, față de direcţia dintre ele, atunci:

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v \pm v_R \cos\theta_R}{v \mp v_S \cos\theta_S} \tag{5.36}$$

Semnul + la numărător și semnul – la numitor corespund cazului în care sursa şi receptorul se apropie reciproc, iar semnul – la numărător şi semnul + la numitor corespund cazului în care sursa şi receptorul se îndepărtează reciproc.

Așadar, putem deosebi următoarele cazuri:

a) Receptor și sursă mobile pe direcția comună.

- *apropiere relativă:*

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v + v_R}{v - v_S}$$

- *depărtare relativă*

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v - v_R}{v + v_S}$$

b) *Receptor mobil și sursă fixă.*

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v \pm v_R}{v}$$

c) *Receptor fix și sursă mobilă.*

$$\vartheta_R = \vartheta_S \frac{v}{v \mp v_S}$$

Efectul Doppler are numeroase aplicații: în medicină, inginerie, astrofizică etc. Dintre acestea amintim:

- *predicția meteorologică* a devenit mult mai precisă prin măsurarea vitezei curenților de aer din atmosferă folosind radare Doppler.
- putem măsura *viteza cu care o stea oarecare se îndepărtează de Pământ*: lumina emisă de stele este recepționată ca având frecvențe mai joase, deci lungimi de undă mai mari decât la sursă – efect ce poartă numele de deplasare spre roșu a spectrului luminii provenite de la stele
- determinarea *vitezei mașinilor aflate în trafic* cu ajutorul radarului.
- se poate determina *viteza datorată mișcării dezordonate a unor atomi* ce formează un ansamblu statistic în echilibru termodinamic, dacă aceștia emit lumină prin procese de dezexcitare.
- măsurarea *vitezei sângelui printr-o arteră* se determină folosind tehnica de *velocimetrie Doppler*: Un generator de unde ultrasonore plasat în vecinătatea vasului de sânge emite unde după o direcție aproape paralelă cu

direcția de curgere a sângelui (de-a lungul vasului). Particulele constituente ale sângelui reflectă undele ultrasonore, comportându-se ca o sursă virtuală care se îndepărtează de receptorul plasat în imediata vecinătate a sursei de ultrasunete. Măsurând frecvența semnalului reflectat, se poate determina viteza sângelui și debitul volumic al acestuia prin artera respectivă.

5.5 Ultrasunetele

Undele elastice cu frecvența cuprinsă între 20 kHz și 100 GHz poartă denumirea de ***ultrasunete***. Dintre animalele care se orientează cu ajutorul ultrasunetelor amintim: liliacul, balena, delfinul, moliile, cârtița etc.

Ultrasunetele prezintă o deosebită aplicabilitate practică datorită unor caracteristici importante, și anume:

- nu sunt percepute de organul auditiv uman;
- prezintă lungime de undă mică astfel, ele pot fi emise sub formă de fascicule bine colimate, iar fenomenul de difracție nu apare decât pentru obstacolele de dimensiuni foarte mici;
- suferă fenomenul de reflexie si refracție la suprafața de separare a două medii diferite;
- energia transportată de ultrasunete este mai mare decât energia sunetelor având aceeași amplitudine, în consecință există posibilitatea de focalizare a energiei acestora într-un spațiu limitat fără să afecteze mediul în care se propagă.
- sunt puternic absorbite de substanțe în stare gazoasă, în timp ce în lichide intensitatea ultrasunetelor crește, iar în solide este foarte puțin atenuată.

Astfel, în ultimii ani folosirea ultrasunetelor în diverse domenii a crescut simțitor, și datorită efectelor lor:

- provoacă încălziri locale;
- duc la omogenizarea unor sisteme dispersate cum ar fi: soluții coloidale, emulsii etc., dar pe de altă parte pot distruge starea de omogenitate a unor astfel de sisteme;
- pot accelera și chiar provoca unele reacții chimice;
- pot favoriza procesele de polimerizare și invers;
- produc fenomenul de cavițatie, care constă în apariția unor goluri în fluidele aflate în mișcare;
- provoacă perturbații mecanice în interiorul celulelor vii, care pot duce la distrugerea microorganismelor.

Ultrasunetele pot fi produse prin diferite procedee:

- mecanice
- termice
- electromagnetice:
    - efect piezoelectric
    - electrostricțiune – efect piezoelectric invers
    - efect magnetostrictiv

Pe de altă parte, respectând oarecum etapele progresului tehnologic în domeniul ultrasunetelor, există mai multe căi de *generare* a acestora:

- ***pe cale aero sau hidrodinamică*** – se face folosind cavități rezonante, obținându-se randamente și puteri mici (sub 100W)
- ***pe cale ionică*** – se realizează cu ajutorul unui gaz ionizat supus unui câmp electric alternativ cu frecvență ultrasonoră. Prin oscilația ionilor se antrenează moleculele gazului, producând ultrasunete.
- ***pe cale electrodinamică*** - cu ajutorul unui dispozitiv tip difuzor, a cărui membrană este înlocuită cu un bloc metalic; când frecvența de excitație este egală cu frecvența proprie a blocului, acesta oscilează cu o

amplitudine mare şi produce ultrasunete cu randament bun (și la o singură frecvență).

- ➢ ***folosind efectul magnetostrictiv*** – se bazează pe proprietatea unor materiale feromagnetice (numite materiale magnetostrictive) de a se comprima sau dilata dacă sunt plasate într-un câmp magnetic.
- ➢ ***folosind efectul piezoelectric*** – se bazează pe proprietățile unor materiale de a se deforma sub acțiunea câmpului electric.

În cele ce urmează vom discuta despre generarea ultrasunetelor prin efect magnetostrictiv, respectiv piezoelectric, deoarece sunt cele mai folosite metode de generare a ultrasunetelor.

Generatorul ultrasonor magnetostrictiv

Introducând o bară realizată dintr-un material magnetostrictiv într-un câmp magnetic paralel cu lungimea ei (produs, de exemplu, de o bobină, în care este introdusă bara), aceasta se deformează (se scurtează sau se alungește). Deformarea produsă depinde de sensul și intensitatea câmpului magnetic. Când câmpul magnetic variază periodic (curentul care străbate bobina fiind alternativ) bara se va comprima/alungi cu perioada de oscilație a câmpului (curentului). În cazul unor frecvențe suficient de mari ale curentului alternativ vibrațiile capetelor barei dau naștere la unde ultrasonore. Pentru a obține amplitudini mari se aleg dimensiunile barei astfel ca să avem rezonanță între vibrațiile elastice proprii și frecvența curentului alternativ excitator.

Materialele cu proprietăți magnetostrictive utilizate frecvent sunt:

- ✓ materialele feromagnetice pure: Ni, Co, Fe;
- ✓ aliaje: permendur (49% Co, 49% Fe, 2%Va), alfer (13,8% Al, 86,2 Fe), permalloy (45% Ni, 55% Fe), hipernik (50% Ni, 50% Fe), supermalloy (66% Ni, 34%Fe);

✓ ferite - combinații între oxidul unei metal oarecare și oxidul de fier (ex. ferita).

Generatorul magnetostrictiv este avantajos pentru producerea ultrasunetelor de frecvență joasă (de la 20 ÷ 60 kHz) și energii considerabile. Randamentul maxim se obține pentru frecvența egală cu frecvența de rezonanță mecanică a blocului magnetostrictiv.

<u>Generatorul ultrasonor piezoelectric</u>

Partea esențială a generatorului piezoelectric o constituie o lamă piezoelectrică (de obicei de cuarț) pe fețele căreia sunt aplicați doi electrozi, sub forma unor straturi subțiri metalice, legați la o sursă de tensiune alternativă. Sub acțiunea câmpului electric alternativ lama începe să vibreze cu o frecvență egală cu cea a tensiunii aplicate. Vibrațiile lamei sunt transmise în mediul înconjurător sub formă de ultrasunete. Cu astfel de generatori se poate ajunge până la frecvențe de cca. 150.000 kHz și la intensități ale radiației ultrasonore de la câteva zeci până la câteva sute de W/cm^2.

Condiția ca oscilațiile să fie de amplitudine maximă este ca grosimea plăcii, *d*, să fie egală cu semilungimea de undă a ultrasunetelor produse, adică

$$d = \frac{\lambda}{2} \qquad (5.37)$$

Substanțe care prezintă efecte piezoelectrice sunt: cuarțul, sarea Signete, sulfatul de litiu, titanitul de bariu, zirconiu de plumb și titan (ZPT). Vibrațiile produse de aceste substanțe pot ajunge până la frecvențe de ordinul megahertzilor.

Observație! Atât transductoarele magnetostrictive cât și cele piezoelectrice, pentru a genera ultrasunete de amplitudine maximă, vor fi acordate în "semiundă", adică lungimea lor pe direcția de oscilație va fi multiplu de $\lambda/2$. În acest fel, la extremităţi apar ventre de oscilație, datorate undelor staționare ce se stabilesc în transductor.

Efectele ultrasunetelor asupra diferitelor stări de agregare a materiei și asupra organismelor vii sunt variate: unele utile, altele dăunătoare.
Dintre ***aplicațiile utile*** fac parte:

- **sondajul submarin** pe bază de ultrasunete utilizat pentru a stabili adâncimea apei sau pentru detectarea unor vase eșuate în adâncul mărilor.
- **defectoscopia cu ultrasunete,** care permite punerea în evidență a unor defecte (posibile fisuri, goluri, porozități, incluziuni de alt material) în elementele de beton armat sau în organele de mașini, fără a produce nici cele mai mici deteriorări suplimentare ale acestor piese.
- **curățirea pieselor cu ajutorul ultrasunetelor** – foarte utilă datorită simplității procedeului, eficacității ridicate și productivității deosebite.
- **prelucrarea dimensională a unei piese** - folosește efectul eroziv al unor particule abrazive activate de oscilațiile ultrasonore ale sculei. Particulele abrazive pot fi în suspensie lichidă sau fixate pe sculă. Prelucrarea cu ultrasunete se aplică la acele materiale care au fragilitate ridicată, densitate nu prea mare și nu suferă deformații plastice înainte de rupere (ceramica, sticla, safirele, alumina, cuarțul, siliciul, feritele, etc.); dar cu bune rezultate se pot prelucra şi aliaje dure: carburi metalice, oțelurile aliate, aliaje de titan.
- **deformarea plastică a metalelor** – sub acțiunea ultrasunetelor la contactul dintre piesă și scula ce acționează asupra piesei, ultrasunetele permit: pătrunderea mai bună a lubrifiantului, deci o reducere a coeficientului de frecare; separarea suprafețelor de contact; erodarea asperităților suprafețelor de contact; îmbunătățirea condițiilor de alunecare ale unor suprafețe

- **fritarea pulberilor în câmp ultrasonor** – Fritarea constă într-o succesiune de deformări plastice ale pulberilor într-o matriță și deplasarea lor spre a umple spațiile goale. Aplicând în procesul de fritare – ultrasunete, mobilitatea particulelor crește, iar frecările intense între particule generează căldură mărind plasticitatea lor. Așadar, are loc uniformizarea și creșterea densității (cu 5-10% față de fritarea clasică), respectiv creșterea durității și rezistenței la rupere a materialului. Dintre materialele realizate prin fritarea ultrasonoră a pulberilor amintim: ceramice piezoelectrice, ferite, respectiv ferodouri.
- **prelucrări prin așchiere** – prin suprapunerea peste forțele sistemului clasic de așchiere a ultrasunetelor rezultă o creștere a eficienței procedeelor clasice de prelucrare prin așchiere – strunjire, frezare, alezare, etc. Dintre avantajele introducerii ultrasunetelor în tehnologia prelucrării prin așchiere amintim: reducerea timpului de prelucrare, eliminarea vibrațiilor sistemului de așchiere, reducerea tensiunilor mecanice remanente în material, reducerea temperaturilor în zona de așchiere, reducerea forțelor de așchiere și creșterea duratei de viață a sculei.
- **depuneri galvanice cu ajutorul ultrasunetelor** – conduce la obținerea de depuneri electrochimice cu calități superioare: duritatea peliculei crește (ex.: cu 15% la Ag sau 35% la Cu), tensiunile interne în pelicule scad, porozitatea este mai redusă (se elimină bulele de hidrogen), strălucirea este mult mai bună
- **sudarea cu ultrasunete** –procedeul de sudare este prin frecare – la *rece* – pe durata procesului de sudare temperatura materialului la locul îmbinării este sub temperatura de topire. Acest tip de sudură prezintă avantaje deosebite: durata procesului de sudare este foarte redusă, consumul specific de energie este redus față de metodele clasice bazate pe topire, energia termică generată este localizată doar în zona îmbinării fiind excluse

deformațiile datorate supraîncălzirii, reproductibilitate foarte bună a îmbinării, respectiv realizarea unor suduri de calitate între materiale similare sau compatibile.

Observație! În cazul sudării metalelor cu ultrasunete direcția de vibrare este în lungul suprafeței de sudare, iar la materialele plastice direcția de vibrare este perpendiculară pe suprafața de îmbinare.

- **măsurarea grosimilor** – dacă se dispune de un transductor emițător-receptor de ultrasunete se aplică pe unul din pereții materialului de măsurat și se înregistrează ecoul transmis pe peretele opus, măsurând astfel grosimea materialului respectiv (știind că la suprafața de separare dintre două medii de naturi diferite, care au impedanțe acustice diferite, ultrasunetele se reflectă în proporție majoritară).
- **măsurarea vitezei de curgere, sau a debitului unui fluid** – se bazează pe influența exercitată asupra vitezei de propagare a undelor ultrasonore de către viteza de curgere a fluidului. Mediile elastice fluide sunt caracterizate de valori diferite ale vitezei ultrasunetelor, astfel:
    - în lichide este cuprinsă în intervalul $900 \ldots 2000\ m/s$
    - în gaze este cuprinsă în intervalul $300 \ldots 500\ m/s$

  Aceste viteze ale ultrasunetelor sunt mult superioare vitezelor de curgere a fluidelor care sunt cuprinse în intervalul $0.01 \ldots 10\ m/s$.
- **măsurarea nivelului lichidelor în rezervoare** – se folosesc unde ultrasonore cu frecvențe de ordinul megahertzilor, iar nivelul este determinat prin măsurarea timpului parcurs de ultrasunete de la emițător la suprafața lichidului și înapoi.

Traductorul cu ultrasunete are avantaje nete față de alte traductoare de nivel, deoarece nu conține piese în mișcare, nu intră în contact cu lichidul (care poate fi agresiv chimic) și nu necesită calibrări la schimbarea naturii lichidului. Domeniul de măsură este în intervalul 9 cm …6 m cu o precizie de 0.5%, putând fi extins la $10 \ldots 30$ m, cu scăderea corespunzătoare a preciziei.

- **Sonochimie** – aplicații ale ultrasunetelor în domeniul chimiei. În practică se întâlnesc următoarele reacții sonochimice:
    - Sinteze organice (solvenții folosiți nu trebuie să fie descompuși de ultrasunete)
    - Degradarea polimerilor – reacțiile chimice între solide și fluide (lichid sau gaz) se intensifică la folosirea ultrasunetelor
    - Reacții de transfer de fază – prin folosirea ultrasunetelor se obțin emulsii cu compoziție omogenă
    - Degradarea toxinelor în apă – sub acțiunea ultrasunetelor apa se disociază distrugând compuși organici foarte toxici.
- **Sonobiochimie** – aplicații ale ultrasunetelor în biologie. În analiza sau sinteza produselor biochimice cu ajutorul ultrasunetelor se realizează: emulsionări, precipitări, cristalizări, filtrări, degazări ale emulsiilor, atomizări etc.
    - **Ecografia** – Generatorul și detectorul de ultrasunete sunt realizate sub forma unui transductor piezoelectric. Generatorul de ultrasunete transmite o serie de impulsuri care se propagă în zona studiată, reflectându-se apoi spre suprafață, unde sunt recepționate, amplificate și transmise spre un video monitor, pe ecranul căruia apar spoturi luminoase, dând informații despre zonele studiate (distanțe, unghiuri, etc.), răspunsul obținut depinde de densitatea țesutului și forma organului. Deplasând transductorul, se pot obține informații privind conturul, adâncimea şi respectiv aspectul organului investigat. În ecografia unor organe se vizualizează dimensiunile organelor

observându-se prezența unor tumori, chisturi, formațiuni solide (calculi) etc. Frecvențele folosite sunt:

- Pentru organe abdominale (ficat, rinichi etc.): $1 \dots 5\ MHz$
- Pentru organe superficiale de dimensiuni mici (ochi, tiroidă etc.): $8 \dots 10\ MHz$

- **Lithotripsia** – metodă de sfărâmare a calculilor renali – folosind unde de șoc generate de ultrasunete, emise de transductori piezoelectrici dispuși pe un arc de cerc (centrul cercului de dispunere a transductorilor este calculul).

Fără a avea pretenția de-a fi prezentat toate aplicațiile utile ale ultrasunetelor menționăm că, fără îndoială, odată cu trecerea timpului, se va diversifica tot mai mult domeniul de aplicabilitate a acestora.

6. Termodinamică și fenomene de transport

Corpurile macroscopice sunt formate din constituenți microscopici: atomi și molecule, care se află într-o continuă mișcare, numită *mișcare de agitație termică*. Studiul fenomenelor legate de mișcarea termică se poate face atât la scară *macroscopică* prin metoda fenomenologică (termodinamică), cât și la scară *microscopică* prin: metoda cinetico-moleculară a cărei baze au fost puse de Maxwell-Boltzmann, metoda statistică a cărei baze au fost puse de Gibbs și metoda informațională aceasta fiind un concept introdus de Claude Shannon.

Termodinamica (metoda fenomenologică) studiază proprietățile sistemelor fizice la scară macroscopică, stabilind relații cantitative între mărimile direct observabile: presiune, volum, temperatură, fără a lua în considerare structura internă a sistemului fizic. Astfel, putem spune că termodinamica este știința care se ocupă cu studiul legilor de transformare datorate mișcării moleculare din interiorul corpurilor și a fenomenelor care apar datorită interacțiunii particulelor elementare ale acestora.

Prin **sistem termodinamic** se înțelege un sistem fizic compus dintr-un număr suficient de mare, dar finit, de constituenți (atomi, molecule). Starea sistemului termodinamic reprezintă ansamblul proprietăților sistemului la un moment dat. Între un sistem termodinamic și mediul ambiant se pot exercita interacțiuni de natură mecanică sau termică însoțite sau nu de schimburi de substanță. Așadar, sistemele termodinamice pot fi:

- *închise*: între ele și mediu nu există schimb de substanță;

- *deschise*: între ele și mediu are loc schimb de energie și de substanță;
- *izolate*: care nu au nici un tip de interacțiuni cu mediu;
- *izolate adiabate*: sisteme în care chiar dacă apar interacțiuni mecanice, nu există schimb de căldură cu mediu.

Prin ciclu termodinamic se înțelege o succesiune de transformări termodinamice în urma cărora sistemul termodinamic revine la starea sa inițială.

Transformarea termodinamică de stare constă în modificarea condițiilor externe ale unui sistem, acesta trecând dintr-o stare de echilibru în alta. Variația parametrilor mediului exterior (presiune, volum, temperatură) provoacă un schimb de energie între sistem și mediul exterior care atrage după sine modificarea echilibrului și variația mărimilor de stare ale sistemului. Transformările termodinamice pot fi:

- *reversibile* dacă transformările pot fi parcurse în ambele sensuri astfel încât sistemul să treacă prin aceleași stări intermediare de echilibru;
- *ireversibile* dacă transformările nu pot fi parcurse în ambele sensuri prin aceleași stări intermediare de echilibru.

6.1 Parametrii de stare

Totalitatea proprietăților unui sistem fizic exprimă starea sistemului. Starea sistemului termodinamic poate fi caracterizată cu ajutorul ***parametrilor de stare.*** Acești parametrii pot fi:

- ***fundamentali*** - mărimi fizice măsurabile: temperatură, presiune, volum

- ***calorici*** - mărimi fizice care nu pot fi măsurate direct, ci sunt definite funcție de parametrii fundamentali: energie internă, lucru mecanic, căldura, entropia, entalpia.

Spunem că sistemul termodinamic se află în stare de echilibru când parametrii de stare ai acestuia sunt constanți în timp.

6.1.1 Temperatura

Temperatura este o mărime fizică fundamentală care caracterizează starea termică a unui corp. Așadar, temperatura reprezintă mărimea fizică care ajută la exprimarea agitației termice a constituenților unui sistem termodinamic. Instrumentele folosite pentru măsurarea temperaturii corpurilor se numesc termometre.

Termometrele sunt alcătuite din:

- *<u>Substanțe termometrice</u>* – proprietățile acestora se modifică cu temperatura.
- *<u>Scări termometrice</u>* – necesare pentru măsurarea schimbării parametrilor substanțelor termometrice.

Substanțele termometrice care se bazează pe fenomenul de dilatație termică pot fi:

- *lichidele*:
    - mercurul în domeniul de temperatură $[-38, 357]$°C
    - alcoolul în domeniul de temperatură $[-80, 78]$°C
    - pentanul în domeniul de temperatură $[-129, 368]$°C
- *gazele* – sunt cele mai bune pentru construirea termometrelor deoarece au un coeficient de dilatare foarte mare. Totuși construirea termometrelor cu gaz e dificilă, motiv pentru care ele se utilizează doar ca termometre etalon. Un exemplu în acest sens este termometrul

cu hidrogen care măsoară temperatura pe baza variației presiunii cu temperatura la volum constant.

Temperatura mai poate fi determinată și cu ajutorul termocuplelor care se etalonează în prealabil și care pot măsura temperatura pe un interval foarte larg, funcție de metalele folosite în construcția acestora. Termocuplul (fig. 6.1) este un sistem de două metale diferite puse în contact prin sudură, iar dacă punem capetele celor două suduri la temperaturi diferite citim o diferență de potențial care se transformă în temperatură ținând cont de tabele sau graficele de etalonare. Exemple de termocuple:

- termocuplul cupru – constantan în intervalul $[-253, 427]$°C
- termocuplul platină - platină-rhodiu10% în intervalul $[0, 1327]$°C

De altă parte temperatura se poate măsura cu ajutorul materialelor a căror rezistență electrică variază cu modificarea temperaturii. În cazul:

- metalelor - rezistența electrică crește (de cele mai multe ori liniar) cu creșterea temperaturii.
- semiconductorilor – rezistența electrică a acestora scade cu creșterea temperaturii. Aceste dispozitive folosite pentru măsurarea temperaturii se mai numesc și *termistori*. De exemplu: rezistența de germaniu utilizată în intervalul $[-271.5, 27]$°C poartă denumirea de criorezistor.

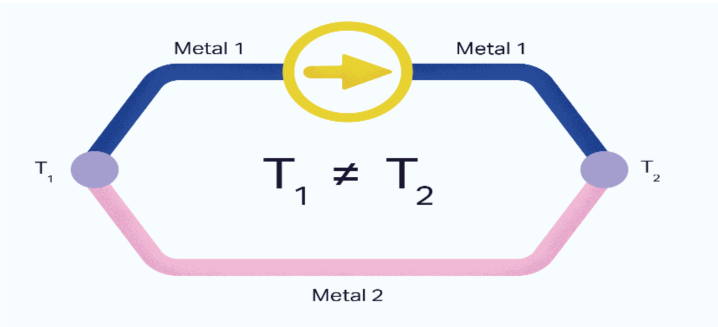


Fig. 6.1 Termocuplu

Orice termometru construit trebuie calibrat la standarde. Termometrul cu hidrogen a fost ales prin convenție ca să fie termometru etalon după care se poate grada cu precizie orice alt termometru, indiferent de legea particulară de dilatare a substanței termometrice.

Pentru că fiecare termometru trebuie să conțină o scară gradată, *Celsius* a ales prin convenție ca:

- temperatura de topire a gheții la presiune normală să fie considerată ca punct fix de $t = 0°\text{C}$
- temperatura de vaporilor saturați de apă pură care fierbe la presiune normală să fie la $t = 100°\text{C}$

Așadar, intervalul standard ales este cuprins între temperatura de topire a gheții și temperatura de fierbere a apei. Scara normală de temperatură este o scară relativă. Mărimea fizică care caracterizează direct starea termică a unui corp, care se găsește în echilibru termic se numește *temperatură absolută*. Temperatura absolută, în Sistem Internațional se măsoară în grade Kelvin.

Nivelul de zero al temperaturii pe scara Kelvin se numește *zero absolut*. La temperatura de zero absolut energia cinetică de translație a moleculelor este egală cu zero. Totuși, mișcarea nu se va opri complet deoarece se păstrează starea de rotație și oscilație din interiorul moleculelor.

Ținând cont de cele amintite mai sus legătura dintre scările termometrice, utilizate la ora actuală, în lume, este următoarea:

- Celsius $t(°\text{C}) = T(K) - 273.15$
- Kelvin $T(K) = t(°\text{C}) + 273.15$
- Fahrenheit $t(F) = 1.8 \cdot t(°\text{C}) + 32$

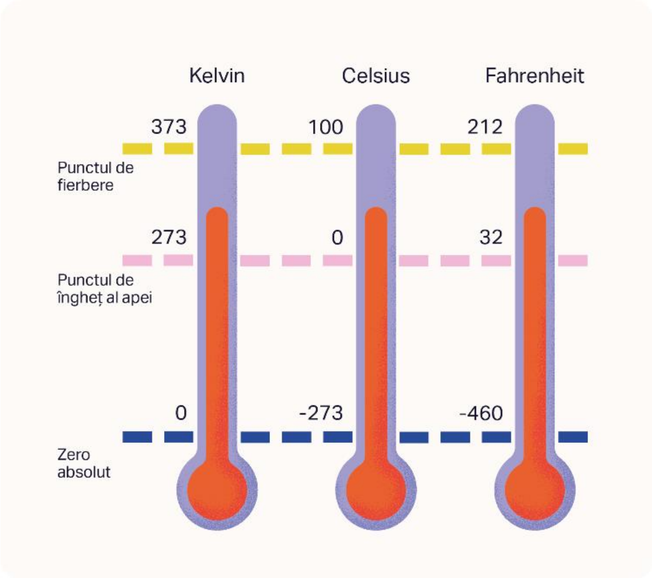


Fig. 6.2 Legătura dintre diferitele scări de temperatură

În fig. 6.2 este reprezentată schematic legătura dintre scările de temperatură amintite. Totuși trebuie subliniat faptul că în Sistem Internațional temperatura se măsoară în grade Kelvin.

Deoarece toate corpurile cu temperatură mai mare de zero absolut radiază energie, temperatura suprafețelor poate fi determinată și de la distanță cu termometrul în infraroșu (IR). Acest lucru este posibil, deoarece căldura corpurilor măsurate determină vibrații moleculare care induc vibrații electronice, deci emisie electromagnetică.

Termometrele în IR realizează măsurători rapide și fără contact de la -40 până la +1700°C, chiar dacă obiectul măsurat are dimensiuni foarte mici.

În ultima perioadă se folosesc tot mai mult metodele de măsurare electrice a temperaturii sau cele de la distanță (IR).

6.1.2 Presiunea

Mărimea scalară care exprimă starea de tensiune (compresiune) într-un punct dat este presiunea. Prin definiție, presiunea este raportul dintre forţa normală și aria suprafeței pe care se exercită această forță:

$$p = \frac{F}{S} \tag{6.1}$$

Așadar, presiunea depinde de coordonatele punctului, în timp ce valoarea ei nu depinde de orientarea arbitrară a secțiunii *S*. Presiunea poate fi interpretată și ca o măsură a energiei pe unitatea de volum:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F \cdot d}{S \cdot d} = \frac{L}{V} \tag{6.2}$$

unde L este lucrul mecanic (energie);
V reprezintă volumul.

Unitatea de măsură a presiunii în Sistemul Internațional este N/m^2, denumită începând cu 1971 şi Pascal (*Pa*), după numele omului de știință Blaise Pascal (matematician, fizician, filozof, de origine franceză, 1623 – 1662). În practică, se utilizează, pentru presiune, diferite unități de măsură (tabel 6.1).

Tabel 6.1 Alte unități de măsură pentru presiune

Denumire	**Simbol**	**Echivalent**
Bar	bar	10^5 N/m^2
Atmosferă tehnică	at	$9{,}80665 \cdot 10^4$ N/m^2
Atmosferă fizică	atm	$1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2
Milimetru coloană de apă	mm H_2O	9,80665 N/m^2
Milimetru coloană de mercur	mm Hg = Torr	$1{,}33322 \cdot 10^2$ N/m^2

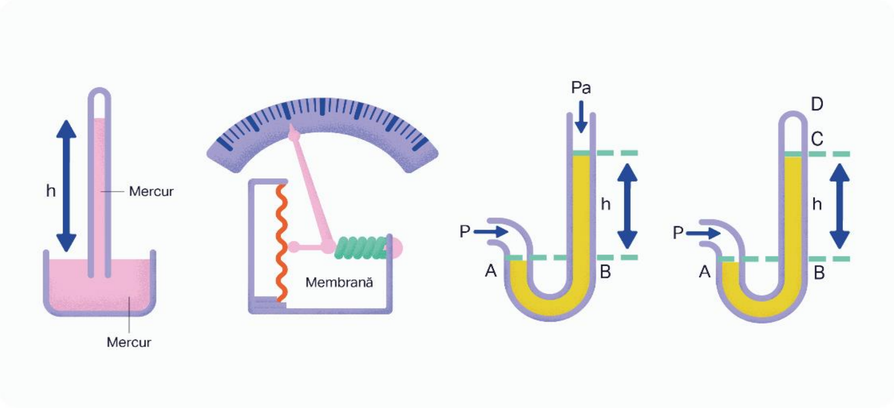


Fig. 6.3 Instrumente pentru măsurarea presiunii: Tub Torricelli, barometru aneroid, manometru cu tub deschis, manometru cu tub închis

Măsurarea presiunii atmosferice se poate face cu diferite instrumente (Fig. 6.3):

- *Barometrul cu mercur* (tubul lui Torricelli)

Torricelli a fost cel care a măsurat presiunea atmosferică cu ajutorul barometrului cu mercur, aparat pe care l-a inventat în anul 1643. Acest aparat era format dintr-un tub de sticlă lung de 1 m umplut cu mercur, închis la un capăt; acoperind capătul deschis, Torricelli l-a întors și l-a scufundat cu gura în jos într-un vas cu mercur. Eliberând capătul deschis al tubului, nivelul mercurului în tub a coborât, formându-se deasupra mercurului un spațiu numit „camera barometrică". Astfel, măsurarea presiunii atmosferice cu tubul lui Torricelli constă în măsurarea înălțimii unei coloane de mercur dintr-un tub cu scară gradată pe care se citește direct înălțimea la care coboară mercurul. Trebuie subliniat faptul că unele barometrele utilizate în practică mai pot utiliza ca lichid apa, dar atunci lungimea tubului e diferită (mai mare).

- *Barometrul aneroid*

Acesta constă dintr-o cutie metalică cu perete elastic, foarte subțire și ondulat. Sub influența presiunii atmosferice, sau a oricărei presiuni din exteriorul cutiei, peretele elastic intră în cutie proporțional cu valoarea presiunii. Deplasarea peretelui elastic al cutiei se transmite prin intermediul unor pârghii unui ac indicator care se mișcă în fața unei scări gradate în unități de presiune. Barometrul aneroid măsoară presiunea mai puțin precis decât barometrul cu mercur, în schimb e mai robust și mai ușor de transportat.

- *Manometrul cu tub deschis*

Constă dintr-un tub în formă de U, având unul din capete conectat la incinta în care se dorește a fi măsurată presiunea p, iar celălalt capăt este deschis la presiunea atmosferică p_a. Tubul poate conține ca lichid manometric: apă, mercur, ulei etc. *Diferența de înălțime a coloanei de lichid manometric în ramurile manometrului cu tub deschis indică diferența dintre presiunea măsurată și cea atmosferică.* Cu acest manometru se pot măsura presiuni mai mici sau mai mari decât presiunea atmosferică, dar apropiate de aceasta. În cazul presiunilor mai mici decât cea atmosferică nivelul din ramura legată la incintă este mai ridicat.

- *Manometrul cu tub închis*

Dacă brațul drept al tubului în formă de U este închis și inițial lichidul umple complet tubul, atunci spațiul CD conține doar vapori saturați ai lichidului manometric. Cu manometrul cu tub închis se măsoară presiuni apropiate de cea atmosferică.

6.1.3 Energia internă

Energia internă (U) reprezintă suma tuturor energiilor cinetice (de oscilație, rotație și translație) datorate mișcărilor dezordonate ale particulelor constituente a unui sistem termodinamic și ale energiilor potențiale de interacțiune:

$$U = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} + \sum_{i=1}^{n} E_{pi} \tag{6.3}$$

Așadar:

- dacă energia cinetică crește odată cu creșterea temperaturii și energia internă crește, adică $\Delta U > 0$, și invers;
- energia internă variază la trecerea unei substanțe dintr-o stare de agregare în alta datorită schimbării dispunerii relative a particulelor constituente, adică datorită variației energiei potențiale;
- în starea de echilibru termodinamic energia internă nu variază, adică $\Delta U = 0$.

Astfel, putem spune că energia internă este o mărime caracteristică structurii interne a sistemelor termodinamice.

Moleculele gazului ideal sunt în mișcare supunându-se legilor mecanicii, dar deoarece acestea nu interacționează între ele, energia lor potențială este nulă. Energia internă caracteristică acestor mișcări poate fi definită și în baza legii statistice a echipartiției energiei după gradele de libertate.

Astfel, ***legea echipartiției energiei*** (teorema lui Boltzmann), valabilă pentru temperaturi nu foarte scăzute, afirmă că:

Fiecărui grad de libertate al unei molecule dintr-un gaz aflat la temperatura T îi corespunde o energie de $\frac{1}{2}kT$.

Conform acestei legi, energia unei molecule cu i grade de libertate este $\frac{i}{2}kT$. Ținând cont de aceste aspecte, energia internă a gazului ideal va fi:

$$U = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} = N\frac{i}{2}kT = \vartheta N_A \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\vartheta RT \tag{6.4}$$

unde:

$$N = \vartheta \cdot N_A$$
$$R = N_A \cdot k \quad (6.5)$$

i este numărul gradelor de libertate ale moleculelor gazului (Numărul gradelor de libertate ale unui corp este numărul de coordonate independente, necesare pentru a determina univoc poziția corpului în spațiu.)

T reprezintă temperatura gazului

N reprezintă numărul moleculelor din sistemul termodinamic

ϑ reprezintă numărul moleculelor gram de substanță

$N_A = 6.023 \cdot 10^{23}\ molecule/mol$ reprezintă numărul lui Avogadro

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K$ reprezintă constanta lui Boltzmann

$R = 8.31\ J/mol \cdot K$ reprezintă constanta universală a gazelor

Observăm că energia internă a unui gaz ideal este o funcție de stare care depinde doar de temperatura gazului.

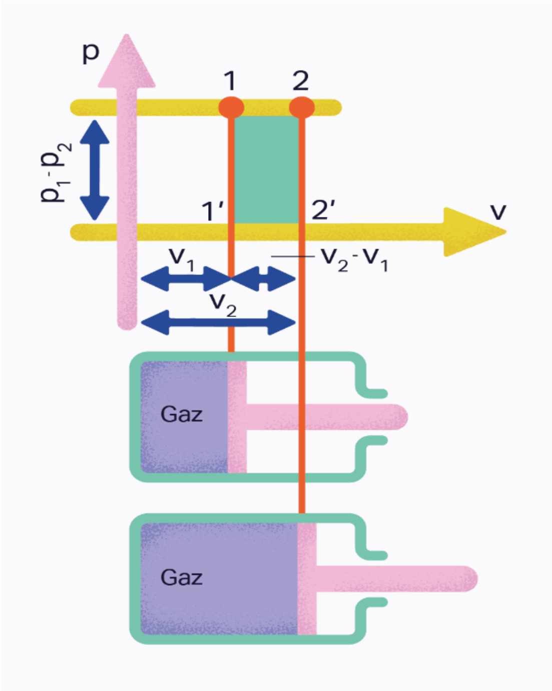


Fig. 6.4 Gaz în cilindru cu piston

6.1.4 Lucrul mecanic

Lucrul mecanic este mărimea fizică ce caracterizează sistemul studiat din punct de vedere al schimbului energetic, adică energia schimbată între sistem și mediul exterior în cursul interacțiunii lor mecanice. Lucrul mecanic este o mărime de proces, adică valoarea lui depinde de drumul parcurs pentru a ajunge din starea inițială în starea finală.

Considerăm un sistem închis format dintr-un cilindru cu piston în care se află gaz, ca în figura 6.4. Ciocnirile dintre moleculele gazului, respectiv dintre moleculele gazului și pereți, duc la apariția unor forțe asupra pereților. Valoarea acestor forțe variază de la un punct la altul al peretelui, dar pentru o suprafață suficient de mare (cum este aceea a unui perete sau a pistonului) se poate defini o forță medie ce acționează asupra sa. Datorită acțiunii acestei forțe pistonul se deplasează pe o distanță infinitezimală dx, într-un interval de timp infinit mic. Corespunzător, volumul gazului va crește cu volumul infinit mic $dV = S \cdot dx$. Aceasta înseamnă că lucru mecanic efectuat de gaz asupra mediului este:

$$\left.\begin{array}{l} L = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \\ p = \dfrac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad L = \int_{x_1}^{x_2} p \cdot S \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \qquad (6.6)$$

unde:

p este presiunea exercitata de gaz asupra pistonului,

F este forța care acționează asupra pistonului,

V este volumul ocupat de gaz, iar S este suprafața pistonului

Observații!

- Dacă într-o transformare volumul rămâne neschimbat (constant), nu se efectuează lucru mecanic;

- Dacă volumul crește (gazul se destinde), lucrul mecanic efectuat este pozitiv (este cedat de către gaz spre exterior);
- Dacă volumul descrește (gazul se comprimă), lucrul mecanic este negativ (se consumă lucru mecanic din exterior, pentru a se comprima gazul).

Într-o diagramă (p, V), lucrul mecanic este reprezentat de suprafața geometrică de sub curba transformării suferite de gazul studiat între valorile inițială (V_1) şi finală (V_2) ale volumului (fig.6.4).

6.1.5 Căldura

Când un transfer de energie are loc exclusiv în virtutea diferenței de temperatură se spune că are loc un schimb de căldură. Așadar, căldura reprezintă energia ce poate fi schimbată de un sistem termodinamic cu mediul înconjurător, proces însoțit de modificarea temperaturii sistemului.

Căldura este o mărime de proces, adică valoarea sa depinde de condițiile în care se realizează schimbul de energie sistem-mediu. Căldura Q schimbată de un corp de masă *m* pentru a-și modifica temperatura este:

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} mcdT = mc\left(T_f - T_i\right) \qquad (6.7)$$

unde: m este masa sistemului, c este căldura specifică a sistemului, respectiv dT este diferențiala temperaturii.

Căldura primită de sistem este pozitivă dacă temperatura finală a sistemului este mai mare decât cea inițială, variația de temperatură fiind pozitivă; totodată, căldura cedată de sistem este negativă dacă temperatura finală a sistemului este mai mică decât cea inițială, variația de temperatură fiind negativă. Așadar, funcție de diferența de temperatură va avea loc *absorbție* sau *cedare* de căldură în sistemul studiat.

Așadar, definim noțiunile:

1. ***Căldura specifică***: cantitatea de căldură schimbată (cu mediul) de unitatea de masă din acel material, atunci când se produce o variație de temperatură de un grad.

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT} \tag{6.8}$$

2. ***Căldura molară***: cantitatea de căldură schimbată de numărul de moli de substanță cu mediul înconjurător, atunci când temperatura sistemului se modifică cu un grad.

$$C = \frac{dQ}{\vartheta \cdot dT} \tag{6.9}$$

unde: ϑ reprezintă numărul de moli de substanță

3. ***Capacitate calorică***: căldura schimbată de sistemul termodinamic cu mediul înconjurător, atunci când temperatura sistemului se modifică cu un grad.

$$C^* = \frac{dQ}{dT} \tag{6.10}$$

Dacă ne referim la gaze, care suferă transformări particulare, atunci vorbim de:

Căldură specifică:

la volum constant: $c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$

la presiune constantă: $c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

Căldură molară:

la volum constant: $C_V = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$

la presiune constantă: $C_p = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

Capacitate calorică:

la volum constant: $C_V^* = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$

la presiune constantă: $C_p^* = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

Legătura dintre căldura molară la presiune și la volum constant este dată de relația lui Robert-Mayer:

$$C_p - C_V = R \qquad (6.11)$$

$R = 8.31\ J/mol\ K$ reprezintă constanta universală a gazelor

6.1.6 Entalpia

Entalpia, H, este o măsură a căldurii absorbite sau degajate în reacţiile chimice. Ea este o mărime de stare cu caracter energetic definită ca suma dintre energia internă a sistemului *(U)* și lucrul mecanic *(L)* necesar ca sistemul să ocupe volumul *V* la presiunea constantă *p*.

În Sistemul Internațional se măsoară în *J*, și este definită prin relația:

$$H = U + L = U + p \cdot V \qquad (6.12)$$

Variația entalpiei, ΔH, este o proprietate termodinamică a sistemului egală cu energia pusă la dispoziție sub formă de căldură într-o reacție chimică, la presiune constantă. Cu alte cuvinte, căldura degajată într-o reacție exotermă, sau căldura absorbită într-o reacție endotermă, la presiune constantă, reprezintă *variația entalpiei*.

6.1.7 Entropia

Entropia este o proprietate care se referă la gradul de dezordine dintr-un sistem termodinamic. Variația de entropie în cursul unei proces dintre două stări infinit apropiate este dată de raportul dintre schimbul de căldură și temperatură:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \qquad (6.13)$$

Notația δQ ne atenționează că variația cantității de căldură nu este o diferențială totală. Entropia este o mărime de stare, adică, variația sa nu depinde de drumul parcurs, ci numai de starea inițială și finală a sistemului:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \qquad (6.14)$$

6.2 Ecuația de stare a gazelor

În termodinamică, cel mai simplu model ales pentru gaze a primit denumirea de ***gaz perfect sau ideal***. Astfel, s-au introdus unele ipoteze simplificatoare referitoare la structura gazelor fără ca rezultatele teoretice să fie cu mult diferite de cele reale. Așadar, în cazul gazului ideal:

- sistemul este format dintr-un număr foarte mare de molecule identice care se mișcă complet dezordonat datorită energiei lor de natură termică;
- numărul moleculelor din unitatea de volum este același în orice regiune a incintei și în orice moment;
- ciocnirea între constituenți cât și cu pereții incintei este perfect elastică (viteza după ciocnire are aceeași valoare cu cea de dinainte de ciocnire);
- dimensiunile constituenților sunt mici în comparație cu distanța dintre aceștia (constituenții sunt considerați punctiformi), deci volumul acestora poate fi neglijat în raport cu volumul ocupat de gaz;
- energia potențială de interacțiune dintre moleculele gazului este zero.

După stabilirea ecuației de stare pentru un anumit sistem, putem prevedea comportamentul său în diferite condiții externe. Cea mai simplă ecuație de stare este cea a unui gazului ideal. Ecuația de stare a gazului ideal (ecuația lui Clapeyron-Mendeleev) exprimă legătura dintre parametrii de stare: presiune, temperatură și volum.

$$pV = \vartheta RT \tag{6.15}$$

unde:

ϑ reprezintă numărul molilor (moleculelor gram) de gaz,

$R = 8.31\, J/(mol \cdot K)$ este constanta universală a gazelor. Ea se poate determina pentru un mol de gaz, în condiții normale:

$$p_0 = 1.013 \cdot 10^5 N/m^2$$

$$T_0 = 273.15K$$

$$V_0 = 22.4 \cdot 10^{-3} m^3$$

din relația:

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Ecuația de stare a gazului ideal poate fi exprimată și altfel:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \Leftrightarrow \quad p = \rho\, \frac{RT}{\mu} \tag{6.16}$$

unde:

m este masa gazului,

µ masa unui mol din acel gaz (masa molară),

$\rho = \frac{m}{V}$ este densitatea gazului.

Pentru concentrații mici, ***gazele reale*** satisfac proprietățile gazului ideal, însă pentru concentrații mai mari nu se poate neglija volumul propriu al moleculelor și nici interacțiunea dintre molecule.

J.D.Van der Waals a dedus ecuația de stare pentru *gazul real*. Aceasta este o ecuație ușor modificată față de cea a gazului ideal ținând cont de fenomenele care se produc în cazul gazelor reale. Astfel, Van der Waals consideră că pentru un gaz real molecula are o formă sferică și este rigidă.

Ecuația gazului ideal nu poate descrie perfect gazul real deoarece dacă ar crește presiunea foarte mult, volumul V al gazului nu ar mai tinde spre zero ci ar tinde spre volumul propriu al moleculelor gazului real, b. Astfel că, Van der Waals consideră volumul total ca fiind $(V - b)$. În acest mod la creșterea presiunii la valori foarte mari volumul $(V - b)$ va tinde spre zero și astfel, ecuația rămâne valabilă.

Constanta b variază de la gaz la gaz dar este de ordinul $b = 3 \cdot 10^{-5} m^3$ ceea ce înseamnă în jur de 0,15% din volumul gazului aflat în condiții normale. Reducerea volumului efectiv în care se mișcă moleculele gazului real (datorită volumului propriu al moleculelor) duce la creșterea numărului de ciocniri ale moleculelor cu pereții incintei, ceea ce duce la crește presiunii exercitată de gaz prin generarea unei presiuni suplimentare. Aceasta face necesară introducerea unui factor de corecție și asupra presiunii p. Astfel, presiunea suplimentară exercitată de gaz este descrisă de cantitatea a/V^2. ***Ecuația de stare a gazului real*** este***:***

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \vartheta RT \tag{6.17}$$

unde:

a - constantă care depinde de forțele van der Waals,

b - volumul propriu al moleculelor gazului.

6.3 Principiile termodinamicii

Sistemele macroscopice conțin un număr foarte mare de atomi sau molecule. Numărul de particule dintr-un astfel de sistem este de ordinul de mărime al numărului lui Avogadro, motiv pentru care sistemul macroscopic nu poate fi tratat în același mod ca un sistem mecanic, chiar dacă am cunoaște legea de interacțiune dintre particule. În cele ce urmează vom enunța principiile care stau la baza termodinamicii.

Principiul general al termodinamicii

Enunț! *Un sistem termodinamic își păstrează starea de echilibru atâta timp cât nu interacționează cu alt sistem termodinamic (cât nu variază parametrii externi).*

Descrierea proprietăților unui sistem macroscopic e simplă când acesta se află în starea de echilibru termodinamic. Un sistem macroscopic se află în echilibru termodinamic, dacă parametrii macroscopici ce definesc starea lui rămân neschimbați în timp și au aceeași valoare în tot sistemul. Starea de echilibru este starea cea mai probabilă în care se găsește un sistem macroscopic izolat.

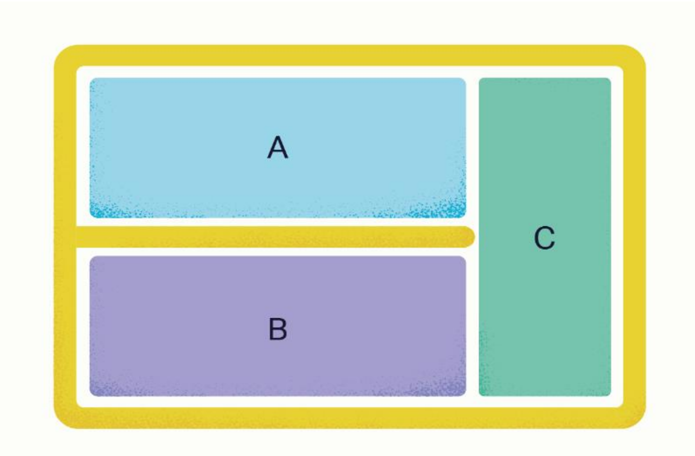


Fig. 6.5 Ilustrarea principiului tranzitivității echilibrului termodinamic

Principiul zero al termodinamicii *(tranzitivității echilibrului termodinamic)*

Considerăm sistemul din figura 6.5 format din subsistemele A, B și C. Pereții exteriori ai sistemului termodinamic, respectiv cel dintre subsistemele A și B sunt adiabatici (nu există schimb de căldură cu exteriorul). Așadar, dacă A este în echilibru termic cu C și dacă C este în echilibru termic cu B, atunci şi A este în echilibru termic cu B, chiar dacă între ele nu există schimburi de căldură datorită peretelui adiabatic.

Enunț! *Două sisteme care sunt fiecare în echilibru termic cu un al treilea, trebuie să fie în echilibru termic între ele însele.*

$$\begin{matrix} T_A = T_C \\ T_B = T_C \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad T_A = T_B \tag{6.18}$$

Principiul I al termodinamicii (legea conservării energiei în sistemele termodinamice)

Acest principiu face legătura între: energia internă – U, lucru mecanic – L și căldura – Q, schimbate de sistemul termodinamic cu mediul înconjurător.

Enunț!

1. *Variaţia energiei interne a unui sistem termodinamic între două stări de echilibru este influențată de lucrul mecanic și căldura schimbate de sistem cu exteriorul.*

Altfel spus:

2. *Cantitatea de căldură transmisă unui sistem termodinamic servește la creșterea energiei interne și pentru efectuarea unui lucru mecanic exterior.*

Pentru un proces termodinamic elementar (infinitezimal):

$$\begin{matrix} dU = \delta Q - \delta L \\ \delta Q = dU + \delta L \end{matrix} \tag{6.19}$$

unde: căldura infinitezimală δQ transferată către sau dinspre sistem produce o modificare infinitezimală a energiei interne a sistemului dU şi un lucru mecanic infinitezimal δL. Să notăm că simbolul δ arată că mărimile Q şi L sunt funcții de proces pentru sistem (variația lor depinde de drumul parcurs de sistem între două stări), în timp ce energia internă U este o funcție de stare motiv pentru care s-a utilizat simbolul d (diferențiala totală).

Pentru un proces termodinamic finit:

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - L \\ Q &= \Delta U + L \end{aligned} \tag{6.20}$$

Observație!

Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului se consideră negativ, iar lucrul mecanic efectuat de către sistem se consideră pozitiv.

Consecință!

Nu poate exista un perpetuum mobile se speța I*, adică nu poate fi construită o mașină care să producă lucru mecanic fără să consume energie din exterior sau fără să-și varieze energia internă.*

Energia internă a sistemului, U, poate fi o energie cinetică de mișcare a moleculelor dar poate include și interacțiunile dintre acestea (energia potențială).

Principiul II al termodinamicii *(principiul entropiei)*

Acest principiu stabilește modul în care evoluează sistemele termodinamice în mod natural (fără intervenție exterioară).

Enunț! Evoluția naturală a unui sistem termodinamic spre starea sa de echilibru este însoțită de o creștere de entropie.

$$dS \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \tag{6.21}$$

unde semnele:

$" > "$ se referă la ***transformări ireversibile*** (procese naturale)

$" = "$ se referă la ***transformări reversibile*** (procese ideale)

Așadar, procesele reale, ireversibile, se desfășoară în sensul creșterii entropiei, iar în procesele reversibile entropia nu se modifică.

Principiului II al termodinamicii se regăsește și sub alte formulări:

• <u>*Formularea dată de R. Clausius*</u>

Căldura nu poate trece de la sine (în mod natural) de la un corp cu temperatură scăzută la un corp cu temperatură mai ridicată.

Acest enunț nu exclude posibilitatea trecerii căldurii de la un corp rece la un corp cald, dar atunci procesul se produce în urma unei intervenții exterioare (un consum de lucru mecanic din exterior, aşa cum se întâmplă în cazul pompelor de căldură și al instalațiilor frigorifice).

• <u>*Formularea dată de S. Carnot*</u>

O mașină termică nu poate produce în mod continuu lucru mecanic, decât dacă agentul termic schimbă căldură cu două surse de căldură, cu temperaturi diferite.

Această formulare afirmă imposibilitatea transformării integrale a căldurii în lucru mecanic. Într-adevăr, într-o mașină termică, căldura nu se poate transforma integral în lucru mecanic, iar aprecierea, din acest punct de vedere, se face cu ajutorul randamentului termic.

• <u>*Formularea dată de W. Thomson (lord Kelvin)*</u>

Nu poate exista un perpetuum mobile de speţa a–II-a.

• <u>*Formularea dată de W. Thomson – M. Planck*</u>

În natură nu este posibil un proces al cărui efect total să constea numai în răcirea unui rezervor termic și în producerea unui lucru mecanic echivalent.

<u>***Principiul III al termodinamicii***</u>

Acest principiu a fost formulat de către Nernst și Planck, și se referă la comportarea sistemelor termodinamice în vecinătatea temperaturii de zero absolut, făcând referire la valoarea pe care entropia o poate avea.

Enunț! *La scăderea temperaturii unui sistem termodinamic în preajma temperaturii de zero absolut ($T = 0K$) entropia sistemului tinde la zero:*

$$\lim_{T \to 0} S = 0 \qquad (6.22)$$

Altfel spus:

Nici un sistem termodinamic nu poate fi răcit până la temperatura de zero absolut ($T = 0K$).

Generalitatea acestei afirmații constă în aceea că ea se referă la *orice sistem* și respectiv la faptul că entropia tinde la zero în preajma temperaturii de zero absolut independent de valorile pe care le iau alți parametri de care depinde aceasta (entropia).

6.4 Transformări termodinamice de stare

Clasificarea transformărilor termodinamice la trecerea din starea (1) în starea (2), din punct de vedere al parametrilor de stare:

a. Transformarea izobară
b. Transformarea izocoră
c. Transformarea izotermă
d. Transformarea adiabată
e. Transformarea politropă

Formula caracteristică fiecărei transformări se deduce pornind de la ecuația de stare a gazului ideal, prin separarea variabilelor de constante. Ulterior se determină lucrul mecanic, căldura și energia internă caracteristice fiecărei transformări.

a. Transformarea izobară *(p=const.)*

Pornind de la ecuația de stare a gazului ideal și ținând cont că presiunea este constantă, obținem legea transformării izobare (legea lui Gay-Lussac):

$$pV = \vartheta RT \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{T}} = \frac{\vartheta R}{p} = \boldsymbol{const.} \qquad (6.23)$$

adică pentru o transformare de la 1 la 2:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \tag{6.24}$$

Graficele acestei transformări în diferite sisteme de coordonate se pot vedea în figura 6.5.

Expresia lucrului mecanic

$$\boldsymbol{L_{izobar}} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \boldsymbol{p} \cdot \Delta\boldsymbol{V} \tag{6.25}$$

Cantitatea de căldură schimbată de sistem cu mediul este:

$$Q_{izobar} = mc_p\Delta T = \vartheta C_p\Delta T = C_p^*\Delta T \tag{6.26}$$

Variația energiei interne este:

$$\Delta U = Q_{izobar} - L_{izobar} = \frac{i}{2}\vartheta R\Delta T \tag{6.27}$$

b. Transformarea izocoră *(V=const.)*

Legea transformării izocore (legea lui Charles) se obține pornind de la ecuația de stare a gazelor ideale și ținând cont că în această transformare volumul este constant.

$$pV = \vartheta RT \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{T}} = \frac{\vartheta R}{V} = \boldsymbol{const.} \tag{6.28}$$

Pentru o transformare între două stări:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{6.29}$$

Deoarece volumul este constant lucrul mecanic este zero, ceea ce ne duce la concluzia că: Un sistem termodinamic trebuie să își modifice volumul pentru a efectua lucru mecanic.

$$\boldsymbol{L_{izocor}} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \boldsymbol{0} \tag{6.30}$$

Expresia căldurii este dată de relația:

$$Q_{izocor} = mc_V\Delta T = \vartheta C_V\Delta T = C_V^*\Delta T \qquad (6.31)$$

Variația energiei interne:

$$\begin{gathered} \Delta U = Q_{izocor} - L_{izocor} = mc_V\Delta T = \vartheta C_V\Delta T = C_V^*\Delta T \\ \Delta U = \frac{i}{2}\vartheta R\Delta T \end{gathered} \qquad (6.32)$$

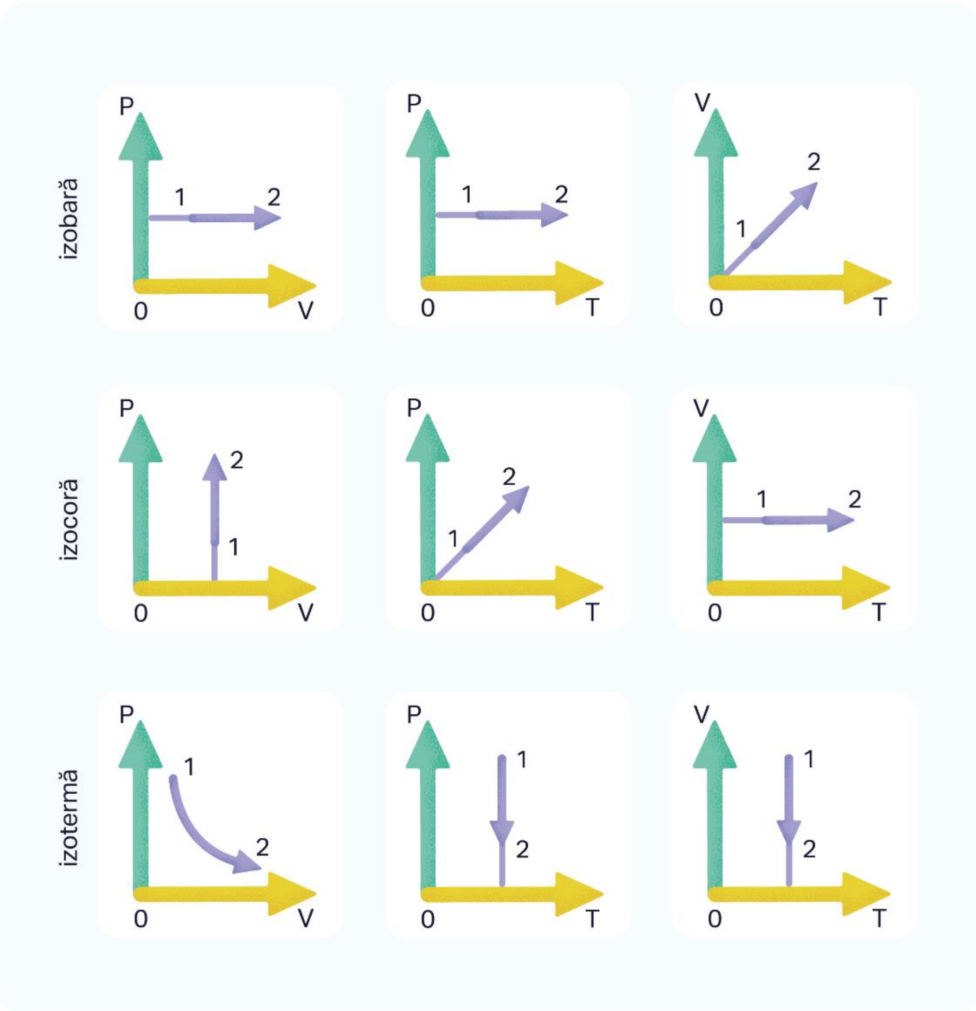


Fig. 6.6 Reprezentarea unor transformări termodinamice în diferite sisteme de coordonate

c. **Transformarea izotermă** *(T=constant)*

Legea transformării izoterme sau legea lui Boyle-Mariotte se obține când temperatura este constantă în ecuația de stare a gazului ideal:

$$\boldsymbol{pV} = \vartheta RT = \boldsymbol{const.} \qquad (6.33)$$

Între două stări:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad (6.34)$$

În ceea ce privește reprezentarea grafică în coordonate p-V, curba acestei reprezentări e cu atât mai departe de axe cu cât temperaturile sunt mai mari.

Expresia lucrului mecanic este:

$$\boldsymbol{L_{izoterm}} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\vartheta RT}{V} dV = \boldsymbol{\vartheta RT \ln \frac{V_2}{V_1}} \qquad (6.35)$$

Expresia căldurii este dată de relația:

$$Q_{izoterm} = L_{izoterm} = \vartheta RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (6.36)$$

Variația energiei interne se află pornind de la relația de definire a energiei interne si ținând cont de faptul că temperatura este constantă, în această transformare.

$$\Delta U = Q_{izoterm} - L_{izoterm} = \frac{i}{2} \vartheta R \Delta T = 0 \qquad (6.37)$$

d. **Transformarea adiabată**

Procesele adiabatice presupun transformări ale sistemului termodinamic fără schimb de căldură cu exteriorul (Q=0). În timpul unei astfel de transformări se modifică temperatura, presiunea și volumul sistemului. Relațiile lui Poisson descriu cel mai bine această transformare:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{pV^{\gamma}} &= \boldsymbol{const.} \\ \boldsymbol{TV^{\gamma-1}} &= \boldsymbol{const.} \end{aligned} \qquad (6.38)$$

unde pentru a deduce a doua relație se ține cont de:

$$pV = \vartheta RT \Rightarrow p = \frac{\vartheta RT}{V}$$

Atunci putem scrie legile care guvernează transformarea adiabată astfel:

$$\begin{aligned} p_1V_1^{\gamma} &= p_2V_2^{\gamma} \\ T_1V_1^{\gamma-1} &= T_2V_2^{\gamma-1} \end{aligned} \tag{6.39}$$

unde: $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ este coeficient adiabatic, iar C_p și C_V sunt căldurile molare la presiune respectiv la volum constant.

Expresia lucrului mecanic se determină pornind de la formula de definire a lucrului mecanic în termodinamică:

$$\begin{aligned} L_{adiabat} &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \\ p_1V_1^{\gamma} = pV^{\gamma} &\Rightarrow p = \frac{p_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} \end{aligned} \tag{6.40}$$

De unde:

$$L_{adiabat} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} dV = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right) \tag{6.41}$$

Variația energiei interne a sistemului este dată de relația

$$\Delta U = -L_{adiabat} \tag{6.42}$$

Cunoașterea exponentului adiabatic al unui gaz permite determinarea căldurilor molare la volum și presiune constante. Aceasta se realizează pornind de la relația lui Robert-Mayer și respectiv de la relația de definire a coeficientului adiabatic:

$$\begin{aligned} C_p - C_V &= R \\ \gamma &= \frac{C_p}{C_V} \end{aligned} \tag{6.43}$$

De aici, rezultă relațiile de definire pentru căldura molară la volum constant și la presiune constantă funcție de constanta universală a gazelor și respectiv coeficientul adiabatic:

$$C_V = \frac{1}{\gamma-1}R \quad (6.44)$$
$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$$

e. **Transformarea politropă**

*Transformarea politropă este transformarea în care **căldura specifică** a sistemului termodinamic rămâne **constantă**.* O astfel de transformare este descrisă de *formula lui Poisson*:

$$\boldsymbol{pV^{\chi} = const.} \quad (6.45)$$

χ este ***exponent politropic*** care se definește prin relația:

$$\chi = \frac{C-C_p}{C-C_v} \quad (6.46)$$

unde:

C este căldură molară,

C_v este căldură molară la volum constant,

C_p este căldură molară la presiune constantă.

Considerăm o transformare politropă în care, conform definiției, căldura molară a sistemului este constantă:

$$C = \frac{\delta Q}{\vartheta dT} = const.$$

unde ϑ este numărul de moli ai sistemului termodinamic. Expresia principiului I al termodinamicii o putem scrie funcție de căldura molară, astfel:

$$\vartheta C_v dT = \vartheta C dT - pdV \ \Leftrightarrow \ \vartheta(C - C_v)dT = pdV \quad (6.47)$$

Totodată, diferențiind ecuația de stare a gazului perfect obținem:

$$Vdp + pdV = \vartheta R dT \quad (6.48)$$

Eliminând temperatura din ultimele două relații, obținem:

$$(C - C_v)(Vdp + pdV) = RpdV$$

$$(C - C_v - R)pdV + (C - C_v)Vdp = 0$$

$$(C - C_p)pdV + (C - C_v)Vdp = 0$$

Separând variabilele obținem:

$$\frac{(C-C_p)}{(C-C_v)}\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \iff \chi\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \qquad (6.49)$$

Dacă integrăm această relație obținem formula caracteristică transformărilor politrope. Transformările simple ale gazului ideal sunt cazuri particulare ale transformării politrope.

Cazuri particulare:

$\chi = \gamma$ ***transformarea adiabată*** $(\delta Q = 0)$

$\chi = 0$ ***transformarea izobară*** (p $= const.$)

$\chi = 1$ ***transformarea izotermă*** (T $= const.$)

$\chi \to \pm\infty$ ***transformarea izocoră*** (V $= const.$)

6.5. Cicluri termodinamice. Echipamente termice

Se numește *ciclu termodinamic* o succesiune de transformări în urma cărora sistemul termodinamic revine la starea inițială fără a trece de mai multe ori prin aceleași stări intermediare. Într-o diagramă un ciclu termodinamic se reprezintă printr-o curbă închisă.

În funcție de sensul de parcurgere al ciclului, vorbim despre:

Cicluri directe sau *motoare* în care sensul de parcurgere este cel al acelor de ceasornic. Aceste cicluri absorb căldură şi produc lucru mecanic (cedează lucru mecanic spre exterior).

Cicluri indirecte, inversate sau *generatoare* în care sensul de parcurgere este cel trigonometric (invers acelor de ceasornic).

Aceste cicluri sunt consumatoare de lucru mecanic (primesc lucru mecanic din exterior).

Conform principiului întâi al termodinamicii, pentru un sistem care suferă o transformare ciclică, $\Delta U = 0$ iar $Q = L$.

Echipamentul termodinamic care funcționează pe baza unui ciclu direct și care produce lucru mecanic pe baza căldurii primite (absorbite) se numește ***mașină termică sau motor termic***. Principiul de funcționare al mașinii termice este prezentat în figura 6.7. Mașina termică absoarbe o cantitate de căldură (Q_{abs}) de la o sursă caldă și o parte din ea este transformată în lucrul mecanic L, procesul fiind însoțit de pierderea cantității de căldură (Q_{ced}) care este cedată sursei reci.

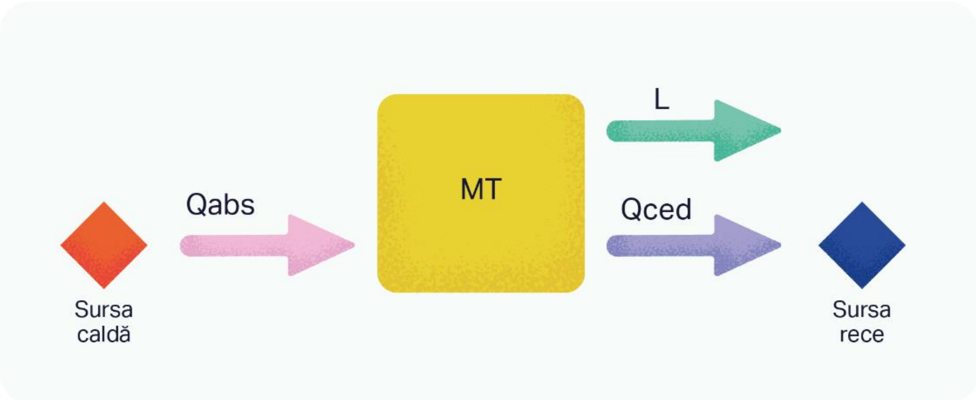


Fig. 6.7 Mașina termică – principiul de funcționare

Așadar, lucrul mecanic pe acest ciclu este:

$$L = Q_{abs} - |Q_{ced}| \tag{6.50}$$

Se numește ***randament termic al ciclului*** raportul dintre energia utilă produsă pe ciclu (adică, lucrul mecanic produs) și energia consumată (adică, căldura consumată):

$$\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs} - |Q_{ced}|}{Q_{abs}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{abs}} \tag{6.51}$$

Dacă echipamentul efectuează lucru mecanic (L) pe baza unui consum de energie (electrică, spre exemplu) și are loc transferul unei cantități de căldură (Q) de la sursa rece la sursa caldă, vorbim despre:

mașina frigorifică – partea utilă a echipamentului este sursa rece, acesta putând servi la păstrarea unor produse la temperaturi joase

pompa de căldură – partea utilă este sursa caldă, iar echipamentul poate servi la încălzirea unor incinte.

Fig. 6.8 Principiul de funcționare al mașinii frigorifice (MF) / pompei de căldură (PC).

Aspectul economic al funcționării unor astfel de echipamente se exprimă prin ***eficiența termică*** care se definește prin raportul dintre căldura transferată și lucrul mecanic consumat:

$$\varepsilon = \frac{Q_{transferată}}{L} \tag{6.52}$$

Ciclul Carnot

Ciclul cu randament maxim a fost imaginat de către Sadi Carnot. Ciclul Carnot este un ciclu de referință în aprecierea randamentului mașinilor termice.

Acest ciclu este reprezentat în fig. 6.9 și este compus din:

două izoterme: *1-2* și *3-4*

două adiabate: *2-3* și *4-1*

Agentul de lucru primește căldura Q_{12} în timpul destinderii izoterme *1-2* și cedează căldura Q_{34} în timpul comprimării izoterme *3-4*.

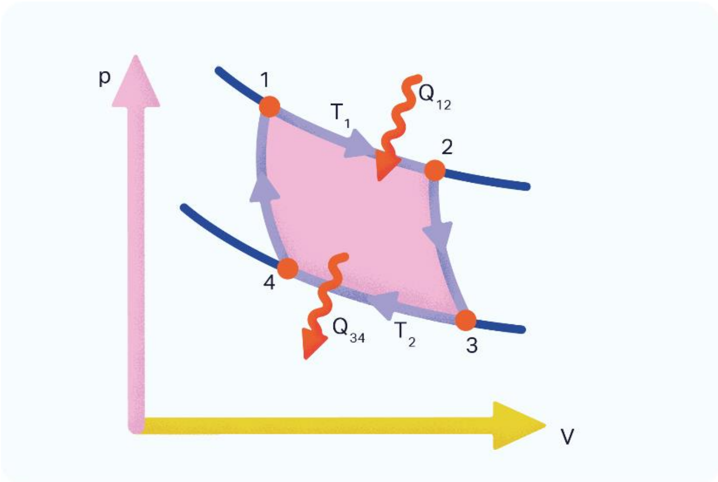


Fig. 6.9 Ciclul Carnot

Pe transformările izoterme, căldurile sunt descrise de relațiile:

$$Q_{abs} = Q_{12} = \vartheta RT \ln\frac{V_2}{V_1}$$
$$Q_{ced} = Q_{34} = \vartheta RT_0 \ln\frac{V_4}{V_3} = -\vartheta RT_0 \ln\frac{V_3}{V_4} \qquad (6.53)$$

Pe transformările adiabate, scriem relațiile:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$
$$T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (6.54)$$

de unde rezultă:

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (6.55)$$

Expresia randamentului termic pentru ciclul Carnot este:

$$\boldsymbol{\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{abs}}} = 1 - \frac{\vartheta R T_0 \ln\frac{V_3}{V_4}}{\vartheta R T \ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_0\, ln\frac{V_3}{V_4}}{T\, ln\frac{V_2}{V_1}} = \boldsymbol{1 - \frac{T_0}{T}} \qquad (6.56)$$

6.6 Fenomene de transport termic

În cele ce urmează vom discuta mecanismele prin care căldura trece de la un corp cu temperatură mai ridicată la unul cu temperatură mai scăzută precum şi mărimile fizice ce caracterizează transportul termic. Transferul de căldură de la un sistem la altul se poate realiza prin trei mecanisme:

- conducție
- convecție
- radiație.

Aceste trei mecanisme pot fi întâlnite independent unul față de celălalt sau împreună.

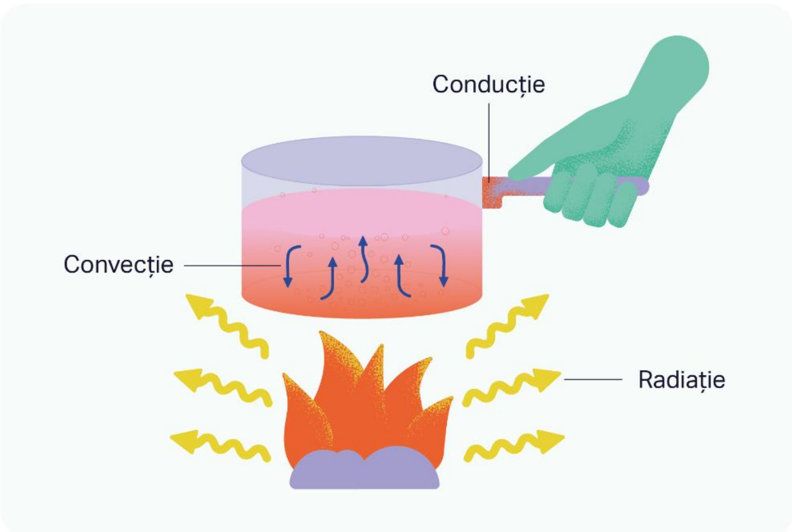


Fig. 6.10 Fenomene de transport termic

Conducția termică

Procesul de transfer al energiei interne de la părțile mai fierbinți ale corpurilor spre cele mai reci, care conduce la egalarea temperaturilor, se numește ***conductibilitate termică***. În decursul conducției termice transferul energiei se efectuează ca rezultat al transmiterii directe a energiei de la particulele (molecule, atomi, electroni) ce posedă o energie mai mare la particulele cu energie mai mică.

Considerăm o bucată de material de grosime Δx și secțiune S date. Experimental s-a demonstrat că transferul de căldură în unitatea de timp este proporțională cu aria suprafeței și diferența de temperatură și invers proporțional cu grosimea stratului:

$$\frac{Q}{\Delta t} \sim S \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad (6.57)$$

Densitatea fluxului de căldură reprezintă căldura care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață:

$$j = \frac{Q}{S\,\Delta t} \sim \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad (6.58)$$

Pentru un strat foarte subțire:

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad (6.59)$$

Unde:

λ este *coeficientul de conductivitate termică*

$$[\lambda]_{SI} = W/m \cdot K$$

$\frac{dT}{dx}$ este gradientul de temperatură

”-” apare deoarece transferul de căldură are loc de la corpul cu temperatură mai mare la cel cu temperatura mai mică.

Cauza transportului de căldură este un gradient de temperatură, care după cele trei direcții este de forma:

$$grad\,(T) = \frac{\delta T}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta T}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta T}{\delta z}\vec{k} \qquad (6.60)$$

în interiorul corpului conductor.

Așadar, energia termică (căldura) transportată prin unitatea de suprafață a conductorului, în unitatea de timp, este dată de ***legea lui Fourier***:

$$\vec{j} = -\lambda \, grad \, (T) \qquad (6.61)$$

Coeficienții de conductivitate termică sunt determinați de natura materialului conductor dar pot depinde și de temperatură sau de umiditate (în cazul materialelor poroase).

Convecția termică

Procesul de transfer al energiei interne în fluide prin intermediul fluxurilor de substanță se numește ***convecție***. În natură convecția apare în câmpul de gravitație la încălzirea neomogenă de jos în sus a substanțelor fluide. Substanța încălzită sub acțiunea forței lui Arhimede se deplasează în raport cu substanța mai puțin încălzită în sens invers forței de greutate. Convecția conduce la egalarea temperaturilor în fluide.

Convecția termică poate fi:

- ***liberă*** dacă forțele de ascensiune sunt determinate de o diferență de densitate în fluid.

- ***forțată*** dacă forțele care imprimă deplasarea maselor de fluid (lichid, gaz) sunt de natură externă.

Exemplu de convecție liberă: Considerăm un vas cu apă care se găsește pe un reșou. În acest caz, straturile de apă din imediata apropiere a vasului în care se află, se dilată și prin aceasta își reduc densitatea, devenind mai ușoare decât straturile superioare. Urmare a acestui fapt, straturile calde se vor ridica și în locul lor vor coborî straturile superioare, mai reci, și în consecință mai grele. Apoi, acestea se vor încălzi la rândul lor și procesul va continua.

Exemplu de convecție forțată: Aceasta apare la simpla amestecare a unui lichid. În acest caz nu forțele interne sunt cele care amestecă masele de fluid, contribuind astfel la transportul căldurii, ci un agitator care e introdus în masa de lichid.

Dacă temperatura suprafeței superioare a unui fluid omogen este T_S, iar cea inferioară este T_i, atunci cantitatea de căldură transportată de fluid prin unitatea de suprafață în unitatea de timp (*densitatea de curent termic*) satisface relația:

$$j_{convecție} = \alpha(T_i - T_S) \tag{6.62}$$

unde α este *coeficientul de transport termic* prin convecție și depinde de natura și masa fluidului.

Deoarece masa de fluid pusă în mișcare este cea care contribuie la transportul de căldură rezultă că eficienta acestui proces depinde de densitatea și căldura specifică a substanței.

Radiația termică

Orice corp a cărui temperatură este mai mare decât zero absolut emite energie sub formă de radiație datorită oscilațiilor sarcinilor elementare care-l alcătuiesc numită ***radiație termică.***

Transferul prin *radiație termică* are loc atunci când căldura se transmite de la un corp la altul fără ca cele două corpuri să se atingă.

Un corp care absoarbe total, respectiv emite total radiație, se numește ***corp negru***. O incintă încălzită la temperatura T emite printr-un orificiu o radiație ce poate fi aproximată cu cea emisă de un corp negru. Energia emisă de unitatea de suprafață a corpului negru în unitatea de timp se numește *radianță* și este dată de ***legea lui Stefan-Boltzmann***:

$$R = \sigma T^4 \tag{6.63}$$

Enunț!

Energia (radianța) emisă de un corp negru depinde doar de puterea a patra a temperaturii sale absolute.

Constanta Stefan-Boltzmann este $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\, W/m^2 \cdot K$.

Puterea emisă prin radiație termică de un corp absolut negru de suprafață *S* se definește funcție de radianță și suprafața care emite:

$$P = RS = \sigma T^4 S \tag{6.64}$$

Pentru corpurile care nu sunt absolut negre (adică pentru corpurile reale) formula se corectează cu un factor subunitar ε numit *emisivitate* care depinde de natura corpului emisiv:

$$P = RS = \varepsilon\sigma T^4 S \tag{6.65}$$

Energia schimbată prin radiație termică în unitatea de timp (puterea) de către un perete de suprafață S, aflat la temperatura T_P, într-un mediu caracterizat prin temperatura T_m, este dată de relația:

$$P = \varepsilon\sigma\left(T_p^4 - T_m^4\right)S \tag{6.66}$$

Dacă:

- $T_p > T_m$ peretele emite radiaţie termică pierzând prin aceasta energie până când temperatura peretelui și a mediului se vor egala.
- $T_p < T_m$ peretele absoarbe energie din mediul înconjurător până la egalarea temperaturilor.

Diferența esențială dintre schimbul termic prin radiație, și celelalte fenomene de transport termic constă în faptul că acesta poate avea loc și în absența mediului material, deoarece radiația electromagnetică se propagă și în vid. În natură schimbul termic prin radiație are loc în mod constant. Studiul acestui proces are o importanță fundamentală pentru descrierea proceselor termice.

7. Mecanica fluidelor

Mecanica fluidelor se mai numește şi *mecanica mediilor continue*. Fluidele pot exista în următoarele stări de agregare: lichid, vapori, gaze sau plasmă.

Mecanica fluidelor cuprinde:

- ***Statica fluidelor*** – studiază repausul fluidelor și acțiunile exercitate de acestea asupra suprafețelor solide cu care acestea vin în contact.
- ***Cinematica fluidelor*** – studiază mişcarea fluidelor fără să țină cont de forțele care produc sau modifică starea de mișcare.
- ***Dinamica fluidelor*** – abordează mișcarea fluidelor ținând cont de forțele care intervin și de transformările energetice produse în timpul mişcării.

Mecanica fluidelor studiază legile general valabile pentru starea de repaus sau de mişcare a acestora. Fenomenele proprii lichidelor, gazelor sau aerului sunt studiate de hidraulică, termotehnică şi respectiv aerodinamică sau de alte discipline specifice cum ar fi transferul de căldură, construcții hidrotehnice, construcții aerospațiale și altele.

În ultima perioadă s-au diversificat foarte mult domeniile în care se studiază și utilizează mișcarea fluidelor: hidrotransportul, fenomene de filtrare, poluarea, mecanica suspensiilor, aeroelasticitatea, magnetohidrodinamica şi altele.

7.1. Proprietățile fluidelor

Din punct de vedere istoric bazele mecanicii fluidelor au fost puse utilizând modelul de fluid ideal.

Fluidele ideale (fără vâscozitate) sau *fluidele Pascal* sunt medii omogene fără vâscozitate, adică nu opun rezistență la deformare.

Fluidele reale sunt tot medii omogene, continue, dar care opun rezistență la deformare, aceasta fiind determinată de forțele de frecare dintre straturile fluidului în curgere.

Omogenitatea și izotropia permit ca proprietățile și relațiile stabilite pentru o particulă fluidă de dimensiuni mici determinate de condiția neglijării mișcării proprii a moleculelor sau de mișcarea browniană (la gaze) să fie valabile în tot fluidul.

Un *fluid* este *omogen* dacă are aceleași proprietăți în orice punct din volumul său. Un *fluid* este *izotrop* dacă are aceleași proprietăți în toate direcțiile.

Fluidele au o serie de proprietăți fizice comune tuturor stărilor de agregare. Aceste proprietăți vor fi discutate în cele ce urmează.

Densitatea, ρ

Densitatea ρ, într-un punct oarecare din interiorul unui fluid se definește ca fiind limita raportului dintre masa Δm a unui element de volum din jurul punctului considerat și volumul elementului ΔV când acesta tinde către zero, adică:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \tag{7.1}$$

În cazul unui fluid omogen, densitatea medie este:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{7.2}$$

Termenii sinonimi ai densității sunt: *masă specifică*, sau *masă volumică*. Unitatea de măsură în Sistemul Internațional este $\frac{kg}{m^3}$.

Inversul densităţii, volumul ocupat de unitatea de masă se numeşte *volum specific* sau *volum masic*:

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{7.3}$$

Densitatea unui fluid variază cu temperatura după formula:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\alpha \cdot T} \tag{7.4}$$

unde:

ρ_0 – densitatea fluidului la temperatura de 0°C;

α – coeficientul de dilatare în volum a fluidului;

După cum se poate observa densitatea este funcţie de temperatură dar în unele cazuri este influenţată şi de presiune. În cazul lichidelor, variaţia în raport cu presiunea poate fi neglijată. În general, densitatea fluidului scade odată cu creşterea temperaturii. Variaţia densităţii apei funcţie de temperatură este redată în fig. 7.1.

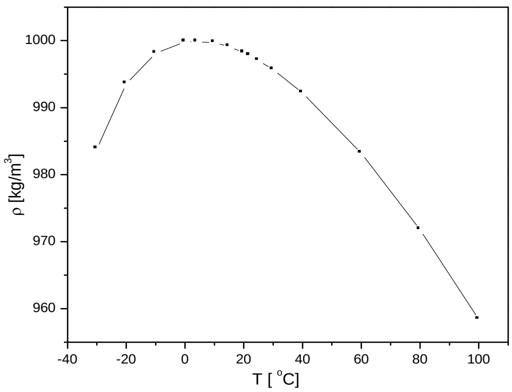


Fig. 7.1 Variaţia densităţii apei funcţie de temperatură

Greutatea specifică, γ

Pentru un fluid neomogen, *greutatea specifică γ* într-un punct din interiorul unui fluid se defineşte ca fiind limita raportului dintre greutatea *ΔG* a unui element de volum din jurul punctului considerat şi volumul elementului ΔV, când acesta tinde către zero:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV} \tag{7.5}$$

În cazul unui fluid omogen, greutatea specifică este:

$$\gamma = \frac{G}{V} \tag{7.6}$$

Termenul sinonim al greutăţii specifice este *greutate volumică*. Unitatea de măsură în Sistemul Internaţional este $\frac{N}{m^3}$.

Ținând cont de relațiile:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{m \cdot g}{V} \\ \frac{m}{V} &= \rho \end{aligned} \tag{7.7}$$

obținem legătura dintre greutatea specifică și densitate:

$$\gamma = \rho \cdot g \tag{7.8}$$

Compresibilitatea izotermă, β

Compresibilitatea izotermă reprezintă proprietatea unui fluid de a-și modifica volumul sub acțiunea variației presiunii, la temperatură constantă.

Dacă are loc o variație a presiunii Δp pentru un volum de fluid, V, se produce o variație relativă de volum proporțională cu Δp. Relația care exprimă această dependență este:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\beta \cdot \Delta p \tag{7.9}$$

unde V este volumul inițial al fluidului;

$\Delta V/V$ reprezintă variația relativă a volumului;

β este coeficientul de evaluare cantitativă a compresibilității fluidului și se numește *modul de compresibilitate izotermă* (m^2/N). Semnul minus arată că unei creşteri a presiunii îi corespunde o scădere a volumului.

Pentru variații infinitezimale, relația (7.9) devine:

$$\frac{dV}{V} = -\beta \cdot dp \qquad (7.10)$$

Definim *modulul de elasticitate* ca inversul modulului de compresibilitate:

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} = -V\frac{dp}{dV} \qquad (7.11)$$

Relația poate fi exprimată și funcție de densitatea ρ. Pornind de la condiția ca în procesul de comprimare masa să rămână constantă:

$$m = \rho \cdot V = const. \qquad sau \qquad \rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0 \qquad (7.12)$$

Separând variabilele obținem:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \qquad (7.13)$$

Din relațiile (7.10) și (7.13) rezultă că:

$$\beta dp = \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \\ \varepsilon = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho} \end{cases} \qquad (7.14)$$

În cazul fluidelor grele (lichide) $\beta \to 0$, deci $\frac{d\rho}{dp} = 0$ (sunt practic incompresibile) și $c \to \infty$, adică ar avea loc o propagare instantanee a sunetului, ceea ce este în contradicție cu realitatea fizică. Prin urmare, în fenomenele legate de propagarea undelor de presiune în medii fluide este necesară considerarea proprietății de compresibilitate a fluidului.

Celeritatea, c

Celeritatea sau *viteza de propagare a sunetului* este un parametru care descrie propagarea sunetului printr-un mediu. Aceasta depinde de proprietățile mediului de propagare, adică de elasticitatea și densitatea acestuia. Într-un mediu fluid viteza de propagare a sunetului definită de Newton este:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\beta \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{7.15}$$

În aer și alte gaze viteza sunetului depinde în primul rând de temperatură. Presiunea are un efect mic, iar umiditatea nu are aproape nici un efect asupra vitezei. De exemplu, în cazul aerului:

$$la \quad t = 0°\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad c = 331.5\, m/s$$
$$la \quad t = 20°\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad c = 343.4\, m/s$$

În lichide viteza de propagare a sunetului este mai mare decât în gaze, pentru că, deși densitatea este mai mare (ceea ce ar însemna o inerție mai mare, deci o viteză inferioară), compresibilitatea lichidelor este mult mai mică decât a gazelor, ceea ce face ca o perturbație a presiunii într-un punct să se propage rapid la punctele vecine. Astfel, în apă viteza de propagare a sunetului este de 1400-1500 m/s. Cunoașterea precisă a vitezei sunetului în apă este importantă într-o serie de domenii precum cartografierea acustică a fundului oceanic, aplicații ale sonarului subacvatic, comunicații etc.

Mișcările în fluide compresibile pot fi clasificate în funcție de numărul lui Mach (Ma), care reprezintă raportul dintre viteza unui obiect în mediul respectiv, v, și viteza sunetului, c, (celeritate):

$$Ma = \frac{v}{c} \tag{7.16}$$

Numărul lui Mach este o mărime adimensională care arată de câte ori este mai mare viteza unui mobil decât viteza sunetului în acel mediu.

În general întâlnim următoarele cazuri particulare:

- $Ma < 1$ $(v < c)$ mișcarea este subsonică;
- $Ma > 1$ $(v > c)$ mișcarea este supersonică.

O clasificare mai detaliată definește următoarele regimuri de mișcare a fluidelor:

- $Ma < 0.25$ – mișcare subsonică, incompresibilă;
- $0.25 \leq Ma < 0.8$ – mișcare subsonică, compresibilă;
- $0.8 \leq Ma < 1.2$ – mișcare trans sonică, are loc formarea undelor de şoc;
- $Ma = 1$ – mișcare sonică;
- $1.2 \leq Ma \leq 5$ – mișcare supersonică, are loc stabilizarea undelor de şoc formate anterior;
- $Ma \geq 5$ – mișcare hipersonică.

Adeziunea la suprafețe solide

Adeziunea este proprietatea ce rezultă din atracția dintre moleculele unui fluid și cele ale suprafeței corpului solid cu care acesta vine în contact. Dacă atracția intermoleculară a lichidului este mai mică decât cea dintre lichid și perete, atunci lichidul udă peretele (aderă la acesta).

Forța de adeziune depinde de: natura suprafeței, natura fluidului și temperatură. S-a dovedit experimental că în jurul corpurilor solide aflate în contact cu fluide există un strat de fluid aderent, numit și *strat limită*, a cărui grosime este de ordinul 10^{-2} mm. În stratul limită se manifestă intens forțele de frecare vâscoasă care determină o modificare a profilului de viteze a particulelor de fluid (variația gradientului de viteză pe direcția normală curgerii dv/dy).

Totodată, s-a observat că suprafața liberă a unui lichid tinde să-și micșoreze aria. Aceasta se explică prin faptul că fiecare moleculă din suprafața de separație fiind atrasă de moleculele vecine, rezultanta acestor forțe este îndreptată spre interior.

Vâscozitatea η, v

Proprietatea de vâscozitate a fost explicată și definită diferit de oamenii de știință:

- Newton a considerat vâscozitatea ca fiind o consecință a forțelor de coeziune care reacționează la deplasarea relativă a particulelor de fluid. (Această ipoteză nu poate fi valabilă pentru gaze, la care distanțele intermoleculare sunt mari, iar forțele de coeziune neglijabile.)

- Maxwell explica vâscozitatea fluidelor, prin capacitatea de a face să apară forțe, atunci când se produc variații bruște ale formei fluidului.

În concluzie, vâscozitatea reprezintă proprietatea fluidelor de a se opune deformațiilor atunci când sunt supuse la alunecare relativă a straturilor suprapuse (opunere de rezistență la schimbarea formei). Aceasta se manifestă numai la fluidele în mișcare prin apariția unor eforturi tangențiale și este datorată frecării dintre straturile alăturate de fluid care se deplasează unele față de altele.

Vâscozitatea este de două tipuri:

- Vâscozitate dinamica η
- Vâscozitate cinematică v

Vâscozitatea se mai poate defini ca o proprietate comună tuturor fluidelor, prin care cu forțe *(F)* suficient de mici se pot produce deformații oricât de mari, cu viteze de deformare mici:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v}{h} \qquad (7.17)$$

unde $\frac{dv}{dh}$ reprezintă gradientul vitezei, adică variația vitezei pe unitatea de lungime a normalei la direcția de mișcare a fluidului.

Mărimea η caracterizează proprietatea de vâscozitate a fluidului și se numește *coeficient de vâscozitate dinamică* sau *vâscozitate dinamică*. Sensul fizic al acestei mărimi este acela de tensiune tangențială care se dezvoltă în interiorul unui fluid omogen când gradientul vitezei este unitar. Unitatea de măsură a vâscozității dinamice, în Sistemul Internațional, este $[N \cdot s/m^2]$ sau $[kg/m \cdot s]$. În fig. 7.2 este reprezentată variația vâscozității dinamice a apei cu temperatura.

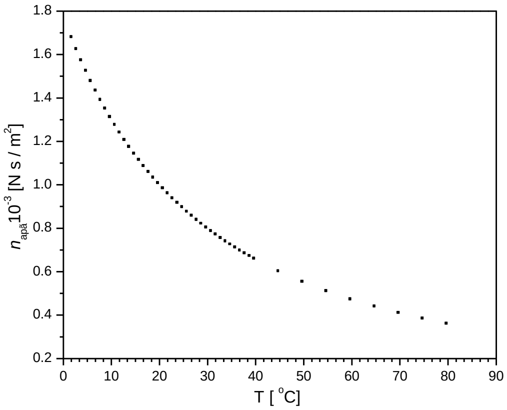


Fig. 7.2 Variația coeficientului de vâscozitate dinamică cu temperatura în cazul apei

Pentru a lega vâscozitatea de natura fluidului s-a introdus noțiunea de *vâscozitate cinematică*, ν, definită de relația:

$$v = \frac{\eta}{\rho} \tag{7.18}$$

Unitatea de măsură a vâscozității cinematice, în Sistemul Internațional, este m^2/s.

Vâscozitățile dinamică și cinematică depind de parametrii de stare ai mediului. Astfel, vâscozitatea dinamică depinde numai de temperatură și nu depinde de presiune, în timp ce vâscozitatea cinematică depinde și de presiune. Variația vâscozității cu temperatura este diferită pentru lichide și gaze. La lichide ν scade cu creșterea temperaturii, iar la gaze ν crește cu creșterea temperaturii.

Tensiunea tangențială ce apare între două straturi infinit vecine se definește:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{dv}{dh} \tag{7.19}$$

Astfel, forța de frecare ce apare la curgerea fluidului este:

$$F_f = \tau \cdot S \tag{7.20}$$

Tensiunea tangențială, τ, are tendința de a egala vitezele celor două straturi de fluid, deci se opune mișcării stratului cu viteză mai mare (are sens opus mișcării acestui strat). Fluidele ale căror tensiuni tangențiale de vâscozitate în mișcare laminară sunt date de relația (7.20), se numesc newtoniene.

În funcție de dependența $\tau = \tau\left(\frac{dv}{dh}\right)$, întâlnim:

1. fluide ideale (lipsite de vâscozitate), unde $\tau = 0$;
2. solide rigide (nu există deplasări între diferitele puncte care definesc solidul, sub acțiunea unor eforturi tangențiale, sau normale);
3. fluide newtoniene (valoarea tensiunilor tangențiale este proporțională cu gradientul de viteză);
4. fluidele dilatante (suspensiile foarte concentrate, în care faza lichidă ocupă practic doar spațiul dintre particulele solide – fluide ne newtoniene);
5. materiale pseudo plastice;
6. materiale plastice de tip Bingham ideale (fluide vâscoplastice; au prag de curgere).

Determinarea vâscozității lichidelor se poate face prin mai multe metode, dintre care cele mai cunoscute sunt:

- metoda corpului căzător;
- metoda corpului rotitor;
- metoda corpului vibrant;
- metoda corpului oscilant;
- metoda Engler.

Tensiunea superficială, σ

Tensiunea superficială σ, este definită prin forța ce se exercită tangențial pe unitatea de lungime de pe suprafața lichidului, datorită interacțiunii dintre moleculele de lichid din stratul superficial și moleculele de lichid din interior:

$$\sigma = \frac{F}{l} \tag{7.21}$$

Tensiunea tangențială intervine în calculul diferenței de presiune într-un punct al unei suprafețe curbe de contact dintre două lichide imiscibile (sau un lichid și un gaz). Diferența de presiune dintre cele două părți ale suprafeței de contact este:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.22}$$

relație cunoscută sub denumirea de *formula lui Laplace*, unde r_1 și r_2 sunt razele de curbură principale ale suprafeței de contact.

Valoarea lui σ depinde de natura fluidelor aflate în contact și de temperatură (ea descrește la creșterea temperaturii). În cazul contactului aer-apă la temperatura de 20°C, tensiunea superficială are valoarea $\sigma = 0{,}0726\, N/m$.

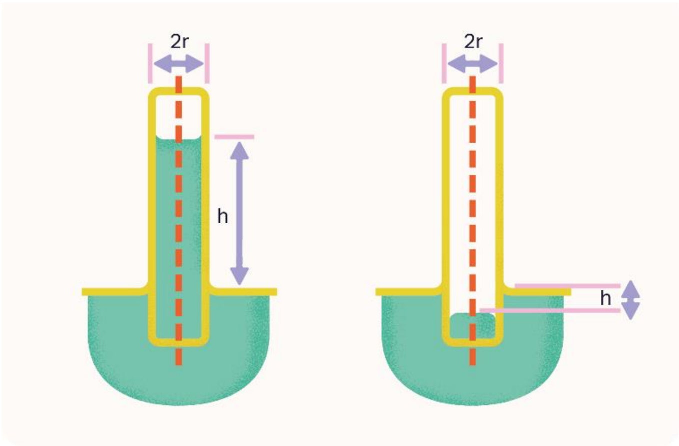


Fig. 7.3 Lichid în capilar

Capilaritatea

Capilaritatea reprezintă proprietatea care rezultă ca o consecință a fenomenului de adeziune și a tensiunii superficiale și care constă în apariția unei denivelări (curbări) a suprafeței libere a lichidului în tuburile capilare și ceea ce produce o ascensiune pentru un lichid care udă tubul și o coborâre pentru un lichid care nu udă tubul (fig. 7.3).

Denivelarea *h* este dată în primă aproximație de ***legea lui Jurin***:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho \cdot r \cdot g} \tag{7.23}$$

unde: σ tensiunea superficială a lichidului;

ρ densitatea lichidului.

Cavitația

Cavitația este un fenomen foarte periculos pentru mașinile și instalațiile hidraulice. El apare în zonele în care presiunea scade sub presiunea de vaporizare (la temperatura corespunzătoare funcționării) și constă în formarea unor bule de vapori și gaz care, ajungând în zone de presiune mare, se recondensează, respectiv se redizolvă.

Fenomenul este marcat prin apariția unor zgomote puternice, temperaturi ridicate, coroziune chimică, ce conduc la distrugerea rapidă a instalațiilor.

7.2. Statica fluidelor

Statica fluidelor studiază echilibrul fluidelor și acțiunea pe care acestea le exercită asupra corpurilor solide cu care vin în contact. Asupra unui fluid în repaus acționează două tipuri de forțe, care îl echilibrează: forțele masice și forțele de suprafață.

Forțele masice se datorează prezenței câmpurilor exterioare. Cele mai obișnuite forțe masice întâlnite sunt cele de greutate datorate câmpului gravitațional exterior masei de fluid considerate. În cazul unui repaus relativ, pe lângă forțele de greutate apar și forțele de inerție.

Forțele de suprafață sunt forțe de presiune cauzând compresiuni normale la elementele de suprafață.

7.2.1 Legea fundamentală a hidrostaticii

Analiza stării de repaus a unui fluid se poate face dacă se cunosc forțele care acționează asupra acestuia. În acest sens considerăm un domeniu D dintr-un fluid în repaus, mărginit de o suprafață închisă S. (fig. 7.4) Considerăm că fluidul din domeniul D este în repaus dacă orice porțiune a sa este în repaus.

Forța masică ce acționează asupra elementului de fluid este de forma:

$$d\vec{F}_m = \rho \vec{g} dV \tag{7.24}$$

unde $dV = dx\ dy\ dz$.

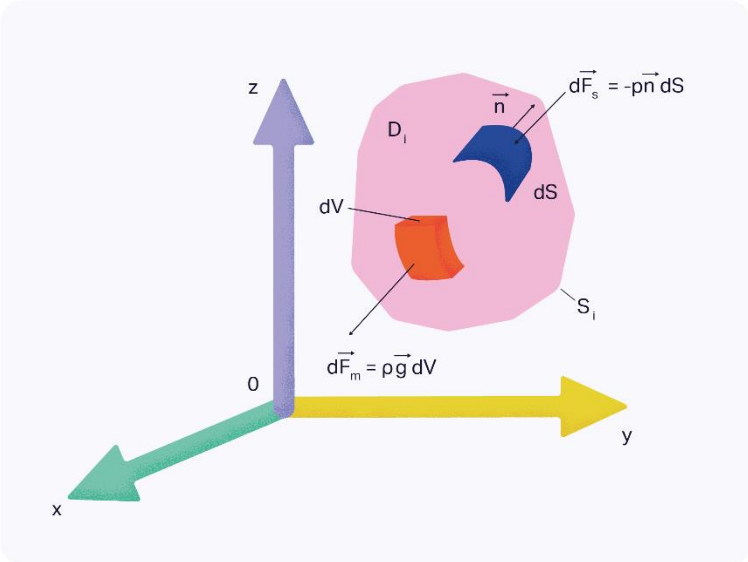


Fig. 7.4 Starea de repaus a fluidului din domeniul *D* se realizează sub acținea forțelor masice și de suprafață

Forța de suprafață care acționează asupra elementului de fluid considerat este:

$$d\vec{F_s} = d\vec{F_x} + d\vec{F_y} + d\vec{F_z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dV \qquad (7.25)$$

sau

$$d\vec{F_s} = -\nabla p \cdot dV \qquad (7.26)$$

Echilibrul fluidului din elementul de fluid considerat impune ca forța rezultantă care acționează asupra lui să fie nulă.

$$d\vec{F_m} + d\vec{F_s} = 0 \qquad (7.27)$$

De unde rezultă ***legea fundamentală a staticii fluidelor*** pentru cazul în care forțele de volum care acționează asupra elementului de fluid sunt determinate numai de câmpul gravitațional:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} \qquad (7.28)$$

Relația (7.28) poate fi scrisă și sub forma:

$$\text{grad}\, p = \rho \cdot \vec{g} = \rho \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{d\vec{F}}{dV} \tag{7.29}$$

Așadar: ***gradientul presiunii este egal cu forța corespunzătoare unității de volum***.

Pentru un lichid incompresibil, aflat în câmp gravitațional căruia i se atașează un sistem de coordonate cu axa Oz verticală, proiecțiile ecuației (7.29) pe axele sistemului sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \tag{7.30}$$

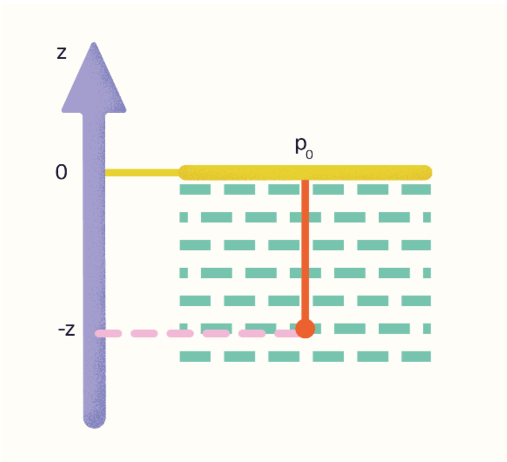


Fig. 7.5 Lichid în interiorul căruia ne propunem să determinăm presiunea hidrostatică

Integrând ultima relație, cu condiția la limită $p_{(z=0)} = p_0$, valabilă în planul suprafeței libere a lichidului (la suprafața de contact cu aerul), rezultă:

$$\int_{p}^{p_0} dp = \rho g \int_{-z}^{0} dz \tag{7.31}$$

adică:

$$p - p_0 = \rho g z \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 + \rho g z \tag{7.32}$$

Aceasta înseamnă că (fig. 7.5): în interiorul lichidului ($z<0$), presiunea hidrostatică $\rho g z$ se adaugă la presiunea atmosferică, p_0.

Expresia (7.32) este o altă formă a legii fundamentale a staticii fluidelor, care reprezintă presiunea determinată de greutatea fluidului, și poartă numele de ***presiune hidrostatică***.

7.2.2 Principiile hidrostaticii

Principiul lui Pascal

Considerăm un vas cu lichid, asemănător celui din fig. 7.6. Punctele M (x, y, z) și M_0 (x_0, y_0, z_0) sunt două puncte ale domeniului de fluid aflat în repaus, pentru care ecuația repausului, în raport cu un sistem de referință inerțial, având axa Oz în sensul verticalei ascendente, este:

$$\begin{aligned} M&: \quad p + \rho g z = const. \\ M_0&: \quad p_0 + \rho g z_0 = const. \end{aligned} \tag{7.33}$$

sau

$$p - p_0 + \rho g (z - z_0) = 0 \tag{7.34}$$

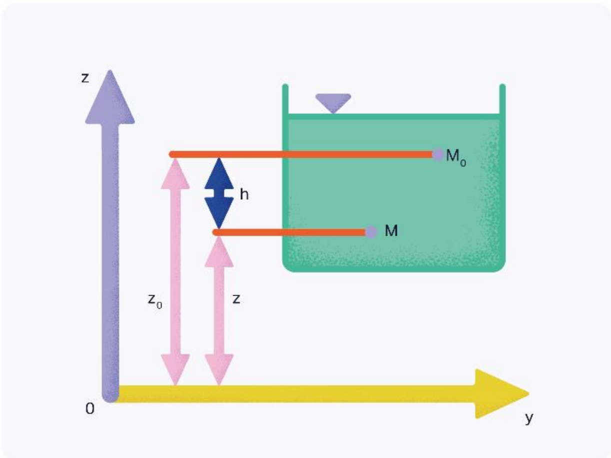


Fig 7.6 Vas cu lichid omogen în interiorul căruia alegem două puncte în care vrem să determinăm presiunea

Presupunând că, datorită unor cauze exterioare, presiunea în punctul M, crește la valoarea $p + \Delta p$, iar în M_0 la valoarea $p_o + \Delta p_0$ relațiile de repaus sunt:

$$\begin{aligned} M&: \quad p + \Delta p + \rho g z = const. \\ M_0&: \quad p_0 + \Delta p_0 + \rho g z_0 = const. \end{aligned} \tag{7.35}$$

De unde rezultă:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \tag{7.36}$$

relație ce reprezintă ***principiul lui Pascal***, care se enunță astfel:

Orice variație de presiune produsă într-un punct oarecare dintr-un fluid, în echilibru, se transmite cu aceeași intensitate fiecărui punct din masa acestui fluid.

Dintre aplicațiile practice ale acestui principiu se pot aminti *presa hidraulică* și *acționarea hidraulică a frânelor unui autovehicul*.

Principiul lui Arhimede

Considerăm un corp complet scufundat în masa unui lichid și ne propunem (fig.7.7) să evaluăm forța rezultantă exercitată de lichidul înconjurător asupra sa. Asupra oricărui element de volum *dV* al corpului, forțele de presiune ce acționează după direcțiile *Ox* și *Oy* se vor compensa (conform legii lui Pascal, aplicată oricărei suprafețe de nivel).

Dacă notăm cu *dS* aria bazei unui element de volum *dV*, forța rezultantă ce acționează asupra lui *dV* este:

$$dF = (p_2 - p_1)dS = \rho\ g\ (h_2 - h_1)dS \tag{7.37}$$

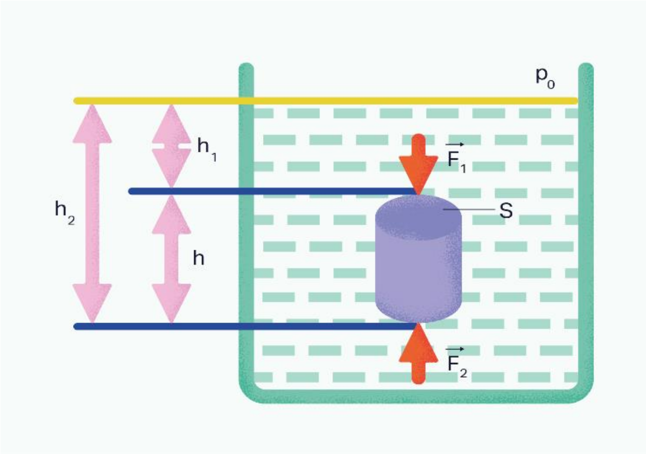


Fig. 7.7 Corp solid în interiorul unui fluid

Forța rezultantă, ce se manifestă asupra întregului solid scufundat în lichid, se obține prin integrarea relației anterioare pe întreaga suprafață a corpului:

$$F = \rho\, g\, (h_2 - h_1)S = \rho\, g\, V = m_l g \tag{7.38}$$

unde am notat cu $m_l = \rho\, V$ masa de lichid dezlocuit de corpul scufundat. Relația (7.38) exprimă ***principiul lui Arhimede***, care se enunță astfel:

Un corp solid scufundat într-un fluid este împins de jos în sus, pe verticală, de o forță ascensională (denumită și forță arhimedică), egală cu greutatea fluidului dezlocuit de acel corp.

Legea lui Arhimede se aplică tuturor fluidelor (gaze sau lichide), pentru corpuri scufundate complet sau incomplet (în acest ultim caz fiind luat în calcul doar volumul scufundat al corpului).

În funcție de relația dintre forța ascensională și greutatea corpului sunt posibile următoarele cazuri:

• $F < G$ – greutatea aparentă a corpului scufundat este de forma: $G_a = G - F$;

• $F = G$ – corpul rămâne în echilibru în interiorul fluidului;

• $F > G$ – corpul se ridică la suprafața fluidului; pe măsură ce corpul iese din fluid, forța ascensională scade deoarece scade volumul de fluid dezlocuit, iar în momentul în care forța ascensională ajunge să fie egală cu greutatea corpului, acesta plutește la suprafața lichidului.

Principiul vaselor comunicante

În fig 7.8 este reprezentat un vas cu două brațe de secțiuni diferite, în care se află un lichid omogen. Pe suprafețele libere ale celor două brațe ale vasului acționează presiunile p_1 și respectiv p_2. Deoarece presiunea în plan orizontal este aceeași, putem scrie:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + \rho g h_1 \\ p &= p_2 + \rho g h_2 \end{aligned} \tag{7.39}$$

De unde rezultă relația:

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2) \tag{7.40}$$

Când presiunile pe suprafețele libere sunt egale, atunci acestea se găsesc la același nivel ($h_1 = h_2$).

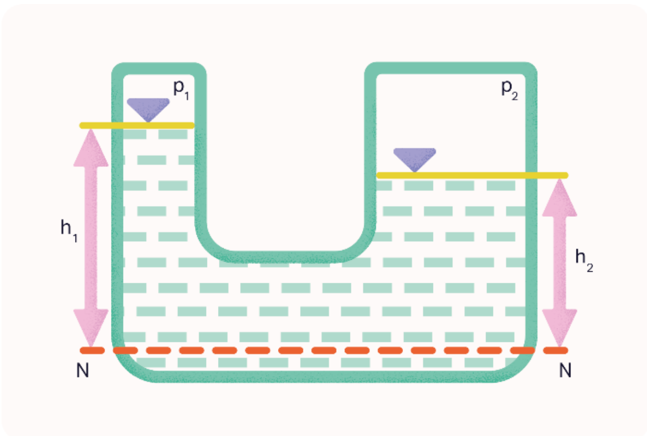


Fig. 7.8 Principiul vaselor comunicante

Astfel, putem enunța ***principiul vaselor comunicante***:

În două sau mai multe vase comunicante conținând același lichid (omogen și incompresibil) suprafețele libere ale acestuia se găsesc în același plan orizontal.

O aplicație practică a acestui principiu o reprezintă *determinarea gradului de umplere a unui rezervor cu ajutorul sticlei de nivel.*

7.3. Cinematica fluidelor

Cinematica fluidelor se ocupă cu studiul mișcării fluidelor fără a ține seama de forțele și transformările energetice care apar. Principiile cinematicii fluidelor sunt valabile atât pentru fluide ideale cât și pentru cele reale.

7.3.1. Ecuațiile fundamentale ale mișcării fluidelor

Studiul cinematic al mecanicii fluidelor constă în determinarea traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor particulelor de fluid. În acest sens se pot utiliza două metode:

- metoda Lagrange
- metoda Euler

Metoda Lagrange studiază mișcarea fiecărei particule de fluid în raport cu un sistem fix *Oxyz*, poziția unei particule depinzând de timp și de coordonatele poziției inițiale x_o, y_o, z_o. Traiectoria particulei este data de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned} \qquad (7.41)$$

Prin derivarea relațiilor (3.44) se obțin componentele vitezei după cele trei direcții:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$$
$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (7.42)$$
$$v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

Componentele accelerației după cele trei direcții ale sistemului de axe triortogonal sunt:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$
$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (7.43)$$
$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Fiind o metodă mai intuitivă, metoda Lagrange nu este sistematic utilizată în practică pentru a descrie mișcarea întregului fluid, ci este uzual folosită când se studiază mișcarea unei particule individualizate.

Metoda Euler studiază câmpul vitezelor în punctele spațiului ocupat de fluidul în mișcare și variația acelor viteze în funcție de timp. Câmpul vitezelor este dat de relațiile:

$$v_x = v_x(x, y, z, t)$$
$$v_y = v_y(x, y, z, t) \qquad (7.44)$$
$$v_z = v_z(x, y, z, t)$$

sau $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$, unde x, y, z reprezintă coordonatele punctelor spațiului și nu ale particulei fluide ca în cazul metodei precedente. Metoda Euler este mai simplă și utilizează teoria câmpurilor ca aparat matematic de studiu.

Traiectoria particulelor se obține din integrarea componentelelor vitezei: $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$; $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$; $v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$, rezultând:

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t);\ y = y(x_0, y_0, z_0, t);\ z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

unde x_o, y_o, z_o reprezintă coordonatele particulei la momentul inițial t_o.

Pentru determinarea câmpului accelerațiilor derivăm v_x, v_y, v_z, ținând cont că sunt funcții de x, y, z și t, utilizând regula de diferențiere totală:

$$d\vec{v}_x = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz \tag{7.45}$$

Astfel, obținem:

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \tag{7.46}$$

sau

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \tag{7.47}$$

Se observă că această derivată totală este formată din *accelerația locală* $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ și *accelerația convectivă (de antrenare)*:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \tag{7.48}$$

Accelerația locală reprezintă variația vitezei în puncte fixe în spațiu și este caracteristică mișcărilor nepermanente (coordonatele punctelor sunt considerate ca invariabile). În mișcarea permanentă accelerația locală este nulă.

7.3.2 Noțiuni specifice mișcării fluidelor

Cinematica fluidelor operează cu noțiuni specifice mișcării fluidelor.

- *Curentul de fluid* este o masă de fluid în mișcare.
- *Linia de curent* este linia curbă care urmărind direcția de curgere este tangentă la vectorii viteză ai particulelor, care la un moment dat coincid cu punctele de pe curba respectivă. Linia de curent nu este întotdeauna identică cu traiectoria.

În cazul mișcărilor nepermanente liniile de curent își modifică forma în timp, iar în cazul mișcărilor permanente, când vectorii de viteză au poziții fixe în fiecare punct din spațiu, liniile de curent coincid cu traiectoriile și rămân aceleași în orice moment. În general, liniile de curent nu se intersectează (o particulă nu poate avea două viteze diferite) decât în cazul unor puncte critice.

Ecuațiile diferențiale ale liniilor de curent se obțin din condiția ca vectorul $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ să fie paralel cu vectorul viteză, adică:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \tag{7.49}$$

sau

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{7.50}$$

În cazul mișcărilor permanente vizualizarea traiectoriilor se poate realiza prin introducerea de suspensii fine în fluid.

- *Tubul de curent* este suprafața tubulară formată de liniile de curent, care trec la un moment dat prin toate punctele unei curbe închise. În mișcarea permanentă, tubul de curent își păstrează în timp forma și dimensiunile.
- *Firul de curent* este fluidul din interiorul unui tub de curent elementar (cu secțiune transversală foarte mică), care materializează o linie de curent.
- *Secțiunea transversală* a unui tub de curent (*secțiunea vie*) este suprafața normală pe toate liniile de curent care o străbat, limitată de tub.
- *Perimetrul udat* este lungimea conturului secțiunii transversale a unui tub de curent, mărginită de pereți rigizi.
- *Raza hidraulică* este raportul dintre aria secțiunii transversale şi perimetrul udat:

$$R = \frac{S}{P} \tag{7.51}$$

- *Debitul* unui curent de fluid printr-o suprafață *S* este fluxul vectorului viteză, prin această suprafață, și reprezintă limita raportului dintre volumul ΔV care trece prin suprafața S într-un interval de timp Δt, când aceasta tinde la zero:

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int \vec{v}\vec{n}dS = \int vdS \qquad (7.52)$$

Dacă viteza este constantă:

$$Q = vS \qquad (7.53)$$

Debitul se poate defini și altfel:

- debit volumic – volumul de fluid care trece printr-o suprafață în unitatea de timp:

$$Q = \frac{V}{t} \qquad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

- debitul masic - masa de fluid care trece printr-o suprafață în unitatea de timp

$$Q_m = \frac{m}{t} \qquad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

- debitul de greutate - greutatea de fluid care trece printr-o suprafață în unitatea de timp

$$Q_g = \frac{G}{t} \qquad \left[\frac{N}{s}\right]$$

- *Vârtejul* unei particule de fluid este vectorul definit prin relația:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\, rot\, \vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (7.54)$$

El reprezintă viteza unghiulară medie de rotație a particulei în jurul unei axe ce trece prin centrul ei de greutate. În legătură cu vârtejul se poate enunța teorema lui Helmholtz: *Fluxul vectorului vârtej printr-o suprafață curbă închisă este constant.*

$$\int \vec{\omega}\, \vec{n}\, dS = const. \qquad (7.55)$$

Pentru o suprafață foarte mica:

$$\omega\ dS = const. \tag{7.56}$$

Un vârtej nu se poate închide în interiorul fluidului. Dacă s-ar închide în interiorul fluidului $dS \to 0 \;\; \Rightarrow \;\; \omega \to \infty \;\; \Rightarrow \;\; \vec{v} \to \infty$, ceea ce este practic imposibil. Un vârtej se închide pe o suprafață solidă cu care se învecinează un fluid sau se închide în el însuși (cazul vârtejurilor toroidale).

Din punct de vedere practic este bine ca în situația în care te prinde un vârtej dintr-un râu, să încerci să ieși cât mai repede din el. În caz contrar vârtejul te învârtește din ce în ce mai repede și te trage în adâncime.

În cazul tornadelor produse în atmosferă viteza maximă a vârtejului apare la nivelul solului, deoarece pe sol se închide vârtejul respectiv și din această cauză tocmai la acest nivel forța distrugătoare este maximă.

7.3.3 Ecuația de continuitate

Ecuaţia de continuitate reprezintă principiul conservării cantității de fluid aflat în curgere. Prin cantitate se poate înțelege volum, masă, greutate. Ecuaţia de continuitate se obține făcând un bilanț al maselor.

Diferența dintre masa de fluid intrată și cea ieșită dintr-un volum de fluid este egală cu variația de masă din interior datorată variației de densitate în timp.

Se consideră cazul general al unui fluid compresibil cu $\rho\ (x, y, z, t)$ în mişcare nepermanentă cu viteza $v = v\ (x, y, z, t)$. Relaţia care exprimă continuitatea fluidului se obţine egalând variaţia masei de fluid din volumul considerat cu diferența dintre masa care intră în acest volum şi masa de fluid care iese din el, în același interval de timp.

Dacă la momentul t masa de fluid este $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, iar la timpul $t + dt$ devine $dm = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx\, dy\, dz,$ atunci variația masei este:

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz\, \mathrm{dt} \tag{7.57}$$

Ținând cont de toate cele trei direcții, diferența dintre masa de fluid intrată și cea ieșită în intervalul de timp dt, este:

$$\begin{gathered} dm = dm_x + dm_y + dm_z \\ dm = -\left(\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, \mathrm{dt} \end{gathered} \tag{7.58}$$

Egalând relațiile (7.57) și (7.58) rezultă ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z} = 0 \tag{7.59}$$

sau

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\, \vec{v}) = 0 \tag{7.60}$$

În regim staționar, când densitatea nu depinde de timp, debitul de masă Q_m este același pentru fiecare secțiune a unui tub de curent:

$$Q_m = \oint \rho\, \vec{v}\, d\vec{S} \tag{7.61}$$

Pentru tuburi subțiri, astfel încât densitatea și viteza să fie constante pe secțiunea tubului, obținem:

$$Q_m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \tag{7.62}$$

În cazul mișcării permanente a unui *fluid compresibil*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad div(\rho\, \vec{v}) = 0 \tag{7.63}$$

Pentru un fluid incompresibil, $\rho = const.$, în mișcare permanentă sau nepermanentă, ecuația continuității are expresia:

$$div(\rho\, \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial z} = 0 \tag{7.64}$$

Acest rezultat se extinde la nivelul întregului volum de fluid, având în vedere proprietățile de omogenitate și de izotropie ale fluidului.

Pentru un tub de curent ca mai sus, debitul volumic:

$$Q_v = \oint \vec{v}\, d\vec{S} = const. \tag{7.65}$$

Atât debitul de volum cât și cel de masă sunt constante. Luând în considerare valorile medii pe secțiunea tubului, rezultă:

$$\begin{aligned} Q_v &= \vec{v}\, d\vec{S} = const. \\ Q_m &= \rho\, \vec{v}\, d\vec{S} = const. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Adăugând la ecuațiile de mai sus ecuația caracteristică a fluidului, exprimată simbolic de legătura dintre presiunea *p*, densitatea ρ și temperatura absolută *T*:

$$f(p, \rho, T) = 0 \tag{7.67}$$

obținem ecuațiile care permit rezolvarea problemelor de curgere sau repaus ale fluidelor ideale.

7.4. Dinamica fluidelor (Hidrodinamica)

Hidrodinamica studiază mișcarea fluidelor și interacțiunea lor cu corpurile rigide, ținând cont de forțele care intervin şi de transformările energetice produse în timpul mișcării.

7.4.1 Tipuri de mișcări specifice fluidelor

Mișcările fluidelor se pot clasifica după diferite criterii. Dintre acestea menționăm:

A. *După modul de variație în timp a parametrilor mișcării*:
   - *Mișcări permanente* – viteza, presiunea, densitatea sunt constante în timp;
   - *Mișcări nepermanente*, când parametrii variază în timp.

B. *După modul de desfășurare a mișcării în lungul curentului:*

- *Mişcări uniforme* – liniile de curent sunt paralele și rectilinii;
- *Mişcări neuniforme*, când liniile de curent au o formă oarecare, de-a lungul cărora vitezele variază ca mărime și directive.

C. *După câmpul vitezelor:*

- *Mişcări potențiale*, când există o funcție ϕ, numită funcție de potențial, astfel încât $\vec{V} = grad\phi$ – aceste mișcări se mai numesc și mișcări irotaţionale;
- *Mişcări nepotenţiale* sau rotaţionale.

D. *După structura fizică a curgerii unui fluid real:*

- *Mişcări laminare* care se produc la viteze relativ mici și în care straturile se mișcă paralel unele față de altele;
- *Mişcări turbulente* la care particulele diferitelor straturi se amestecă între ele și se deplasează după traiectorii neregulate.

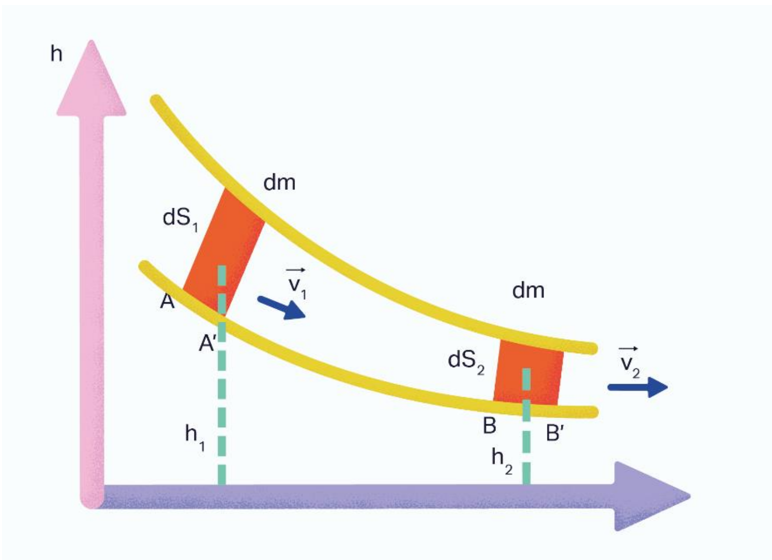


Fig. 7.9 Reprezentarea unui tub de fluid cu secțiuni diferite

7.4.2 Legea lui Bernoulli

Considerăm un tub de fluid cu secțiuni diferite și delimităm un volum AB, care se deplasează în unitatea de timp până în poziția A'B' (fig. 7.9) Este ca și cum masa din volumul AA' s-ar deplasa în volumul BB'.

Astfel putem scrie variația energiei mecanice totale:

$$dE = \frac{dm}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + dm\, g\left(h_2 - h_1\right) \tag{7.68}$$

Lucrul mecanic al forțelor neconservative este:

$$d\vec{L} = F_1 dl_1 - F_1 dl_1 \tag{7.69}$$

Știind că:

$$p = \frac{F}{S}, \quad v = \frac{dl}{dt} \tag{7.70}$$

Rezultă:

$$d\vec{L} = p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 \tag{7.71}$$

Forțele de presiune laterale nu efectuează lucru mecanic și nu avem de-a face cu forțe tangențiale de frecare, în cazul fluidului ideal. Astfel, din legea conservării energiei:

$$dE = dL \tag{7.72}$$

rezultă:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \tag{7.73}$$

Astfel, legea lui Bernoulli este de forma:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const. \tag{7.74}$$

Ea este valabilă *în cazul curgerii fluidelor ideale incompresibile*, într-un câmp de forțe conservative, în regim laminar. Denumim curgere laminară a unui fluid, situația în care liniile de curent nu se intersectează, iar pături adiacente de fluid în mișcare nu se întrepătrund.

În relația (7.74):

- p reprezintă presiunea statică din fluid. Aceasta este datorată acțiunii forțelor cu care restul fluidului acționează asupra elementului de volum de fluid dV;
- $\frac{\rho v^2}{2}$ se numește presiune dinamică și este asociată forțelor active, care pun fluidul în mișcare;
- $\rho g h$ se numește presiune de poziție și este asociată cu efectul forțelor conservative externe fluidului.

Trebuie subliniat că, pe lângă semnificația presiunilor, fiecare termen al ecuației lui Bernoulli are și semnificația energiei unității de volum. Astfel:

- p reprezintă *energia unității de presiune*. Ea este legată de acțiunea câmpului *forțelor interne din fluid*;
- $\frac{\rho v^2}{2}$ reprezintă *energia cinetică a unității de volum* a fluidului;
- $\rho g h$ reprezintă *energia potențială a unității de volum*. Ea este legată de acțiunea câmpului de *forțe din exteriorul fluidului*.

Așadar, ecuația lui Bernoulli reprezintă o relație de bilanț energetic, suma acestor energii fiind energia mecanică totală a elementului de fluid, aflat în mișcare permanentă.

În cazul în care secțiunea de intrare și cea de ieșire se află la același nivel, $h_1=h_2$ rezultă:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const. \tag{7.75}$$

Atunci, conform **legii lui Bernoulli, *de-a lungul unui tub prin care curge un fluid, suma dintre presiunea statică și presiunea dinamică a fluidului este constantă; presiunea statică scade pe măsură ce viteza crește.***

Legea lui Bernoulli mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h = const. \tag{7.76}$$

unde: $\gamma = \rho \cdot g$ – greutatea specifică a fluidului.

Ecuaţia lui Bernoulli este una dintre cele mai importante ecuații ale hidrodinamicii, ea fiind publicată de către Daniel Bernoulli în revista *Hidrodinamica,* în anul 1738.

7.4.3 Curgerea fluidelor reale

Fluidele reale sunt fluide vâscoase datorită frecării interne: straturile adiacente de fluid se mișcă unele în raport cu altele, iar la interfața dintre ele apar forțe de frecare. Forța de frecare vâscoasă este direct proporțională cu suprafața păturilor în contact și cu rata de variație a modulului vitezei după direcția perpendiculară pe strat. Expresia matematică a acestei forțe este dată de legea lui Newton:

$$F_r = \eta S \frac{dv}{dt} \tag{7.77}$$

Curgerea fluidelor în prezența forței de frecare se numește *curgere newtoniană*, iar fluidele reale care respectă o lege de tip (7.77) se numesc *fluide newtoniene*. În cazul fluidelor newtoniene, coeficientul de vâscozitate dinamică, η, este funcție de natura fluidului și de temperatură.

Legea lui Poiseuille

În figura 7.10 este reprezentată schematic curgerea staționară a unui fluid newtonian printr-o conductă cilindrică de rază R. Fiecare strat de fluid are forma unei pături cilindrice de rază r ($r \in [0, R]$), grosime dr, și este paralelă cu axul conductei. Toate particulele dintr-o astfel de pătură cilindrică au viteza $v(r)$; la trecerea de la un strat la altul (curgerea fiind laminară) vom avea un salt infinitezimal dv al vitezei. În interiorul păturii de fluid care se mișcă cu viteza periferică $v(r)$ se află un cilindru de rază r care se mișcă cu viteza $\vec{v} + d\vec{v}$. Suprafața externă a cilindrului acționează cu o forță F_r asupra păturii cilindrice care îl înconjoară antrenând-o în mişcare cu viteza $v(r)$. Forța F_r are expresia:

$$F_r = \eta\, 2\pi r L \frac{dv}{dt} \tag{7.78}$$

în conformitate cu legea lui Newton, unde $S = 2\pi r L$.

Forța activă este datorată diferenței de presiune de la capetele conductei:

$$F_a = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = \pi r^2 \Delta p \tag{7.79}$$

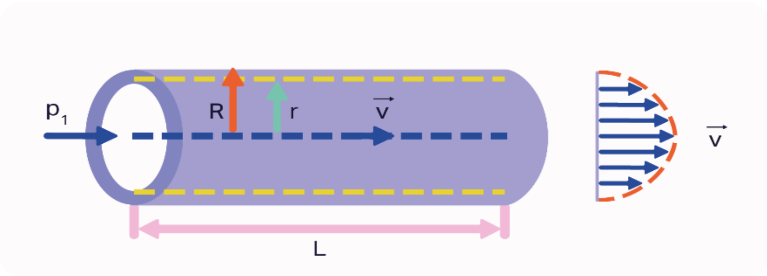


Fig. 7.10 Curgerea unui fluid newtonian printr-o conductă

Curgerea fiind staționară ($v = const.$), forţele care acţionează asupra fluidului au rezultanta zero:

$$\pi r^2 \Delta p + 2\pi r \eta L \frac{dv}{dr} = 0 \tag{7.80}$$

Separând variabilele și integrând ambii membrii vom obține:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\,\eta\, L} r dr \;\;\Rightarrow\;\; v = -\frac{\Delta p\, r^2}{4\,\eta\, L} + const. \tag{7.81}$$

unde constanta din relația (7.81) se determină din condițiile inițiale. Aici condiția care se pune este ca viteza în straturile alăturate pereților ($r = R$) să fie zero. Așadar:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\,\eta\, L}(R^2 - r^2) = v_m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{7.82}$$

unde:

$$v_m = \frac{\Delta p}{4\,\eta\, L} R^2 \tag{7.83}$$

Conform relației (7.82), profilul vitezei este parabolic pentru că v depinde puterea a doua a razei r. Așadar vârfurile vectorilor vitezei, într-o secțiune oarecare a conductei, se situează pe un paraboloid de rotație.

De asemenea, putem calcula debitul volumic de fluid:

$$Q_v = \int v(r)dS = \frac{2\pi\Delta p}{4\ \eta L}\int_0^R (\ R^2 - \ r^2)rdr = \frac{\pi\Delta p}{8\ \eta L}R^4 \quad (7.84)$$

Relația anterioară se numește ***ecuația lui Poiseuille***. Conform acesteia, Q_v este direct proporțional cu diferența dintre presiunile statice de la capetele conductei și cu puterea a patra a razei conductei. Această dependență dramatică a debitului de diametrul conductei face ca variații relativ mici ale lui *R* să se reflecte în variații foarte mari ale debitului de fluid, pentru o diferență de presiune constantă. Pe acest mecanism se bazează reglarea debitului de sânge din artere către țesuturi. Se știe că, la un moment dat, creierul sau alte organe ale corpului consumă mai mult oxigen, în unitatea de timp, în condițiile unui efort fizic intens. Pe de altă parte, în sistemul capilar al omului (cu lungimea de 10^6 km), debitul sângelui poate fi reglat ușor prin contracția sau dilatarea vaselor sanguine.

Legea lui Stokes

În cazul mișcării uniforme a unei sfere într-un fluid vâscos, accelerația sferei este nulă. Forțele externe care pun sfera în mișcare sunt egale în modul cu rezultanta forțelor de frecare vâscoasă care se scrie sub forma:

$$F_r = k\ v\ r\ \eta \qquad (7.85)$$

unde k este o constantă dependentă de forma corpului. În urma unor calcule și observații, Stokes a descoperit că, în cazul sferei, constanta din ecuația precedentă are valoarea $k = 6\pi$. Așadar:

$$F_r = 6\pi\ v\ r\ \eta \qquad (7.86)$$

exprimă cantitativ ***legea lui Stokes***.

La înaintarea într-un fluid există două ***tipuri de forțe de rezistență***:

- *Forțe de frecare vâscoasă* (F_v), proporționale cu viteza

  $F_v = kv$ (7.87)

- *Forțe de presiune* (*de antrenare*), de natură inerțială, legate de antrenarea fluidului în mișcare cu viteze considerabile, proporționale cu pătratul vitezei:

  $F_a = k'v^2$ (7.88)

Întrucât acest al doilea tip de forțe este legat de apariția și menținerea unei diferențe de presiune între partea frontală și cea posterioară a obiectului mobil, astfel de forțe vor depinde de secțiunea obiectului (normală pe liniile de curent) și de densitatea fluidului.

Astfel, expresia forței de antrenare va fi:

$F_a = b\rho S v^2$ (7.89)

Constanta *b* depinde de forma corpului și are:

- valori mici în cazul corpurilor aerodinamice (≈ 0,01 pentru picătură)
- valori mult mai mari în cazul corpurilor concave (≈ 0,4 în cazul parașutei desfăcute).

La viteze mici de mișcare în raport cu fluidul, forța de rezistență la înaintare este de natură predominant vâscoasă $F_r \approx F_v$.

La viteze mari de mișcare în raport cu fluidul, rolul predominant îl joacă forțele de antrenare care sunt proporționale cu v^2.

Există un regim intermediar al vitezelor, în care are loc trecerea de la curgerea laminară la cea turbulentă, când, practic, cele două tipuri de forțe, F_v și F_a, au valori comparabile. Se poate defini, în acest regim, o viteză critică, de trecere de la regimul laminar la cel turbulent, v_c. Procedeul pentru deducerea vitezei critice și a regimului la care apare turbulența a fost propus de O. Reynolds, pentru cazul curgerii unui fluid într-o conductă. Reynolds a constatat, pe cale empirică, că această viteză critică depinde de vâscozitatea fluidului, de densitatea acestuia și de diametrul conductei:

$$v_c = \frac{R\eta}{\rho d} \tag{7.90}$$

unde, R – coeficientul sau numărul lui Reynolds.

Determinarea pe cale experimentală a numărului lui Reynolds presupune măsurarea vitezei critice v_c care reprezintă valoarea medie a curgerii fluidului prin conductă.

Reynolds a constatat că, pentru majoritatea fluidelor vâscoase, intervalul valorilor critice a lui R la care apare turbulența este cuprins între $R_1 = 2000$ și $R_2 = 4000$. Numărul lui Reynolds are o relevanță importantă în aplicațiile tehnice ale aero- și hidrodinamicii.

Aplicație la automobil

Automobilele sunt mașini la care chiar în condiții ideale mai puțin de 15% din energia chimică a combustibilului se transformă în energie internă.

Astfel, s-a constatat că în jur de 67% din energie este pierdută în motor, în sistemul de răcire al automobilului și în sistemul de evacuare. Aproximativ 16% din energie se pierde prin frecările dintre mecanismele de transmisie interne ale automobilului, 4% din energie este utilizată pentru punerea în funcțiune a diverselor accesorii ca pompa de benzină și sistemul de aer condiționat.

Așadar, numai în jur de 13% din energie este utilizată pentru propulsia efectivă a automobilului dar și din aceasta o parte este utilizată pentru a compensa pierderea de energie datorată frecării pneurilor și frecării cu aerul.

Considerând că, coeficientul de frecare dintre pneuri și șosea este $\mu = 0.016$ și ținând cont că pentru o mașină cu greutatea de 1450 kg (BMV seria 7) forța de frecare este aproximativ:

$$F_f \approx \mu mg \cong 227\ N$$

vom căuta să aflăm puterea care furnizează forța necesară deplasării automobilului.

Pe măsură ce viteza mașinii crește, apare o micșorare a forței de apăsare normală ca rezultat al descreșterii presiunii aerului ce curge deasupra mașinii.

Trebuie luată în considerare și forța de rezistență la înaintarea prin aer a automobilului. Ea este legată de frecarea mașinii cu aerul și este proporțională cu pătratul vitezei:

$$F_a = \frac{1}{2} c\rho S v^2$$

unde c este coeficientul de rezistență la înaintare, S este aria secțiunii mașinii, iar ρ este densitatea aerului. Pentru a putea afla mărimea acestei forțe, se dă: $c \approx 0.5$, $\rho = 1.20\ kg/m^3$ și $S \approx\ 2m^2$. Mărimea forței totale de frecare este dată de suma celor două forțe:

$$F_t = F_f + F_a$$

Dacă se merge cu ferestrele deschise atunci forța de rezistență la deplasarea prin aer crește cu 3%.

Puterea necesară pentru a menține o anumită viteză, constantă, este:

$$P = F_v v$$

unde F_v este forță de frecare vâscoasă.

8. Electricitate

Electricitatea studiază fenomenele legate de prezența și deplasarea sarcinilor electrice. Astfel, două subcapitole importante stau la baza acestui capitol:

- ***Electrostatica*** studiază fenomenele legate de sarcinile electrice aflate în repaus.
- ***Electrocinetica*** studiază fenomenele generate de sarcinile electrice în mișcare.

8.1 Electrostatica

Cuvântul electrostatică, împreună cu celelalte cuvinte înrudite (electric, electricitate, electrizare, etc.), își au originea în cuvântul grecesc elektron = chihlimbar. Explicația constă în faptul că fenomenul de electrizare a corpurilor a fost observat încă din antichitate, în cazul chihlimbarului.

8.1.1 Sarcina electrică

Substanța este formată din particule elementare organizate astfel încât să-i asigure acesteia stabilitate. Nucleul este cel mai mic edificiu format din particule elementare. Constituenții stabili ai nucleului sunt protonii și neutronii. Electronii intră, alături de protoni și neutroni, în alcătuirea atomilor și moleculelor (molecula = formațiunea cea mai mică în structura căreia intră mai mulți atomi). Aceștia se mișcă în jurul nucleului pe traiectorii circulare.

La scară macroscopică, substanța este formată dintr-un număr foarte mare de atomi și molecule.

Sarcina electrică este mărimea fizică scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp. Pe baza a numeroase experiențe s-a stabilit că în natură există sarcină electrică:

- pozitivă = sarcina proprie protonului $(+\text{ e})$

- negativă = sarcina proprie electronului $(-\text{ e})$

Valoarea absolută a sarcinii electronului și protonului este egală și se numește sarcină electrică elementară:

$$e = q = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$

Unitatea de măsură pentru sarcina electrică, în Sistem Internațional este Coulombul (C).

Sarcina electrică a oricărui obiect macroscopic este multiplu al sarcinii electrice elementare:

$$Q = n \cdot e = n \cdot q \qquad (8.1)$$

unde n este număr întreg.

Un obiect încărcat cu o sarcina electrică negativă are un surplus de electroni, iar unul încărcat cu sarcină electrică pozitivă are o lipsă de electroni.

În practică foarte puține corpuri încărcate electric pot fi considerate punctiforme. Sarcina electrică poate fi distribuită unidimensional (pe fire), bidimensional (pe suprafețe) sau tridimensional (în volumul corpurilor). Așadar vom vorbi de distribuții continue de sarcină electrică. Acestea reprezintă o mulțime de sarcini electrice în care distanțele dintre sarcini sunt mult mai mici decât distanța dintre ele și punctul în raport cu care sunt studiate. Pentru caracterizarea unei distribuții continui de sarcini electrice se folosesc noțiunile:

- Densitate volumică de sarcină = sarcina electrică a unității de volum

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \qquad (8.2)$$

- Densitate superficială de sarcină = sarcina electrică a unității de suprafață

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \qquad (8.3)$$

- Densitate liniară de sarcină = sarcina electrică a unității de lungime

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \qquad (8.4)$$

După comportamentul electric materialele se împart în:

Conductori – materiale în interiorul cărora există particule cu sarcină electrică capabile să se deplaseze în material pe distanțe macroscopice. Aceste particule se numesc purtători de sarcină liberi. Exemple de conductori:

- Metale = materiale în care purtătorii de sarcină sunt electronii liberi care se mai numesc și electroni de conducție.
- Electroliți = conductori în care purtătorii de sarcină sunt ionii liberi (de ambele semne)
- Gaze ionizate = purtătorii de sarcină pot fi ioni de ambele semne și electroni.

Semiconductori – materiale cu concentrația purtătorilor de sarcină mai mică decât la metale. În semiconductori purtătorii de sarcină pot fi electronii (negativi) sau golurile (pozitivi).

Izolatori (dielectrici) – materiale fără purtători de sarcină liberi. Sarcinile electrice din izolatori sunt legate de atomii sau moleculele la care aparțin. Acestea se numesc sarcini electrice legate. Totuși ele au posibilitatea să se deplaseze pe distanțe extrem de mici (1Å) ceea ce are ca efect polarizarea dielectricului.

8.1.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb reprezintă legea fundamentală a electrostaticii.

Enunț! *Forța de interacțiune dintre două sarcini punctiforme acționează de-a lungul dreptei ce unește cele două sarcini fiind direct proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.*

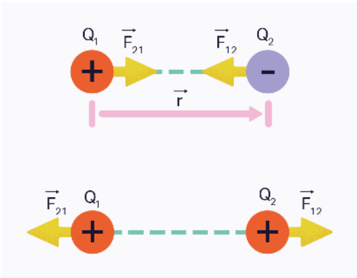


Fig. 8.1 Acțiunea forței coulombiene între două sarcini

Considerăm sarcinile electrice punctiforme, Q_1 și Q_2, aflate la distanța $\vec{r}$ una de cealaltă, ca în fig. 8.1. Astfel, forța coulombiană dintre cele două sarcini electrice este:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{8.5}$$

sau din punct de vedere vectorial forța se exprimă:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{8.6}$$

unde:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9 \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$ - constanta lui Coulomb

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \mathrm{C}^2/\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$ - permitivitatea electrică a vidului

Observații!

1. Forța coulombiană este de atracție dacă sarcinile sunt de semne contrare și de respingere dacă sarcinile sunt de același fel.

2. Dacă există mai mult de două sarcini, ele interacționează în perechi. Astfel, forța exercitată asupra unei sarcini din partea celorlalte se calculează ca suma vectorială a forțelor individuale (principiul suprapunerii forțelor – superpoziției).

8.1.3 Câmp electric

Câmpul electric este o stare a materiei generată în jurul unei sarcini electrice care se manifestă prin acțiunea unor forțe de natură electrică asupra oricărei sarcini electrice introduse în câmp electric (fig. 8.2). Așadar, câmpul electric este forma de existență a materiei, prin intermediul căruia se realizează interacțiunea dintre particulele încărcate ale substanței.

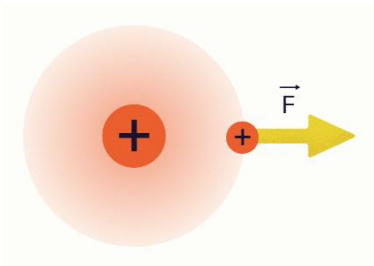


Fig. 8.2 Sarcină electrică în câmp electric

Pentru a descrie câmpul electric se utilizează două mărimi caracteristice acestuia:

- Intensitatea câmpului electric
- Potențialul câmpului electric

Intensitatea câmpului electric

Intensitatea câmpului electric este mărimea fizică vectorială egală cu forța ($\vec{F}$) ce acționează asupra unității de sarcină electrică (q) adusă în câmp electric.

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (8.7)$$

Pentru că este o mărime fizică vectorială această relație poate fi scrisă și vectorial:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (8.8)$$

În Sistemul Internațional:

$$[E]_{SI} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

Dacă se cunoaște intensitatea câmpului electric poate fi determinată forța ce acționează asupra oricărei sarcini electrice punctiforme plasată în câmp:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad (8.9)$$

De aici rezultă că vectorii $\vec{F}$ și $\vec{E}$ au același sens atunci când q este pozitivă și sensuri opuse când q este negativă.

Intensitatea câmpului electric a unui sistem de sarcini punctiforme este egală cu suma vectorială a intensităților câmpurilor electrice create de fiecare sarcină în parte.

Reprezentarea grafică a intensității câmpului electric se face cu ajutorul liniilor de câmp.

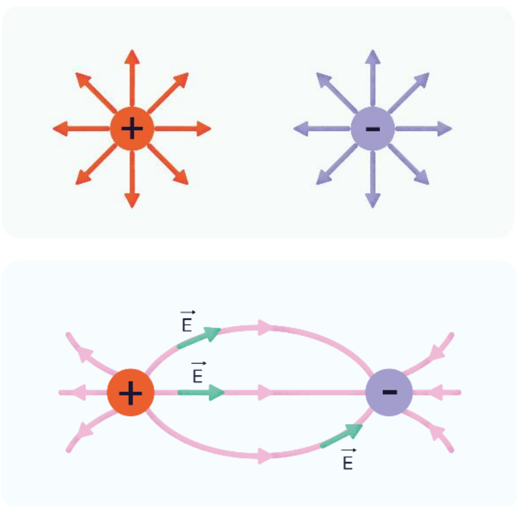


Fig. 8.3 Reprezentarea grafică a liniilor de câmp

Liniile de câmp sunt curbe la care vectorul intensitate câmp electric este tangent în fiecare punct; sensul unei linii de câmp este acela al vectorului intensitate câmp electric.

Sarcinile punctiforme au linii cu orientare radială (fig. 8.3) spre:

- exterior – în cazul sarcinilor pozitive
- interior – în cazul sarcinilor negative

S-a convenit ca acolo unde câmpul este mai intens numărul liniilor de câmp care străbat unitatea de suprafață să fie mai mare.

Potențialul câmpului electric

Potențialul câmpului electric este mărimea fizică scalară egală cu lucrul mecanic necesar deplasării unității de sarcină electrică de probă dintr-un punct la infinit, unde potențialul se consideră zero.

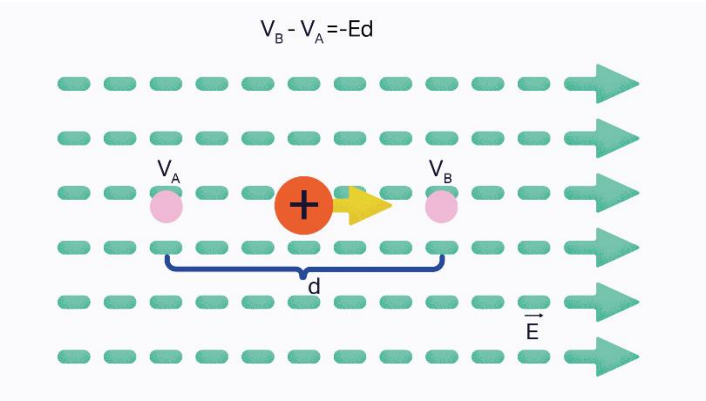


Fig. 8.4 Deplasarea sarcinii electrice între două puncte determină apariția unei diferențe de potențial

Considerăm o sarcină plasată în câmpul electric ca și în fig. 8.4. În punctul A, potențialul este:

$$V_A = \frac{L_{A\infty}}{q} = \frac{1}{q}\int_{r_A}^{\infty} q\vec{E}d\vec{r} = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E}d\vec{r} \tag{8.10}$$

unde:

$$L = \int \vec{F}d\vec{r} = \int q\vec{E}d\vec{r} \tag{8.11}$$

deoarece:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{8.12}$$

În punctul B, potențialul este:

$$V_B = \frac{L_{B\infty}}{q} = \frac{1}{q}\int_{r_B}^{\infty} q\vec{E}d\vec{r} = \int_{r_B}^{\infty} \vec{E}d\vec{r} \tag{8.13}$$

Diferența de potențial între cele două puncte A-B:

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}d\vec{r} = -E \cdot d \tag{8.14}$$

Adică în punctul B potențialul este mai mic decât în punctul A.

Diferența de potențial dintre două puncte se numește tensiune electrică.

$$V_A - V_B = U = E \cdot d = \frac{L_{AB}}{q} \tag{8.15}$$

dar:

$$L_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} Fdr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}dr \tag{8.16}$$

$$L_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{8.17}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \tag{8.18}$$

$$V_A - V_B = \frac{L_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{8.19}$$

Așadar:

$$V = \frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{8.20}$$

Unitatea de măsură, în Sistem Internațional, pentru potențialul electric este voltul $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = V\right]$.

Suprafețele pe care potențialul câmpului electric este constant se numesc suprafețe echipotențiale (suprafețe cu potențial constant).

În cazul unei sarcini punctiforme suprafețele echipotențiale sunt sfere concentrice cu centrul în punctul în care se află sarcina electrică. Suprafețele echipotențiale sunt întotdeauna perpendiculare pe liniile de câmp.

S-a observat, în practică, faptul că în conductori când toate sarcinile electrice sunt în repaus:

1. Suprafața conductorului este echipotențială (V=constant)
2. Când doi conductori încărcați electrostatic se pun în contact printr-un fir, sarcina se va redistribui între cei doi conductori astfel încât, în final, vor ajunge la același potențial.

   Prin conectarea unui fir metalic încărcat electric, la Pământ, potențialul acestuia va egaliza pe cel al Pământului.

Derivarea intensității câmpului electric din potențial

Diferența de potențial între două puncte A și B aflate în câmp electric este:

$$V_A - V_B = \frac{L_{AB}}{q} = E(r_A - r_B) = -E(r_B - r_A) \tag{8.21}$$

Atunci, pentru două puncte aflate la distanță mică unul de altul diferența de potențial se scrie ca:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{8.22}$$

În cazul tridimensional, intensitatea câmpului electric respectiv diferențiala vectorului de poziție scrise explicit sunt de forma:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$
$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (8.23)$$

Astfel potențialul devine:

$$dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (8.24)$$

Atunci:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (8.25)$$

Adică:

$$\vec{E} = -gradV = -\nabla V \quad (8.26)$$

Intensitatea câmpului electric într-un punct din spațiul este egală în valoare cu gradientul potențialului electric în acel punct și are orientarea opusă vectorului gradient.

Unitatea de măsură a intensității câmpului electric, în Sistem Internațional este $[E]_{SI} = \frac{V}{m}$.

8.1.4. Dipol electric

Dipolul electric este sistemul fizic constituit din două sarcini electrice punctiforme de mărimi egale și semne contrare, aflate la distanța d una de cealaltă (fig.8.5).

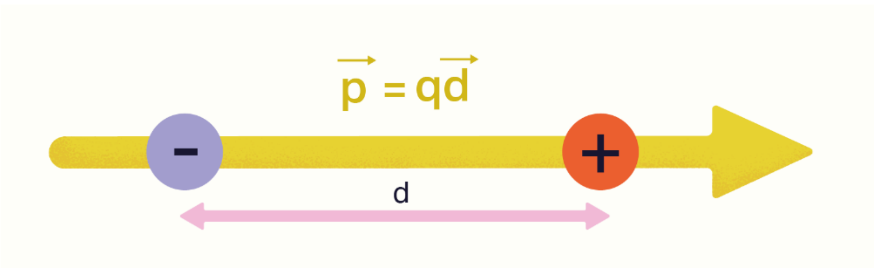


Fig. 8.5 Dipol electric

Concept fizic de dipol e important deoarece multe sisteme fizice – de la molecule la antene TV – pot fi descrise simplificat prin dipoli.

Dipolul electric este caracterizat cu ajutorul vectorului momentului electric dipolar:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{d} \tag{8.27}$$

Unitatea de măsură a momentului electric dipolar, în Sistemul Internațional este:

$$[p]_{SI} = C \cdot m$$

Observație!

Momentul electric dipolar, $\vec{p}$, este un vector orientat dinspre sarcina electrică negativă spre sarcina electrică pozitivă (*invers față de sensul liniilor de câmp!!*)

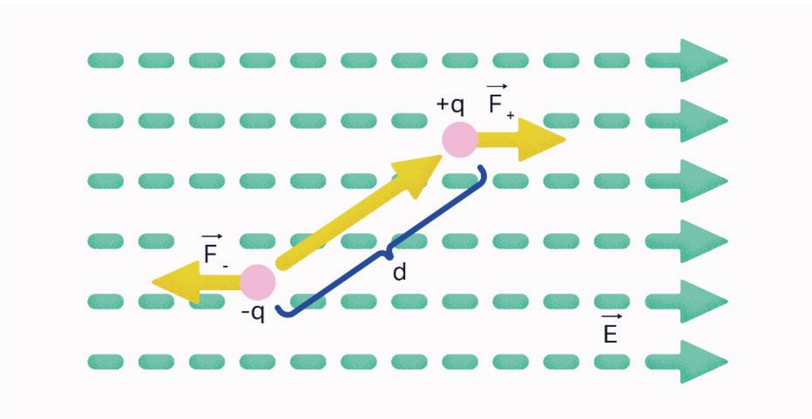


Fig. 8.6 Dipol în câmp electric uniform

Plasăm un dipol într-un câmp electric uniform cu liniile de câmp paralele și echidistante ca în figura 8.6. Presupunem că dipolul formează un unghi θ cu liniile de câmp. După cum se poate observa, asupra sarcinilor $+q$ și $-q$ din dipol acționează din partea câmpului câte o forță egală în modul dar de sens contrar. Momentul forței, $\vec{M}$, produs de câmpul electric $\vec{E}$, asupra dipolului este dat de suma momentelor forțelor individuale care se exercită asupra celor două sarcini, adică:

$$M = M_+ + M_-$$
$$M = F_+ \frac{d}{2} \sin\theta + F_- \frac{d}{2} \sin\theta \qquad (8.28)$$
$$M = qEd \sin\theta = (qd)E \sin\theta = pE \sin\theta$$

În ultima relație, am ținut cont că, modului forței electrice care acționează asupra celor două sarcini este $F_+ = F_- = qE$, iar momentul electric dipolar este $p = qd$. De asemenea, datorită simetriei, cele două forţe vor produce o rotaţie a dipolului electric în acelaşi sens. Momentul forței poate fi scris și vectorial, astfel:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (8.29)$$

Dacă asupra unui dipol plasat în câmp electric acționează un moment al forței se va produce o rotație a dipolului până când dipolul electric se va orienta paralel cu liniile câmpului electric. Lucru mecanic elementar efectuat de câmpul electric pentru a roti dipolul cu un unghi $d\theta$ este:

$$dL = -M\, d\theta = -pE \sin\theta \; d\theta \qquad (8.30)$$

unde semnul ”-” indică faptul că momentul forței se opune creșterii unghiului θ. Astfel, lucru mecanic total efectuat de câmpul electric pentru a roti dipolul este:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-pE \sin\theta) d\theta = pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \qquad (8.31)$$

Așadar, lucrul mecanic depinde doar de unghiul inițial și final format de dipol cu direcția câmpului electric. Știind că lucrul mecanic se definește și funcție de variația, ΔW, a energiei potențiale a dipolului:

$$L = -\Delta W \qquad (8.32)$$

Energia potențială a dipolului aflat în câmp electric de intensitate, $\vec{E}$:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cdot E \cdot \cos\theta \qquad (8.33)$$

unde: θ este unghiul făcut de dipol cu liniile de câmp

Cazuri:

- $\theta = 0$ – dipolul e paralel cu câmpul - $W_{min} = -p \cdot E$
- $\theta = \pi$ – energia dipolului e maximă - $W_{max} = p \cdot E$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ – energia e zero dar nu minimă

8.1.5 Legea lui Gauss pentru câmp electric

Legea lui Gauss reprezintă o alternativă a legii lui Coulomb, fiind complet echivalentă cu aceasta!

Câmpul electric se reprezintă cu ajutorul liniilor de câmp la care vectorul intensitate câmp electric, $\vec{E}$, e tangent în fiecare punct. Numărul liniilor de câmp care trec printr-o suprafață reprezintă fluxul câmpului electric prin acea suprafață.

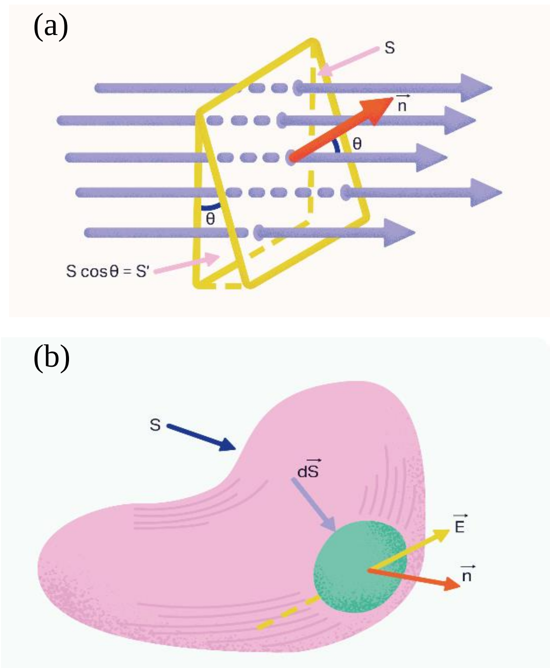


Fig. 8.7 Câmp electric omogen (a) și neomogen (b) care trece prin suprafața S

Funcție de forma suprafeței și de omogenitatea câmpului întâlnim următoarele cazuri:

1. ***Câmpul electric este omogen***, iar suprafața S formează unghiul θ cu planul normal la liniile de câmp (Fig. 8.7a).

Fluxul câmpului electric printr-o astfel de suprafață este:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos \theta \tag{8.34}$$

unde: $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ este suprafața, iar n este normala la suprafață.

Discuție:

- Dacă normala la suprafață este paralelă cu liniile de câmp, adică $\theta = 0^{\circ}$, atunci: $\Phi = ES$
- Dacă normala la suprafață este perpendiculară pe liniile de câmp, adică $\theta = 90^{\circ}$, atunci: $\Phi = 0$

2. ***Câmpul electric este neomogen***, iar suprafața S nu este plană (Fig. 8.7b).

Dacă suprafața S nu este plană, iar câmpul electric prin suprafață este variabil $(\vec{E} = \text{variabil})$ – fluxul câmpului electric va fi o sumă infinită de suprafețe pe care fluxurile elementare a câmpului electric ($E_i = \text{const.}$) sunt constante:

$$\Phi = \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i \tag{8.35}$$

adică:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{8.36}$$

Observație! Suprafețele gaussiene sunt suprafețe închise, imaginare, și sunt alese astfel încât să exploateze simetria sarcinilor sau distribuțiilor de sarcină.

În cele ce urmează, calculăm fluxul câmpului unei sarcini punctiforme +Q printr-o suprafață (închisă) sferică de rază r. Știind că:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$S = 4\pi r^2 \qquad (8.37)$$

iar câmpul este normal la suprafața sferei, fluxul câmpului electric prin suprafața sferei este:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (8.38)$$

Deoarece orice suprafață închisă, ce înconjoară sarcina Q, va fi traversată de acelaşi număr de linii de câmp ca şi sfera, rezultă că fluxul câmpului electric prin suprafața arbitrar aleasă, este egal cu cel prin sfera considerată.

Astfel, legea lui Gauss pentru câmp electric este dată de fluxul liniilor de câmp printr-o suprafață închisă, adică:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (8.39)$$

Legea lui Gauss - *Fluxul liniilor de câmp electric printr-o suprafață închisă de formă oarecare este egal cu raportul dintre sarcina electrică din interiorul acelei suprafețe și permitivitatea electrică a mediului.*

8.1.6 Condensatorul electric

Oricare doi conductori separați de un izolator (dielectric) sau vid formează un condensator electric (fig.8.8). Încărcarea condensatorului presupune acumularea de sarcini $+Q$ și $-Q$ pe armăturile sale (cei doi conductori paraleli), astfel încât vom obține o diferență de potențial proporțională cu sarcina Q.

Capacitatea electrică a condensatorului:

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (8.40)$$

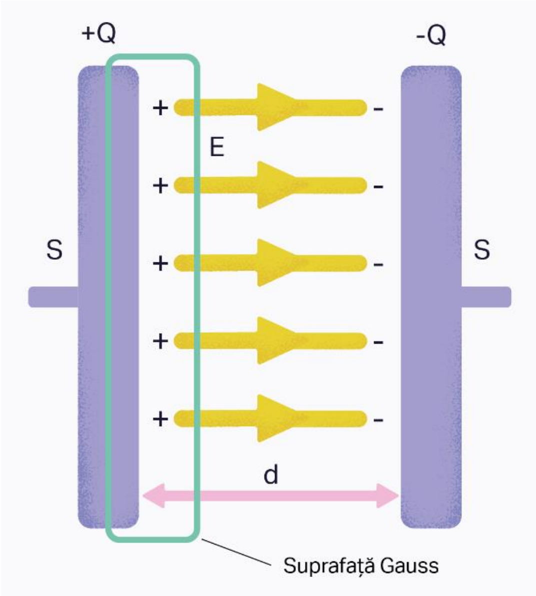


Fig. 8.8 Condensator electric

Cu cât capacitatea e mai mare cu atât sarcina pe care o poate stoca condensatorul e mai mare.

In Sistem Internațional capacitatea condensatorului se măsoară în:

$$[C]_{SI} = F = \frac{C}{V}$$

unde F (Farad) este o capacitate electrică extrem de mare, motiv pentru care uzual se folosesc submultiplii săi: μF, nF, pF

Între armături (plăci) condensatorii au un material electric izolator numit dielectric. Rolurile dielectricilor constau în:

1. Rezolvă problema menținerii plăcilor la o anumită distanță.
2. Crește capacitatea electrică.
3. Crește valoarea diferenței de potențial ce poate fi aplicată (orice material izolator aflat în câmp electric intens, prin fenomenul de ionizare locală poate deveni local-conductor adică poate să fie străpuns electric)

Condensator plan în vid

Cel mai obișnuit tip de condensator este construit din două plăci plane de arie S situate la distanța d mică una de cealaltă (în comparație cu dimensiunea plăcilor). Câmpul electric dintre plăci (în vid) este uniform:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0} \tag{8.41}$$

unde σ este densitatea superficială de sarcină. Deoarece câmpul electric dintre plăci este uniform, diferența de potențial dintre plăci este:

$$U = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_0} \tag{8.42}$$

Deci capacitatea condensatorului cu plăci plane, în vid, este:

$$C = \frac{Q}{U} \Longrightarrow C = \frac{Q \cdot S \cdot \varepsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{8.43}$$

Procesul de încărcare a unui condensator constă în transferul de sarcină de pe placa aflată la un potențial mai scăzut, pe placa aflată la un potențial mai ridicat. Procesul de încărcare necesită o cheltuială de energie.

Energia stocată în condensator este egală cu lucrul mecanic necesar încărcării sale, adică separării sarcinii $+\mathrm{Q}$ și $-\mathrm{Q}$ pe armăturile sale.

Lucrul mecanic necesar transferului unei cantități infinitezimale de sarcină este:

$$dL = U\, dq = \frac{q}{C} dq \tag{8.44}$$

unde:

$$U = \frac{dL}{dq} \quad C = \frac{q}{U} \tag{8.45}$$

Astfel, lucrul mecanic, cheltuit pentru creșterea sarcinii de la zero la o valoare finală Q, este:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U \tag{8.46}$$

Energia stocată de condensator este:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \qquad (8.47)$$

Energia furnizată condensatorului în procesul de încărcare este înmagazinată în condensator și eliberată atunci când condensatorul se descarcă. Energia înmagazinată este localizată în câmpul electric dintre plăcile condensatorului. Energia (W) pe unitatea de volum (S d) sau densitatea de energie este:

$$w = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{Sd} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2}{Sd} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}E^2 d^2}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (8.48)$$

Observăm că densitatea de energie nu depinde de parametri geometrici ai condensatorului deci este valabilă pentru orice câmp electrostatic.

8.2 Electrocinetica

8.2.1 Curent electric

Deplasarea sarcinilor electrice dintr-o regiune a spațiului în alta sub acțiunea unui câmp electric se numește curent electric.

- Dacă mișcarea ordonată a sarcinilor are loc în medii conductoare sau în vid, curentul se numește curent electric de conducție.

  Exemple:

  - Mișcarea electronilor liberi în metale
  - Mișcarea electronilor de la catod spre anod în tuburile electronice
  - Mișcarea spre electrozi a ionilor în electroliți
  - Mișcarea ionilor și electronilor în gazele ionizate.

- Dacă mișcarea ordonată a sarcinii electrice de pe un corp încărcat electric are loc odată cu mișcarea corpului vorbim despre curent de convecție

În toate situațiile mișcarea sarcinilor are loc sub acțiunea forței:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{8.49}$$

fiind datorată câmpului electric $\vec{E}$.

Curentul electric de conducție dispare odată cu dispariția câmpului electric din conductor. În câmp electric purtătorii de sarcină se deplasează (fig.8.9):

- în sensul curentului – sarcinile pozitive
- în sens opus curentului – sarcinile negative

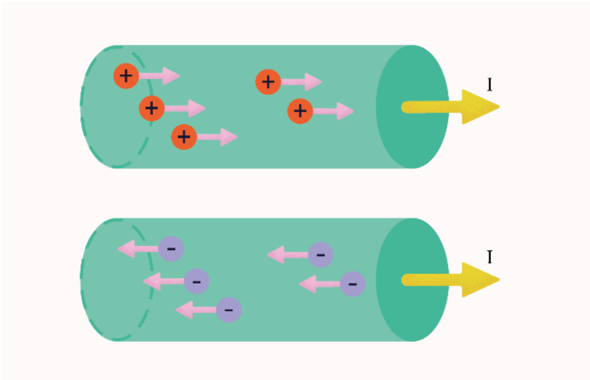


Fig. 8.9 Deplasarea sarcinilor electrice într-un conductor în raport cu sensul curentului prin acesta

Curentul electric e caracterizat prin mărimea fizică numită intensitatea curentului electric.

Intensitatea curentului electric *este mărimea fizică scalară ce reprezintă sarcina electrică netă* (Q)*care traversează suprafața transversală a unui conductor în unitatea de timp (t).*

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{8.50}$$

Curentul electric a cărui intensitate și direcție nu se modifică în timp se numește curent continuu (constant).

Intensitatea curentului variabil în timp este caracterizat de valoarea instantanee, adică:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (8.51)$$

În Sistemul Internațional, unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric este:

$$[I]_{SI} = \frac{C}{s} = Ampere$$

Intensitatea curentului caracterizează complet curentul numai în conductorii omogeni și rectilinii în care valoarea curentului și viteza purtătorilor de sarcină este aceeași în orice secțiune. Pentru a caracteriza curentul în conductorii neomogeni este necesară introducerea unui nou parametru: densitate de curent.

Mărimea fizică vectorială egală cu cantitatea de sarcină electrică ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață se numește ***densitate de curent***:

$$\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{S}\frac{dQ}{dt} \quad (8.52)$$

În Sistemul Internațional densitatea de curent se măsoară în:

$$[j]_{SI} = \frac{A}{m^2}$$

Observație! Intensitatea curentului electric și densitatea de curent au aceeași orientare cu a vectorului intensitate câmp electric!

Direcția de deplasare a sarcinilor electrice în câmp este:

- în sensul câmpului pentru sarcinile pozitive
- în sens invers câmpului pentru sarcinile negative

Viteza de deplasare a sarcinii electrice sub acțiunea câmpului electric se numește viteză de transport sau ***viteză de drift*** ($\vec{v}_d$).

Considerăm un conductor omogen și izotrop de secțiune S și lungime $l = v_d \cdot \Delta t$. Sarcinile din interiorul conductorului +q se deplasează pe direcția câmpului cu viteza v_d, iar densitatea de purtători de sarcină din unitatea de volum (concentrația) este N (vezi fig. 8.10).

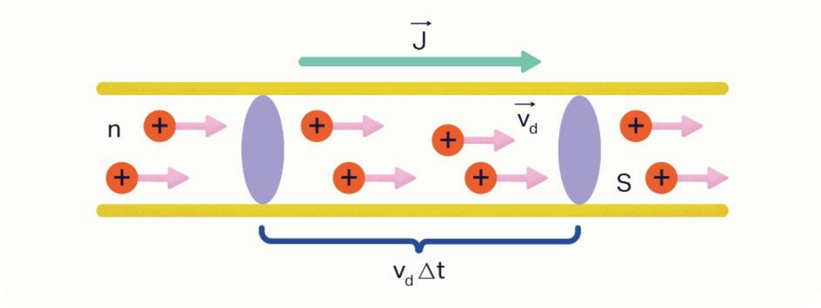


Fig. 8.10 Conductor omogen prin care se deplasează sarcini electrice

Astfel, știind că sarcina electrică totală este:

$$\Delta Q = q \cdot N = q \cdot (n \cdot V) = q \cdot n \cdot (S \cdot v_d \cdot \Delta t) \tag{8.53}$$

Intensitatea respectiv densitatea de curent devin:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q \cdot n \cdot S \cdot v_d \tag{8.54}$$

$$j = \frac{I}{S} = q \cdot n \cdot v_d \tag{8.55}$$

Vectorial:

$$\vec{j} = q \cdot n \cdot \vec{v}_d \tag{8.56}$$

În conductorii neomogeni în care există mai multe tipuri de purtători de sarcină electrică având:

- concentrațiile n_i
- vitezele medii $v_{d,i}$
- sarcinile q_i

densitatea de curent este:

$$\vec{j} = \sum_i q_i \cdot n_i \cdot \vec{v}_{d,i} \tag{8.57}$$

Iar intensitatea curentului prin suprafață este:

$$I = \int j\, dS \tag{8.58}$$

Cu alte cuvinte: intensitatea curentului reprezintă fluxul densității de curent prin suprafața S.

Considerăm o suprafață închisă S în interiorul unui conductor care are volumul V. Normala la suprafața închisă este îndreptată întotdeauna în exteriorul acesteia. Conform legii conservării sarcinii, sarcina ce iese din volumul V este egală cu variația sarcinii din acest volum în același interval de timp. Adică:

$$\iint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \tag{8.59}$$

Dacă se exprimă Q în funcție de densitatea de sarcină $\rho = \rho(x, y, z)$:

$$Q = \iiint \rho(x, y, z) dV \tag{8.60}$$

atunci:

$$\iint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho(x, y, z) dV = -\iiint \frac{d\rho}{dt} dV \tag{8.61}$$

dar:

$$\iint \vec{j} d\vec{S} = \iiint \nabla \vec{j} dV \tag{8.62}$$

adică:

$$\iiint \nabla \vec{j} dV = -\iiint \frac{d\rho}{dt} dV \tag{8.63}$$

Astfel, pentru orice volum V:

$$\nabla \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{8.64}$$

Această relație poartă denumirea de ***ecuația de continuitate***.

În regim staționar, densitatea volumică de sarcină nu depinde de timp și ecuația de continuitate este de forma:

$$\nabla\vec{j} = 0$$

8.2.2 Teoria clasică a conducției electrice

Modelul clasic al conducției electrice în metale a fost elaborat de către P Drude și G.A. Lorentz, la începutul secolului trecut. La baza acestei teorii stă ipoteza existenței gazului electronic în metale, adică existența unor electroni liberi în interiorul acestora. Prin electroni liberi în metale se înțeleg electronii de valență care nu sunt legați de nici un atom al rețelei cristaline și care se pot deplasa în interiorul acestuia pe distanțe relativ mari. Trebuie menționat faptul că mișcarea de agitație termică a electronilor nu încetează la apariția mișcării ordonate (datorate câmpului electric în care se află conductorul) ci se suprapune peste aceasta.

Conform acestei teorii:

- În absența câmpului ($\vec{E} = 0$) electronii se deplasează haotic datorită energiei termice ($v_d = 0$) cu viteza v_T.
- În prezența câmpului ($\vec{E} \neq 0$) electronii se deplasează cu viteza de drift ($v_d \neq 0$), având o accelerație:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \tag{8.65}$$

unde *m* este masa electronului. Dacă rețeaua ar fi rigidă și perfectă electronii s-ar mișca accelerat. Acest lucru nu este posibil deoarece în metale există imperfecțiuni ale rețelei și impurități, iar ionii rețelei cristaline execută mișcări de vibrație în jurul pozițiilor de echilibru. În mișcarea lor electronii suferă ”ciocniri” cu ionii rețelei cristaline și cu defectele din rețea. Se admite ca o ipoteză simplificatoare că la fiecare ciocnire electronul pierde energia acumulată între două ciocniri succesive. Astfel, dacă timpul dintre două ciocniri este τ, viteza înainte de ciocnire este:

$$v = a \cdot \tau = \frac{qE}{m}\tau \qquad (8.66)$$

Așadar, electronul parcurge drumul dintre două ciocniri succesive cu o viteză medie care se suprapune peste mișcarea dezordonată, numită ***viteza de transport (viteza de drift)*** și care este jumătate din viteza v:

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{qE}{2m}\tau = \mu E \qquad (8.67)$$

unde: coeficientul de proporționalitate μ poartă numele de ***mobilitatea electronului***; acesta fiind direct proporțional cu intervalul de timp dintre două ciocniri succesive:

$$\mu = \frac{q\tau}{2m} \qquad (8.68)$$

Timpul mediu între două ciocniri este raportul dintre drumul liber mediu λ și viteza termică a electronului v_T. Viteza termică a electronilor poate fi estimată pornind de la formula obținută în cazul gazelor ideale:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad (8.69)$$

unde: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ este constanta lui Boltzmann, iar T este temperatura absolută a metalului.

Atunci densitatea de curent este:

$$j = q \cdot n \cdot v_d = \frac{n \cdot q^2 \cdot \tau}{2m} \cdot E = \sigma \cdot E \qquad (8.70)$$

unde:

$$\sigma = \frac{n \cdot q^2 \cdot \tau}{2m} = \frac{n \cdot q^2}{2m}\frac{\lambda}{v_T} \qquad (8.71)$$

reprezintă ***conductivitatea conductorului***, aceasta fiind o constantă de material ce descrie ”răspunsul” sistemului la aplicarea câmpului electric.

Notăm rezistivitatea electrică:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m}{n \cdot q^2 \cdot \tau} \tag{8.72}$$

Mobilitatea purtătorilor de sarcină poate fi definită funcție de conductibilitatea electrică:

$$\mu = \frac{\sigma}{Q} = \frac{\sigma}{n \cdot q} \tag{8.73}$$

Astfel, în Sistem Internațional:

$$[\sigma]_{SI} = (\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1} = \mathrm{Siemens}$$
$$[\rho]_{SI} = \Omega \cdot \mathrm{m}$$
$$[\mu]_{SI} = \mathrm{m}^2/\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$$

8.2.3 Legea lui Ohm

Forma microscopică (locală) a legii lui Ohm exprimă legătura dintre densitatea curentului de conducție și intensitatea câmpului electric din conductori:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{8.74}$$

unde:

- j este densitatea de curent
- σ este conductibilitate electrică
- E intensitatea câmpului electric

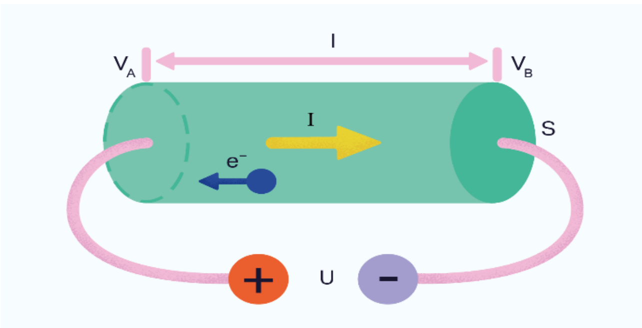


Fig. 8.11 Conductor la capetele căruia se aplică o tensiune U

Această lege este valabilă pentru un mare număr de materiale inclusiv semiconductori. Dacă în cazul metalelor variația conductibilității, σ, cu temperatura este foarte mică; în cazul semiconductorilor această dependență este puternică datorită variației concentrației purtătorilor de sarcină cu temperatura.

Pentru a deduce forma macroscopică a legii lui Ohm, considerăm un conductor omogen (fig. 8.11), cu secțiunea S și lungimea l prin care circulă un curent de intensitate:

$$I = j \cdot S = \sigma \cdot E \cdot S = \frac{1}{\rho} \cdot E \cdot S \tag{8.75}$$

Dacă la capetele conductorului aplicăm o tensiune U, câmpul electric va fi:

$$E = \frac{U}{l} \tag{8.76}$$

Atunci:

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l} \cdot S = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{l} \cdot U \tag{8.77}$$

Legătura dintre rezistivitate și rezistența electrică a conductorului este:

$$\rho = R \cdot \frac{S}{l} \tag{8.78}$$

Pentru metale rezistivitatea ρ depinde de temperatură după legea:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha T) \tag{8.79}$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la $T = 0°C$, iar α este coeficientul de variație cu temperatura al rezistivității.

Legea lui Ohm sub formă macroscopică este:

$$U = R \cdot I \tag{8.80}$$

Relația care definește rezistența electrică:

$$R = \frac{U}{I} \tag{8.81}$$

În Sistem Internațional, rezistența se măsoară în Ohmi (Ω).

8.3 Circuite de curent continuu

Pentru a distinge diferitele elemente de circuit, ele sunt reprezentate prin diferite simboluri. Pentru același element de circuit în literatura de specialitate se folosesc simboluri diferite. Exemple în acest sens sunt în fig. 8.12.

Caracterizarea elementelor de circuit:

a) Generatorul este caracterizat complet prin:
   - Valoarea tensiunii electromotoare ε (t.e.m.)
   - Rezistența internă r

b) Rezistorul se caracterizează complet prin rezistența sa R

c) Aparatele de măsură se caracterizează prin parametrii:
   - Rezistență internă
   - Valoare maximă a mărimii măsurate
   - Sensibilitatea aparatului

Aparatul destinat măsurării intensității curentului, ampermetru se include în circuit în serie cu celelalte elemente.

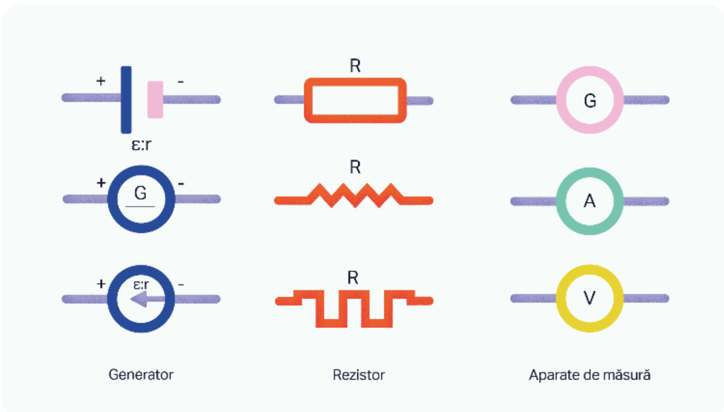


Fig. 8.12 Simbolurile unor elemente de circuit electric

Aparatul destinat măsurării diferenței de potențial (tensiunii), voltmetrul, se include în circuit paralel cu porțiunea de circuit în care se dorește măsurarea tensiunii.

Pentru ca într-un conductor să circule un curent staționar, el trebuie să fie parte dintr-un circuit electric complet. În fig. 8.13 este reprezentat cel mai simplu circuit electric format dintr-un generator și un rezistor (consumator) legate în serie prin intermediul unor sârme conductoare a căror rezistență e atât de mică încât se poate neglija.

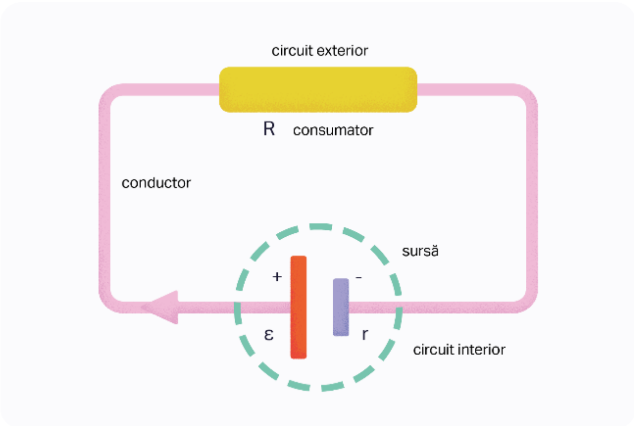


Fig. 8.13 Circuit electric

Tensiunea electromotoare reprezintă lucrul mecanic necesar sarcinii electrice pentru a parcurge întregul circuit sau:

$$\varepsilon = U + u = IR + Ir \tag{8.82}$$

unde:

U = IR este tensiunea la borne (căderea de tensiune pe circuitul exterior)

u = Ir este căderea de tensiune pe rezistența internă a sursei (tensiunea în interiorul sursei)

Într-un circuit având rezistența externă R alimentat la o sursă de tensiune electromotoare ε, intensitatea va fi:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \tag{8.83}$$

8.3.1 Circuite electrice ramificate

Marea majoritate a circuitelor electrice prezintă ramificații. Aceasta înseamnă că elementele de circuit (surse, rezistori, condensatori bobine) sunt incluse în diferite ramuri ale circuitului, ramuri ce se întâlnesc în anumite puncte și pot forma ochiuri închise de circuit. Elementele rețelei electrice sunt:

- Nodul de rețea – un punct al rețelei în care se întâlnesc cel puțin trei ramuri
- Ramura (latura) rețelei – porțiunea cu rezistență diferită de zero dintre două noduri
- Ochiul de rețea – conturul poligonal închis format din mai multe ramuri de rețea

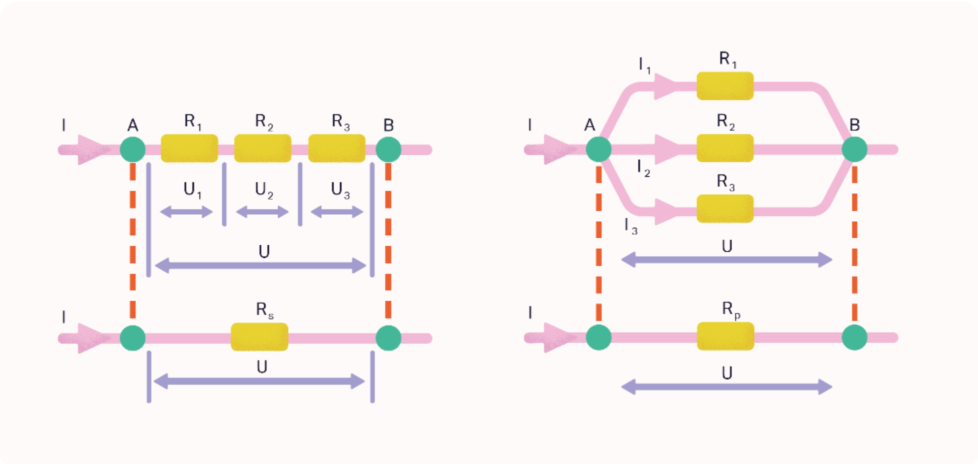


Fig. 8.14 Gruparea rezistorilor (serie și paralel)

Rezistența e un element de bază al circuitelor electrice. Într-o rețea electrică, atunci când există mai mulți rezistori, aceştia pot fi grupați în serie sau în paralel pentru ușurință.

a. <u>Rezistori în serie</u>

Curentul, I, care trece prin rezistori este același, dar tensiunea, U, se redistribuie pe rezistențe. Tensiunile din circuit se adună:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \sum_i U_i \tag{8.84}$$

Înlocuind tensiunile cu legea lui ohm, rezistența echivalentă pentru circuitul în serie se determină cu formula:

$$\mathrm{R_s} = \mathrm{R_1} + \mathrm{R_2} + \mathrm{R_3} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{R_i} \tag{8.85}$$

Rezistența echivalentă se poate determina cu ajutorul legii lui Ohm dacă se cunosc tensiunile pe rezistențe:

$$R_S = \frac{\sum U_i}{I} \tag{8.86}$$

b. <u>Rezistori în paralel</u>

Tensiunea, U, care trece prin rezistori este aceeași, dar curentul, I, se redistribuie pe rezistențe. Suma curenților va fi:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \sum_i I_i \tag{8.87}$$

Din legea lui Ohm:

$$\sum_i I_i = \sum_i \frac{U}{R_i} = U \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_p} \tag{8.88}$$

rezistența echivalentă pe circuit se determină din relația:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \sum_i \frac{1}{R_i} \tag{8.89}$$

Gruparea în paralel e utilizată atunci când se dorește obținerea unei rezistențe echivalente mai mici decât cele pe care le avem la dispoziție.

8.3.2 Legile lui Kirchhoff

Din punct de vedere fizic, legile lui Kirchhoff reprezintă consecințele unor legi de conservare.

Legea I a lui Kirchhoff

Enunț! *Suma algebrică a curenților dintr-un nod de circuit este zero (Într-un nod de circuit curenții care intră în nod sunt egali cu cei care ies din acel nod.)*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{8.90}$$

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$$

Această lege este o consecință a conservării sarcinii electrice. Sarcina electrică care intră într-un nod în timpul t este egală cu sarcina electrică care iese din nod în același timp t.

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 \tag{8.91}$$

Prin convenție notăm cu:

+ curenții care intră în nod

\- curenții care ies din nod

Legea II a lui Kirchhoff

Câmpul electric fiind un câmp conservativ, lucrul mecanic pe o buclă închisă este egal cu zero.

Enunț! *Suma algebrică a diferențelor de potențial (incluzând sursele de tensiune) este egală cu zero.*

Prin convenție:

1. Sensul de parcurgere al buclei se alege arbitrar.
2. Pentru rezistor: - când parcurgem bucla în sensul curentului căderea de tensiune se consideră negativă deoarece ne deplasăm în sensul descreșterii potențialului.
3. Pentru sursa de tensiune electromotoare: - când parcurgem de la ”-” la ”+” atunci tensiunea ε se consideră pozitivă.

8.3.3 Energia și puterea

Curentul electric reprezintă un transport de sarcină electrică dintr-un punct în altul al conductorului. Pentru aceasta e nevoie să se efectueze un lucru mecanic, adică se consumă energie. Cantitatea de energie pierdută în timpul Δt prin transportul sarcinii electrice dintr-o porțiune cu potențialul mai ridicat în una cu potențial mai scăzut este:

$$W = U \cdot \Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t \qquad (8.92)$$

U = diferența de potențial aplicată la capetele conductorului

ΔQ = sarcina ce trece prin conductor

Unitatea de măsură, în Sistemul Internațional este Joule-ul, dar în practică se folosește des unitatea de kilowattoră:

$$1kWh = 1W \cdot 3600s = 3.6 \cdot 10^3 J$$

Pierderea de energie are loc ca urmare a ciocnirilor particulelor transportoare de sarcină cu atomii rețelei și va fi transmisă mediului înconjurător sub formă de căldură. Efectul de generare de căldură de către un curent care trece printr-un rezistor se numește ***efect Joule***.

Energia preluată (disipată în circuitul exterior) de rezistor în unitatea de timp, adică puterea preluată de consumator este:

$$P_{ext} = \frac{W}{\Delta t} = U\frac{\Delta Q}{\Delta t} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (8.93)$$

Puterea disipată în circuitul interior (în interiorul generatorului):

$$P_{int} = u\frac{\Delta Q}{\Delta t} = u \cdot I = r \cdot I^2 = \frac{u^2}{r} \quad (8.94)$$

Puterea furnizată de generatorul electric (sursă) este:

$$P = \varepsilon \cdot I = (R + r)I^2 = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)} \quad (8.95)$$

Randamentul circuitului electric (η) reprezintă raportul dintre puterea debitată pe circuitul exterior și puterea pe întreg circuitul.

$$\eta = \frac{P_{ext}}{P} = \frac{U \cdot I}{\varepsilon \cdot I} = \frac{U}{\varepsilon} \quad (8.96)$$

Sau

$$\eta = \frac{P_{ext}}{P} = \frac{R \cdot I^2}{(R+r)I^2} = \frac{R}{(R+r)} \quad (8.97)$$

P_{ext} este cea care conduce la încălzirea corpurilor și se mai numește și putere utilă.

Puterea transferată de la un generator spre un consumator este maximă atunci când rezistența consumatorului este egală cu rezistența internă a generatorului (generatorul lucrează în sarcină adaptată atunci când $R = r$).

9. Fenomene magnetice

Constatarea proprietăților magnetice ale unor materiale a fost făcută încă din antichitate. Numele de magnet provine de la numele unei regiuni din Asia Mică “Magnesia”. În această regiune se găseau roci cu proprietăți magnetice (atrag obiecte mici de fier când sunt aduse în apropierea lor). De-a lungul istoriei, magnetismul a fost văzut ca un domeniu separat dar în strânsă legătură cu electricitatea.

Câmpul magnetic este o formă de existență a materiei care se manifestă prin acțiunea cu o forță de natură magnetică asupra sarcinilor electrice în mișcare.

9.1 Forțe magnetice

Un câmp magnetic acționează asupra sarcinilor electrice dacă acestea sunt în mișcare și viteza lor nu este paralelă cu direcția câmpului.

9.1.1 Forța Lorentz

Dacă introducem în câmp magnetic uniform o particulă de sarcină electrică q și masă m, care se deplasează în câmp cu viteza $\vec{v}$, observăm că (fig. 9.1):

- în câmpul magnetic există o direcție privilegiată după care particula nu-și modifică vectorul viteză, $\vec{v}$,
- dacă particula este trimisă în câmp într-o direcție conținută într-un plan perpendicular cu direcția privilegiată, traiectoria particulei

devine circulară, dar valoarea absolută a vitezei rămâne constantă. Așadar, asupra particulei acționează o forță centripetă.

S-a constatat că raza traiectoriei circulare pe care se va mișca particula este de forma:

$$R = \frac{1}{B}\frac{mv}{q} \tag{9.1}$$

unde $\frac{1}{B}$ este factor de proporționalitate, iar B este o mărime fizică vectorială ce caracterizează câmpul magnetic, numită inducție magnetică.

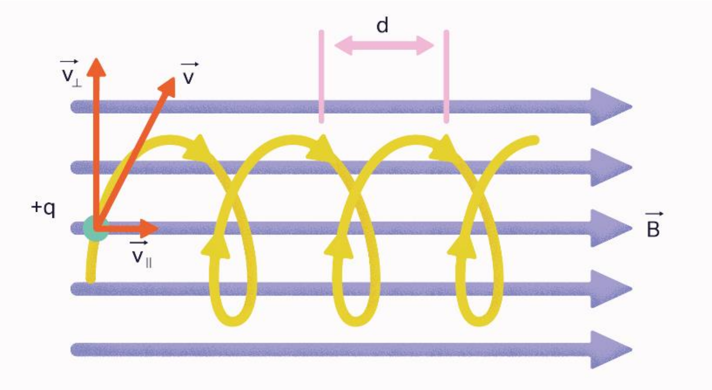


Fig. 9.1 Sarcină electrică în câmp magnetic

În fig. 9.1 am considerat sarcina q pozitivă, dar în cazul sarcinilor negative orientarea vectorului viteză se schimbă cu 180°.

Așadar, pornind de la formula de definiție și ținând cont de modul de definire al razei traiectoriei circulare, forța centripetă va fi de forma:

$$F = \frac{mv^2}{R} = qvB \tag{9.2}$$

sau, având în vedere caracterul vectorial al forței:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{9.3}$$

Aceasta forță se numește forța Lorentz.

- Mărimea acestei forțe este dată de unghiul dintre vectorul viteză, $\vec{v}$, și vectorul inducție magnetică, $\vec{B}$:

$$F = qvB \quad dacă\, \vec{v} \perp \vec{B}$$
$$F = qvB \sin\theta \quad dacă\sphericalangle\theta = \sphericalangle(\vec{v},\vec{B}) \tag{9.4}$$
$$F = 0 \quad dacă\, \vec{v} \parallel \vec{B}$$

- Orientarea forței magnetice care acționează asupra sarcinii în mișcare aflată în câmp magnetic este dată de direcția în care înaintează un burghiu drept rotit în sensul în care vectorul viteză se suprapune peste vectorul inducție magnetică pe drumul cel mai scurt.

Unitatea de măsură pentru inducția magnetică, $\vec{B}$, în Sistem Internațional este Tesla:

$$1T = \frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m}$$

Convenție!

Când vectorul inducție magnetică este perpendicular pe planul hârtiei, îndreptat de sus în jos în desene este reprezentat prin coada unei săgeți ⊗. Dacă vectorul câmp magnetic este îndreptat de jos în sus (spre ieșirea din planul hârtiei) atunci acest lucru este indicat de faptul că vectorului (săgeții) i se observă doar vârful ⊙. În multe cărţi de specialitate se utilizează această convenție.

Traiectoria particulei încărcate care se mișcă în câmp magnetic transversal este circulară. Aceasta este caracterizată de următoarele mărimi:
Raza traiectoriei:

$$R = \frac{1}{B}\frac{mv}{q} \tag{9.5}$$

Perioada de rotație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{9.6}$$

Viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m}B \tag{9.7}$$

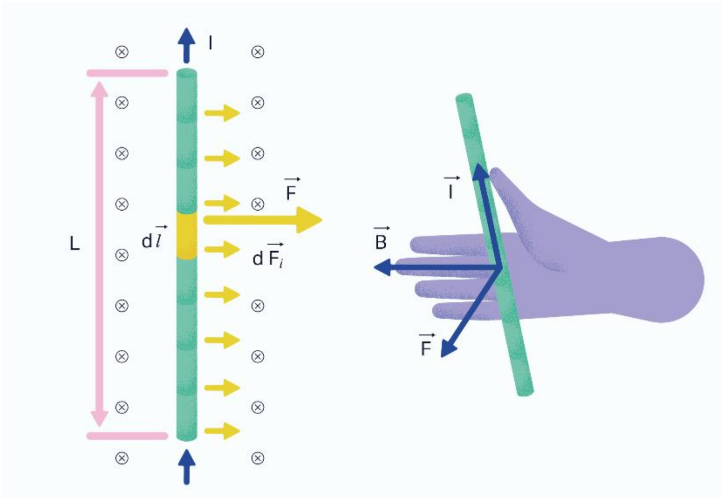


Fig. 9.2 Conductor parcurs de curent aflat în câmp magnetic

9.1.2 Forța Laplace

Considerăm un câmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$, în care introducem un element de lungime dl dintr-un conductor parcurs de curentul I (fig. 9.2)

Dacă S este aria secțiunii transversale a conductorului, sarcina unui purtător de curent este q, iar concentrația lor este n, atunci sarcina totală din elementul considerat este:

$$dQ = nq\, dV = nqS\, dl \tag{9.8}$$

Dar forța care acționează asupra elementului dl este:

$$d\vec{F} = dQ\, \vec{v} \times \vec{B} = nqS\, dl\, \vec{v} \times \vec{B} = jS\, d\vec{l} \times \vec{B} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{9.9}$$

relație în care am transferat caracterul vectorial de la viteză la elementul de lungime dl, deoarece în conductorii subțiri viteza electronilor este orientată pe lungimea conductorilor.

Orice conductor de lungime finită poate fi format dintr-un număr finit de elemente pe care acționează forța magnetică $\Delta\vec{F}_i$. Forța magnetică de pe întreg conductorul este dată de:

$$\vec{F} = \sum_i \Delta\vec{F}_i = I\left(\sum_i \Delta\vec{l}_i\right) \times \vec{B} \qquad (9.10)$$

Pentru un conductor liniar de lungime l obținem:

$$\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B} \qquad (9.11)$$

Această expresie este cunoscută ca: forța Laplace sau forța electromagnetică.

Când conductorul considerat nu este rectiliniu, atunci prin generalizare (trecerea la limita $\Delta l_i \rightarrow 0$ devine dl) forța Laplace devine:

$$\vec{F} = I\int\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \qquad (9.12)$$

- Mărimea acestei forțe este:

  $$F = IlB\sin\theta \qquad (9.13)$$

  unde θ este unghiul dintre vectorii $d\vec{l}$ și $\vec{B}$.
- Orientarea forței Laplace se obține cu regula mâinii drepte: dacă orientăm mâna dreaptă cu palma deschisă, astfel încât degetele să fie pe direcția inducției magnetice $\vec{B}$, iar degetul mare să fie în sensul curentului prin conductor, forța Laplace va ieși din palmă (fig. 9.2)

9.2 Legea lui Gauss pentru câmp magnetic

Fiecărui punct din câmpul magnetic i se poate atașa un vector $\vec{B}$. Linia de câmp care are ca tangentă în orice punct vectorul inducție magnetică se numește linie de câmp magnetic. Proprietățile liniilor câmpului magnetic:

- Liniile de câmp magnetic nu se pot intersecta.
- Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise.
- Liniile de câmp magnetic sunt curbe orientate, ceea ce se indică printr-o săgeată pe linia câmpului. Orientarea liniei de câmp într-un punct din spațiu este de la polul nord la sud în cazul unul magnet în formă de bară și este dat de regula mâinii drepte în cazul unui conductor parcurs de curent (fig. 9.3).

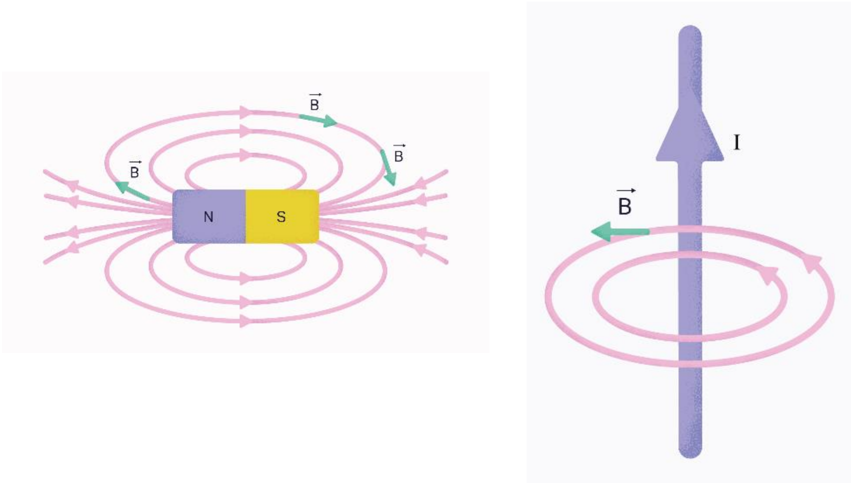


Fig. 9.3 Liniile de câmp magnetic în cazul unui magnet și în cazul unui conductor parcurs de curent electric

Fluxul magnetic se definește asemănător fluxului electric. Astfel pentru definirea fluxului câmpului magnetic întâlnim următoarele cazuri particulare:

Câmpul magnetic este omogen, iar suprafața S este plană și poate forma sau nu un unghi cu planul normal la liniile de câmp:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} \tag{9.14}$$

adică:

$$\Phi_B = B \cdot S \cos\theta \tag{9.15}$$

unde θ este unghiul dintre vectorii inducție magnetică, $\vec{B}$, și normala la suprafață, $\vec{S}$,.

Câmpul magnetic este neomogen, iar suprafața S nu este plană:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{9.16}$$

Câmpul magnetic se caracterizează prin linii de câmp închise. Adică: orice linie de câmp care intră într-o suprafață închisă S trebuie să iasă din ea. Matematic:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{9.17}$$

Relație care reprezintă legea lui Gauss pentru câmp magnetic. Această lege e satisfăcută atât de câmpurile magnetice statice cât și de cele variabile în timp.

Enunț! *Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafață închisă este egal cu zero.*

Unitatea de măsură a fluxului câmpului magnetic, în Sistem Internațional este Weber-ul: $[\Phi]_{SI} = Wb$.

În natură nu există ”sarcini magnetice” individuale (monopoli magnetici). Așadar, dacă polii magnetici de semn opus (nord și sud) sunt inseparabili atunci *suma algebrică a polilor din interiorul oricărei suprafețe închise este nulă*.

9.3 Calculul inducției magnetice

9.3.1 Legea Biot-Savat

Considerăm un element infinitezimal $d\vec{l}$ dintr-un conductor subțire parcurs de curentul de intensitate *I* (fig. 9.4). În punctul *P* aflat la un moment dat la distanța r de segmentul elementar $d\vec{l}$, prin care trece sarcina punctiformă dQ, având viteza $\vec{v}$ se generează inducția magnetică elementară:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dQ\,\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2} \tag{9.18}$$

unde $\vec{e}_r$ este versorul vectorului de poziție $\vec{r}$, iar $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Tm/A$ se numește permeabilitate magnetică a vidului.

Ținând seama de formula de definire a sarcinii din aria secțiunii transversale S, a elementului de lungime $d\vec{l}$ considerat, inducția magnetică devine:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(nqSd\vec{l})\,\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(nqS\vec{v})\,d\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\vec{j}S)\,d\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

adică:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} \tag{9.19}$$

Formula obținută este ***legea lui Biot-Savart***.

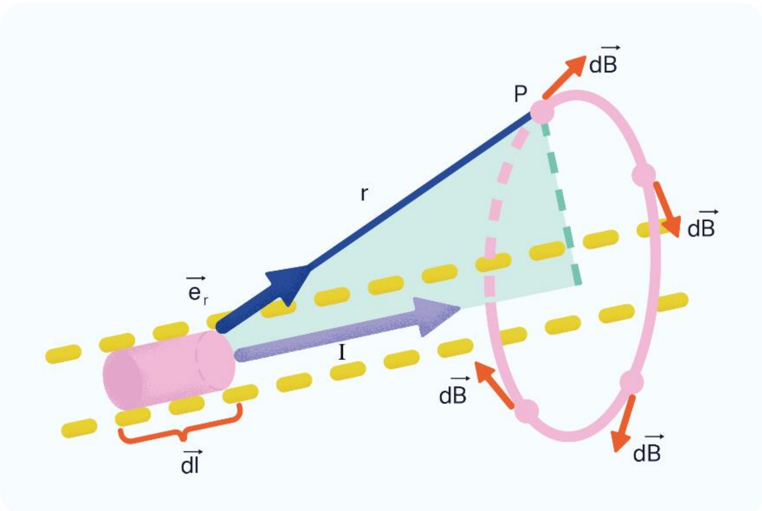


Fig. 9.4 Conductor subțire parcurs de curent electric datorită căruia în punctul P apare inducția magnetică elementară dB

Vectorul inducție magnetică elementar $d\vec{B}$ generat de elementul $d\vec{l}$, într-un punct situat la distanța r de acesta, este orientat în sensul în care înaintează un burghiu drept dacă este rotit, pe drumul cel mai scurt, în sensul de suprapunere al vectorului $d\vec{l}$ peste versorul $\vec{e}_r$ al vectorului de poziție al punctului P

Inducția magnetică totală produsă de conductor se obține prin însumarea tuturor inducțiilor magnetice elementare produse de fiecare element de lungime $d\vec{l}$. Astfel obținem forma integrală a legii lui Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \qquad (9.20)$$

9.3.2 Legea lui Ampere

Considerăm un conductor rectiliniu infinit, străbătut de curentul *I*. Mărimea inducției magnetice în jurul unui conductor parcurs de curent este dată de relația

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (9.21)$$

unde μ_0 reprezintă permitivitatea magnetică, iar r este distanța față de elementul $d\vec{l}$ (raza liniei de câmp).

Ținând seama că $d\vec{l}$ elementul de lungime de arc de pe linia de câmp este:

$$\oint dl = 2\pi r \qquad (9.22)$$

circulația câmpului inducției magnetice în jurul conductorului se obține integrând pe întreaga linie de câmp:

$$\begin{gathered}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B\cdot dl = B\cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}2\pi r \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0\int \vec{j}\, d\vec{S}\end{gathered} \qquad (9.23)$$

Rezultatul este cunoscut drept ***forma integrală a legii lui Ampere*** – *circulația inducției magnetice $\vec{B}$ de-a lungul buclei închise este egală cu produsul dintre: permeabilitate magnetică a mediului şi curentul total în jurul suprafeței mărginită de bucla închisă.* Deși aceasta a fost determinată pentru cazul special al unui cerc, rezultatul este valabil pentru orice curbă închisă străbătută de un curent I. Trebuie remarcat că legea lui Ampere scrisă în această formă este valabilă numai în cazul câmpului electric constant în timp.

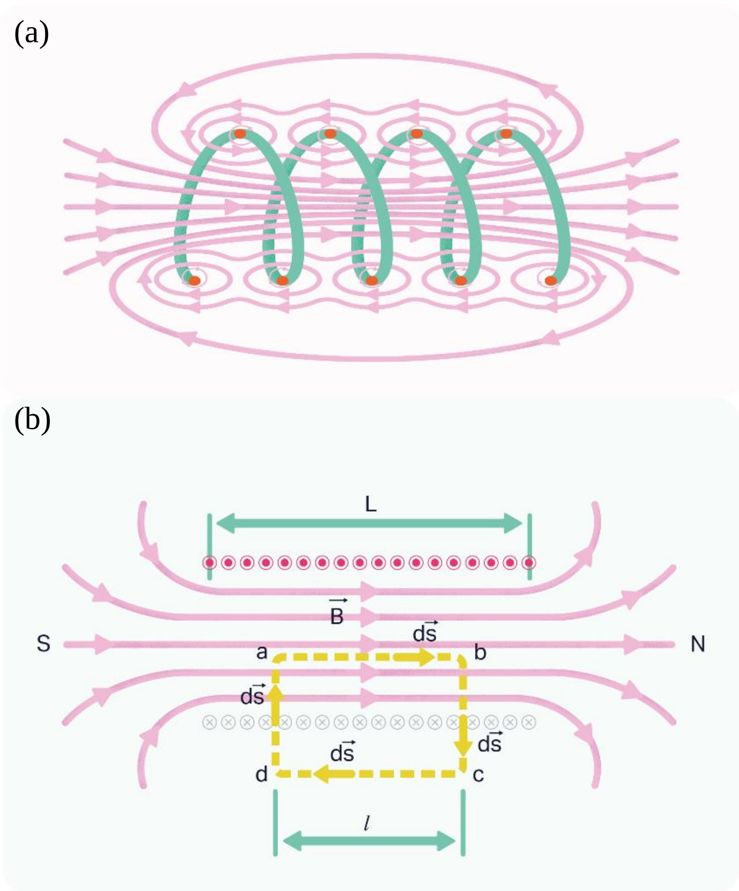


Fig 9.5 Solenoid în exterior (a) și în interior (b)

9.3.3 Inducția magnetică a solenoidului

Prin solenoid se înțelege un sistem de curenți circulari, paraleli, de același sens, așezați echidistant cu centrele pe o axă (fig. 9.5a). Practic un solenoid se obține înfășurând un conductor de sârmă izolată pe un cilindru. Dacă înfășurarea solenoidului se face spiră lângă spiră atunci liniile de câmp din interiorul solenoidului vor ieși din el pe la capetele lui și se închid prin exteriorul acestuia conform fig. 9.5b. Solenoidul a cărui lungime este de cel puțin patru ori diametrul spirelor sale se numește solenoid lung. În interiorul solenoidului lung câmpul magnetic este omogen (liniile de câmp sunt paralele și echidistante). Ne propunem să calculăm inducția magnetică în interiorul solenoidului astfel că vom aplica *legea lui Ampere*.

În fig. 9.5b alegem un contur de integrare (dreptunghiular) cu laturile ab în interiorul solenoidului și cd în exteriorul acestuia. Integrala pe contur închis se calculează astfel:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} \qquad (9.24)$$

unde:

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B \cdot dl = B \int_a^b dl = Bl \quad (\vec{B} \parallel d\vec{l})$$

$$\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\vec{B} \perp d\vec{S}) \qquad (9.25)$$

$$\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\vec{B} \cong 0 \text{ în } exteriorul\ solenoidului)$$

Astfel, obținem:

$$Bl = \mu_0 I \qquad (9.26)$$

unde I este curentul total prin spirele solenoidului conținute în conturul de integrare. Dacă curentul printr-o spiră este i, iar conturul de integrare înconjoară toate cele N spire ale solenoidului de lungime L, atunci $I = Ni$. Astfel, expresia inducției magnetice în interiorul solenoidului este:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i \tag{9.27}$$

Inducția magnetică în interiorul solenoidului lung este direct proporțională cu intensitatea curentului care circulă prin fiecare spiră, cu numărul total de spire și invers proporțională cu lungimea solenoidului.

Capătul solenoidului, din care ies liniile de câmp se numește pol nord al solenoidului și se notează cu N. Capătul solenoidului, în care intră liniile de câmp se numește pol sud al solenoidului și se notează cu S. Pentru a stabili polii unui solenoid parcurs de curent s-a adoptat următoarea ***convenție***:

Dacă ne imaginăm că prindem solenoidul cu mâna dreaptă, astfel încât degetele palmei să fie orientate în sensul în care circulă curentul prin spire, atunci degetul mare deschis va fi orientat spre polul nord al solenoidului (fig. 9.6).

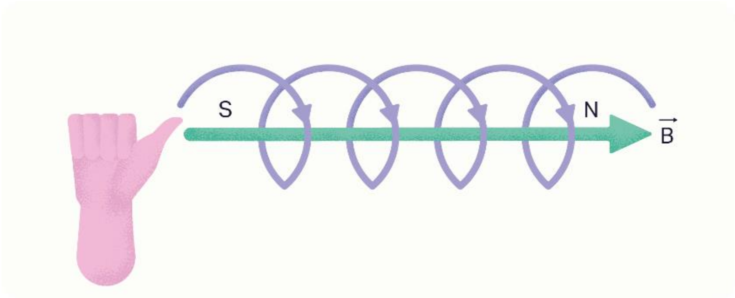


Fig 9.6 Convenție de stabilire a polilor unui solenoid parcurs de curent

Concluzie!

- Legea lui Biot-Savart este aplicabilă în toate cazurile, dar calculul integralei acesteia poate fi uneori extrem de dificilă.

- Legea lui Ampere se aplică cu condiția să putem alege un contur de integrare astfel încât pe porțiunile pe care integrala nu se anulează, inducția magnetică, $\vec{B}$, să fie constantă pentru a putea fi scoasă de sub semnul de integrală.

9.4 Legea inducției electromagnetice

Faraday a observat că într-un circuit închis apare un curent electric atunci când:

- circuitul este deformat în câmp magnetic
- circuitul se rotește în câmp magnetic omogen
- circuitul execută o mișcare de translație în câmp magnetic neomogen
- circuitul rigid și fix se află în câmp magnetic variabil în timp (câmp magnetic nestaționar)

Fenomenul de producere a curentului electric cu ajutorul unui câmp magnetic se numește inducție electromagnetică. Tensiunea electromotoare care determină existența curentului electric indus se numește tensiune electromotoare indusă.

Legea conservării energiei în fenomenul de inducție electromagnetică este punctul de plecare pentru stabilirea legii lui Faraday sau a legii inducției electromagnetice.

Considerăm circuitul electric din fig. 9.7, în care porțiunea $ab = L$ poate aluneca fără frecare pe firele conductoare bc și ad. Circuitul este plasat în câmpul magnetic static, $\vec{B}$, orientat dinspre pagină spre cititor. Tensiunea electromotoare din circuit, ε, generează în acesta curentul electric:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \qquad (9.28)$$

în sensul indicat pe figură (R este rezistența circuitului).

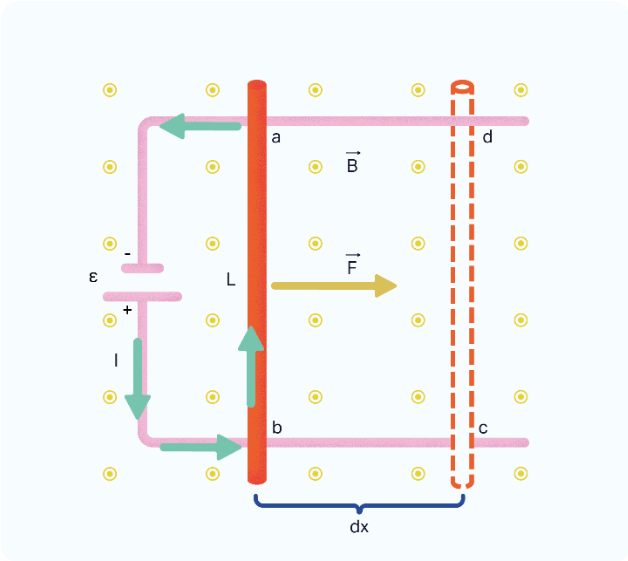


Fig. 9.7 Circuit electric având conductorul ab mobil

Așadar asupra laturilor circuitului acționează o forță electromagnetică care tinde să deformeze circuitul, adică să deplaseze porțiunea ab spre dreapta, ceea ce face ca aria mărginită de curent să crească.

Lucrul mecanic efectuat de sursa de tensiune, ε, în intervalul de timp, dt, este:

$$\frac{dL}{dt} = \varepsilon I \implies dL = \varepsilon I\, dt \qquad (9.29)$$

Din lucrul mecanic total se cheltuiește:

- parte pentru deplasarea laturii ab a circuitului:

  $$dL_{ab} = F\, dx = IBL\, dx = IB\, dS = I\, d\Phi \qquad (9.30)$$

  unde: $d\Phi$ este variația fluxului câmpului magnetic prin suprafața conturului, datorită creșterii cu $dS = L\, dx$ a ariei suprafeței mărginite de el.
- altă parte se disipă în rezistența circuitului, prin efect Joule, sub formă de energie termică:

$$dL_Q = I^2 R\, dt \tag{9.31}$$

Din legea conservării energiei:

$$\begin{aligned} dL &= dL_{ab} + dL_Q \\ \varepsilon I\, dt &= I\, d\Phi + I^2 R\, dt \end{aligned} \tag{9.32}$$

rezultă:

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R} \tag{9.33}$$

Adică: legea lui Ohm pentru circuitul din fig. 9.7 în care pe lângă tensiunea electromotoare, ε, a sursei există și o tensiune electromotoare indusă:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.34}$$

datorată creșterii fluxului câmpului magnetic $d\Phi$, în timpul dt, prin suprafața mărginită de circuit. Expresia reprezintă legea lui Faraday pentru inducția electromagnetică.

Legea lui Lens: Semnul ”-” arată că tensiunea electromotoare indusă este orientată astfel încât câmpul magnetic al curentului indus se opune variației fluxului câmpului inductor:

- dacă $d\Phi > 0$ atunci $\varepsilon_i < 0$, iar $\vec{B}_i$ este orientat antiparalel cu $\vec{B}$
- dacă $d\Phi < 0$ atunci $\varepsilon_i > 0$, iar $\vec{B}_i$ este orientat paralel cu $\vec{B}$

Când într-un circuit fără generator convențional circulă curent electric, asupra electronilor din conductorii circuitului acționează forța Lorentz. Câmpul electric imprimat, corespunzător acestei forțe este:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{9.35}$$

Înlocuind în expresia tensiunii electromotoare indusă într-un circuit electric:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \oint \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \\ = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 \end{aligned} \tag{9.36}$$

Dacă:

Circuitul este fix și rigid ($\vec{v} = 0$) atunci al doilea termen e zero și singura modalitate de a varia fluxul câmpului prin suprafața constantă delimitată de circuit este variația câmpului magnetic:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt}\, d\vec{S} \qquad (9.37)$$

Semnul ”-” se datorează orientării opuse a vectorilor $\vec{B}$ și $d\vec{S}$, iar expresia:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt}\, d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S} \qquad (9.38)$$

reprezintă ***forma integrală a legii lui Faraday***.

Câmpul magnetic este static ($\vec{v} \neq 0$) Modalitățile de a induce în circuit tensiune electromotoare sunt:

- deformarea circuitului în câmp static omogen
- deplasarea circuitului rigid în câmp magnetic static neomogen.

Pentru o deformare a circuitului:

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = -B\frac{dS}{dt} = -B\frac{d(lx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} \\ \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = -Bv\, d\vec{l} = \oint(\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l}\end{gathered} \qquad (9.39)$$

Observații!

- Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este rezultatul separării în conductor a sarcinilor electrice de semn opus sub influența câmpului electric indus.
- Câmpul magnetic variabil în timp generează un câmp electric indus (neconservativ)

- Pentru apariția câmpului electric indus la variația câmpului electric nu este necesară prezența circuitului electric, ci doar existența unui mediu conductor.
- Liniile câmpului electric indus sunt curbe închise. – dacă câmpul electric indus este generat prin variația în timp a unui câmp magnetic omogen, liniile sale sunt cercuri concentrice în plane normale la liniile de câmp magnetic (fig. 9.8).

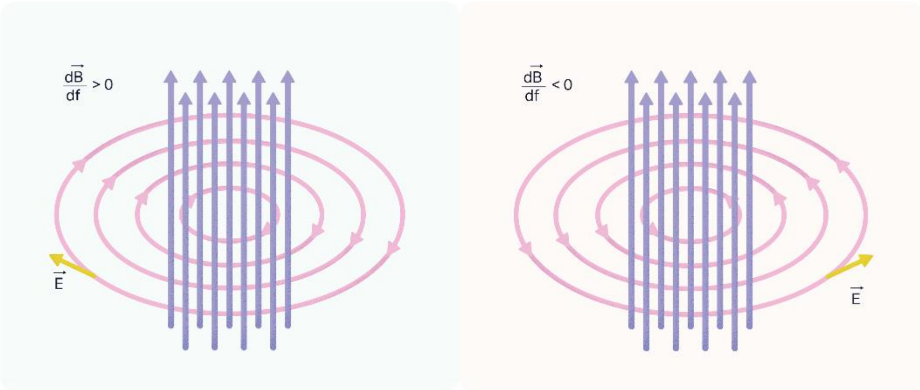


Fig. 9.8 Liniile câmpului electric indus generat prin variația în timp a unui câmp magnetic omogen

9.5 Autoinducția

La trecerea curentului electric printr-o bobină se creează un câmp magnetic ale cărui linii de câmp intersectează spirele bobinei, determinând fluxul magnetic:

$$\Phi = BNS \tag{9.40}$$

Știind că pentru un solenoid inducția magnetică este:

$$B = \mu \frac{NI}{l} \tag{9.41}$$

fluxul magnetic prin bobină este de forma:

$$\Phi = \mu \frac{N^2 S}{l} I \tag{9.42}$$

unde L constanta bobinei numită ***inductanță***, este:

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \tag{9.43}$$

Așadar, fluxul magnetic prin bobină este:

$$\Phi = L\, I \tag{9.44}$$

Unitatea de măsură pentru inductanță, în Sistem Internațional, se numește Henry și este dată de raportul dintre unitatea fluxului magnetic și a intensității curentului, adică:

$$[L]_{SI} = \frac{Wb}{A} = H$$

Inductanța proprie a unui circuit (bobina) depinde numai de caracteristicile de construcție și de permeabilitatea magnetică a mediului în care se află circuitul, dar nu depinde de intensitatea curentului electric prin circuit.

Dacă intensitatea curentului electric variază în timp, atunci și fluxul magnetic prin suprafața mărginită de circuit variază cu valoarea:

$$\mathrm{d}\Phi = L\, dI \tag{9.45}$$

determinând apariția tensiunii electromotoare autoindusă. Având în vedere legea lui Faraday şi ultima expresie a fluxului deducem că tensiunea electromotoare autoindusă are expresia:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{d\mathrm{I}}{dt} \tag{9.46}$$

Semnul minus ne arată că tensiunea electromotoare autoindusă într-un circuit se opune variației curentului care o produce. Astfel:

- Dacă curentul principal crește $\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt} > 0\right)$ atunci $\varepsilon < 0$, iar sensul curentului autoindus este opus sensului curentului principal.

- Dacă curentul principal scade $\left(\frac{dI}{dt} < 0\right)$ atunci $\varepsilon > 0$, iar sensul curentului autoindus are același sens ca și al curentului principal.

Autoinducția este fenomenul de inducție electromagnetică produs într-un circuit datorită variației intensității curentului electric din acel circuit.

Fenomenul de autoinducție poate fi observat prin scânteile de la periile unui motor electric sau de la întrerupătoarele instalațiilor casnice, unde au rol distructiv. Pentru a preveni uzarea contactelor electrice se conectează în paralel cu acestea condensatori care preiau energia autoindusă.

9.6 Energia câmpului magnetic

Câmpul magnetic este legat de curentul electric, adică apare și dispare împreună cu acesta. O parte din energia curentului electric se cheltuie pentru generarea câmpului magnetic.

Câmpul magnetic trebuie să posede o energie egală cu lucrul mecanic cheltuit de curent pentru generarea lui.

Pentru a determina expresia energiei câmpului magnetic pornim de la expresia lucrul mecanic efectuat de curentul I necesar creșterii fluxului câmpului magnetic prin aria mărginită de circuit, cu valoarea $d\Phi$.

Știind că:

$$\begin{gathered} dL = F\,dx = IBL\,dx = IB\,dS = I\,d\Phi \\ d\Phi = L\,dI \end{gathered} \tag{9.47}$$

Lucrul mecanic total se poate obține prin însumarea lucrurilor elementare:

$$dL = L\,I\,dI \tag{9.48}$$

Astfel *energia câmpului magnetic* este:

$$W = \int_0^L dL = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{LI^2}{2} \tag{9.49}$$

Putem, deci, nota energia câmpului magnetic:

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{9.50}$$

În cazul unui circuit care conține o bobină cu N spire aproape tot câmpul magnetic generat de curentul electric este înmagazinat în volumul din interiorul bobinei. Ținând cont de inducția magnetică a bobinei se poate determina curentul:

$$B = \mu\frac{NI}{l} \Rightarrow I = \frac{B\,l}{\mu\,N} \tag{9.51}$$

iar inductanța bobinei este:

$$L = \mu\frac{N^2S}{l} \tag{9.52}$$

Astfel, *energia câmpului magnetic* devine:

$$W = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2S}{l}\frac{B^2\,l^2}{\mu^2\,N^2} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}(S\,l) = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V \tag{9.53}$$

Densitatea energiei câmpului magnetic este

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \tag{9.54}$$

Așadar, densitatea energiei înmagazinate în câmpul magnetic este direct proporțională cu pătratul valorii inducției câmpului magnetic și invers proporțională cu permeabilitatea magnetică a mediului.

9.7 Ecuațiile lui Maxwell

Ecuațiile care descriu cel mai bine fenomenele electromagnetice, sunt:

1. *Legea lui Gauss pentru electrostatică*

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

2. *Legea lui Gauss pentru magnetostatică*

$$\oint \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

3. *Legea lui Faraday*

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S}$$

4. *Legea lui Ampere*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{S}$$

Observații!

1. Aceste ecuații sunt aplicabile în vid. În mediile materiale dielectrice ε_0 trebuie înlocuit cu $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, iar în mediile materiale magnetice μ_0 trebuie înlocuit cu $\mu = \mu_0 \mu_r$.
2. În legea lui Ampere pe lângă densitatea curentului de conducție Maxwell a introdus și densitatea curentului de deplasare. Astfel, legea lui Ampere devine:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \vec{j}_d\right) d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E}\, d\vec{S}$$

relație ce reprezintă legea lui Ampere-Maxwell.

Maxwell a descoperit fenomenul de inducție magnetoelectrică: un câmp electric variabil generează un câmp magnetic variabil la fel cum prin inducție electromagnetică un câmp magnetic variabil generează un câmp electric variabil. Totodată, Maxwell a studiat existența undelor electromagnetice și natura electromagnetică a luminii.

Ecuațiile care arată legătura indisolubilă dintre câmpul electric $\vec{E}$ și câmpul magnetic $\vec{B}$ sunt ecuațiile lui Maxwell:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\, d\vec{S}$$

sub formă integrală, sau:

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

sub formă diferențială.

Pornind de la acest sistem de ecuații se pot obține prin calcul toate proprietățile undelor electromagnetice.

10. Unde electromagnetice

Așa cum am observat în capitolul anterior, câmpul electric și câmpul magnetic variabile în timp coexistă simultan în spațiu și se generează reciproc. Ansamblul câmpurilor electric și magnetic, care oscilează și se generează reciproc se numește *câmp electromagnetic*. Câmpurile electric și magnetic oscilează în fază în orice punct al spațiului în care se propagă.

Propagarea câmpului electromagnetic în spațiu și timp constituie o ***undă electromagnetică***. Față de undele elastice care se propagă doar în medii materiale, undele electromagnetice *se propagă atât în medii materiale cât și în vid*.

10.1 Ecuația de propagare a undelor electromagnetice

Undele armonice sau sinusoidale sunt cele mai răspândite tipuri de unde electromagnetice, ele fiind foarte asemănătoare undelor elastice.

Considerăm o undă electromagnetică armonică progresivă, ce se propagă în vid, în lungul axei Ox, ca în fig. 10.1.

În sursă oscilațiile celor două câmpuri sunt de forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin \omega t \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin \omega t \end{aligned} \qquad (10.1)$$

Astfel, după un timp unda ajunge într-un punct situat la distanța x de sursă, datorită vitezei de propagare, *c*, iar funcțiile de undă în acel punct sunt de forma:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (10.2)$$

sau conform ecuațiilor undelor elastice:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (10.3)$$

Aceste ecuații se pot rescrie și sub altă formă echivalentă:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx)$$
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx) \qquad (10.4)$$

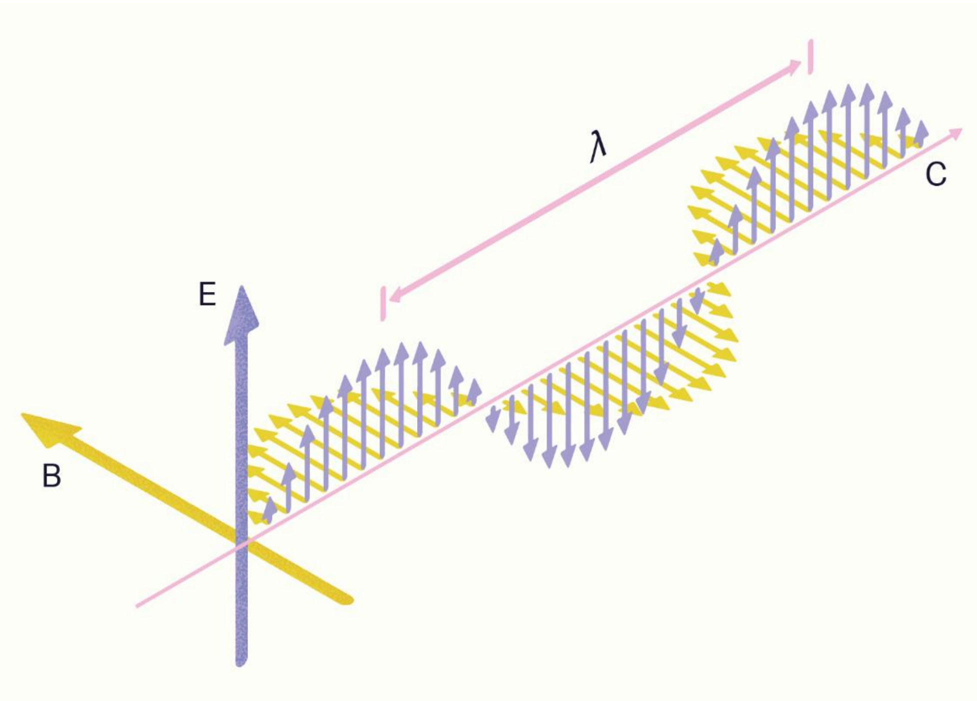


Fig. 10.1 Undă electromagnetică armonică progresivă

Ne reamintim că:

- Pulsația este legată de perioadă sau frecvență prin relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (10.5)$$

- Lungimea de undă, frecvența și viteza de propagare a undei electromagnetice, sunt legate între ele prin relația:

  $$\lambda = \frac{c}{\nu} = c \cdot \mathrm{T} \tag{10.6}$$

- Numărul de undă se definește prin relația:

  $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \tag{10.7}$$

  Acesta este un vector orientat în sensul propagării undei.

Din fig. 10.1 se poate observa că:

- vectorii intensitate câmp electric, $\vec{E}$, și inducție magnetică, $\vec{B}$, sunt perpendiculari între ei și perpendiculari pe direcția de propagare a undei.
- unda electromagnetică este liniar polarizată deoarece fiecare vector al câmpului vibrează într-o singură direcție.
- frontul de undă este plan, fiind format din planul vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$.

Pentru a stabili ecuația diferențială de propagare a undelor electromagnetice vom calcula derivatele de ordinul doi ale câmpului electric atât în raport cu spațiul cât și în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -kE_0 \cos(\omega t - kx) \quad & \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -k^2 E_0 \sin(\omega t - kx) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \omega E_0 \cos(\omega t - kx) \quad & \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{10.8}$$

Observăm că:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -E_0 \sin(\omega t - kx) \\ \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -E_0 \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{10.9}$$

adică:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{10.10}$$

Dar câmpul magnetic este descris de o relație care se obține asemănător cu cea a câmpului electric:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad (10.11)$$

Aceste relații caracteristice câmpului electric și câmpului magnetic formează ecuațiile de propagare a câmpului electromagnetic. Se observă că ele sunt similare cu ecuația diferențială a undelor mecanice.

10.2 Viteza de propagare a undelor electromagnetice

Considerăm o undă magnetică care se propagă sub formă dreptunghiulară în direcția pozitivă a axei OX:

- Vectorul $\vec{B}$ este orientat în sensul pozitiv al axei OZ.
- b este lățimea dreptunghiului pe direcția de propagare a undei care are viteza c.

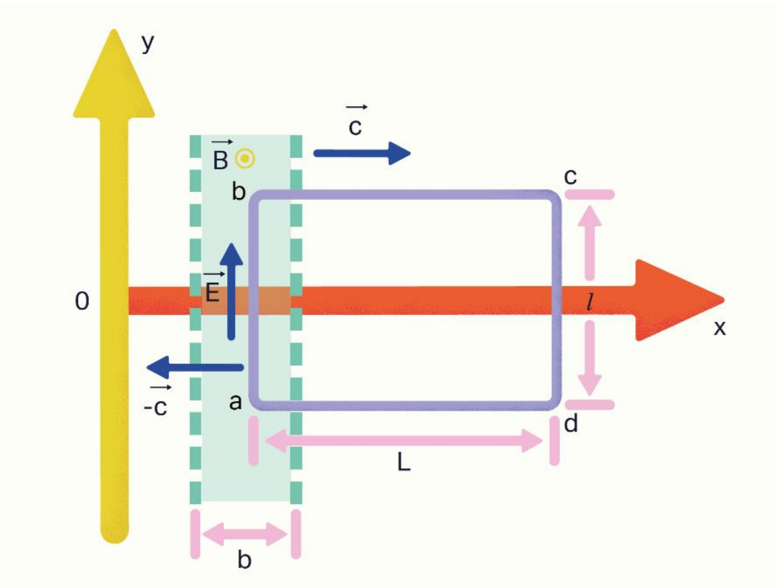


Fig. 10.2 Undă magnetică care se propagă în direcția pozitivă a axei Ox, și întâlnește un cadru conductor de mărimi L și l cunoscute

La un moment dat unda întâlnește un cadru conductor cu laturile: l paralelă cu direcția de propagare și L perpendiculară pe aceasta (fig. 10.2).

În intervalul de timp $\Delta t = \frac{b}{c}$ fluxul câmpului magnetic (normal la cadru) crește de la valoarea zero la:

$$\Phi_B = BS = Bbl \tag{10.12}$$

În acest caz, conform legii lui Faraday:

$$\int \vec{E}d\vec{l} = \left|-\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = \frac{Bbl}{\frac{b}{c}} = B \cdot l \cdot c \tag{10.13}$$

unde $\vec{E}$ este câmpul electric indus în latura l a cadrului.

$$\int \vec{E}d\vec{l} = E \cdot l \tag{10.14}$$

Luând în calcul ultimele două relații, scriem relația dintre câmpul electric și inducția magnetică:

$$E = B \cdot c \tag{10.15}$$

Variația câmpului magnetic de la zero la $\vec{B}$ determină apariția în orice punct al spațiului a unui câmp electric indus. Cadrul este necesar doar pentru a detecta câmpul.

Dacă, însă, variem fluxul câmpului electric prin cadru atunci apare un câmp magnetic, iar viteza de variație a fluxului electric este:

$$\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = \frac{Ebl}{\frac{b}{c}} = E \cdot l \cdot c \tag{10.16}$$

În acest caz, conform legii lui Ampere:

$$\int \vec{B}d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = \varepsilon_0\mu_0 E \cdot l \cdot c \tag{10.17}$$

unde $\vec{B}$ este câmpul magnetic indus în latura $l = ab$ a cadrului.

$$\int \vec{B}d\vec{l} = B \cdot l \tag{10.18}$$

Luând în calcul ultimele două relații, scriem relația dintre câmpul electric și inducția magnetică:

$$B = \varepsilon_0 \mu_0 E \cdot c \tag{10.19}$$

De unde, știind că $E = B \cdot c$ rezultă:

$$1 = \varepsilon_0 \mu_0 c^2 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{10.20}$$

Aceasta reprezintă viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii:

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.8549 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \cong 3 \cdot 10^8 m/s \tag{10.21}$$

Lumina este de natură electromagnetică și poate fi considerată ca o suprapunere de unde electromagnetice având lungimi de undă într-un anumit interval bine determinat.

Dacă propagarea undei electromagnetice are loc în alt mediu decât vidul, în loc de ε_0 și μ_0 se iau în calcul $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (permitivitatea electrică absolută a mediului) și $\mu = \mu_0 \mu_r$ (permeabilitatea magnetică absolută a mediului). Astfel, viteza undelor electromagnetice într-un mediu material:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Mărimea $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ reprezintă *indicele de refracție* al mediului.

10.3 Mărimi energetice

10.3.1 Energia undelor electromagnetice

Prin definiție, unda electromagnetică reprezintă suprapunerea oscilațiilor câmpului electric cu cele ale câmpului magnetic, care se propagă în spațiu. *Energia undei electromagnetice* este egală cu suma dintre energia înmagazinată în câmpul electric și energia înmagazinată în câmpul magnetic. Așadar, densitatea de energie înmagazinată în câmp electromagnetic este:

$$w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad (10.22)$$

Din definiția vitezei undelor electromagnetice:

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$
$$B = \frac{E}{c} \quad (10.23)$$

De unde rezultă că jumătate din energia undei electromagnetice este purtată de câmpul electric, iar jumătate de câmpul magnetic:

$$w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2}\varepsilon_0 c^2 = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (10.24)$$

Știind că volumul în care se propagă unda este dat de:

$$V = S\, l = S\,(c\,t) = Sct$$

energia totală a undei electromagnetice este:

$$W_{em} = w_{em}V = w_{em}Sct = \varepsilon_0 E^2 Sct \quad (10.25)$$

10.3.2 Intensitatea undelor electromagnetice

Energia electromagnetică ce străbate în unitatea de timp, unitatea de suprafață orientată normal la direcția de propagare a undei reprezintă intensitatea undei electromagnetice.

$$I = \frac{\frac{dW}{dt}}{S} = \frac{\frac{d(\varepsilon_0 E^2 Sct)}{dt}}{S} = \varepsilon_0 E^2 c = w_{em}c \quad (10.26)$$

Fluxul de energie electromagnetică poate fi calculat folosind *vectorul Poynting*. Astfel, *vectorul Poynting* este vectorul orientat în direcția și sensul de propagare al undelor electromagnetice și are modulul egal cu intensitatea undei:

- Direcția și sensul (fig. 10.3) este dat de produsul vectorial:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \times \vec{B} \quad (10.27)$$

- Modulul este:

$$\left|\vec{\mathcal{P}}\right| = I = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 c^2 EB \quad (10.28)$$

Știind că cele două câmpuri (electric și magnetic) sunt perpendiculare între ele $(\vec{E} \perp \vec{B})$, vectorul Poynting se poate scrie ca:

$$\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{10.29}$$

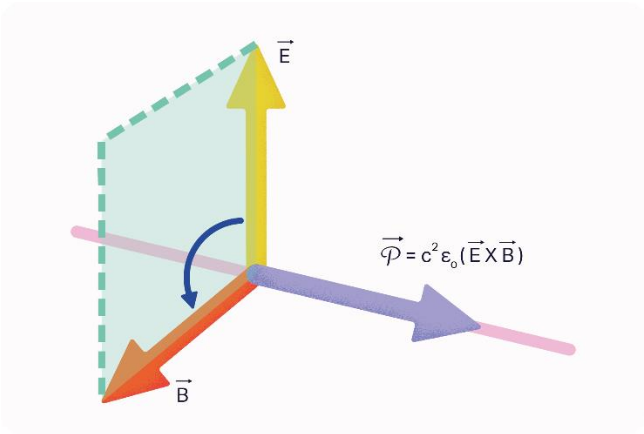


Fig. 10.3 Vectorul Poynting

10.3.3 Impulsul undelor electromagnetice

Energia și impulsul sunt mărimi dependente una de cealaltă. Undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii, deci energia și impulsul se pot exprima ținând cont de expresiile date de teoria relativității:

$$\begin{aligned} W &= m \cdot c^2 \\ p &= m \cdot c \end{aligned} \tag{10.30}$$

Așadar expresia impulsului undelor electromagnetice dn unitatea de volum exprimat funcție de densitatea de energie este de forma:

$$p = \frac{w_{em}}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{\frac{E}{B}} = \varepsilon_0 \left|\vec{E} \times \vec{B}\right| \tag{10.31}$$

Sub formă vectorială impulsul undelor electromagnetice este:

$$\vec{p} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{c^2} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{10.32}$$

Deoarece undele electromagnetice au impuls, ele exercită o presiune pe suprafețele pe care cad. Din punct de vedere experimental acest lucru a fost pus în evidență în cazul luminii.

10.4 Spectrul undelor electromagnetice

Clasificarea undelor electromagnetice se face pe baza lungimii lor de undă în vid sau după frecvența lor. Domeniul pe care se întind este extrem de larg și anume $10^{-18} \div 10^{6}\ m$. Așadar:

$$\lambda = 10^{4} \div 10^{7}\ m\ (\vartheta \approx 10^{4} \div 10^{1}\ Hz)\ instalații\ de\ putere$$

$$\lambda = 10^{-1} \div 10^{4}\ m\ (\vartheta \approx 10^{10} \div 10^{4}\ Hz)\quad radio\ și\ televiziune$$

$$\lambda = 10^{-3} \div 10^{0}\ m\ (\vartheta \approx 10^{12} \div 10^{9}\ Hz)\ \ microunde\ (radar)$$

$$\lambda = 7.8 \cdot 10^{-7} \div 10^{-3}\ m\ (\vartheta \approx 10^{15} \div 10^{12}\ Hz)\ \ infraroșu$$

$$\lambda = 3.8 \cdot 10^{-7} \div 7.8 \cdot 10^{-7}\ m\ (\vartheta \approx 10^{16} \div 10^{15}\ Hz)\quad vizibil$$

$$\lambda = 10^{-8} \div 3.8 \cdot 10^{-7}\ m\ (\vartheta \approx 10^{18} \div 10^{16}\ Hz)\ \ ultraviolete$$

$$\lambda = 10^{-13} \div 10^{-9}\ m\ (\vartheta \approx 10^{21} \div 10^{18}\ Hz)\ \ Radiații\ X$$

$$\lambda = 10^{-18} \div 10^{-12}\ m\ (\vartheta \approx 10^{26} \div 10^{19}\ Hz)\ \ Radiații\ \gamma\ și\ cosmice$$

- ***Undele radio***

În 1887 Henrich Hertz a generat şi a detectat primele unde electromagnetice. Undele obţinute de Hertz sunt astăzi clasificate ca fiind în domeniul de radiofrecvență (lungimea de undă variază de la $0.3\ m$ la câțiva km). Aceste unde sunt emise de circuitele electro-oscilante (spre exemplu, curentul alternativ de $50\ Hz$ ce trece prin cablurile de transmisie a energiei generează o undă electromagnetică cu $\lambda = \frac{c}{\vartheta} = 6 \cdot 10^{6}\ m = 6 \cdot 10^{3}\ km$). Frecvențele cele mai mici ale acestei benzi sunt utilizate în emisiile de radio și televiziune.

- ***Microundele***

Microundele sunt importante pentru comunicaţiile cu vehiculele din spaţiul cosmic şi de asemenea în radioastronomie. Microundele sunt utilizate în telefonie, pentru ghidarea avioanelor, la cuptoarele cu microunde şi pentru determinarea vitezelor (radar).

- ***Radiațiile infraroșii (IR)***

Orice material radiază și absoarbe unde IR datorită agitației termice a moleculelor sale. Moleculele oricărui obiect cu temperatura peste 0 K emit radiații IR. Această emisie se datorează tranzițiilor ce au loc între nivelele de vibrație ale moleculelor. Radiațiile infraroșii sunt emise într-un spectru continuu de corpurile calde.

Trebuie remarcat faptul că jumătate din energia emisă de Soare corespunde domeniului IR. Becurile emit mai multă radiație infraroșie decât lumină. În materialele incandescente, în filamentele metalice încălzite puternic, gradul de agitație termică este mare astfel că electronii care sunt accelerați suferă ciocniri frecvente. Rezultă o emisie numită radiație termică care este sursa principală de lumină emisă de materialele / corpurile incandescente.

Energia radiațiilor IR este măsurată cu dispozitive ce au detectoare sensibile la absorbția de radiații IR. Unele detectoare pot fi cuplate prin intermediul unui sistem de scanare la un tub catodic fapt care duce la producerea unei imagini în IR. Un astfel de aparat este cunoscut sub numele de termograf.

- ***Radiațiile vizibile***

Radiațiile vizibile sunt produse prin tranzițiile electronilor în interiorul atomilor și moleculelor. Spre exemplu, acest fenomen se produce în tuburile de descărcare (tuburi umplute cu un gaz în care se realizează o descărcare electrică, atomii se excită și emit o radiație vizibilă). Radiația emisă astfel este caracteristică diverselor nivele energetice ale speciilor atomice determinând apariția unor spectre de linii sau benzi de frecvențe bine determinate.

Newton a fost primul care a observat că lumina albă este un amestec de culori din spectrul vizibil. Culoarea reprezintă răspunsul fenomenologic și psihologic al omului la diferitele frecvențe ale spectrului vizibil Culoarea nu este o proprietate a luminii însăși ci o manifestare a sistemului nervos uman.

- ***Radiațiile ultraviolete (UV)***

Lângă spectrul radiațiilor luminoase se găsește spectrul radiațiilor ultraviolete (UV). Ochiul uman nu poate percepe undele UV deoarece corneea absoarbe în particular radiațiile cu lungimile de undă cele mai mici, iar cristalinul absoarbe puternic radiațiile cu lungimea de undă din jurul a $300\ nm$. Totuși, unele insecte (albinele) pot percepe radiațiile ultraviolete.

Atomii emit radiații ultraviolete când au loc dezexcitări ale electronilor de pe nivelele energetice cele mai înalte pe nivele energetice mai joase ale atomilor. Moleculele din atmosferă N_2, O_2, CO_2 și H_2O au rezonanțe în ultraviolet.

- ***Razele X***

Razele X au fost descoperite de W.C. Röntgen în 1895. Dintre aplicațiile practice ale acestor raze amintim: aparatele ce realizează radiografiile cu raze X, telescoapele cu raze X, microscoape cu raze X, difractometrele de raze X, etc. Datorită energiei mari pe care o transportă, razele X sunt dăunătoare pentru organismele vii.

- ***Radiațiile gama***

Radiațiile gama sunt unde electromagnetice cu frecvențele cele mai mari și cu lungimile de undă cele mai mici. Ele sunt emise în tranzițiile între nivelele energetice ale particulelor ce alcătuiesc nucleul atomic. Datorită lungimilor de undă mici este practic imposibil să se observe comportamentul ondulatoriu al acestora. Razele gama transportă energii mai mari decât razele X, având un efect destructiv asupra organismelor vii.

10.5 Polarizarea luminii

După cum am observat, deja, un segment îngust din spectrul undelor electromagnetice are proprietatea de a impresiona retina ochiului uman și este denumit radiație vizibilă (lumină). Proprietățile undelor electromagnetice, în general, sunt astfel și proprietățile undelor luminoase.

Fenomenele manifestate de undele electromagnetice (luminoase) în cursul propagării prin diferite medii sunt determinate de interacțiunea dintre câmpurile electric și magnetic ale undei electromagnetice precum și sarcinile electrice din atomi (în particular, electronii de pe straturile periferice ale acestora). Vectorul câmp electric al undei electromagnetice este cel care determină fenomenele luminoase motiv pentru care i se mai spune și: *vector luminos*.

Polarizarea este o caracteristică a tuturor undelor transversale. Lumina naturală, ca radiație electromagnetică, este o undă transversală, direcțiile de oscilație ale vectorilor câmp electric și magnetic fiind perpendiculare pe direcția de propagare a luminii. *Lumina naturală* nu conține nici o direcție privilegiată de vibrație, de aceea se numește *nepolarizată.* Dacă, anumite direcții de oscilație sunt îndepărtate, spunem că lumina este *eliptic* sau *parțial polarizată*. În cazul în care oscilațiile se efectuează pe o singură direcție spunem că lumina este *liniar* sau *total polarizată*.

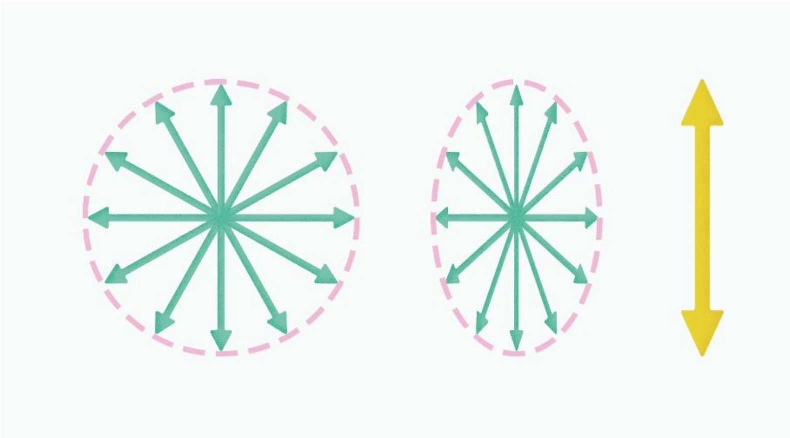


Fig. 10.4 Direcțiile de oscilație ale vectorilor câmp electric și câmp magnetic în cazul luminii: a. nepolarizată (naturală), b. eliptic polarizată (parțial polarizată), c. liniar polarizată (total polarizată),

Bibliografie

1. Alexandru Marin – *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice* http://www.hydrop.pub.ro/marindoc.htm
2. Alexandru Rusu, Spiridon Rusu, *Curs de Fizică II. Bazele fizicii moleculare și ale termodinamicii*, Editura Tehnica – UTM, Chișinău, 2014 http://fizica.utm.md/documents_pdf/2.Curs_de_Fizica_II.pdf
3. Carmen Liliana Șchiopu – *Curs de fizică generală I*, Editura MatrixRom, București, 2003
4. Cristina Cîrtoaje, Emil Petrescu – *Fizică II* – octombrie 2011 http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Emil_Petrescu,_Cristina_Cirtoaje_-_Fizica_II_(ISB)_(2011)/Fizica_II_(ISB)_(2011).pdf
5. Cristian Pîrghie – *Curs de fizica generală*, Suceava, 2010 http://ebookbrowse.com/curs-de-fizica-generala-pdf-d66473777
6. Dan Preda Ștefănescu, Cristian Velicu – *Fizica construcțiilor*, Editura Soc. Acad. "Matei-Teiu Botez", Iași, 2009
7. Daniela Buzatu, Cristina Stan – *Complemente de fizică*, Editura Bren, București, 2003
8. Dumitru Luca, Cristina Stan – *Mecanică clasică*, Editura Stef, București, 2007
9. Emil Luca, Gheorghe Zet, Corneliu Ciubotariu, Anastasia Păduraru, *Fizică generală*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981
10. Emil Petrescu, Cristina Cîrtoaje – *Termodinamică și Fizică Statistică*, 2017 http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Emil_Petrescu,_Cristina_Cirtoaje_-

_Termodinamica_si_Fizica_Statstica_2017/Termodinamica_si_Fizica_Statstica_2017.pdf

11. Eugen Culea – *Fizică – Elemente de fizică pentru ingineri*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2010
12. Floricica Barvinschi – *Curs de fizică generală*, în format electronic, pentru studenții din învățământul tehnic din Timișoara – http://www.fizica.upt.ro
13. Florin Ravigan – *Utilaje si tehnologii neconvenționale* – notițe de curs http://www.scribd.com/doc/88447097/1/Propriet%C4%83%C5%A3i-ale-ultrasunetelor
14. Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, *Fizică,* Editura didactică și pedagogică, București, 1983
15. Gabriela Mindu – *Sonoritatea spațiului arhitectural*, Editura E9 Nouă,
16. Gheorghe Cristea, Ioan Ardelean, *Elemente fundamentale de Fizică, vol. I și II*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1980 și 1985
17. Ioan Ardelean, *Fizică pentru ingineri*, Editura UTPress, 2005
18. Ion Seteanu, – *Mecanica fluidelor* http://www.hydrop.pub.ro/MF.htm
19. Iulian Florescu – *Mecanica fluidelor – note de curs pentru uzul studenților*, Editura Alma Mater, Bacău, 2007
20. Lucian Mandrea – *Mecanica fluidelor* - http://www.hydrop.pub.ro/mandreadoc.htm
21. Marcel Dragan – *Mecanica fluidelor* – manual destinat studenților de la specializarea inginerie economica industrială – an univ. 2007-2008 http://www.scribd.com/doc/47340605/Mec-fluidelor-Dragan-202010
22. Radu Fechete – *Elemente de fizică pentru ingineri*, Editura UTPress, Cluj-Napoca, 2008