

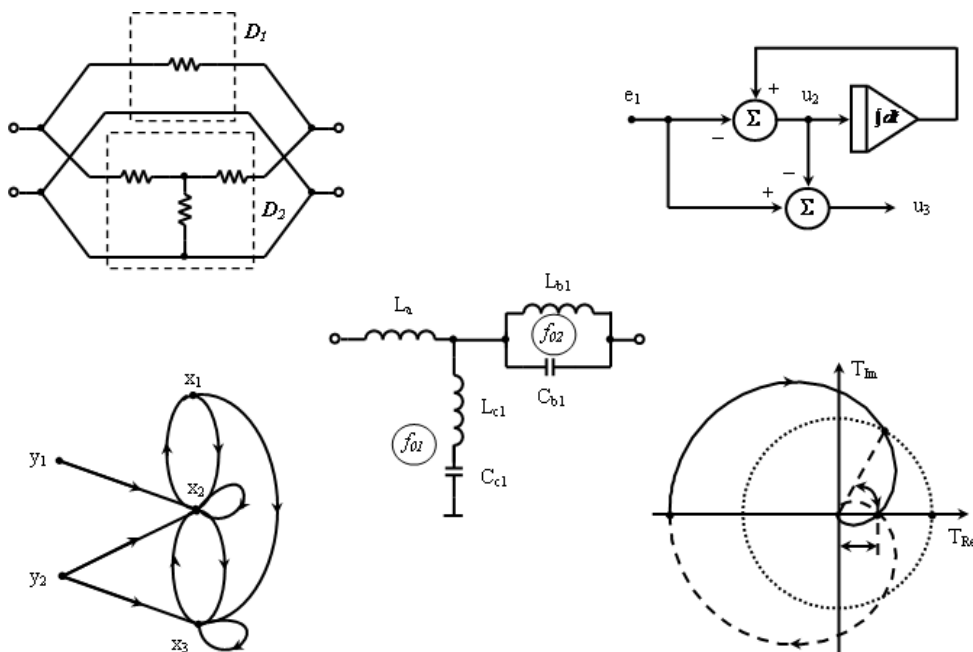
ERWIN SZOPOS

IOANA SĂRĂCUȚ

MARINA DANA ȚOPA

ANALIZA ȘI SINTEZA CIRCUITELOR

Culegere de probleme



UTPRESS
Cluj-Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-562-6

ERWIN SZOPOS

IOANA SĂRĂCUȚ

MARINA DANA ȚOPA

ANALIZA
ȘI
SINTEZA
CIRCUITELOR

Culegere de probleme



UTPRESS

Cluj - Napoca, 2022

ISBN 978-606-737-562-6



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: ing. Călin Câmpean
Pregătire format electronic: Gabriela Groza

Copyright © 2022 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-562-6

Bun de tipar: 15.02.2022

Prefață

Această culegere de probleme se adresează atât studenților din anul II ai Facultății de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației din cadrul Universității Tehnice din Cluj-Napoca, cât și celor interesați de domeniul analizei și sintezei circuitelor, fiind un material de referință.

Cele șase capitole ale culegerii prezintă aplicații ale disciplinei predate în semestrul II al anului universitar II la cursul de „*Analiza și Sinteza Circuitelor*”: „*Grafuri de semnal*”, „*Analiza stabilității sistemelor*”, „*Ecuatii de stare*”, „*Diporți*”, „*Circuite de adaptare*” și „*Filtre pasive*”.

Fiecare capitol al culegerii cuprinde trei mari părți:

- *Considerații teoretice* – conține principalele noțiuni teoretice, relații și definiții necesare rezolvării problemelor;
- *Probleme rezolvate* – conține enunțurile și modul de rezolvare a problemelor ilustrative;
- *Probleme propuse* – conține enunțurile și soluțiile finale ale problemelor opționale, iar la unele probleme sunt prezentate și rezolvările parțiale.

În speranța că această culegere de probleme va contribui la acumularea și aprofundarea cunoștințelor dobândite la cursul de „*Analiza și Sinteza Circuitelor*”, așteptăm cu interes sugestiile și observațiile cititorilor.

Autorii

Cuprins

Capitolul 1. Grafuri de semnal

1.1. Considerații teoretice.....	7
1.1.1. Transformări elementare.....	8
1.1.2. Regula lui Mason.....	9
1.2. Probleme rezolvate.....	10
1.3. Probleme propuse.....	43

Capitolul 2. Analiza stabilității sistemelor

2.1. Considerații teoretice.....	58
2.1.1. Criterii algebrice de stabilitate.....	58
2.1.2. Criterii grafo-analitice de stabilitate.....	60
2.2. Probleme rezolvate.....	62
2.3. Probleme propuse.....	98

Capitolul 3. Ecuatii de stare

3.1. Considerații teoretice.....	110
3.1.1. Determinarea ecuațiilor de stare.....	111
3.1.2. Rezolvarea ecuațiilor de stare în domeniul timp.....	112
3.1.3. Rezolvarea ecuațiilor de stare în domeniul Laplace.....	113
3.2. Probleme rezolvate.....	114
3.3. Probleme propuse.....	145

Capitolul 4. Diporți

4.1. Considerații teoretice.....	156
4.1.1. Parametrii diporților.....	156
4.1.2. Interconectarea diporților.....	161
4.2. Probleme rezolvate.....	162
4.3. Probleme propuse.....	199

Capitolul 5. Circuite de adaptare

5.1. Considerații teoretice.....	210
5.1.1. Tipuri de circuite de adaptare.....	210
5.2. Probleme rezolvate.....	215
5.3. Probleme propuse.....	247

Capitolul 6. Filtre pasive

6.1. Considerații teoretice.....	254
6.1.1. Tipuri de filtre pasive.....	255
6.2. Probleme rezolvate.....	258
6.3. Probleme propuse.....	269

Bibliografie.....	273
--------------------------	------------

1. Grafuri de semnal

1.1. Considerații teoretice

Graful de semnal (GS) este o reprezentare simplificată a unei scheme bloc sau a unui circuit electric. El este astfel un mod eficient de reprezentare și rezolvare a unui sistem de ecuații liniare. Acesta **este utilizat** pentru **reprezentarea comportamentului schemelor electrice și determinarea funcțiilor de circuit**.

Un sistem liniar de ecuații de forma:

$$x_j = \sum_k t_{kj} x_k \quad (1.1.1)$$

poate fi reprezentat printr-un graf de semnal în care:

- mărimile x_j sunt nodurile grafului de semnal;
- coeficienții t_{kj} sunt transmitanțele grafului de semnal, care sunt dispuse pe arcele (laturile) orientate de la nodul k spre nodul j .

Nodul sursă are numai laturi divergente, nodul sarcină numai laturi convergente, iar nodul mixt are atât laturi convergente cât și divergente. **Rezolvarea grafului** de semnal presupune determinarea soluției sistemului de ecuații atașat grafului. **Soluția** reprezintă **transmitanța globală T_{ij}** , care este transmitanța dintre nodul i și nodul j și corespunde unei funcții de transfer:

$$T_{ij} = \frac{x_j}{x_i}. \quad (1.1.2)$$

Transmitanțele grafului ireductibil (format din noduri sursă și noduri sarcină) sunt transmitanțele globale.

Pentru determinarea unei transmitanțe globale se pot folosi următoarele metode:

- reducerea grafului de semnal prin utilizarea transformărilor elementare (se transformă graful de semnal într-unul ireductibil);
- regula lui Mason;
- combinată, constând în transfigurări ale grafului, urmată de aplicarea regulii lui Mason.

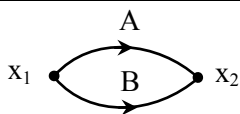
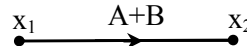
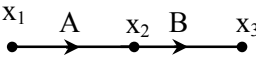
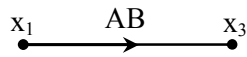
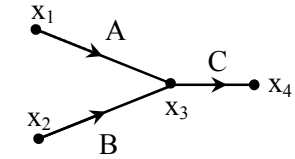
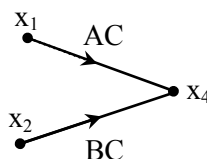
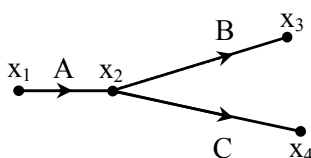
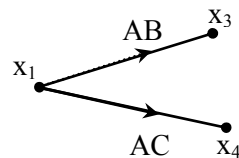
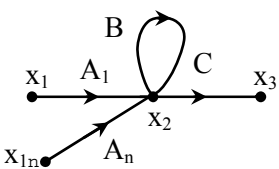
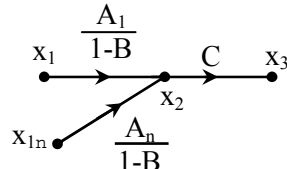
Construirea grafului de semnal se bazează pe metodele clasice de rezolvare a circuitelor electrice și cuprinde următoarele metode:

- metoda curenților ciclici;
- metoda potențialelor la noduri;
- metoda variabilelor mixte.

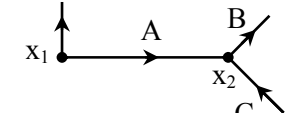
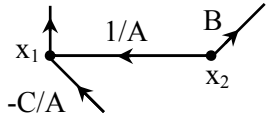
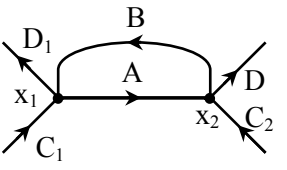
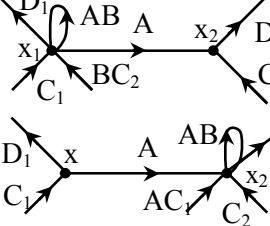
Necunoscutele unei metode formează baza. Nodurile grafului sunt mărimile din bază și variabilele de excitație.

1.1.1. Transformări elementare

În Tabelul 1.1 sunt prezentate transformările elementare ale grafului de semnal.

Structura inițială	Structura echivalentă
 <p>Laturi în paralel</p>	
 <p>Laturi în serie</p>	
 <p>Eliminarea unui nod (x_3)</p>	
 <p>Eliminarea unui nod (x_2)</p>	
 <p>Eliminarea unei bucle proprii</p>	

Tabelul 1.1. Transformări elementare uzuale

Structura inițială	Structura echivalentă
 <p>Inversarea unei laturi</p>	
 <p>Eliminarea unei bucle</p>	

Tabelul 1.1. Transformări elementare uzuale (continuare)

1.1.2. Regula lui Mason

Transmitanța globală T_{ij} poate fi calculată astfel:

$$T_{ij} = \frac{I}{\Delta} \sum_k T_k A_k \quad (1.1.3)$$

unde Δ este determinantul grafului de semnal, T_k este transmitanța căii k dintre nodul i și nodul j , iar Δ_k reprezintă determinantul subgrafului neadiacent (nu are nici laturi și nici noduri comune) căii k . Determinantul grafului se calculează ca:

$$\Delta = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \dots \quad (1.1.4)$$

unde:

P_{j1} – transmitanța buclei j de ordin I a grafului = produsul transmitanțelor laturilor buclei;

$\sum_j P_{j1}$ – suma tuturor transmitanțelor buclelor de ordinul I din graf;

P_{j2} – transmitanța buclei j de ordin II a grafului, unde o buclă de ordinul II este formată dintr-o pereche de bucle de ordinul I neadiacente = produsul transmitanțelor celor 2 bucle de ordinul I;

$\sum_j P_{j2}$ – suma tuturor transmitanțelor buclelor de ordinul II din graf;

P_{j3} – transmitanța buclei j de ordin III a grafului, unde o buclă de ordinul III este formată dintr-un triplet de bucle de ordinul I neadiacente = produsul transmitanțelor celor 3 bucle de ordinul I;

$\sum_j P_{j3}$ – suma tuturor transmitanțelor buclelor de ordinul III din graf; și așa mai departe.

Graful de semnal pot fi utilizate pentru reprezentarea și rezolvarea sistemelor continue sau discrete în timp de tip liniar și invariant. În cazul sistemelor analogice se utilizează operatorul transformatei Laplace “ s ”, iar în cazul sistemelor discontinue în timp operatorul transformatei în Z “ z ”.

1.2. Probleme rezolvate

1.2.1. Să se scrie sistemul de ecuații corespunzător grafului din Figura 1.1, unde parametrii α și β sunt reali.

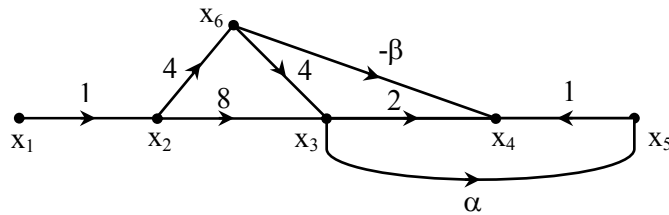


Figura 1.1 GS pentru problema 1.2.1

Rezolvare:

Se observă că nodul x_1 este nodul sursă, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 noduri intermediare. Pentru nodurile $x_2 \div x_6$ se scriu relațiile:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6 \\ x_4 = 2 \cdot x_3 + x_5 - \beta \cdot x_6 \\ x_5 = \alpha \cdot x_3 \\ x_6 = 4 \cdot x_2 \end{cases}$$

1.2.2. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} -a \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = a \cdot y \\ -b \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = b \cdot y \\ x_1 - c \cdot x_2 - d \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Să se determine graful de semnal utilizând matricea de conexiuni;

b) Să se determine cu regula lui Mason transmitanța $T = \frac{x_1}{y}$.

Rezolvare:

a) Sistemul de mai sus se poate pune sub forma matriceală:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ 1 & -c & -d \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Y} = [y].$$

Se rescrie sistemul ca:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot [\mathbf{X}; \mathbf{Y}]$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}; \mathbf{B}] = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y \\ \begin{array}{ccc|c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1+a & -1 & 0 & a \\ b & 1 & -1 & b \\ -1 & c & 1+d & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (1.2.1)$$

unde \mathbf{T} este matricea de conexiuni. Cu ajutorul matricii de conexiuni se obține graful de semnal din Figura 1.2.

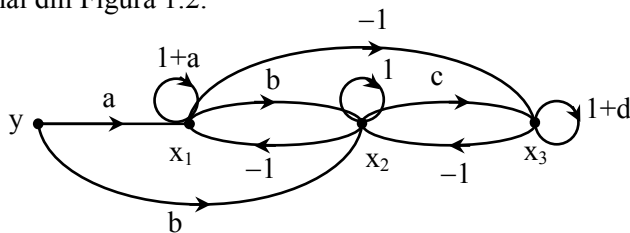


Figura 1.2. GS rezultat din sistemul (1.2.1)

b) Pentru a determina transmitanța globală din graful de semnal din Figura 1.2 se observă că:

- există două căi directe de la y la x_1 (yx_1 și yx_2x_1);
- există următoarele bucle de ordinul I: bucle proprii ale nodurilor x_1, x_2, x_3 (x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3) și buclele $x_1x_2x_1, x_2x_3x_2, x_1x_3x_2x_1$;
- există următoarele perechi de bucle neadiacente (bucle de ordin II): x_1x_1 și x_2x_2 (buclele proprii), x_2x_2 și x_3x_3 , x_1x_1 și x_3x_3 , x_1x_1 și $x_2x_3x_2$, x_3x_3 și $x_1x_2x_1$;
- există următorii tripleți de bucle neadiacente (bucle de ordin III): x_1x_1, x_2x_2 și x_3x_3 .

Cu aceste observații se poate scrie expresia:

$$T = \frac{x_1}{y} = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2}{\Delta},$$

unde:

$$T_1 = a; \quad \Delta_1 = 1 - [(-1) \cdot c + (1+d) + 1] + 1 \cdot (1+d) = c$$

$$T_2 = b \cdot (-1); \quad \Delta_2 = 1 - (1+d) = -d$$

$$\Delta = 1 - [(1+a) + 1 + (1+d) + (-1) \cdot b + (-1) \cdot c + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)] + (1+a) \cdot 1 + 1 \cdot (1+d) + (1+d) \cdot (1+a) + (1+a) \cdot (-c) + (1+d) \cdot (-b) - (1+a) \cdot 1 \cdot (1+d) = 1 - ac - bd$$

După înlocuire se obține transmitanța globală:

$$T = \frac{x_1}{y} = \frac{ac + bd}{1 - ac - bd}$$

1.2.3. Ecuatii de mai jos descriu funcționarea unui sistem:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -2y_2 \end{cases}$$

Să se determine:

- Graful de semnal utilizând matricea de conexiuni;
- Transmitanțele $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, T_{31}, T_{32}$, cu regula lui Mason, unde

$$T_{11} = \frac{x_1}{y_1}, T_{12} = \frac{x_1}{y_2}, T_{21} = \frac{x_2}{y_1}, T_{22} = \frac{x_2}{y_2}, T_{31} = \frac{x_3}{y_1}, T_{32} = \frac{x_3}{y_2}.$$

Rescrieți sistemul în funcție de aceste transmitanțe.

Rezolvare:

a) Sistemul poate fi scris sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Matricea de conexiuni **T** este:

$$T = [I_3 - A : B] = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y_1 \quad y_2 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{array} \quad (1.2.2)$$

În expresia (1.2.2) liniile punctate reprezintă legătura dintre nodurile grafului, precum și sensul laturilor. Graful de semnal este prezentat în Figura 1.3. Determinantul grafului este:

$$\Delta = 1 - [1 \cdot 3 + 2 + (-1) + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot 1] + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -2$$

b) Sistemul poate fi rescris astfel:

$$\begin{cases} x_1 = T_{11} \cdot y_1 + T_{12} \cdot y_2 = y_1 - 3 \cdot y_2 \\ x_2 = T_{21} \cdot y_1 + T_{22} \cdot y_2 = y_1 - 3 \cdot y_2 \\ x_3 = T_{31} \cdot y_1 + T_{32} \cdot y_2 = -\frac{3}{2} \cdot y_1 + \frac{3}{2} \cdot y_2 \end{cases}$$

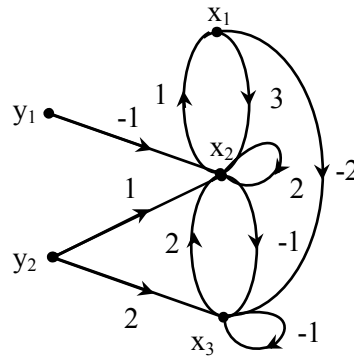


Figura 1.3. GS rezultat din (1.2.2)

unde calculul transmitanțelor globale se face conform (1.2.3).

$$\begin{cases}
T_1 = (-1) \cdot 1 = -1; \Delta_1 = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow T_{11} = \frac{T_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = 1 \\
\begin{cases}
T_2 = 1 \cdot 1; \Delta_2 = 1 - (-1) = 2 \\
T_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4; \Delta_3 = 1
\end{cases} \Rightarrow T_{12} = \frac{T_2 \cdot \Delta_2 + T_3 \cdot \Delta_3}{\Delta} = -3 \\
\begin{cases}
T_4 = -1; \Delta_4 = 1 - (-1) = 2 \\
T_5 = 1; \Delta_5 = 1 - (-1) = 2 \\
T_6 = 2 \cdot 2 = 4; \Delta_6 = 1
\end{cases} \Rightarrow T_{21} = \frac{T_4 \cdot \Delta_4}{\Delta} = 1 \\
\Rightarrow T_{22} = \frac{T_5 \cdot \Delta_5 + T_6 \cdot \Delta_6}{\Delta} = -3 \\
\begin{cases}
T_7 = (-1) \cdot (-1) = 1; \Delta_7 = 1 \\
T_8 = (-1) \cdot 1 \cdot (-2) = 2; \Delta_8 = 1
\end{cases} \Rightarrow T_{31} = \frac{T_7 \cdot \Delta_7 + T_8 \cdot \Delta_8}{\Delta} = -\frac{3}{2} \\
\begin{cases}
T_9 = 2; \Delta_9 = 1 - 2 = -1 \\
T_{10} = 1 \cdot (-1) = -1; \Delta_{10} = 1
\end{cases} \Rightarrow T_{32} = \frac{T_9 \cdot \Delta_9 + T_{10} \cdot \Delta_{10}}{\Delta} = \frac{3}{2}
\end{cases} \quad (1.2.3)$$

1.2.4. Întocmiți graful de semnal care reprezintă sistemul de ecuații algebrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$, unde \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare:

Se formează matricea de conexiuni și pe baza acesteia se obține graful de semnal din Figura 1.4.

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I}_4 - \mathbf{A} : \mathbf{B}] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

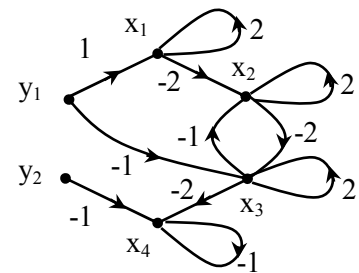


Figura 1.4. GS pentru problema 1.2.4

1.2.5. Pentru grafurile de semnal din Figura 1.5, calculați determinantul și soluția parțială x_1 .

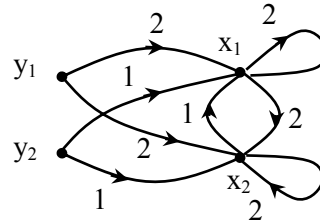


Figura 1.5. GS pentru problema 1.2.5

Rezolvare:

Din graf se observă că există 3 bucle de ordinul I, două perechi de bucle de ordinul II. Determinantul grafului este, în acest caz:

$$\Delta = 1 - (2 + 2 + 2) + 2 \cdot 2 = -1.$$

Soluția parțială x_1 este de forma:

$$x_1 = T_{11} \cdot y_1 + T_{12} \cdot y_2$$

În care T_{11} și T_{12} sunt transmitanțe globale și care se determină astfel:

$$T_{11} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2 \cdot (1 - 2) + 2}{-1} = 0$$

$$T_{12} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{1 \cdot (1 - 2) + 1}{-1} = 0$$

Prin urmare soluția parțială este $x_1 = 0$.

1.2.6. Un sistem analogic este reprezentat prin grafurile de semnal din Figura 1.6.

Să se determine transmitanța globală $T_{42} = \frac{U_2}{U_1}$.

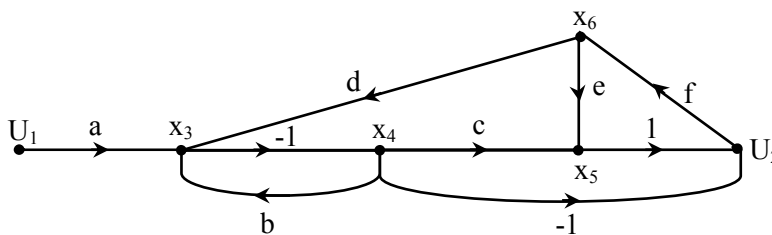


Figura 1.6. GS pentru problema 1.2.6

Rezolvare:

Pentru determinarea amplificării se va utiliza regula lui Mason (1.1.3). Se evaluează determinantul grafului cu relația (1.1.4). Există următoarele bucle individuale (de ordinul I): $x_3x_4x_3$, $x_5U_2x_6x_5$, $x_3x_4x_5U_2x_6x_3$ și $x_6x_3x_4U_2x_6$. Al doilea termen din relația (1.1.4) este suma transmitanțelor buclelor de ordinul I și este egal cu:

$$\begin{aligned}\sum_j P_{j1} &= (-1) \cdot b + 1 \cdot f \cdot e + (-1) \cdot c \cdot 1 \cdot f \cdot d + d \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot f = \\ &= -b + fe - cfd + df\end{aligned}$$

Există doar o buclă de ordinul II, adică o pereche de bucle neadiacente: $x_3x_4x_3$ și $x_5U_2x_6x_5$. Al treilea termen din relația (1.1.4) este suma produsului transmitanțelor buclelor perechi neadiacente:

$$\sum_j P_{j2} = [(-1) \cdot b] \cdot [e \cdot 1 \cdot f] = -bef.$$

Nu există tripleți de bucle neadiacente, adică bucle de ordinul III. Determinantul grafului de semnal este:

$$\Delta = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} = 1 + b - fe + cfd - df - bef$$

Pentru calculul numărătorului din formula (1.1.3), se enumerează căile directe de la nodul x_4 spre nodul sarcină U_2 : $x_4x_5U_2$ și x_4U_2 . Nici una din căi nu are subgraf neadiacent lor. Se obține:

$$T_1 = c \cdot 1 = c; \quad \Delta_1 = 1;$$

$$T_2 = -1; \quad \Delta_2 = 1;$$

$$\sum_k T_k \Delta_k = c - 1$$

Transmitanța globală T_{42} este:

$$T_{42} = \frac{c - 1}{1 + b - fe + cfd - df - bef} = \frac{c - 1}{(1 + b) \cdot (1 - ef) + (c - 1) \cdot df}.$$

1.2.7. Analizați sistemul cu schema bloc din Figura 1.7 utilizând teoria grafurilor de semnal.

- a) Trasați graful de semnal al sistemului;
- b) Utilizând formula lui Mason determinați funcția de transfer a sistemului

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

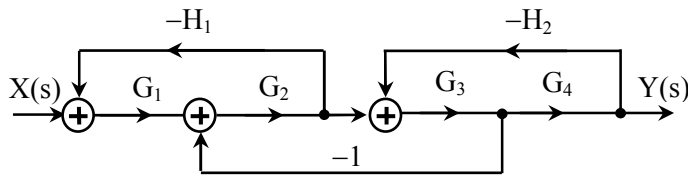


Figura 1.7. Schema bloc a sistemului din problema 1.2.7

Rezolvare:

- a) Graful de semnal este desenat în Figura 1.8.

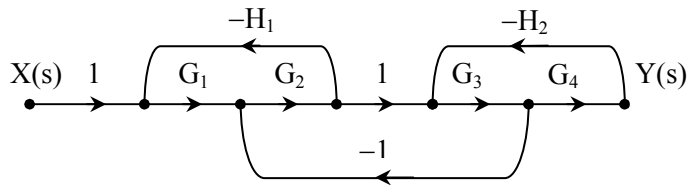


Figura 1.8. GS pentru sistemul din Figura 1.7

- b) Se utilizează expresiile (1.1.3) și (1.1.4). Graful de semnal conține trei bucle având transmitanțele: $-G_1G_2H_1$, $-G_3G_4H_2$ și $-G_2G_3$. Primele două bucle sunt neadiacente, deci formează o buclă de ordinul II. Determinantul grafului este:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-G_1G_2H_1 - G_3G_4H_2 - G_2G_3) + [(-G_1G_2H_1)(-G_3G_4H_2)] = \\ &= 1 + G_1G_2H_1 + G_3G_4H_2 + G_2G_3 + G_1G_2G_3G_4H_1H_2 \end{aligned}$$

Există o singură cale de la intrare către ieșire, având câștigul egal cu produsul $G_1G_2G_3G_4$ și care nu are nici un subgraf complementar (neadiacent).

Aplicând formula lui Mason, obținem:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2}$$

- 1.2.8.** Un sistem electronic este reprezentat prin graful de semnal din Figura 1.9. Să se determine funcția de transfer $H(s) = Y(s)/X(s)$ a acestui sistem.

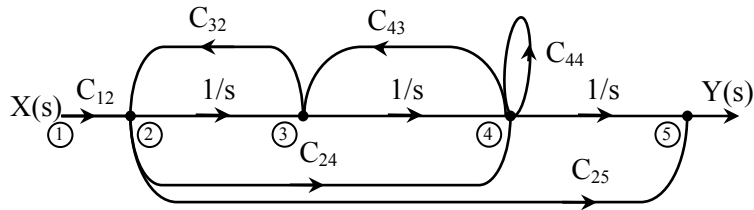


Figura 1.9. GS pentru problema 1.2.8

Rezolvare:

Se utilizează regula lui Mason. Graful de semnal are 4 bucle de ordinul I, din care 2 sunt neadiacente. Determinantul grafului este:

$$\Delta = 1 - \left(\frac{C_{32}}{s} + \frac{C_{43}}{s} + C_{44} + C_{32}C_{43}C_{24} \right) + \frac{C_{32}C_{44}}{s}$$

Graful considerat are 3 căi de la $X(s)$ la $Y(s)$. Funcția de transfer are expresia:

$$H(s) = \frac{\frac{C_{12}}{s^3} + \frac{C_{12}C_{24}}{s} + C_{12}C_{25} \cdot \left(1 - C_{44} - \frac{C_{43}}{s} \right)}{\Delta}$$

- 1.2.9.** Deduceți un graf de semnal pentru sistemul discret cu funcția de transfer din (1.2.4).

$$H(z) = \frac{1 + 3.5z^{-1} + 3.45z^{-2} + 0.675z^{-3}}{1 - 1.75z^{-1} + 1.165z^{-2} - 0.27z^{-3}} \quad (1.2.4)$$

Utilizând formula lui Mason verificați corectitudinea grafului de semnal obținut.

Rezolvare:

Se determină zerourile și polii funcției de transfer (1.2.4) și se obține:

$$H(z) = \frac{1 + 1.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \cdot \frac{1 + 2z^{-1} + 0.45z^{-2}}{1 - 1.25z^{-1} - 0.54z^{-2}} = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (1.2.5)$$

Se alege o arhitectură în cascadă pentru schema bloc (Figura 1.10a), unde coeficienții au valorile: $q_{11} = 1.5$; $p_{11} = 0.5$; $q_{21} = 2$; $q_{22} = 0.45$; $p_{21} = 1.25$; $p_{22} = 0.54$.

Graful de semnal este reprezentat în Figura 1.10.b. Funcția de transfer poate fi calculată ca produs a două funcții de transfer: de la intrare la nodul (2) – funcția $H_1(z)$ – și de la nodul (2) la ieșire – funcția $H_2(z)$. Ambele funcții de transfer vor fi calculate cu ajutorul regulii lui Mason.

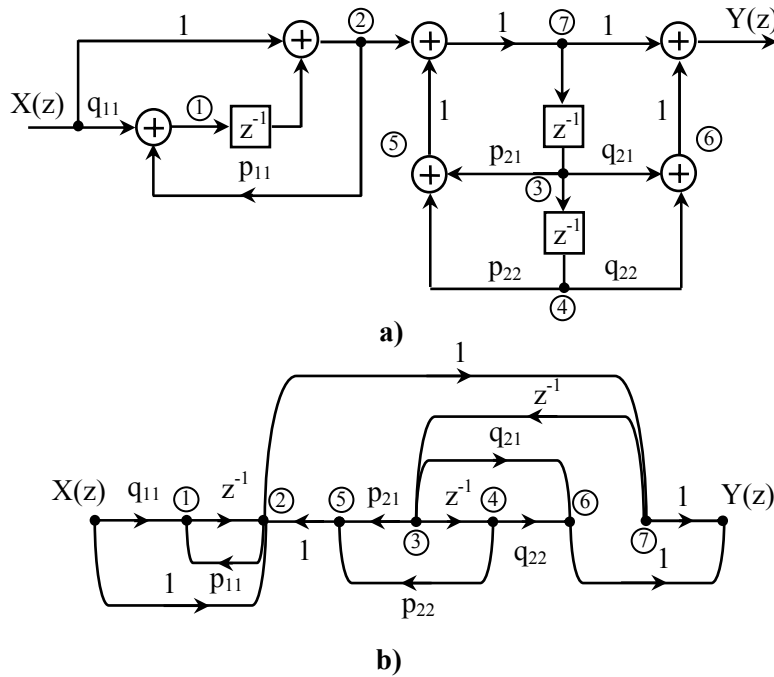


Figura 1.10. a) Schema bloc în cascadă a sistemului descris de relația (1.2.5);
 b) Graful de semnal corespunzător

De la intrare spre nodul (2) există două căi directe și o singură buclă. Se obține:

$$H_1(z) = \frac{1 + q_{11}z^{-1}}{1 - p_{11}z^{-1}} \quad (1.2.6)$$

De la nodul (2) spre ieșire există trei căi directe (2,7,Y; 2,7,3,6,Y și 2,7,3,4,6,Y) și două bucle simple (2,7,3,5,2 și 2,7,3,4,5,2). Se obține:

$$H_2 = \frac{1 + q_{21}z^{-1} + q_{22}z^{-2}}{1 - p_{21}z^{-1} - p_{22}z^{-2}} \quad (1.2.7)$$

Corectitudinea se verifică multiplicând relațiile (1.2.6) și (1.2.7) ce rezultă din graful de semnal (Figura 1.10b).

1.2.10. Să se traseze graful de semnal pentru circuitul din Figura 1.11 și să se determine raportul $A_U = \frac{U_2}{U_1}$.

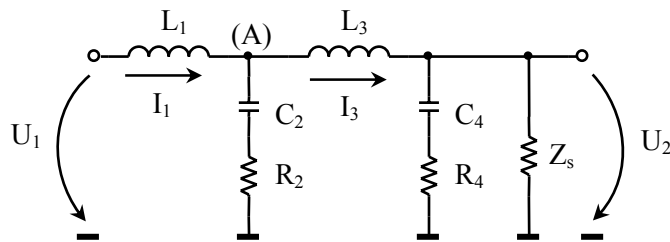


Figura 1.11 Circuit pasiv

Rezolvare:

Notăm:

$$Z_1 = sL_1; \quad Y_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2} + R_2; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2};$$

$$Z_3 = sL_3; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}; \quad Z_4 = \frac{1}{sC_4} + R_4; \quad Y_4 = \frac{1}{Z_4}; \quad Y_S = \frac{1}{Z_S}.$$

Metoda 1: Pentru circuitul din Figura 1.11 se scriu teoremele lui Kirchoff:

$$\begin{cases} U_1 = Z_1 \cdot I_1 + Z_2 \cdot (I_1 - I_3) \\ Z_2 \cdot (I_1 - I_3) = Z_3 \cdot I_3 + U_2 \\ U_2 = Z_4 \cdot \left(I_3 - \frac{U_2}{Z_S} \right) \end{cases}$$

Se transcriu ecuațiile sub forma:

$$\begin{cases} I_3 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \cdot I_1 - \frac{1}{Z_2} \cdot U_1 \\ I_1 = \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2} \right) \cdot I_3 + \frac{1}{Z_2} \cdot U_2 \\ U_2 = \frac{Z_4 Z_S}{Z_4 + Z_S} \cdot I_3 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Conform sistemului (1.2.8) se obține graful de semnal din Figura 1.12a. Prin eliminarea nodului I_1 se obține graful din Figura 1.12b. Se elimină bucla proprie și se obține graful din Figura 1.12c, unde :

$$T_1 = \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2} \right) \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \quad (1.2.9)$$

În continuare se elimină nodul I_3 (Figura 1.12c), apoi bucla proprie (Figura 1.12d). Prin aplicarea formulei lui Mason pentru graful de semnal din Figura 1.12a se obține:

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-\frac{1}{Z_2 \cdot (1 - T_1)} \cdot \frac{Z_4 Z_S}{Z_4 + Z_S}}{1 - \frac{1}{Z_2 \cdot (1 - T_1)} \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \cdot \frac{Z_4 Z_S}{Z_4 + Z_S}}$$

Se înlocuiește T_1 din (1.2.9) și se obține:

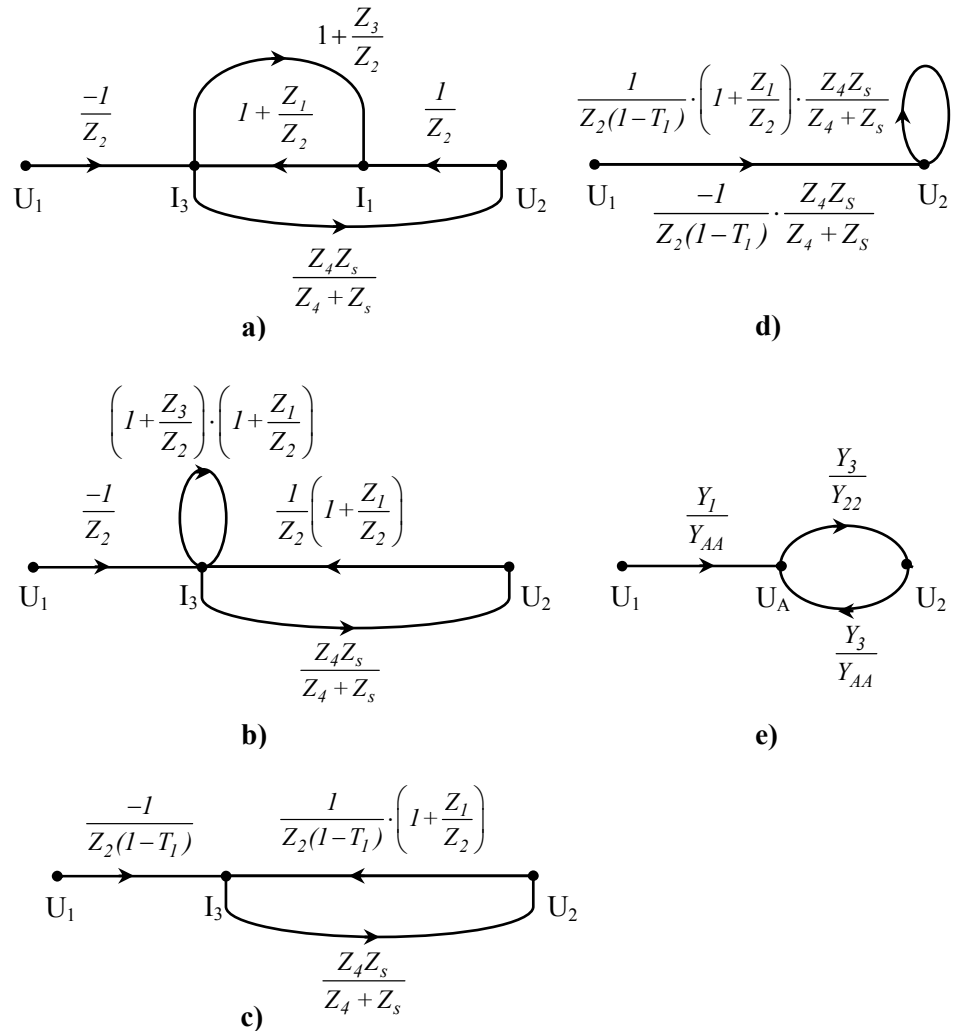


Figura 1.12. Graful de semnal corespunzător rezolvării circuitului din Figura 1.11

$$A_U = \frac{-\frac{1}{Z_2} \cdot \frac{Z_4 Z_s}{Z_4 + Z_s}}{1 - \left[\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) + \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot \frac{Z_4 Z_s}{Z_4 + Z_s} \right]}$$

Metoda 2: Se rezolvă circuitul prin metoda potențialelor la noduri, unde admitanțele proprii nodurilor (A) și (2) sunt:

$$Y_{AA} = Y_1 + Y_2 + Y_3; \quad Y_{22} = Y_3 + Y_4 + Y_5.$$

Se obține astfel graful din Figura 1.12e. Conform regulii lui Mason din graful de semnal (Figura 1.12e) se obține:

$$A_U = \frac{\frac{Y_1}{Y_{AA}} \cdot \frac{Y_3}{Y_{22}}}{1 - \frac{Y_3}{Y_{AA}} \cdot \frac{Y_3}{Y_{22}}} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5}$$

iar după înlocuirea admitanțelor Y_i se obține rezultatul final al problemei:

$$A_U = \frac{(C_2 R_2 s + I) \cdot (C_4 R_4 s + I) \cdot Z_S}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$\begin{cases} a_4 = C_2 C_4 L_1 L_3 R_4 + C_2 C_4 L_1 L_3 Z_S; \\ a_3 = C_2 L_1 L_3 + C_2 C_4 L_1 R_2 R_4 + C_2 C_4 L_3 R_2 R_4 + C_2 C_4 L_1 R_2 Z_S + \\ \quad + C_2 C_4 L_3 R_2 Z_S + C_2 C_4 L_1 R_4 Z_S; \\ a_2 = C_2 L_1 R_2 + C_2 L_3 R_2 + C_4 L_1 R_4 + C_4 L_3 R_4 + C_2 L_1 Z_S + C_4 L_1 Z_S + \\ \quad + C_4 L_3 Z_S + C_2 C_4 R_2 R_4 Z_S; \\ a_1 = L_1 + L_3 + C_2 R_2 Z_S + C_4 R_4 Z_S; \\ a_0 = Z_S \end{cases}$$

1.2.11. Se consideră circuitul unui stabilizator cu element de reglare paralel (Figura 1.13a). Se cunosc valorile rezistențelor R_1, R_2, R, r , parametrii hibridi ai tranzistorului r_{BE}, β (sau h_{11e}, h_{21e}), și rezistența diodei Zener R_z .

- Să se traseze graful de semnal al curenților de buclă;
- Să se determine pe baza grafului de semnal admitanța de transfer $Y_0 = I_0 / E$.

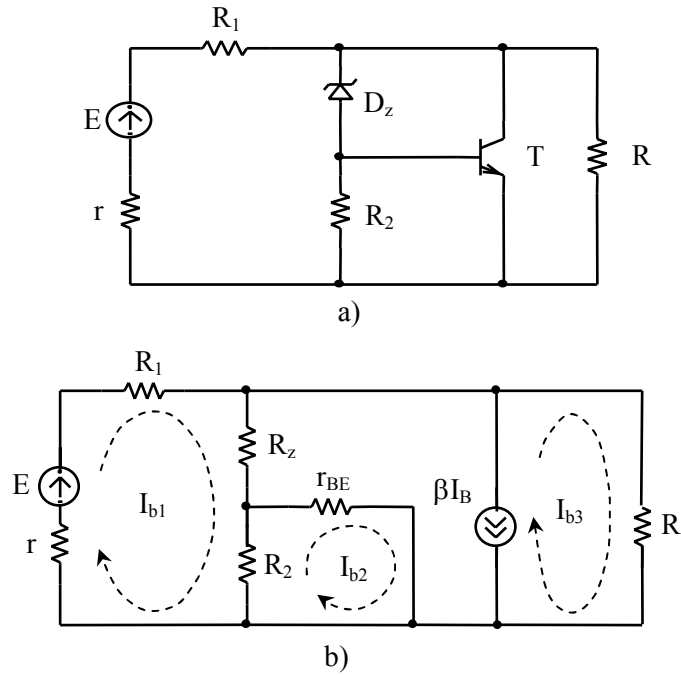


Figura 1.13 a) Stabilizator de tensiune cu element de reglare paralel;
b) schema echivalentă și curenții de buclă asociați

Rezolvare:

- a) Se consideră schema echivalentă a circuitului în Figura 1.13b. Deoarece există 6 laturi și 4 noduri se consideră trei curenți de buclă ($6-4+1$) I_{b1} , I_{b2} , I_{b3} potrivit celor 3 bucle din circuit. Curentul I_{b3} este dat de o sursă de curent comandată și este egal cu βI_B , unde curentul de bază I_B este egal cu I_{b2} . Ecuațiile circuitului se scriu sub următoarea formă:

$$\begin{cases} Z_{11}I_{b1} + Z_{12}I_{b2} + Z_{13}I_{b3} = E_{b1} \\ Z_{21}I_{b1} + Z_{22}I_{b2} + Z_{23}I_{b3} = E_{b2} \\ I_{b3} = \beta I_{b2} \end{cases} \quad (1.2.10)$$

unde impedanțele și tensiunile electromotoare ale buclelor sunt:

$$\begin{cases} Z_{11} = r + R_1 + R_z + R_2 \\ Z_{22} = R_2 + r_{BE}; \\ Z_{12} = Z_{21} = -R_2 \\ Z_{13} = Z_{23} = 0 \\ E_{b1} = E; E_{b2} = 0 \end{cases}$$

Se transcrie sistemul (1.2.10) sub forma (1.2.11) și se obține graful de semnal din Figura 1.14.

$$\begin{cases} I_{b1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} I_{b2} + \frac{I}{Z_{11}} E \\ I_{b2} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}} I_{b1} \\ I_{b3} = \beta I_{b2} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

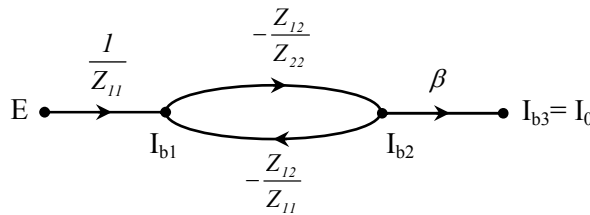


Figura 1.14. GS asociat schemei echivalente din Figura 1.13b

- b) Se observă că $I_0 = I_{b3}$. Admitanța de transfer $Y_0 = \frac{I_0}{E}$ se poate determina cu ajutorul formulei lui Mason aplicate grafului de semnal din Figura 1.14:

$$Y_0 = \frac{\frac{I}{Z_{11}} \cdot \left(-\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right) \cdot \beta}{1 - \left(-\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right) \cdot \left(-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}\right)} = \frac{\beta \cdot R_2}{r_{BE} \cdot (r + R_1 + R_z + R_2) + R_2 \cdot (r + R_1 + R_z)}$$

1.2.12. Pentru circuitul din Figura 1.15 să se determine graful de semnal în baza potențiale la noduri și funcția de circuit $T_{12} = \frac{V_2}{V_1}$ utilizând regula lui Mason.

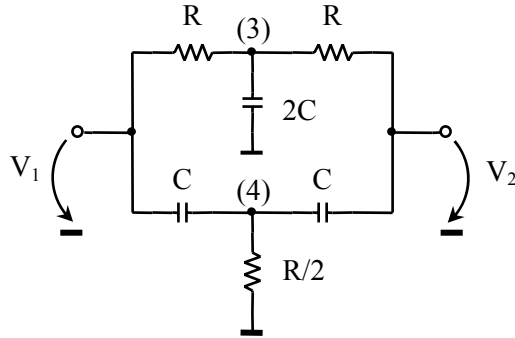


Figura 1.15. Circuit în dublu T

Rezolvare:

Se aplică teorema lui Millman în nodurile circuitului și se obțin relațiile:

$$\begin{cases} V_3 = \frac{G \cdot V_1 + G \cdot V_2}{2G + 2sC} \\ V_4 = \frac{sC \cdot V_1 + sC \cdot V_2}{2G + 2sC} \\ V_2 = \frac{G \cdot V_3 + sC \cdot V_4}{G + sC} \end{cases} \quad (1.2.12)$$

unde $G = \frac{1}{R}$. Din sistemul (1.2.12) se poate trasa graful în baza potențiale la noduri (Figura 1.16), unde s-au folosit notațiile:

$$\begin{aligned} t_1 = t_2 &= \frac{G}{2G + 2sC} = \frac{1}{2 + 2sRC} \\ t_3 = t_4 &= \frac{sC}{2G + 2sC} = \frac{sRC}{2 + 2sRC} \\ t_5 &= \frac{G}{G + sC} = \frac{1}{1 + sRC}, \quad t_6 = \frac{sC}{G + sC} = \frac{sRC}{1 + sRC} \end{aligned}$$

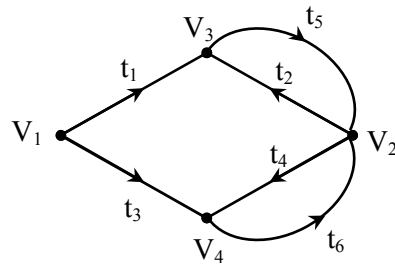


Figura 1.16. GS în baza potențiale la noduri pentru circuitul din Figura 1.15.

Aplicând regula lui Mason grafului din Figura 1.16 se obține:

$$T_{12} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{t_1 t_5 + t_3 t_6}{1 - [t_2 t_5 + t_4 t_6]}$$

Înlocuind transmitanțele cu expresiile de mai sus se obține pentru T_{12} :

$$T_{12} = \frac{s^2 R^2 C^2 + I}{s^2 R^2 C^2 + 4RCs + I} = \frac{s^2 + \frac{I}{R^2 C^2}}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{I}{R^2 C^2}} \equiv \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 4\omega_0 s + \omega_0^2}$$

unde $\omega_0 = \frac{I}{RC}$ este frecvența naturală (de rezonanță).

1.2.13. Se consideră circuitele din Figura 1.17a și b.

- a) Să se determine GS în baza potențiale la noduri și factorul de amplificare în tensiune;
- b) Cum se modifică GS dacă se conectează $n+1$ celule (Figura 1.17a) în cascadă?

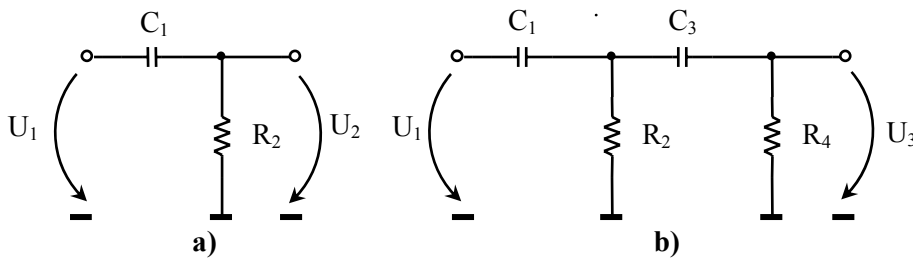


Figura 1.17 a) Celulă RC; b) Două celule RC în cascadă

Rezolvare:

- a) Se consideră circuitul din Figura 1.17a. Se aplică teorema lui Millman pentru nodul U_2 :

$$U_2 = \frac{sC_1 \cdot U_1}{sC_1 + G_2} = t_1 \cdot U_1$$

unde $G_2 = \frac{I}{R_2}$, $t_1 = \frac{U_2}{U_1}$

Această relație este reprezentată de graful de semnal din Figura 1.18a.

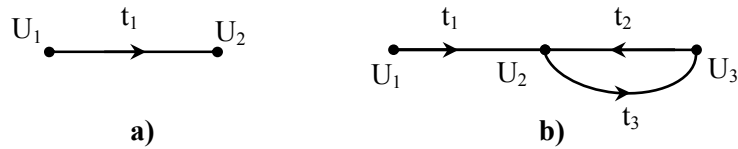


Figura 1.18. a) *GS* pentru celula *RC*; b) *GS* pentru două celule *RC* cascade

Se consideră două celule *RC* în cascadă (Figura 3.17b).

$$\begin{cases} U_2 = \frac{sC_1 U_1 + sC_3 U_3}{sC_1 + sC_3 + G_2} \\ U_3 = \frac{sC_3 U_2}{sC_3 + G_4} \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Notăm: $Y_1 = s \cdot (C_1 + C_3) + G_2$, $Y_2 = sC_3 + G_4$, $t_1 = \frac{sC_1}{Y_1}$, $t_2 = \frac{sC_3}{Y_1}$, $t_3 = \frac{sC_3}{Y_2}$.

Sistemul (1.2.13) devine:

$$\begin{cases} U_2 = t_1 \cdot U_1 + t_2 \cdot U_3 \\ U_3 = t_3 \cdot U_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{t_1 t_3}{1 - t_2 t_3} \quad (1.2.14)$$

GS în baza potențiale la noduri descris de sistemul (1.2.14) este reprezentat în Figura 1.18b.

- b) Dacă avem mai multe celule în cascadă, ecuațiile circuitului scrise cu teorema lui Millman sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = \frac{sC_1U_1 + sC_3U_3}{sC_1 + sC_3 + G_2} \\ U_3 = \frac{sC_3U_2 + sC_5U_4}{sC_3 + sC_5 + G_4} \\ \vdots \\ U_{i+1} = \frac{sC_{2i-1}U_i + sC_{2i+1}U_{i+2}}{sC_{2i-1} + sC_{2i+1} + G_{2i}}, \quad i = \overline{1, n-1} \\ \vdots \\ U_{n+1} = \frac{sC_nU_n}{sC_n + G_{n+1}} \end{array} \right. \quad (1.2.15)$$

Graful de semnal în baza potențiale la noduri descris de sistemul (1.2.15) este desenat în Figura 1.19.

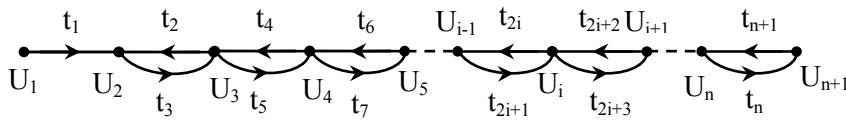


Figura 1.19. GS în baza potențiale la noduri pentru $n+1$ celule RC legate în cascadă

1.2.14. Se consideră circuitul cu amplificator operațional (AO) ideal din Figura 1.20.

- a) Să se traseze graful de semnal în baza potențiale la noduri;
- b) Utilizând regula lui Mason să se determine factorul de amplificare V_0/V_i .

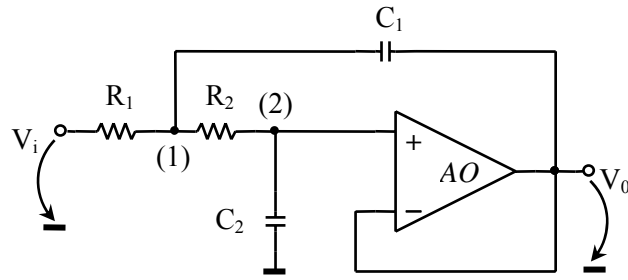


Figura 1.20. Filtru activ Sallen-Key

Rezolvare:

- a) Se scriu ecuațiile circuitului în baza potențiale la noduri (1.2.16). Amplificatorul operațional este conectat ca repetor neinvertor.

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{R_1 Y_{11}} \cdot V_i + \frac{1}{R_2 Y_{11}} \cdot V_2 + \frac{sC_1}{Y_{11}} \cdot V_0 \\ V_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + sC_2} \cdot V_1 \\ V_0 = V_2 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

unde $Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1$. Conform acestor ecuații se trasează graful de semnal din Figura 1.21.

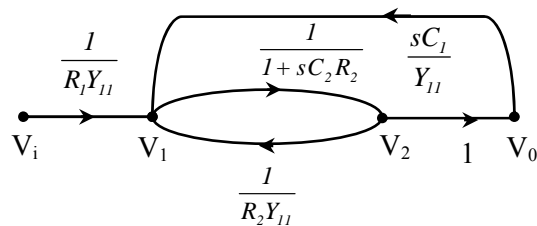


Figura 1.21. Graful de semnal corespunzător circuitului din Figura 1.20

- b) În graful din Figura 1.21 se observă că sunt 2 bucle de ordinul I și o cale de la V_i la V_0 . În aceste condiții factorul de amplificarea este egal cu:

$$T(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{\frac{I}{R_1 Y_{11}} \cdot \frac{I}{I + sC_2 R_2} \cdot I}{I - \frac{I}{R_2 Y_{11}} \cdot \frac{I}{I + sC_2 R_2} - \frac{sC_1}{Y_{11}} \cdot \frac{I}{I + sC_2 R_2}} = \frac{I}{I + sC_2 \cdot (R_1 + R_2) + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

1.2.15. Se dă circuitul din Figura 1.22.

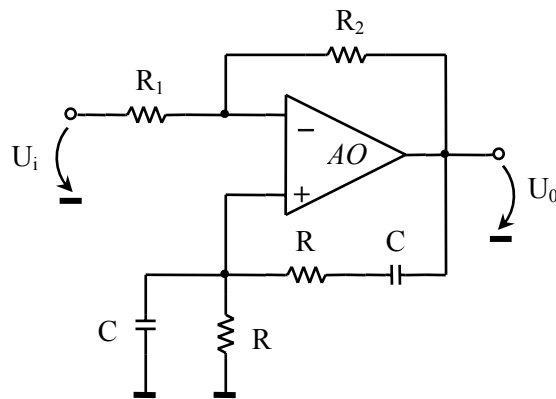


Figura 1.22. Circuit activ cu punte Wien

- Să se determine graful de semnal în baza potențiale la noduri și să se deducă funcția de circuit U_0/U_i cu regula lui Mason, considerând AO ideal;
- Cum se modifică graful și funcția de circuit U_0/U_i de la punctul a) dacă amplificatorul este real?

Rezolvare:

- Se aplică teorema lui Millman în nodurile circuitului și se obține sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} V^+ = \frac{\frac{I}{sC} + \frac{I}{G}}{sC + G + \frac{I}{sC} + \frac{I}{G}} \cdot U_0 = \frac{sCG}{(sC + G)^2 + sCG} \cdot U_0 \\ V^- = \frac{G_1 U_i + G_2 U_0}{G_1 + G_2} \\ V^+ = V^- \quad (AO \text{ ideal}) \end{array} \right.$$

Pentru a desena graful de semnal, sistemul este rescris astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \frac{s^2 C^2 + 3sCG + G^2}{sCG} \cdot V^+ \\ V^- = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot U_i + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot U_0 \\ V^+ = V^- \end{array} \right.$$

Graful de semnal este reprezentat în Figura 1.23.

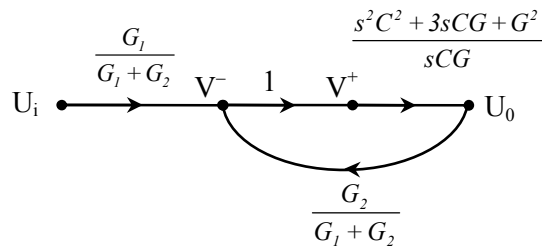


Figura 1.23. GS pentru circuitul din Figura 1.22 având AO ideal

Cu regula lui Mason se obține funcția de circuit cerută:

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{\frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{s^2 C^2 + 3sCG + G^2}{sCG}}{1 - \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{s^2 C^2 + 3sCG + G^2}{sCG}}$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{k \cdot (s^2 C^2 + 3sCG + G^2)}{s^2 C^2 + sCG \cdot (2 - k) + G^2} \equiv -k \cdot \frac{s^2 + 3\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + (2 - k)\omega_0 s + \omega_0^2}$$

unde $k = \frac{R_2}{R_1}$ este factorul de amplificare, iar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ frecvența la care amplificarea este maximă.

b) Pentru *AO* real sistemul se scrie:

$$\begin{cases} V^+ = \frac{sCG}{s^2 C^2 + 3sCG + G^2} \cdot U_0 \\ V^- = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot U_i + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot U_0, \\ U_0 = A \cdot (V^+ - V^-) \quad (AO \text{ real}) \end{cases}$$

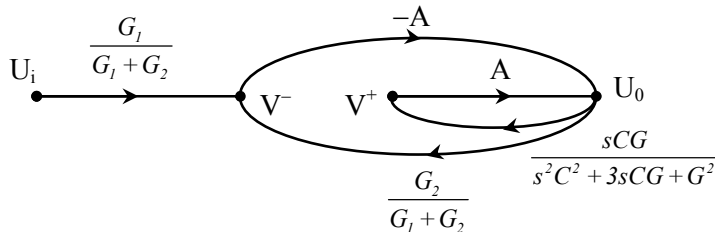


Figura 1.24. *GS* pentru circuitul din Figura 1.22 cu *AO* real

Graful de semnal este reprezentat în Figura 1.24. Funcția de transfer în acest caz (*AO* real) este:

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{-A \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2}}{1 - \frac{A \cdot sCG}{s^2C^2 + 3sCG + G^2} + \frac{A \cdot G_2}{G_1 + G_2}}$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{-k \cdot \frac{A}{1+k+A} \cdot \left(s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2} \right)}{s^2 + \frac{1}{RC} \cdot \frac{3 \cdot (1+k) + A \cdot (2-k)}{1+k+A} \cdot s + \frac{1}{R^2C^2}}$$

Se observă că, punând condiția ca AO să fie ideal ($A \rightarrow \infty$) se obține funcția de transfer de la punctul a).

1.2.16. Pentru circuitul din Figura 1.25a se cere:

- a) Graful de semnal în baza potențialelor la noduri și funcția de circuit $\frac{V_2}{I_g}$ utilizând regula lui Mason; particularizați pentru

$$Z_1 = \frac{1}{sC_1}, Z_2 = R, Z_3 = \frac{1}{sC_2}.$$

- b) Graful de semnal în bază mixtă și determinarea funcției de circuit $\frac{U_{Z3}}{I_g}$.

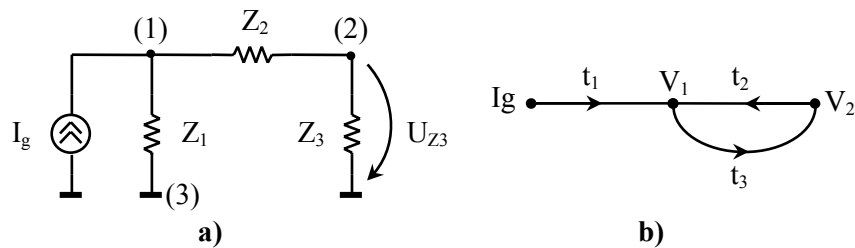


Figura 1.25. a) Circuit pasiv în II ; b) Graful de semnal în bază potențiale la noduri

Rezolvare:

- a) Se aplică teorema lui Millman în nodurile circuitului și se obține:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{I_g + Y_2 \cdot V_2}{Y_1 + Y_2} \\ V_2 = \frac{Y_2 \cdot V_1}{Y_2 + Y_3} \end{cases} \quad (1.2.17)$$

unde $Y_i = \frac{1}{Z_i}$, $i = \overline{1,3}$. Din sistemul (1.2.17) se obține GS din Figura 1.25b, în care s-au notat transmitanțele laturilor cu:

$$t_1 = \frac{1}{Y_1 + Y_2}, \quad t_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t_3 = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_3}.$$

Cu regula lui Mason se determină funcția de circuit cerută.

$$\frac{V_2}{I_g} = \frac{t_1 t_3}{1 - t_2 t_3} = \frac{Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3}$$

Pentru $Z_1 = \frac{1}{sC_1}$, $Z_2 = R$, $Z_3 = \frac{1}{sC_2}$ se obține funcția de circuit:

$$\frac{V_2}{I_g} = \frac{1}{s^2 C_1 C_2 R + s \cdot (C_1 + C_2)} = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R}}{s \cdot \left[s + \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right]}.$$

- b) Se întocmește graful topologic liniar orientat (GLO – Figura 1.26a) pentru circuitul din Figura 1.25a și se alege un arbore (vezi **Capitolul 3**). Se exprimă tensiunile pe coarde în funcție de cele de pe ramuri:

$$U_{Z_1} = U_{Z_2} + U_{Z_3} \quad (1.2.18)$$

Se exprimă curenții de ramură în funcție de cele de pe coarde:

$$\begin{cases} I_{Z_2} = I_g - I_{Z_1} \\ I_4 = I_3 = I_g - I_{Z_1} \end{cases} \quad (1.2.19)$$

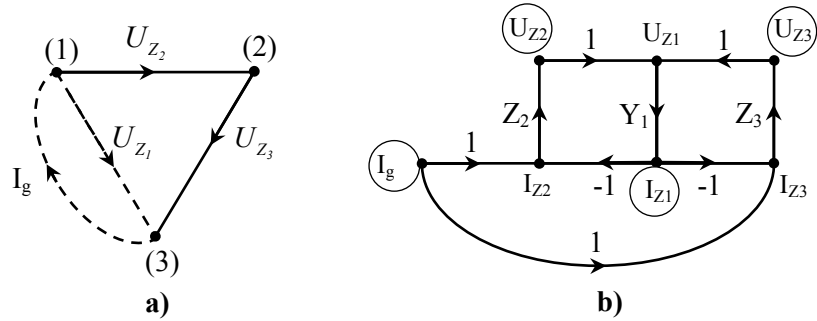


Figura 1.26. a) *GLO* pentru circuitul din Figura 1.25a;
b) *GS* cu mărimile de bază marcate

Se pun față în față grafurile obținute din (1.2.18), (1.2.19); se unesc nodurile U cu cele I exprimând legea lui Ohm pe laturi și se obține grafurile din Figura 1.26b. Mărimile încercuite din graf reprezintă mărimile de bază; celelalte mărimi se elimină prin metode elementare de reducere a grafului obținând grafurile de semnal în bază mixtă (Figura 1.27).

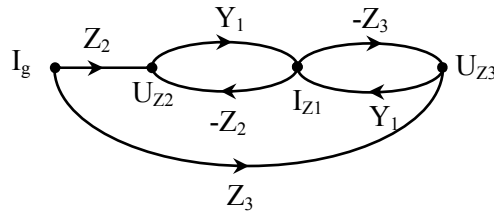


Figura 1.27. Grafurile de semnal în bază mixtă

Utilizând formula lui Mason, din acest *GS* se obține funcția de circuit:

$$\frac{U_{Z_3}}{I_g} = \frac{Z_3 \cdot (1 + Z_2 Y_1) - Z_2 Z_3 Y_1}{1 - (-Z_2 Y_1 - Z_3 Y_1)} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Pentru cazul particular $Z_1 = \frac{1}{sC_1}$, $Z_2 = R$, $Z_3 = \frac{1}{sC_2}$ se obține:

$$\frac{U_{Z_3}}{I_g} = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R}}{s \cdot \left[s + \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right]}$$

1.2.17. Fie circuitul din Figura 1.28a.

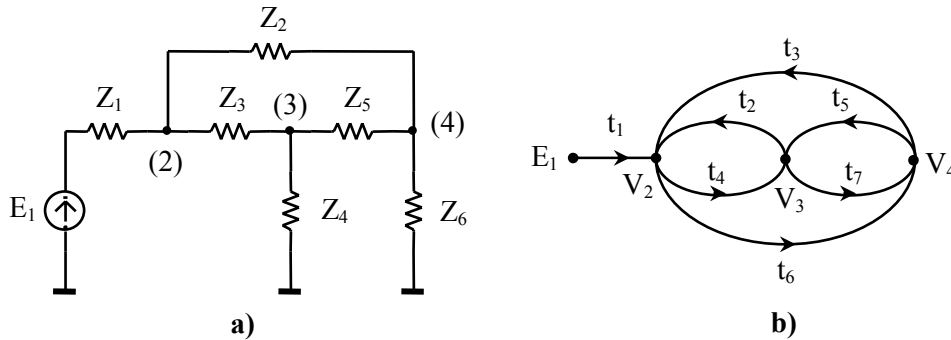


Figura 1.28. Circuit în T podit și GS asociat

- a) Să se reprezinte graful de semnal în baza potențiale la noduri și să se determine funcția amplificare $A_U = \frac{V_4}{E_1}$;
- b) Să se reprezinte graful de semnal în bază mixtă și să se determine funcția amplificare A_U ;
- c) Cum se modifică graful de la punctul b) dacă la ieșire se conectează un generator de curent I_g ?

Rezolvare:

- a) Se aplică teorema lui Millman în nodurile circuitului și se obțin relațiile:

$$\begin{cases} V_2 = \frac{Y_1 \cdot E_1 + Y_3 \cdot V_3 + Y_2 \cdot V_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\ V_3 = \frac{Y_3 \cdot V_2 + Y_5 \cdot V_4}{Y_3 + Y_4 + Y_5} \\ V_4 = \frac{Y_2 \cdot V_2 + Y_5 \cdot V_3}{Y_2 + Y_5 + Y_6} \end{cases}, \quad Y_i = \frac{1}{Z_i}, \quad i = \overline{1,6} \quad (1.2.20)$$

Din sistemul (1.2.20) se obține graful de semnal din Figura 1.28b, unde transmitanțele laturilor sunt:

$$t_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad t_2 = \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad t_3 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad t_4 = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4 + Y_5}$$

$$t_5 = \frac{Y_5}{Y_3 + Y_4 + Y_5}, \quad t_6 = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_5 + Y_6}, \quad t_7 = \frac{Y_5}{Y_2 + Y_5 + Y_6}$$

Cu ajutorul regulii lui Mason se determină funcția de amplificare în tensiune:

$$\frac{V_4}{E_1} = \frac{t_1 t_6 + t_1 t_4 t_7}{1 - t_2 t_4 - t_5 t_7 - t_3 t_6} = \frac{[Y_1 Y_2 \cdot (Y_3 + Y_4 + Y_5) + Y_1 Y_3 Y_5]}{Y_1 \cdot [Y_4 Y_5 + Y_2 \cdot (Y_3 + Y_4 + Y_5) + Y_6 \cdot (Y_4 + Y_5) + Y_3 \cdot (Y_5 + Y_6) + Y_3 \cdot [Y_5 Y_6 + Y_4 \cdot (Y_5 + Y_6)] + Y_2 \cdot [Y_5 Y_6 + Y_4 \cdot (Y_5 + Y_6) + Y_3 \cdot (Y_4 + 2Y_5 + Y_6)]]}$$

b) Graful topologic liniar orientat al circuitului este dat în Figura 1.29.

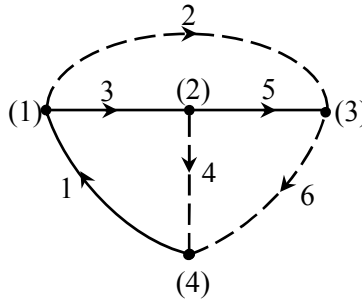


Figura 1.29. GLO pentru circuitul din Figura 1.28a

Se exprimă tensiunile pe coarde în funcție de cele de pe ramuri:

$$\begin{cases} U_2 = U_3 + U_5 \\ U_4 = -U_1 - U_3 \\ U_6 = -U_1 - U_3 - U_5 \end{cases}$$

Se exprimă curenții de ramură în funcție de cei prin coarde:

$$\begin{cases} I_1 = I_4 + I_6 \\ I_3 = I_4 + I_6 - I_2 \\ I_5 = I_6 - I_2 \end{cases}$$

Similar rezolvării **problemei 1.2.16** se determină graful din Figura 1.30a. Mărimile încercuite reprezintă mărimile de bază, celelalte mărimi se elimină prin metode elementare de reducere a grafului obținând graful de semnal în bază mixtă din Figura 1.30b.

Graful de semnal în bază mixtă (Figura 1.30b) are următoarele bucle:

simple: $U_1I_4U_1$, $I_4U_3I_4$, $U_3I_2U_3$, $I_2U_5I_2$, $U_5I_6U_5$, $U_3I_6U_3$, $U_1I_6U_1$, $U_1I_6U_3I_4U_1$ (pe calea $-Y_6$), $I_6U_1I_4U_3I_6$ (pe calea Z_1), $U_1I_6U_5I_2U_3I_4U_1$ (pe calea $-Y_6$), $I_6U_1I_4U_3I_2U_5I_6$ (pe calea Z_1);

duble: $U_1I_4U_1$ și $U_3I_2U_3$, $U_1I_4U_1$ și $I_2U_5I_2$, $U_1I_4U_1$ și $U_5I_6U_5$, $I_4U_3I_4$ și $I_2U_5I_2$ și $U_5I_6U_5$, $U_3I_2U_3$ și $U_5I_6U_5$, $U_3I_6U_3$ și $I_2U_5I_2$, $U_3I_6U_3$ și $U_1I_4U_1$, $U_1I_6U_1$ și $I_4U_3I_4$, $U_1I_6U_1$ și $U_3I_2U_3$, $U_1I_6U_1$ și $I_2U_5I_2$;

triple: $U_1I_4U_1$ și $U_3I_2U_3$ și $U_5I_6U_5$, $U_3I_6U_3$ și $I_2U_5I_2$ și $U_1I_4U_1$, $U_1I_6U_1$ și $I_4U_3I_4$ și $I_4U_3I_4$ și $I_2U_5I_2$.

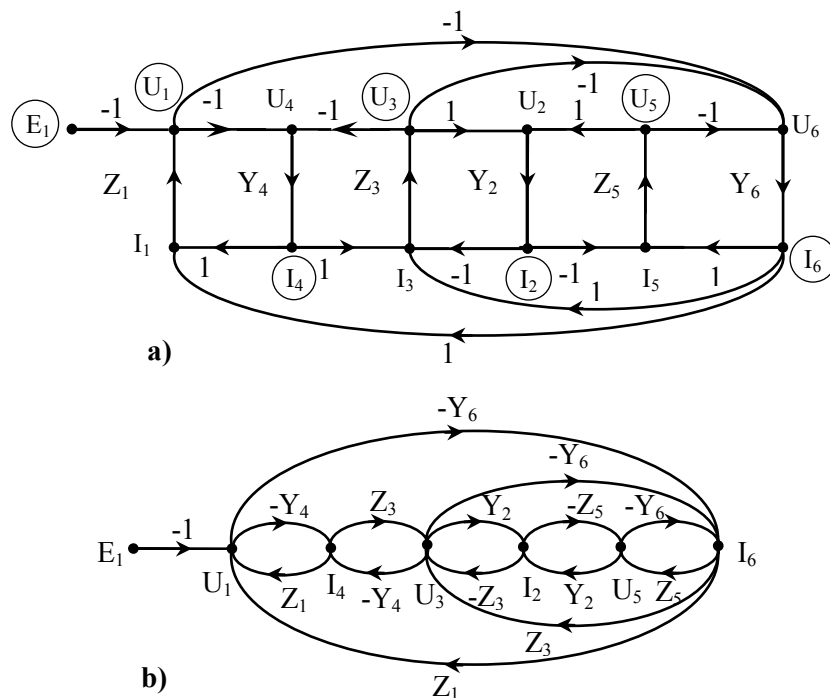


Figura 1.30. a) Graful de semnal cu nodurile din bază marcate; b) Graful de semnal în bază mixtă pentru circuitul din Figura 1.28a

Suma transmitanțelor buclelor simple este:

$$\sum_j P_{j1} = -Z_1Y_4 - Z_3Y_4 - Z_3Y_2 - Z_5Y_2 - Z_5Y_6 - Z_1Y_6 - Z_3Y_6 + 2 \cdot Z_1Z_3Y_4Y_6 + 2 \cdot Z_3Z_5Y_2Y_6 - 2 \cdot Z_1Z_3Z_5Y_2Y_4Y_6$$

Suma transmitanțelor buclelor duble este:

$$\begin{aligned} \sum_j P_{j2} = & Z_1 Z_3 Y_2 Y_4 + Z_1 Z_5 Y_2 Y_4 + Z_1 Z_5 Y_4 Y_6 + Z_3 Z_5 Y_2 Y_4 + Z_3 Z_5 Y_4 Y_6 + \\ & + Z_3 Z_5 Y_2 Y_6 + Z_3 Z_5 Y_2 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_4 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_4 Y_6 + Z_1 Z_3 Y_2 Y_6 + \\ & + Z_1 Z_5 Y_2 Y_6 \end{aligned}$$

Suma transmitanțelor buclelor triple este:

$$\sum_j P_{j3} = -3 \cdot Z_1 Z_3 Z_5 Y_2 Y_4 Y_6$$

Căile directe sunt: $E_1 U_1 I_6$, $E_1 U_1 I_4 U_3 I_6$ și $E_1 U_1 I_4 U_3 I_2 U_5 I_6$. Transmitanțele căilor directe sunt:

$$T_1 = Y_6, T_2 = -Y_4 Z_3 Y_6, T_3 = Y_4 Z_3 Y_2 Z_5 Y_6.$$

Aplicând regula lui Mason se obține funcția de circuit cerută (1.2.21).

$$\frac{I_6}{E_1} = \frac{T_1 \cdot \Delta_1 + T_2 \cdot \Delta_2 + T_3 \cdot \Delta_3}{1 - T_{simple} + T_{double} - T_{triple}} \quad (1.2.21)$$

unde $\Delta_1 = 1 - [-Y_4 Z_3 - Y_2 Z_3 - Y_2 Z_5] + Y_4 Z_3 Z_5 Y_2$, $\Delta_2 = 1 - [-Z_5 Y_2]$, $\Delta_3 = 1$ sunt determinanții subgrafului neadiacente căilor T_1 , T_2 și T_3 .

c) În cazul în care se conectează o sursă de curent I_g la ieșire obținem circuitul din Figura 1.31, iar sistemul scris pentru curenți se completează cu ecuația:

$$I_6 = I_g$$

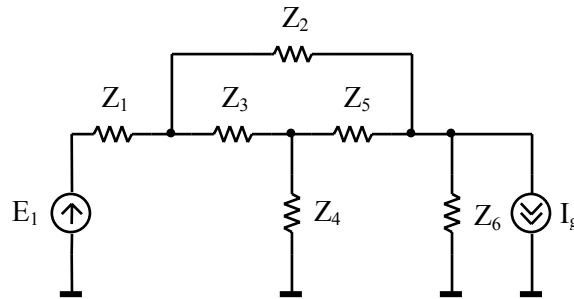


Figura 1.31. Circuit în T podit cu două surse

care duce la completarea grafului de semnal cu o latură dinspre nodul notat I_g spre nodul I_6 cu transmitanța 1 , restul grafului rămâne nemodificat.

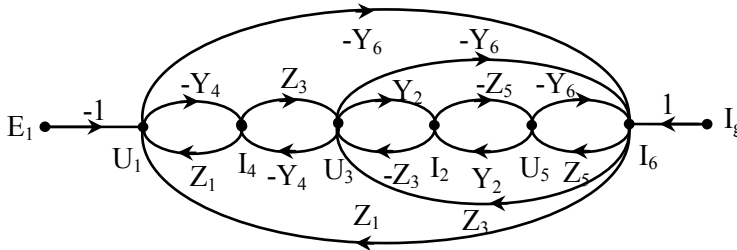


Figura 1.32. GS în bază mixtă pentru circuitul din Figura 1.31

1.2.18. Se consideră circuitul din Figura 1.33. Să se reprezinte graful de semnal în baza potențiale la noduri și utilizând regula lui Mason să se determine funcțiile de circuit $\frac{U_{R4}(s)}{V_1(s)}$ și $\frac{I_L(s)}{V_1(s)}$.

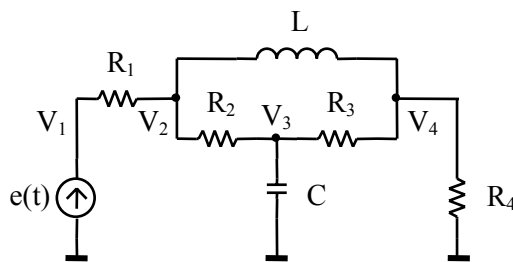


Figura 1.33. Circuitul pentru problema 1.2.18

Rezolvare:

Se aplică teorema lui Millman în nodurile circuitului și se obține sistemul:

$$\begin{cases} V_2 = \frac{G_1 \cdot V_1 + G_2 \cdot V_3 + \frac{I}{sL} \cdot V_4}{G_1 + G_2 + \frac{I}{sL}} \\ V_3 = \frac{G_2 \cdot V_2 + G_3 \cdot V_4}{G_2 + G_3 + sC} \\ V_4 = \frac{\frac{I}{sL} \cdot V_2 + G_3 \cdot V_3}{\frac{I}{sL} + G_3 + G_4} \end{cases}$$

Din acest sistem se obține graful de semnal din Figura 1.34.

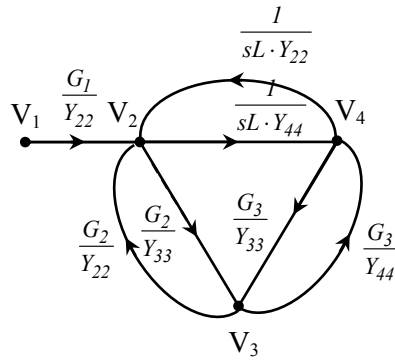


Figura 1.34. GS în baza potențiale la noduri pentru circuitul din Figura 1.33

Admitanțele proprii nodurilor sunt:

$$Y_{22} = G_1 + G_2 + \frac{I}{sL}, \quad Y_{33} = G_2 + G_3 + sC, \quad Y_{44} = G_3 + G_4 + \frac{I}{sL} \quad (1.2.22)$$

Se determină funcțiile de circuit cerute:

$$\frac{U_{R4}(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{G_1}{sL \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_1 G_2 G_3}{Y_{22} Y_{33} Y_{44}}}{I - \left(\frac{I}{s^2 L^2 \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{G_3^2}{Y_{33} Y_{44}} + 2 \cdot \frac{G_2 G_3}{sL \cdot Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right)} \quad (1.2.23)$$

$$\frac{I_L(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{V_2(s) - V_4(s)}{sL}}{V_1(s)} = \frac{I}{sL} \cdot \left(\frac{V_2(s)}{V_1(s)} - \frac{V_4(s)}{V_1(s)} \right) \quad (1.2.24)$$

Se observă că în GS (Figura 1.34) nu apar curenți ca noduri ci doar potențiale la noduri. În acest caz, pentru a determina raportul dintre un curent și un potențial se determină, mai întâi, raportul între cele două potențiale de interes, apoi, se aplică legea lui Ohm pe componenta considerată mărime de ieșire (L). Adică, raportul dintre două potențiale de interes se împarte cu impedanța componente (sau a laturii) de interes.

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{G_1}{Y_{22}}}{I - \left(\frac{I}{s^2 L^2 \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{G_3^2}{Y_{33} Y_{44}} + 2 \cdot \frac{G_2 G_3}{sL \cdot Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right)} \quad (1.2.25)$$

Al doilea raport din (1.2.24) este tocmai raportul (1.2.23). Prin urmare, pentru a obține $I_L(s)/V_1(s)$ se scad expresiile (1.2.25) și (1.2.23), iar rezultatul se împarte cu sL .

$$\frac{I_L(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{I}{sL} \cdot \left[\frac{G_1}{Y_{22}} - \left(\frac{G_1}{sL \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_1 G_2 G_3}{Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right) \right]}{I - \left(\frac{I}{s^2 L^2 \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{G_3^2}{Y_{33} Y_{44}} + 2 \cdot \frac{G_2 G_3}{sL \cdot Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right)} \quad (1.2.26)$$

1.3. Probleme propuse

1.3.1. Întocmiți graful de semnal care reprezintă sistemul de ecuații algebrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$, unde \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Soluție: Vezi Figura 1.35a.

1.3.2. Pentru graful de semnal din Figura 1.35b, calculați determinantul și soluția parțială x_2 .

Soluție:

$$\Delta = -1, x_2 = -2y_1 - y_2$$

1.3.3. Pentru graful de semnal din Figura 1.35c, calculați determinantul și soluția parțială x_1 .

Soluție:

$$\Delta = -2, x_1 = y_1 + y_2$$

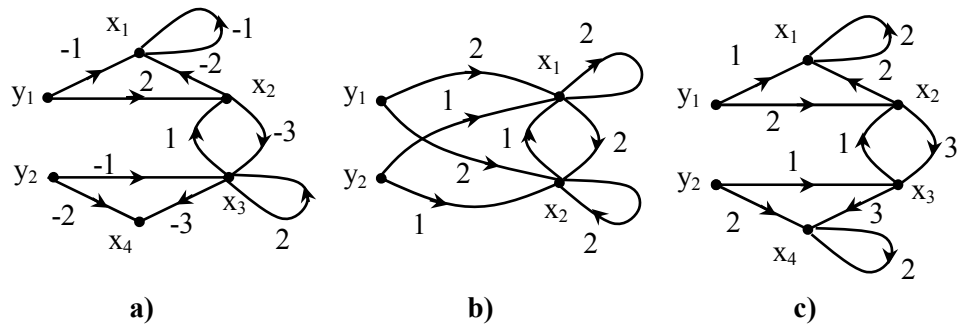


Figura 1.35. a) Soluția problemei 1.3.1; b) Soluția problemei 1.3.2; c) Soluția problemei 1.3.3

1.3.4. Pentru graful de semnal din Figura 1.36, calculați determinantul și soluția parțială x_4 .

Soluție:

$$\Delta = -2, x_4 = -3y_1 + 1.5y_2$$

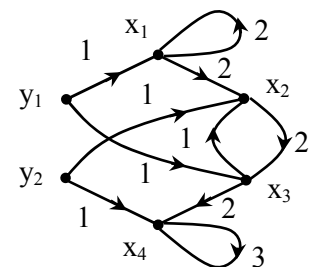


Figura 1.36. GS pentru problema 1.3.4

1.3.5. Determinați funcția de transfer a sistemului cu GS din Figura 1.37.

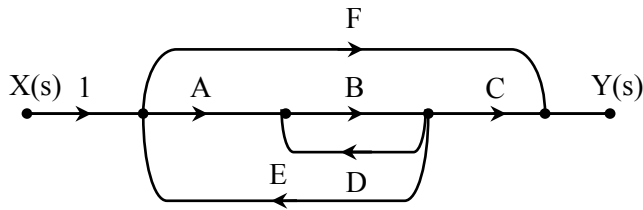


Figura 1.37. GS pentru problema 1.3.5

Soluție:
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ABC + F \cdot (1 - BD)}{1 - (BD + ABE)}$$

1.3.6. Determinați funcția de transfer a sistemului din Figura 1.38.

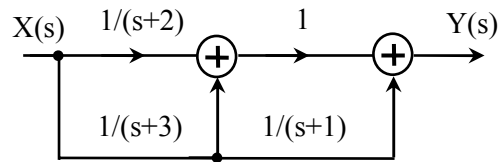


Figura 1.38. Schema bloc a unui sistem analogic

Soluție:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 7}{(s + 1) \cdot (s + 2) \cdot (s + 3)}$$

1.3.7. Determinați funcțiile de transfer ale sistemului din Figura 1.39 utilizând regula lui Mason. Se vor considera ca ieșiri ale sistemului: $Y_1(s)$, $Y_2(s)$, $Y_3(s)$.

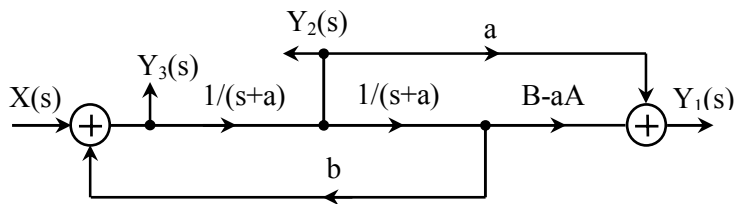


Figura 1.39. Schema bloc a unui sistem analogic

Soluție:

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{a \cdot s + a^2 - aA + B}{s^2 + 2as + a^2 - b}$$

$$H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X(s)} = \frac{s + a}{s^2 + 2as + a^2 - b}$$

$$H_3(s) = \frac{Y_3(s)}{X(s)} = \frac{(s + a)^2}{s^2 + 2as + a^2 - b}$$

1.3.8. Se consideră graful de semnal din Figura 1.40. Să se determine transmitanța globală între nodurile V_1 și V_5 , folosind regula lui Mason.

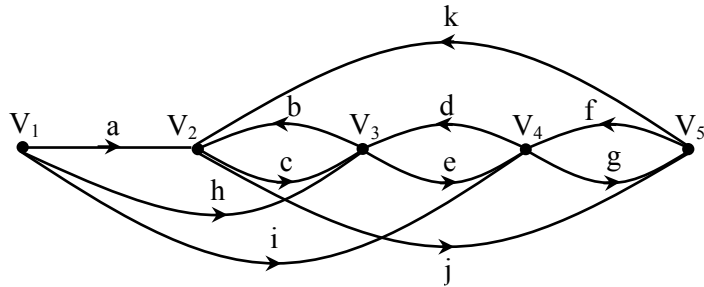


Figura 1.40. GS pentru problema 1.3.8

Soluție: În graf sunt 6 bucle simple și 2 bucle duble, respectiv 6 căi de la nodul V_1 la nodul V_5 .

$$\Delta = 1 - (bc + de + fg + jk + fdbj + cegk) + (bc \cdot fg + de \cdot kj)$$

$$T_{15} = \frac{V_5}{V_1} = \frac{1}{\Delta} [aceg + heg + ig(1 - bc) + aj(1 - ed) + hbj + idbj]$$

1.3.9. Se consideră circuitul din Figura 1.33 (**Problema 1.2.18**) Să se determine

funcția de circuit $\frac{V_3(s)}{V_1(s)}$ utilizând regula lui Mason.

Soluție:

$$\frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{G_1 G_2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{G_1 G_3}{sL \cdot Y_{22} Y_{33} Y_{44}}}{1 - \left(\frac{I}{s^2 L^2 \cdot Y_{22} Y_{44}} + \frac{G_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + \frac{G_3^2}{Y_{33} Y_{44}} + 2 \cdot \frac{G_2 G_3}{sL \cdot Y_{22} Y_{33} Y_{44}} \right)}$$

1.3.10. Se consideră circuitul din Figura 1.41.

a) Să se traseze graful de semnal și să se determine funcțiile de circuit

$\frac{U_{R3}(s)}{V_1(s)}$ și $\frac{I_{R2}(s)}{V_1(s)}$ utilizând regula lui Mason.

b) Cum se modifică graful de semnal de la punctul a) dacă se înlocuiește sursa ideală de tensiune cu o sursă ideală de curent $j(t)$. Să se

determine, în acest caz, funcția de circuit $\frac{I_{R2}(s)}{J(s)}$.

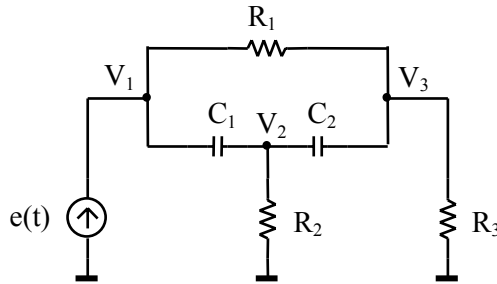


Figura 1.41 Circuitul pentru problema 1.3.10

Soluție:

a)

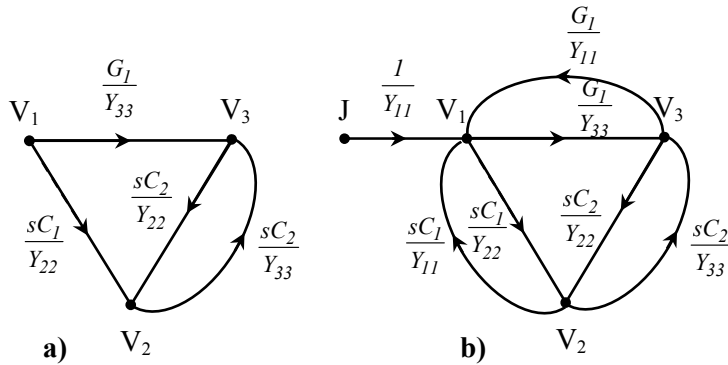


Figura 1.42. Grafuri de semnal rezultate

$$Y_{22} = s \cdot (C_1 + C_2) + G_2, \quad Y_{33} = G_1 + G_3 + sC_2$$

$$\frac{U_{R_3}(s)}{V_I(s)} = \frac{\frac{G_1 + s^2 C_1 C_2}{Y_{33}}}{1 - \frac{s^2 C_2^2}{Y_{22} Y_{33}}}$$

$$\frac{U_{R_3}(s)}{V_I(s)} = \frac{s^2 + s \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) + \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

$$\frac{I_{R_2}(s)}{V_I(s)} = \frac{\frac{V_2(s)}{R_2}}{E(s)} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\frac{s C_1 + s G_1 C_2}{Y_{22}}}{1 - \frac{s^2 C_2^2}{Y_{22} Y_{33}}}$$

b)

$$Y_{11} = sC_1 + G_1, \quad Y_{22} = s \cdot (C_1 + C_2) + G_2, \quad Y_{33} = G_1 + G_3 + sC_2$$

$$\frac{I_{R_2}(s)}{J(s)} = \frac{V_2(s)}{R_2} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\frac{s C_1 + s G_1 C_2}{Y_{11} Y_{22}}}{1 - \left(\frac{G_1^2}{Y_{11} Y_{33}} + \frac{s^2 C_1^2}{Y_{11} Y_{22}} + \frac{s^2 C_2^2}{Y_{22} Y_{33}} + 2 \frac{G_1 s^2 C_1 C_2}{Y_{11} Y_{22} Y_{33}} \right)}$$

1.3.11. Se consideră filtrul oprește-bandă din Figura 1.43. Se consideră amplificatoarele operaționale ideale.

- a) Să se traseze graficul de semnal;
b) Să se determine funcția de transfer V_o/V_i .

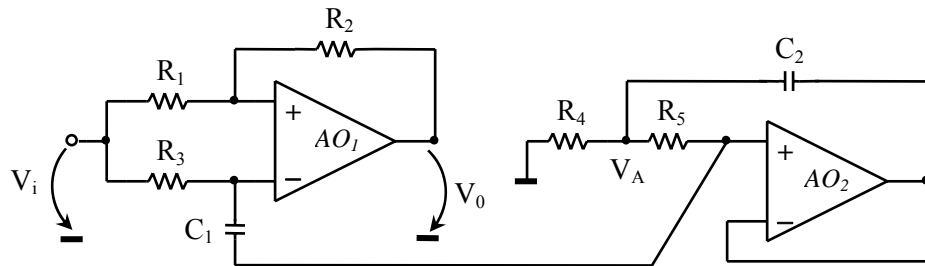


Figura 1.43 Filtru oprește-bandă pentru problema 1.3.11

Soluție:

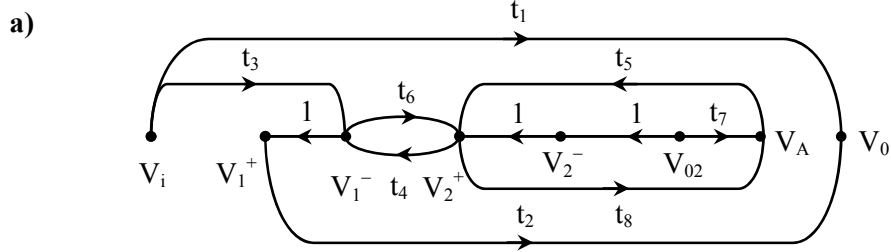


Figura 1.44 GS pentru circuitul din Figura 1.43

b)

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{t_1 \cdot [1 - (t_4 t_6 + t_5 t_8)] + t_2 t_3 (1 - t_5 t_8)}{1 - (t_4 t_6 + t_5 t_8)}$$

$$t_1 = -\frac{G_1}{G_2}, t_2 = \frac{G_1 + G_2}{G_2}, t_3 = \frac{G_3}{G_3 + sC_1}, t_4 = \frac{sC_1}{G_3 + sC_1}, t_5 = \frac{G_5}{G_5 + sC_1}$$

$$t_6 = \frac{sC_1}{G_5 + sC_1}, t_7 = \frac{sC_2}{G_4 + G_5 + sC_2}, t_8 = \frac{G_5}{G_4 + G_5 + sC_2}, G_i = \frac{1}{R_i}, i = \overline{1,5}$$

1.3.12. Se consideră circuitul cu amplificatoare operaționale ideale din Figura 1.45.

- a) Să se traseze grafurile de semnal;
- b) Să se determine funcția de transfer V_0/V_i .

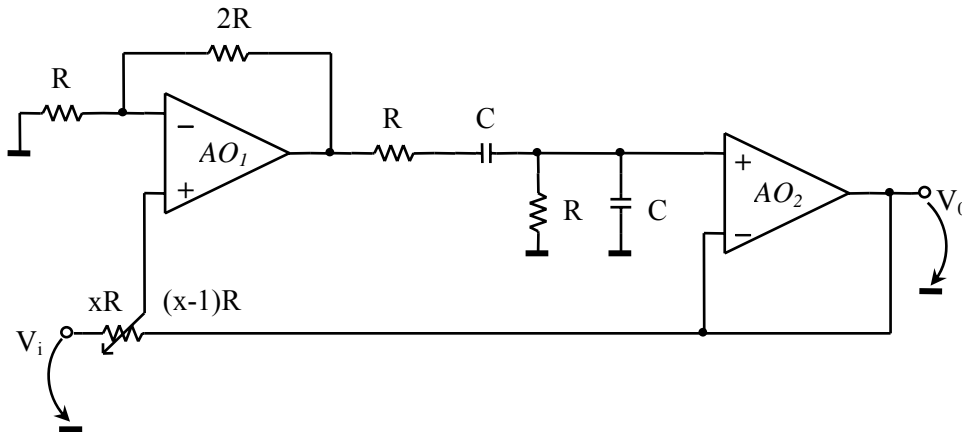


Figura 1.45. Circuit activ cu rețea Wien

Soluție:

a)

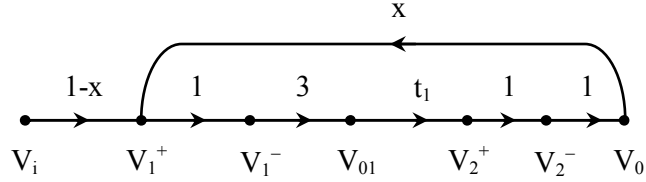


Figura 1.46. GS pentru circuitul din Figura 1.45

$$\text{b) } H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{3 \cdot \frac{1-x}{RC} s}{s^2 + 3 \cdot \frac{1-x}{RC} s + \frac{1}{R^2 C^2}}$$

1.3.13. Determinați graful de semnal pentru funcțiile de transfer $H(z)$ date mai jos. Utilizând regula lui Mason verificați $H(z)$.

$$\text{a) } H(z) = \frac{1 - 1.4z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1.5z^{-1} + 0.75z^{-2}};$$

$$\text{b) } H(z) = \frac{0.0018 \cdot (1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.85z^{-2}) \cdot (1 - 1.5z^{-1} + 0.65z^{-2})}. \quad (1.3.1)$$

Soluție: Vezi problema 1.2.9.

1.3.14. Se consideră sistemul discret în timp din Figura 1.47.

- Trasați graful de semnal al acestui sistem;
- Determinați funcția de transfer a sistemului.

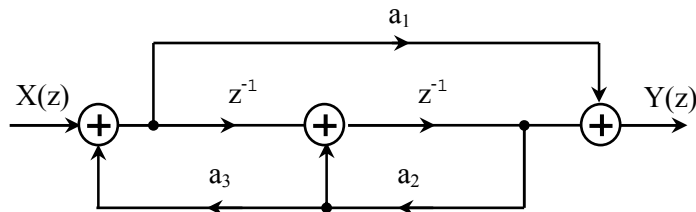


Figura 1.47. Sistem discret în timp

Soluție:

a)

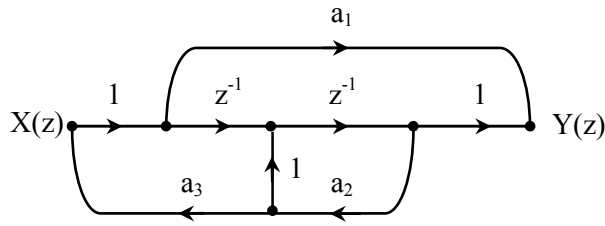


Figura 1.48. GS pentru sistemul din Figura 1.47

b)

$$H(z) = \frac{a_1 - a_1 a_2 z^{-1} + z^{-2}}{1 - a_2 z^{-1} + a_2 a_3 z^{-2}}$$

1.3.15. Să se construiască grafurile de semnal corespunzător circuitului electronic din Figura 1.49a. Utilizând acest graf să se calculeze curentul I_0 . Se cunosc valorile rezistoarelor circuitului (R_{b1} , R_{b2} , R_E , R_C), parametrii tranzistorului (β , C_{BE} , r_{BE} și g_m).

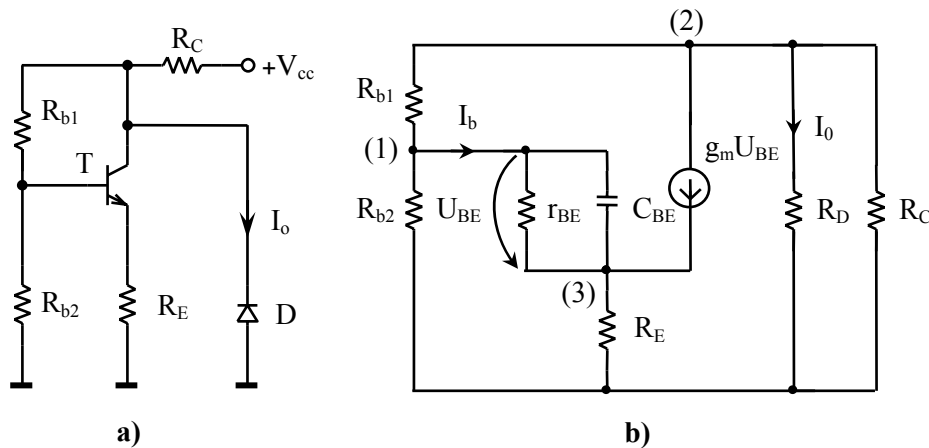


Figura 1.49. a) Circuitul pentru problema 1.3.15; b) schema echivalentă

Soluție: Se aplică teorema lui Millman:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{G_{b1} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{r_{BE}} + sC_{BE} \right) \cdot V_3}{G_{b1} + G_{b2} + \frac{1}{r_{BE}} + sC_{BE}} \\ V_2 = \frac{G_{b1} \cdot V_1 - g_m U_{BE}}{G_{b1} + G_D + G_C} \\ V_3 = \frac{\left(\frac{1}{r_{BE}} + sC_{BE} \right) \cdot V_1 + g_m U_{BE}}{\frac{1}{r_{BE}} + sC_{BE} + G_E} \\ U_{BE} = V_2 - V_3, \quad I_0 = \frac{V_2}{R_D} \\ g_m U_{BE} = \beta \cdot I_b = \beta \cdot \left(\frac{1}{r_{BE}} + sC_{BE} \right) \cdot U_{BE} \end{array} \right.$$

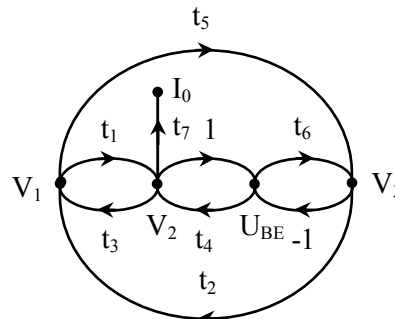


Figura 1.50. GS pentru circuitul din Figura 1.49a

$$\frac{I_0}{U_{BE}} = \frac{t_4 t_7 (1 - t_2 t_5) + t_6 t_2 t_1 t_7}{1 - (t_1 t_3 + t_4 - t_6 + t_2 t_5 - t_5 t_4 t_3 + t_1 t_6 t_2) + t_4 t_2 t_5 - t_1 t_3 t_6}$$

1.3.16. Se consideră oscilatorul din Figura 1.51a.

- Să se traseze grafurile de semnal;
- Să se determine impedanța de transfer $Z_0 = \frac{U_2}{I_3}$.

Soluție:

a) Se aplică teorema curenților ciclici (curenții de buclă):

$$\left\{ \begin{array}{l} (Z_1 + Z_2 + sL_2) \cdot I_{b1} - Z_2 \cdot I_{b2} - sM \cdot I_{b3} = U_{BE} \Rightarrow \mathbf{I}_{b1} \\ I_{b2} = \beta \cdot I_{b1} \Rightarrow \mathbf{I}_{b2} \\ \left(\frac{1}{sC_2} + r_1 + sL_1 \right) \cdot I_{b3} + \frac{1}{sC_2} \cdot I_{b2} - sM \cdot I_{b1} = 0 \Rightarrow \mathbf{I}_{b3} \\ sC_2 U_2 = I_{b2} + I_{b3} \Rightarrow \mathbf{U}_2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = r_2 + (R_1 \parallel R_2 \parallel C) \\ Z_2 = R_3 \parallel C_3 \end{array} \right.$$

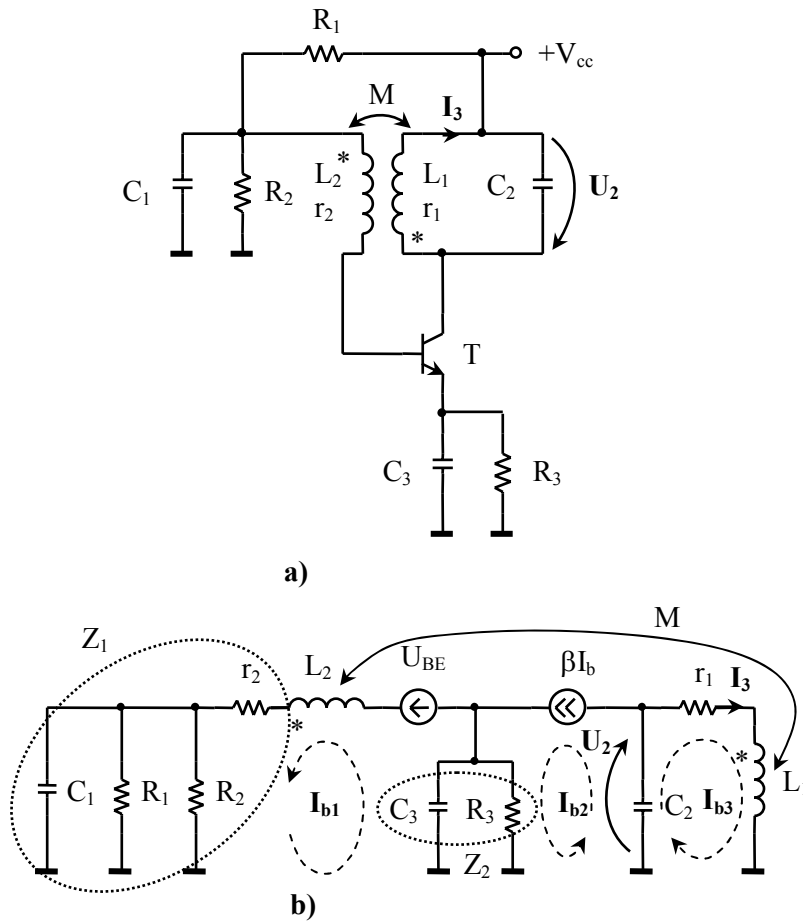


Figura 1.51. a) Oscilator; b) Schema echivalentă

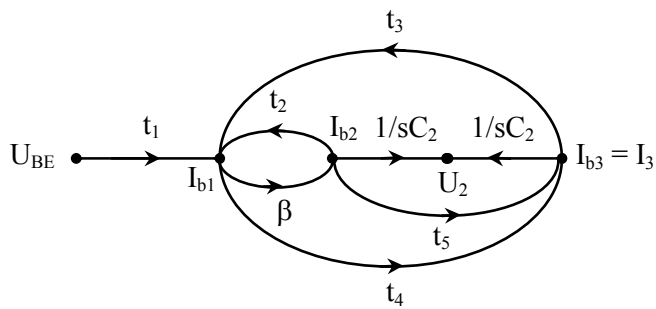


Figura 1.52. GS pentru circuitul din Figura 1.51a

b)

$$Z_0 = \frac{U_2}{I_3} = \frac{\frac{1}{sC_2} \cdot (1 - \beta \cdot t_2) + \beta \cdot t_3 \cdot \frac{1}{sC_2}}{1 - (\beta \cdot t_2 + t_3 \cdot t_4 + \beta \cdot t_3 \cdot t_5)}$$

1.3.17. Circuitele din Figura 1.53 sunt conectate între o sursă cu rezistența R_g și o sarcină R_s . Să se determine funcțiile de transfer $U_2(s)/U_1(s)$, utilizând regula lui Mason.

Soluție:

GS pentru fiecare circuit este dat în Figura 1.54.

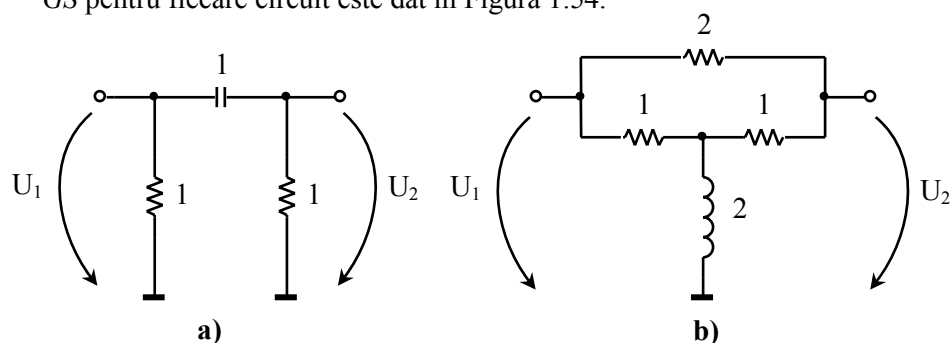


Figura 1.53. Circuite pentru problema 1.3.17

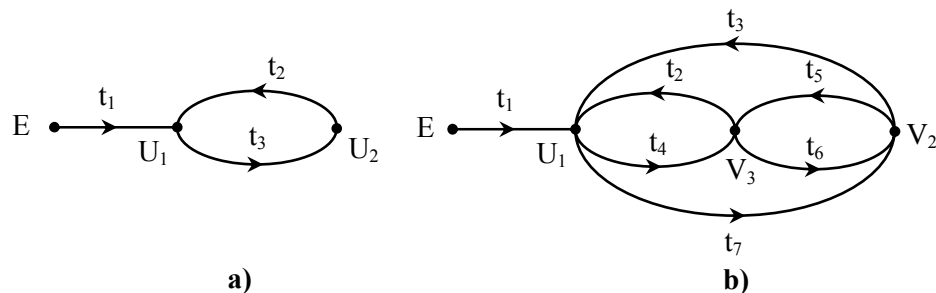


Figura 1.54. GS pentru circuitele din Figura 1.54

Pentru circuitul din Figura 1.53a:
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{t_1 t_3}{1 - t_2 t_3} = \frac{s \cdot \frac{R_s}{2R_g R_s + R_g + R_s}}{\left(R_g + I \right) \cdot \left(R_s + I \right) + \frac{R_g (R_s + I) + R_s (R_g + I)}{s}}$$

Pentru circuitul din Figura 1.53b:
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{t_1 t_4 t_6 + t_1 t_7}{1 - (t_2 t_4 + t_5 t_6 + t_3 t_7 + t_2 t_5 t_7 + t_3 t_4 t_6)}$$

1.3.18. Să se determine amplificarea în curent $I_2(s)/I_1(s)$ pentru circuitul din Figura 1.55a (conexiune *Darlington*) utilizând regula lui Mason.

Soluție: Se utilizează parametrii hibridi ai tranzistorului (vezi *Capitolul 4* relația 4.1.5):

$$T1: \begin{cases} V_1^{(1)} = h_{11}^{(1)} I_1^{(1)} + h_{12}^{(1)} V_2^{(1)} \\ I_2^{(1)} = h_{21}^{(1)} I_1^{(1)} + h_{22}^{(1)} V_2^{(1)} \end{cases}, \quad T2: \begin{cases} V_1^{(2)} = h_{11}^{(2)} I_1^{(2)} + h_{12}^{(2)} V_2^{(2)} \\ I_2^{(2)} = h_{21}^{(2)} I_1^{(2)} + h_{22}^{(2)} V_2^{(2)} \end{cases}$$

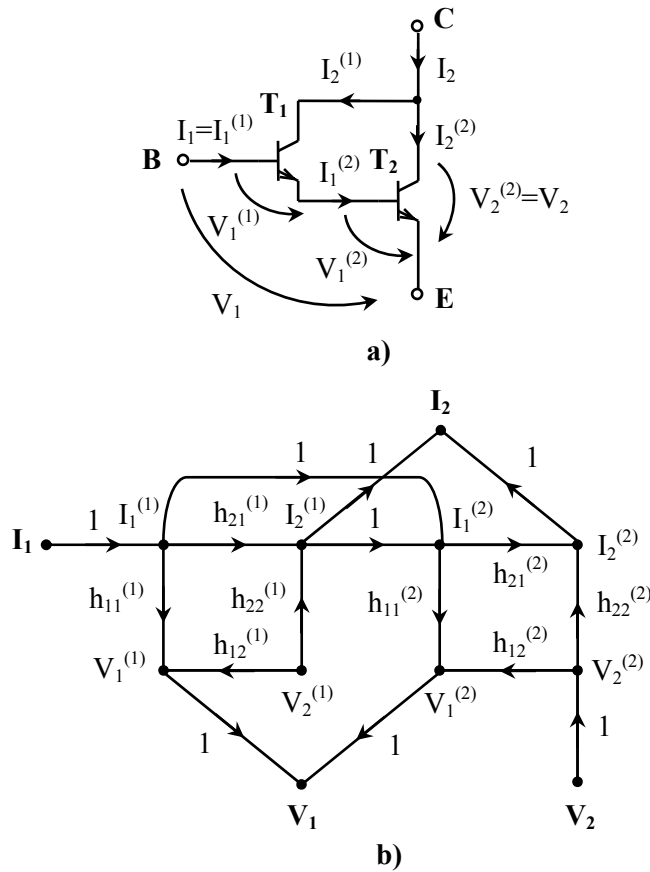


Figura 1.55. Conexiunea Darlington și GS asociat

$$\begin{cases} I_1^{(1)} = I_1 \\ I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \\ I_1^{(2)} = I_1^{(1)} + I_2^{(1)} \end{cases}, \quad \begin{cases} V_1 = V_1^{(1)} + V_1^{(2)} \\ V_2 = V_2^{(2)} \end{cases}$$

GS este dat în Figura 1.55b din care rezultă amplificarea în curent:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)} + h_{21}^{(1)} \cdot h_{21}^{(2)}}{1}; \quad h_{21}^{(1)} \cdot h_{21}^{(2)}$$

1.3.19. Pentru circuitul din Figura 1.56a să se determine raportul $V_s(s)/E(s)$ utilizând regula lui Mason. Tranzistorul este descris de formalismul H .

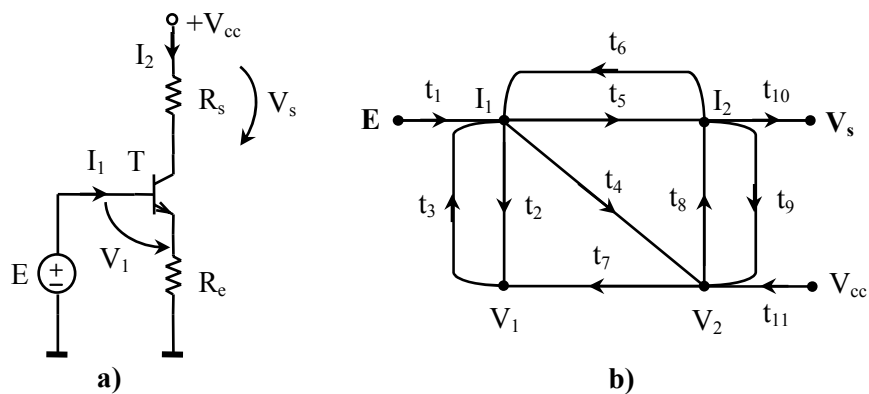


Figura 1.56. a) Circuit cu tranzistor, b) GS rezultat

Soluție:

$$\begin{cases} V_1 = r_{BE} \cdot I_1 + \mu \cdot V_2 \\ I_2 = \beta \cdot I_1 + \frac{1}{r_{CE}} \cdot V_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} I_1 = \frac{E - V_1}{R_e} - I_2 \\ V_2 = V_{cc} - I_2 \cdot (R_e + R_s) - R_e I_1 \\ V_s = R_s \cdot I_2 \end{cases}$$

$$\mu \simeq 0, \quad \frac{1}{r_{CE}} \simeq 0 \Rightarrow \frac{V_s}{E} \simeq \frac{\beta \cdot R_s}{r_{BE} + R_e \cdot (1 + \beta)}$$

1.3.20. Pentru graful de semnal din Figura 1.57a, determinați transmitanța globală între nodurile V_1 și V_4 .

Soluție: $\Delta = 1 - (dc + ef + gh + ech + dfg)$, $T_{41} = \frac{I}{\Delta} \cdot (af + bh + ach + bdf)$

1.3.21. Pentru graful de semnal din Figura 1.57b, determinați transmitanța globală între nodurile V_1 și V_3 .

Soluție: $\Delta = 1 - (de + gh + fdh)$, $T_{31} = \frac{I}{\Delta} \cdot (cde + bdh + ah)$

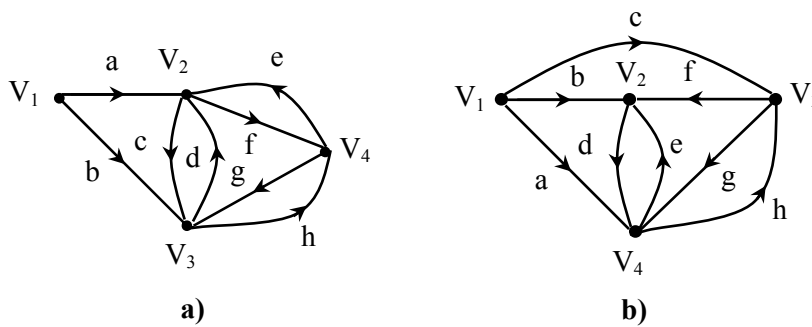


Figura 1.57. GS pentru problemele 1.3.20, 1.3.21

2. Analiza stabilității sistemelor

2.1. Considerații teoretice

Cauzalitate: un sistem se numește cauzal dacă ieșirea sa depinde numai de valorile prezente și trecute ale intrării. Dacă $y(t)$ este ieșirea, atunci $y(t)$ depinde numai de intrarea $x(t)$ pentru $t \geq t_0$ ($t_0 > 0$). Prin urmare, un sistem cauzal nu poate anticipa intrările viitoare.

Răspunsul la impuls: reprezintă ieșirea $y(t)$ a sistemului atunci când intrarea este funcția impuls *Dirac* $x(t) = \delta(t)$ în condiții inițiale nule.

Stabilitate:

- un sistem este **asimptotic stabil** dacă orice intrare mărginită produce o ieșire mărginită.
- un sistem este **asimptotic stabil** când răspunsul la impuls *Dirac* tinde la zero pe măsură ce timpul tinde la infinit.

O condiție necesară și suficientă de stabilitate pentru sisteme analogice liniare este ca partea reală a rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului să fie negativă. Echivalent, rădăcinile ecuației caracteristice să fie situate în semiplanul stâng al planului s . Dacă sistemul are rădăcini pur imaginare simple se spune că acesta este la **limita de stabilitate (neasimptotic stabil)**.

2.1.1. Criterii algebrice de stabilitate

Criteriul lui Routh

Se aplică polinomului caracteristic de forma:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (2.1.1)$$

Criteriul este aplicat prin intermediul **tabloului lui Routh**, definit astfel:

$$\begin{array}{c|cccc} s_n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s_{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ \vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad (2.1.2)$$

unde a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sunt coeficienții polinomului caracteristic, iar b_i, c_i, \dots sunt:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Tabloul se continuă orizontal și vertical până când se obțin numai zerouri. **Sistemul este asimptotic stabil** dacă elementele primei coloane din tabloul lui Routh au același semn.

Din tabloul lui Routh se determină câte rădăcini ale polinomului sunt în semiplanul drept al planului s . Se poate determina, de asemenea și dacă sunt rădăcini pe axa imaginară și locația acestora. O utilizare importantă este în determinarea limitelor superioare și inferioare ale valorilor unor parametrii (de exemplu câștigul), astfel încât toate rădăcinile ecuației caracteristice în buclă închisă să fie în semiplanul stâng.

Criteriul lui Hurwitz

Sistemul este asimptotic stabil dacă toți minorii principali ai determinantului Hurwitz sunt pozitivi. În cazul în care unul dintre acești minori este nul, cel puțin o rădăcină a ecuației caracteristice se găsește pe axa imaginară, ceea ce înseamnă că sistemul este la limita de stabilitate.

Dacă polinomul caracteristic este de forma (2.1.1), determinantul Hurwitz este:

$$\begin{vmatrix}
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\
 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_0
 \end{vmatrix}
 \tag{2.1.4}$$

Criteriul fracțiilor continue

Pentru dezvoltarea în fracție continuă, se descompune mai întâi $Q(s)$ în:

$$Q(s) = Q_{par}(s) + Q_{impar}(s)
 \tag{2.1.5}$$

apoi se generează funcția de transfer:

$$F(s) = \frac{Q_{par}(s)}{Q_{impar}(s)} \quad \text{– pentru } n \text{ par}$$

$$F(s) = \frac{Q_{impar}(s)}{Q_{par}(s)} \quad \text{– pentru } n \text{ impar}$$
(2.1.6)

și se dezvoltă în fracție continuă:

$$F(s) = c_1 s + \frac{I}{c_2 s + \frac{I}{\dots \frac{I}{c_n s}}}$$
(2.1.7)

Sistemul este asimptotic stabil dacă toți coeficienții c_i , $i=1 \rightarrow n$ din dezvoltarea în fracție continuă (2.1.7), sunt pozitivi.

2.1.2. Criterii grafo-analitice de stabilitate

Criteriile grafo-analitice de stabilitate se bazează pe teorema variației argumentului (*Cauchy*). **Hodograful** funcției complexe $Q(s)$ este reprezentarea grafică a acestei funcții în coordonate $Re\{Q(j\omega)\}$, $Im\{Q(j\omega)\}$, când variabila complexă s parcurge un contur în planul $s = \alpha + j\omega$.

Criteriul lui Mihailov

Sistemul **este asimptotic stabil** dacă $Q(s)$ este strict Hurwitz, adică are toate rădăcinile în semiplanul stâng al planului s . *Un polinom $Q(s)$ de grad n este strict Hurwitz dacă hodograful $Q(j\omega)$, când $\omega \in (0, +\infty)$, înconjoară originea în sens pozitiv (trigonometric) cu un unghi egal cu $n\frac{\pi}{2}$, adică (2.1.8).* Dacă unghiul descris de vectorul $Q(j\omega)$ este diferit de $n\frac{\pi}{2}$, sau rotația nu este pozitivă, **sistemul este instabil**. Dacă vectorul $Q(j\omega)$ trece prin origine, atunci $Q(j\omega)$ are rădăcini imaginare, iar sistemul poate fi instabil sau la **limita de stabilitate**.

$$\Delta \arg \{Q(j\omega)\} \Big|_0^\infty = \arg \{Q(+j\infty)\} - \arg \{Q(0)\} = n\frac{\pi}{2}$$
(2.1.8)

Criteriul lui Nyquist

Acest criteriu se aplică sistemelor cu reacție inversă și permite studiul stabilității, respectiv a performanțelor sistemului în buclă închisă prin observarea comportării acestuia în buclă deschisă.

Dacă notăm cu $F(s)$ funcția de circuit a căii directe și cu $R(s)$ cea a căii de reacție, atunci funcția de circuit a buclei deschise, numită și raport la întoarcere, este egală cu $T(s) = \pm F(s) \cdot R(s)$, unde semnul “-” înseamnă reacție pozitivă, iar “+” reacție negativă. Funcția de transfer a sistemului cu buclă închisă este:

$$H(s) = \frac{F(s)}{1+T(s)} \quad (2.1.9)$$

Pentru a determina $T(s)$ se urmărește întreruperea buclei de reacție astfel încât blocurile $F(s)$ și $R(s)$ să fie separabile ($T(s)$ să fie produsul celor două funcții de transfer $F(s)$ și $R(s)$), iar $R(s)$ să fie determinată în condiții de mers în sarcină.

Poli funcției de transfer $H(s)$ sunt identici cu zerourile funcției $1+T(s)$, prin urmare pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil, toate zerourile lui $1+T(s)$ trebuie să aparțină semiplanului stâng al planului s .

Conturul Nyquist este o curbă închisă care închide semiplanul drept și este orientat în sens orar (invers trigonometric) pentru a parcurge axa imaginară în sens crescător al frecvenței. Parcurgerea conturului Nyquist este echivalentă cu variația lui s pe axa imaginară de la $-\infty$ la $+\infty$. Hodograful Nyquist este graficul amplificării – fază a răspunsului în frecvență evaluat de-a lungul axei imaginare ($\omega \in (-\infty, +\infty)$). Într-un astfel de grafic se reprezintă $T_{Re}(j\omega)$ în funcție de $T_{Im}(j\omega)$, sau echivalent, amplificarea în funcție de fază (graful *Nichols*). Hodograful Nyquist conține aceeași informație în amplificarea și fază ca și diagramele *Bode*. Deosebirea constă în faptul că hodograful Nyquist este un singur grafic, iar frecvența nu apare în mod explicit. În acest sens, se poate considera ca hodograful Nyquist este un grafic mai general decât diagramele *Bode*.

Pentru ca un sistem cu reacție să fie asimptotic stabil este necesar și suficient ca la parcurgerea în sens orar a conturului Nyquist, când $\omega \in (-\infty, +\infty)$ hodograful raportului la întoarcere $T(s)$ să înconjoare punctul critic $(-1, j0)$ (sistem cu reacție negativă), respectiv $(1, j0)$ (sistem cu reacție pozitivă), de p_d ori în sens orar, unde p_d este numărul de poli din semiplanul drept ai lui $T(s)$.

- Dacă sistemul cu buclă deschisă este stabil ($p_d = 0$), sistemul cu buclă închisă rămâne stabil dacă **hodograful** lui $T(s)$ **nu înconjoară punctul critic**.
- Dacă sistemul cu buclă deschisă este instabil ($p_d \neq 0$), sistemul cu buclă închisă devine stabil dacă **hodograful** lui $T(s)$ **înconjoară punctul critic** de exact p_d ori.

Marginea de câștig (MG) a unui sistem cu reacție reprezintă valoarea minimă a câștigului K , când $\Phi=0$, care transformă sistemul dintr-unul stabil într-unul instabil. Pentru determinarea lui MG se rezolvă ecuația:

$$MG \cdot T(j\omega_\pi) = -1 \quad (2.1.10)$$

Marginea de fază (MP) reprezintă valoarea minimă a fazei Φ , când $K=1$, astfel încât sistemul să devină instabil. Prin convenție, faza se consideră pozitivă, adică egalează faza negativă suplimentară pentru care sistemul devine instabil. Pentru determinarea lui MP se rezolvă ecuația:

$$e^{-j\Phi} \cdot T(j\omega_{0dB}) = -1 \quad (2.1.11)$$

de unde $MP = \pi + \Phi$.

MG și MP se pot determina și din caracteristicile de frecvență (diagrame *Bode*) ale sistemului în buclă deschisă, adică:

$$MG = \frac{1}{|T(j\omega_\pi)|} \Big|_{\arg\{T(j\omega)\} = -\pi} \quad (2.1.12)$$

$$MP = \pi + \arg\{T(j\omega_{0dB})\} \Big|_{|T(j\omega)|=1}$$

Observație: Pentru a determina MG și MP se verifică, mai întâi, dacă $\arg\{T(0)\} = 0$. Dacă este diferit, atunci se face "alinieră" argumentului la nivelul 0 pentru $\omega \rightarrow 0$, apoi, se aplică (2.1.12).

Pe baza acestor mărimi, **sistemul este stabil** dacă $MG > 1$ și $MP > 0$.

2.2. Probleme rezolvate

2.2.1. Dacă în prima coloană a tabloului lui Routh apare un zero, sistemul este instabil sau nu?

Rezolvare:

Un zero în prima coloană a tabloului lui Routh se interpretează ca fără semn, deci nici pozitiv, nici negativ. În consecință, elementele primei coloane au același semn și sistemul este la limita de stabilitate. În unele cazuri, un zero în prima coloană a tabloului lui Routh indică prezența a două rădăcini egale în modul, dar de semne contrare. Alteori, indică prezența unor rădăcini pur imaginare sau pol în origine.

2.2.2. Ce se poate spune despre stabilitatea unui sistem, dacă unul dintre coeficienții ecuației caracteristice este zero?

Rezolvare: Polinomul caracteristic poate fi scris sub forma:

$$Q(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \dots (s - s_n)$$

unde s_1, s_2, \dots, s_n sunt rădăcinile ecuației. Între rădăcini și coeficienți există relațiile lui Viéte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n s_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n s_i \cdot s_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right.$$

Dacă sistemul este stabil toate rădăcinile s_1, s_2, \dots, s_n au parte reală negativă, deci toți coeficienții $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ au același semn cu a_n și sunt nenuli. Dacă unul dintre coeficienți este zero înseamnă că una sau mai multe rădăcini au partea reală nulă sau pozitivă. Deci, în acest caz sistemul este instabil.

2.2.3. Utilizând criteriul lui Routh, studiați stabilitatea următoarelor sisteme având polinoamele caracteristice:

a) $Q(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + 12$

b) $Q(s) = s^5 + 15s^4 + 185s^3 + 725s^2 - 326s + 120$

Rezolvare:

a) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 4 & 12 \\ s^1 & 5 & 0 \\ s^0 & 12 & \end{array}$$

Deoarece nu sunt schimbări de semn în prima coloană a tabloului lui Routh sistemul este asimptotic stabil.

b) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 185 & -326 \\ s^4 & 15 & 725 & 120 \\ s^3 & 136.7 & -334 & \\ s^2 & 761.7 & 120 & \\ s^1 & -355.5 & & \\ s^0 & 120 & & \end{array}$$

În prima coloană a tabloului avem două schimbări de semn, deci sistemul este instabil. Sistemul are doi poli în semiplanul drept. Deoarece nu există zerouri în coloană, nu există poli pur imaginari.

2.2.4. Determinați valorile parametrilor a și b , astfel încât sistemul caracterizat de polinomul caracteristic de mai jos să fie stabil. Se vor utiliza criteriile lui Routh și Hurwitz.

$$Q(s) = s^3 + as^2 + 2s + b$$

Rezolvare: Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & a & b \\ s^1 & \frac{2a-b}{a} & 0 \\ s^0 & b & \end{array}$$

Condițiile de stabilitate sunt: (1) coeficienții lui $Q(s)$ să fie pozitivi, respectiv (2) elementele de pe prima coloană a tabloului lui Routh să fie strict pozitive:

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ 2a - b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ 2a > b \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Utilizând criteriul lui Hurwitz se obțin determinanții:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b(2a - b); \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - b; \quad D_1 = a$$

de unde rezultă că pentru stabilitate trebuie îndeplinite condițiile ca $D_i > 0$, $i=1 \div 3$ și rezultă aceleași inecuații ca în (2.2.1).

2.2.5. Utilizând criteriul lui Routh, studiați stabilitatea următoarelor sisteme având polinoamele caracteristice:

- a) $Q(s) = s^4 + 5s^3 + 18s^2 + 53s + 60$
 b) $Q(s) = s^4 + 7s^3 + 12s^2 + 23s + 10$
 c) $Q(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1$

Rezolvare:

a) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 18 & 60 \\ s^3 & 5 & 53 & \\ s^2 & 7.4 & 60 & \\ s^1 & 0.24 & 0 & \\ s^0 & 60 & & \end{array}$$

În prima coloană a tabloului avem același semn, deci sistemul este stabil.

b) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 12 & 10 \\ s^3 & 7 & 23 & \\ s^2 & 8.7 & 10 & \\ s^1 & 0.65 & 0 & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

Și în acest caz sistemul este stabil.

c)

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 3 & 1 \\ s^4 & 2 & 2 & 1 \\ s^3 & 2 & 0.5 & \\ s^2 & 1.5 & 1 & \\ s^1 & -5/3 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Se observă că în prima coloană există o schimbare de semn, deci sistemul este instabil.

2.2.6. Determinați domeniul valorilor parametrului $k \in \mathcal{R}$, astfel încât sistemele cu polinoamele caracteristice:

a) $Q(s) = s^3 + (4+k)s^2 + 6s + 12$

b) $Q(s) = ks^4 + 2s^3 + (k^2 - 2)s^2 + s + 1$

să fie stabile. Se va utiliza criteriul lui Routh.

Rezolvare:

a) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 6 \\ s^2 & 4+k & 12 \\ s^1 & \frac{6(4+k)-12}{4+k} & 0 \\ s^0 & 12 & \end{array}$$

Se pun condițiile de stabilitate: coeficienți pozitivi și elementele primei coloane din tabloul lui Routh să fie pozitive; se obține sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 4+k > 0 \\ \frac{6(4+k)-12}{4+k} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -4 \\ k > -2 \end{cases}$$

din care rezultă domeniul de valori pentru k : $k > -2$.

b) Tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & k & k^2 - 2 & 1 \\
 s^3 & 2 & 1 & \\
 s^2 & \frac{2(k^2 - 2) - k}{2} & 1 & \\
 s^1 & 1 - \frac{4}{2(k^2 - 2) - k} & 0 & \\
 s^0 & 1 & &
 \end{array}$$

Se pun condițiile de stabilitate și se obține sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} k > 0 \\ \frac{2(k^2 - 2) - k}{2} > 0 \\ 1 - \frac{4}{2(k^2 - 2) - k} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.25(1 - \sqrt{33}) < k < 0.25(1 + \sqrt{33}) \\ 0.25(1 - \sqrt{65}) < k < 0.25(1 + \sqrt{65}) \end{cases}$$

din care rezultă domeniul de valori pentru k : $k > 0.25(1 + \sqrt{65})$.

2.2.7. Se dă un sistem caracterizat prin funcția de transfer în buclă deschisă:

$$T(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k \cdot (s - 2)}{(s + 1) \cdot (s + 2) \cdot (s + 3) \cdot (s + 4)}.$$

Câștigul sistemului k este considerat parametru variabil. Utilizând criteriul lui Routh, determinați valorile lui k astfel încât sistemul în buclă închisă să fie stabil.

Rezolvare:

Sistemul în buclă deschisă este stabil deoarece toți polii sunt în semiplanul stâng al planului s . Polii sistemului în buclă închisă sunt dați de zerourile ecuației:

$$1 + F(s) \cdot R(s) = 0$$

de unde rezultă ecuația caracteristică:

$$s^4 + 10s^3 + 35s^2 + (50 + k) \cdot s + (24 - 2k) = 0$$

iar tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{r|rrrr} s^4 & 1 & 35 & 24-k & \\ s^3 & 10 & 50+k & & \\ s^2 & \frac{300-k}{10} & 24-2k & & \\ s^1 & \frac{\frac{(300-k)}{10}(50+k) - 10(24-2k)}{300-k} & & & \\ & \frac{10}{10} & & & \\ s^0 & 24-2k & & & \end{array}$$

Sistemul este stabil dacă toți coeficienții lui $Q(s)$, respectiv toate elementele primei coloane din tabloul lui Routh au același semn. Pentru a obține sistem stabil se pun condițiile:

$$\begin{cases} 50 + k > 0 \\ \frac{300 - k}{10} > 0 \\ 50 + k - \frac{100(24 - 2k)}{300 - k} > 0 \\ 24 - 2k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -50 \\ k < 300 \\ -26.4 < k < 476.4 \\ k < 12 \end{cases}$$

Soluția sistemului este: $-26.4 < k < 12$ pentru care sistemul este asimptotic stabil. Dacă $k = 12$, coeficientul corespunzător lui s^0 este 0; ceea ce înseamnă că există cel puțin o rădăcină a polinomului caracteristic situată în originea planului s și sistemul este la limita de stabilitate.

2.2.8. Determinați condițiile Hurwitz de stabilitate a unui sistem considerând polinomul caracteristic de ordinul 4, în care coeficientul $a_3 > 0$.

Rezolvare: Polinomul caracteristic este:

$$Q(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Determinanții Hurwitz sunt:

$$D_1 = a_3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_1a_4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3 \cdot (a_2a_1a_0 - a_3a_0^2) - a_4a_1^2a_0$$

Condițiile pentru stabilitate sunt:

$$\begin{cases} a_3a_2 - a_1a_4 > 0 \\ a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0 \\ a_3 \cdot (a_2a_1a_0 - a_3a_0^2) - a_4a_1^2a_0 > 0 \end{cases}$$

2.2.9. Utilizând criteriul lui Hurwitz, studiați stabilitatea următoarelor sisteme cu polinoamele caracteristice:

a) $Q(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + 12$

b) $Q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$

c) $Q(s) = s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 4s + 9$

Rezolvare:

a)

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 240, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 20$$

Deoarece D_2, D_3 , respectiv toți coeficienții lui $Q(s)$ sunt pozitivi, sistemul este stabil.

b)

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deoarece D_3, D_4 sunt negativi, sistemul este instabil.

c)

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 396 - 144 = 252, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 28, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 16$$

Deoarece D_2, D_3, D_4 , respectiv toți coeficienții lui $Q(s)$ sunt pozitivi, sistemul este stabil.

2.2.10. Utilizând criteriul lui Hurwitz, precizați stabilitatea sistemului caracterizat de polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^3 + 8s^2 + 14s + 24$$

Rezolvare:

Determinantul, respectiv minorii principali ai sistemului sunt:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88; \quad D_1 = 8$$

Deoarece toți coeficienții și determinanții sunt pozitivi, sistemul este asimptotic stabil.

2.2.11. Determinați domeniul valorilor parametrului $k \in \mathcal{R}$, astfel încât sistemul cu polinomul caracteristic:

$$Q(s) = (k+2)s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + k$$

să fie stabil. Se va utiliza criteriul lui Hurwitz.

Rezolvare:

Determinantul, respectiv minorii sistemului sunt:

$$\begin{aligned} D_1 &= k + 2 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ k+2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2k \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ k+2 & 1 & k \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(13k + 2) \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ k+2 & 1 & k & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 & k \end{vmatrix} = -k(13k + 2) \end{aligned}$$

Se pun condițiile de stabilitate (coeficienții și determinanții D_i să fie pozitivi):

$$\begin{cases} k > 0 \\ k + 2 > 0 \\ -k(13k + 2) > 0 \\ -1 - 2k > 0 \\ -13k - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > -2 \\ k < -2/13 \\ k < -1/2 \end{cases}$$

Se observă că nu există $k \in \mathcal{R}$ care să satisfacă toate condițiile, deci sistemul este instabil.

2.2.12. Determinați valorile lui $k \in \mathfrak{R}_+$ astfel încât sistemul caracterizat de polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^2 + ks + 2k - 1$$

să fie stabil. Se va utiliza criteriul lui Hurwitz.

Rezolvare:

Determinanții Hurwitz pentru acest sistem sunt:

$$D_1 = k$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & 2k - 1 \end{vmatrix} = k \cdot (2k - 1)$$

Pentru ca sistemul să fie stabil, trebuie ca D_1 și D_2 să fie pozitivi și se obține:

$$\begin{cases} k > 0 \\ k \cdot (2k - 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow k > \frac{1}{2}$$

2.2.13. Să se rezolve **problema 2.2.12** utilizând criteriul Mihailov.

Rezolvare:

În polinomul caracteristic se înlocuiește $s = j\omega$ și se obține:

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = -\omega^2 + 2k - 1 \\ Q_{Im}(\omega) = k\omega \end{cases}$$

Soluțiile părții reale și imaginare sunt: $\omega_{Re} = \sqrt{2k - 1}$, $\omega_{Im} = 0$.

Se trasează hodograful Mihailov pentru trei cazuri distincte după k :

$$\text{a) } k > \frac{1}{2}; \text{ b) } 0 < k \leq \frac{1}{2}, \text{ respectiv c) } k = \frac{1}{2}.$$

Modul de variație a părților reală și imaginară a polinomului caracteristic când $\omega \in (0, +\infty)$ sunt date în Tabelul 2.1.

ω		0		$\sqrt{2k-1}$		$+\infty$
a) ($k=1$)	Q_{Re}	1	+++	0	----	$-\infty$
	Q_{Im}	0	+++	1	+++	$+\infty$
b) ($k=1/5$)	Q_{Re}	-3/5	----	$Q_{Re} \notin \mathcal{R}$	----	$-\infty$
	Q_{Im}	0	+++	$Q_{Im} \notin \mathcal{R}$	+++	$+\infty$
c) ($k=1/2$)	Q_{Re}	0	----	0	----	$-\infty$
	Q_{Im}	0	+++	0	+++	$+\infty$

Tabloul 2.1. Variația părților reală și imaginară în funcție de k

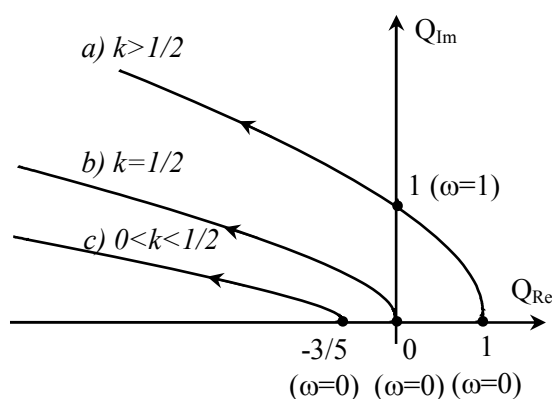


Figura 2.1. Variația hodografului Mihailov în funcție de k pentru problema 2.2.13

Conform criteriului Mihailov de stabilitate putem afirma:

- $k > \frac{1}{2}$: hodograful înconjoară originea în sens trigonometric de $2\frac{\pi}{2}$ ori (număr cadrane = ordinul sistemului), deci sistemul este asimptotic stabil;
- $k = \frac{1}{2}$: hodograful trece prin originea axelor de coordonate și are sens trigonometric de parcurgere, deci sistemul este la limita de stabilitate;
- $0 < k < \frac{1}{2}$: hodograful nu înconjoară originea, deci sistemul este instabil.

2.2.14. Să se studieze stabilitatea sistemului având polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 32$$

Rezolvare:

Metoda 1: utilizăm criteriul fracțiilor continue:

$$\frac{Q_{par}(s)}{Q_{impar}(s)} = \frac{s^4 + 8s^2 + 32}{4s^3 + 16s} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{-\frac{16s}{4s^2 + 32}} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{s + \frac{1}{-\frac{1}{4} + \frac{-1}{2}s}}$$

Deoarece în fracția continuă există coeficienți ai lui s negativi, sistemul este instabil.

Metoda 2: utilizăm criteriul Mihailov:

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - 8\omega^2 + 32 \\ Q_{Im}(\omega) = -4\omega \cdot (\omega^2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2Re} = 2\sqrt{1 \pm j} \notin \Re \\ \omega_{1Im} = 0 \\ \omega_{2Im} = 2 \end{cases}$$

Modul de variație a părților reală și imaginară ale polinomului caracteristic pentru $\omega \in (0, +\infty)$ este dat în Tabelul 2.2, iar hodograful Mihailov este prezentat în Figura 2.2.

ω	0		2		$+\infty$
Q_{Re}	32	+++	16	+++	$+\infty$
Q_{Im}	0	+++	0	----	$-\infty$

Tabelul 2.2. Variația părților reală și imaginară pentru problema 2.2.14

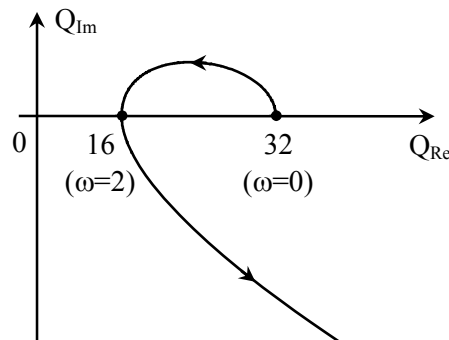


Figura 2.2. Hodograful Mihailov pentru problema 2.2.14

Conform figurii 2.2, hodograful Mihailov nu înconjoară originea de $4\frac{\pi}{2}$ ori (cum ar fi trebuit), deci sistemul este instabil.

2.2.15. Determinați domeniul valorilor parametrului $k \in \mathcal{R}$, astfel încât sistemul având polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + k^2$$

să fie stabil.

Rezolvare:

Această problemă, în comparație cu **problema 2.2.14**, reprezintă cazul general de studiu al stabilității pentru variațiile termenului liber din $Q(s)$. Utilizând criteriul Mihailov obținem:

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - 8\omega^2 + k^2 \\ Q_{Im}(\omega) = -4\omega(\omega^2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2Re} = \sqrt{4 \pm \sqrt{16 - k^2}} \\ \omega_{1Im} = 0, \omega_{2Im} = 2 \end{cases}$$

Pentru ca sistemul să fie stabil hodograful Mihailov trebuie să efectueze o rotație în jurul originii axelor de coordonate în sens trigonometric de $4\frac{\pi}{2}$ ori.

Ca această rotație să fie realizată trebuie îndeplinite condițiile: $k > 0$ (coeficienți nenuli) și $\omega_{1Im} < \omega_{1Re} < \omega_{2Im} < \omega_{2Re}$, (alternarea soluțiilor). Se obține astfel sistemul de inecuații, respectiv domeniul de valori pentru k (2.2.2).

$$\begin{cases} a_0 > 0 : k > 0 \\ \omega_{Re} \in \mathcal{R}_+ : \begin{cases} \sqrt{16 - k^2} \geq 0 \\ 4 \pm \sqrt{16 - k^2} \geq 0 \end{cases} \\ \omega_{1Re} < \omega_{2Im} : \sqrt{4 - \sqrt{16 - k^2}} < 2 \\ \omega_{2Re} > \omega_{2Im} : \sqrt{4 + \sqrt{16 - k^2}} > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \begin{cases} -4 \leq k \leq 4 \\ k \geq 0 \end{cases} \\ -4 < k < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 4 \quad (2.2.2)$$

Dacă parametrul $k \in (0, 4) \Rightarrow$ sistem stabil; dacă $k=\{0, 4\} \Rightarrow$ limita de stabilitate; dacă $k>4 \Rightarrow$ sistem instabil. Hodograful Mihailov este prezentat în Figura 2.3 pentru diferite valori ale lui k .

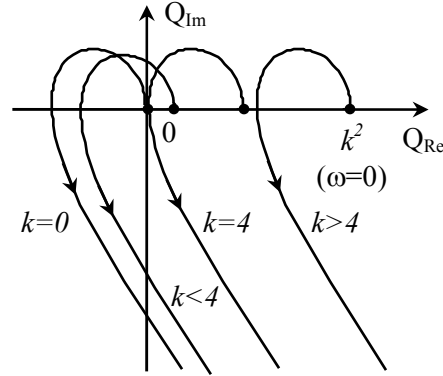


Figura 2.3. Hodograful Mihailov pentru diferite valori ale lui $k>0$

2.2.16. Utilizând criteriul lui Mihailov, precizați stabilitatea sistemelor caracterizate de următoarele polinoame caracteristice:

a) $Q_a(s) = s^5 + s^4 + 7s^3 + 4s^2 + 10s + 3$

b) $Q_b(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$

c) $Q_c(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

Rezolvare:

a)

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 \\ Q_{Im}(\omega) = \omega \cdot (\omega^4 - 7\omega^2 + 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2 Re} = \sqrt{2 \pm 1} \\ \omega_{1 Im} = 0 \\ \omega_{2,3 Im} = \sqrt{0.5(7 \pm 3)} \end{cases}$$

Modul de variație a părților reală și imaginară ale polinomului caracteristic pentru $\omega \in (0, +\infty)$ este dat în Tabelul 2.4, iar hodograful Mihailov în Figura 2.4.

ω	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$					
Q_{Re}	3	+++	0	---	---	0	+++	8	+++	$+\infty$	
Q_{Im}	0	+++	4	+++	0	---	$-2\sqrt{3}$	---	0	+++	$+\infty$

Tabelul 2.4. Variația părților reală și imaginară (problema 2.2.16a)

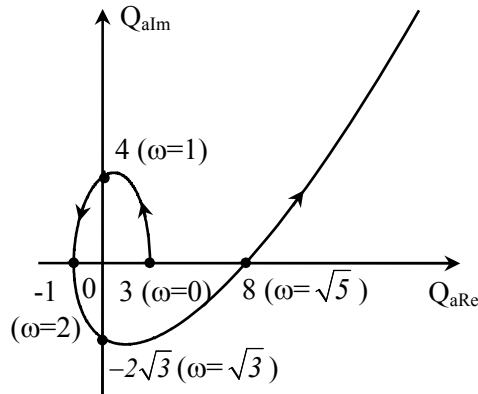


Figura 2.4. Hodograful Mihailov pentru sistemul $Q_a(s)$ (problema 2.2.16a)

Conform figurii 2.4 hodograful Mihailov înconjoară originea de $5\frac{\pi}{2}$ ori (5 fiind ordinul sistemului), deci sistemul este asimptotic stabil.

b)

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1 \\ Q_{Im}(\omega) = -\omega \cdot (\omega^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2Re} \notin \mathfrak{R}_+ \\ \omega_{1Im} = 0 \\ \omega_{2Im} = 1 \end{cases}$$

Modul de variație a părților reală și imaginară ale polinomului caracteristic pentru $\omega \in (0, +\infty)$ este dat în Tabelul 2.5, iar hodograful Mihailov este prezentat în Figura 2.5.

ω	0		1		$+\infty$
Q_{Re}	1	+++	1	+++	$+\infty$
Q_{Im}	0	+++	0	----	$-\infty$

Tabelul 2.5. Variația părților reală și imaginară (problema 2.2.16b)

Conform figurii 2.5, hodograful Mihailov nu înconjoară originea de $4\frac{\pi}{2}$ ori, deci sistemul este instabil.

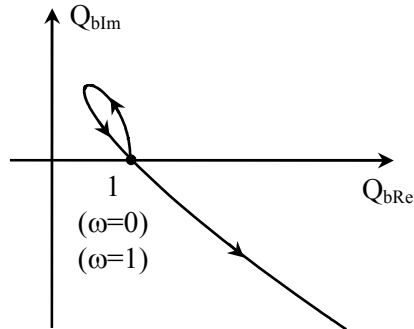


Figura 2.5. Hodograful Mihailov pentru sistemul $Q_b(s)$ (problema 2.2.16b)

c)

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 2 \\ Q_{Im}(\omega) = -\omega \cdot (\omega^2 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2Re} = \sqrt{0.5(3 \pm 1)} \\ \omega_{1Im} = 0 \\ \omega_{2Im} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Modul de variație a părților reală și imaginară ale polinomului caracteristic pentru $\omega \in (0, +\infty)$ este dat în Tabelul 2.6, iar hodograful Mihailov este prezentat în Figura 2.6.

ω	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Q_{Re}	2	0	0	2	$+\infty$
Q_{Im}	0	2	$\sqrt{2}$	0	$+\infty$

Tabelul 2.6. Variația părților reală și imaginară (problema 2.2.16c)

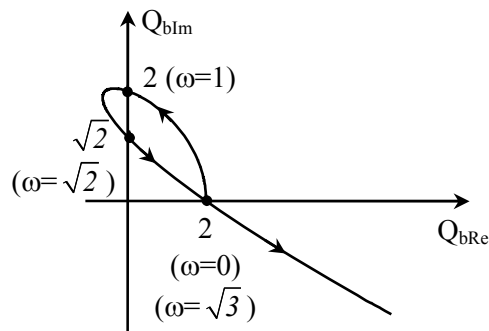


Figura 2.6. Hodograful Mihailov pentru sistemul $Q_c(s)$

2.2.17. Utilizând criteriul lui Mihailov, să se determine domeniul de valori al parametrului k astfel încât sistemul caracterizat de polinomul caracteristic de mai jos să fie stabil:

$$Q(s) = s^4 + 3s^3 + ks^2 + 2s + 1$$

Rezolvare:

$$\begin{cases} Q_{Re}(\omega) = \omega^4 - k\omega^2 + 1 \\ Q_{Im}(\omega) = -\omega \cdot (3\omega^2 - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1,2 Re} = \sqrt{0.5(k \pm \sqrt{k^2 - 4})} \\ \omega_{1 Im} = 0 \\ \omega_{2 Im} = \sqrt{2/3} \end{cases}$$

Se pun condițiile de stabilitate (coeficienții pozitivi; soluțiile ω_{Re} , ω_{Im} să alterneze):

$$\begin{cases} k > 0 \\ \omega_{1 Im} < \omega_{1 Re} : 0 < \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}} \\ \omega_{1 Re} < \omega_{2 Im} : \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}} < \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \omega_{2 Im} < \omega_{2 Re} : \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}} > \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow k > \frac{13}{6}$$

Modul de variație a părților reală și imaginară ale polinomului caracteristic pentru $\omega \in (0, +\infty)$ este dat în Tabelul 2.7, iar hodograful Mihailov în Figura 2.7.

ω		0	ω_{1Re}	$\sqrt{2/3}$	ω_{2Re}	$+\infty$
I. ($k < 13/6$)	Q_{Re}	1	+++	7/9	+++	$+\infty$
	Q_{Im}	0	+++	0	---	$-\infty$
II. ($k = 13/6$)	Q_{Re}	1	+++	0	--	0
	Q_{Im}	0	+++	0	--	$-5\sqrt{3}/4$
III. ($k > 13/6$)	Q_{Re}	1	++	0	--	$-5/9$
	Q_{Im}	0	++	0.55 ($k=3$)	++	0
					--	-9.1 ($k=3$)
						++
						$+\infty$
						--
						$-\infty$

Tabelul 2.7. Variația părților reală și imaginară (problema 2.2.17)

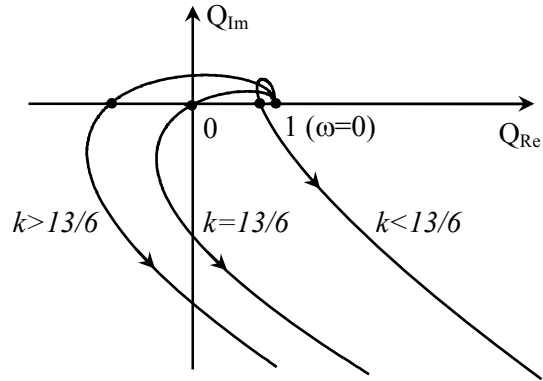


Figura 2.7. Hodograful Mihailov (problema 2.2.17)

Din Figura 2.7 se observă că sistemul este stabil pentru $k > 13/6$ (hodograful înconjoară originea de $4\pi/2$ ori), este la limita stabilității pentru $k = 13/6$ ($\omega_{1Re} = \omega_{1Im}$) și este instabil pentru $k < 13/6$ ($\omega_{12Re} \notin \mathcal{R}$).

2.2.18. Utilizând criteriul fracțiilor continue, determinați condițiile necesare pentru ca un sistem caracterizat de un polinom caracteristic de ordinul 3 să fie stabil.

Rezolvare:

Polinomul caracteristic de ordinul 3 este: $Q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$.
Descompunere în fracție continuă se face conform (2.1.6) și (2.1.7):

$$\frac{Q_{\text{impar}}(s)}{Q_{\text{par}}(s)} = \frac{a_3s^3 + a_1s}{a_2s^2 + a_0} = \frac{a_3}{a_2}s + \frac{\left(a_1 - \frac{a_3a_0}{a_2}\right) \cdot s}{a_2s^2 + a_0}$$

$$\frac{Q_{\text{impar}}(s)}{Q_{\text{par}}(s)} = \frac{a_3}{a_2}s + \frac{l}{\left(\frac{a_2}{a_1 - \frac{a_3a_0}{a_2}}\right) \cdot s + \frac{l}{\frac{a_1 - \frac{a_3a_0}{a_2}}{a_0} \cdot s}}$$

Pentru ca sistemul să fie stabil trebuie îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} \frac{a_3}{a_2} > 0 \\ \frac{a_2}{a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2}} > 0 \\ \frac{a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2}}{a_0} > 0 \end{cases}$$

Dacă $a_3 > 0$, condițiile necesare de stabilitate sunt:

$$\begin{cases} a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0 > 0 \end{cases}$$

2.2.19. Pot fi aplicate criteriile algebrice de stabilitate unor sisteme care conțin întârzieri în timp?

Rezolvare:

Sistemele care conțin întârzieri în timp nu au polinoame caracteristice de forma (2.1.1), deci criteriile algebrice de stabilitate nu pot fi aplicate în mod direct. De exemplu, sistemul caracterizat de polinomul:

$$Q(s) = s^2 + s + e^{-sT}$$

are un număr infinit de rădăcini. Cu toate acestea, în unele situații termenul e^{-sT} poate fi aproximat, și se obțin informații despre stabilitatea sistemului. Presupunem că facem aproximarea cu primii doi termeni din dezvoltarea în serie *Taylor*:

$$Q(s) = s^2 + s + (1 - sT) = s^2 + (1 - T)s + 1$$

Oricare dintre criteriile algebrice de stabilitate poate fi aplicată acestui polinom caracteristic. Condiția dată de criteriul lui Hurwitz este:

$$D_1 = D_2 = 1 - T > 0$$

Deci sistemul este stabil dacă întârzierea introdusă de sistem este mai mică de o secundă ($T < 1$).

2.2.20. Se consideră un sistem cu funcția de transfer în buclă deschisă:

$$T(s) = -F(s) \cdot R(s) = -\frac{16}{9} \cdot \frac{10^4}{(s+10)^4} \quad (2.2.3)$$

Studiați stabilitatea sistemului utilizând criteriul lui Nyquist. Determinați marginile de câștig și de fază ale sistemului.

Rezolvare:

Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, se observă că sistemul cu buclă deschisă este stabil ($p_d = 0$) și este cu reacție pozitivă ($T(s) < 0$). Pentru ca sistemul cu buclă închisă să rămână stabil trebuie ca hodograful Nyquist să nu înconjoare punctul critic ($1, j0$). În Tabelul 2.8 este prezentat modul de variație a părților reală și imaginară ale raportului $T(s)$ când $\omega \in (0, +\infty)$ și care se obține prin dezvoltarea expresiei lui $T(s)$:

$$T(j\omega) = -\frac{16}{9} \cdot \frac{10^4}{(j\omega + 10)^4} = \frac{-\frac{16}{9} \cdot 10^4}{\left(\sqrt{\omega^2 + 100} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega}{10}}\right)^4}$$

$$T(j\omega) = \frac{-\frac{16}{9} \cdot 10^4}{(\omega^2 + 100)^2 \cdot \left[\cos\left(4 \arctg \frac{\omega}{10}\right) + j \cdot \sin\left(4 \arctg \frac{\omega}{10}\right)\right]}$$

de unde rezultă părțile reală și imaginară:

$$\begin{cases} T_{Re}(j\omega) = \frac{-\frac{16}{9} \cdot 10^4 \cdot \cos\left(4 \arctg \frac{\omega}{10}\right)}{(\omega^2 + 100)^2} \\ T_{Im}(j\omega) = \frac{\frac{16}{9} \cdot 10^4 \cdot \sin\left(4 \arctg \frac{\omega}{10}\right)}{(\omega^2 + 100)^2} \end{cases}$$

Soluțiile părților reală și imaginară sunt:

$$\begin{cases} \omega_{Re} = 10 \cdot \operatorname{tg} \left[(2k+1) \cdot \frac{\pi}{8} \right], & k = \overline{0 \div m} \\ \omega_{Im} = 10 \cdot \operatorname{tg} \left(k \cdot \frac{\pi}{4} \right) & , k = \overline{0 \div m} \setminus 2 \cdot (2m+1) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

în care se face excluderea valorilor lui k pentru care $\operatorname{tg}(x) \rightarrow \infty$. Din (2.2.4) se observă că pentru $k > 2$ soluțiile ω_{Re} și ω_{Im} se repetă, deci ne limităm la studiul stabilității pentru primele patru soluții diferite, când $\omega \in (0, +\infty)$.

ω	0		4.14		10		24.14		$+\infty$
	(ω_{Im})		(ω_{Re})		(ω_{Im})		(ω_{Re})		
T_{Re}	-16/9	---	0	++	4/9	++	0	---	0
T_{Im}	0	++	1.3	++	0	---	-0.04	---	0

Tabelul 2.8. Variația părților reală și imaginară

În Figura 2.8 este prezentat hodograful Nyquist din care rezultă că sistemul rămâne stabil la închiderea buclei, deoarece hodograful nu înconjoară punctul critic $(1, j0)$.

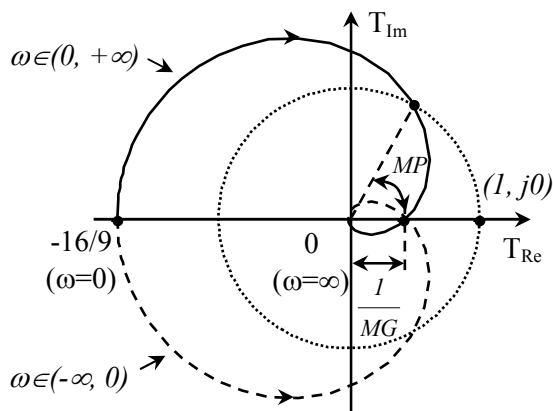


Figura 2.8. Hodograful Nyquist pentru sistemul $T(s)$ (problema 2.2.20)

Observație: $T(j\omega)$ se mai poate obține ridicând la puterea 4 monomul de la numitor și înlocuind $s=j\omega$.

$$T(j\omega) = \frac{-\frac{16}{9} \cdot 10^4 \cdot [\omega^4 - 600\omega^2 + 10^4 + 40j\omega \cdot (\omega^2 - 100)]}{(\omega^4 - 600\omega^2 + 10^4)^2 + (40\omega)^2 \cdot (\omega^2 - 100)^2}$$

Soluțiile părților reală și imaginară au aceleași valori ca în (2.2.4) pentru $k=0, 1, 2$, iar hodograful Nyquist este identic cu cel din Figura 2.8.

Pentru a determina marginea de câștig MG (Figura 2.8), se observă că $\arg\{T(0)\} = \pi$, deci se face "aliniera" argumentului la nivelul 0 când $\omega \rightarrow 0$ și se aplică (2.1.12). Se obține sistemul:

$$\begin{cases} |T(j\omega_\pi)| = \frac{16}{9} \cdot \frac{10^4}{(\omega_\pi^2 + 100)^2} \\ -4 \operatorname{arctg} \frac{\omega_\pi}{10} = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_\pi = 10 \\ |T(j\omega_\pi)| = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Prin urmare, marginea de câștig al sistemului este $MG = \frac{1}{|T(j\omega_\pi)|} = 2.25$.

Pentru a determina marginea de fază se aplică (2.1.12) și rezultă:

$$\begin{cases} |T(j\omega_{0dB})| = \frac{16}{9} \cdot \frac{10^4}{(\omega_{0dB}^2 + 100)^2} = 1 \\ \arg\{T(j\omega_{0dB})\} = -4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\omega_{0dB}}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{0dB} = \frac{10}{\sqrt{3}} [\text{rad/s}] \\ \arg\{T(j\omega_{0dB})\} = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Deci marginea de fază a sistemului este (Figura 2.8):

$$MP = \pi + \arg\{T(j\omega_{0dB})\} = \frac{\pi}{3}$$

2.2.21. Se consideră sistemele cu următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$T_1(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k \cdot (s + z_1)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2)}$$

$$T_2(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k \cdot (s - z_1)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2)}$$

$$T_3(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k \cdot (s + z_1)}{(s - p_1) \cdot (s + p_2)}$$

$$T_4(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k \cdot (s - z_1)}{(s - p_1) \cdot (s + p_2)}$$

unde $0 < p_1 < z_1 < p_2$, $k > 0$. Pentru $p_1 = 0.5$, $z_1 = 1$, $p_2 = 2$ și $k = 10$, să se studieze stabilitatea sistemelor în buclă închisă utilizând criteriul lui Nyquist.

Rezolvare:

Din modul de definire a raportului la întoarcere $T(s)$ rezultă că toate sistemele din enunț au reacție negativă. Prin urmare, punctul critic este $(-1, j0)$.

Pentru sistemul cu $T_1(s)$, prin dezvoltarea expresiei și prin separarea părților reală, respectiv imaginară, obținem:

$$\begin{cases} T_{1Re}(j\omega) = \frac{k \cdot [p_1 p_2 z_1 + \omega^2 \cdot (p_1 + p_2 - z_1)]}{(p_1 p_2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (p_1 + p_2)^2} \\ T_{1Im}(j\omega) = \frac{k\omega \cdot [p_1 p_2 - z_1 \cdot (p_1 + p_2) - \omega^2]}{(p_1 p_2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (p_1 + p_2)^2} \end{cases}$$

Înlocuind valorile pentru p_1, p_2, z_1, k , obținem:

$$\begin{cases} T_{1Re}(j\omega) = \frac{10 \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \omega^2 + 1 \right]}{(1 - \omega^2)^2 + \frac{25}{4} \cdot \omega^2} \\ T_{1Im}(j\omega) = \frac{-10\omega \cdot \left[\omega^2 + \frac{3}{2} \right]}{(1 - \omega^2)^2 + \frac{25}{4} \cdot \omega^2} \end{cases} \Rightarrow \omega_{12Re}, \omega_{12Im} \notin \mathbb{R}_+$$

Modurile de variație ale părților reală și imaginară ale raportului $T_I(s)$ dacă $\omega \in (0, +\infty)$ sunt precizate în Tabelul 2.9, iar hodograful Nyquist este prezentat în Figura 2.10a. Cu linie continuă este reprezentat hodograful când $\omega \in (0, +\infty)$, iar cu linie întreruptă $\omega \in (-\infty, 0)$.

ω	0		$+\infty$
T_{IRe}	10	+++	0
T_{IIm}	0	----	0

Tabelul 2.9. Variația părților reală și imaginară $T_I(j\omega)$ (problema 2.2.21)

În acest caz toți polii lui $T_I(s)$ se află în semiplanul stâng al planului s ($p_d = 0$). Deci sistemul în buclă deschisă este stabil. Conform criteriului Nyquist, pentru ca sistemul în buclă închisă să rămână stabil, hodograful nu trebuie să înconjoare punctul critic $(-1, j0)$. Din Figura 2.10a se observă că sistemul în buclă închisă rămâne stabil.

Observație: Dacă sistemul considerat avea reacție pozitivă sistemul în buclă închisă ar fi fost deasemenea stabil! În acest caz hodograful (Figura 2.9) variază în sens orar în semiplanul stâng și nu înconjoară punctul critic $(1, j0)$.

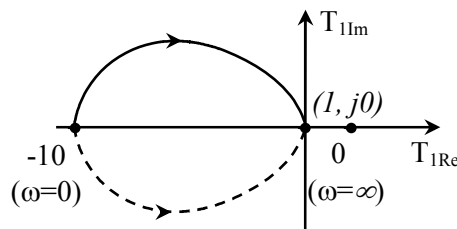


Figura 2.9. Hodograful Nyquist pentru sistemul $T_I(s)$ dacă reacția este pozitivă

Pentru sistemul cu $T_2(s)$ ambii poli se situează în semiplanul stâng ($p_d = 0$). Sistemul în buclă deschisă este stabil.

$$\begin{cases} T_{2Re}(j\omega) = \frac{10 \cdot \left[\frac{7}{2} \cdot \omega^2 - 1 \right]}{(1 - \omega^2)^2 + \frac{25}{4} \cdot \omega^2} \\ T_{2Im}(j\omega) = \frac{-10\omega \cdot \left[\omega^2 - \frac{7}{2} \right]}{(1 - \omega^2)^2 + \frac{25}{4} \cdot \omega^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1Re} = \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \omega_{1Im} = 0 \\ \omega_{2Im} = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

Modurile de variație ale părților reală și imaginară ale raportului $T_2(s)$ dacă $\omega \in (0, +\infty)$ sunt precizate în Tabelul 2.10, iar hodograful Nyquist în Figura 2.10b.

ω	0		$\sqrt{2/7}$		$\sqrt{7/2}$		$+\infty$
T_{2Re}	-10	----	0	+++	2	+++	0
T_{2Im}	0	+++	$14\sqrt{2/7}$	+++	0	----	0

Tabelul 2.10. Variația părților reală și imaginară $T_2(j\omega)$ (problema 2.2.21)

În acest caz, punctul critic $(-1, j0)$ este înconjurat o dată în sens orar (Figura 2.10b), deci sistemul în buclă închisă devine instabil.

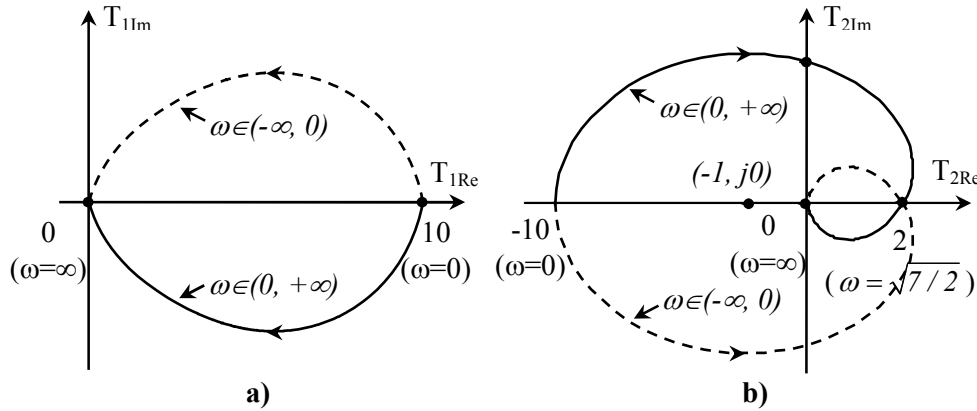


Figura 2.10. Variația hodografului Nyquist: a) sistemul $T_1(s)$, b) sistemul $T_2(s)$

Pentru sistemul cu $T_3(s)$ există un pol în semiplanul drept ($p_d = 1$). Sistemul în buclă deschisă este instabil.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{3Re}(j\omega) = \frac{10 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \omega^2 - 1 \right]}{(1 + \omega^2)^2 + \frac{9}{4} \cdot \omega^2} \\ T_{3Im}(j\omega) = \frac{-10\omega \cdot \left[\omega^2 + \frac{5}{2} \right]}{(1 + \omega^2)^2 + \frac{9}{4} \cdot \omega^2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \omega_{1Re} = \sqrt{2} \\ \omega_{1Im} = 0 \end{cases}$$

Modurile de variație ale părților reală și imaginară ale raportului $T_3(s)$ dacă $\omega \in (0, +\infty)$ sunt precizate în Tabelul 2.11, iar hodograful Nyquist este reprezentat în Figura 2.11a.

ω	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
T_{3Re}	-10	----	0	+++	0
T_{3Im}	0	----	$-10\sqrt{2}/3$	----	0

Tabelul 2.11. Variația părților reală și imaginară $T_3(j\omega)$ (problema 2.2.21)

În acest caz, hodograful Nyquist înconjoară punctul critic de p_d ori, dar în sens negativ, deci sistemul în buclă închisă rămâne instabil (Figura 2.11a).

Pentru sistemul cu $T_4(s)$ există un pol în semiplanul drept ($p_d = 1$), deci sistemul în buclă deschisă este instabil.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{4Re}(j\omega) = \frac{10 \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot \omega^2 + 1 \right]}{\left(1 + \omega^2 \right)^2 + \frac{9}{4} \cdot \omega^2} \\ T_{4Im}(j\omega) = \frac{-10\omega \cdot \left[-\omega^2 + \frac{1}{2} \right]}{\left(1 + \omega^2 \right)^2 + \frac{9}{4} \cdot \omega^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_{12Re} \notin \mathfrak{R} \\ \omega_{1Im} = 0 \\ \omega_{2Im} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Modurile de variație ale părților reală și imaginară ale raportului $T_4(s)$ când $\omega \in (0, +\infty)$ sunt precizate în Tabelul 2.12, iar hodograful Nyquist este prezentat în Figura 2.11b. În acest caz, punctul critic $(-1, j0)$ nu este înconjurat de p_d ori în sens orar, deci sistemul în buclă închisă rămâne instabil.

ω	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
T_{4Re}	10	+++	20/3	+++	0
T_{4Im}	0	+++	0	----	0

Tabelul 2.12. Variația părților reală și imaginară $T_4(j\omega)$ (problema 2.2.21)

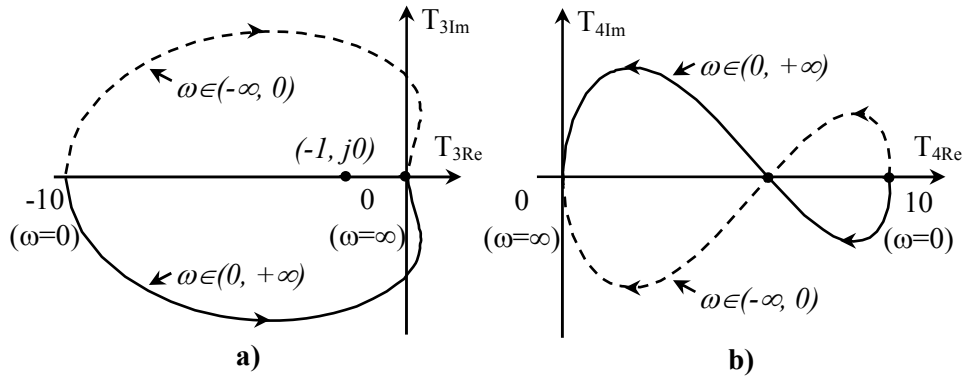


Figura 2.11. Hodografurile Nyquist pentru sistemele: a) $T_3(s)$ și b) $T_4(s)$

2.2.22. Se consideră un sistem cu reacție având funcția de transfer în buclă deschisă:

$$T(s) = \frac{K_0}{s(1 + sT_1)}$$

- a) Să se determine domeniul de valori pentru K_0 și T_1 pentru care sistemul este stabil.
- b) Să se determine condițiile pentru K_0 și T_1 astfel încât bucla de reacție să aibă o rezervă de stabilitate $Re\{s\} = \alpha = -a$, $a > 0$.
- c) Să se determine condițiile pentru K_0 și T_1 astfel încât rădăcinile ecuației caracteristice să fie situate în domeniul $\varphi_0 \leq \pm 60^\circ$ (Figura 2.12).

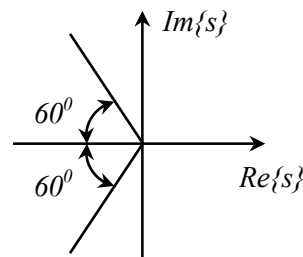


Figura 2.12. Domeniul de stabilitate pentru punctul c)

Rezolvare:

a) Se aplică criteriul lui Routh polinomului:

$$P(s) = 1 + T(s)$$

de unde rezultă polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^2 T_1 + s + K_0 \tag{2.2.5}$$

iar tabloul lui Routh este:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & T_1 & K_0 \\ s^1 & I & \\ s^0 & & K_0 \end{array}$$

Sistemul este stabil dacă: $T_1 > 0$ și $K_0 > 0$.

b) Se face schimbarea de variabilă (transformare conformă) $s_1 = s - a \Rightarrow s = s_1 + a$ și se înlocuiește în polinomul caracteristic:

$$Q(s) = (s_1 - a)^2 T_1 + (s_1 - a) + K_0 = T_1 \cdot s_1^2 + s_1 \cdot (1 - 2aT_1) + a^2 T_1 - a + K_0$$

Se aplică criteriul lui Hurwitz:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 - 2aT_1 & 0 \\ T_1 & a^2 T_1 - a + K_0 \end{vmatrix}, \quad D_1 = 1 - 2aT_1$$

Condițiile de stabilitate sunt:

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ 1 - 2aT_1 > 0 \\ (1 - 2aT_1) \cdot (a^2 T_1 - a + K_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 > 0 \\ T_1 < \frac{1}{2a} \\ T_1 > \frac{a - K_0}{a^2} \end{cases} \Rightarrow 0 < T_1 < \frac{1}{2a}$$

c) Discriminantul polinomului caracteristic (2.2.5) este:

$$\Delta = 1 - 4K_0 T_1$$

de unde rezultă două cazuri: $\Delta \geq 0$ și $\Delta < 0$:

I. Pentru cazul $\Delta \geq 0$ (rădăcini reali: $s_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2T_1}$) obținem:

$$1 - 4K_0 T_1 \geq 0 \Rightarrow K_0 T_1 \leq \frac{1}{4}$$

Condiția ca rădăcinile să se situeze în domeniul impus este ca $s_{12} \leq 0$ pentru care rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \sum(s_i) \leq 0 \\ \prod(s_i) > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{T_1} \leq 0 \\ \frac{K_0}{T_1} > 0 \\ K_0 T_1 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 > 0 \\ K_0 > 0 \\ K_0 T_1 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

II. Pentru cazul $\Delta < 0$ (rădăcini complex conjugate: $s_{12} = \frac{-1 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2T_1}$) obținem:

$$1 - 4K_0 T_1 < 0 \Rightarrow K_0 T_1 > \frac{1}{4}$$

În acest caz se pun condițiile:

$$-\operatorname{tg} 60^\circ < \frac{\operatorname{Im}\{s\}}{\operatorname{Re}\{s\}} < \operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow -\sqrt{3} < \sqrt{-\Delta} < \sqrt{3}$$

și rezultă sistemul:

$$\begin{cases} K_0 T_1 > \frac{1}{4} \\ 4K_0 T_1 - 1 < 3 \end{cases}$$

Condițiile de stabilitate în acest caz sunt:

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ K_0 > 0 \\ \frac{1}{4} < K_0 T_1 < 1 \end{cases}$$

Domeniile de stabilitate pentru cele două cazuri sunt prezentate în Figura 2.13.

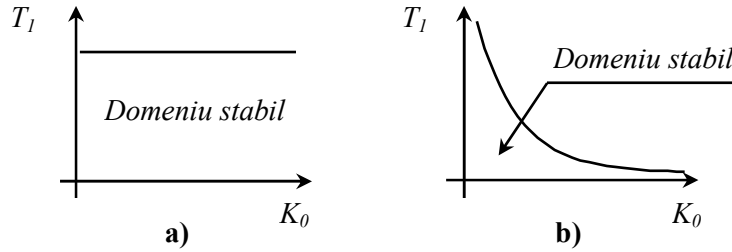


Figura 2.13. Domeniile de stabilitate: a) $\Delta \geq 0$, b) $\Delta < 0$

2.2.23. Se dă circuitul din Figura 2.14 cu AO ideal. Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, să se determine frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor.

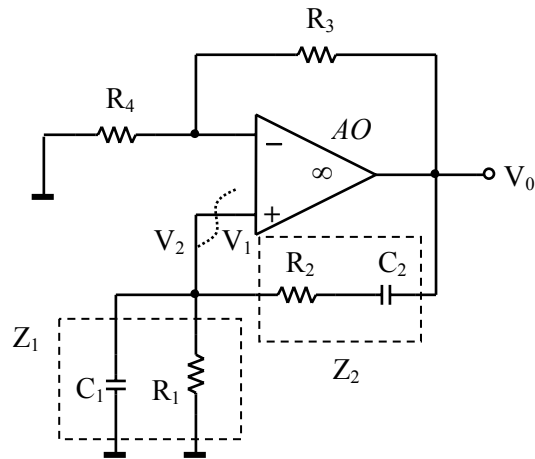


Figura 2.14. Oscilator în punte Wien

Rezolvare:

Conform criteriului lui Nyquist, pentru ca un circuit cu reacție pozitivă să devină oscilator, hodograful Nyquist trebuie să treacă prin punctul critic $(1, j0)$. Adică $T(j\omega) = 1$ ($T_{Re}(j\omega_0) = 1$, $T_{Im}(j\omega_0) = 0$) la $\omega = \omega_0$, unde ω_0 este frecvența de oscilație. Se întrerupe bucla de reacție în punctul indicat în figură și se obține:

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{V_0(s)}{V_1(s)} \cdot \frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \\
 &= \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{sR_1C_2}{1 + s(R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_1C_2}
 \end{aligned}$$

Răspunsul în frecvență este dat de:

$$T(j\omega) = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{j\omega R_1 C_2 \left[1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 - j\omega \cdot (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2)\right]}{\left(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2\right)^2 + \omega^2 \cdot (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2)^2}$$

Frecvența de oscilație se determină din condiția $T_{Im}(j\omega) = 0$:

$$1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (2.2.6)$$

Condiția de amorsare a oscilațiilor se determină din $T_{Re}(j\omega) = 1$:

$$\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{\omega_0^2 R_1 C_2 \cdot (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2)}{\omega_0^2 \cdot (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2)^2} = 1 \Rightarrow \frac{R_3}{R_4} = \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} \quad (2.2.7)$$

Dacă $C = C_1 = C_2$ și $R = R_1 = R_2 \Rightarrow R_3 = 2R_4$.

La limita de stabilitate, circuitul funcționează în condițiile precizate de (2.2.6) și (2.2.7). Aceasta rezultă și prin faptul că rădăcinile polinomului caracteristic, pentru un câștig de valoare impusă de condiția de amorsare (2.2.7) sunt pur imaginare.

Valori mai mari ale câștigului duc sistemul la instabilitate, iar valori mai mici asigură stabilitatea sistemului.

2.2.24. Se consideră circuitul cu reacție din Figura 2.15, în care AO este ideal. Determinați frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor, în situațiile:

- a) Z_1, Z_2 sunt capacitoare și Z_3 este inductor (oscilator Colpitts);
- b) Z_1, Z_2 sunt inductoare și Z_3 este capacitor (oscilator Hartley).

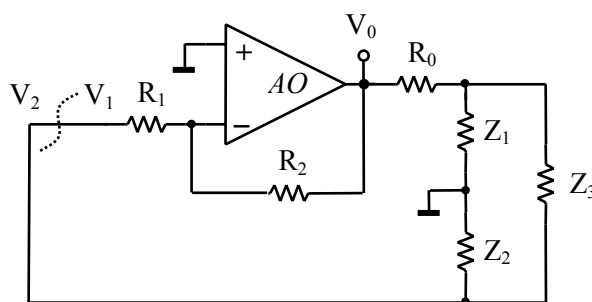


Figura 2.15. Schema de principiu a oscilatoarelor Colpitts și Hartley

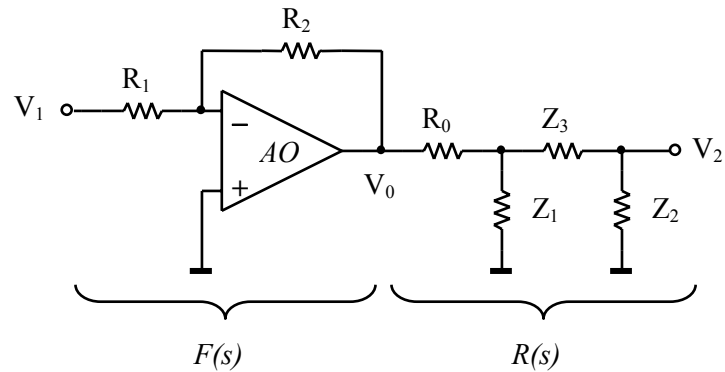


Figura 2.16. Circuitul cu buclă deschisă

Rezolvare:

Se întrerupe bucla de reacție ca în Figura 2.15 și se obține circuitul cu buclă deschisă (Figura 2.16) pentru care se scriu ecuațiile (2.2.8). Se consideră $R_{1,2} \gg Z_2$.

$$\begin{cases} V_0 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_1 \\ V_A = \frac{\frac{1}{R_0} V_0 + \frac{1}{Z_3} V_2}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}} \\ V_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} V_A \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Se obține raportul la întoarcere (reacția fiind pozitivă):

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot Z_1 Z_2 Z_3}{Z_3 R_0 \cdot (Z_1 + Z_2) + Z_3^2 \cdot (Z_1 + R_0) + Z_1 Z_2 Z_3}$$

a) În acest caz, impedanțele sunt:

$$Z_1 = \frac{1}{sC_1}, \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2}, \quad Z_3 = sL$$

iar $T(s)$ devine:

$$T_a(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{I}{LC_1C_2R_0}}{s^3 + s^2 \cdot \frac{I}{R_0C_1} + s \cdot \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} + \frac{I}{LC_1C_2R_0}}$$

Se impune condiția de oscilație $T(j\omega) = I$ și se obțin frecvența de oscilație:

$$\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$$

respectiv condiția de amorsare a oscilațiilor:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

b) În acest caz, impedanțele sunt:

$$Z_1 = sL_1, \quad Z_2 = sL_2, \quad Z_3 = \frac{I}{sC}$$

iar $T(s)$ devine:

$$T_b(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot s^3}{s^3 + s^2 \cdot \frac{R_0(L_1 + L_2)}{L_1L_2} + s \cdot \frac{I}{L_2C} + \frac{R_0}{L_1L_2C}}$$

Din condiția de oscilație rezultă frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{I}{\sqrt{C \cdot (L_1 + L_2)}} \\ \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_1}{L_2} \end{cases}$$

2.2.25. Se dă circuitul din Figura 2.17 cu AO ideal (oscilator cu deplasare de fază). Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, determinați condiția de amorsare a oscilațiilor și frecvența de oscilație.

Rezolvare:

Se întrerupe bucla de reacție în punctul indicat în Figura 2.17. Funcția de transfer în buclă deschisă este:

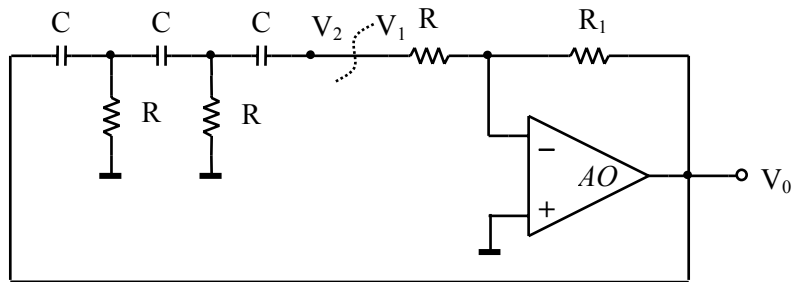


Figura 2.17. Oscilator cu deplasare de fază

$$T(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} \cdot \frac{V_2(s)}{V_0(s)}$$

Funcția de transfer a căii directe este:

$$F(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Bucula de reacție este dată în Figura 2.18. Pentru a determina funcția de transfer al buclei de reacție, se aplică teorema lui Millman în nodurile V_A , V_B , iar în V_2 teorema divizorului de tensiune:

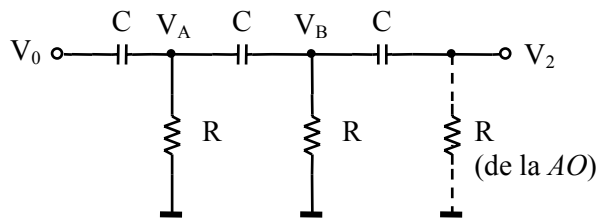


Figura 2.18. Ramura de reacție (rețea defazoare)

$$\begin{cases} V_A = \frac{sC \cdot V_0 + sC \cdot V_B}{2sC + I/R} = \frac{s\tau \cdot (V_0 + V_B)}{I + 2s\tau} \\ V_B = \frac{sC \cdot V_A + sC \cdot V_2}{2sC + I/R} = \frac{s\tau \cdot (V_A + V_2)}{I + 2s\tau} \\ V_2 = \frac{s\tau}{I + s\tau} \cdot V_B \end{cases}$$

unde s-a notat $\tau = RC$. Funcția de transfer a buclei de reacție este:

$$R(s) = \frac{V_2}{V_0} = \frac{\tau^3 s^3}{\tau^3 s^3 + 6\tau^2 s^2 + 5\tau s + I}$$

Se obține astfel raportul la întoarcere (reacția fiind pozitivă):

$$T(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\tau^3 s^3}{\tau^3 s^3 + 6\tau^2 s^2 + 5\tau s + I}$$

Pentru $s=j\omega$ obținem:

$$T(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega^3 \tau^3 \left[\omega\tau \cdot (\omega^2 \tau^2 - 5) - j(1 - 6\omega^2 \tau^2) \right]}{(1 - 6\omega^2 \tau^2)^2 + \omega^2 \tau^2 \cdot (\omega^2 \tau^2 - 5)^2}$$

Conform criteriului Nyquist, pentru ca circuitul să oscileze, trebuie ca hodograful Nyquist să treacă prin punctul critic $(1, j0)$. Din condiția $T_{im}(j\omega_0) = 0$ obținem frecvența de oscilație:

$$1 - 6\omega^2 \tau^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau\sqrt{6}} = \frac{1}{RC\sqrt{6}}$$

iar din $T_{re}(j\omega_0) = 1$ obținem condiția de amorsare a oscilațiilor:

$$-\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega_0^4 \tau^4 (\omega_0^2 \tau^2 - 5)}{\omega_0^2 \tau^2 (\omega_0^2 \tau^2 - 5)^2} \Bigg|_{\omega_0 = \frac{1}{\tau\sqrt{6}}} = 1 \Rightarrow R_2 = 29 \cdot R_1$$

2.3. Probleme propuse

2.3.1. Să se studieze stabilitatea sistemelor având următoarele polinoame caracteristice, utilizând criteriul lui Routh.

a) $Q_a(s) = s^4 + s^3 - s - 1$

b) $Q_b(s) = 2s^3 + 4s^2 + 4s + 12$

c) $Q_c(s) = s^5 + s^4 + 10s^2 + 5s + 24$

Soluție: Din tablourile lui Routh rezultă că toate sistemele sunt instabile.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 s^4 \\
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & -1 \\
 1 & -1 & \\
 1 & -1 & \\
 0 & & \\
 0 & &
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cc}
 2 & 4 \\
 4 & 12 \\
 -4 & \\
 12 &
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 s^5 \\
 s^4 \\
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 5 \\
 1 & 10 & 24 \\
 -10 & -19 & \\
 8.1 & 24 & \\
 86.1 & & \\
 24 & &
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

2.3.2. Să se studieze stabilitatea sistemelor cu următoarele polinoame caracteristice. Se vor utiliza criteriile lui Routh și Hurwitz.

a) $Q_a(s) = s^3 + ks^2 + 2s + 1$

b) $Q_b(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + ks + 3$

c) $Q_c(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$

d) $Q_d(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

e) $Q_e(s) = 3s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

Soluție: Cu ambele criterii rezultă: **a)** pentru $k > 0.5$ sistemul este stabil; **b)** instabil $\forall k$; **c)** stabil; **d)** stabil; **e)** instabil.

2.3.3. Determinați valorile parametrilor a și b , astfel încât sistemele caracterizate de polinoamele caracteristice de mai jos să fie stabile. Se vor utiliza criteriile lui Routh și Hurwitz.

a) $Q_a(s) = s^3 + as^2 + bs + 3$

b) $Q_b(s) = s^4 + as^3 + 2s^2 + bs + 1$

Soluție: a) $a > 0, ab > 3$; b) instabil $\forall a, b$.

2.3.4. Determinați valorile parametrului k , astfel încât sistemele caracterizate de polinoamele caracteristice de mai jos să fie stabile. Se va utiliza criteriul lui Hurwitz.

a) $Q_a(s) = s^3 + 14s^2 + 56s + k$

b) $Q_b(s) = s^3 + (4+k)s^2 + 6s + 12$

Soluție: a) $0 < k < 784$; b) $2 < k < 4$

2.3.5. Utilizând criteriul lui Mihailov să se studieze stabilitatea sistemelor având următoarele polinoame caracteristice:

a) $Q_a(s) = s^5 + 4s^4 + s^3 + 8s^2 + 16$

b) $Q_b(s) = s^5 - 2s^2 + 6$

Soluție: La nici unul dintre sisteme hodograful nu înconjoară originea (Figura 2.19), deci sistemele sunt instabile.

a)

ω	0		1		$+\infty$
Q_{aRe}	64	+++	60	+++	$+\infty$
Q_{aIm}	0	----	0	+++	$+\infty$

b)

ω	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Q_{bRe}	6	+++	0	+++	$+\infty$
Q_{bIm}	0	+++	$9\sqrt{3}$	----	$-\infty$

Tabelul 2.13. Variațiile părților reală și imaginară pentru problema 2.3.5

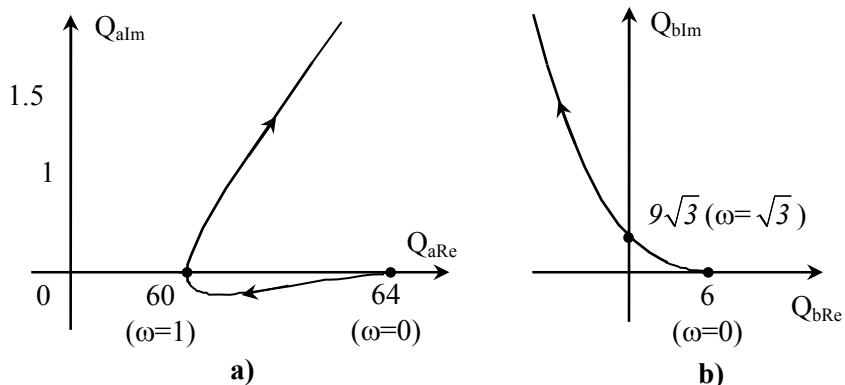


Figura 2.19 Hodografurile Mihailov pentru problema 2.3.5

2.3.6. Utilizând criteriul lui Mihailov să se studieze stabilitatea sistemului având polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^3 + 3s^2 + 6s + 12$$

Soluție: Hodograful din Figura 2.20 înconjoară originea în sens trigonometric de $3\pi/2$ ori, deci sistemul este stabil.

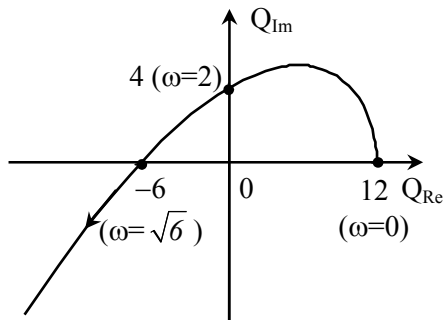


Figura 2.20 Hodograful Mihailov pentru problema 2.3.6

2.3.7. Determinați valorile parametrului k , astfel încât sistemele caracterizate de polinoamele caracteristice de mai jos să fie stabile. Se va utiliza criteriul lui Mihailov.

a) $Q_a(s) = ks^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$

b) $Q_b(s) = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32(k-1)s + k$

Soluție: a) Soluțiile părților reală și imaginară sunt: $\omega_{1,2Re} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-k}}{k}}$, $\omega_{1Im} = 0$, $\omega_{2Im} = 1/\sqrt{2}$. Din Figura 2.21a rezultă că sistemul este la limita de stabilitate pentru $k=0$ și instabil în rest.

ω		0		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
I. ($k=0$)	Q_{Re}	1	+++	0		----		$-\infty$
	Q_{Im}	0	+++	0		----		$-\infty$
II. ($k=1$)	Q_{Re}	1	+++	1/16	+++	0	+++	$+\infty$
	Q_{Im}	0	+++	0	----	-1	----	$-\infty$
III. ($k>1$)	Q_{Re}	1	+++	$k/16$		+++		$+\infty$
	Q_{Im}	0	+++	0		----		$-\infty$

Tabelul 2.14. Variația părților reală și imaginară în funcție de k (problema 2.3.7a)

b) Soluțiile părților reală și imaginară sunt: $\omega_{1,2Re} = \sqrt{12 \pm \sqrt{144-k}}$, $\omega_{1Im} = 0$, $\omega_{2Im} = 2\sqrt{k-1} \Rightarrow k \geq 1$ și $k \leq 144$ (condiție de existență a soluțiilor reale). Din Figura 2.21b rezultă că sistemul este la limita de stabilitate pentru $k=0$ (condiția $Q(j\omega)=0$); pentru $k \in (1.01, 6.93)$ (ce rezultă din $\omega_{1Im} < \omega_{1Re} < \omega_{2Im} < \omega_{2Re}$) sistemul este stabil (înconjoară originea de $4\pi/2$ ori); în rest este instabil.

ω		0		ω_{1Re}		ω_{2Im}		ω_{2Re}		$+\infty$
I. ($k=0$)	Q_{Re}	0		$(\omega_{1Re} = \omega_{1Im})$	-----			0	++	$+\infty$
	Q_{Im}	0		$(\omega_{1Re} = \omega_{1Im})$	-----			-1097.4	---	$-\infty$
II. ($k > 1.01$ $k < 6.93$)	Q_{Re}	k	++	0	---	-78 ($k=2$)	---	0	++	$+\infty$
	Q_{Im}	0	++	9 ($k=2$)	++	0	---	-779 ($k=2$)	---	$-\infty$
III. ($k > 6.93$)	Q_{Re}	k	++	0	---	$(k=8)$	++	0	++	$+\infty$
	Q_{Im}	0	++	128.6 ($k=8$)	++	0	++	169 ($k=8$)	---	$-\infty$

Tabelul 2.15. Variația părților reală și imaginară în funcție de k (problema 2.3.7b)

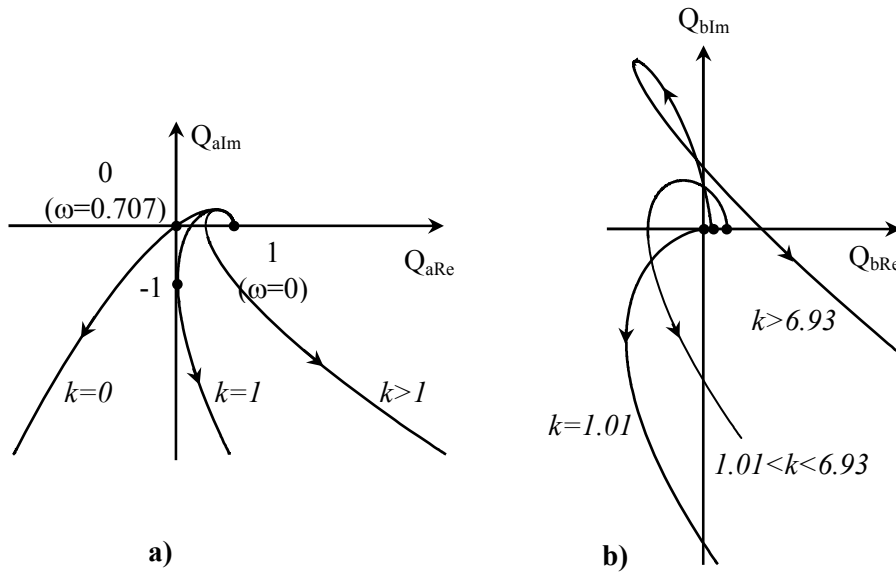


Figura 2.21 Hodogرافurile Mihailov pentru problema 2.3.7

2.3.8. Aplicând criteriul Mihailov, să se determine domeniul valorilor parametrului k astfel încât sistemul reprezentat de polinomul caracteristic:

$$Q(s) = 5s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 5s^2 + s + k + 1$$

să fie stabil.

Soluție: Condiții de stabilitate: coeficienți pozitivi; existența soluțiilor reale ($\omega_{1Im}, \omega_{2Re} \in \mathcal{R}_+$) și alternarea acestora $\omega_{1Im} < \omega_{1Re} < \omega_{2Im} < \omega_{2Re}$; verificarea condiției de limită a stabilității ($Q(j\omega) = 0$). Soluțiile sunt: $\omega_{1Im} = 0$, $\omega_{1,2Re} = 0.5\sqrt{5 \pm \sqrt{25 - 8(k+1)}}$. Deoarece $\omega_{2Im} \notin \mathcal{R}_+$, una dintre soluțiile părții reale trebuie să fie $\omega_{Re} \notin \mathcal{R}_+$. Rezultă astfel sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} a_i > 0 : k + 1 > 0 \\ \omega_{12Re} \geq 0 : \begin{cases} 5 \pm \sqrt{25 - 8(k+1)} \geq 0 \\ 25 - 8(k+1) \geq 0 \end{cases} \\ \omega_{1Im} < \omega_{1Re} : 5 - \sqrt{25 - 8(k+1)} \leq 0 \\ Q_{Re}(j\omega)|_{Q_{Im}(j\omega)=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -1 \\ \begin{cases} k \geq -1 \\ k \leq \frac{17}{8} \end{cases} \\ k \leq -1 \\ \omega_{1Im} = 0 : k = -1 \end{cases}$$

Hodograful Mihailov pentru diferite valori ale lui k sunt prezentate în Figura 2.22, de unde rezultă că sistemul este instabil pentru orice valoare a lui k , deoarece hodograful nu face $5\pi/2$ rotații în sens trigonometric în jurul originii.

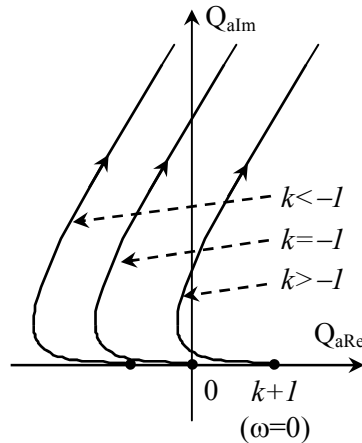


Figura 2.22 Hodograful Mihailov pentru problema 2.3.8

2.3.9. Un sistem este caracterizat de polinomul caracteristic:

$$Q(s) = s^3 + s^2 + s + e^{sT} - 0.5$$

Studiați stabilitatea sistemului utilizând criteriile Routh, Hurwitz și Mihailov.

Soluție: $Q(s) = s^3 + s^2 + s(1-T) + 0.5$ (vezi problema 2.2.19). În urma analizei cu cele trei criterii $\Rightarrow T=0.5$ sistem la limita de stabilitate; $T < 0.5$ sistem asimptotic stabil; $T > 0.5$ sistem instabil.

s^3	1	$1-T$
s^2	1	0.5
s^1	$0.5-T$	
s^0	0.5	

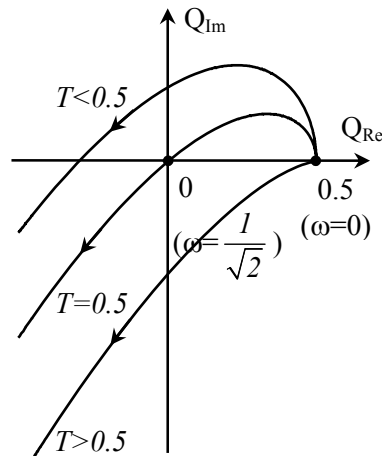


Figura 2.23 Hodograful Mihailov pentru problema 2.3.9

$$\begin{cases} D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1-T \end{vmatrix} = 0.5 - T \\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1-T & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.25 - 0.5 \cdot T \end{cases}$$

2.3.10. Un sistem este proiectat astfel încât să ofere performanțe acceptabile când amplificarea k a unui amplificator particular are valoarea 2. Determinați cât de mult poate fi modificată această amplificare, pentru ca sistemul să rămână stabil. Polinomul caracteristic al sistemului este:

$$Q(s) = s^3 + (4 + k)s^2 + 6s + 16 + 8k$$

Soluție: Utilizând criteriul lui Routh, stabilitatea se obține pentru $-2 < k < 4$. Deoarece se știe că parametrul k este amplificare, acesta nu poate fi negativ, deci domeniul pentru amplificare este $0 < k < 4$.

2.3.11. Se dau sistemele cu următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$\text{a) } T_a(s) = \frac{10 \cdot (s+1) \cdot (s+2)}{s+3}$$

$$\text{b) } T_b(s) = s^2 + s - 1$$

$$\text{c) } T_c(s) = \frac{s^2 - 10}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\text{d) } T_d(s) = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s^2 + 10s + 1}$$

$$\text{e) } T_e(s) = \frac{K}{(s+2)^3}, \quad K \in \mathfrak{R}_+$$

Trasați hodograful Nyquist și precizați stabilitatea sistemelor în buclă închisă. În cazul e) determinați valoarea critică a parametrului K .

Soluție: Toate sistemele au reacție negativă, deci punctul critic este $(-1, j0)$.

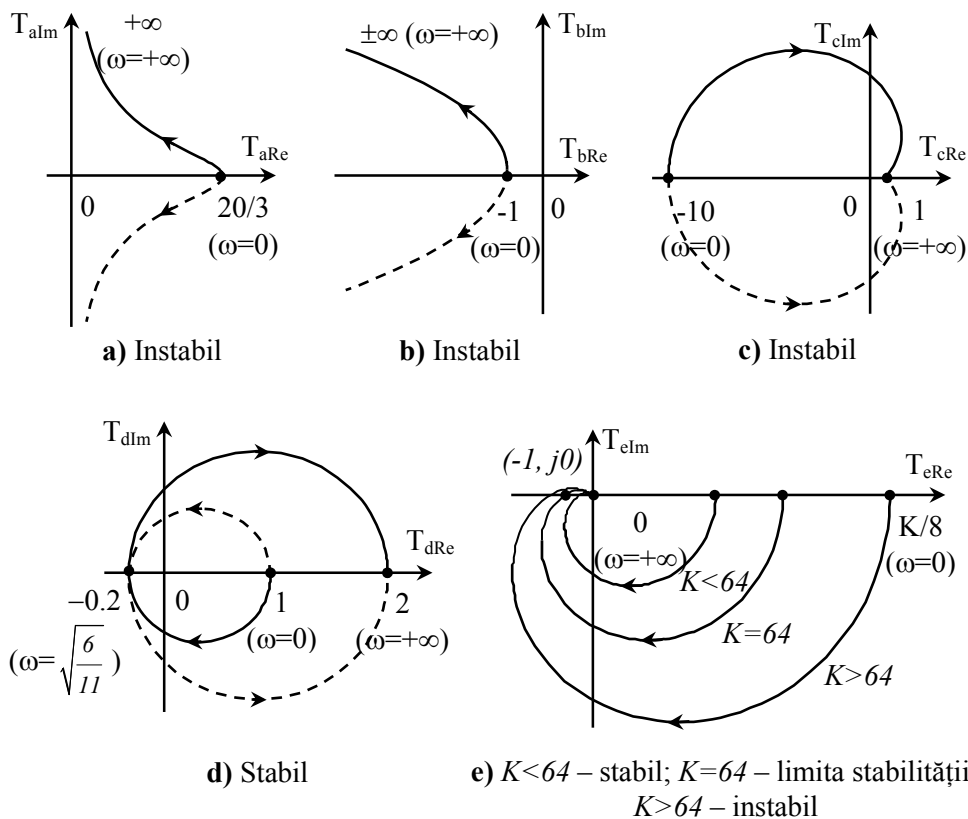


Figura 2.24 Hodograful Nyquist pentru problema 2.3.11

2.3.12. Pentru sistemele de la **problema 2.3.11** determinați marginea de câștig și marginea de fază.

Soluție: Se aplică (2.1.12):

- a) $MG_a = 3/20$ pentru $\omega = 0$; MP_a poate fi oricât ($\omega \notin \mathcal{R}_+$) \Rightarrow sistem **instabil**;
- b) $MG_b = 1$ pentru $\omega = 0$; $MP_b = \pi$ pentru $\omega = 0 \Rightarrow$ sistem **instabil**;
- c) $MG_c = 0.1$ pentru $\omega = 0$; MP_c poate fi oricât ($\omega \notin \mathcal{R}_+$) \Rightarrow sistem **instabil**;
- d) $MG_d = 5$ pentru $\omega = \sqrt{6/11}$, sau $MG_d = 1$ pentru $\omega = 0$; $MP_d = \pi - 0.972 \cong 7\pi/10$ pentru $\omega = \sqrt{6/11}$ [rad/s], sau $MP_d = \pi$ pentru $\omega = 0 \Rightarrow$ sistem **stabil**;
- e) $MG_e = 64/K$ pentru $\omega = 2\sqrt{3}$; $MP_e = \pi - 3 \arctg\left(0.5\sqrt{3\sqrt{K^2} - 4}\right) \Rightarrow$
 $MP_e = \pi - \pi = 0$ pentru $K = 64$ (limita stabilității); $MP_e < 0$ pentru $K > 64$ (instabil); $MP_e > 0$ pentru $K < 64$ (stabil).

2.3.13. Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, să se determine frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor pentru circuitul din Figura 2.25, știind că AO sunt ideale.

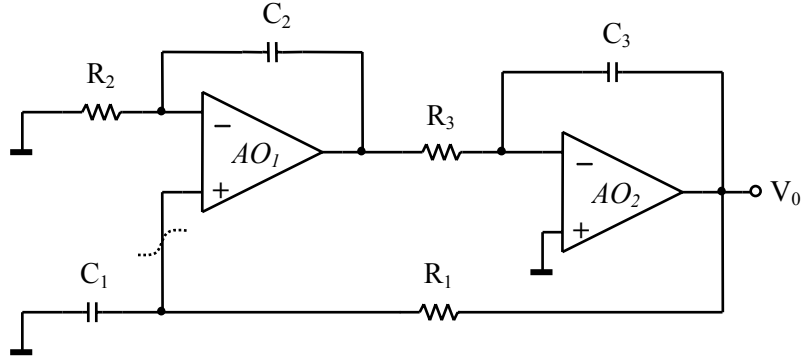


Figura 2.25. Circuit cu reacție

Soluție: Reacția este pozitivă, deci punctul critic este $(1, j0)$.

$$T(s) = -\frac{1 + s \cdot R_2 C_2}{s^2 R_2 R_3 C_2 C_3 \cdot (1 + s \cdot R_1 C_1)}$$

$$T(j\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} R_1 C_1 = R_2 C_2 \text{ (condiția de amorsare)} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_2 C_3}} \text{ (frecvența de oscilație)} \end{cases}$$

2.3.14. Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, arătați că un sistem cu funcția de transfer în buclă deschisă:

$$T(s) = \frac{K}{s(s+a)}; \quad K, a \in \mathfrak{R}_+$$

este întotdeauna stabil în buclă închisă.

Soluție: $K, a > 0 \Rightarrow p_d = 0$, deci sistem cu buclă deschisă stabil. Părțile reală și imaginară nu au soluții reale. Din Figura 2.26 rezultă că sistemul este stabil și în buclă închisă oricât ar fi $K, a \in \mathfrak{R}_+$.

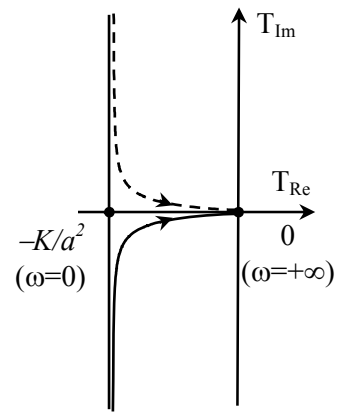


Figura 2.26. Hodograful Nyquist pentru problema 2.3.14

2.3.15. Se dă circuitul din Figura 2.27. Utilizând criteriul lui Nyquist de stabilitate, să se determine frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor. Trasați hodograful Nyquist. Determinați R_1 astfel încât cele două semnale de ieșire să aibă aceeași amplitudine.

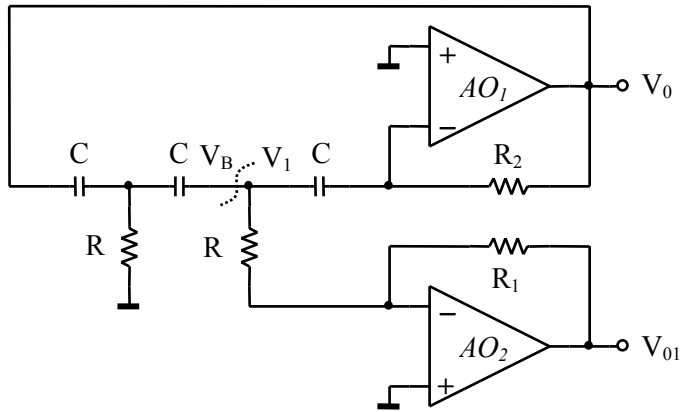


Figura 2.27. Oscilator pentru problema 2.3.15

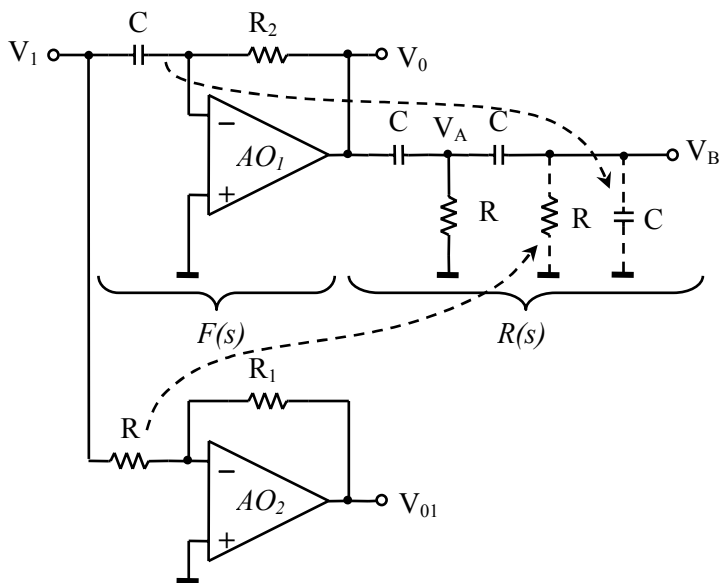


Figura 2.28. Circuitul din Figura 2.27 cu buclă deschisă

Soluție: Sistemul este cu reacție pozitivă, deci punctul critic este $(1, j0)$.

Se observă că în buclă închisă ramura de reacție $R(s)$ va lucra conectată pe sarcina $R||C$. În aceste condiții, $T(s)$ este:

$$T(s) = \frac{V_B(s)}{V_I(s)} = \frac{-s^3 \cdot \frac{1}{3} R_2 C}{s^2 + \frac{4}{3RC} s + \frac{1}{3R^2 C^2}}$$

$$T(j\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} R_2 = 12R \text{ (condiția de amorsare)} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}RC} \text{ (frecvența de oscilație)} \end{cases}$$

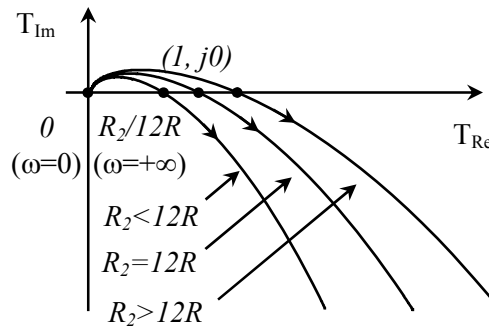


Figura 2.29. Hodograful Nyquist pentru problema 2.3.15

Dacă $R_2 < 12R \Rightarrow$ sistem asimptotic stabil; dacă $R_2 = 12R \Rightarrow$ sistem la limita de stabilitate; dacă $R_2 > 12R \Rightarrow$ sistem instabil.

$$\frac{V_{01}(s)}{V_0(s)} = \frac{V_0(s)}{V_I(s)} \cdot \frac{V_I(s)}{V_{01}(s)} = sR_2C \cdot \frac{R}{R_1}$$

$$\left\| \frac{V_0(j\omega)}{V_{01}(j\omega)} \right\|_{\omega=\omega_0} = 1 \Rightarrow R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} R \approx 7R$$

este condiția ca amplitudinile V_0 și V_{01} să fie egale.

2.3.16. Se dă circuitul din Figura 2.30a. Utilizând criteriul Nyquist de stabilitate, să se determine frecvența de oscilație și condiția de amorsare a oscilațiilor. Comentați rezultatele în funcție de parametrul α . Trasați hodograful Nyquist.

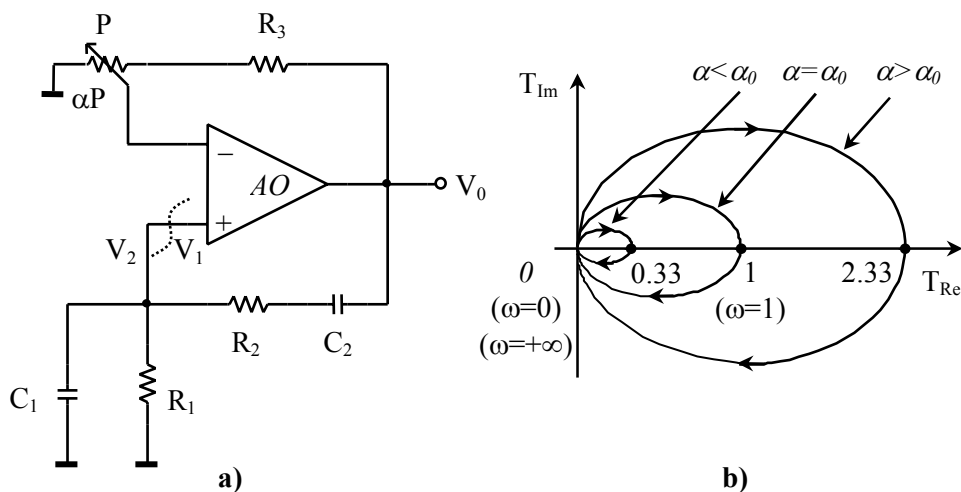


Figura 2.30. a) Oscilator pentru problema 2.3.16; b) Hodograful Nyquist

Soluție: Vezi **problema 2.2.23**. Raportul la întoarcere este:

$$T(s) = \left[\frac{I}{\alpha} \cdot \left(I + \frac{R_3}{P} \right) - I \right] \cdot \frac{sR_1C_2}{I + s(R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

$$\text{Frecvența oscilațiilor: } \omega_0 = \frac{I}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\text{Condiția de amorsare a oscilațiilor: } \alpha_0 = \frac{I + \frac{R_3}{P}}{\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + 2}$$

Din Figura 2.30b rezultă: $\alpha < \alpha_0$ – sistem stabil; $\alpha = \alpha_0$ – sistem la limita stabilității; $\alpha > \alpha_0$ – sistem instabil.

3. Ecuații de stare

3.1. Considerații teoretice

Mărimile de stare (variabile de stare) sunt mărimile a căror cunoaștere la un moment dat este necesară și suficientă pentru a determina evoluția ulterioară a unui sistem dat, sub excitații date. Aceste mărimi sunt cele care determină regimul tranzitoriu al sistemului considerat. Într-un circuit electric aceste mărimi sunt introduse de elementele reactive (L, C) și sunt tensinile pe condensatoare, respectiv curenții prin bobine.

Starea unui sistem reprezintă ansamblul valorilor variabilelor de stare la un moment dat: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Dacă la un moment dat (t_0) sunt cunoscute mărimile de stare $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ (starea inițială) și excitațiile $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t), t \geq t_0$, atunci evoluția sistemului este cunoscută pentru orice moment $t > t_0$ și această descriere este unică.

Ecuațiile de stare ale unui sistem analogic liniar invariant în timp (*SALI*) au forma compactă matriceală (3.1.1) (**forma normală**):

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot e(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot e(t) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

unde $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ este vectorul de stare, $e(t)=[e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_n(t)]^T$ vectorul excitațiilor, $y(t)=[y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t)]^T$ vectorul ieșirilor, $A(n \times n)$ matricea de stare, $B(n \times m)$ matricea de aplicare a excitațiilor, $C(k \times n)$ matricea de ieșirii, $D(k \times m)$ matricea de transmisie directă. Numărul n este egal cu numărul ecuațiilor diferențiale de ordinul I, numărul mărimilor de stare. Prima ecuație din (3.1.1) reprezintă **ecuația de evoluție a stării**, iar cea de a doua **ecuația ieșirii**.

Dacă sistemul are bucle capacitive și/sau secțiuni inductive atunci sistemul (3.1.1) capătă o **formă degenerată** (dependentă) (3.1.2). Bucla capacitivă conține numai condensatoare și/sau surse ideale de tensiuni; secțiunea inductivă conține numai bobine și/sau surse ideale de curent. În acest caz, unele dintre tensiunile, respectiv unii dintre curenții elementelor reactive nu vor fi mărimi independente, deci aceste mărimi nu vor mai fi variabile de stare.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B_1 \cdot e(t) + B_2 \cdot \frac{de(t)}{dt} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D_1 \cdot e(t) + D_2 \cdot \frac{de(t)}{dt} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Pentru a trece la forma normală se aplică schimbarea de variabilă (3.1.3):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{e}(t) \quad (3.1.3)$$

și se obține sistemul:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1(t) + (\mathbf{A}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_1(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Ordinul sistemului n este egal cu numărul total de elemente reactive din care se scade câte o unitate pentru fiecare buclă capacitivă, respectiv secțiune inductivă.

Pe baza ecuațiilor de stare (3.1.1) se poate întocmi **un model de stare** (Figura 3.1), în care sistemul este văzut ca o transformare intrare–stare–ieșire.

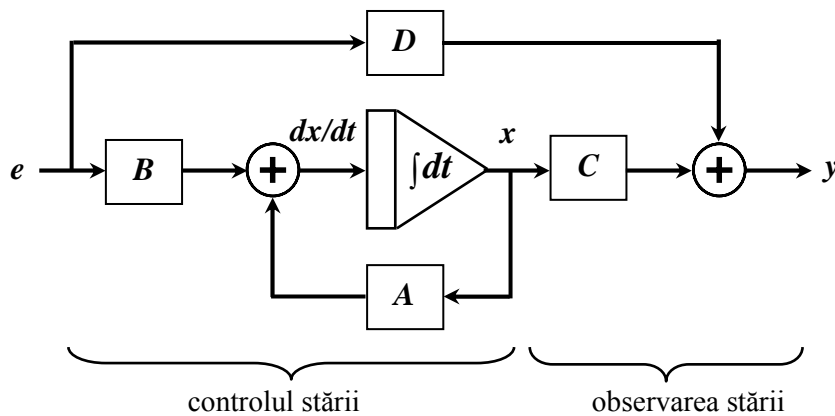


Figura 3.1. Modelul de stare rezultat din (3.1.1)

3.1.1. Determinarea ecuațiilor de stare

Pentru determinarea ecuațiilor de evoluție a stării într-un circuit electric se parcurg pașii următori:

- Se construiește graful liniar orientat (*GLO*) atașat circuitului electric. Fiecare latură a *GLO* conține o singură componentă, astfel încât legea lui Ohm conține un singur tip de lege de variație.
- Se alege un arbore normal ale cărui laturi conțin toate sursele ideale de tensiune, numărul maxim de capacități, numărul minim de inductivități și nici o sursă ideală de curent.

- Se aplică teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul respectiv, exprimând tensiunile pe coarde $\mathbf{u}_c(t)$ în funcție de cele de pe ramuri $\mathbf{u}_r(t)$.
- Se aplică teorema a I-a a lui Kirchhoff pentru circuitul respectiv, exprimând curenții pe ramuri $\mathbf{i}_r(t)$ în funcție de cei pe coarde $\mathbf{i}_c(t)$.
- Se aplică legea lui Ohm, exprimând tensiunea în funcție de curentul pe coarde ($\mathbf{u}_c(t)=f(\mathbf{i}_c(t))$) și curentul în funcție de tensiunea pe ramuri ($\mathbf{i}_r(t)=f(\mathbf{u}_r(t))$).
- Se înlocuiesc expresiile scrise cu legea lui Ohm în relațiile scrise cu teoremele lui Kirchhoff obținându-se un sistem în care necunoscutele sunt curenții de coarde și tensiunile pe ramuri.
- Se elimină variabilele care nu sunt variabile de stare sau excitații și se obține sistemul de ecuații de evoluție a stării. Ecuațiile ieșirii se obțin din ecuațiile topologice, mărimile de ieșire fiind oricare dintre mărimi care nu sunt surse, dar se exprimă în funcție de variabilele de stare.

3.1.2. Rezolvarea ecuațiilor de stare în domeniul timp

Rezolvarea ecuațiilor de stare se poate realiza în două moduri: prin integrarea ecuațiilor diferențiale utilizând matricea de tranziție $e^{A \cdot t}$ sau prin rezolvarea problemei *Cauchy* (integrarea ecuațiilor diferențiale neomogene).

Soluția ecuației de evoluție a stării este

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t) = e^{A \cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{(t-\tau) \cdot A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(\tau) d\tau \quad (3.1.5)$$

unde $\mathbf{x}_l(t)$ este soluția de regim liber (tranzitoriu), $\mathbf{x}_f(t)$ soluția de regim forțat (permanent), $\mathbf{x}(0)$ starea inițială (condiția inițială).

Soluția ecuației ieșirii (răspunsul sistemului liniar) corespunzătoare stării inițiale $\mathbf{x}(0)$ și funcției de intrare $\mathbf{e}(t)$ este:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot e^{A \cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \cdot e^{(t-\tau) \cdot A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}(t) \quad (3.1.6)$$

Matricea $\Phi(t)=e^{A \cdot t}$ este **matricea de tranziție** și se determină cu ajutorul **formulei lui Cailey-Hamilton**:

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \alpha_0 \cdot \mathbf{I} + \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \alpha_2 \cdot \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \quad (3.1.7)$$

unde coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ se obțin din ecuația:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ I & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

în care termenii $e^{\lambda_k t}$ se numesc **moduri de oscilație**, iar λ_k sunt **valorile proprii** ale matricii A și reprezintă frecvențele naturale complexe de oscilație: $\lambda_k = \beta_k + j\omega_k$, β_k – atenuarea în timp a modului de oscilație, ω_k – frecvența modului de oscilație. Valorile proprii se determină din ecuația:

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0 \quad (3.1.9)$$

Matricea de tranziție se mai poate determina cu ajutorul **polinomului de interpolare Lagrange**:

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k \cdot I - A)^*}{P'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} \quad (3.1.10)$$

unde notația (*) semnifică adjuncta matricii respective, iar $P'(\lambda_k)$ este derivata polinomului caracteristic al matricii A : $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A)$.

Curbele care conțin condițiile inițiale pentru care răspunsul liber conține un singur mod de oscilație se numesc **direcții proprii**. Acestea se determină din ecuația:

$$(\lambda_k \cdot I - A) \cdot \mathbf{x}(0) = 0 \quad (3.1.11)$$

3.1.3. Rezolvarea ecuațiilor de stare în domeniul Laplace

Se aplică transformata *Laplace* sistemului (3.1.1) și se obține:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot \mathbf{x}(0) + [s \cdot I - A]^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(s) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

din care rezultă funcția de transfer $H(s)$:

$$H(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} B + D \quad (3.1.13)$$

Funcția de transfer $H(s)$ descrie comportamentul vectorului de ieșire $Y(s)$ față de vectorul de excitație $E(s)$ în condiții inițiale nule.

3.2. Probleme rezolvate

3.2.1. Pentru circuitele din Figura 3.2 se cer:

- a) Ecuțiile de stare, considerând ca ieșire tensiunea pe rezistența R ;
- b) Modelul de stare ce rezultă din ecuațiile de stare;
- c) Schema electrică după modelul de la punctul b).

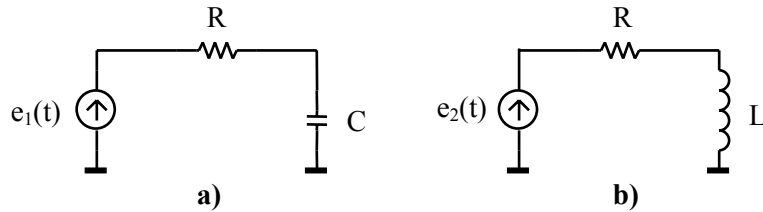


Figura 3.2. Circuite pasive de ordinul I

Rezolvare:

a) *GLO* pentru cele două circuite sunt prezentate în Figura 3.3.

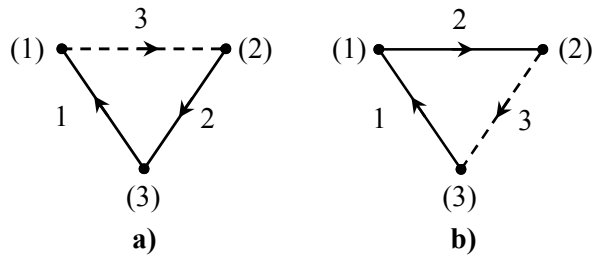


Figura 3.3. *GLO* pentru circuitele din Figura 3.2

Pentru circuitul din Figura 3.2a variabila de stare este tensiunea pe condensatorul C (u_2). Pentru *GLO* din Figura 3.3a se scriu ecuațiile cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff:

$$\begin{cases} u_3 = -u_1 - u_2 \\ -u_1 = e_1 \\ i_1 = i_2 = i_3 \end{cases}$$

iar relațiile scrise cu legea lui Ohm sunt:

$$\begin{cases} u_3 = R \cdot i_3 \\ i_2 = C \cdot \frac{du_2}{dt} \end{cases}$$

Din cele două sisteme rezultă ecuația de evoluție a stării:

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u_2 + \frac{1}{RC} \cdot e_1 \quad (3.2.1)$$

Variabila de ieșire este u_3 , iar ecuația ieșirii este:

$$y = u_3 = -u_2 + e_1 \quad (3.2.2)$$

Matricele x , y , A , B , C și D din (3.1.1) sunt:

$$x = [u_2], \quad y = [u_3], \quad A = \left[-\frac{1}{RC} \right], \quad B = \left[\frac{1}{RC} \right], \quad C = [-1], \quad D = [1]$$

Pentru circuitul din Figura 3.2b variabila de stare este curentul prin bobina L (i_3). Pentru GLO din Figura 3.3b se scriu relațiile cu teoremele lui Kirchhoff:

$$\begin{cases} u_3 = -u_1 - u_2 \\ -u_1 = e_2 \\ i_1 = i_2 = i_3 \end{cases}$$

iar relațiile scrise cu legea lui Ohm sunt:

$$\begin{cases} u_3 = L \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_2 = \frac{u_2}{R} \end{cases}$$

Din cele două sisteme, rezultă ecuația de evoluție a stării:

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i_3 + \frac{1}{L} \cdot e_2$$

Variabila de ieșire este u_2 , iar ecuația ieșirii este:

$$y = u_2 = -u_3 + e_2 = R \cdot i_3$$

Matricele x , y , A , B , C și D din (3.1.1) sunt:

$$x = [i_3], \quad y = [u_2], \quad A = \left[-\frac{R}{L} \right], \quad B = \left[\frac{1}{L} \right], \quad C = [1], \quad D = [0]$$

b) Ecuațiile (3.2.1) și (3.2.2) se pun sub forma:

$$\begin{cases} u_2 = \frac{1}{RC} \cdot \int (e_1 - u_2) dt \\ y = u_3 = e_1 - u_2 \end{cases}$$

din care rezultă schema bloc din Figura 3.4a.

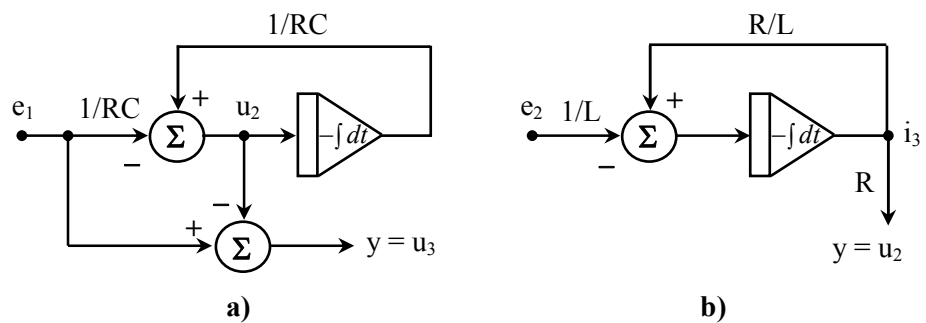


Figura 3.4. Modelele de stare pentru circuitele din Figura 3.2

Similar se procedează și în cazul circuitului din Figura 3.2b și se obține:

$$\begin{cases} i_3 = \frac{1}{L} \cdot \int (e_2 - R \cdot i_3) dt \\ u_2 = R \cdot i_3 \end{cases}$$

din care rezultă schema bloc din Figura 3.4b.

- c) Circuitele cu integratoare rezultate din schemele bloc (Figura 3.4) sunt prezentate în Figura 3.5 și 3.6.

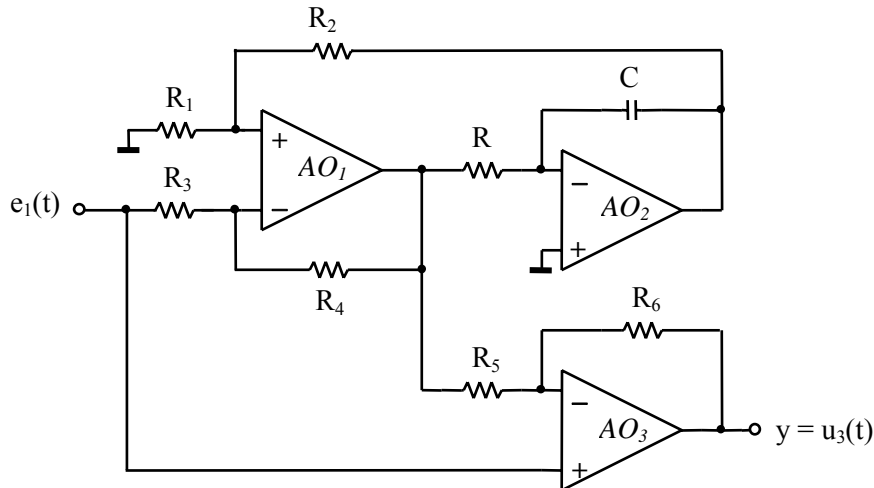


Figura 3.5. Schema electrică echivalentă cu AO a circuitului din Figura 3.2a

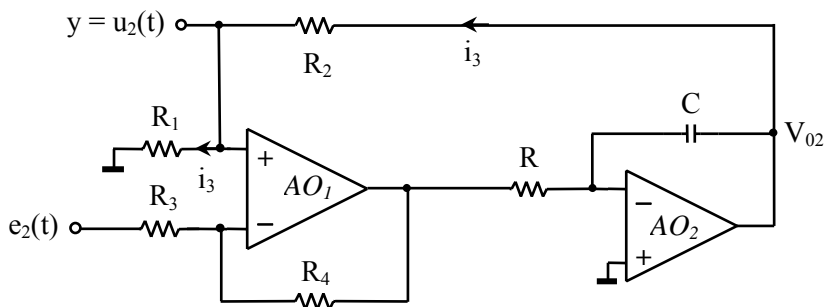


Figura 3.6. Schema electrică echivalentă cu AO a circuitului din Figura 3.2b

În implementarea schemei bloc din Figura 3.4b cu integratoare active, rezistențele R_1 , R_2 , din structura sumatorului diferențial (realizat cu AO_1) vor avea și rolul de convertor tensiune-curent, deoarece ieșirile din AO sunt tensiuni, iar semnalul după integrator (realizat cu AO_2) trebuie să fie în curent. Expresia

curentului i_3 este: $i_3 = \frac{V_{02}}{R_1 + R_2} = \frac{V_{AO1}^+}{R_1} = \frac{u_2}{R_1}$, cu condiția ca sarcina conectată la u_2

să nu consume curent semnificativ.

3.2.2. Să se rezolve ecuațiile de stare de la **problema 3.2.1**, în domeniul timp, dacă semnalul de intrare este semnalul treaptă unitate, iar componentele au valorile: $R=1\Omega$, $C=1F$, $L=1H$. Se vor considera condiții inițiale nule.

Rezolvare:

Pentru circuitul din Figura 3.2a, matricile sunt:

$$\mathbf{A} = [-1], \quad \mathbf{B} = [1], \quad \mathbf{C} = [-1], \quad \mathbf{D} = [1]$$

Se aplică (3.1.5) pentru ecuația (3.2.1) și rezultă:

$$u_2 = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t e^{-(t-\tau)\frac{1}{RC}} \cdot \gamma(\tau) d\tau \Bigg|_{R=C=1} = (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t)$$

Se aplică (3.1.5) pentru ecuația (3.2.2) și rezultă:

$$u_3 = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t e^{-(t-\tau)\frac{1}{RC}} \cdot \gamma(\tau) d\tau + \gamma(t) \Bigg|_{R=C=1} = e^{-t} \cdot \gamma(t)$$

sau mai simplu $u_3 = e_1 - u_2 = e^{-t} \cdot \gamma(t)$.

Pentru circuitul din Figura 3.2b, se procedează asemănător și se obține:

$$\mathbf{A} = [-1], \quad \mathbf{B} = [1], \quad \mathbf{C} = [1], \quad \mathbf{D} = [0]$$

$$i_3 = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t e^{-(t-\tau)\frac{R}{L}} \cdot \gamma(\tau) d\tau \Bigg|_{R=L=1} = (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t)$$

$$u_2 = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t e^{-(t-\tau)\frac{R}{L}} \cdot \gamma(\tau) d\tau \Bigg|_{R=L=1} = (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t)$$

sau mai simplu $u_2 = R \cdot i_3 = (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t)$.

3.2.3. Pentru circuitele din Figura 3.7 se cer:

- a) Ecuatiile de stare;
- b) Modelul de stare ce rezultă din ecuatiile de stare.

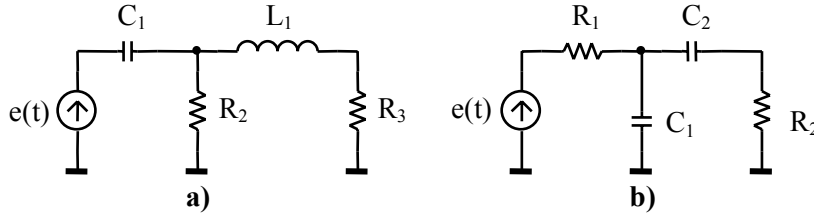


Figura 3.7. Circuite pasive

Rezolvare:

a) GLO pentru fiecare circuit din Figura 3.7 este reprezentat în Figura 3.8.

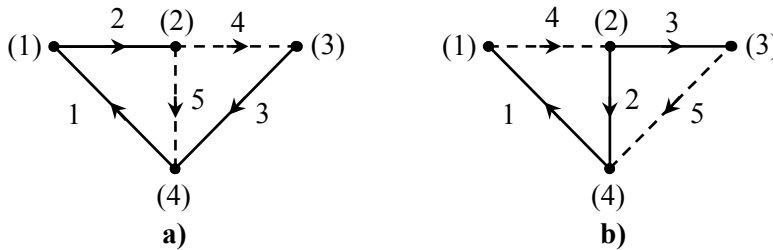


Figura 3.8. GLO pentru circuitele din Figura 3.7

Pentru circuitul din Figura 3.7a variabilele de stare sunt tensiunea pe condensatorul C_1 (u_2) și curentul prin bobina L_1 (i_4). Pentru GLO din Figura 3.8a se scriu relațiile cu teoremele lui Kirchhoff, respectiv cu legea lui Ohm:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_5 = -u_1 - u_2 \\ -u_1 = e \\ u_4 = -u_1 - u_2 - u_3 \\ i_2 = i_4 + i_5 \\ i_3 = i_4 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_5 = R_2 \cdot i_5 \\ u_4 = L_1 \cdot \frac{di_4}{dt} \\ i_2 = C_1 \cdot \frac{du_2}{dt} \\ i_3 = \frac{u_3}{R_3} \end{array} \right.$$

Din cele două sisteme se elimină termenii din membrul stâng al semnelui “=” (u_4 , u_5 , i_2 , i_3) și rezultă ecuațiile de evoluție a stării:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_1} \cdot u_2 + \frac{1}{C_1} \cdot i_4 + \frac{1}{R_2 C_1} \cdot e \\ \frac{di_4}{dt} = -\frac{1}{L_1} \cdot u_2 - \frac{R_3}{L_1} \cdot i_4 + \frac{1}{L_1} \cdot e \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Variabilele de ieșire sunt u_3, u_5 iar ecuațiile ieșirii sunt:

$$\begin{cases} y_1 = u_3 = R_3 \cdot i_4 \\ y_2 = u_5 = -u_2 + e \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Matricele $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ și \mathbf{D} din (3.1.1) sunt:

$$\mathbf{x} = [u_2 \ i_4]^T, \quad \mathbf{y} = [u_3 \ u_5]^T, \quad \mathbf{e} = [e]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & R_3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

În acest caz se mai pot considera ca mărimi de ieșire mărimile u_4, i_2, i_5 .

Pentru circuitul din Figura 3.7b variabilele de stare sunt tensiunile pe C_1 (u_2) și pe C_2 (u_3). Pentru GLO din Figura 3.8b se scriu relațiile cu teoremele lui Kirchhoff și legea lui Ohm:

$$\begin{cases} u_4 = -u_1 - u_2 \\ u_5 = u_2 - u_3 \\ -u_1 = e \\ i_2 = i_4 - i_5 \\ i_3 = i_5 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_4 = R_1 \cdot i_4 \\ u_5 = R_2 \cdot i_5 \\ i_2 = C_1 \cdot \frac{du_2}{dt} \\ i_3 = C_2 \cdot \frac{du_3}{dt} \end{cases}$$

Din cele două sisteme se elimină mărimile din membrul stâng al semnului “=” ($i_2, i_3, i_4, i_5, u_4, u_5$) și rezultă ecuațiile de evoluție a stării:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{I}{C_1} \cdot \left(\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} \right) \cdot u_2 + \frac{I}{R_2 C_1} \cdot u_3 + \frac{I}{R_1 C_1} \cdot e \\ \frac{du_3}{dt} = \frac{I}{R_2 C_2} \cdot u_2 - \frac{I}{R_2 C_2} \cdot u_3 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Variabilele de ieșire sunt u_4, u_5 iar ecuațiile ieșirii sunt:

$$\begin{cases} y_1 = u_4 = -u_2 + e \\ y_2 = u_5 = u_2 - u_3 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Matricele $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ și \mathbf{D} din (3.1.1) sunt:

$$\mathbf{x} = [u_2 \ u_3]^T, \quad \mathbf{y} = [u_4 \ u_5]^T, \quad \mathbf{e} = [e]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{I}{C_1} \cdot \left(\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} \right) & \frac{I}{R_2 C_1} \\ \frac{I}{R_2 C_2} & -\frac{I}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{I}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

În acest caz se mai pot considera ca mărimi de ieșire mărimile i_2, i_3, i_4, i_5 .

b) Ecuțiile (3.2.3) se pun sub forma (3.2.7). Împreună cu (3.2.4), rezultă schema bloc din Figura 3.9a.

$$\begin{cases} u_2 = \int \left(-\frac{I}{R_2 C_1} \cdot u_2 + \frac{I}{C_1} \cdot i_4 + \frac{I}{R_2 C_1} \cdot e \right) dt \\ i_4 = \int \left(-\frac{I}{L_1} \cdot u_2 - \frac{R_3}{L_1} \cdot i_4 + \frac{I}{L_1} \cdot e \right) dt \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Similar se procedează și în cazul circuitului din Figura 3.7b și se obține:

$$\begin{cases} u_2 = \int \left[-\frac{I}{C_1} \cdot \left(\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} \right) \cdot u_2 + \frac{I}{R_2 C_1} \cdot u_3 + \frac{I}{R_1 C_1} \cdot e \right] dt \\ u_3 = \int \left(\frac{I}{R_2 C_2} \cdot u_2 - \frac{I}{R_2 C_2} \cdot u_3 \right) dt \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Din (3.2.6) și (3.2.8) rezultă schema bloc din Figura 3.9b.

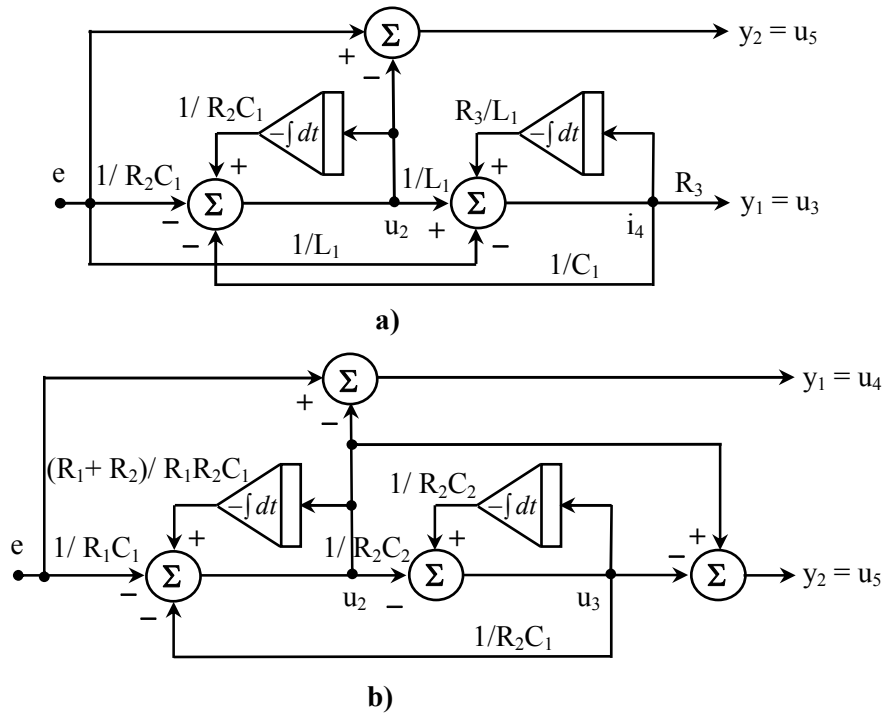


Figura 3.9. Modelele de stare pentru circuitele din Figura 3.7

3.2.4. Să se rezolve ecuațiile de stare de la **problema 3.2.3**, în domeniul Laplace, dacă semnalul de intrare este semnalul treaptă unitate. Pentru circuitul din Figura 3.7a valorile componentelor sunt: $R_2=R_3=1\Omega$, $C_1=1/2F$, $L_1=1/3H$, iar pentru circuitul din Figura 3.7b: $R_1=1/2\Omega$, $R_2=1/3\Omega$, $C_1=C_2=1F$. Se vor considera condiții inițiale nule.

Rezolvare:

Pentru circuitul din Figura 3.7a matricile sunt:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se determină funcția de transfer $H(s)$ cu relația (3.1.13):

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 3 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 12} \cdot \begin{bmatrix} 3s \\ s \cdot (s+3) \end{bmatrix}$$

iar vectorul ieșirilor $\mathbf{Y}(s)$ este:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_3(s) \\ U_5(s) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{E}(s)$$

unde vectorul $\mathbf{E}(s)$ conține, în acest caz, un singur element $1/s$, deoarece în circuit există o rășură sursă. În urma calculelor se obține:

$$\begin{cases} Y_1(s) = U_3(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 12} \equiv \frac{k \cdot \omega_0}{(s + \alpha)^2 + (\omega_0)^2} \\ Y_2(s) = U_5(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 5s + 12} \end{cases}$$

Se aplică transformata Laplace inversă și se obțin răspunsurile în domeniul timp (răspunsul indicial):

$$\begin{cases} y_1(t) = u_3(t) = \frac{6}{\sqrt{23}} \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \gamma(t) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) \\ y_2(t) = u_5(t) = \frac{1}{23} \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \gamma(t) \cdot \left(23 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) + \sqrt{23} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) \right) \end{cases}$$

Din (3.2.4) se obțin mărimile de stare:

$$\begin{cases} i_4 = \frac{u_3}{R_3} \Big|_{R_3=1} = \frac{6}{\sqrt{23}} \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \gamma(t) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) \\ u_2 = e - u_5 = \gamma(t) \cdot \left[1 - \frac{1}{23} \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \left(23 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) + \sqrt{23} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \cdot t\right) \right) \right] \end{cases}$$

Pentru circuitul din Figura 3.7b matricile sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iar funcția de transfer $\mathbf{H}(s)$ este:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-5 & 3 \\ 3 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 8s + 6} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot (s-3) \\ s^2 - 6s + 6 \end{bmatrix}$$

De aici rezultă mărimile de ieșire:

$$\begin{cases} Y_1(s) = U_4(s) = \frac{-2 \cdot (s-3)}{s \cdot (s^2 - 8s + 6)} \\ Y_2(s) = U_5(s) = \frac{s^2 - 6s + 6}{s \cdot (s^2 - 8s + 6)} \end{cases}$$

Se aplică transformata Laplace inversă și se obțin răspunsurile în domeniul timp:

$$\begin{cases} y_1(t) = u_4(t) = \frac{1}{10} \cdot \left[10 - (5 + \sqrt{10}) \cdot e^{(4-\sqrt{10})t} - (5 - \sqrt{10}) \cdot e^{(4+\sqrt{10})t} \right] \cdot \gamma(t) \\ y_2(t) = u_5(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(e^{(4-\sqrt{10})t} - e^{(4+\sqrt{10})t} \right) \right] \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

Din (3.2.6) se obțin mărimile de stare:

$$\begin{cases} u_2 = e - u_4 = -\frac{1}{10} \cdot \left[(5 + \sqrt{10}) \cdot e^{(4-\sqrt{10})t} + (5 - \sqrt{10}) \cdot e^{(4+\sqrt{10})t} \right] \cdot \gamma(t) \\ u_3 = u_2 - u_5 = \left[\frac{\sqrt{10} - 2}{20} \cdot e^{(4-\sqrt{10})t} - \frac{3\sqrt{10} - 2}{20} \cdot e^{(4+\sqrt{10})t} - 1 \right] \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

3.2.5. Să se rezolve următoarele ecuații de stare, în domeniul timp, în condițiile inițiale alăturate. Să se determine direcțiile proprii.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + 5e \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T, \mathbf{x}_0^{(1)} = [0 \ 0]^T \\ e(t) = \gamma(t) \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + e \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T, \mathbf{x}_0^{(1)} = [0 \ 0]^T \\ e(t) = \gamma(t) \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + e \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T, \mathbf{x}_0^{(1)} = [0 \ 0]^T \\ e(t) = \gamma(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Rezolvare:

a) Matricile din (3.1.1) sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se determină, mai întâi, valorile proprii matricei \mathbf{A} din (3.1.9):

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

apoi matricea de tranziție utilizând (3.1.7), (3.1.8) și

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{4}{3} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4t} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4t} \end{cases}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - 2\alpha_1 & \alpha_1 \\ 2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot e^{-t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-4t} & \frac{1}{3} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4t} \\ \frac{2}{3} \cdot e^{-t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-4t} & \frac{1}{3} \cdot e^{-t} + \frac{2}{3} \cdot e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Se aplică (3.1.5) și se obțin expresiile variabilelor de stare pentru condițiile $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$ ($\mathbf{x}_1(t)=0$):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} - \frac{10}{3} \cdot e^{-t} - \frac{5}{12} \cdot e^{-4t} \\ \frac{5}{2} - \frac{10}{3} \cdot e^{-t} + \frac{5}{6} \cdot e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t) \quad (3.2.9)$$

Direcțiile proprii se determină din (3.1.11):

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_{12} + 2) \cdot x_1(0) - x_2(0) = 0 \\ -2x_1(0) + (\lambda_{12} + 3) \cdot x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Pentru $\lambda_1 = -1$ se obține:

$$x_1(0) - x_2(0) = 0 \Rightarrow x_2(0) = x_1(0) \quad (3.2.10)$$

iar pentru $\lambda_2 = -4$:

$$-2x_1(0) - x_2(0) = 0 \Rightarrow x_2(0) = -2x_1(0) \quad (3.2.11)$$

Prin urmare, pentru ca răspunsul liber să conțină numai modul de oscilație e^{-t} , condițiile inițiale trebuie să îndeplinească relația (3.2.10), iar pentru modul de oscilație e^{-4t} relația (3.2.11). În ceea ce privește stabilitatea sistemului, acesta este stabil deoarece $\lambda_{12} < 0 \Rightarrow$ poli în semiplanul stâng; pe de altă parte variabilele de stare din (3.2.9) tind la valori constante (sunt mărginite) când $t \rightarrow \infty$. Direcțiile proprii sunt reprezentate grafic în Figura 3.10a.

b) Matricile din (3.1.1) sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, de unde rezultă că sistemul este instabil ($\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ pol în semiplanul drept).

Parametrii $\alpha_{0,1}$ și matricea de tranziție e^{At} sunt:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_1 \\ 3\alpha_1 & \alpha_0 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{4} \cdot e^{2t} & -\frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{4} \cdot e^{2t} \\ -\frac{3}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{4} \cdot e^{2t} & \frac{3}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{4} \cdot e^{2t} \end{bmatrix}$$

iar variabilele de stare în condițiile $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T$ sunt:

$$\mathbf{x}_l(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{4} \cdot e^{2t} \\ -\frac{3}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{4} \cdot e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{8} \cdot e^{2t} \\ \frac{3}{8} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{8} \cdot e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot e^{-2t} + \frac{9}{8} \cdot e^{2t} \\ -\frac{3}{8} \cdot e^{-2t} + \frac{9}{8} \cdot e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t) \quad (3.2.12)$$

După cum se observă și din (3.2.12) dacă $t \rightarrow +\infty$ atunci și variabila $x_2 \rightarrow +\infty$, deci sistemul este instabil, ceea ce s-a observat deja din valorile proprii.

Direcțiile proprii, în acest caz, sunt (Figura 3.10b):

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 : x_2(0) = -3x_1(0) \\ \lambda_2 = 2 : x_2(0) = x_1(0) \end{cases}$$

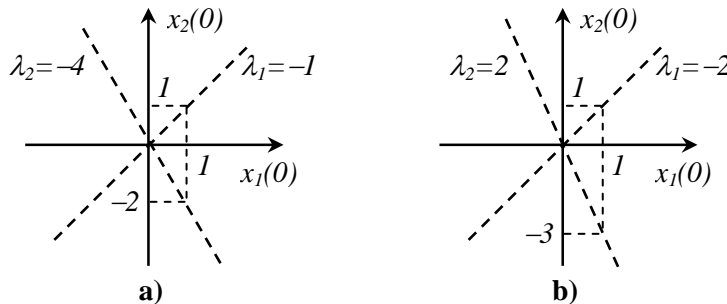


Figura 3.10. Direcțiile proprii pentru sistemele a) și b)

c) Pentru rezolvarea acestui sistem, aplicăm metoda integrării ecuațiilor diferențiale neomogene (**problema Cauchy**). În prima etapă se elimină una dintre variabile (x_2), obținând ecuația diferențială (de ordinul 2) de o singură variabilă (x_1). În următoarea etapă se determină soluția de regim tranzitoriu (liber), apoi soluția de regim permanent (forțat), iar soluția finală va fi suma celor două soluții.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9 \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_1 \\ \frac{d}{dt} \left(9 \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) = -x_1 - \left(9 \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) + e \end{cases}$$

Ecuția diferențială de variabilă x_1 este:

$$9 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 10 \cdot \frac{dx_1}{dt} + 2 \cdot x_1 = e \quad (3.2.13)$$

Se rezolvă ecuația omogenă:

$$9 \cdot p^2 + 10 \cdot p + 2 \cdot p = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{9} \Rightarrow p_1 \approx -\frac{3}{10}, p_2 \approx -\frac{9}{10}$$

iar soluția de regim liber este de forma:

$$x_{1l} = C_1 \cdot e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} = C_1 \cdot e^{\frac{-3}{10} t} + C_2 \cdot e^{\frac{-9}{10} t}$$

Soluția de regim forțat se obține considerând-o de aceeași formă cu excitația (treaptă unitate):

$$x_{1f} = C_3 \cdot \gamma(t)$$

Se înlocuiește x_{1f} în ecuația caracteristică (3.2.13) și rezultă constanta C_3 :

$$2 \cdot C_3 \cdot \gamma(t) = \gamma(t) \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}$$

Soluția finală este de forma:

$$x_1 = \frac{1}{2} + C_1 \cdot e^{\frac{-3}{10}t} + C_2 \cdot e^{\frac{-9}{10}t}$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale date în enunț:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1 \\ -\frac{3}{10} \cdot C_1 - \frac{9}{10} \cdot C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{4} \\ C_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{-3}{10}t} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{-9}{10}t}$$

Soluția x_2 se obține:

$$x_2 = 9 \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 9 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{-3}{10}t} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{-9}{10}t} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{-3}{10}t} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{-9}{10}t} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{51}{40} \cdot e^{\frac{-3}{10}t} + \frac{71}{40} \cdot e^{\frac{-9}{10}t}$$

Pentru a determina direcțiile proprii, se determină valorile proprii, care coincid cu soluțiile ecuației omogene ($p_{1,2}$). Din (3.1.11) rezultă direcțiile proprii:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{10} \Rightarrow -\frac{17}{10} \cdot x_1(0) - x_2(0) = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{9}{10} \Rightarrow -\frac{71}{10} \cdot x_1(0) - x_2(0) = 0$$

3.2.6. Să se rezolve următorul sistem de ecuații de stare prin metoda integrării ecuațiilor diferențiale neomogene (problema Cauchy). Excitația este de tip treaptă unitate, iar condițiile inițiale sunt nule.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}e \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Se observă că este mai convenabil să se elimine variabila x_1 :

$$x_1 = \frac{dx_2}{dt} + x_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_2}{dt} + x_2 \right) = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{dx_2}{dt} + x_2 \right) - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{2} e$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + 2 \cdot x_2 = \frac{3}{2} \cdot e$$

Soluțiile ecuației omogene sunt:

$$p_{12} = \frac{-5 \pm j\sqrt{7}}{4} = \alpha \pm j\beta$$

Soluția de regim liber este:

$$x_{2l} = C_1 \cdot e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} = e^{\alpha t} \cdot [A_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)]$$

Soluția de regim forțat se consideră de aceeași formă cu excitația:
 $x_{2f} = C_3 \cdot \gamma(t)$. Înlocuit în ecuația diferențială rezultă $C_3 = \frac{3}{4}$. Soluția finală este de forma:

$$x_2 = \frac{3}{4} + e^{\alpha t} \cdot [A_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)]$$

Constantele A_1 și A_2 se obțin din condițiile inițiale:

$$\begin{cases} x_2(0) = 0 \\ x_2^{(1)}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} + A_1 = 0 \\ \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{3}{4} \\ A_2 = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot A_1 = -\frac{15}{4\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot e^{-5t} \cdot \left[\cos(\sqrt{7} \cdot t) + \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \sin(\sqrt{7} \cdot t) \right]$$

Soluția x_1 se obține:

$$x_1 = \frac{dx_2}{dt} + x_2 = \frac{3}{28} \cdot \left[7 - e^{-5t} \cdot \left(7 \cdot \cos(\sqrt{7} \cdot t) - 27\sqrt{7} \cdot \sin(\sqrt{7} \cdot t) \right) \right]$$

3.2.7. Să se rezolve următoarele ecuații de stare, în domeniul Laplace, în condiții inițiale nule, dacă semnalul de intrare este de tip treaptă unitate.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 2e \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 \\ y_1 = e - x_1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + e \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \\ y_1 = e - 2x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Rezolvare:

a) Matricile sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [1]$$

Funcția de transfer este:

$$\mathbf{H}(s) = [-1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + [1] = \frac{s^2 - s - 4}{s^2 + s - 4}$$

de unde rezultă ieșirea:

$$Y(s) = \frac{s^2 - s - 4}{s \cdot (s^2 + s - 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}} + \frac{C}{s + \frac{1 - \sqrt{17}}{2}}$$

Se aplică transformata Laplace inversă și rezultă răspunsul în timp:

$$y_1(t) = \left[1 + \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot e^{-0.5(1+\sqrt{17})t} \cdot (1 - e^{\sqrt{17}t}) \right] \cdot \gamma(t)$$

din care rezultă că, pentru $t \rightarrow +\infty$ răspunsul $y_1 \rightarrow -\infty$ (răspuns nemărginit la excitație mărginită), deci sistemul este instabil.

b) Matricile sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funcția de transfer este:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-4} \cdot \begin{bmatrix} s^2-2s-6 \\ s+4 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă ieșirile:

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{s^2-2s-6}{s \cdot (s^2-4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{s-2} + \frac{C_1}{s+2} \\ Y_2(s) = \frac{s+4}{s \cdot (s^2-4)} = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2}{s-2} + \frac{C_2}{s+2} \end{cases}$$

Se aplică transformata Laplace inversă și rezultă răspunsurile în timp:

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{4} \cdot (6 + e^{-2t} - 3 \cdot e^{2t}) \cdot \gamma(t) \\ y_2(t) = \frac{1}{4} \cdot (-4 \cdot e^{-2t} + 3 \cdot e^{2t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

Se observă, și în acest caz, că pentru $t \rightarrow +\infty$ răspunsurile $y_1 \rightarrow -\infty$, respectiv $y_2 \rightarrow +\infty$ (răspunsuri nemărginite la excitație mărginită), deci sistemul este instabil.

3.2.8. Pentru circuitele din Figura 3.11 se cer:

a) Ecuațiile de stare;

b) Să se rezolve ecuațiile de stare în condițiile $i_{L2}(0)=1A$, $u_{C3}(0)=-1V$ (Figura 3.11a), $u_{C1}(0)=1V$, $u_{C3}(0)=0V$ (Figura 3.11b), dacă semnalul de

excitație este de tip treaptă unitate. Valorile componentelor sunt: $R_1=4/5\Omega$, $R_4=2\Omega$, $C_3=2F$, $L_2=2/5H$ (Figura 3.11a), $R_1=3/2\Omega$, $C_1=C_2=1F$, $C_3=1/2F$ (Figura 3.11b)

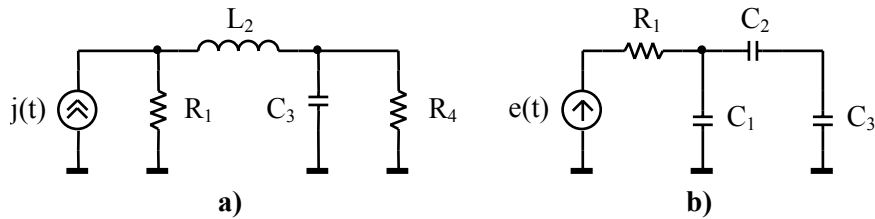


Figura 3.11. Circuite pasive

Rezolvare:

a) *GLO* pentru fiecare circuit sunt prezentate în Figura 3.12.

Pentru *GLO* din Figura 3.12a se scriu ecuațiile cu teoremele lui Kirchhoff, respectiv legea lui Ohm:

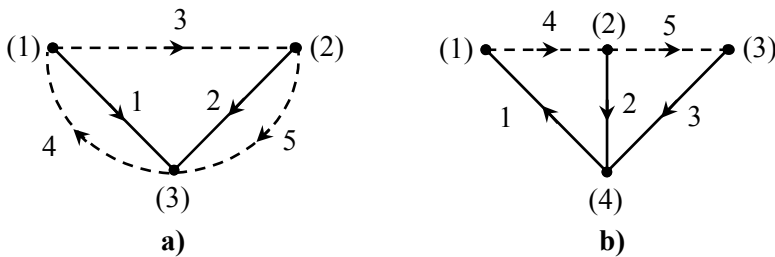


Figura 3.12. *GLO* pentru circuitele din Figura 3.11

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3 = u_1 - u_2 \\ u_4 = u_2 \\ i_4 = j \\ i_1 = i_4 - i_5 \\ i_2 = i_3 - i_5 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3 = L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} \\ u_5 = R_4 \cdot i_5 \\ i_1 = \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 = C_3 \cdot \frac{du_2}{dt} \end{array} \right.$$

Din cele două sisteme rezultă ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} \frac{di_3}{dt} = -\frac{R_1}{L_2} \cdot i_3 - \frac{1}{L_2} \cdot u_2 + \frac{R_1}{L_2} \cdot j \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_3 - \frac{1}{R_4 C_3} \cdot u_2 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Variabilele de ieșire pot fi u_1, u_5, i_1, i_5 . În acest exemplu considerăm ca ieșiri mărimile i_1, u_5 , atunci ecuațiile ieșirii sunt:

$$\begin{cases} y_1 = i_1 = j - \frac{u_2}{R_4} \\ y_2 = u_5 = u_2 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Matricile $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ și \mathbf{D} sunt:

$$\mathbf{x} = [i_3 \ u_2]^T, \quad \mathbf{y} = [i_1 \ u_5]^T, \quad \mathbf{e} = [j]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{R_4 C_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pentru *GLO* din Figura 3.12b se scriu ecuațiile (T. Kirchhoff, L. Ohm):

$$\begin{cases} u_4 = -u_1 - u_2 \\ u_5 = u_2 - u_3 \quad (*) \\ -u_1 = e \\ i_2 = i_4 - i_5 \\ i_3 = i_5 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_4 = R_1 \cdot i_4 \\ u_5 \rightarrow i_5 = C_2 \cdot \frac{du_5}{dt} \\ i_2 = C_1 \cdot \frac{du_2}{dt} \\ i_3 = C_3 \cdot \frac{du_3}{dt} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Din cauza buclei capacitive, latura 5 apare în *GLO* ca și coardă, deci u_5 nu este variabilă de stare și va trebui eliminată din sistemele (3.2.16). Pentru a evita operația de integrare, datorită legii lui Ohm $u_5 = f(i_5)$, se exprimă $i_5 = f(u_5)$. Eliminarea lui u_5 se face derivând ecuația marcată cu (*) în (3.2.16) și se continuă algoritmul de determinare a ecuațiilor de stare. Se obține astfel sistemul:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{I}{R_1 C_1} \cdot u_2 - \frac{C_3}{C_1} \cdot \frac{du_3}{dt} + \frac{I}{R_1 C_1} \cdot e \\ \frac{du_3}{dt} = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{du_2}{dt} \end{cases}$$

din care se exprimă du_2/dt și du_3/dt , care formează sistemul de ecuații de stare:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{C_2 + C_3}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \cdot u_2 + \frac{C_2 + C_3}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \cdot e \\ \frac{du_3}{dt} = -\frac{C_2}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \cdot u_2 + \frac{C_2}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \cdot e \end{cases}$$

Variabilele de ieșire pot fi u_4, u_5, i_4 . În acest caz, ecuațiile ieșirii sunt:

$$\begin{cases} y_1 = u_4 = -u_2 + e \\ y_2 = u_5 = u_2 - u_3 \\ y_3 = i_4 = -\frac{I}{R_1} \cdot u_2 + \frac{I}{R_1} \cdot e \end{cases}$$

Matricile x, y, A, B, C și D sunt:

$$\mathbf{x} = [u_2 \quad u_3]^T, \quad \mathbf{y} = [u_4 \quad u_5 \quad i_4]^T, \quad \mathbf{e} = [e]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{C_2 + C_3}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} & 0 \\ -\frac{C_2}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{C_2 + C_3}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \\ \frac{C_2}{R_1(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ I & -I \\ -\frac{I}{R_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \frac{I}{R_1} \end{bmatrix}$$

b) Pentru circuitul din Figura 3.11a matricile, respectiv condițiile inițiale sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

iar valorile proprii se obțin din (3.1.9): $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3/4$.

Soluția ecuațiilor de evoluție a stării se determină din (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8):

$$\begin{cases} \alpha_0 = -3 \cdot e^{-t} + 4 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ \alpha_1 = -4 \cdot e^{-t} + 4 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{cases}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - 2\alpha_1 & \frac{5}{2}\alpha_1 \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 & \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot e^{-t} - 4 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} & -10 \cdot e^{-t} + 10 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ 2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} & -4 \cdot e^{-t} + 5 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \cdot e^{-t} - 14 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ 6 \cdot e^{-t} - 7 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

$$\mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} - 10 \cdot e^{-t} + \frac{32}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ -\frac{4}{3} - 4 \cdot e^{-t} + \frac{16}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_3 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} + 5 \cdot e^{-t} - \frac{10}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ -\frac{4}{3} + 2 \cdot e^{-t} - \frac{5}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

Mărimile de ieșire se determină din (3.1.6):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_l(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{A \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-t} - \frac{7}{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ 6 \cdot e^{-t} - 7 \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t) \\
 \mathbf{y}_f(t) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + e^{-t} - \frac{8}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ -\frac{4}{3} - 4 \cdot e^{-t} + \frac{16}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t) \\
 \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i_l \\ u_5 \end{bmatrix} &= \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 4 \cdot e^{-t} - \frac{37}{6} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \\ -\frac{4}{3} + 2 \cdot e^{-t} - \frac{5}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)
 \end{aligned}$$

Pentru circuitul din Figura 3.11b matricile, respectiv condițiile inițiale sunt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iar valorile proprii se obțin din (3.1.9): $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1/2$.

Parametrii necesari determinării mărimilor de stare sunt:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 2 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

$$e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_l(t) = e^{A \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

$$\mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

Prin însumarea soluțiilor de regim liber și forțat se obține soluția finală a ecuației de evoluție a stării:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

Parametrii necesari determinării mărimilor de ieșire sunt:

$$\mathbf{y}_l(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{A \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \\ -\frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

$$\mathbf{y}_f(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

din care rezultă soluția finală a ecuației ieșirii:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ i_4 \end{bmatrix} = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-t/2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \gamma(t)$$

3.2.9. Să se determine matricea de tranziție pentru următoarele matrici de stare, utilizând polinomul de interpolare a lui Lagrange.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rezolvare:

a) Se determină matricea caracteristică:

$$[\lambda \cdot I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Se determină polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

iar valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Adjuncta matricii caracteristice este:

$$[\lambda \cdot I - A]^* = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$P'(\lambda) = 2\lambda - 3 \Rightarrow P'(\lambda_1) = -3, P'(\lambda_2) = 3$$

Matricea de tranziție va fi:

$$e^{A \cdot t} = \frac{1}{P'(\lambda_1)} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & -2 \\ -1 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{P'(\lambda_2)} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & -2 \\ -1 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$e^{A \cdot t} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 + e^{3t} & 2 - 2 \cdot e^{3t} \\ 1 - e^{3t} & -1 + 2 \cdot e^{3t} \end{bmatrix}$$

b) Matricea caracteristică este:

$$[\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$$

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda - 1 \Rightarrow P'(\lambda_1) = 3, P'(\lambda_2) = 6, P'(\lambda_3) = -2$$

$$[\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^* = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)(\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2)(\lambda - 1) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Observație: Dacă matricea \mathbf{A} este diagonală, atunci și matricea $e^{\mathbf{A}t}$ este diagonală, având ca elemente exponențialele cu valori proprii.

3.2.10. Pentru circuitul din Figura 3.13a, să se determine ecuațiile de stare.

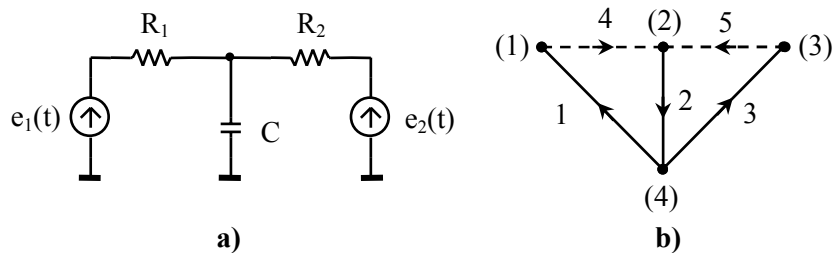


Figura 3.13. Circuit pasiv și GLO asociat

Rezolvare:

Variabila de stare este u_2 , iar *GLO* asociat circuitului este dat în Figura 3.13b. Sistemele scrise cu teoremele lui Kirchoff și legea lui Ohm sunt:

$$\begin{cases} u_4 = -u_1 - u_2 \\ u_5 = -u_2 - u_3 \\ -u_1 = e_1 \\ -u_3 = e_2 \\ i_2 = i_4 + i_5 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_4 = R_1 \cdot i_4 \\ u_5 = R_2 \cdot i_5 \\ i_2 = C \cdot \frac{du_2}{dt} \end{cases}$$

Din cele două sisteme rezultă ecuația de stare:

$$\frac{du_2}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) \cdot u_2 + \frac{1}{R_1 C} \cdot e_1 + \frac{1}{R_2 C} \cdot e_2$$

Variabilele de ieșire pot fi u_4, u_5, i_4, i_5 . În acest caz, ecuațiile ieșirii sunt:

$$\begin{cases} y_1 = u_4 = -u_2 + e_1 \\ y_2 = u_5 = -u_2 + e_2 \\ y_3 = i_4 = -\frac{1}{R_1} \cdot u_2 + \frac{1}{R_1} \cdot e_1 \\ y_4 = i_5 = -\frac{1}{R_2} \cdot u_2 + \frac{1}{R_2} \cdot e_2 \end{cases}$$

Matricile $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ și \mathbf{D} sunt:

$$\mathbf{x} = [u_2], \quad \mathbf{y} = [u_4 \quad u_5 \quad i_4 \quad i_5]^T, \quad \mathbf{e} = [e_1 \quad e_2]^T$$

$$\mathbf{A} = \left[-\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & \frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/R_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix}$$

3.2.11. Pentru circuitul din Figura 3.14a, să se determine ecuațiile de stare.

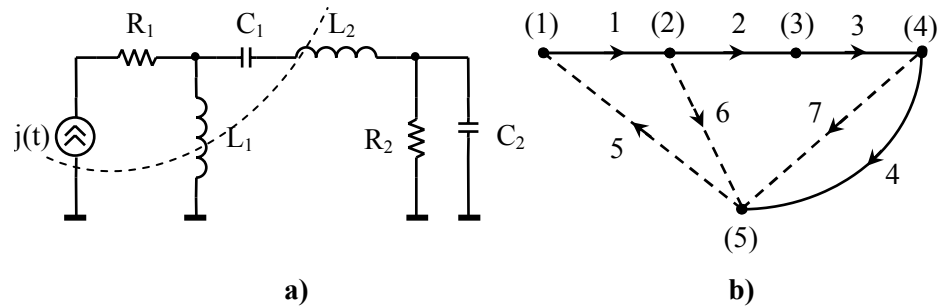


Figura 3.14. Circuit pasiv și GLO asociat

Rezolvare:

Se observă că în acest circuit există o secțiune inductivă formată din sursa ideală de curent $j(t)$ și bobinele L_1, L_2 . Variabilele de stare sunt u_2, u_4, i_6 , iar GLO asociat circuitului este dat în Figura 3.14b (este posibilă și varianta în care L_2 apare pe coardă și L_1 ramură).

Sistemele scrise cu teoremele lui Kirchhoff și legea lui Ohm sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_6 = u_2 + u_3 + u_4 \\ u_7 = u_4 \\ i_1 = i_5 = j \\ i_2 = i_3 \quad (*) \\ i_3 = i_5 - i_6 \\ i_4 = i_5 - i_6 - i_7 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_6 = L_1 \cdot \frac{di_6}{dt} \\ u_7 = R_2 \cdot i_7 \\ i_1 = \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 = C_1 \cdot \frac{du_2}{dt} \\ i_3 \rightarrow u_3 = L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_4 = C_2 \cdot \frac{du_4}{dt} \end{array} \right.$$

În cazul în care apare o secțiune inductivă, determinarea ecuațiilor de stare se face în mod asemănător ca și în cazul buclilor capacitive (vezi **problema 3.2.8**). Prin urmare, pentru a evita introducerea integralei, se derivatează ecuația marcată cu (*) și se continuă algoritmul de determinare a ecuațiilor de stare. Din cele două sisteme rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{C_1} \cdot i_6 + \frac{1}{C_1} \cdot j \\ \frac{du_4}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} \cdot u_4 - \frac{1}{C_2} \cdot i_6 + \frac{1}{C_2} \cdot j \\ \frac{di_6}{dt} - C_1 \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \frac{1}{L_1} \cdot u_2 + \frac{1}{L_1} \cdot u_4 \end{cases}$$

din care se elimină termenul $\frac{d^2 u_2}{dt^2}$ și se obțin ecuațiile de stare (3.2.17), care sunt de formă degenerată (3.1.2) (apare derivata sursei $j(t)$):

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{C_1} \cdot i_6 + \frac{1}{C_1} \cdot j \\ \frac{du_4}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} \cdot u_4 - \frac{1}{C_2} \cdot i_6 + \frac{1}{C_2} \cdot j \\ \frac{di_6}{dt} = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot u_2 + \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot u_4 + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{dj}{dt} \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Variabilele de ieșire pot fi $u_1, u_3, u_7, i_1, i_3, i_7$. Determinarea mărimii de ieșire u_3 se face astfel:

$$u_3 = L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} = L_2 \cdot \frac{d(j - i_6)}{dt}$$

$$u_3 = L_2 \cdot \frac{dj}{dt} - L_2 \cdot \left(\frac{1}{L_1 + L_2} \cdot u_2 + \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot u_4 + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{dj}{dt} \right)$$

$$u_3 = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot u_2 - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot u_4 + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{dj}{dt}$$

Se obțin în final ecuațiile ieșirii de formă degenerată.

$$\begin{cases} y_1 = u_1 = R_1 \cdot j \\ y_2 = u_3 = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot u_2 - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot u_4 + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{dj}{dt} \\ y_3 = u_7 = u_4 \\ y_4 = i_1 = j \\ y_5 = i_3 = j - i_6 \\ y_6 = i_7 = \frac{1}{R_2} \cdot u_7 = \frac{1}{R_2} \cdot u_4 \end{cases}$$

Matricile \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{A} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C} , \mathbf{D}_1 și \mathbf{D}_2 sunt:

$$\mathbf{x} = [u_2 \quad u_4 \quad i_6]^T, \quad \mathbf{y} = [u_1 \quad u_3 \quad u_7 \quad i_1 \quad i_3 \quad i_7]^T, \quad \mathbf{e} = [j]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1 + L_2} & \frac{1}{L_1 + L_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L_2}{L_1 + L_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_2}{L_1 + L_2} & -\frac{L_2}{L_1 + L_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Probleme propuse

3.3.1. Determinați valorile proprii ale matricii $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Soluție: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -6$.

3.3.2. Determinați matricea de tranziție pentru matricea $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Soluție: $\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$.

3.3.3. Determinați valorile proprii și expresiile direcțiilor proprii pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Soluție: $\lambda_1 = -2$, direcția proprie: $x_2(0) = -0.5 \cdot x_1(0)$; $\lambda_2 = -3$, direcția proprie: $x_2(0) = -x_1(0)$.

3.3.4. Determinați valorile proprii și expresiile direcțiilor proprii pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Soluție: $\lambda_1 = -5$, direcția proprie: $x_2(0) = -x_1(0)$; $\lambda_2 = -6$, direcția proprie: $x_2(0) = -\frac{4}{3} \cdot x_1(0)$.

3.3.5. Determinați valorile proprii și expresiile direcțiilor proprii pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Soluție: $\lambda_1 = -2$, direcția proprie: $x_2(0) = x_1(0)$; $\lambda_2 = -4$, direcția proprie: $x_2(0) = 3 \cdot x_1(0)$.

3.3.6. Determinați matricea de tranziție pentru matricea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, utilizând polinomul caracteristic $P(\lambda)$.

Soluție: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6,$

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{-2t} - e^{-3t} & 2 \cdot e^{-2t} - 2 \cdot e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -e^{-2t} + 2 \cdot e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

3.3.7. Determinați matricea de tranziție pentru matricea $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$, utilizând polinomul caracteristic $P(\lambda)$.

Soluție: $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -6, P(\lambda) = \lambda^2 + 11\lambda + 30,$

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 4 \cdot e^{-5t} - 3 \cdot e^{-6t} & 3 \cdot e^{-5t} - 3 \cdot e^{-6t} \\ -4 \cdot e^{-5t} + 4 \cdot e^{-6t} & -3 \cdot e^{-5t} + 4 \cdot e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

3.3.8. Determinați matricea de tranziție pentru matricea $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, utilizând polinomul caracteristic $P(\lambda)$.

Soluție: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4, P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8,$

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} & -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \\ \frac{3}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{3}{2} \cdot e^{-4t} & -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

3.3.9. Determinați răspunsul liber al sistemului caracterizat prin matricea de tranziție $\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} -2 \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t} & -3 \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t} \\ 2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} & 3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} \end{bmatrix}$, pornind din starea inițială $x_0 = [1 \quad 1]^T$.

Soluție: $x_1(t) = -5 \cdot e^{-t} + 6 \cdot e^{-2t}, x_2(t) = 5 \cdot e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t}.$

3.3.10. Determinați răspunsul liber al sistemului caracterizat prin matricea de tranziție $\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{-2t} - e^{-3t} & 2 \cdot e^{-2t} - 2 \cdot e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -e^{-2t} + 2 \cdot e^{-3t} \end{bmatrix}$, pornind din starea inițială $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad 1]^T$.

Soluție: $x_1(t) = -e^{-3t}$, $x_2(t) = e^{-3t}$.

3.3.11. Determinați răspunsul liber al sistemului caracterizat prin matricea de tranziție de mai jos, pornind din starea inițială $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 1]^T$.

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} & -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \\ \frac{3}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{3}{2} \cdot e^{-4t} & -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Soluție: $x_1(t) = e^{-2t}$, $x_2(t) = e^{-2t}$.

3.3.12. Determinați direcțiile proprii matricelor de la **problema 3.2.9**.

Soluție:

$$\mathbf{a)} \begin{cases} x_2(0) = \frac{1}{2}x_1(0), \lambda_1=0 \\ x_2(0) = -x_1(0), \lambda_2=3 \end{cases} \quad \mathbf{b)} \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

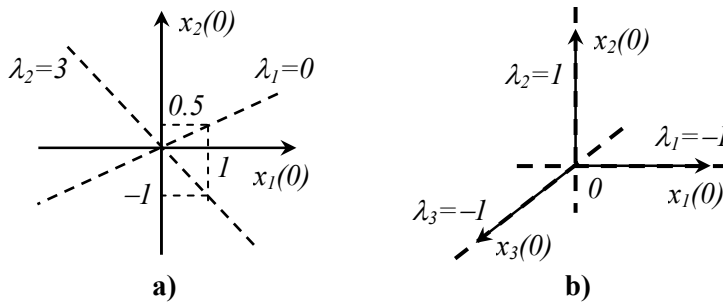


Figura 3.15. Direcțiile proprii pentru cele două sisteme

3.3.13. Pentru următoarele sisteme, să se determine modelul de stare.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + 5e \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 2e \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 \\ y = e - x_1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + e \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \\ y_1 = e - 2x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Soluție:

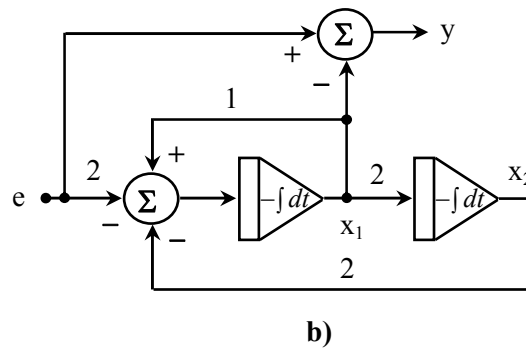
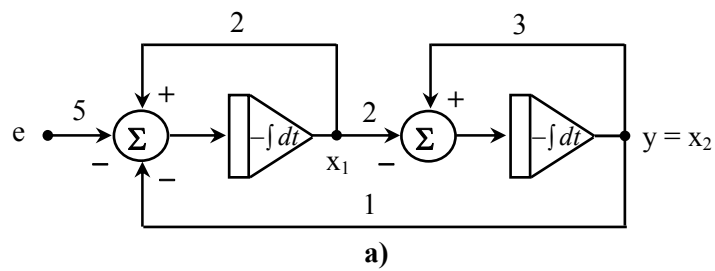


Figura 3.17. Modelele de stare pentru sistemele a), b) (problema 3.3.13)

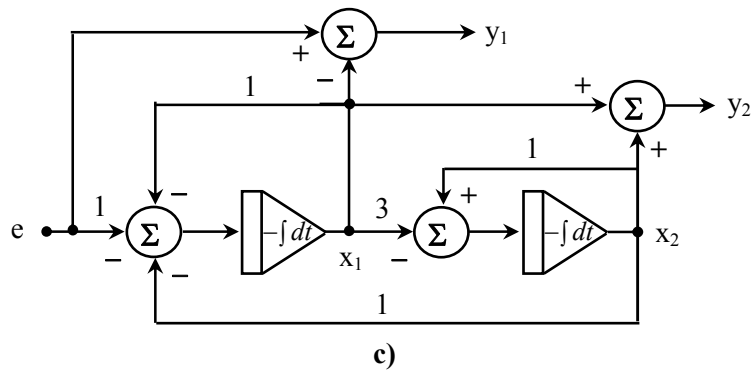


Figura 3.17. Modelul de stare pentru sistemul c) (problema 3.3.13 – continuare)

3.3.14. Pentru circuitele din Figura 3.16, să se determine ecuațiile de stare.

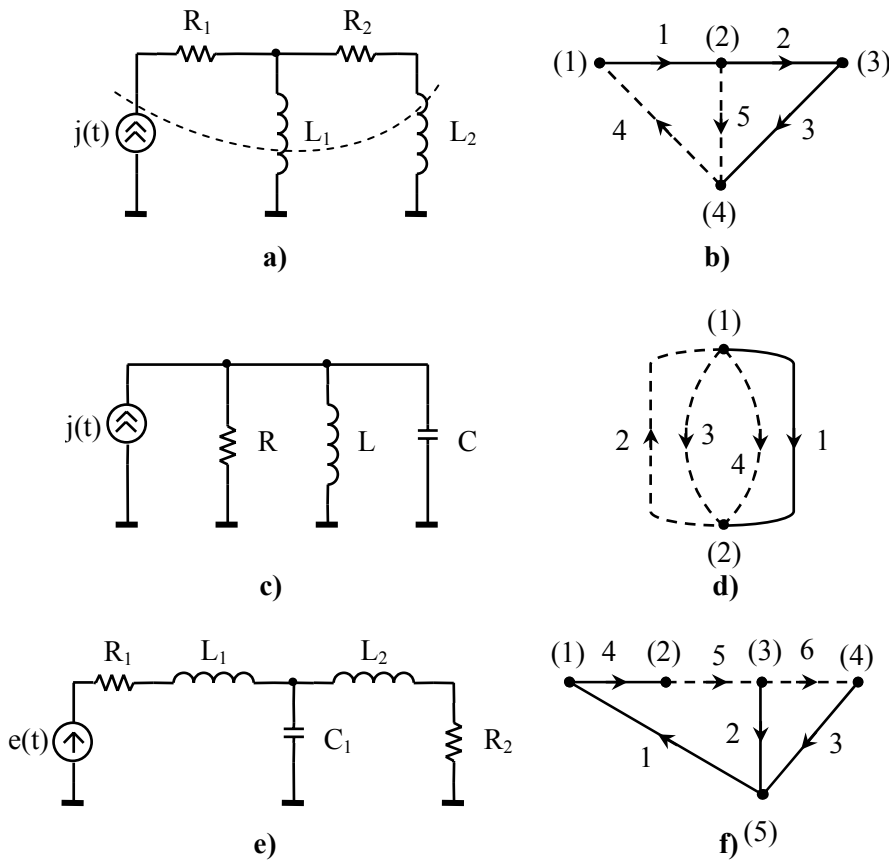


Figura 3.16. Circuite cu GLO asociate

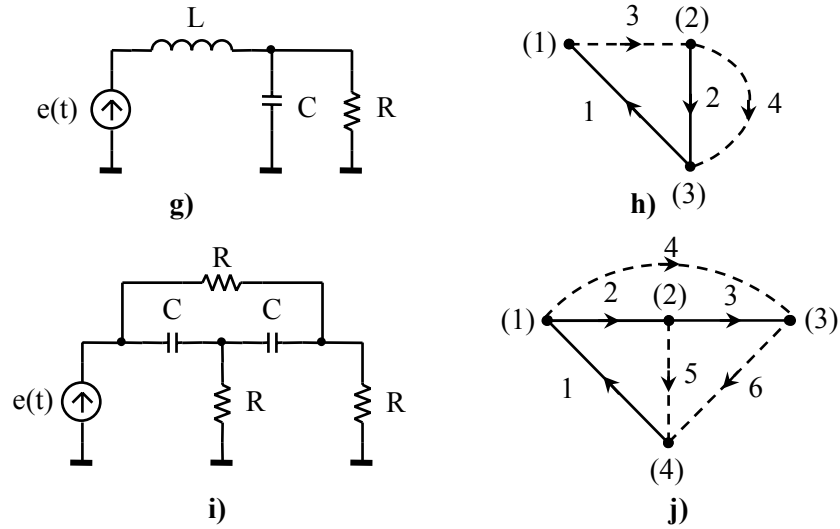


Figura 3.16. Circuite cu GLO asociate (problema 3.3.14 – continuare)

Soluție:

Pentru figura 3.16 a, b :

$$\begin{cases} \frac{di_5}{dt} = -\frac{R_2}{L_1 + L_2} \cdot i_5 + \frac{R_2}{L_1 + L_2} \cdot j + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{dj}{dt} \\ y_1 = u_1 = R_1 \cdot j \\ y_2 = u_2 = R_2 \cdot (j - i_5) \\ y_3 = i_1 = j \\ y_4 = i_2 = j - i_5 \end{cases}$$

Pentru figura 3.16 c, d :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{l}{RC} \cdot u_1 - \frac{l}{C} \cdot i_4 + \frac{l}{C} \cdot j \\ \frac{di_4}{dt} = \frac{l}{L} \cdot u_1 \\ y_1 = u_3 = u_1 \\ y_2 = i_3 = \frac{u_1}{R} \end{cases}$$

Pentru figura 3.16 e, f :

$$\begin{cases} \frac{di_5}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot i_5 - \frac{l}{L_1} \cdot u_2 + \frac{l}{L_1} \cdot e \\ \frac{di_6}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} \cdot i_6 + \frac{l}{L_2} \cdot u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{l}{C_1} \cdot i_5 - \frac{l}{C_1} \cdot i_6 \\ y_1 = u_3 = R_2 \cdot i_6 \\ y_2 = u_4 = R_1 \cdot i_5 \\ y_3 = i_3 = i_6 \\ y_4 = i_4 = i_5 \end{cases}$$

Pentru figura 3.16 g, h :

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{l}{RC} \cdot u_2 + \frac{l}{C} \cdot i_3 \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{l}{L} \cdot u_2 + \frac{l}{L} \cdot e \\ y_1 = u_4 = u_2 \\ y_2 = i_4 = \frac{u_2}{R} \end{cases}$$

Pentru figura 3.16 i, j:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_2}{dt} = -\frac{3}{RC} \cdot u_2 - \frac{2}{RC} \cdot u_3 + \frac{2}{RC} \cdot e \\ \frac{du_3}{dt} = -\frac{2}{RC} \cdot u_2 - \frac{2}{RC} \cdot u_3 + \frac{1}{RC} \cdot e \\ y_1 = u_4 = u_2 + u_3 \\ y_2 = u_5 = e - u_2 \\ y_3 = u_6 = e - u_2 - u_3 \\ y_4 = i_4 = \frac{1}{R} \cdot (u_2 + u_3) \\ y_5 = i_5 = \frac{1}{R} \cdot (e - u_2) \\ y_6 = i_6 = \frac{1}{R} \cdot (e - u_2 - u_3) \end{array} \right.$$

3.3.15. Să se determine funcția de transfer pentru sistemele de la **problema 3.3.13**.
Să se determine răspunsul la impuls (funcția pondere).

Soluție:

$$H_a(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 4}; \quad H_b(s) = \frac{-2s + 1}{s^2 + s - 4}; \quad H_c(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \cdot \begin{bmatrix} s^2 - 2s - 6 \\ s + 4 \end{bmatrix}$$

$$h_a(t) = \frac{10}{3} \cdot (e^{-t} - e^{-4t})$$

$$h_b(t) = \frac{1}{17} \cdot \left[(-17 - 2\sqrt{17}) e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})t} + (-17 + 2\sqrt{17}) e^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})t} \right]$$

$$h_c(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) - \frac{1}{2} \cdot (e^{-2t} + 3e^{2t}) \\ \frac{1}{2} \cdot (-e^{-2t} + 3e^{2t}) \end{bmatrix}$$

3.3.16. Pentru circuitul din Figura 3.18 să se determine ecuațiile de stare, funcțiile de circuit $\frac{U_{R1}(s)}{E(s)}, \frac{U_{R4}(s)}{E(s)}, \frac{I_{R1}(s)}{E(s)}, \frac{I_{R4}(s)}{E(s)}$ și expresiile semnalelor $u_{R1}(t), u_{R4}(t), i_{R1}(t), i_{R4}(t)$, dacă excitația este treaptă unitate. Se va considera $R_1=R_2=R_3=R_4=R$.

Soluție: Variabila de stare este $i_5(t)$, vectorul de ieșire $y = [u_2 \ u_6 \ i_2 \ i_6]^T$, iar ecuațiile de stare sunt:

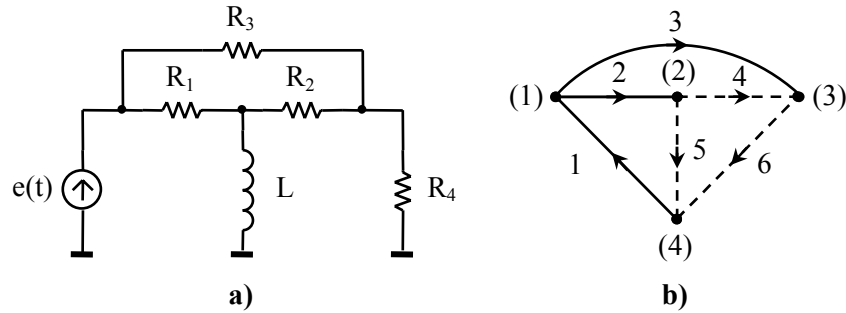


Figura 3.18. Circuit cu GLO asociat

$$\begin{cases} \frac{di_5}{dt} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{R}{L} \cdot i_5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{L} \cdot e \\ y_1 = u_2 = e - u_5 = e - L \cdot \frac{di_5}{dt} = \frac{3R}{5} \cdot i_5 + \frac{1}{5} \cdot e \\ y_2 = u_6 = u_5 - u_4 = u_5 - R \cdot (i_2 - i_5) = -\frac{R}{5} \cdot i_5 + \frac{3}{5} \cdot e \\ y_3 = i_2 = \frac{u_2}{R} = \frac{3}{5} \cdot i_5 + \frac{1}{5R} \cdot e \\ y_4 = i_6 = -\frac{1}{5} \cdot i_5 + \frac{3}{5R} \cdot e \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot \left(s + \frac{3R}{L} \right) & \frac{3}{5} \cdot \left(s + \frac{R}{3L} \right) & \frac{1}{5R} \cdot \left(s + \frac{3R}{L} \right) & \frac{3}{5R} \cdot \left(s + \frac{5R}{3L} \right) \\ \frac{3R}{s + \frac{3R}{5L}} & \frac{3R}{s + \frac{3R}{5L}} & \frac{3R}{s + \frac{3R}{5L}} & \frac{3R}{s + \frac{3R}{5L}} \end{bmatrix}^T$$

$$y_1(t) = \frac{1}{5} \cdot \left(5 - 4 \cdot e^{-\frac{3R}{5L}t} \right) \cdot \gamma(t), \quad y_2(t) = \frac{1}{15} \cdot \left(5 + 4 \cdot e^{-\frac{3R}{5L}t} \right) \cdot \gamma(t)$$

$$y_3(t) = \frac{1}{5R} \cdot \left(5 - 4 \cdot e^{-\frac{3R}{5L}t} \right) \cdot \gamma(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{15R} \cdot \left(25 - 16 \cdot e^{-\frac{3R}{5L}t} \right) \cdot \gamma(t)$$

3.3.17. Să se rezolve sistemele de ecuații de stare în condițiile date. Excitația este semnalul treaptă unitate.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 + 4e \\ y_1 = e - x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ \mathbf{x}_0 = [1 \ 2]^T, \mathbf{x}_0^{(1)} = [-1 \ 0]^T \end{array} \right. \\ \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + e \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + 2e \\ y = e - x_1 - 2x_2 \\ \mathbf{x}_0 = [1 \ -1]^T \end{array} \right. \\ \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x + e + \frac{1}{2} \cdot \frac{de}{dt} \\ y_1 = 2e - 2x \\ y_2 = e - x \\ \mathbf{x}_0 = \left[\frac{1}{2} \right] \end{array} \right. \end{array}$$

Soluție:

a) Se aplică metoda integrării ecuațiilor diferențiale neomogene (problema Cauchy): $p_{12} = -2 \pm j$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = x_l(t) + x_f(t) = \frac{1}{5} \cdot [4 + e^{-2t} \cdot (\cos(t) - 3 \sin(t))] \cdot \gamma(t) \\ x_2(t) = \frac{dx_1}{dt} + 3x_1 = \frac{1}{5} \cdot [12 - 2 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos(t) + 2 \cdot \sin(t))] \cdot \gamma(t) \\ y_1 = -\frac{1}{5} \cdot [7 - 2 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos(t) + 2 \cdot \sin(t))] \cdot \gamma(t) \\ y_2 = \frac{2}{5} \cdot [4 + e^{-2t} \cdot (\cos(t) - 3 \sin(t))] \cdot \gamma(t) \end{array} \right.$$

b) Se aplică (3.1.5): $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \alpha_0 = 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t}, \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = x_l(t) + x_f(t) = \gamma(t) \\ x_2(t) = x_l(t) + x_f(t) = (1 - 2 \cdot e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \\ y = -2 \cdot (1 - 2 \cdot e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \end{array} \right.$$

c) Se aplică (3.1.3) și (3.1.5):

$$\begin{cases} x_I(t) = x_{I1}(t) + x_{fI}(t) = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-t}\right) \cdot \gamma(t) \\ x(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t}\right) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_I(t) = -\left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-t}\right) \cdot \gamma(t) \\ y_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-t}\right) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

3.3.18. Să se rezolve în domeniul Laplace sistemele de ecuații de stare de mai jos, în condițiile date. Excitația este semnalul treaptă unitate.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a)} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 + 4e \\ y_1 = e - x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ \mathbf{x}_0 = [1 \ 2]^T \end{cases} & \mathbf{b)} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 - x_1 + e \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_2 + 2e \\ y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ \mathbf{x}_0 = [0 \ -1]^T \end{cases} \end{array}$$

Soluție: La ambele sisteme se aplică (3.1.12).

$$\mathbf{a)} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s \cdot ((s+2)^2 + 1)} \cdot \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 4 \\ 2 \cdot (s^2 + 4s + 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5s} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s-1}{(s+2)^2 + 1} \\ \frac{12}{5s} - \frac{2}{5} \cdot \frac{s+4}{(s+2)^2 + 1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_I(t) = x_1(t) + x_f(t) = \frac{1}{5} \cdot [4 + e^{-2t} \cdot (\cos(t) - 3 \sin(t))] \cdot \gamma(t) \\ x_2(t) = \frac{dx_1}{dt} + 3x_1 = \frac{1}{5} \cdot [12 - 2 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos(t) + 2 \cdot \sin(t))] \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - X_2(s) \\ 2 \cdot X_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5s} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s-1}{(s+2)^2 + 1} \\ \frac{24}{5s} - \frac{4}{5} \cdot \frac{s+4}{(s+2)^2 + 1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{5} \cdot [7 - 2 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos(t) + 2 \cdot \sin(t))] \cdot \gamma(t) \\ y_2 = \frac{2}{5} \cdot [4 + e^{-2t} \cdot (\cos(t) - 3 \sin(t))] \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (s-1) \\ -(s^2 + s - 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2} \\ \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = (-1 + 4 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \\ x_2(t) = (2 - 4 \cdot e^{-t} + e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_1(s) + X_2(s) \\ X_1(s) + X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s} - \frac{8}{s+1} + \frac{4}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = (3 - 8 \cdot e^{-t} + 4 \cdot e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \\ y_2 = (1 - 2 \cdot e^{-2t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

4. Diporți

4.1. Considerații teoretice

4.1.1. Parametrii diporților

Un **diport** este un circuit cu două porți, o poartă fiind pentru intrare și alta pentru ieșire. În analiza diportului intervin patru mărimi: tensiunile $u_1(t)$, $u_2(t)$, curenții $i_1(t)$ și $i_2(t)$ sau transformatele lor Laplace (Figura 4.1).

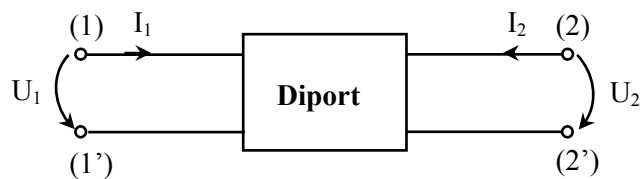


Figura 4.1. Schema bloc a unui diport

În funcție de gruparea acestor mărimi pentru a stabili intrarea, respectiv ieșirea diportului, se definesc următorii parametri: **impedanță** (4.1.1), **admitanță** (4.1.2), **fundamentali** (directi (4.1.3), inverși (4.1.4)), **hibrizi** (directi (4.1.5), inverși (4.1.6)).

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Elementele matricilor (\mathbf{Z} , \mathbf{Y} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{G}) se determină în condiții de **funcționare în gol** ($I_2 = 0$) sau în **scurtcircuit** ($U_2 = 0$). De exemplu, pentru parametrii impedanță se pot scrie relațiile:

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}, \quad Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (4.1.7)$$

Condițiile de reciprocitate, respectiv de simetrie pentru un diporț sunt:

$$\begin{array}{l} \text{Condiții de reciprocitate :} \\ \left\{ \begin{array}{l} Z_{12} = Z_{21} \\ Y_{12} = Y_{21} \\ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \\ H_{12} = -H_{21} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Condiții de simetrie :} \\ \left\{ \begin{array}{l} Z_{11} = Z_{22} \\ Y_{11} = Y_{22} \\ A_{11} = A_{22} \\ H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1 \end{array} \right. \end{array} \quad (4.1.8)$$

Formalismul de repartiție evidențiază unele aspecte privind transmiterea semnalelor prin diporți, cum ar fi: propagarea undelor, adaptarea circuitelor. Acest formalism se definește prin expresia:

$$B(s) = S(s) \cdot A(s) \quad (4.1.9)$$

unde $A(s)$ și $B(s)$ sunt **vectorii undă directă (incidentă)** și **inversă (reflectată)** și reprezintă imaginile Laplace ale vectorilor tensiunilor, respectiv curenților la porți. Vectorii $\mathbf{a}(t)$ și $\mathbf{b}(t)$, pentru cazul $R_g = R_s = 1\Omega$, se definesc astfel:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(t) = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{u}(t) + \mathbf{i}(t)] \\ \mathbf{b}(t) = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{u}(t) - \mathbf{i}(t)] \end{cases} \quad (4.1.10)$$

iar vectorii tensiunilor și curenților sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{i}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{b}(t) \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Dacă $R_g \neq R_s \neq I$ atunci, se poate ajunge la (4.1.11) prin normarea rezistențelor, sau se utilizează expresiile nenormate:

$$\begin{cases} a_1(t) = \frac{I}{2} \cdot \left[\frac{u_1(t)}{\sqrt{R_g}} + i_1(t) \cdot \sqrt{R_g} \right] \\ b_1(t) = \frac{I}{2} \cdot \left[\frac{u_1(t)}{\sqrt{R_g}} - i_1(t) \cdot \sqrt{R_g} \right] \end{cases}, \begin{cases} a_2(t) = \frac{I}{2} \cdot \left[\frac{u_2(t)}{\sqrt{R_s}} + i_2(t) \cdot \sqrt{R_s} \right] \\ b_2(t) = \frac{I}{2} \cdot \left[\frac{u_2(t)}{\sqrt{R_s}} - i_2(t) \cdot \sqrt{R_s} \right] \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Utilizând formalismul impedanță (4.1.1), se deduce:

$$S(s) = [Z(s) + I]^{-1} \cdot [Z(s) - I] \quad (4.1.13)$$

Parametrii de repartiție se mai pot determina calculând termenii:

$$\begin{cases} S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{Z_{in1} - R_g}{Z_{in1} + R_g} \\ S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{Z_{in2} - R_s}{Z_{in2} + R_s} \end{cases}, \begin{cases} S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{U_1}{E_2 / 2} \cdot \sqrt{\frac{R_s}{R_g}} \\ S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{U_2}{E_1 / 2} \cdot \sqrt{\frac{R_g}{R_s}} \end{cases} \quad (4.1.14)$$

unde S_{11} , S_{22} sunt coeficienții de reflexie (de neadaptare) la porțile (1), respectiv (2), E_1 , E_2 sunt t.e.m. de la cele două porți. Condițiile $a_1=0$ și $a_2=0$ au semnificația de pasivizare a surselor la porțile (1) și (2). Impedanțele Z_{in1} și Z_{in2} se determină în condiția în care la cealaltă poartă este conectată sarcina (R_g sau R_s).

Diporții simetrici pot fi echivalați cu o structură în X , cu ajutorul **teoremei bisecțiunii** (Figura 4.2).

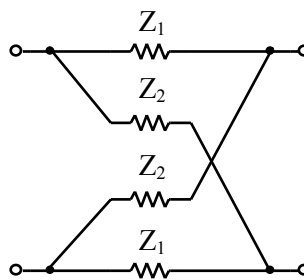


Figura 4.2. Diportul simetric în X

Teorema bisecțiunii: un diport simetric poate fi echivalat cu o schemă simetrică în X la care impedanța longitudinală este egală cu impedanța de scurtcircuit a jumătății diportului simetric, iar impedanța diagonală este egală cu impedanța de mers în gol a jumătății diportului simetric. Reciproca teoremei bisecțiunii nu este adevărată.

Diporții simetrici sunt caracterizați prin impedanța caracteristică (Z_c) și constanta de transfer (θ). **Impedanța caracteristică** Z_c este impedanța care, conectată la o poartă, face ca impedanța la cealaltă poartă să fie egală tot cu Z_c . Această impedanță se calculează pentru un diport în T (Figura 4.3a), respectiv în Π (Figura 4.3b) cu (4.1.15).

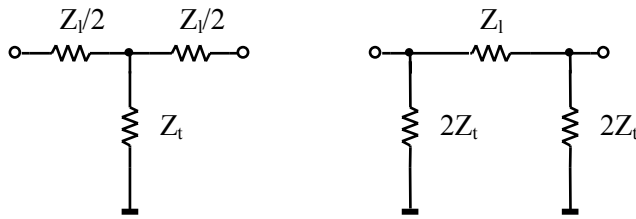


Figura 4.3 a) Diport în T simetric; b) diport în Π simetric

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_l Z_t + \frac{Z_l^2}{4}} \tag{4.1.15}$$

$$Y_{c\Pi} = \sqrt{Y_l Y_t + \frac{Y_t^2}{4}}$$

sau în cazul cel mai general, cu (4.1.16):

$$Z_c = \sqrt{Z_{sc} Z_0} \tag{4.1.16}$$

unde impedanțele Z_l și Z_t reprezintă impedanțele longitudinale, respectiv transversale, iar Z_0 și Z_{sc} reprezintă impedanțele la mers în gol, respectiv în scurtcircuit ale diportului.

Constanta de transfer θ (pe impedanța Z_c) este:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{-I_2} = e^\theta \Rightarrow \theta = a + jb = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{-I_2} \tag{4.1.17}$$

unde

$$a = \ln \frac{|U_1|}{|U_2|} = \ln \frac{|I_1|}{|-I_2|} \quad (4.1.18)$$

reprezintă atenuarea introdusă de diport în Np ($8.686Np = 1dB$), atunci când diportul lucrează pe Z_c , iar

$$b = \varphi_{U_1} - \varphi_{U_2} = \varphi_{I_1} - \varphi_{I_2} = -\varphi \quad (4.1.19)$$

reprezintă defazajul intrării față de ieșire atunci când diportul lucrează pe impedanța Z_c . Constanta de transfer se poate calcula în funcție de impedanțele Z_0 și Z_{sc} :

$$th(\theta) = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_0}} \quad (4.1.20)$$

Diportii asimetrici sunt caracterizați prin două impedanțe imagine (Z_{1l} și Z_{12}) și o constantă de transfer pe imagini (θ). Aceste mărimi reprezintă parametrii imagine ai diportilor asimetrici.

Impedanțele imagine reprezintă acele impedanțe, care conectate la intrarea, respectiv ieșirea diportului se transformă din una în cealaltă prin intermediul diportului. Aceste impedanțe se calculează în funcție de parametrii impedanță cu relațiile:

$$\begin{aligned} Z_{1l} &= \frac{U_1}{I_1} \bigg|_{\substack{U_2=Z_{12} \\ -I_2}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{22}} \cdot (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)} \\ Z_{12} &= \frac{U_2}{I_2} \bigg|_{\substack{U_1=Z_{1l} \\ -I_1}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Z_{11}} \cdot (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

sau în cazul general cu (4.1.22):

$$Z_{1l} = \sqrt{Z_{10}Z_{1sc}}; \quad Z_{12} = \sqrt{Z_{20}Z_{2sc}} \quad (4.1.22)$$

unde Z_{10} reprezintă impedanța văzută dinspre poarta (1) când poarta (2) este în gol, iar Z_{1sc} este impedanța văzută la poarta (1) când poarta (2) este în scurt; similar se definesc și parametrii Z_{20} și Z_{2sc} .

Constanta de transfer pe imagini (θ) se determină din:

$$\theta_I = a_I + jb_I, \text{ sau } th(\theta_I) = \sqrt{\frac{Z_{Isc}}{Z_{I0}}} = \sqrt{\frac{Z_{2sc}}{Z_{20}}} \quad (4.1.23)$$

unde a_I - atenuarea pe imagini, iar b_I - defazajul intrării față de ieșire (4.1.24).

$$a_I = \ln \left(\frac{|U_1|}{|U_2|} \cdot \sqrt{\frac{|Z_{I2}|}{|Z_{I1}|}} \right) \quad (4.1.24)$$

$$b_I = \varphi_{U_1} - \varphi_{U_2} + \frac{1}{2}(\varphi_{Z_{I2}} - \varphi_{Z_{I1}}) = \varphi_{I_1} + \varphi_{I_2} + \frac{1}{2}(\varphi_{Z_{I1}} - \varphi_{Z_{I2}}) = -\varphi_I$$

4.1.2. Interconectarea diporților

Interconectând doi diporți, parametrii noului diport se pot calcula pe baza unor relații simple care implică parametrii diporților elementari. La conectarea diporților pot apare următoarele tipuri de conexiuni, pentru fiecare poartă în parte:

- conectarea în serie;
- conectarea în paralel;
- conectarea în cascadă;

Relațiile parametrilor echivalenți la diferite tipuri de conexiuni între diporți sunt date în Tabelul 4.1.

Tipul de conectare (intrare-ieșire)	Parametri echivalenți
Serie-serie	$Z_e = Z_1 + Z_2$
Serie-paralel	$H_e = H_1 + H_2$
Paralel-serie	$G_e = G_1 + G_2$
Paralel-paralel	$Y_e = Y_1 + Y_2$
Cascadă	$A_e = A_1 \cdot A_2$

Tabelul 4.1. Parametri echivalenți

4.2. Probleme rezolvate

- 4.2.1. Pentru diportul din Figura 4.4, să se determine impedanța caracteristică și constanta de transfer.

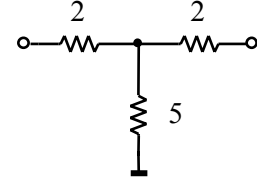


Figura 4.4 Diport simetric

Din Figura 4.3a rezultă că: $\frac{Z_l}{2} = 2 \Rightarrow Z_l = 4$, $Z_t = 5$. Se înlocuiește în (4.1.15) și se obține:

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_l Z_t + \frac{Z_l^2}{4}} = \sqrt{4 \cdot 5 + \frac{16}{4}} = 2\sqrt{6} \Omega$$

sau din (4.1.16):

$$Z_c = \sqrt{Z_{sc} Z_0} = \sqrt{\left(2 + \frac{2 \cdot 5}{2 + 5}\right) \cdot (2 + 5)} = 2\sqrt{6} \Omega$$

Constanta de transfer se determină din:

$$th(\theta) = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_0}} = \sqrt{\frac{24}{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

- 4.2.2. Se dă diportul din Figura 4.5.

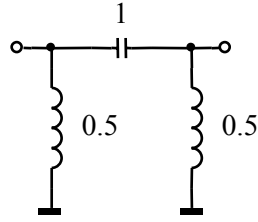
- a) Să se determine Z_C și θ ;
b) Specificați elementele impedanței Z_C în cazurile în care frecvența este:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi} \text{ Hz, respectiv } f_2 = \frac{1}{\pi} \text{ Hz;}$$

- c) Determinați atenuarea a și defazajul φ introdus de diport la frecvența f_1 .

Rezolvare:

- a) În (4.1.15) se înlocuiește $2Z_l = 0.5 \Rightarrow Z_l = 0.25 = \frac{1}{4}$ și se obține Z_{cTi} :


 Figura 4.5 Diporț simetric în Π

$$Y_{c\Pi} = \sqrt{Y_l Y_t + \frac{Y_t^2}{4}} \Rightarrow \frac{1}{Z_{c\Pi}} = \sqrt{\frac{1}{Z_l Z_t} + \frac{1}{4Z_t^2}}$$

$$Z_{c\Pi} = \frac{Z_l Z_t}{\sqrt{Z_l Z_t + \frac{Z_l^2}{4}}} = \frac{s}{2\sqrt{s^2 + 1}}$$

sau calculând în funcție de impedanțele de mers în gol și în scurt:

$$Z_{sc} \rightarrow L \parallel C \Rightarrow Z_{sc} = \frac{sL \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sL}{s^2 LC + 1} = \frac{s}{s^2 + 2}$$

$$Z_0 \rightarrow L \parallel (LC \text{ serie}) \Rightarrow Z_0 = \frac{s(s^2 + 2)}{4(s^2 + 1)}$$

$$Z_c = \sqrt{Z_0 Z_{sc}} = \frac{s}{2\sqrt{s^2 + 1}}$$

Constanta de transfer este:

$$\theta = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_0}} = \operatorname{arcth} \frac{2\sqrt{s^2 + 1}}{s^2 + 2}$$

b)

$$Z_{c\Pi}(j\omega) = \frac{j\omega}{2\sqrt{1 - \omega^2}}$$

$$f_1: Z_{c\Pi}\left(j\frac{1}{2}\right) = j\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow L_{ech} = \frac{1}{\sqrt{3}} H$$

$$f_2: Z_{c\Pi}(j2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R_{ech} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Omega$$

Trebuie precizat că impedanța Z_c nu este realizabilă fizic pe tot domeniul frecvențelor, ci doar pentru o anumită frecvență dată. În acest caz, diportul din Figura 4.5 se comportă inductiv la **frecvența** f_1 și se poate echivala cu o bobină (L_{ech}), iar la **frecvența** f_2 diportul se comportă rezistiv (R_{ech}).

c)

$$\theta = \operatorname{arcth} \left(\frac{2\sqrt{s^2 + 1}}{s^2 + 2} \right) \Bigg|_{\substack{s=j\omega \\ \omega_1=1/2}} = \operatorname{arcth} \left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \right)$$

$$\theta = a + j \cdot b = \operatorname{arcth} \left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \right)$$

de unde rezultă:

$$a = \operatorname{arcth} \left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \right) \approx 2.63 \text{ Np}, \quad \varphi = -b = 0 \quad (4.2.1)$$

Conform (4.2.1), diportul din Figura 4.5 (conectat pe Z_c) la **frecvența** f_1 atenuază semnalul de intrare cu 2.63 Np și nu introduce defazaj.

4.2.3. Se consideră diportul din Figura 4.6. Să se precizeze elementele impedanței Z_c la frecvența $f_1 = \frac{1}{8\pi} \text{ Hz}$.

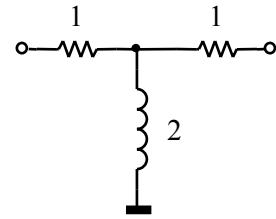


Figura 4.6 Diport în T simetric

Rezolvare:

$$Z_{CT} = \sqrt{4s + 1} \Rightarrow Z_{CT}(j\omega) = \sqrt{4j\omega + 1}$$

$$Z_{CT} \left(j \frac{1}{4} \right) = \sqrt{j + 1} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot e^{j \arctg 1}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + j \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{cases} R_{ech} = \sqrt[4]{2} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = 1.1 \Omega \\ L_{ech} = \sqrt[4]{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} = 0.46 \text{ H} \end{cases}$$

În acest caz, diportul se comportă **la frecvența f_1** ca o rezistență R_{ech} în serie cu o bobină L_{ech} .

4.2.4. Se consideră diportul asimetric din Figura 4.7.

- a) Să se determine impedanțele imagine și constanta de transfer pe imagini;
- b) Precizați elementele impedanțelor imagine la frecvența $f_1 = \frac{1}{2\pi} \text{ Hz}$;
- c) Determinați atenuarea a_1 și defazajul introdus de diport φ la frecvența f_1 .

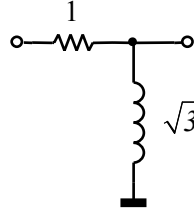


Figura 4.7 Diport asimetric

Rezolvare:

a) Utilizând (4.1.22), se obțin expresiile impedanțelor imagine:

$$Z_{1sc} = 1, Z_0 = 1 + s\sqrt{3} \Rightarrow Z_{11} = \sqrt{Z_{1sc}Z_{10}} = \sqrt{1 + s\sqrt{3}}$$

$$Z_{2sc} = \frac{s\sqrt{3}}{1 + s\sqrt{3}}, Z_2 = s\sqrt{3} \Rightarrow Z_{12} = \sqrt{Z_{2sc}Z_{20}} = \frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{1 + s\sqrt{3}}}$$

Constanta de transfer pe imagini este:

$$th(\theta_1) = \sqrt{\frac{Z_{1sc}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{Z_{2sc}}{Z_{20}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + s\sqrt{3}}}$$

b) Elementele impedanțelor imagine la f_1 sunt:

$$Z_{11}(j) = \sqrt{1 + j\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} = R_{1ech} + j\omega_1 \cdot L_{1ech}$$

$$Z_{12}(j) = \frac{j\sqrt{3}}{\sqrt{1 + j\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4} + j\frac{3\sqrt{2}}{4} = R_{2ech} + j\omega_1 \cdot L_{2ech}$$

În acest caz, diportul (conectat pe $Z_{11,2}$) se **comportă la f_1** ca o structură RL serie atât la intrare cât și la ieșire, dar având valori diferite pentru parametrii echivalenți.

c) Avem

$$th(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+s\sqrt{3}}} \Big|_{\substack{s=j\omega \\ \omega=1}} = \frac{1}{\sqrt{1+j\cdot\sqrt{3}}}$$

Se știe că:

$$th(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} \Rightarrow e^{2\theta} = \frac{1+th(\theta)}{1-th(\theta)}$$

atunci rezultă:

$$e^{2\theta_1} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+j\cdot\sqrt{3}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+j\cdot\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}} \cdot e^{j \left[\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}\right) \right]}$$

Argumentul poate fi simplificat:

$$e^{2(a_1+j\cdot b_1)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}} \cdot e^{-j \cdot \arctg(\sqrt{2})}$$

de unde, prin logaritmare se obține atenuarea și defazajul:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}} \right) = 0.573 \text{ Np}$$

$$\varphi = -b_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctg(\sqrt{2}) = 0.477 \text{ [rad]}$$

Prin urmare, diportul din Figura 4.7 (conectat pe $Z_{1,2}$) la **frecvența** f_1 atenuează semnalul de la intrare cu 0.573 Np și îl defazează cu 0.477 radiani (sau 27.33°).

4.2.5. Un diport simetric caracterizat prin $e^\theta = 0.4$ lucrează adaptat. Să se determine amplificările în tensiune A_V și în curent A_I .

Rezolvare:

Amplificările în tensiune și în curent sunt rapoartele: $A_V = \left| \frac{U_2}{U_1} \right|$, $A_I = \left| \frac{I_2}{I_1} \right|$. Din

(4.1.17) rezultă:

$$e^\theta = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{-I_2} = 0.4 \Rightarrow A_V = A_I = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Observatie: La problemele 4.2.6 – 4.2.9, valorile scrise în casetele gri se consideră date, iar celelalte reprezintă soluțiile. Rezolvarea implică mai întâi stabilirea tipului diportului: $Z_c \rightarrow$ simetric, $Z_{11}, Z_{12} \rightarrow$ asimetric sau prin evaluarea relației dintre R_g și R_s : $R_g = R_s$ sau $R_g \neq R_s$. Apoi se aplică legea lui Ohm, teorema divizorului de tensiune și condiția de adaptare: $Z_{generator} = Z_{11} = Z_c$, $Z_{sarcina} = Z_{22} = Z_c$ (diport simetric), respectiv $Z_{generator} = Z_{11} = Z_{11}$, $Z_{sarcina} = Z_{22} = Z_{12}$ (diport asimetric). Se mai aplică relațiile (4.1.17) și (4.1.24).

4.2.6. Figura 4.8 reprezintă un diport caracterizat prin $Z_c = 2 \Omega$ și $\theta = \ln(2)$. Știind că diportul lucrează adaptat, completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

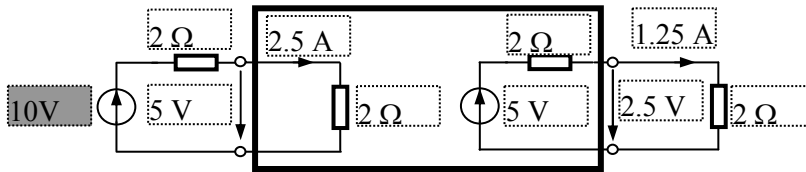


Figura 4.8 Diport pentru problema 4.2.6

4.2.7. Figura 4.9 reprezintă un diport caracterizat prin $Z_c = 75 \Omega$ și $\theta = \ln(3)$. Știind că diportul lucrează adaptat, completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

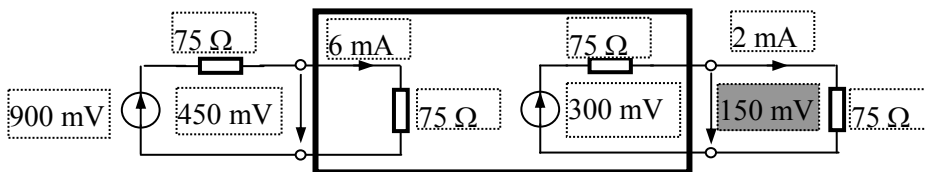


Figura 4.9 Diport pentru problema 4.2.7

- 4.2.8. Diportul din Figura 4.10 este asimetric și lucrează adaptat. Completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

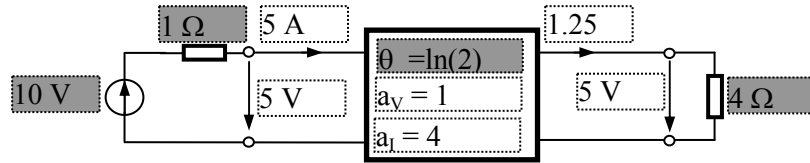


Figura 4.10 Diport pentru problema 4.2.8

- 4.2.9. Diportul din Figura 4.11 este asimetric și lucrează adaptat. Completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

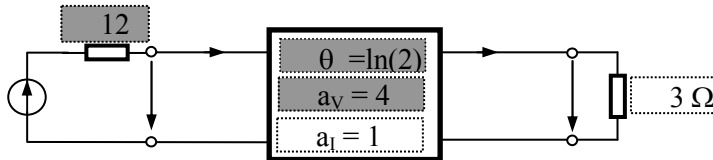


Figura 4.11 Diport pentru problema 4.2.9

- 4.2.10. Pentru diportul în T din Figura 4.12 să se determine parametrii fundamentali în funcție de impedanțele din circuit.

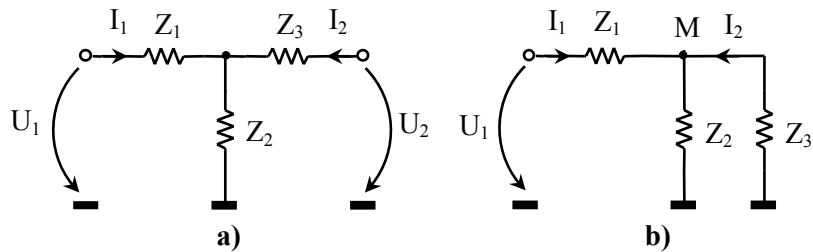


Figura 4.12. a) Diport în T ; b) Diportul cu poarta 2 în scurtcircuit

Rezolvare:

Parametrii fundamentali ai unui diport exprimă mărimile de la poarta (1) în funcție de cele de la poarta (2) (relația (4.1.3)). Considerând poarta (2) în gol, se pot determina elementele A_{11} și A_{22} .

$$I_2 = 0 \text{ (gol)} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \\ A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_2} \end{cases}$$

Dacă poarta (2) este scurtcircuitată, se vor calcula A_{21} și A_{22} (Figura 4.12b).

$$U_2 = 0 \text{ (scurt)} \Rightarrow \begin{cases} A_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} \\ A_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} \end{cases}$$

Se aplică teorema lui Millman (Figura 4.12b) și se obține:

$$U_M = \frac{\frac{U_1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

$$A_{12} = \frac{U_1}{\frac{U_M}{Z_3}} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2}$$

Se aplică teorema divizorului de curent și se obține:

$$A_{22} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}$$

Parametrii fundamentali sunt reprezentați de matricea **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

4.2.11. Să se determine parametrii fundamentali ai diportului în T , format dintr-un lanț de 3 diporți elementari cascadați (Figura 4.13). Dacă se interschimbă diportul al doilea cu al treilea rezultă un diport echivalent?

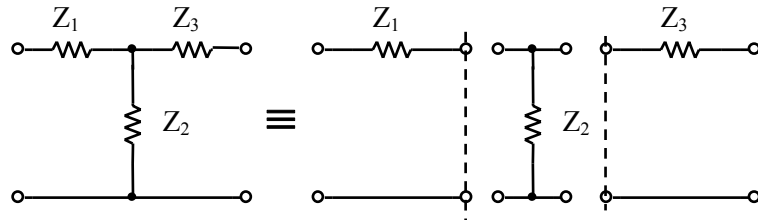


Figura 4.13. Echivalența unui diport în T cu 3 diporți elementari în cascadă

Rezolvare:

Dacă diportul în T se consideră ca un lanț cascadat de 3 diporți, atunci parametrii fundamentali se obțin din parametri elementari prin relația:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

Pentru diporții elementari, parametrii fundamentali se obțin considerând poarta (2) a fiecăruia în gol, respectiv în scurtcircuit (relația (4.1.3)).

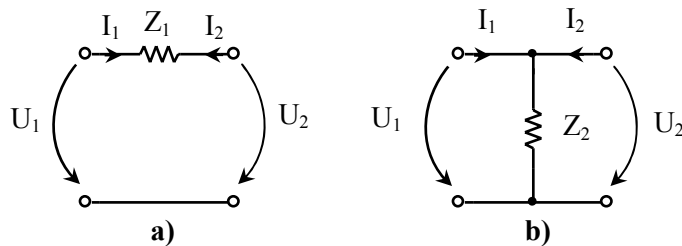


Figura 4.14. a) Diport cu o singură impedanță longitudinală;
b) Diport cu o singură impedanță transversală

Pentru diportul cu un singur element longitudinal (Figura 4.14a), se obțin parametrii fundamentali:

$$I_2 = 0: \begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} = 1 \\ A_{21} = 0 \end{cases}$$

$$U_2 = 0: \begin{cases} U_1 = -A_{12} \cdot I_2 \\ I_1 = -A_{22} \cdot I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{12} = Z \\ A_{21} = 1 \end{cases}$$

Pentru diporții laterali obținem:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pentru diportul cu o singură impedanță transversală (Figura 4.14b) se obțin parametrii fundamentali:

$$I_2 = 0: \begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} = 1 \\ A_{21} = \frac{1}{Z_2} \end{cases}$$

$$U_2 = 0: \begin{cases} U_1 = -A_{12} \cdot I_2 \\ I_1 = -A_{22} \cdot I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{12} = 0 \\ A_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea fundamentală a diportului în T este:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

În ceea ce privește structura rezultată prin inversarea ultimilor 2 diporți (Figura 4.15), se arată că echivalența cu diportul inițial nu este valabilă, deoarece parametrii fundamentali sunt:

$$\mathbf{A}^{(l)} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 + Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2} & Z_1 + Z_3 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Comparând (4.2.2) cu (4.2.3), se observă inegalitatea dintre matrici ($\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^{(I)}$), deci cei doi diporți sunt diferiți.

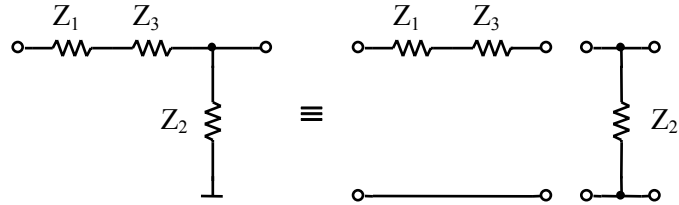


Figura 4.15. Diportul rezultat prin cascada a 3 diporți elementari

4.2.12. Să se stabilească relațiile dintre impedanțele diporților în T , respectiv în II , astfel încât diporții să fie echivalenți (Figura 4.16).

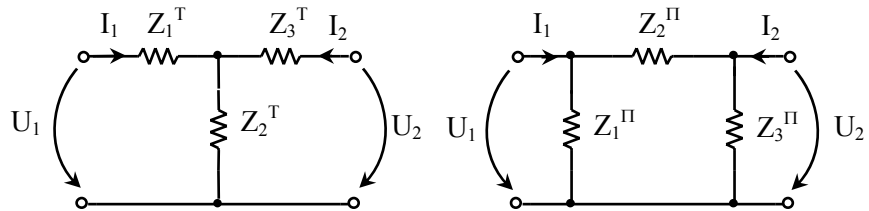


Figura 4.16. Diporți echivalenți în T și II

Rezolvare:

Pentru ca cei doi diporți să fie echivalenți trebuie îndeplinită condiția $\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}^{II}$ și invers. Se determină matricea impedanță pentru diportul în T din Figura 4.16.

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} Z_{11}^T & Z_{12}^T \\ Z_{21}^T & Z_{22}^T \end{bmatrix}$$

Pentru poarta (2) în gol se obține:

$$I_2 = 0: \begin{cases} Z_{11}^T = Z_1^T + Z_2^T \\ Z_{21}^T = Z_2^T \end{cases}$$

iar pentru poarta (1) în gol:

$$I_1 = 0: \begin{cases} Z_{12}^T = Z_2^T \\ Z_{22}^T = Z_2^T + Z_3^T \end{cases}$$

Se obține astfel matricea impedanță \mathbf{Z}^T (4.2.4):

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} Z_1^T + Z_2^T & Z_2^T \\ Z_2^T & Z_2^T + Z_3^T \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Pentru diportul în II , se consideră matricea admitanță \mathbf{Y}^{II} :

$$\mathbf{Y}^{II} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{II} & Y_{12}^{II} \\ Y_{21}^{II} & Y_{22}^{II} \end{bmatrix}$$

iar pentru determinarea acestei matrici se consideră pe rând porțile (1) și (2) în scurt:

$$U_2 = 0: \begin{cases} Y_{11}^{II} = Y_1^{II} + Y_2^{II} \\ Y_{21}^{II} = -Y_2^{II} \end{cases}$$

$$U_1 = 0: \begin{cases} Y_{12}^{II} = -Y_2^{II} \\ Y_{22}^{II} = Y_2^{II} + Y_3^{II} \end{cases}$$

Se obține pentru diportul în II :

$$\mathbf{Y}^{II} = \begin{bmatrix} Y_1^{II} + Y_2^{II} & -Y_2^{II} \\ -Y_2^{II} & Y_2^{II} + Y_3^{II} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Utilizând proprietatea matricilor \mathbf{Z} și \mathbf{Y} de a fi inverse ($\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{I}$) se obține \mathbf{Z}^{II} :

$$\mathbf{Z}^{II} = (\mathbf{Y}^{II})^{-1} = \frac{1}{\Delta_{Y^{II}}} \cdot \left([\mathbf{Y}^{II}]^T \right)^*$$

de unde rezultă:

$$\mathbf{Z}^{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_2^{\Pi} + Z_1^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} & \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} \\ \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} & \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi} + Z_2^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Pentru trecerea de la diportul în Π la diportul în T se egalează (4.2.4) cu (4.2.6) și rezultă relațiile de echivalență:

$$\begin{cases} Z_1^T = \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_2^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} \\ Z_2^T = \frac{Z_1^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} \\ Z_3^T = \frac{Z_2^{\Pi} \cdot Z_3^{\Pi}}{Z_1^{\Pi} + Z_2^{\Pi} + Z_3^{\Pi}} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Relațiile de echivalență pentru trecerea de la structura în T la cea în Π se obține din $\mathbf{Y}^{\Pi} = \mathbf{Y}^T$. Atunci \mathbf{Y}^T este:

$$\mathbf{Y}^{(T)} = \left(\mathbf{Z}^{(T)} \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta_{Z_T}} \cdot \left(\left[\mathbf{Z}^{(T)} \right]^T \right)^* \quad (4.2.8)$$

unde

$$\Delta_{Z_T} = (Z_1^T + Z_2^T) \cdot (Z_2^T + Z_3^T) - (Z_2^T) = Z_1^T \cdot Z_2^T + Z_1^T \cdot Z_3^T + Z_2^T \cdot Z_3^T$$

$$\left[\mathbf{Z}^T \right]^* = \begin{bmatrix} Z_2^T + Z_3^T & -Z_2^T \\ -Z_2^T & Z_1^T + Z_2^T \end{bmatrix}$$

Înlocuind în (4.2.8) se obține pentru diportul în T :

$$\mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} \frac{Y_1^T \cdot Y_2^T + Y_1^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} & \frac{-Y_1^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} \\ \frac{-Y_1^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} & \frac{Y_1^T \cdot Y_3^T + Y_2^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Prin egalarea matricilor (4.2.5) și (4.2.9) rezultă relațiile de trecere de la structura în T la structura în II :

$$\begin{cases} Y_1^{II} = \frac{Y_1^T \cdot Y_2^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} \\ Y_2^{II} = \frac{Y_1^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} \\ Y_3^{II} = \frac{Y_2^T \cdot Y_3^T}{Y_1^T + Y_2^T + Y_3^T} \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Relațiile (4.2.7) și (4.2.10) verifică proprietatea de dualitate.

4.2.13. Să se determine parametrii impedanță ai diportului în X din Figura 4.17. Să se determine funcția de transfer $U_2(s)/U_1(s)$.

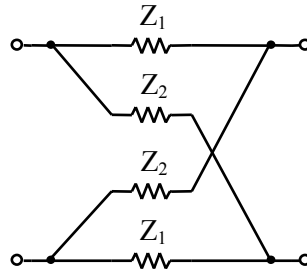


Figura 4.17. Diport în X simetric

Rezolvare:

Diportul în X se poate considera ca fiind format din doi diporți elementari, legați în paralel atât la poarta de intrare cât și la poarta de ieșire (Figura 4.18).

În cazul structurii din Figura 4.18a, elementele lui Y sunt:

$$D_I: \begin{cases} Y_{11}^{(I)} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{2Z_1} \\ Y_{12}^{(I)} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -\frac{1}{2Z_1} \end{cases}$$

Diportul D_I este simetric și reciproc:

$$\mathbf{Y}_{D_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2Z_1} & -\frac{1}{2Z_1} \\ -\frac{1}{2Z_1} & \frac{1}{2Z_1} \end{bmatrix}$$

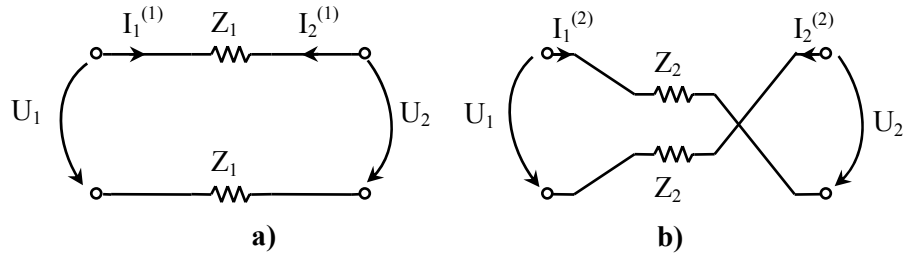


Figura 4.18. Descompunerea diportului în X simetric

Pentru diportul din Figura 4.18b, de asemenea simetric și reciproc, elementele matricii admitanță se determină astfel:

$$D_2 : \begin{cases} Y_{11}^{(2)} = Y_{22}^{(2)} = \frac{1}{2Z_2} \\ Y_{12}^{(2)} = Y_{21}^{(2)} = \frac{1}{2Z_2} \end{cases}$$

și se obține matricea \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}_{D_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2Z_2} & \frac{1}{2Z_2} \\ \frac{1}{2Z_2} & \frac{1}{2Z_2} \end{bmatrix}$$

Conectarea în paralel – paralel a doi diporți corespunde însumării parametrilor admitanță corespunzători (Tabelul 4.1):

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} \right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

Observație: Parametrii Y se pot deduce și direct din Figura 4.17 conform (4.1.2), doar că la determinarea lui Y_{12} și Y_{21} , admitanța longitudinală echivalentă este $Y_{l,ech} = (Y_1 - Y_2) / 2$, deoarece sensul curenților prin Z_1 și Z_2 este opus unul față de celălalt. Parametrii impedanță rezultă inversând matricea Y :

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$$

Funcția de transfer $U_2(s)/U_1(s)$ se obține din parametrii admitanță:

$$\left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

4.2.14. Se consideră diportul în T podit din Figura 4.19.

- a) Să se determine parametrii impedanță \mathbf{Z} ;
- b) Să se determine funcția de transfer $U_2(s)/U_1(s)$.

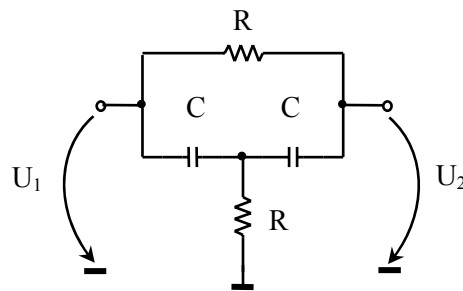


Figura 4.19. Diport în T podit

Rezolvare:

În cazul general (Figura 4.20a), diportul se descompune în două structuri elementare legate în paralel (Figura 4.20b). Pentru determinarea parametrilor admitanță ai diportului D_I se consideră pe rând porțile (1) și (2) în scurt și se obține matricea din (4.2.12).

$$\mathbf{Y}_{D_I} = \begin{bmatrix} Y_4 & -Y_4 \\ -Y_4 & Y_4 \end{bmatrix} \tag{4.2.12}$$

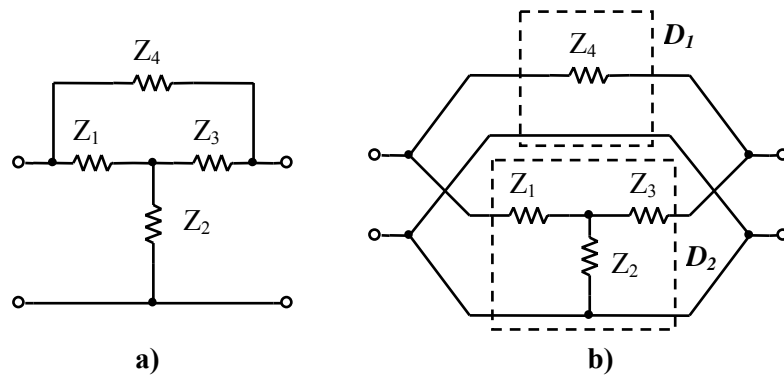


Figura 4.20. a) Diportul în T podit (caz general);
b) descompunerea în diporți elementari

Pentru diportul D_2 se procedează în mod asemănător (vezi **problema 4.2.12**) și se obține matricea Y cerută:

$$Y_{D_2} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \begin{bmatrix} Y_1 \cdot (Y_3 + Y_2) & -Y_1 Y_3 \\ -Y_1 Y_3 & Y_3 \cdot (Y_1 + Y_2) \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

Cei doi diporți D_1 și D_2 fiind legați în paralel, matricea admitanță a diportului T podit se determină ca sumă a celor doi matrici (4.2.12) și (4.2.13).

$$Y = Y_{D_1} + Y_{D_2} = \begin{bmatrix} Y_4 + \frac{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & -Y_4 - \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\ -Y_4 - \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & Y_4 + \frac{Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

Parametrii impedanță se obțin inversând matricea Y și rezultă:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_2 + \frac{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \\ Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & Z_2 + \frac{Z_1 Z_3 + Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \end{bmatrix}$$

Se obțin parametrii impedanță pentru circuitul din Figura 4.19:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{(sRC)^2 + 3sRC + I}{sC \cdot (2 + sRC)} & \frac{(sRC)^2 + 2sRC + I}{sC \cdot (2 + sRC)} \\ \frac{(sRC)^2 + 2sRC + I}{sC \cdot (2 + sRC)} & \frac{(sRC)^2 + 3sRC + I}{sC \cdot (2 + sRC)} \end{bmatrix}$$

Funcția de transfer se determină considerând poarta (2) la mers în gol:

$$H(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0}$$

Dacă exprimăm funcția de transfer în raport cu parametri impedanță (4.1.1), sau parametri admitanță (4.1.2), în condiții de mers în gol ($I_2=0$) obținem:

$$\begin{aligned} \text{Parametri } Z: & \begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 \\ U_2 = Z_{21}I_1 \end{cases} \\ \text{Parametri } Y: & 0 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad (4.2.15)$$

Pentru diportul din Figura 4.20a avem:

$$Z_1 = Z_3 = \frac{I}{sC}; \quad Z_2 = Z_4 = R$$

În raport cu parametri admitanță (4.2.14) putem scrie relațiile:

$$\begin{cases} Y_{21} = -Y_2 - \frac{Y_1^2}{2Y_1 + Y_2} = -\frac{(I + sRC)^2}{R \cdot (I + 2sRC)} \\ Y_{22} = Y_2 - \frac{Y_1 \cdot (Y_1 + Y_2)}{2Y_1 + Y_2} = \frac{I + 3sRC + s^2 R^2 C^2}{R \cdot (I + 2sRC)} \end{cases}$$

care înlocuite în (4.2.15) conduc la funcția de transfer cerută (4.2.16).

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{(1 + sRC)^2}{s^2 R^2 C^2 + 3sRC + 1} \quad (4.2.16)$$

Observație: $H(s)$ poate fi determinat și cu ajutorul teoremei lui Millman sau utilizând regula lui Mason (vezi **problemele 1.2.18 și 1.3.10** de la **Capitolul 1**).

4.2.15. Să se stabilească relațiile de echivalență între diportul simetric în T și cel în X (Figura 4.21).

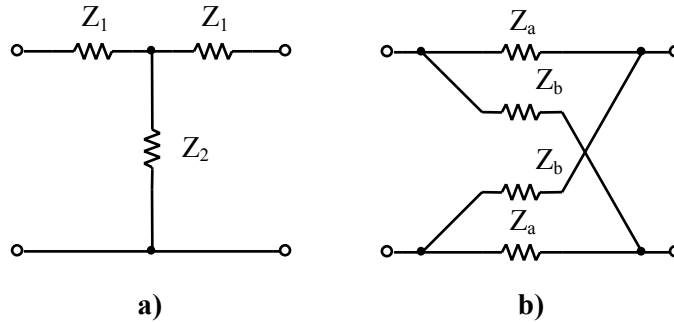


Figura 4.21. a) Diport în T ; b) Diport în X

Rezolvare:

În **problema 4.2.12** s-a arătat că pentru diportul în T avem:

$$\mathbf{Z}_T = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.17)$$

iar pentru diportul în X (**problema 4.2.13**):

$$\mathbf{Z}_X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b - Z_a \\ Z_b - Z_a & Z_a + Z_b \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

Prin egalarea matricelor (4.2.17) și (4.2.18) se obține:

$$\begin{cases} Z_1 = Z_a \\ Z_2 = \frac{Z_b - Z_a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_b = Z_1 + 2Z_2 \\ Z_a = Z_1 \end{cases}$$

4.2.16. Să se determine pentru diportul în T podit (Figura 4.22), diportul în X echivalent.

Rezolvare:

Pentru diportul în T podit, folosind rezultatele de la **problema 4.2.14**, rezultă:

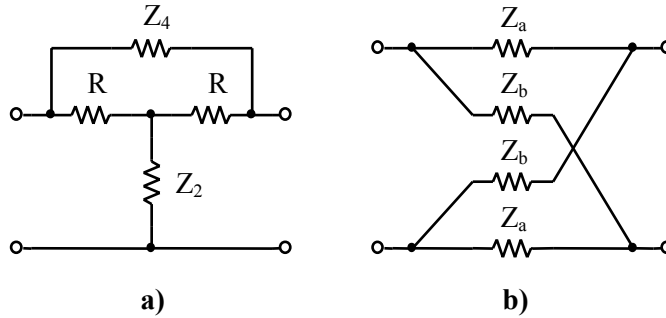


Figura 4.22 a) Diport în T podit și b) diport în X

$$\mathbf{Z}_{T_{podit}} = \begin{bmatrix} R^2 + R(2Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4 & R^2 + 2RZ_2 + Z_2Z_4 \\ R^2 + 2RZ_2 + Z_2Z_4 & R^2 + R(2Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4 \end{bmatrix}$$

iar pentru diportul în X :

$$\mathbf{Z}_X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b - Z_a \\ Z_b - Z_a & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

Diporții sunt echivalenți dacă au matricile impedanță egale. Impedanțele de pe laturile diportului în X vor fi:

$$\begin{cases} Z_a = \frac{RZ_4}{2R + Z_4} = \frac{R \frac{Z_4}{2}}{R + \frac{Z_4}{2}} = R \parallel \frac{Z_4}{2} \\ Z_b = \frac{2R^2 + R(4Z_2 + Z_4) + 2Z_2Z_4}{2R + Z_4} = R + 2Z_2 \end{cases}$$

Schema diportului echivalent este dată în Figura 4.23.

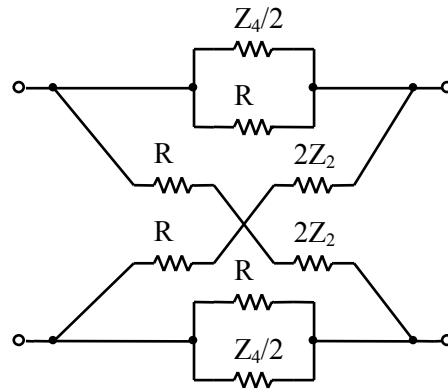


Figura 4.23. Diport în X echivalent

4.2.17. Să se demonstreze echivalența diporturilor din Figura 4.24.

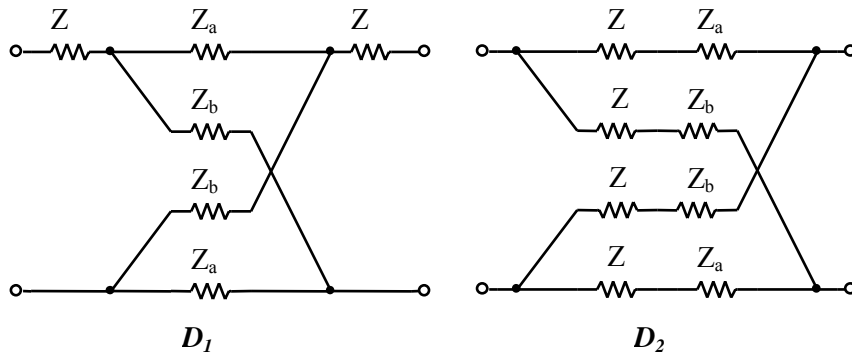


Figura 4.24. Diporturi echivalenți

Rezolvare:

Se utilizează teorema bisecțiunii, echivalând diportul D_1 cu D_2 . Diportul D_1 poate fi obținut prin cascada a 3 diporturi (Figura 4.25).

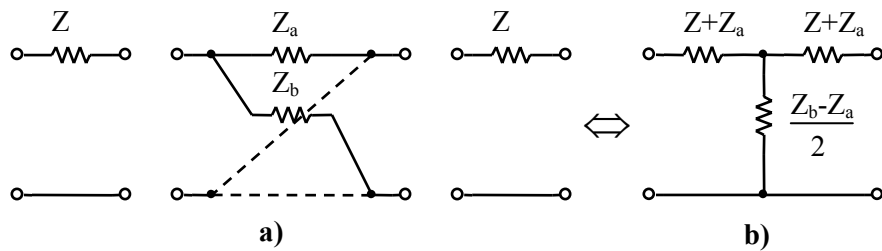


Figura 4.25. a) Cascadarea a 3 diporturi; b) diportul în T rezultat

În problema 4.2.16 s-a arătat că un diport în T este echivalat cu un diport în X dacă

$$Z_b = Z_1 + 2Z_2 \quad \text{sau} \quad Z_2 = \frac{Z_b - Z_a}{2}$$

Prin urmare, diportul în X poate fi înlocuit cu diportul în T (Figura 4.25). Se determină apoi impedanța de mers în gol și în scurt ale jumătății diportului din Figura 4.25 b și se obține:

$$\begin{cases} Z_{sc} = Z + Z_a \\ Z_0 = Z + Z_b \end{cases}$$

Conform teoremei bisecțiunii diportul D_1 este echivalent cu diportul D_2 .

4.2.18. Se consideră diportii în X din Figura 4.26.

- a) Să se deducă schema echivalentă în X a diportului simetric în IT ;
- b) Să se demonstreze echivalența diporturilor din Figura 4.27.

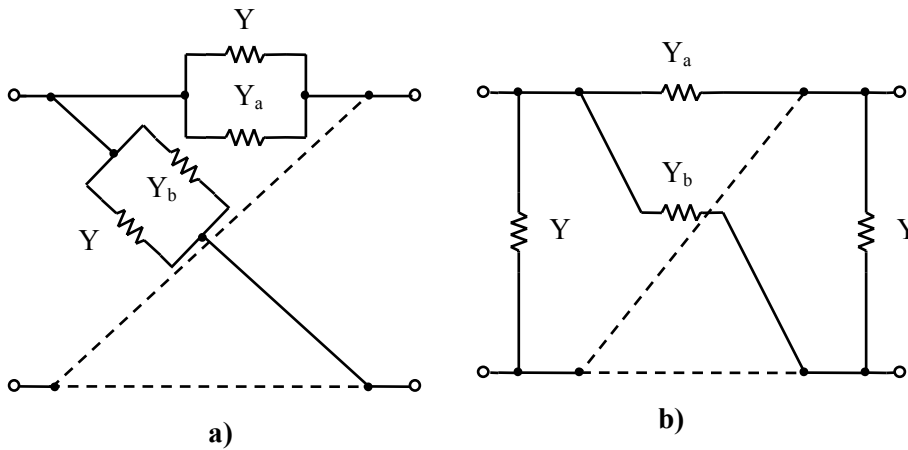


Figura 4.26. a) Diportul D_1 ; b) Diportul D_2

Rezolvare:

- a) Trecerea de la diportul în IT la cel în X se face pe baza teoremei bisecțiunii (Figura 4.27).

$$Y_a = Y_1 + 2Y_2; \quad Y_b = Y_1 \quad \Leftrightarrow \quad Y_1 = Y_b; \quad Y_2 = \frac{Y_a - Y_b}{2}$$

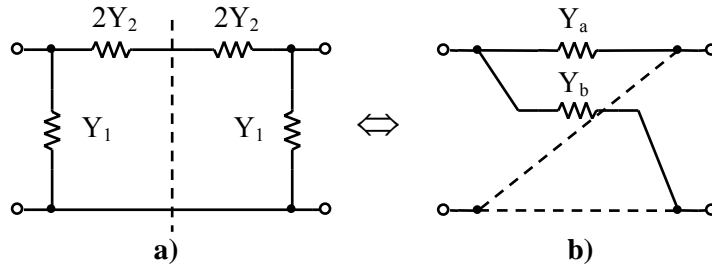


Figura 4.27. Echivalarea diporților în II și X

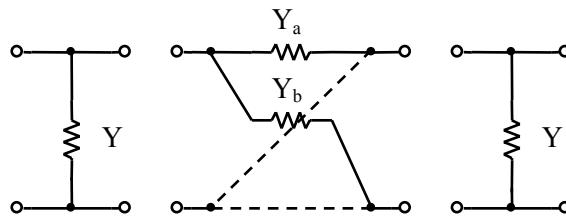
Diportul D_2 (Figura 4.27b) poate fi echivalat cu o structură având 3 diporți cascadați (Figura 4.28a). Înlocuind diportul în X cu un diport în II se obține structura din Figura 4.28b. S-a obținut astfel, un diport în II care poate fi transformat din nou în X (Figura 4.28c).

$$\begin{cases} Y_{bI} = Y + Y_b \\ Y_{aI} = Y + Y_b + 2 \cdot \frac{Y_a - Y_b}{2} = Y + Y_a \end{cases}$$

Se observă că aceste elemente corespund întocmai structurii D_1 .

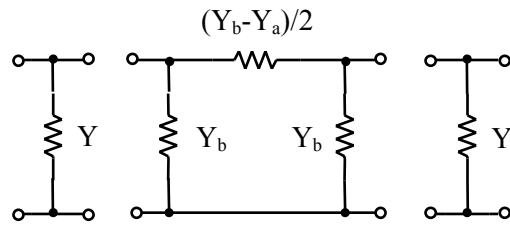
b) Din **problema 4.2.13** rezultă că diportul din Figura 4.28a are parametrii Y echivalenți $Y_1^{(1)} = (Y - Y_a)/2$, $Y_2^{(1)} = (Y + Y_b)/2$, iar pentru diportul din Figura 4.28b $Y_1^{(2)} = Y_a$, $Y_2^{(2)} = Y_b$. Cu aceste considerente se deduc parametrii Y (Figura 4.28a și b), iar prin comparație se observă egalitatea dintre matrici.

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2Y + Y_a + Y_b & Y_b - Y_a \\ Y_b - Y_a & 2Y + Y_a + Y_b \end{bmatrix}$$

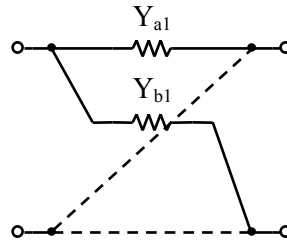


a) Diportul D_2 sub formă cascadață

Figura 4.28. Transformarea diportului D_2 în D_1



b) Înlocuirea diportului în X cu unul în Π



c) Diportul în X rezultat

Figura 4.28. Transformarea diportului D_2 în D_1 (continuare)

4.2.19. Să se determine frecvențele de tăiere la $3dB$ pentru circuitul în T podit (Figura 4.29). Cât este defazaajul circuitului la frecvența $\omega_0 = \frac{1}{RC}$?

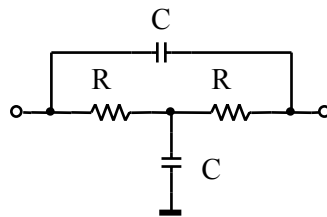


Figura 4.29. Diport în T podit

Rezolvare:

Frecvențele de tăiere reprezintă frecvențele la care amplificarea $|H(j\omega)|$ este egală cu $1/\sqrt{2}$ (corespunzător nivelului $-3dB$) din valoarea maximă a amplificării. Amplificarea rezultă din funcția de transfer $H(s)$:

$$H(s) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

unde parametrii Y_{21} și Y_{22} au fost deduși în **problema 4.2.14** pentru cazul general de diport în T podit. În acest caz se obțin parametrii Y :

$$\begin{cases} Y_{21} = -\frac{s^2 R^2 C^2 + 2sRC + 1}{R \cdot (2 + sRC)} \\ Y_{22} = \frac{s^2 R^2 C^2 + 3sRC + 1}{R \cdot (2 + sRC)} \end{cases}$$

Funcția de transfer se obține:

$$H(s) = \frac{s^2 R^2 C^2 + 2sRC + 1}{s^2 R^2 C^2 + 3sRC + 1} = \frac{s^2 + \frac{2}{RC} \cdot s + \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + \frac{3}{RC} \cdot s + \frac{1}{R^2 C^2}}$$

Înlocuind $s = j\omega$ în $H(s)$ și evaluând modulul se obține:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R^2 C^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{4}{R^2 C^2} \cdot \omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R^2 C^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{9}{R^2 C^2} \cdot \omega^2}} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2 \cdot \omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 9\omega_0^2 \cdot \omega^2}}$$

unde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Condiția din care rezultă frecvențele de tăiere este:

$$|H(j\omega)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (4.2.19)$$

unde $H_{max} = |H(0)| = |H(\infty)| = 1$ (valabil pentru filtru oprește-bandă cum este acest circuit). Din (4.2.19) rezultă ecuația de variabilă ω :

$$\omega^4 - 3\omega_0^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

Soluțiile acestei ecuații reprezintă frecvențele de tăiere la $-3dB$:

$$\omega_{3dB_{1,2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{RC} \cdot \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Funcția de fază a circuitului este:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - \operatorname{arctg} \frac{3\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

iar defazajul introdus de circuit la $\omega \rightarrow \omega_0$ este $\varphi(\omega_0) = 0$.

4.2.20. Să se determine funcția de transfer (amplificarea în tensiune la mers în gol) a circuitului în dublu T din Figura 4.30a.

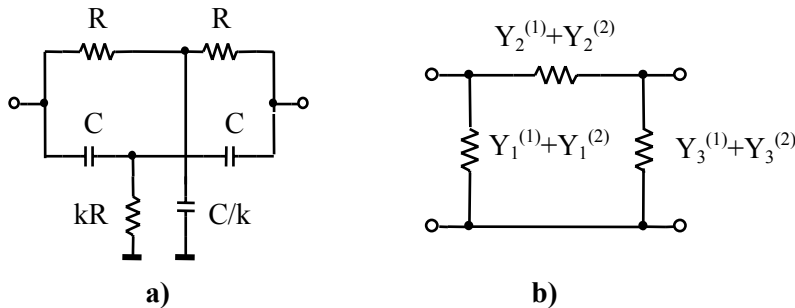


Figura 4.30. Diport în dublu T și echivalentul său în Π

Rezolvare:

Conform problemei 4.2.19, diportul în dublu T este echivalent cu diportul în Π (Figura 4.30b), unde:

$$\begin{cases} Y_1 = Y_3 = \frac{sC}{sRC + 2k} + \frac{sC}{s \cdot 2kRC + 1} = \frac{sC(1 + 2k)(sRC + 1)}{(sRC + 2k)(s \cdot 2kRC + 1)} \\ Y_2 = \frac{\frac{k}{R}}{sRC + 2k} + \frac{s^2 kRC^2}{s \cdot 2kRC + 1} = \frac{k(s^3 R^3 C^3 + s^2 2R^2 C^2 + s2RC + 1)}{R(sRC + 2k)(s \cdot 2kRC + 1)} \end{cases}$$

Pentru calcularea amplificării în tensiune la mers în gol, aplicăm teorema lui Millman la ieșirea diportului în Π echivalent (Figura 4.30b) și obținem:

$$\begin{aligned}
 H(s) = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{I_2=0} &= \frac{\frac{I}{Y_3}}{\frac{I}{Y_2} + \frac{I}{Y_3}} = \frac{s^3 R^3 C^3 + s^2 2R^2 C^2 + s 2RC + 1}{s^3 R^3 C^3 + s^2 R^2 C^2 \left(3 + \frac{I}{2k}\right) + sRC \left(3 + \frac{I}{2k}\right) + 1} = \\
 &= \frac{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3}{s^3 + \left(3 + \frac{I}{2k}\right)\omega_0 s^2 + \left(3 + \frac{I}{2k}\right)\omega_0^2 s + \omega_0^3}
 \end{aligned}$$

unde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

4.2.21. Să se determine frecvența ω_π la care defazajul dintre intrarea și ieșirea diportului din Figura 4.31a este 180° . Care este amplificarea la această frecvență?

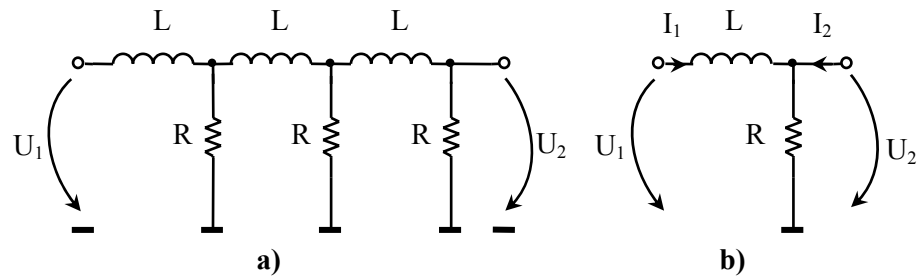


Figura 4.31. Diportul dat și descompunerea sa în celule Γ

Rezolvare:

Diportul poate fi considerat ca fiind compus din 3 celule în Γ (Figura 4.31b) legate în cascadă. Înseamnă că $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{A}^{(3)} = \left(\mathbf{A}^{(1)}\right)^3$, unde:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = I + \frac{sL}{R}, \\ A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{I}{R}, \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} = sL \\ A_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} = I \end{array} \right.$$

Matricea fundamentală pentru diportul echivalent este produsul a trei matrici fundamentale identice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{sL}{R} & sL \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{sL}{R} & sL \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{sL}{R} & sL \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

După înmulțirea matricilor, se obține A_{11} :

$$A_{11} = \frac{1}{H(s)} = \frac{U_1(s)}{U_2(s)} = 1 + 6 \frac{sL}{R} + 5 \frac{s^2 L^2}{R^2} + \frac{s^3 L^3}{R^3}$$

Evaluăm răspunsul în frecvență:

$$\frac{1}{H(j\omega)} = \left(1 - 5\omega^2 \frac{L^2}{R^2} \right) + j \cdot \left(6\omega \frac{L}{R} - \omega^3 \frac{L^3}{R^3} \right)$$

Se impune condiția $\arg\{H(j\omega)\} = \pi$, dacă $\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} < 0$ și $\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = 0$ și se obține:

$$\omega \frac{L}{R} \cdot \left(6 - \omega^2 \frac{L^2}{R^2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \pm \frac{R}{L} \sqrt{6} \end{cases}$$

Ne interesează frecvențele (soluțiile) diferite de 0 și pozitive. La frecvența $\omega_2 = \omega_\pi = \frac{R\sqrt{6}}{L}$ amplificarea și defazajul vor fi:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{H^{-1}(j\omega_\pi)\} = 1 - 5 \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{6L^2}{R^2} = -29 < 0 \\ \operatorname{Im}\{H^{-1}(j\omega)\} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_\pi)| = \frac{1}{29} \\ \arg\{H(j\omega_\pi)\} = \pi \end{cases}$$

Observație: Problema poate fi rezolvată și cu ajutorul teoremei lui Millman.

4.2.22. Pentru diportul T podit (Figura 4.32), să se determine frecvența la care ieșirea este în fază cu intrarea.

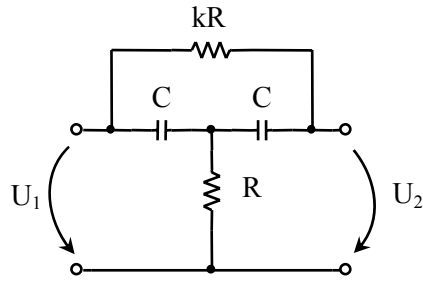


Figura 4.32. Diport în T podit

Rezolvare:

Conform problemei 4.2.14 matricea admitanță se exprimă prin relațiile (4.2.14), unde:

$$Y_1 = Y_3 = sC, \quad Y_2 = \frac{1}{R}, \quad Y_4 = \frac{1}{kR}$$

La mers în gol ($I_2=0$) funcția de transfer este:

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{Y_4 + \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}}{Y_4 + \frac{Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}} = \frac{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4}{Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4}$$

$$H(s) = \frac{I}{I + \frac{sC}{R} \cdot \frac{I}{s^2 C^2 + \frac{sC}{kR} + \frac{I}{kR} + \frac{I}{kR^2} + \frac{sC}{kR}}} = \frac{I}{I + \frac{sC}{R} \cdot \frac{kR^2}{I + 2sCR + ks^2 C^2 R^2}}$$

Răspunsul în frecvență este:

$$H(j\omega) = \frac{I}{I + \frac{j\omega C}{R} \cdot \frac{kR^2}{(1 - k\omega^2 C^2 R^2) + j2\omega CR}}$$

Condiția ca ieșirea să fie în fază cu intrarea este:

$$\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = 0 \Rightarrow H(j\omega) \in \mathcal{R} \Rightarrow 1 - k\omega^2 C^2 R^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC\sqrt{k}}$$

Răspunsul în frecvență devine:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{kR^2}{2R^2}} = \frac{1}{1 + \frac{k}{2}} \in \mathcal{R}.$$

4.2.23. Pentru diportul din Figura 4.33, să se determine tensiunea și impedența la poarta (2).

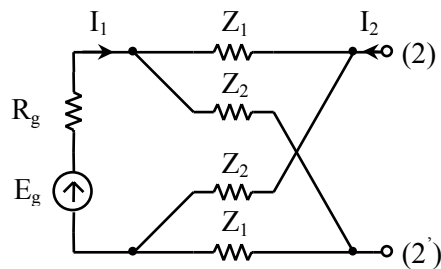


Figura 4.33. Diport în X cu poarta (1) conectată la o sursă de tensiune

Rezolvare:

Pentru a determina tensiunea la poarta (2), se pune condiția ca ieșirea să fie în gol ($I_2 = 0$). Utilizând parametrii Y (vezi **problema 4.2.13**) se scrie:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ 0 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases} \quad (4.2.20)$$

iar pe ramura sursei se scrie teorema II a lui Kirchhoff:

$$R_g I_1 + U_1 = E_g \quad (4.2.21)$$

Din (4.2.20), rezultă I_1 și U_1 , care se înlocuiesc în (4.2.21):

$$R_g \cdot \left(-\frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} + Y_{12} \right) \cdot U_2 - \frac{Y_{22}}{Y_{21}} \cdot U_2 = E_g \Rightarrow U_2 = \frac{E_g}{R_g \cdot \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} \right) - \frac{Y_{22}}{Y_{21}}}$$

Înlocuind parametrii Y , se obține tensiunea la poarta (2):

$$U_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{2R_g + Z_1 + Z_2} \cdot E_g$$

Pentru a determina impedanța la poarta (2), se pasivizează sursa ($E_g = 0$) de la cealaltă poartă. În acest caz, se scriu relațiile:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases} \quad (4.2.22)$$

$$R_g I_1 + U_1 = 0 \quad (4.2.23)$$

Din (4.2.22), rezultă I_1 și U_1 , care se înlocuiesc în (4.2.23):

$$R_g \cdot \left(\frac{Y_{11} \cdot (I_2 - Y_{22}U_2)}{Y_{21}} + Y_{12}U_2 \right) + \frac{I_2 - Y_{22}U_2}{Y_{21}} = 0$$

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} = - \frac{R_g \cdot (Y_{11} + I)}{R_g (Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}) - Y_{22}}$$

Înlocuind parametrii Y , se obține impedanța la poarta (2):

$$Z_{22} = \frac{R_g \cdot (Z_1 + Z_2) + 2Z_1Z_2}{2R_g + Z_1 + Z_2}$$

4.2.24. Să se determine parametrii imagine ai diportului în Γ din Figura 4.34.

Rezolvare:

Impedanțele imagine sunt impedanțele care, conectate la bornele diportului, verifică relațiile:

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{\substack{U_2=Z_{12} \\ -I_2}}, \quad Z_{12} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{\substack{U_1=Z_{11} \\ -I_1}}$$

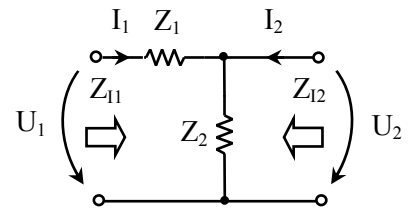


Figura 4.34 Diport în Γ

iar constanta de transfer este:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} = \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{12}}{Z_{11}}} \right) = \ln \left(\frac{I_1}{-I_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{12}}} \right)$$

Ecuțiile unui diporț scrise cu (4.1.3) pot fi exprimate în funcție de parametrii imagine:

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{12}}} \cdot \operatorname{ch}\theta - I_2 \sqrt{Z_{11} Z_{12}} \cdot \operatorname{sh}\theta \\ I_1 = U_2 \frac{\operatorname{sh}\theta}{\sqrt{Z_{11} Z_{12}}} - I_2 \sqrt{\frac{Z_{12}}{Z_{11}}} \cdot \operatorname{ch}\theta \end{cases} \quad (4.2.24)$$

din care se identifică parametrii fundamentali:

$$\begin{cases} A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{12}}} \cdot \operatorname{ch}\theta \\ A_{12} = \sqrt{Z_{11} Z_{12}} \cdot \operatorname{sh}\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{12}}{Z_{11}}} \cdot \operatorname{ch}\theta \\ A_{21} = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\sqrt{Z_{11} Z_{12}}} \end{cases} \quad (4.2.25)$$

Știind că $e^\theta = \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta$ și (4.2.25), se poate exprima constanta de transfer:

$$e^\theta = \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta = \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}$$

$$\theta = \ln \left(\sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}} \right)$$

Din (4.2.25) se deduc relațiile impedanțelor imagine:

$$\begin{cases} A_{11} Z_{12} = A_{22} Z_{11} \\ A_{21} Z_{11} Z_{12} = A_{12} \end{cases}$$

$$Z_{11} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{22} A_{21}}}, \quad Z_{12} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{11} A_{21}}}$$

Parametrii imagine se pot exprima și în funcție de impedanțele de scurtcircuit și de mers în gol. Știind că:

$$\begin{aligned} Z_{1sc} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = Z_{11} \cdot th\theta & Z_{10} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_{11} \cdot cth\theta \\ Z_{2sc} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = Z_{12} \cdot th\theta & Z_{20} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_{12} \cdot cth\theta \end{aligned}$$

se obțin relațiile pentru Z_{11} , Z_{12} (4.1.22), respectiv θ_l (4.1.23). Aceste relații reprezintă cazul general (diport cu orice structură), iar prin particularizare pentru diportul în Γ se obține:

$$\begin{aligned} Z_{20} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2, & Z_{10} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_2 \\ Z_{2sc} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, & Z_{20} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 \end{aligned}$$

din care rezultă:

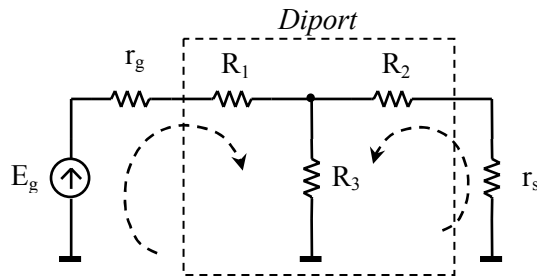
$$Z_{11} = \sqrt{Z_1(Z_1 + Z_2)}, \quad Z_{12} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2^2}{Z_1 + Z_2}}, \quad th\theta = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}},$$

4.2.25. Se consideră diportul din Figura 4.35. Să se determine evoluția semnalelor la intrarea, respectiv ieșirea diportului, dacă acesta este conectat între o sursă de tensiune cu $r_g=1$ și o sarcină $r_s=1$, iar sursa furnizează un semnal de tip treaptă unitate $\gamma(t)$. Se vor considera parametrii $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$ și $R_3=4\Omega$.

Rezolvare:

Metoda 1: Se utilizează formalismul de repartiție (4.1.13) în care matricea $Z(s)$ se obține din (4.1.1):

$$\begin{cases} U_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R_3I_2 = 6I_1 + 4I_2 \\ U_2 = R_3I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = 4I_1 + 7I_2 \end{cases} \Rightarrow Z(s) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$


Figura 4.35 Diportul pentru problema 4.2.25

Se determină $Z(s)+I$:

$$Z(s)+I = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow [Z(s)+I]^{-1} = \frac{1}{40} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$Z(s)-I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

care, înlocuite în (4.1.13), ne dau parametrii de repartiție:

$$S(s) = \frac{1}{40} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{20} \end{bmatrix} \quad (4.2.26)$$

Metoda 2: Se determină Z_{in1} și Z_{in2} :

$$Z_{in1} = R_1 + \frac{R_3(r_s + R_2)}{R_3 + r_s + R_2} = 4\Omega$$

$$Z_{in2} = R_2 + \frac{R_3(r_g + R_1)}{R_3 + r_g + R_1} = \frac{33}{7}\Omega$$

Parametrii de repartiție se determină din (4.1.14) și se obține:

$$S_{11} = \frac{3}{5}, \quad S_{22} = \frac{13}{20}$$

iar S_{21} și S_{12} rezultă analizând circuitele din Figura 4.36.

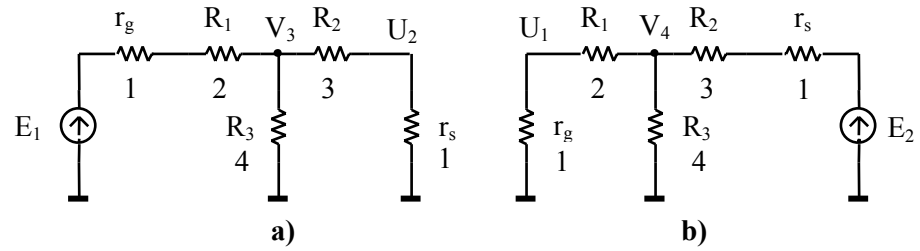


Figura 4.36. Circuite pentru determinarea parametrilor: a) S_{21} , b) S_{12}

Pentru a determina S_{21} , se aplică teorema divizorului de tensiune la ieșire (Figura 4.36a), respectiv teorema lui Millman în nodul V_3 :

$$\begin{cases} U_2 = V_3 \cdot \frac{r_s}{r_s + R_2} \\ V_3 = \frac{E_1 \cdot \frac{1}{r_g + R_1} + U_2 \cdot \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{r_g + R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = \frac{V_3}{4} \\ V_3 = \frac{4}{11} \cdot (E_1 + U_2) \end{cases}$$

$$\text{de unde rezultă } S_{21} = \frac{2U_2}{E_1} = \frac{1}{5}.$$

Pentru a determina S_{12} , se consideră circuitul din Figura 4.36b și se procedează asemănător:

$$\begin{cases} U_1 = V_4 \cdot \frac{r_g}{r_g + R_1} \\ V_4 = \frac{E_2 \cdot \frac{1}{r_s + R_2} + U_1 \cdot \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{r_s + R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{V_4}{3} \\ V_4 = \frac{E_2 + 2 \cdot U_1}{4} \end{cases}$$

de unde rezultă $S_{12} = \frac{2U_1}{E_2} = \frac{1}{5}$. Prin urmare se obține aceeași matrice $S(s)$ ca în (4.2.26).

Se determină vectorul undă directă $A(s) = \begin{bmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} a_1(s) = \frac{E_1}{2} = \frac{1}{2s} \\ a_2(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

în care $L\{\gamma(t)\} = \frac{1}{s}$ este imaginea Laplace a semnalului treaptă unitate, aplicat la portul (1). La portul (2), deoarece nu s-a conectat nici o sursă, unda directă este nulă. Se aplică teorema lui Kirchhoff la poarta (1) și se obține:

$$e_1(t) = u_1(t) + r_g \cdot i_1(t) = u_1(t) + i_1(t)$$

de unde rezultă: $a_1(t) = \frac{e_1(t)}{2}$.

Se determină vectorul undă inversă (reflectată) la cele două porți

$$B(s) = \begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{bmatrix}:$$

$$B(s) = S(s) \cdot A(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10s} \\ \frac{1}{10s} \end{bmatrix}$$

Ținând cont de (4.1.11) se determină tensiunile, respectiv curenții la cele două porți:

$$\begin{cases} U_1(s) = a_1(s) + b_1(s) = \frac{1}{2s} + \frac{3}{10s} = \frac{4}{5s} \\ I_1(s) = a_1(s) - b_1(s) = \frac{1}{2s} - \frac{3}{10s} = \frac{1}{5s} \\ U_2(s) = a_2(s) + b_2(s) = b_2(s) = \frac{1}{10s} \\ I_2(s) = a_2(s) - b_2(s) = -b_2(s) = -\frac{1}{10s} \end{cases}$$

Aplicând transformata Laplace inversă, rezultă semnalele în regim tranzitoriu:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{4}{5} \cdot \gamma(t) \\ i_1(t) = \frac{1}{5} \cdot \gamma(t) \end{cases}, \begin{cases} u_2(t) = \frac{1}{10} \cdot \gamma(t) \\ i_2(t) = -\frac{1}{10} \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

4.2.26. Se consideră diportul din Figura 4.37 conectat între o sursă cu $r_g = 1\Omega$ și o sarcină $r_s = 1\Omega$. Să se determine parametri de repartiție $S(s)$ și evoluția semnalelor la intrarea, respectiv ieșirea diportului, dacă la intrare se aplică o excitație treaptă unitate $\gamma(t)$.

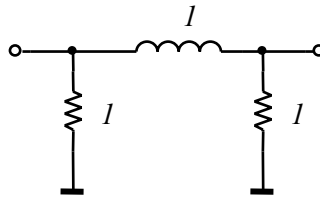


Figura 4.37 Diport în II

Rezolvare:

Se determină matricea Z conform (4.1.7):

$$Z(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

și se obține apoi

$$\begin{aligned} [Z(s) + I]^{-1} &= \frac{1}{4(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 2s+3 & -1 \\ -1 & 2s+3 \end{bmatrix} \\ Z(s) - I &= \frac{1}{s+2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Din (4.1.13) rezultă matricea de repartiție:

$$S(s) = \frac{1}{2(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

În continuare, se determină vectorii undă directă și undă inversă (4.1.9):

$$\begin{cases} a_1(s) = \frac{E_I}{2} = \frac{I}{2s} \\ a_2(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(s) = \begin{bmatrix} \frac{I}{2s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B(s) = \frac{I}{2(s+I)} \cdot \begin{bmatrix} -I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{I}{2s} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I}{2(s+I)} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{I}{2s} \\ \frac{I}{2s} \end{bmatrix}$$

Unda reflectată la cele două porți va fi:

$$\begin{cases} b_1(t) = -\frac{I}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \\ b_2(t) = \frac{I}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

Ținând cont de (4.1.11) se obțin tensiunile și curenții la cele două porți, în regim tranzitoriu:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{I}{4} \cdot (3 + e^{-t}) \cdot \gamma(t) \\ i_1(t) = \frac{I}{4} \cdot (5 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}, \begin{cases} u_2(t) = \frac{I}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \\ i_2(t) = -\frac{I}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

4.3. Probleme propuse

4.3.1. Se consideră diportul asimetric din Figura 4.38. Să se determine:

- Impedanțele imagine și constanta de transfer pe imagini;
- Precizați elementele impedanțelor imagine la frecvența $f_I = 1/2\pi \text{ Hz}$ și determinați atenuarea a_I și defazajul φ introduse de diport;
- Determinați parametrii impedanță, admitanță și fundamentali.

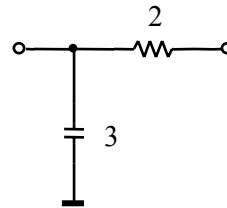


Figura 4.38 Diport asimetric în Γ

Soluție:

$$\text{a) } Z_{I1} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot (6s^2 + s)}}, \quad Z_{I2} = \sqrt{\frac{2 \cdot (6s + 1)}{3s}}, \quad th(\theta_I) = \sqrt{\frac{6s}{6s + 1}}$$

$$\text{b) La frecvența } f_I: Z_{I1}(j) = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot (-6 + j)}}; \quad Z_{I2}(j) = \sqrt{\frac{2 \cdot (6j + 1)}{3j}}$$

$$Z_{I1}(j) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\arctg \frac{1}{6}}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\arctg \frac{1}{6}}{2}\right) \right]$$

$$Z_{I2}(j) = \sqrt{\frac{2\sqrt{7}}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + \arctg 6}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + \arctg 6}{2}\right) \right]$$

unde determinarea argumentului unui număr complex se face conform:

$$\arg\{z\} = \begin{cases} \arctg \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}, & \text{Re} > 0 \\ \pi + \arctg \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}, & \text{Re} < 0 \end{cases}$$

Structura impedanțelor imagine este: $Z_{I1} \rightarrow RL$ serie, $Z_{I2} \rightarrow RC$ serie.

Constanta de transfer pe imagini, la frecvența f_I , este:

$$th(\theta_I) = \sqrt{\frac{6j}{6j + 1}} \Rightarrow e^{2(a_I + jb_I)} = 1.74 \cdot e^{j0.068}$$

din care se obține atenuarea și defazajul:

$$a_I = \frac{\ln(1.74)}{2} = 0.277 \text{ Np}$$

$$\varphi = -b_I = -0.034 \text{ [rad]} \Rightarrow \varphi = -1.95^\circ$$

c)

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 3s + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3s} & \frac{1}{3s} \\ \frac{1}{3s} & 2 + \frac{1}{3s} \end{bmatrix}, \quad A(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3s & 6s + 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2. Se consideră diportul din Figura 4.39a. Să se determine Z_C și θ . Specificați elementele impedanței Z_C la frecvența $f_1 = \frac{1}{4\pi}$ Hz.

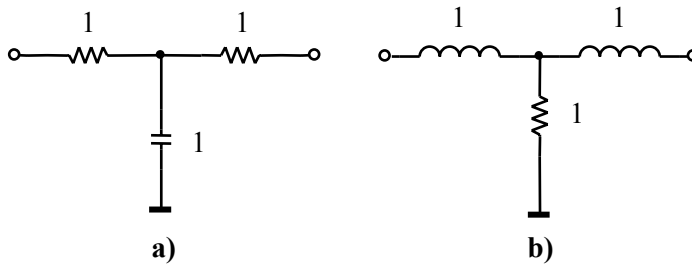


Figura 4.39 Diport simetric în T : a) problema 4.3.2, b) problema 4.3.3

Soluție: $Z_{CT} = \sqrt{\frac{s+2}{s}}, \quad th(\theta) = \frac{\sqrt{s \cdot (s+2)}}{s+1}$

$Z_{CT}\left(\frac{j}{2}\right) = \sqrt[4]{17} \cdot e^{\frac{j}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{4}\right)} = 1.6 - 1.2j \Rightarrow Z_{CT}$ la frecvența f_1 este echivalată cu o conexiune RC serie: $R_{ech} = 1.6\Omega, C_{ech} = 1.7F$.

4.3.3. Se consideră diportul din Figura 4.39b. Să se determine Z_C și θ . Specificați elementele impedanței Z_C la frecvența $f_1 = \frac{1}{2\pi}$ Hz.

Soluție: $Z_{CT} = \sqrt{s \cdot (s+2)}, \quad th(\theta) = \frac{\sqrt{s \cdot (s+2)}}{s+1}$

$Z_{CT}(j) = \sqrt[4]{5} \cdot e^{\frac{j}{2}(\pi - \arctg 2)} = 0.8 + 1.3j \Rightarrow Z_{CT}$ la frecvența f_1 este o conexiune RL serie: $R_{ech} = 0.8\Omega, L_{ech} = 1.3H$.

- 4.3.4. Se consideră diportul din Figura 4.40. Să se determine Z_C și θ . Specificați elementele impedanței Z_C la frecvența $f_l = \frac{1}{2\pi} \text{ Hz}$.

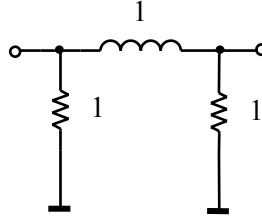


Figura 4.40 Diport simetric în II

Soluție:

$$Z_{CII} = \sqrt{\frac{s}{s+2}}, \quad th(\theta) = \frac{\sqrt{s \cdot (s+2)}}{s+1}, \quad Z_{CII}(j) = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2}\right)} = 0.6 + 0.4j$$

Z_{CII} la frecvența f_l este o conexiune RL serie: $R_{ech} = 0.6 \Omega$, $L_{ech} = 0.4 \text{ H}$.

- 4.3.5. Știind că diportul din Figura 4.41 lucrează adaptat, completați casele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

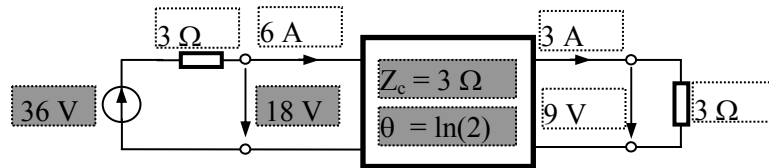


Figura 4.41 Diport pentru problema 4.3.5

- 4.3.6. Știind că diportul din Figura 4.42 lucrează adaptat, completați casele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

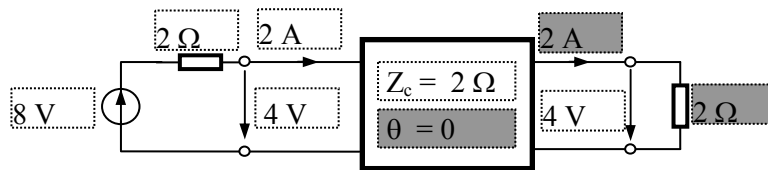


Figura 4.42 Diport pentru problema 4.3.6

4.3.7. Știind că diportul din Figura 4.43 este asimetric și lucrează adaptat, completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură

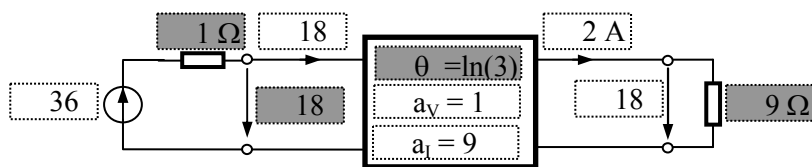


Figura 4.43 Diport pentru problema 4.3.7

4.3.8. Știind că diportul din Figura 4.44 este asimetric și lucrează adaptat, completați casetele albe cu valorile corespunzătoare, însoțite de unitățile de măsură.

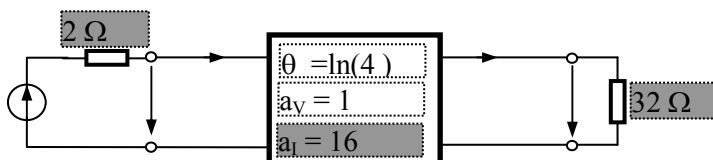


Figura 4.44 Diport pentru problema 4.3.8

4.3.9. Trei diporți simetrici în serie lucrează adaptat pe impedanța $Z_s=2\Omega$ și au constantele de transfer: $\theta_1 = \ln(0.5) + j\frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \ln(2)$, respectiv $\theta_3 = -j\frac{\pi}{3}$.

Cât este amplitudinea tensiunii la ieșirea diportului echivalent, dacă t.e.m. a sursei este 12V?

Soluție: $U_{2ech} = 6 V$.

4.3.10. Trei diporți simetrici în serie lucrează adaptat pe impedanța $Z_s=75\Omega$ și au constantele de transfer: $\theta_1 = \ln(0.5) - j\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \ln(2)$, respectiv $\theta_3 = -j\frac{\pi}{3}$.

Cât este t.e.m. a sursei dacă amplitudinea tensiunii la ieșirea diportului este 5V?

Soluție: $E = 10 V$.

4.3.11. Să se determine funcția de transfer $U_0(s)/U_i(s)$ pentru circuitul din Figura 4.45.

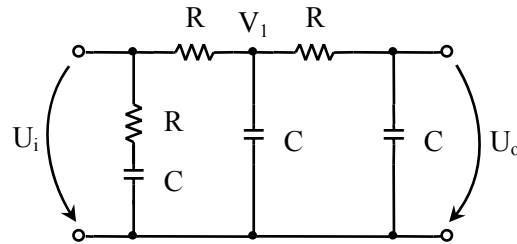


Figura 4.45. Circuitul pentru problema 4.3.11.

Soluție:

Metoda 1: Utilizând parametrii Y se obține:

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = -\frac{-\frac{I}{R(2+sRC)}}{\frac{I+3sRC+(sRC)^2}{R(2+sRC)}} = \frac{I}{I+3sRC+(sRC)^2}$$

Metoda 2: Utilizând teorema lui Millman se obține:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{U_i + U_0}{2 + sRC} \\ U_0 = \frac{I}{I + sRC} V_1 \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{I}{I + 3sRC + (sRC)^2}$$

4.3.12. Să se verifice dacă parametrii impedanță ai diportului în T (Figura 4.46a), echivalent cu circuitul în punte din Figura 4.46b, au expresiile:

$$Z_a = Z_b = \frac{R(R_1 + R_4) + 2R_1R_4}{2R + R_1 + R_4}; \quad Z_c = \frac{R^2 - R_1R_4}{2R + R_1 + R_4}. \quad (4.3.1)$$

Soluție: Matricea impedanță pentru diportul în T este:

$$\mathbf{Z}_T = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c & Z_b \\ Z_b & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

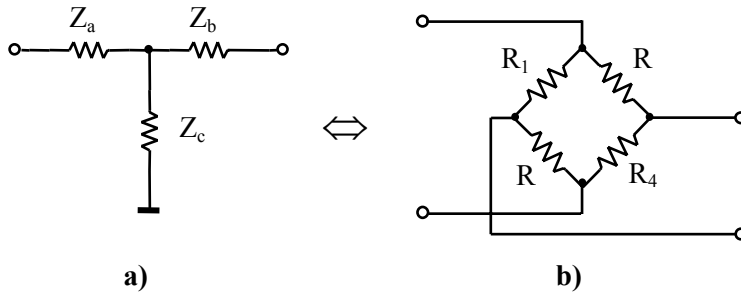


Figura 4.46. a) Diport în T ; b) Diport în punte.

iar pentru diportul în punte:

$$Z_{punte} = \begin{bmatrix} \frac{(R + R_1) \cdot (R + R_4)}{2R + R_1 + R_4} & \frac{R_1 R_4 - R^2}{2R + R_1 + R_4} \\ \frac{R_1 R_4 - R^2}{2R + R_1 + R_4} & \frac{(R + R_1) \cdot (R + R_4)}{2R + R_1 + R_4} \end{bmatrix}$$

După egalarea matricilor rezultă pentru elementele Z_a , Z_b și Z_c :

$$\begin{cases} Z_a = Z_b = \frac{R_1 R_4 - R^2}{2R + R_1 + R_4} \\ Z_c = R \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Relațiile (4.3.1) diferă de (4.3.2), deci (4.3.1) nu reprezintă relațiile de trecere de la diportul în punte la cel în T ; relațiile corecte de echivalență sunt (4.3.2).

4.3.13. Să se determine frecvențele de tăiere pentru diportul format din două celule Γ din Figura 4.31b.

Soluție: $A_{11} = \frac{1}{H(s)} = \frac{L^2}{R^2} \cdot s^2 + 3 \frac{L}{R} \cdot s + 1$, $\omega_0 = \frac{R}{L}$, $|H(j\omega)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Big|_{H_{max}=H(0)=1}$

$$\omega^4 + 7\omega_0^2 \omega^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega_{3dB} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}} \cong \frac{16}{5} \cdot \omega_0 = \frac{16}{5} \cdot \frac{R}{L}$$

4.3.14. Se consideră circuitul din Figura 4.47. Determinați rezistența de intrare a circuitului (R_m), dacă AO se consideră ideal ($R_i = \infty$, $R_0 = 0$, $A = \infty$).

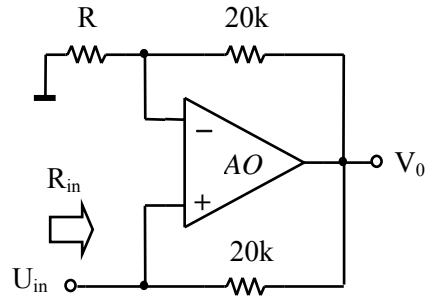


Figura 4.47. Circuitul pentru problema 4.3.14.

Soluție:

$$\begin{cases} V^- = \frac{R}{R + 20k} \cdot V_0 \\ V^+ = U_{in} \\ V^+ = V^- \\ I_{in} = \frac{V_0 - U_{in}}{20k} \end{cases} \Rightarrow R_{in} = \frac{U_{in}}{I_{in}} = R$$

4.3.15. Se consideră circuitul din Figura 4.48, în care ambele amplificatoare operaționale sunt ideale ($R_i = \infty$, $R_o = 0$, $A = \infty$).

a) Determinați impedența de intrare a circuitului Z_{in} ;

b) Dacă $R_1 = 4k\Omega$, $R_2 = R_3 = 10k\Omega$, $R_4 = 1k\Omega$, $C = 200pF$, arătați că $Z_{in} = j\omega L_{in}$, unde $L_{in} = 0.8mH$.

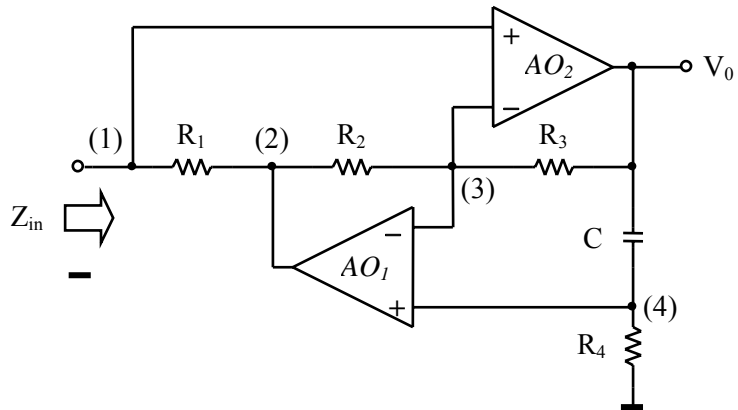


Figura 4.48. Circuitul pentru problema 4.3.15.

Soluție:

a)

$$\begin{cases} V_3 = \frac{R_3 V_2 + R_2 V_0}{R_2 + R_3} \\ V_4 = \frac{sR_4 C}{sR_4 C + 1} \cdot V_0 \\ V_1 = V_3 = V_4 \quad (AO \text{ ideale}) \\ V_1 - V_2 = R_1 I_1 \end{cases} \Rightarrow Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = s \frac{R_1 R_3 R_4}{R_2} \cdot C$$

b) Impedanța de intrare este de forma $Z_{in} = sL_{in}$ unde $L_{in} = \frac{R_1 R_3 R_4}{R_2} \cdot C = 0.8mH$.

4.3.16. Determinați parametrii Z la $\omega = 108 \text{ rad/s}$ ai circuitului echivalent de înaltă frecvență pentru un tranzistor (Figura 4.49). Se cunosc $C = 1pF$ și $R = 10k\Omega$.

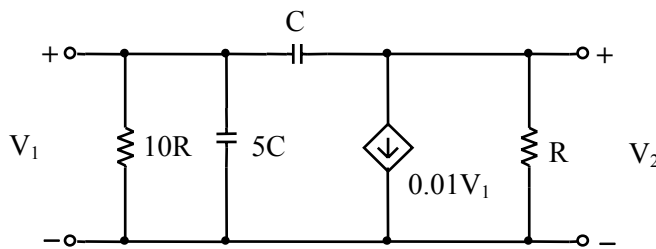


Figura 4.49. Schema echivalentă a tranzistorului (problema 4.3.16).

Soluție:

În Figura 4.49, sursa $0.01V_1$ este o sursă de curent comandată în tensiune și are impedanța internă foarte mare (teoretic ∞), deci în calcule intervine aditiv doar un curent de valoare $I_0 = 0.01V_1$, nu și o impedanță internă finită și diferită de zero. În aceste condiții, rezultă matricea impedanță:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{10R \cdot (1 + sRC)}{1 + 61 \cdot sRC + 50 \cdot s^2 R^2 C^2} & \frac{10 \cdot sR^2 C}{1 + 61 \cdot sRC + 0.1 \cdot sR^2 C + 50 \cdot s^2 R^2 C^2} \\ \frac{10 \cdot sR^2 C}{1 + 61 \cdot sRC + 50 \cdot s^2 R^2 C^2} & \frac{R \cdot (1 + 60 \cdot sRC)}{1 + 61 \cdot sRC + 50 \cdot s^2 R^2 C^2} \end{bmatrix}$$

Valoarea numerică a termenilor sRC , $61sRC$, $50s^2R^2C^2$, $0.1sR^2C$ la frecvența 108 rad/s este foarte mică ($10^{-4} \div 10^{-10}$) în comparație cu 1 , deci se pot neglija și se obține matricea:

$$\mathbf{Z} \cong \begin{bmatrix} 10R & 10 \cdot sR^2C \\ 10 \cdot sR^2C & R \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{Z}| \cong \begin{bmatrix} 10^5 & 0.108 \\ 0.108 & 10^4 \end{bmatrix}$$

4.3.17. Să se determine funcția de transfer $U_2(s)/U_1(s)$ pentru circuitele din Figura 4.50.

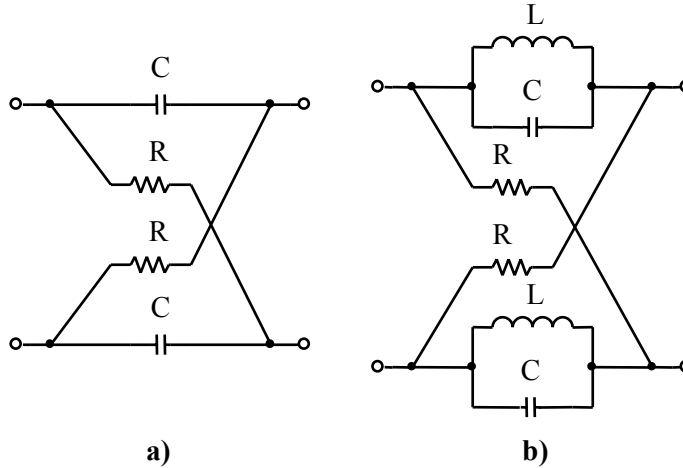
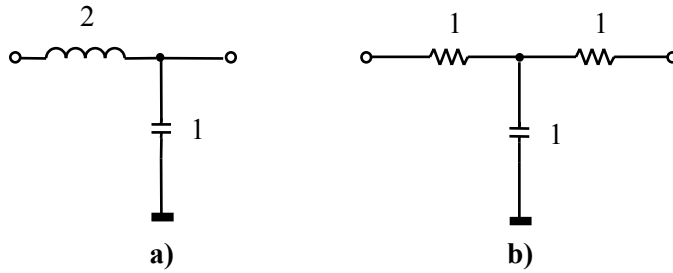


Figura 4.50. Diporți simetrici în X

Soluție: Pentru Figura 4.50a: $H(s) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{s - \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$

Pentru Figura 4.50b: $H(s) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{s^2 - \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$

4.3.18. Se consideră diporții din Figura 4.51, fiecare fiind conectat între o sursă cu $r_g = 1\Omega$ și o sarcină $r_s = 1\Omega$. Să se determine parametrii de repartție $S(s)$ și evoluția semnalelor la intrarea, respectiv ieșirea fiecărui diport, dacă semnalul de excitație este treaptă unitate $\gamma(t)$.


Figura 4.51. Diporți pentru problema 4.3.18

Soluție: Pentru Figura 4.51a:

$$S(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 2} \cdot \begin{bmatrix} s(1+2s) & 2 \\ 2 & s(1-2s) \end{bmatrix}, B(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{2(2s^2+3s+2)} \\ \frac{1}{s(2s^2+3s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{14} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left[7 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) - \sqrt{7} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \right] \right] \cdot \gamma(t) \\ i_1(t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{14} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left[7 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) - \sqrt{7} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \right] \right] \cdot \gamma(t) \\ u_2(t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{14} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left[7 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + 3\sqrt{7} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \right] \right] \cdot \gamma(t) \\ i_2(t) = -u_2(t) \end{cases}$$

Pentru Figura 4.51b:

$$S(s) = \frac{1}{2 \cdot (s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B(s) = \frac{1}{4s(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{4} \cdot (3 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \\ i_1(t) = \frac{1}{4} \cdot (1 + e^{-t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}, \begin{cases} u_2(t) = \frac{1}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \\ i_2(t) = -\frac{1}{4} \cdot (1 - e^{-t}) \cdot \gamma(t) \end{cases}$$

5. Circuite de adaptare

5.1 Considerații teoretice

Adaptarea lanțurilor de transmisie urmărește **evitarea fenomenelor de reflexie-refracție**, fenomene care produc unde staționare (în regim de linie lungă), atenuări de neadaptare (în regim cvasistaționar). Circuitele de adaptare se utilizează doar atunci când elementele lanțului de transmisie nu pot realiza, simultan cu funcția lor principală, adaptarea lanțului.

Condiția de adaptare a unui lanț de transmisie este **egalitatea impedanțelor într-o secțiune a lanțului** (amonte și aval). Dacă lanțul de transmisie este format din sursă, cu impedanța Z_g și o sarcină Z_s , atunci adaptarea $Z_g = Z_s$ va asigura anularea undei reflectate în lanț. În cazul unor impedanțe pur rezistive ($Z_g = R_g$ și $Z_s = R_s$), condiția de adaptare coincide cu cea de transfer maxim de putere ($Z_g = Z_s^*$),

puterea transferată fiind $P_0 = \frac{E^2}{4R_g}$.

Atunci când impedanțele sursei și ale sarcinii nu sunt egale, pentru evitarea undei reflectate sau pentru optimizarea transferului de putere, se intercalează circuite de adaptare. Pentru a nu introduce pierderi, aceste circuite se construiesc din elemente reactive. Adaptarea se va obține la o anumită frecvență numită **frecvență de lucru** f_l .

5.1.1. Tipuri de circuite de adaptare

Adaptarea cu un transformator ideal

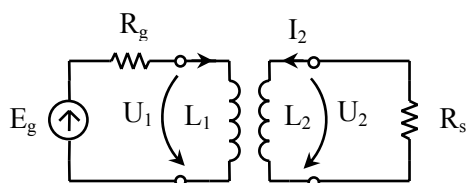


Figura 5.1 Adaptor cu transformator ideal

Între mărimile de la intrarea și ieșirea transformatorului ideal, există relația:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n \quad (5.1.1)$$

unde n este raportul de transformare:

$$n = \sqrt{\frac{R_g}{R_s}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (5.1.2)$$

Această expresie verifică cele două condiții de adaptare: adaptarea în primar ($Z_{in}=Z_g$) și adaptarea în secundar ($Z_{ieș}=Z_s$). Mai mult, condiția (5.1.2) arată că adaptarea se realizează la orice frecvență, fiind independentă de frecvență și este valabilă atâta timp cât transformatorul este ideal.

Circuite de adaptare în Γ

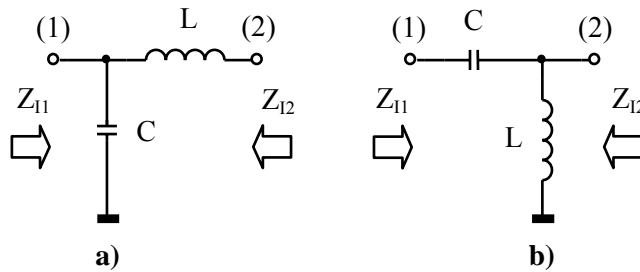


Figura 5.2. Circuite de adaptare în Γ : a) $R_g > R_s$, b) $R_g < R_s$

Aceste circuite se utilizează pentru adaptarea surselor cu impedanță internă pur rezistivă la sarcini pur rezistive. Valorile reactanțelor se calculează cu expresiile:

$$\begin{aligned}
 R_g > R_s : & \begin{cases} X_L = \sqrt{R_g R_s \cdot \left(1 - \frac{R_s}{R_g}\right)} \\ X_C = -\frac{R_g R_s}{X_L} \end{cases} \\
 R_g < R_s : & \begin{cases} X_L = \sqrt{\frac{R_g R_s}{1 - \frac{R_g}{R_s}}} \\ X_C = -\frac{R_g R_s}{X_L} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

din care rezultă valorile parametrilor L și C :

$$L = \frac{X_L}{2\pi f_l}, \quad C = \frac{I}{2\pi f \cdot |X_C|} \quad (5.1.4)$$

Relațiile (5.1.3) se obțin grupând circuitul de adaptare cu una din rezistențele sursei sau de sarcină și considerând impedanța echivalentă egală cu rezistența de la celălalt capăt al lanțului de transmisie. Aceleași relații se mai pot obține utilizând principiul echivalării circuitului LC serie cu cel paralel și invers (Figura 5.3).

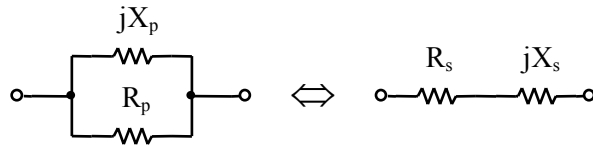


Figura 5.3. Transformarea paralel-serie, serie-paralel

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \cdot R_p, & X_s &= \frac{R_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \cdot X_p \\ R_p &= R_s + \frac{X_s^2}{R_s}, & X_p &= X_s + \frac{R_s^2}{X_s} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Circuite de adaptare pe imagini

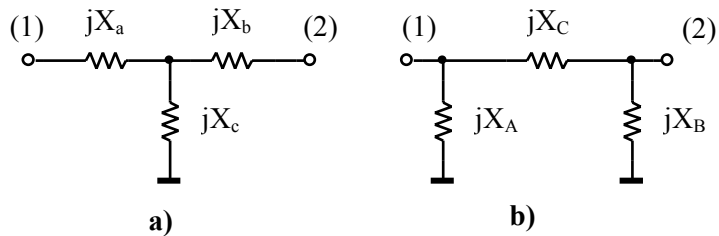


Figura 5.4. Circuite de adaptare: a) în T și b) în II

Circuitele din Figura 5.4 se utilizează în cazul adaptării impedanțelor complexe sau dacă este necesară obținerea unui anumit defazaj între mărimile de la intrare și cele de la ieșire.

Valorile reactanțelor se calculează cu expresiile (5.1.6) pentru structura în T și respectiv (5.1.7) pentru structura în Π .

- structura în T :

$$\begin{aligned}
 X_c &= K_{CT} \sqrt{R_g R_s} \\
 X_a &= -X_c \pm R_g \sqrt{K_{CT}^2 - 1} \\
 X_b &= -X_c \pm R_s \sqrt{K_{CT}^2 - 1} \\
 K_{CT} &= \frac{-1}{\sin(b_I)} = \frac{1}{\sin(\varphi_I)}, \\
 |K_{CT}| &\geq 1
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

- structura în Π :

$$\begin{aligned}
 X_C &= K_{C\Pi} \sqrt{R_g R_s} \\
 \frac{1}{X_A} &= -\frac{1}{X_C} \pm \frac{1}{R_g} \sqrt{\frac{1}{K_{C\Pi}^2} - 1} \\
 \frac{1}{X_B} &= -\frac{1}{X_C} \pm \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{1}{K_{C\Pi}^2} - 1} \\
 K_{C\Pi} &= \sin b_I = -\sin \varphi_I, \\
 |K_{C\Pi}| &\leq 1
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

unde b_I reprezintă defazajul intrării față de ieșire, φ_I – defazajul ieșirii față de intrare și K_{CT} , respectiv $K_{C\Pi}$ – factori de cuplaj. Între aceste mărimi există relația: $b_I = -\varphi$.

Semnele în expresiile (5.1.6) și (5.1.7) se aleg în funcție de defazajul introdus de circuitul adaptor și de semnul factorului de cuplaj (K_{CT} sau $K_{C\Pi}$) (Tabelul 5.1).

Semn $K_{CT}, K_{C\Pi}$	Semn $\sqrt{\quad}$ în X_a, X_b	$ \varphi $
+	+	$< \pi / 2$
	-	$> \pi / 2$
-	+	$> \pi / 2$
	-	$< \pi / 2$

Tabelul 5.1 Alegerea semnelor în (5.1.6) și (5.1.7)

Rejecția unor frecvențe

Circuitul adaptor poate fi proiectat în așa fel încât să rejeteze anumite componente spectrale. Astfel, se înlocuiesc reactanțele circuitului adaptor cu circuite LC rezonante, serie sau paralel, amplasate transversal sau longitudinal; frecvențele lor de rezonanță vor fi frecvențele ce trebuie rejectate. Pentru calculul parametrilor laturilor rezonante, trebuie îndeplinite simultan condițiile:

- asigurarea **adaptării**: la ω_l să aibă reactanța echivalentă cu cea a elementului pe care îl înlocuiesc;
- asigurarea **rejecției**: la ω_0 să asigure un zero de transmisie (să fie rezonante).

Ținând cont de variația reactanțelor serie și paralel în funcție de frecvență (Figura 5.5), rezultă: (1) circuitul **serie** poate asigura un zero de transmisie doar amplasat **transversal**, iar (2) circuitul **paralel** poate asigura un zero de transmisie doar amplasat **longitudinal**.

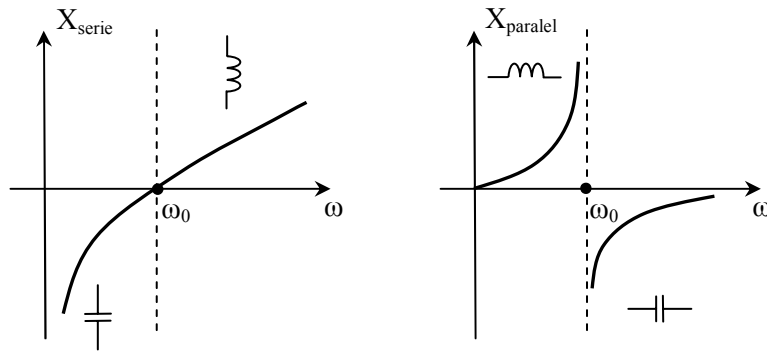


Figura 5.5. Dependența de frecvență a reactanțelor echivalente

Laturile transversale se vor înlocui **numai cu grupuri LC serie**, iar calculul parametrilor se va face pe baza relațiilor:

$$\begin{cases} \omega_0^2 L_s C_s = 1 \\ X_s = \omega_l L_s - \frac{1}{\omega_l C_s} \\ X_s = X_{trans} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_s = \frac{X_{trans}}{2\pi f_l} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f_0^2}{f_l^2}} \\ C_s = \frac{1}{2\pi f_l X_{trans}} \cdot \left(\frac{f_l^2}{f_0^2} - 1 \right) \end{cases} \quad (5.1.8)$$

Laturile longitudinale se vor înlocui **numai cu grupuri LC paralele**, iar calculul parametrilor se va face pe baza relațiilor:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p = \frac{\omega_l L_p}{1 - \omega_l^2 L_p C_p} \\ \omega_0^2 L_p C_p = 1 \\ X_p = X_{long} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_p = \frac{X_{long}}{2\pi f_l} \cdot \left(1 - \frac{f_l^2}{f_0^2} \right) \\ C_p = \frac{1}{2\pi f_l X_{long}} \cdot \frac{1}{\frac{f_0^2}{f_l^2} - 1} \end{array} \right. \quad (5.1.9)$$

5.2 Probleme rezolvate

5.2.1 Să se determine inductivitatea primarului (L_1) unui transformator ideal astfel încât acesta să realizeze adaptarea unei surse cu $R_g = 4\Omega$ la o sarcină cu $R_s = 1\Omega$. Inductivitatea secundarului este $L_2 = 2H$. Cât este raportul de transformare n în acest caz?

Rezolvare:

Circuitul de adaptare este dat în Figura 5.1. Condiția de adaptare este (5.1.2), din care rezultă L_1 și L_2 pentru transformator:

$$L_1 = L_2 \cdot \frac{R_g}{R_s} = 8H$$

$$n = \sqrt{\frac{R_g}{R_s}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 2$$

5.2.2 Pentru circuitul din Figura 5.1, să se determine inductivitatea secundarului (L_2), știind că primarul are inductivitatea $L_1 = 2H$, iar raportul de transformare este $n = 2$. Ce sarcină se poate conecta în secundarul transformatorului astfel încât transferul de putere să fie maxim? Se cunoaște rezistența internă a sursei din primar $R_g = 50\Omega$.

Rezolvare:

Din (5.1.2) rezultă $L_2 = \frac{L_1}{n^2} = \frac{1}{2}H$, iar transfer maxim de putere înseamnă adaptarea sursei la sarcină: $R_s = \frac{R_g}{n^2} = 12.5\Omega$.

5.2.3 Să se proiecteze un circuit de adaptare în Γ care să realizeze adaptarea unei surse cu $R_g = 75 \Omega$ la o sarcină $R_s = 50 \Omega$ la frecvența de lucru $f_l = 300 \text{ MHz}$.

Rezolvare:

Metoda 1

Pentru circuitele de adaptare în Γ , calculul parametrilor se poate face scriind impedanța echivalentă circuitului format din C , L și R_s , care trebuie să fie egală cu R_g . Punând condițiile $R_g = \text{Re}\{Z_I\}$; $0 = \text{Im}\{Z_I\}$ rezultă două ecuații din care se determină valorile parametrilor C și L .

În cazul $R_g > R_s$ se va folosi circuitul din Figura 5.6a, la care, aplicând transformarea serie-paralel, rezultă structura din Figura 5.6b.

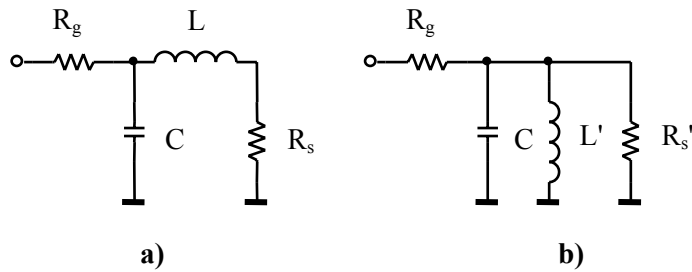


Figura 5.6. a) Circuitul de adaptare;
b) Schema echivalentă după transformarea serie-paralel

Parametrii circuitului de adaptare se vor determina din sistemul (5.1.5). Se pun condițiile:

$$\begin{cases} R_s' = R_g \\ X_L' = X_C \end{cases}$$

și se obțin relațiile (5.1.3), din care rezultă valorile parametrilor:

$$X_L = 25\sqrt{2} = 35.35 \Omega \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f_l} = 18.7 \text{ nH}$$

$$X_C = 75\sqrt{2} = 106.1 \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f_l X_C} = 5 \text{ pF}$$

Metoda 2

Utilizând parametri imagine ai diportului în Γ (Figura 5.7), se obține:

$$\begin{aligned} Z_{I_1} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \cdot Z_2 = R_g \\ Z_{I_2} &= \sqrt{Z_1 \cdot (Z_1 + Z_2)} = R_s \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

unde $Z_1 = jX_L$, $Z_2 = jX_C$

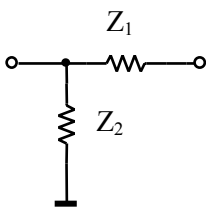


Figura 5.7. Diportul în Γ

Rezolvând sistemul (5.2.1), rezultă:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \pm j \sqrt{R_s \cdot (R_g - R_s)} \\ Z_2 &= \mp j \sqrt{\frac{R_g R_s}{1 - \frac{R_s}{R_g}}} \end{aligned}$$

Alegând una din combinații (\pm), se obține:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi f_l} \cdot \sqrt{R_s \cdot (R_g - R_s)} = 18.7 \text{ nH} \\ C &= \frac{1}{2\pi f_l} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{R_s}{R_g}}{R_g R_s}} = 5 \text{ pF} \end{aligned}$$

- 5.2.4** Să se proiecteze un circuit de adaptare în Γ , conectat între un generator cu $R_g=1\Omega$ și o sarcină $R_s=4\Omega$, la frecvența de lucru $f_l = \frac{1}{4\pi} \text{Hz}$. Să se reprojeteze circuitul adaptor pentru a rejecta frecvențele $f_{01} = \frac{1}{2\pi} \text{Hz}$ și $f_{02} = \frac{1}{5\pi} \text{Hz}$.

Rezolvare:

Circuitul adaptor are structura din Figura 5.2b. Parametrii rezultă din (5.1.3) pentru cazul $R_g < R_s$:

$$\begin{cases} X_L = \sqrt{\frac{4}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Omega \\ X_C = -\frac{R_g R_s}{X_L} = -4\sqrt{3} \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{X_L}{2\pi f_l} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{H} \\ C = \frac{1}{2\pi f_l |X_C|} = \sqrt{3} \text{F} \end{cases}$$

Din Figura 5.5, rezultă că rejecția frecvenței f_{01} nu este posibilă cu acest circuit adaptor, iar frecvența f_{02} se poate rejecta cu una din circuitele din Figura 5.8.

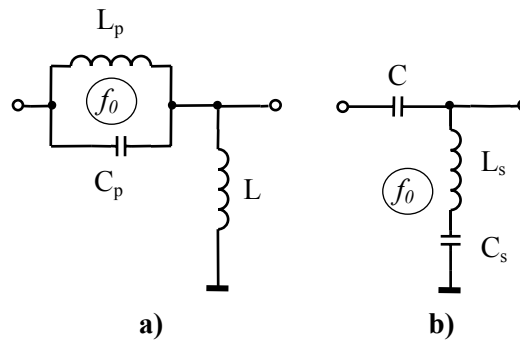


Figura 5.8 Variante posibile al circuitului adaptor pentru rejecția frecvenței f_{02}

Pentru grupul LC paralel, rezultă:

$$\begin{cases} X_p = \frac{\omega_l L_p}{1 - \omega_l^2 L_p C_p} \\ \omega_{02}^2 L_p C_p = 1 \\ X_p = X_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_p = \frac{X_C}{2\pi f_l} \cdot \left(1 - \frac{f_l^2}{f_{02}^2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} H \\ C_p = \frac{1}{2\pi f_l X_C} \cdot \frac{1}{\frac{f_{02}^2}{f_l^2} - 1} = \frac{25}{18\sqrt{3}} F \end{cases}$$

iar pentru LC serie:

$$\begin{cases} \omega_{02}^2 L_s C_s = 1 \\ X_s = \omega_l L_s - \frac{1}{\omega_l C_s} \\ X_s = X_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_s = \frac{X_L}{2\pi f_l} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f_{02}^2}{f_l^2}} = \frac{50}{9\sqrt{3}} H \\ C_s = \frac{1}{2\pi f_l X_L} \cdot \left(\frac{f_l^2}{f_{02}^2} - 1\right) = \frac{9\sqrt{3}}{8} F \end{cases}$$

5.2.5 Se consideră un circuit de adaptare în Γ .

- Să se proiecteze un circuit de adaptare conectat între un generator cu $R_g = 100\Omega$ și o sarcină $R_s = 75\Omega$ la frecvența de lucru $f_l = 120\text{MHz}$.
- Să se calculeze defazajul φ (în grade, cât și în secunde), introdus de circuitul adaptor la frecvența de lucru.
- Să se reproiecteze circuitul adaptor, astfel încât să se rejeteze frecvența $f_0 = 2f_l$.

Rezolvare:

- Pentru cazul $R_g > R_s$, circuitul adaptor este dat în Figura 5.2a. Calculul parametrilor rezultă din (5.1.3):

$$\begin{cases} X_L = \sqrt{100 \cdot 75 \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right)} = 43.3\Omega \\ X_C = -\frac{7500}{43.3} = -173.21\Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{X_L}{2\pi f_l} = 57.4n \\ C = \frac{1}{2\pi f_l \cdot |X_C|} = 7.6pF \end{cases}$$

- Defazajul φ reprezintă argumentul răspunsului în frecvență $H(j\omega)$, care se determină pentru circuitul din Figura 5.9.

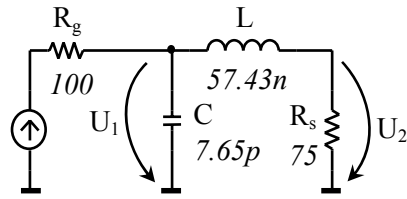


Figura 5.9 Circuitul adaptor pentru calculul defazajului

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_s}{sL + R_s} = \frac{\frac{R_s}{L}}{s + \frac{R_s}{L}}$$

care este echivalentă cu forma generală de funcție de transfer de ordinul I:

$$H(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

rezultă:

$$\omega_0 = \frac{R_s}{L} = \frac{75}{57.43 \cdot 10^{-9}} = 1.3 \cdot 10^9 \text{ [rad/s]}$$

iar $\omega_l = 2\pi f_l = 754 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]}$. Răspunsul în frecvență la ω_l va fi:

$$H(j\omega_l) = \frac{\omega_0}{j\omega_l + \omega_0}$$

Defazajul introdus de circuit este:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} = -\arctg \frac{\omega_l}{\omega_0} = -\arctg \frac{754 \cdot 10^6}{1.3 \cdot 10^9} = -0.525 \text{ [rad]}$$

ceea ce în grade înseamnă $\varphi = \frac{360}{2\pi} \cdot (-0.525) = -30.1^\circ$. Conform acestui rezultat, putem spune că circuitul de adaptare defazează în urmă (semnul “-”) semnalul de la ieșire față de intrare cu 30.1° . Acest defazaj transformat în secunde este:

$$\Delta t = \frac{T_l \cdot \varphi}{360^\circ} = \frac{\varphi}{360^\circ \cdot f_l} = \frac{|-30.1|}{360 \cdot 120 \cdot 10^6} = 0.7 \text{ ns}$$

- c) Din Figura 5.5 rezultă că este posibilă rejecția frecvenței de 240MHz ($f_0 = 2f_l$), dacă se înlocuiește latura longitudinală (L) cu un grup rezonant paralel $L_p C_p$ (Figura 5.10a) sau latura transversală (C) cu un grup rezonant serie $L_s C_s$ (Figura 5.10b).

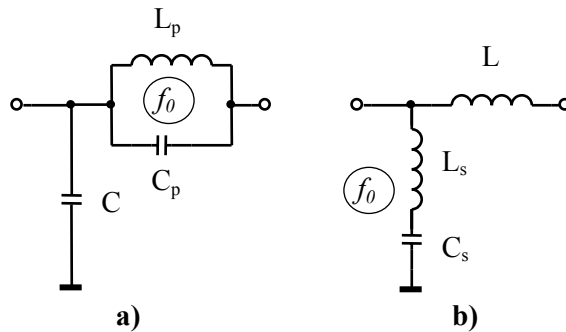


Figura 5.10 Variante posibile ale circuitului adaptor pentru rejecția frecvenței $2f_l$

Utilizând (5.1.9), se obțin parametrii L_p , C_p :

$$\begin{cases} X_p = \frac{\omega_l L_p}{1 - \omega_l^2 L_p C_p} \\ \omega_0^2 L_p C_p = 1 \\ \omega_0 = 2\omega_l \\ X_p = X_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_p = \frac{3}{4} \cdot \frac{43.3}{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6} = 43.1 \text{ nH} \\ C_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 43.3} = 10.2 \text{ pF} \end{cases}$$

iar din (5.1.8) rezultă L_s , C_s :

$$\begin{cases} X_s = \omega_l L_s - \frac{1}{\omega_l C_s} \\ \omega_0^2 L_s C_s = 1 \\ \omega_0 = 2\omega_l \\ X_s = X_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{173.21}{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6} = 76.6 \text{ nH} \\ C_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 173.21} = 5.7 \text{ pF} \end{cases}$$

Observație: Defazajul φ rămâne același și după introducerea grupului LC rejector, la frecvența de lucru!

5.2.6 Să se proiecteze un circuit de adaptare în T care să realizeze adaptarea între o sursă cu $R_g=4\Omega$ și o sarcină $R_s=1\Omega$ la frecvența de lucru $f_l=16kHz$ și să introducă un defazaj de 30° între tensiunea de intrare și cea de ieșire.

Rezolvare:

Din relațiile de proiectare (5.1.6) se calculează mai întâi K_{CT} :

$$K_{CT} = -\frac{1}{\sin 30^\circ} = -2$$

apoi reactanța X_c :

$$X_c = K_{CT} \sqrt{R_g R_s} = -4\Omega \Rightarrow C_c = \frac{1}{2\pi f_l |X_c|} = 2.5\mu F$$

Conform Tabelului 5.1, rezultă semnul “-” în (5.1.6), deci există o singură situație posibilă (Figura 5.11). În acest caz, avem:

$$X_a = 4 - 4\sqrt{3} = -2.93\Omega \Rightarrow C_a = \frac{1}{2\pi f_l |X_a|} = 3.4\mu F$$

$$X_b = 4 - \sqrt{3} = 2.27\Omega \Rightarrow L_b = \frac{X_b}{2\pi f_l} = 22.6\mu H$$

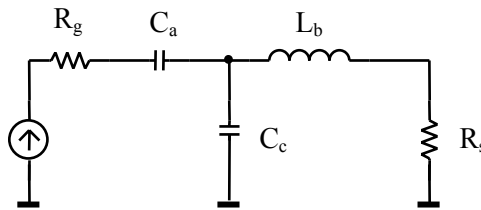


Figura 5.11. Circuit de adaptare în T

5.2.7 Se consideră circuitul de adaptare din Figura 5.12. Să se determine rezistența generatorului și cea a sursei pentru care se realizează adaptarea.

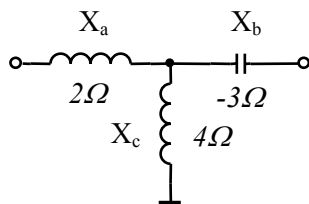


Figura 5.12. Circuit de adaptare în T

Rezolvare:

Se înlocuiesc valorile numerice ale reactanțelor în (5.1.6) și se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 4 = K_{CT} \sqrt{R_g R_s} \\ 2 = -4 \pm R_g \sqrt{K_{CT}^2 - 1} \\ -3 = -4 \pm R_s \sqrt{K_{CT}^2 - 1} \end{cases}$$

unde $K_{CT} > 0$ pentru că $X_c > 0$, iar necunoscutele sunt K_{CT} , R_g și R_s . Se rezolvă sistemul și rezultă:

$$\begin{cases} R_g = 2\sqrt{15}\Omega \\ R_s = \frac{\sqrt{15}}{3}\Omega \\ K_{CT} = 2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

5.2.8 Pentru exemplul de la **problema 5.2.6**, să se proiecteze circuitul de adaptare în T astfel încât să se asigure și rejecția frecvențelor $f_{01}=10kHz$ și $f_{02}=20kHz$.

Rezolvare:

Știind că reactanța unui condensator este negativă și cea a unei bobine este pozitivă, din Figura 5.5 rezultă că pentru rejecția frecvenței de 10kHz , $f_{01} < f_i$, se poate înlocui condensatorul C_a longitudinal cu un LC rezonant paralel (Figura 5.13a, b). Pentru rejecția frecvenței de 20kHz , $f_{02} > f_i$, înlocuirea se poate face pentru condensatorul C_c de pe latura transversală (Figura 5.13b), sau pentru bobina L_b de pe latura longitudinală (Figura 5.13a).

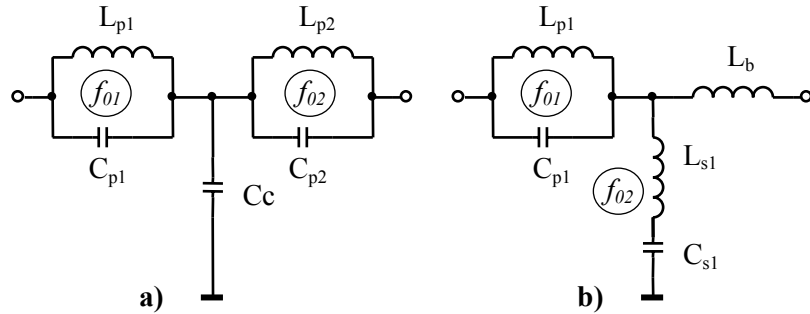


Figura 5.13. Rejecția unor frecvențe cu circuitul de adaptare

Pentru Figura 5.13a, valorile parametrilor se obțin din (5.1.9):

$$f_{01} = 10\text{kHz} : \begin{cases} L_{p1} = \frac{X_a}{2\pi f_i} \cdot \left(1 - \frac{f_i^2}{f_{01}^2}\right) = 45.5\mu\text{H} \\ C_{p1} = \frac{1}{2\pi f_i X_a} \cdot \frac{1}{\frac{f_{01}^2}{f_i^2} - 1} = 5.6\mu\text{F} \end{cases}$$

$$f_{02} = 20\text{kHz} : \begin{cases} L_{p2} = \frac{X_b}{2\pi f_i} \cdot \left(1 - \frac{f_i^2}{f_{02}^2}\right) = 8.13\mu\text{H} \\ C_{p2} = \frac{1}{2\pi f_i X_b} \cdot \frac{1}{\frac{f_{02}^2}{f_i^2} - 1} = 7.8\mu\text{F} \end{cases}$$

Pentru Figura 5.13b, valorile parametrilor se obțin din (5.1.8) și (5.1.9):

$$\begin{cases}
 f_{01} = 10\text{kHz} : \begin{cases} L_{p1} = \frac{X_a}{2\pi f_1} \cdot \left(1 - \frac{f_1^2}{f_{01}^2}\right) = 188.2\mu\text{H} \\ C_{p1} = \frac{1}{2\pi f_1 X_a} \cdot \frac{1}{\frac{f_{01}^2}{f_1^2} - 1} = 5.6\mu\text{F} \end{cases} \\
 f_{02} = 20\text{kHz} : \begin{cases} C_{s1} = \frac{1}{2\pi f_1 X_c} \cdot \left(\frac{f_1^2}{f_{02}^2} - 1\right) = 0.9\mu\text{F} \\ L_{s1} = X_c \cdot \frac{1}{1 - \frac{f_{02}^2}{f_1^2}} \cdot \frac{1}{2\pi f_1} = 70.7\mu\text{H} \end{cases}
 \end{cases}$$

5.2.9 Se consideră un circuit de adaptare în T .

- Să se proiecteze un circuit de adaptare la frecvența de lucru $f_l = 20\text{kHz}$, conectat între un generator cu $R_g = 175\Omega$ și o sarcină $R_s = 25\Omega$. Se va considera factorul de cuplaj $K_{CT} = \sqrt{3}$.
- Să se redimensioneze circuitul de la punctul a) astfel încât să se rejeteze armonicile 3, 4 și 5 ale frecvenței f_l . Să se determine și defazajul introdus de circuitul de adaptare.
- Pot fi rejectate frecvențele $\frac{1}{2}f_l$, $\frac{1}{3}f_l$ cu circuitul obținut la punctul a)?
- Să se determine câștigul circuitului adaptor la frecvența de lucru în condiții de mers în sarcină (R_s).

Rezolvare:

a) Relațiile de proiectare sunt date de (5.1.6) din care rezultă:

Pentru $K_{CT} = \sqrt{3}$, semnul radicalului $\sqrt{K_{CT}^2 - 1}$ în relațiile (5.1.6) rezultă pozitiv (Tabelul 5.1). În acest caz, se obține:

$$\begin{cases}
 X_c = \sqrt{3} \cdot \sqrt{175 \cdot 25} = 114.56\Omega > 0 \Rightarrow L_c = \frac{X_c}{2\pi f_l} = \frac{114.56}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} = 1\text{mH} \\
 X_a = 175 \cdot \sqrt{2} - 114.56 = 133\Omega > 0 \Rightarrow L_a = \frac{X_a}{2\pi f_l} = 1.058\text{mH} = 1\text{mH} \\
 X_b = 25 \cdot \sqrt{2} - 114.56 = -79.2\Omega < 0 \Rightarrow C_b = \frac{1}{2\pi f_l \cdot |X_b|} = 0.1\mu\text{F}
 \end{cases}$$

Circuitul proiectat este ilustrat în Figura 5.14a.

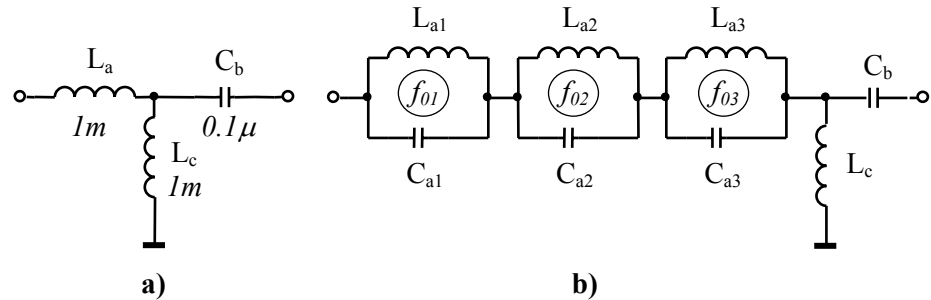


Figura 5.14. a) Circuitul de adaptare în T ; b) Circuitul cu rejecția armonicelor 3, 4 și 5

- b) Pentru rejecția parametrilor se studiază graficele din Figura 5.5. Se observă că circuitul rezonant paralel se poate introduce numai pe ramura X_a , deoarece rezonanța se produce la o frecvență mai mare decât frecvența la care el se comportă inductiv ($f_0 > f$). Circuitul modificat este ilustrat în Figura 5.14b.

În acest caz, $X_a = X_{a1} + X_{a2} + X_{a3}$, în care X_{a1} , X_{a2} și X_{a3} sunt necunoscute despre care nu se precizează nimic. Prin urmare, aceste reactanțe se aleg arbitrar, iar pentru simplitatea calculelor se consideră:

$$X_{a1} = X_{a2} = X_{a3} \Rightarrow X_{a1} = X_{a2} = X_{a3} = \frac{X_a}{3}$$

În aceste condiții, se obțin parametrii fiecărui grup LC astfel:

- pentru grupul L_{a1} , C_{a1} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{a1}} = \frac{1}{\omega_l L_{a1}} - \omega_l C_{a1} \\ \omega_{01}^2 L_{a1} C_{a1} = 1 \\ \omega_{01} = 3\omega_l \\ X_{a1} = \frac{X_a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{a1} = \frac{X_{a1}}{\omega_l} \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{01}^2} \right) = \frac{8}{27} \cdot \frac{X_a}{\omega_l} = 0.3 \text{mH} \\ C_{a1} = \frac{1}{\omega_l X_{a1} \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_l^2} - 1 \right)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\omega_l X_a} = 22.4 \text{nF} \end{cases}$$

- pentru grupul L_{a2} , C_{a2} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{a2}} = \frac{1}{\omega_l L_{a2}} - \omega_l C_{a2} \\ \omega_{01}^2 L_{a2} C_{a2} = 1 \\ \omega_{01} = 4\omega_l \\ X_{a2} = \frac{X_a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{a2} = \frac{X_{a2}}{\omega_l} \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{02}^2} \right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{X_a}{\omega_l} = 0.33mH \\ C_{a2} = \frac{1}{\omega_l X_{a2} \left(\frac{\omega_{02}^2}{\omega_l^2} - 1 \right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\omega_l X_a} = 12nF \end{cases}$$

- pentru grupul L_{a3}, C_{a3} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{a3}} = \frac{1}{\omega_l L_{a3}} - \omega_l C_{a3} \\ \omega_{01}^2 L_{a3} C_{a3} = 1 \\ \omega_{01} = 5\omega_l \\ X_{a3} = \frac{X_a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{a3} = \frac{X_{a3}}{\omega_l} \cdot \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{03}^2} \right) = \frac{8}{25} \cdot \frac{X_a}{\omega_l} = 0.34mH \\ C_{a3} = \frac{1}{\omega_l X_{a3} \cdot \left(\frac{\omega_{03}^2}{\omega_l^2} - 1 \right)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_l X_a} = 7.5nF \end{cases}$$

Defazajul introdus de un circuit de adaptare în T se determină din K_{CT} :

$$K_{CT} = \frac{1}{\sin\varphi} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{1}{K_{CT}} \Big|_{K_{CT}=\sqrt{3}} = 0.615 [rad]$$

iar în grade: $\varphi = \frac{0.615}{\pi} \cdot 180 = 35.24^\circ$.

- c) Din Figura 5.5 se constată că, pentru rejecția frecvențelor $\frac{1}{2}f_l, \frac{1}{3}f_l$, sunt posibile două variante de circuit (Figura 5.15 a, b).

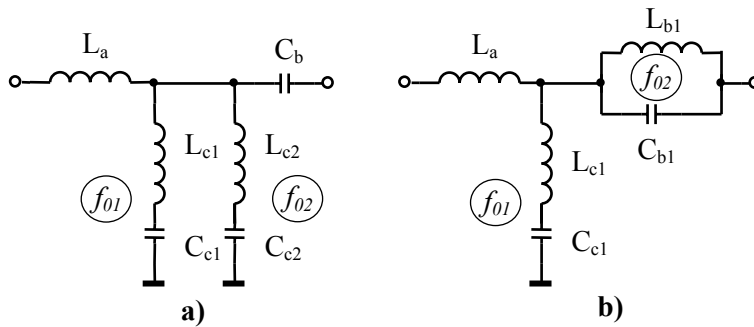


Figura 5.15 Circuite de adaptare cu grupuri LC rejeptoare

Cu datele de la punctul a), se determină parametrii grupurilor LC rejectoare:

- pentru circuitul din Figura 5.15a, reactanța echivalentă X_c este:

$$\frac{1}{X_c} = \frac{1}{X_{c1}} + \frac{1}{X_{c2}}$$

iar pentru simplitatea calculelor, considerăm $X_{c1} = X_{c2} = 2X_c$ și rezultă:

$$\begin{cases} L_{c1} = \frac{X_{c1}}{\omega_l \cdot \left(1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega_l^2}\right)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{X_c}{\omega_l} = \frac{8}{3} \cdot \frac{114.56}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} = 2.43 \text{mH} \\ C_{c1} = \frac{1}{\omega_l X_{c1}} \cdot \left(\frac{\omega_l^2}{\omega_{01}^2} - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\omega_l X_c} = \frac{1.5}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 114.56} = 0.1 \mu\text{F} \\ L_{c2} = \frac{X_{c2}}{\omega_l \cdot \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega_l^2}\right)} = \frac{9}{16} \cdot \frac{X_c}{\omega_l} = \frac{9}{4} \cdot \frac{114.56}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} = 2 \text{mH} \\ C_{c2} = \frac{1}{\omega_l X_{c2}} \cdot \left(\frac{\omega_l^2}{\omega_{02}^2} - 1\right) = \frac{4}{\omega_l X_c} = \frac{4}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 114.56} = 0.28 \mu\text{F} \end{cases}$$

- pentru circuitul din Figura 5.15b, se obțin parametrii L_{b1} , C_{b1} , L_{c1} și C_{c1} :

$$\begin{cases} L_{c1} = \frac{X_c}{\omega_l \cdot \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega_l^2}\right)} = \frac{9}{8} \cdot \frac{X_c}{\omega_l} = 1 \text{mH} \\ C_{c1} = \frac{1}{\omega_l X_c} \cdot \left(\frac{\omega_l^2}{\omega_{02}^2} - 1\right) = \frac{8}{\omega_l X_c} = 0.5 \mu\text{F} \\ L_{b1} = \frac{X_b}{\omega_l} \cdot \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{01}^2}\right) = -3 \frac{X_b}{\omega_l} = 2 \text{mH} \\ C_{b1} = \frac{1}{\omega_l X_b} \cdot \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_l^2} - 1\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\omega_l X_b} = 0.13 \mu\text{F} \end{cases}$$

- d) Pentru determinarea câștigului la frecvența de lucru, se consideră circuitul din Figura 5.16. Se determină funcția de transfer $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$, utilizând teorema lui Millman pentru nodul V_3 și teorema divizorului de tensiune pentru U_2 (sistemul (5.2.2)).

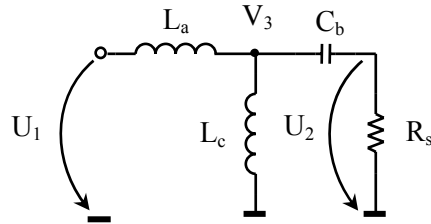


Figura 5.16. Circuitul adaptor conectat pe sarcină

$$\begin{cases} V_3 = \frac{\frac{U_1}{sL_1} + sC_1U_2}{\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + sC_1} = \frac{sL_2U_1 + s^3L_1L_2C_1U_2}{s(L_1 + L_2) + s^3L_1L_2C_1} \\ U_2 = V_3 \frac{sR_sC_1}{1 + sR_sC_1} \Rightarrow V_3 = U_2 \cdot \frac{1 + sR_sC_1}{sR_sC_1} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Se elimină potențialul V_3 și se obține:

$$\frac{sL_2U_1 + s^3L_1L_2C_1U_2}{s(L_1 + L_2) + s^3L_1L_2C_1} = U_2 \cdot \frac{1 + sR_sC_1}{sR_sC_1}$$

$$U_2 \cdot \left[\frac{1 + sR_sC_1}{sR_sC_1} \cdot [s(L_1 + L_2) + s^3L_1L_2C_1] - s^3L_1L_2C_1 \right] = sL_2U_1$$

din care rezultă:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{R_s}{L_1} \cdot s}{s^2 + \frac{L_1 + L_2}{L_1L_2} R_s \cdot s + \frac{L_1 + L_2}{L_1L_2C_1}} \quad (5.2.3)$$

Această expresie se poate pune sub forma generală:

$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

în care, prin identificare cu (5.2.3), se obține:

$$\begin{cases} k = \frac{R_s}{L_1} = 25 \cdot 10^3 [\Omega/H] \\ \omega_0^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_1} = \frac{10^{-3} + 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{10} [\text{rad/s}]^2 \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R_s = \frac{10^{-3} + 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 10^{-3}} \cdot 25 = 50 \cdot 10^3 [\text{rad/s}] \end{cases}$$

Câștigul reprezintă modulul răspunsului în frecvență $H(j\omega)$:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \omega^2}}$$

Dacă $\omega \rightarrow \omega_l$ obținem câștigul la frecvența de lucru:

$$A(\omega_l) = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^3}{\sqrt{\left(2 \cdot 10^{10} - (2\pi \cdot 20 \cdot 10^3)^2\right)^2 + (50 \cdot 10^3)^2 \cdot (2\pi \cdot 20 \cdot 10^3)^2}} = 0.42$$

care transformat în dB este:

$$A_{dB}(\omega_l) = 20 \cdot \lg(0.42) = -7.54 [\text{dB}]$$

5.2.10 Se consideră un circuit adaptor în T .

- a) Să se proiecteze un circuit de adaptare la frecvența de lucru $f_l = 0.5 \text{ MHz}$, conectat între un generator cu $R_g = 50 \Omega$ și o sarcină $R_s = 200 \Omega$. Se vor considera două variante de realizare după defazajul introdus:

$$\varphi_1 = 45^\circ \text{ și } \varphi_2 = -70^\circ .$$

- b) Să se redimensioneze circuitele de la punctul a) astfel încât să se rejeteze armonicile 2, 3 și 4 ale frecvenței f_l . Să se determine și defazajele introduse de circuitele de adaptare.
- c) Poate fi rejectată frecvența $\frac{1}{2}f_l$ cu circuitele din Figura 5.17? Pentru calculul numeric se vor considera datele obținute la punctul a).

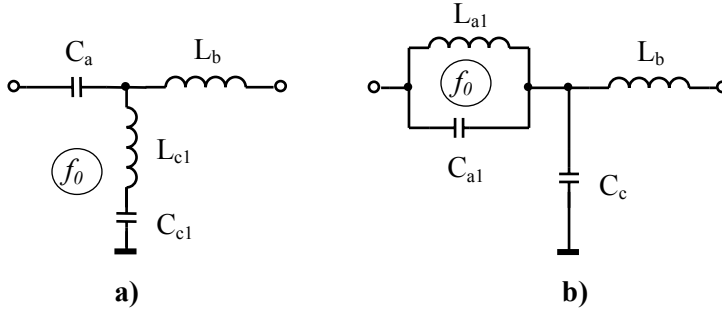


Figura 5.17 Circuite de adaptare pentru problema 5.2.10 c).

Rezolvare:

a) Relațiile de proiectare sunt date de (5.1.6), din care rezultă:

A. Pentru $\varphi_1 = 45^\circ \Rightarrow K_{CT} = \sqrt{2}$, deci semnul radicalului $\sqrt{K_{CT}^2 - 1}$ din relațiile (5.1.6) este pozitiv (Tabelul 5.1). În acest caz se obține:

$$\begin{cases} X_c = 141\Omega > 0 \Rightarrow L_c = \frac{X_c}{2\pi f_l} = 44.8\mu H \\ X_a = -91\Omega < 0 \Rightarrow C_a = \frac{1}{2\pi f_l |X_a|} = 3.5\mu F \\ X_b = 59\Omega > 0 \Rightarrow L_b = \frac{X_b}{2\pi f_l} = 18.8\mu H \end{cases}$$

Circuitul proiectat este ilustrat în Figura 5.18a.

B. Pentru $\varphi_2 = -70^\circ \Rightarrow K_{CT} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = -1.06$, deci semnul radicalului $\sqrt{K_{CT}^2 - 1}$ din relațiile (5.1.6) este negativ (Tabelul 5.1). În acest caz, se obține:

$$\begin{cases} X_c = -106\Omega < 0 \Rightarrow C_c = 3\mu F \\ X_a = 88.4\Omega > 0 \Rightarrow L_a = 28.1\mu H \\ X_b = 35.7\Omega > 0 \Rightarrow L_b = 11.4\mu H \end{cases}$$

Circuitul proiectat este ilustrat în Figura 5.18b.

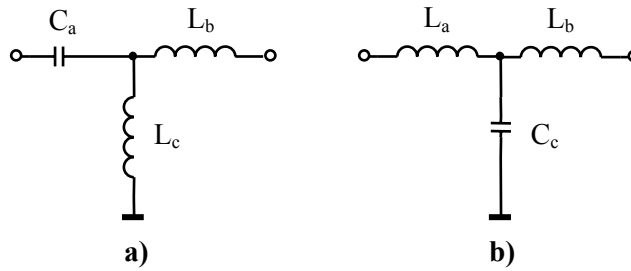


Figura 5.18 Circuite de adaptare a) $\varphi_1 = 45^\circ$; b) $\varphi_2 = -70^\circ$

b) Pentru rejecția parametrilor, se studiază graficele din Figura 5.5. În cazul circuitului cu $\varphi_1 = 45^\circ$, este posibilă rejecția frecvențelor dorite modificând doar reactanța X_b . Circuitul rejektor este ilustrat în Figura 5.19.

Reactanța echivalentă este $X_b = X_{b1} + X_{b2} + X_{b3}$, în care pentru simplitate se consideră $X_{b1} = X_{b2} = X_{b3}$.

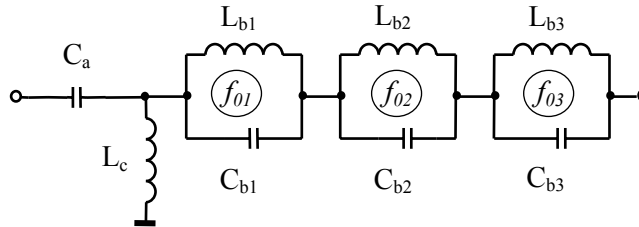


Figura 5.19. Circuitul de adaptare modificat pentru cazul $\varphi_1 = 45^\circ$

În aceste condiții, parametrii fiecărui grup LC vor fi:

- pentru grupul L_{b1}, C_{b1} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{b1}} = \frac{1}{\omega_l L_{b1}} - \omega_l C_{b1} \\ \omega_{01}^2 L_{b1} C_{b1} = 1 \\ \omega_{01} = 2\omega_l \\ X_{b1} = \frac{X_b}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{b1} = \frac{X_{b1}}{\omega_l} \cdot \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{01}^2}\right) = \frac{X_b}{4\omega_l} = 2.8\mu H \\ C_{b1} = \frac{1}{\omega_l X_{b1} \cdot \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_l^2} - 1\right)} = \frac{1}{\omega_l X_b} = 9nF \end{cases}$$

- pentru grupul L_{b2}, C_{b2} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{b2}} = \frac{1}{\omega_l L_{b2}} - \omega_l C_{b2} \\ \omega_{01}^2 L_{b2} C_{b2} = 1 \\ \omega_{01} = 3\omega_l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{b2} = \frac{X_{b2}}{\omega_l} \cdot \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{02}^2}\right) = \frac{8}{27} \cdot \frac{X_b}{\omega_l} = 3.36\mu H \\ C_{b2} = \frac{1}{\omega_l X_{b2} \cdot \left(\frac{\omega_{02}^2}{\omega_l^2} - 1\right)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\omega_l X_b} = 3.34nF \end{cases}$$

- pentru grupul L_{b3}, C_{b3} :

$$\begin{cases} \frac{1}{X_{b3}} = \frac{1}{\omega_l L_{b3}} - \omega_l C_{b3} \\ \omega_{01}^2 L_{b3} C_{b3} = 1 \\ \omega_{01} = 4\omega_l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{b3} = \frac{X_{b3}}{\omega_l} \cdot \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_{03}^2}\right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{X_b}{\omega_l} = 3.55\mu H \\ C_{b3} = \frac{1}{\omega_l X_{b3} \cdot \left(\frac{\omega_{03}^2}{\omega_l^2} - 1\right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\omega_l X_b} = 1.8nF \end{cases}$$

În cazul defazajului $\varphi_2 = -70^\circ$, conform Figurii 5.5 se pot rejecta frecvențele dorite modificând reactanțele X_a , X_b și X_c . Circuitul rejecor este dat în Figura 5.20.

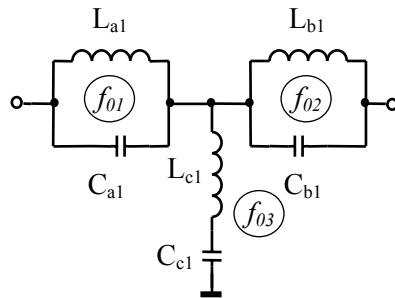


Figura 5.20 Circuitul de adaptare modificat pentru cazul $\varphi_2 = -70^\circ$

Pentru grupul $L_{a1}, C_{a1}, \omega_{01} = 2\omega_1$, iar parametrii se determină din (5.1.9):

$$\begin{cases} L_{a1} = \frac{X_a}{\omega_1} \cdot \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{X_a}{\omega_1} = 21.1 \mu H \\ C_{a1} = \frac{1}{\omega_1 X_a \cdot \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_1^2} - 1 \right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\omega_1 X_a} = 1.2 nF \end{cases}$$

Pentru grupul $L_{b1}, C_{b1}, \omega_{02} = 3\omega_1$ și rezultă:

$$\begin{cases} L_{b2} = 25 \mu H \\ C_{b2} = 0.45 nF \end{cases}$$

Pentru grupul $L_{c1}, C_{c1}, \omega_{03} = 4\omega_1$, iar parametrii se determină din (5.1.8):

$$\begin{cases} L_{c1} = 2.25 \mu H \\ C_{c1} = 2.8 nF \end{cases}$$

Defazaajul introdus de circuitul de adaptare se determină din expresia lui K_{CT} :

$$K_{CT} = \frac{1}{\sin \varphi} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{1}{K_{CT}}$$

Pentru fiecare caz în parte se obține:

$$\text{A. } K_{CT} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$\text{B. } K_{CT} = -\sqrt{2} \Rightarrow \varphi = -45^\circ$$

Alte variante posibile pentru circuitul de adaptare cu rejecția armonicilor 2, 3 și 4 sunt ilustrate în Figura 5.21.

- c) Din Figura 5.5 se constată că rejecția frecvenței $\frac{1}{2}f_1$ ar fi posibilă dacă $X_c > 0$ pentru circuitul din Figura 5.17a, respectiv $X_a < 0$ pentru circuitul

din Figura 5.17b. Conform rezultatelor de la punctul a), niciunul dintre circuite (Figura 5.17) nu îndeplinește condiția de rejecție.

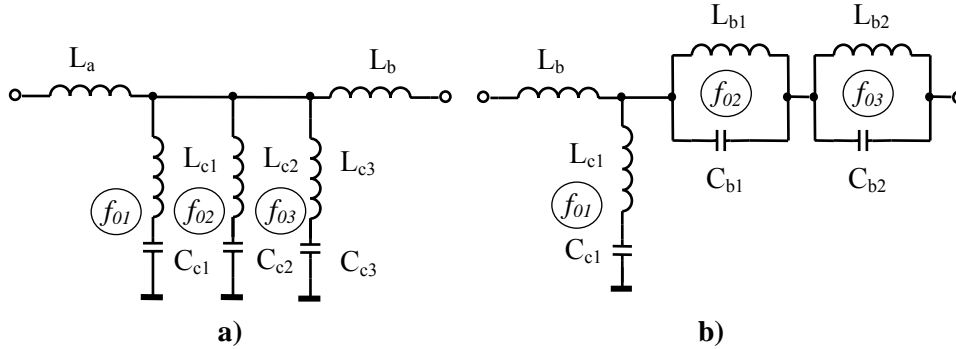


Figura 5.21. Alte circuite de rejecție ($\varphi_2 = -70^\circ$)

5.2.11 Să se proiecteze un circuit de adaptare în Π conectat între o sursă cu $R_g = 10\Omega$ și o sarcină $R_s = 40\Omega$, care să introducă un defazaj de 30° la frecvența de lucru $f_l = 1\text{MHz}$.

Rezolvare:

Factorul de cuplaj este, în acest caz:

$$K_{CI} = -\sin(\varphi) = -0.5$$

În (5.1.7) semnul ales conform Tabelului 5.1 este “-“ și rezultă reactanțele circuitului adaptor (Figura 5.22):

$$\begin{cases} X_C = -0.5\sqrt{10 \cdot 40} = -10\Omega < 0 \Rightarrow C_C = 16\text{nF} \\ \frac{1}{X_A} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{3} = \frac{1-\sqrt{3}}{10}\Omega < 0 \Rightarrow C_A = 11.6\text{nF} \\ \frac{1}{X_B} = \frac{1}{10} - \frac{1}{40}\sqrt{3} = \frac{4-\sqrt{3}}{40}\Omega > 0 \Rightarrow L_B = 0.3\mu\text{H} \end{cases}$$

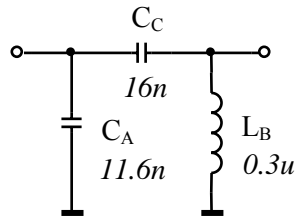


Figura 5.22. Circuitul adaptor proiectat

5.2.12 Se consideră un circuit adaptor în Π .

- a) Să se proiecteze un circuit de adaptare conectat între o sursă cu $R_g=200\Omega$ și o sarcină cu $R_s=50\Omega$ la frecvența de lucru $f_l=10MHz$. Se consideră factorul de cuplaj $K_{C\Pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- b) Să se reproiecteze circuitul de la punctul a) astfel încât să se rejeteze frecvențele $f_{o1}=1MHz$ și $f_{o2}=20MHz$.

Rezolvare:

a)

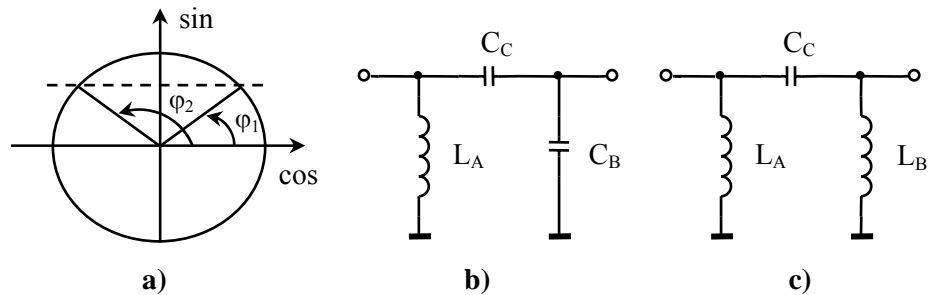


Figura 5.23. a) Defazajele posibile: φ_1 și φ_2 ($\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$); b) Circuitul de adaptare cu $\varphi_1 = 45^\circ$; c) Circuitul de adaptare cu $\varphi_2 = 135^\circ$

Din expresia factorului de cuplaj $K_{C\Pi}$ rezultă că există două unghiuri care au aceeași valoare în sinus (Figura 5.23a), prin urmare există două circuite de adaptare posibile. Unul va introduce un defazaj de $\varphi_1 = 45^\circ$ (Figura 5.23b), iar altul, un defazaj de $\varphi_2 = 135^\circ$ (Figura 5.23c).

Pentru circuitul cu $\varphi_1 = 45^\circ$ semnul în (5.1.7) se alege “-“ (Tabelul 5.1) și se obțin reactanțele:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C = -\frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{200 \cdot 50} = -70.7 \Omega < 0 \Rightarrow C_C = 0.22 \text{ nF} \\ X_A = \frac{I}{\frac{1}{70.7} - \frac{1}{200}} = 109.35 \Omega > 0 \Rightarrow L_A = 1.7 \mu\text{F} \\ X_B = \frac{I}{\frac{1}{70.7} - \frac{1}{50}} = -170.7 \Omega < 0 \Rightarrow C_B = 93.2 \text{ pF} \end{array} \right.$$

Pentru circuitul cu $\varphi_2 = 135^\circ$, semnul în (5.1.7) este “+” și se obțin reactanțele:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C = -\frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{200 \cdot 50} = -70.7 \Omega < 0 \Rightarrow C_C = 0.22 \text{ nF} \\ X_A = \frac{I}{\frac{1}{70.7} + \frac{1}{200}} = 52.2 \Omega > 0 \Rightarrow L_A = 0.8 \mu\text{H} \\ X_B = \frac{I}{\frac{1}{70.7} + \frac{1}{50}} = 29.3 \Omega > 0 \Rightarrow L_B = 0.5 \mu\text{H} \end{array} \right.$$

- b) Pentru adaptorul din Figura 5.23b, se constată (vezi Figura 5.5) că este posibilă rejecția frecvențelor f_{01} și f_{02} , iar circuitele rejectoare sunt date în Figura 5.24. Pentru adaptorul din Figura 5.23c se constată că se poate rejecția numai frecvența f_{01} , nu și frecvența f_{02} .

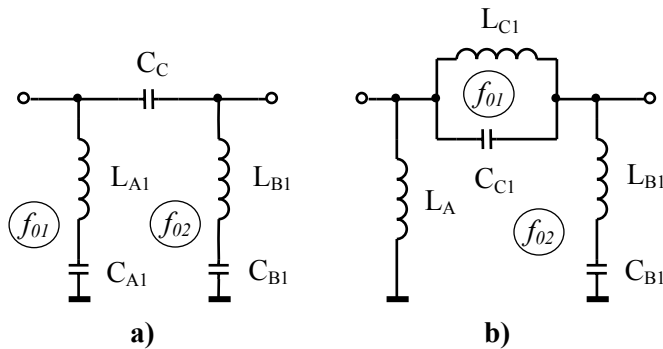


Figura 5.24. Circuite rejectoare cu $\varphi_1 = 45^\circ$.

Din (5.1.8) și (5.1.9) rezultă parametrii circuitelor rejectoare (Figura 5.24 a, b):

$$\begin{cases} L_{A1} = \frac{100}{99} \cdot \frac{X_A}{\omega_l} = 1.7 \mu H \\ C_{A1} = 99 \cdot \frac{1}{\omega_l X_A} = 14.4 nF \\ L_{B1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{X_B}{\omega_l} = 1 \mu H \\ C_{B1} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\omega_l X_B} = 70 pF \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{C1} = -99 \cdot \frac{X_C}{\omega_l} = 0.11 mH \\ C_{C1} = -\frac{100}{99} \cdot \frac{1}{\omega_l X_C} = 0.23 nF \end{cases}$$

5.2.13 Pentru circuitul de adaptare în T (Figura 5.25a) să se determine expresia randamentului, dacă se presupune că bobinele nu sunt ideale și au factorul de calitate Q .

Rezolvare:

La adaptare, puterea pe rezistența de sarcină R_s este egală cu puterea pe rezistența sursei R_g :

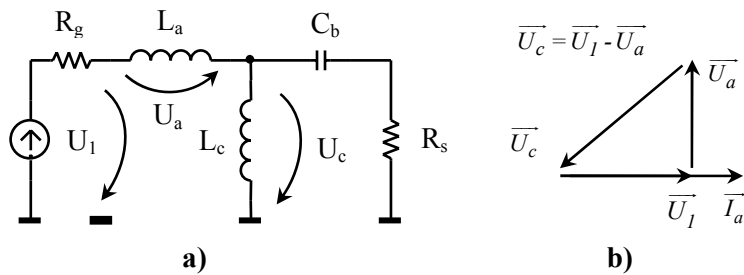


Figura 5.25. a) Circuit de adaptare în T ;
b) Compunerea vectorială a tensiunilor

$$P = R_g I_{aef}^2 = \frac{U_{1ef}^2}{R_g} = R_s I_{bef}^2$$

Pierderile în cele două bobine (L_a, L_c) sunt:

$$P_a = R_a \cdot I_{aef}^2 = \frac{U_{aef}^2}{R_a}, \quad P_c = R_c \cdot I_{cef}^2 = R_c \cdot \frac{U_{cef}^2}{R_c^2 + X_c^2}$$

Rezistențele parazite ale bobinelor se pot exprima în funcție de factorul de calitate Q :

$$R_a = \frac{X_a}{Q}, \quad R_c = \frac{X_c}{Q}$$

Scriind teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru bucla R_g, L_a, L_c :

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{U}_a + \overline{U}_c \\ U_{cef}^2 &= U_{1ef}^2 + U_{aef}^2 \end{aligned}$$

tensiunea pe bobina L_a este defazată înainte cu $\pi/2$ față de curent (Figura 5.25b). Se poate scrie astfel tensiunea pe bobina L_c :

$$U_{cef}^2 = P \cdot R_g + (R_a^2 + X_a^2) \cdot I_{aef}^2 \Big|_{R_a \ll X_a} = \frac{P}{R_g} \cdot (R_g^2 + X_a^2)$$

Puterile disipate pe cele două bobine vor fi:

$$P_a = \frac{P \cdot X_a}{R_g \cdot Q}, \quad P_c = \frac{P}{R_g \cdot X_c \cdot Q} \cdot (R_g^2 + X_a^2)$$

Se poate determina acum randamentul circuitului de adaptare din Figura 5.25a:

$$\eta = \frac{P - P_a - P_c}{P} = 1 - \frac{I}{Q \cdot R_g} \cdot \left[X_a + \frac{R_g^2 + X_a^2}{X_c} \right]$$

5.2.14 Să se proiecteze un circuit de adaptare în T pentru a adapta o sursă cu impedanța internă $Z_g = 4 + j2\pi f_l \cdot 10^{-5} (\Omega)$ la o sarcină cu impedanța

$Z_s = 1 - j \frac{1}{4\pi f_i \cdot 10^{-6}}$ (Ω) la frecvența de lucru de 16kHz . Circuitul adaptor va introduce un defazaj de $\varphi = 30^\circ$.

Rezolvare:

Circuitul de adaptare este prezentat în Figura 5.26.

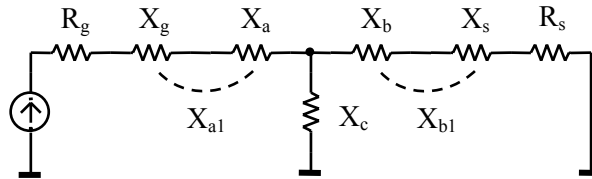


Figura 5.26. Adaptarea impedanțelor complexe

Separând partea reală de cea imaginară a impedanțelor generatorului, respectiv sarcinii, apoi grupând reactanțele acestora cu reactanțele circuitului de adaptare, problema adaptării se reduce la cazul tipic de adaptare cu elementele X_{al} , X_{bl} , X_{cl} . Astfel, X_{al} și X_{bl} vor fi:

$$\begin{cases} X_{al} = X_g + X_a \\ X_{bl} = X_g + X_s \end{cases}$$

Pentru adaptarea rezistențelor R_g și R_s , circuitul adaptor a fost proiectat în **problema 5.2.6**, cu valorile reactanțelor:

$$\begin{cases} X_c = -4\Omega \\ X_{al} = -2.92\Omega \\ X_{bl} = 2.27\Omega \end{cases}$$

Circuitul de adaptare, în acest caz, va fi compus din reactanțele:

$$\begin{cases} X_a = X_{al} - X_g \\ X_b = X_{bl} - X_s \end{cases}$$

La $f_i = 16\text{kHz}$ se obține:

$$\begin{cases} X_g = 32 \cdot 10^{-2} \pi = 1 \Omega \\ X_s = -\frac{I}{64 \cdot 10^{-3} \pi} = -5 \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_a = -4 \Omega \\ X_b = 7.3 \Omega \end{cases}$$

iar valorile parametrilor rezultă:

$$\begin{cases} C_a = \frac{I}{2\pi f_l \cdot |X_a|} = 2.5 \mu F \\ L_b = \frac{X_b}{2\pi f_l} = 72.6 \mu H \end{cases}$$

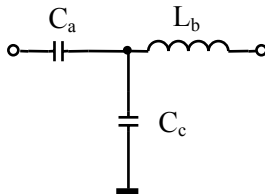


Figura 5.27. Circuitul de adaptare rezultat

5.2.15 Se consideră circuitul din Figura 5.28. Știind valorile parametrilor L_1 , L_2 , R_g și R_L , să se determine C_1 și C_2 astfel încât să se realizeze adaptarea sursei cu R_g la sarcina R_L , la frecvența f_0 a generatorului. Se vor considera valorile numerice: $R_g=100\Omega$, $R_L=50\Omega$, $L_1=1mH$, $L_2=10mH$ și $f_0=10kHz$.

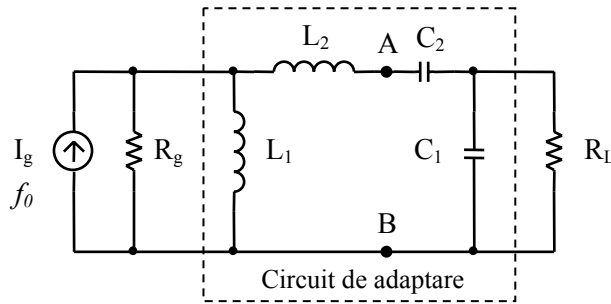


Figura 5.28. Circuitul pentru problema 5.2.15

Rezolvare:

Se descompune circuitul în două părți (între punctele A și B), după care folosim metoda transformării serie-paralel, paralel-serie (Figura 5.3), se transformă circuitul până la o formă ireductibilă pentru a observa mai ușor condițiile de adaptare (egalitatea rezistențelor echivalente, compensarea reactanțelor echivalente).

Transformarea ramurii de circuit cu condensatoare este ilustrată în Figura 5.29, iar elementele echivalente rezultă din (5.1.5):

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_{serie} \cdot \left(1 + \frac{X_{serie}^2}{R_{serie}^2} \right) = R_{serie} \cdot (1 + Q_{serie}^2) \\ X_{paralel} = X_{serie} \cdot \left(1 + \frac{I}{Q_{serie}^2} \right) \end{cases}$$

Pentru simplitatea calculului, considerăm un factor de calitate mare ($Q_{serie} \geq 10$) și se obține:

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_{serie} \cdot Q_{serie}^2 \\ X_{paralel} = X_{serie} \end{cases}$$

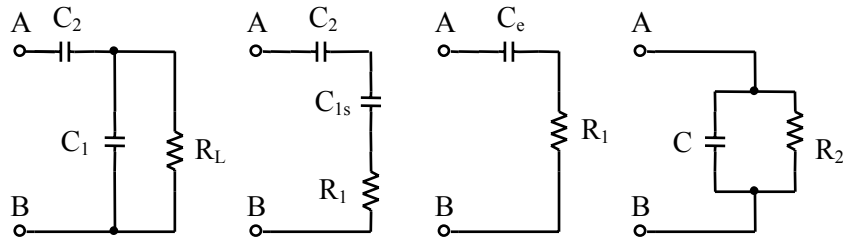


Figura 5.29 Etapele transformării circuitului între punctele A, B spre sarcina R_L

Pentru circuitul paralel C_1, R_L se scriu relațiile de transformare:

$$\begin{cases} R_{serie} = R_l = \frac{R_L}{Q_{paralel}^2} \\ X_{serie} = X_{paralel} = X_{C_1} \\ Q_{paralel}^2 = \omega_0^2 R_L^2 C_1^2 \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} R_{serie} = R_1 = \frac{I}{\omega_0^2 R_L C_1^2} \\ C_{serie} = C_{1s} = C_1 \end{cases}$$

Se observă ca s-a format o conexiune serie între două condensatoare (C_2, C_{1s}), care se poate reduce la o valoare echivalentă:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Pentru circuitul serie C_e, R_1 se scriu relațiile de transformare:

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_2 = R_1 \cdot Q_{serie}^2 \\ X_{paralel} = X_e = X_C \\ Q_{serie}^2 = \frac{I}{\omega_0^2 R_1^2 C_e^2} \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_2 = \frac{I}{\omega_0^2 R_1 C_e^2} \\ C_{paralel} = C_e = C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

Se înlocuiește expresia lui R_1 în expresia lui R_2 și se obține:

$$R_2 = \frac{I}{\omega_0^2 \cdot \frac{I}{\omega_0^2 R_L C_1^2} \cdot \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)^2} = R_L \cdot \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right)^2$$

Pe ramura cu bobine și sursă transformarea este ilustrată în Figura 5.30, respectiv elementele echivalente rezultă din (5.1.5).

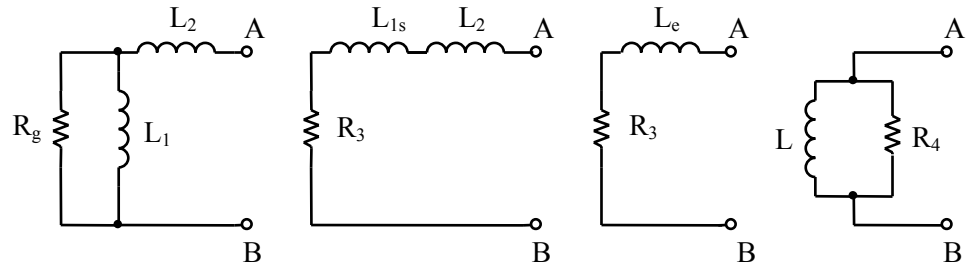


Figura 5.30 Etapele transformării circuitului între punctele A, B spre sursă

Pentru circuitul paralel L_1, R_g se scriu relațiile:

$$\begin{cases} R_{serie} = R_3 = \frac{R_g}{Q_{paralel}^2} \\ X_{serie} = X_{paralel} = X_{L_1} \\ Q_{paralel} = \frac{R_g}{\omega_0 L_1} \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} R_{serie} = R_3 = \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R_g} \\ L_{serie} = L_{1s} = L_1 \end{cases}$$

Se observă ca s-a format o conexiune serie între două bobine (L_2, L_{1s}) care se reduce la o valoare echivalentă:

$$L_e = L_1 + L_2$$

Pentru circuitul serie L_e, R_3 se scriu relațiile:

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_4 = R_3 \cdot Q_{serie}^2 \\ X_{paralel} = X_e = X_L \\ Q_{serie} = \frac{\omega_0 L_e}{R_3} \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} R_{paralel} = R_4 = \frac{\omega_0^2 L_e^2}{R_3} \\ L_{paralel} = L_e = L = L_1 + L_2 \end{cases}$$

Se înlocuiește expresia lui R_3 în expresia lui R_4 și se obține:

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{\omega_0^2 L_e^2}{R_3^2} = R_g \cdot \frac{\omega_0^2 (L_1 + L_2)^2}{\omega_0^2 L_1^2} = R_g \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)^2$$

În final, se pun condițiile de adaptare (egalitatea rezistențelor și compensarea reactanțelor → transfer maxim de putere):

$$\begin{cases} R_g = R_{intrare} \\ R_L = R_{ieșire} \\ X_{L_{ech}} = X_{C_{ech}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_4 = R_2 \\ X_L = X_C \end{cases}$$

din care rezultă expresiile capacităților C_1 și C_2 :

$$\begin{cases} R_g \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)^2 = R_L \cdot \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)^2 \\ \omega_0^2 \cdot (L_1 + L_2) \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{I}{\omega_0^2 L_1} \cdot \sqrt{\frac{R_g}{R_L}} \\ C_2 = \frac{I}{\omega_0^2 \cdot \left[L_1 + L_2 - L_1 \sqrt{\frac{R_L}{R_g}}\right]} \end{cases}$$

Circuitul rezultat în urma transfigurării este dat în Figura 5.31.

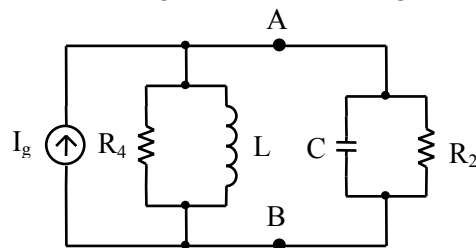


Figura 5.31 Circuitul echivalent obținut

Cu valorile numerice din enunțul problemei se obține $C_1 = 0.36\mu F$, $C_2 = 24.6nF$.

5.2.16 Să se determine atenuarea minimă pe care o poate introduce un atenuator în T (Figura 5.32) și parametrii corespunzători, dacă lucrează adaptat între rezistențele $R_g = 75\Omega$ și $R_s = 50\Omega$.

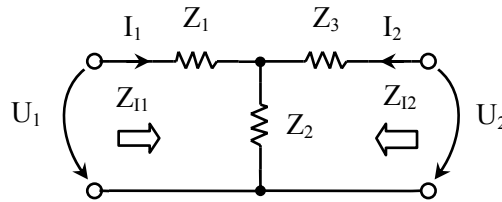


Figura 5.32. Atenuator în T

Rezolvare:

Impedanțele diportului pot fi exprimate utilizând parametrii fundamentali, astfel:

$$Z_1 = \frac{A_{11} - I}{A_{21}}, \quad Z_2 = \frac{I}{A_{21}}, \quad Z_3 = \frac{A_{22} - I}{A_{21}} \quad (5.2.4)$$

unde

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{12}}} \cdot ch\theta, \quad A_{21} = \frac{sh\theta}{\sqrt{Z_{11}Z_{12}}}, \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{12}}{Z_{11}}} \cdot ch\theta \quad (5.2.5)$$

Un atenuator este pur rezistiv, dacă constanta de transfer θ este reală (defazajul introdus $b_I = 0$, $Z_{11} = R_g$ și $Z_{12} = R_s$).

Din (5.2.4) și (5.2.5) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} Z_1 = R_1 = Z_2 \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g}{R_s}} \cdot ch(a_I) - 1 \right) \\ Z_2 = R_2 = \frac{\sqrt{R_g R_s}}{sh(a_I)} \\ Z_3 = R_3 = Z_2 \cdot \left(\sqrt{\frac{R_s}{R_g}} \cdot ch(a_I) - 1 \right) \end{cases}$$

unde $\theta_l = a_l$. Deoarece $ch(a_l) \geq 1$ și $R_g > R_s$ rezultă că $\sqrt{\frac{R_g}{R_s}} \cdot ch(a_l) - 1 > 0$, sau $R_l > 0$. Rezistența R_3 va fi pozitivă doar dacă $\sqrt{\frac{R_g}{R_s}} \leq ch(a_l)$. Deci atenuatorul care lucrează adaptat între R_g și R_s poate avea o atenuare minimă $a_{min} = \operatorname{arcch} \sqrt{\frac{R_g}{R_s}} = 0.66 \text{ Np} \Rightarrow -3.63 \text{ dB}$. Această valoare impune $R_3 = 0$, deci atenuatorul va avea o structură în Γ inversat. Ceilalți doi parametri sunt:

$$R_1 = Z_2 \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g}{R_s}} \cdot ch(a_{min}) - 1 \right) = 43.3 \Omega, \quad R_2 = \frac{\sqrt{R_g R_s}}{sh(a_{min})} = 86.6 \Omega$$

5.3 Probleme propuse

5.3.1. Să se determine inductivitatea L_2 a secundarului unui transformator ideal astfel încât acesta să realizeze adaptarea unei surse cu $R_g = 2 \Omega$ la o sarcină cu $R_s = 5 \Omega$. Inductivitatea primarului este $L_1 = 1 \text{ H}$. Cât este raportul de transformare n în acest caz?

Soluție: $L_2 = 2.5 \text{ H}, n = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

5.3.2. Pentru circuitul din Figura 5.1 să se determine inductivitatea primarului (L_1) știind că secundarul are inductivitatea $L_2 = 4 \text{ H}$, iar raportul de transformare este $n = 0.5$. Ce sarcină se poate conecta în primarul transformatorului astfel încât transferul de putere să fie maxim? Se cunoaște rezistența de sarcină conectată în secundar $R_s = 20 \Omega$.

Soluție: $L_1 = 1 \text{ H}, R_g = 5 \Omega$.

5.3.3. Să se proiecteze un circuit de adaptare în Γ , conectat între o sursă cu $R_g = 100 \Omega$ și o sarcină $R_s = 75 \Omega$ la frecvența de lucru 10 MHz .

Soluție: Figura 5.2a: $X_L = 25\sqrt{3}, X_C = -100\sqrt{3} \Rightarrow L = 0.14 \mu\text{H}, C = 92 \text{ pF}$

5.3.4. Să se proiecteze un circuit de adaptare în T , conectat între o sursă cu $R_g=10\Omega$ și o sarcină $R_s=50\Omega$ la frecvența de lucru $5MHz$.

Soluție: Figura 5.2b: $X_L = 25\Omega$, $X_C = -20\Omega \Rightarrow L = 0.8\mu H$, $C = 1.6nF$

5.3.5. Să se reprojeteze circuitul din Figura 5.33a astfel încât să se rejeteze frecvența $\omega_0=2rad/s$, dacă frecvența de lucru este $\omega_l=1rad/s$.

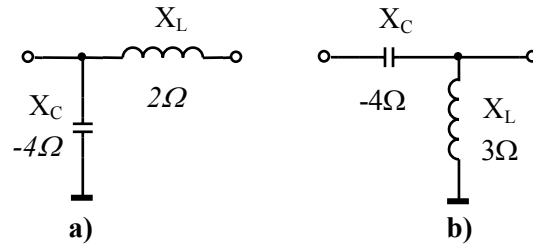


Figura 5.33 Circuite de adaptare a) problema 5.3.5; b) problema 5.3.8

Soluție: Există două variante: LC paralel cu $L_p = \frac{3}{2}H$, $C_p = \frac{1}{6}F$ sau LC serie cu $L_s = \frac{4}{3}H$, $C_s = \frac{3}{16}F$.

5.3.6. Să se proiecteze un circuit de adaptare în T , conectat între o sursă cu rezistența $R_g=175\Omega$ și o sarcină $R_s=25\Omega$ la frecvența de lucru $f_l=5kHz$. Circuitul adaptor va introduce un defazaj de 120° .

Soluție:

$$\begin{cases} X_c = 76.4\Omega > 0 \\ X_a = -177.4\Omega < 0 \\ X_b = -90.8\Omega < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_c = 2.4mH \\ C_a = 0.35\mu F \\ C_b = 0.42\mu F \end{cases}$$

5.3.7. Să se proiecteze un circuit de adaptare în II , conectat între o sursă cu rezistența $R_g=80\Omega$ și o sarcină $R_s=20\Omega$ la frecvența de lucru $f_l=1MHz$. Circuitul adaptor va introduce un defazaj de 60° .

Soluție: $K_{CII} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $X_C = -20\sqrt{3}\Omega$, $X_A = \frac{80\sqrt{3}}{3}\Omega$, $X_B = \infty$. În acest caz

circuitul în Π se transformă într-o structură în Γ cu valorile parametrilor: $C_C = 4.6nF$ și $L_A = 7.35\mu H$, iar ramura X_b rămâne neconectată.

5.3.8. Să se reprojeteze circuitul din Figura 5.33b astfel încât să se rejeteze frecvențele $\omega_{01}=1rad/s$, $\omega_{02}=2rad/s$ și $\omega_{03}=3rad/s$, dacă frecvența de lucru este $\omega_l=4rad/s$.

Soluție: Există două variante:

$$LC \text{ paralel: } \left\{ \begin{array}{l} X_{C1} = X_{C2} = X_{C3} \\ X_{C1}: \begin{cases} L_{p1} = 5H \\ C_{p1} = \frac{1}{5}F \end{cases} \\ X_{C2}: \begin{cases} L_{p2} = 1H \\ C_{p2} = \frac{1}{4}F \end{cases} \\ X_{C3}: \begin{cases} L_{p3} = \frac{7}{27}H \\ C_{p3} = \frac{3}{7}F \end{cases} \end{array} \right. , LC \text{ serie: } \left\{ \begin{array}{l} X_{L1} = X_{L2} = X_{L3} \\ X_{L1}: \begin{cases} L_{s1} = \frac{4}{15}H \\ C_{s1} = \frac{15}{4}F \end{cases} \\ X_{L2}: \begin{cases} L_{s2} = \frac{1}{3}H \\ C_{s2} = \frac{3}{4}F \end{cases} \\ X_{L3}: \begin{cases} L_{s3} = \frac{4}{7}H \\ C_{s3} = \frac{7}{36}F \end{cases} \end{array} \right.$$

5.3.9. Să se proiecteze un circuit de adaptare în Π , conectat între o sursă cu rezistența $R_g=50\Omega$ și o sarcină $R_s=25\Omega$ la frecvența de lucru $f_l=800Hz$. Se va considera coeficientul de cuplaj $K_{C\Pi} = -\frac{1}{2}$.

Soluție: Există două variante:

$$\varphi_l = 30^\circ : \left\{ \begin{array}{l} X_C = \frac{-25\sqrt{2}}{2}\Omega < 0 \Rightarrow C_C = 11.2\mu F \\ X_A = \frac{50\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}}\Omega > 0 \Rightarrow L_A = 9mH \\ X_B = \frac{25\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}}\Omega < 0 \Rightarrow C_B = 2.5\mu F \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 = 150^\circ : \begin{cases} X_C = \frac{-25\sqrt{2}}{2} \Omega < 0 \Rightarrow C_C = 11.2 \mu F \\ X_A = \frac{50\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}} \Omega > 0 \Rightarrow L_A = 2.2 mH \\ X_B = \frac{25\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}} \Omega > 0 \Rightarrow L_B = 1.6 mH \end{cases}$$

5.3.10. Să se reprojeteze circuitul din Figura 5.34a astfel încât să se rejeteze frecvența $\omega_0=2rad/s$, dacă frecvența de lucru este $\omega_l=1rad/s$.

Soluție: Există două variante: LC paralel (ramura X_a) cu $L_p = \frac{3}{2}H$, $C_p = \frac{1}{6}F$ sau LC serie (ramura X_c) cu $L_s = \frac{1}{3}H$, $C_s = \frac{3}{4}F$.

5.3.11. Să se reprojeteze circuitul din Figura 5.34b astfel încât să se rejeteze frecvențele $\omega_{01}=2rad/s$ și $\omega_{02}=4rad/s$, dacă frecvența de lucru este $\omega_l=3rad/s$.

Soluție: Există două variante:

$$\omega_{01} : \begin{cases} \text{ramura } X_b : \begin{cases} L_{b1} = \frac{7}{12} H \\ C_{b1} = \frac{3}{28} F \end{cases} \\ \text{ramura } X_c : \begin{cases} L_{c1} = \frac{9}{5} H \\ C_{c1} = \frac{5}{36} F \end{cases} \end{cases}, \quad \omega_{02} : \begin{cases} \text{ramura } X_b : \begin{cases} L_{b1} = \frac{7}{12} H \\ C_{b1} = \frac{3}{28} F \end{cases} \\ \text{ramura } X_a : \begin{cases} L_{a1} = \frac{5}{3} H \\ C_{a1} = \frac{3}{20} F \end{cases} \end{cases}$$

5.3.12. Să se reprojeteze circuitul din Figura 5.34c astfel încât să se rejeteze frecvențele $\omega_{01}=1rad/s$ și $\omega_{02}=2rad/s$, dacă frecvența de lucru este $\omega_l=0.5rad/s$.

Soluție: Modificarea este posibilă numai pe ramura X_a : $L_{a1} = \frac{3}{2}H$, $C_{a1} = \frac{2}{3}F$

și $L_{a2} = \frac{15}{4}H$, $C_{a2} = \frac{1}{15}F$.

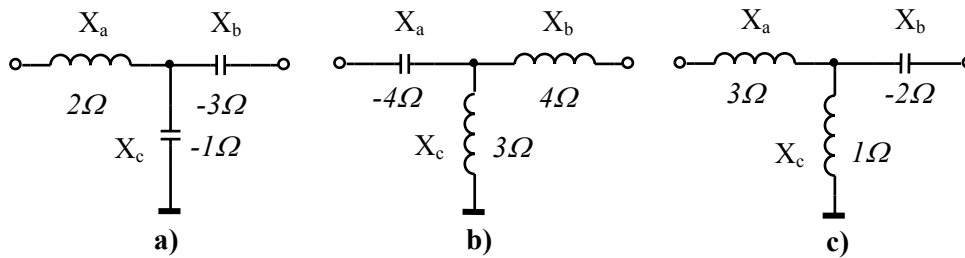


Figura 5.34 Circuite de adaptare a) problema 5.3.10; b) problema 5.3.11; c) problema 5.3.12

5.3.13. Se consideră circuitul de adaptare din Figura 5.35a. Să se determine rezistențele generatorului și a sursei pentru care se realizează adaptarea.

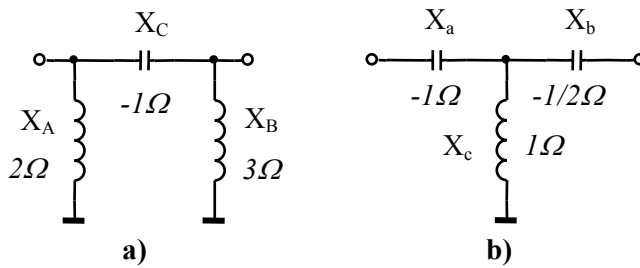


Figura 5.35. Circuite de adaptare a) problema 5.3.13, b) problema 5.3.14

Soluție: Din (5.1.7) rezultă: $R_g = \sqrt{2}$, $R_s = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $K_{CII} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.3.14. Se consideră circuitul de adaptare din Figura 5.35b. Să se determine rezistențele generatorului și a sursei pentru care se realizează adaptarea.

Soluție: Din (5.1.6) rezultă: $R_g = \sqrt{3}$, $R_s = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $K_{CII} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

5.3.15. Să se proiecteze un circuit de adaptare în T pentru a adapta o sursă cu impedanța internă $Z_g = (5000 - j \cdot 580)\Omega$ la o sarcină cu $R_s = 500\Omega$, la

frecvența de lucru de 100kHz . Circuitul adaptor va introduce un defazaj de $\varphi = 45^\circ$.

Soluție:

$$\begin{cases} X_c = -1.4k\Omega \\ X_{a1} = 6.4k\Omega \\ X_b = 2k\Omega \\ X_a = X_{a1} - X_g = 7k\Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_c = 1.12\text{nF} \\ L_a = 11.14\text{mH} \\ L_b = 3\text{mH} \end{cases}$$

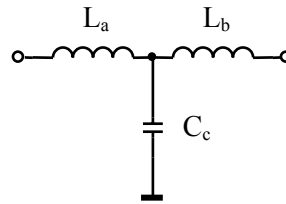


Figura 5.36. Circuitul de adaptare rezultat

5.3.16. Să se determine randamentul circuitului de adaptare proiectat la problema 5.2.9, dacă bobinele au factorul de calitate $Q=100$. Cum se modifică randamentul dacă se consideră pierderea și pe condensator (C_b)?

Soluție: Expresia randamentului s-a dedus la **problema 5.2.13**: $\eta = 96.83\%$.

Cu pierdere și pe C_b : $R_b = \frac{Q}{|X_b|}$, $P_b = \frac{P \cdot Q}{R_s \cdot |X_b|}$, $\eta = \frac{P - P_a - P_b - P_c}{P} = 91.78\%$

5.3.17. Determinați expresia randamentului circuitelor de adaptare în Π , obținute la **problema 5.3.9**, dacă bobinele au factorul de calitate $Q=100$.

Soluție: Pentru circuitul cu $\varphi_1=30^\circ$:

$$P_A = R_A \cdot \frac{U_{Aef}^2}{R_A^2 + X_A^2} \Big|_{R_A \ll X_A} = \frac{P \cdot R_g}{Q \cdot X_A} \Rightarrow \eta = \frac{P - P_A}{P} = 1 - \frac{R_g}{Q \cdot X_A} = 0.989$$

Pentru circuitul cu $\varphi_2=150^\circ$:

$$P_A = \frac{P \cdot R_g}{Q \cdot X_A}, P_B = \frac{P \cdot R_g}{Q \cdot X_B} \Rightarrow \eta = \frac{P - P_A - P_B}{P} = 1 - \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{R_g}{X_A} + \frac{R_s}{X_B} \right) = 0.923$$

5.3.18. Să se determine expresia randamentului circuitelor de adaptare în T din Figura 5.37. Bobinele se consideră cu factor de calitate Q .

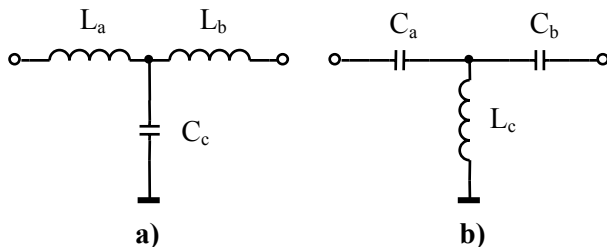


Figura 5.37. Circuite de adaptare pentru problema 5.3.18

Soluție: a) $P_a = \frac{P \cdot X_a}{R_g \cdot Q}$, $P_b = \frac{P \cdot X_b}{R_s \cdot Q}$, $\eta = \frac{P - P_a - P_b}{P} = 1 - \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{X_a}{R_g} + \frac{X_b}{R_s} \right)$

b)

$$I_{cef}^2 = I_{aef}^2 + I_{bef}^2 = P \cdot \left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_s} \right)$$

$$P_c = R_c \cdot I_{cef}^2 = \frac{P \cdot X_c}{Q} \cdot \left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_s} \right), \quad \eta = \frac{P - P_c}{P} = 1 - \frac{X_c}{Q} \cdot \left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_s} \right)$$

6. Filtre pasive

6.1. Considerații teoretice

Filtrele sunt circuite electrice care permit transferul energiei de la intrare la ieșire numai când frecvența semnalului este cuprinsă într-un anumit interval, numit **bandă de trecere**. Filtrele din acest capitol sunt **diporți simetrici, nedisipativi** (elemente L, C), care lucrează într-un lanț de transmisie **adaptat** (conectate pe impedanța caracteristică Z_c).

În cazul structurilor simetrice pur reactive, impedanța caracteristică și constanta de transfer se exprimă din (4.1.16):

$$Z_c = \sqrt{-X_0 \cdot X_{sc}}, \quad th\theta = \sqrt{\frac{X_{sc}}{X_0}} \quad (6.1.1)$$

Dezvoltând $th(\theta)$, unde $\theta = a + jb$ (vezi (4.1.18), (4.1.19)) rezultă două cazuri:

- **La frecvențele** la care X_0 și X_{sc} au semne contrare:

$$th\theta = j \cdot \sqrt{\left| \frac{X_{sc}}{X_0} \right|} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{X_l}{2R_s}\right), \quad \left| \frac{X_l}{2R_s} \right| < 1 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

$$Z_c = \sqrt{|X_0 \cdot X_{sc}|} = R_c$$

de unde rezultă că suntem în **banda de trecere (BT)** a filtrului ($a = 0$).

- **La frecvențele** la care X_0 și X_{sc} au același semn:

$$th\theta = \sqrt{\left| \frac{X_{sc}}{X_0} \right|} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, \pm\pi \\ a = 2 \cdot \operatorname{arccch}\left|\frac{X_l}{2R_s}\right|, \quad \left| \frac{X_l}{2R_s} \right| > 1 \end{cases} \quad (6.1.3)$$

$$Z_c = j \cdot \sqrt{|X_0 \cdot X_{sc}|} = j \cdot X_c$$

de unde rezultă că suntem în **banda de oprire (BO)** a filtrului ($b = 0, \pm\pi$).

În relațiile (6.1.2) și (6.1.3) se poate înlocui $\frac{X_l}{2R_s} = \sqrt{-\frac{Z_l}{4Z_t}} = \frac{\omega}{\omega_t}$ (ω_t reprezintă pulsația de tăiere la $-3dB$).

Schimbarea semnului reactanțelor X_o și X_{sc} se realizează prin trecere prin zero (rezonanță serie) sau la infinit (rezonanță paralel).

Banda de trecere se mai poate determina din condiția:

$$-1 < \frac{Z_l}{4Z_t} < 0 \quad (6.1.4)$$

unde Z_l , Z_t sunt impedanțele longitudinală, respectiv transversală. Condiția (6.1.4) este valabilă atât pentru structura în T , cât și pentru cea în Π .

6.1.1. Tipuri de filtre pasive

Filtre K -constant au produsul dintre impedanțele longitudinală, respectiv transversală egal cu o constantă.

$$Z_l \cdot Z_t = K = const. \quad (6.1.5)$$

Dezavantajele filtrelor K sunt:

- pantele caracteristicilor de frecvență sunt prea line, deci nu se poate asigura o separare netă a benzilor;
- Z_c variază mult cu frecvența în BT , deci nu se poate asigura adaptarea decât pe o porțiune limitată a BT .

Celulele elementare de filtre K -constant (TJ , TS , TB , OB) sunt prezentate în Figura 6.1, iar relațiile de proiectare sunt date în (6.1.6) și (6.1.7). Aceste relații sunt determinate pentru cazul când filtrele se conectează la sursă, respectiv sarcină rezistivă ($Z_l \cdot Z_t = R_s^2$). În (6.1.6), ω_t reprezintă pulsația de tăiere la $-3dB$, iar ω_0 din (6.1.7) reprezintă pulsația corespunzătoare frecvenței centrale.

$$\begin{array}{l} \mathbf{FTJ} : \\ \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{2R_s}{\omega_t} \\ C = \frac{2}{\omega_t R_s} \\ \omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}} \\ R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right. , \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{FTS} : \\ \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{R_s}{2\omega_t} \\ C = \frac{1}{2\omega_t R_s} \\ \omega_t = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \\ R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right. \end{array} \quad (6.1.6)$$

<i>FTB :</i>	<i>FOB :</i>	
$\left\{ \begin{array}{l} L_l = \frac{2R_s}{\omega_s - \omega_i} \\ C_l = \frac{\omega_s - \omega_i}{2\omega_0^2 R_s} \\ L_t = \frac{\omega_s - \omega_i}{2\omega_0^2} \cdot R_s \\ C_t = \frac{2}{(\omega_s - \omega_i) \cdot R_s} \\ R_s = \sqrt{\frac{L_t}{C_l}} = \sqrt{\frac{L_l}{C_t}} \end{array} \right. ,$	$\left\{ \begin{array}{l} L_l = \frac{2 \cdot (\omega_s - \omega_i)}{\omega_0^2} \cdot R_s \\ C_l = \frac{1}{2R_s \cdot (\omega_s - \omega_i)} \\ L_t = \frac{R_s}{2 \cdot (\omega_s - \omega_i)} \\ C_t = \frac{2 \cdot (\omega_s - \omega_i)}{\omega_0^2 R_s} \\ R_s = \sqrt{\frac{L_t}{C_l}} = \sqrt{\frac{L_l}{C_t}} \end{array} \right. \quad (6.1.7)$	
$\omega_0^2 = \omega_s \cdot \omega_i$		

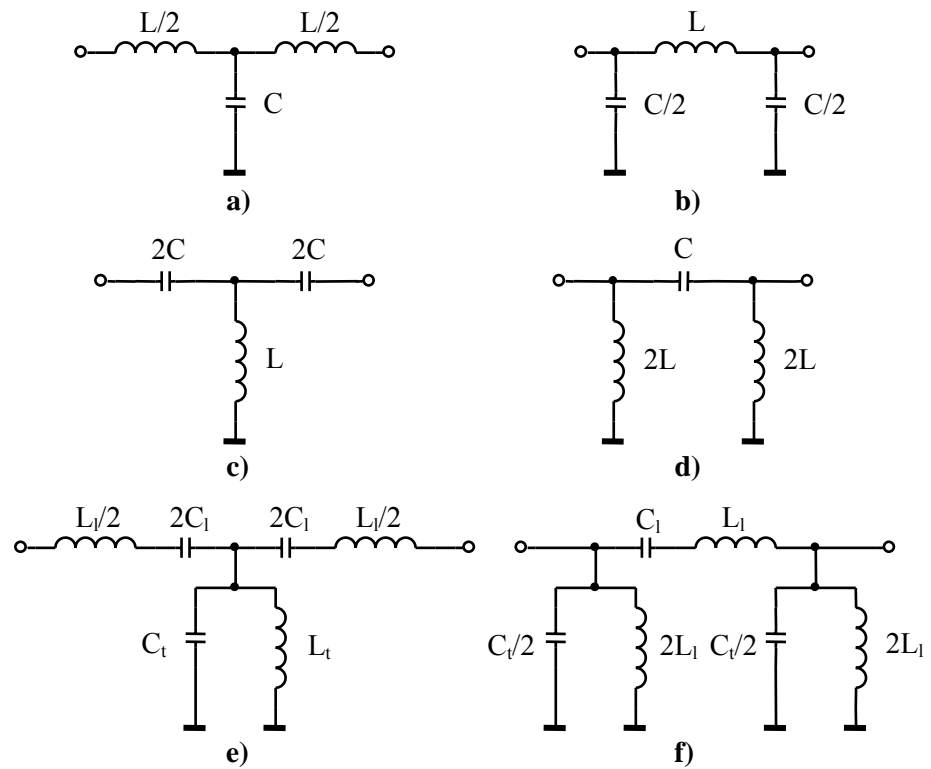


Figura 6.1. Structuri în T și II de filtre K : a-b) FTJ , c-d) FTS , e-f) FTB

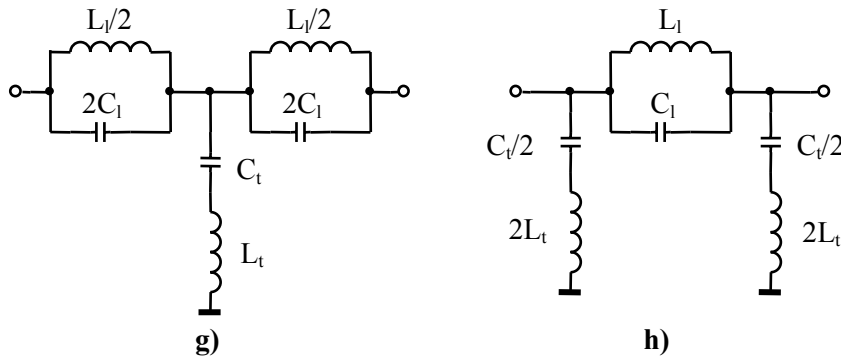


Figura 6.1. Structuri în T și II de filtre K (continuare): g-h) FOB

Filtre m -derivate derivă din filtrele K , corectând delimitarea insuficient de netă între BT și BO ale filtrelor de tip K , și realizând o mai bună adaptare în BT . Filtrele derivate se proiectează astfel încât impedanța caracteristică și benzile de trecere să fie aceleași cu cele ale filtrelor K din care derivă.

Derivarea serie se aplică structurilor în T . Se consideră:

$$Z_{lm} = m \cdot Z_l \tag{6.1.8}$$

unde m este **factorul de derivare** ($m \in \mathfrak{R}, 0 < m \leq 1$). Pentru a determina impedanța transversală, se pune condiția de egalitate a impedanțelor caracteristice ($Z_{cm} = Z_c$):

$$Z_{lm} = \frac{1}{m} \cdot Z_t + \frac{1-m^2}{4m} \cdot Z_l \tag{6.1.9}$$

Pornind de la structura din Figura 6.2a, se obține cea din Figura 6.2b.

Derivarea paralel se aplică structurilor în II . Se consideră:

$$Y_{lm} = m \cdot Y_t \tag{6.1.10}$$

Pentru a determina admitanța longitudinală, se pune condiția de egalitate a admitanțelor caracteristice ($Y_{cm} = Y_c$):

$$Y_{lm} = \frac{1}{m} \cdot Y_l + \frac{1-m^2}{4m} \cdot Y_t \tag{6.1.11}$$

Pornind de la structura din Figura 6.2c, se obține cea din Figura 6.2d.

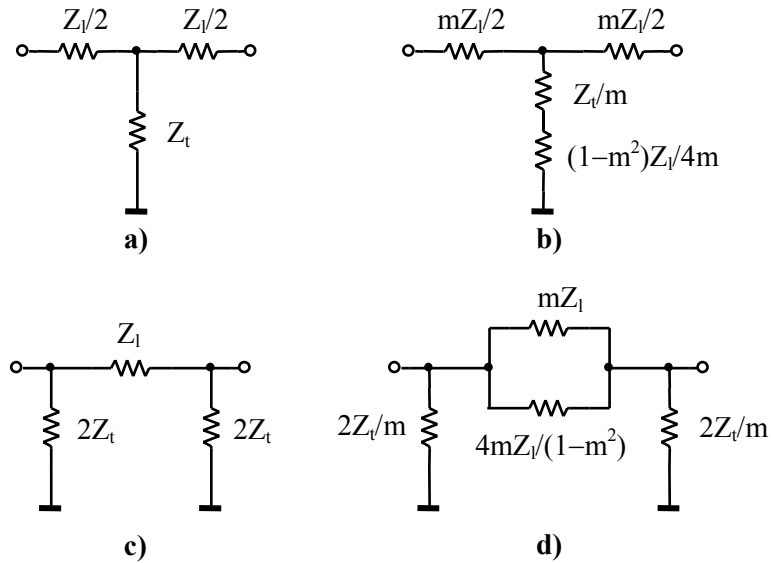


Figura 6.2. Derivarea celulelor în T și II

Factorul de derivare m se poate determina în funcție de frecvențele de tăiere respectiv de atenuare infinită:

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_t}{f_\infty}\right)^2} \quad (6.1.12)$$

6.2. Probleme rezolvate

6.2.1. Să se proiecteze un FTS de tip K -constant, cu frecvența de tăiere 50kHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 400Ω . Desenați structurile în T , respectiv în II .

Rezolvare:

Pulsația de tăiere este: $\omega_t = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 = \pi \cdot 10^5 \text{ rad/s}$. Parametrii L și C se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} L = \frac{R_s}{2\omega_t} = \frac{400}{2 \cdot \pi \cdot 10^5} = 0.64 \text{ mH} \\ C = \frac{1}{2\omega_t R_s} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 10^5 \cdot 400} = 3.9 \text{ nF} \end{cases}$$

Structurile în T și II sunt date în Figura 6.3.

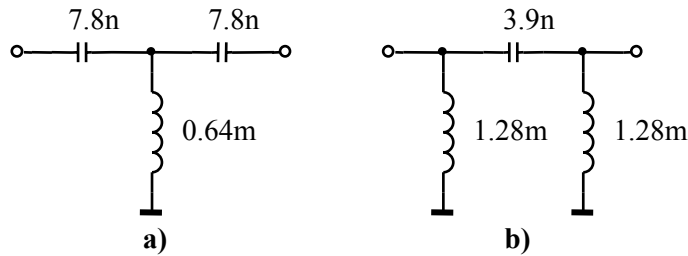


Figura 6.3. FTS proiectat (structurile în T și II)

6.2.2. Pentru filtrele de tip K-constant din Figura 6.4, să se determine frecvența de tăiere și rezistența de sarcină pe care trebuie să lucreze în condiții de adaptare.

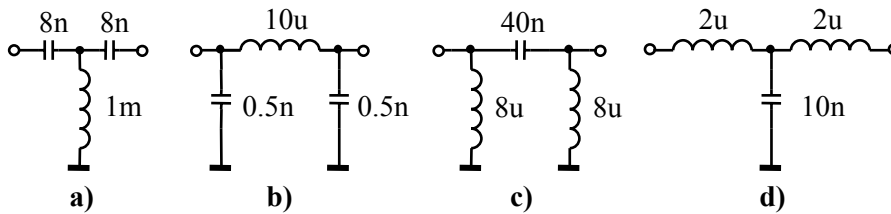


Figura 6.4. Filtre K-constant

Rezolvare:

Pentru filtrul din Figura 6.4a (FTS), se scrie:

$$\begin{cases} 2C = 8n \Rightarrow C = 4n \\ L = 1m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-9}}} = 0.5k\Omega \\ \omega_t = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = 250 \text{ krad} / s \Rightarrow f_t = 39.78 \text{ kHz} \end{cases}$$

Pentru filtrul din Figura 6.4b (FTJ) se scrie:

$$\begin{cases} L = 10\mu \\ \frac{C}{2} = 0.5n \Rightarrow C = 1n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{10^{-9}}} = 100\Omega \\ \omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 20 \text{ Mrad} / s \Rightarrow f_t = 3.183 \text{ MHz} \end{cases}$$

Pentru filtrul din Figura 6.4c (FTS), se scrie:

$$\begin{cases} C = 40n \\ 2L = 8\mu \Rightarrow L = 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = 10 \Omega \\ \omega_t = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = 1.25 \text{ Mrad/s} \Rightarrow f_t = 198.9 \text{ kHz} \end{cases}$$

Pentru filtrul din Figura 6.4d (FTJ), se scrie:

$$\begin{cases} C = 10n \\ \frac{L}{2} = 2\mu \Rightarrow L = 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = 20 \Omega \\ \omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 10 \text{ Mrad/s} \Rightarrow f_t = 1.59 \text{ MHz} \end{cases}$$

- 6.2.3.** Să se proiecteze un FTB de tip K -constant, cu frecvențele de tăiere 10kHz și 20kHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 10Ω . Desenați structurile în T , respectiv în II .

Rezolvare:

Pulsația ω_0 este: $\omega_0^2 = \omega_i \cdot \omega_s = 4\pi^2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^3 = 8\pi^2 \cdot 10^8 \text{ (rad/s)}^2$, unde ω_i și ω_s reprezintă pulsațiile inferioară, respectiv superioară, corespunzătoare frecvențelor de tăiere. Parametrii L_l , L_t , C_l și C_t se determină din :

$$\begin{cases} L_l = \frac{2 \cdot 10}{2\pi \cdot (20 - 10) \cdot 10^3} = \frac{10^{-3}}{\pi} = 0.32 \text{ mH} \\ C_l = \frac{2\pi \cdot (20 - 10) \cdot 10^3}{2 \cdot 8\pi^2 \cdot 10^8 \cdot 10} = \frac{10^{-5}}{8\pi} = 0.4 \mu\text{F} \\ L_t = \frac{2\pi \cdot (20 - 10) \cdot 10^3}{2 \cdot 8\pi^2 \cdot 10^8} \cdot 10 = \frac{10^{-3}}{8\pi} = 40 \mu\text{H} \\ C_t = \frac{2}{2\pi \cdot (20 - 10) \cdot 10^3 \cdot 10} = \frac{10^{-5}}{\pi} = 3.2 \mu\text{F} \end{cases}$$

Structurile în T și II sunt prezentate în Figura 6.5.

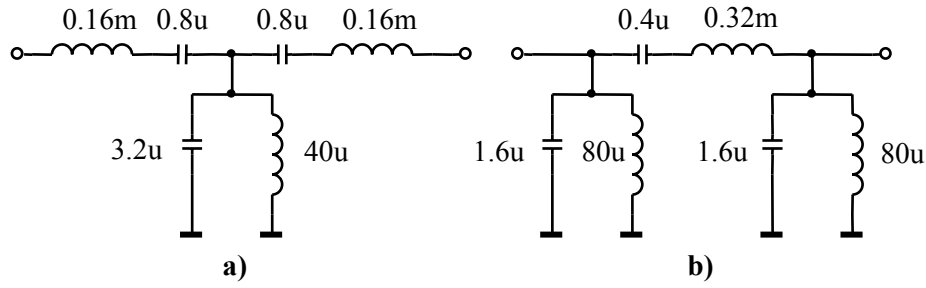


Figura 6.5. FTB proiectat (structurile în T și IT)

6.2.4. Să se verifice, utilizând condiția (6.1.4), dacă filtrul proiectat la **problema 6.2.3** are frecvențele de tăiere precizate (10kHz, 20kHz).

Rezolvare:

Se determină impedanțele Z_l și Z_t (vezi Figura 6.5):

$$\begin{cases} \frac{Z_l}{2} = s \frac{L_l}{2} + \frac{1}{s(2C_l)} \Rightarrow Z_l = \frac{s^2 L_l C_l + 1}{s C_l} \\ Z_t = \frac{s L_t \cdot \frac{1}{s C_l}}{s L_t + \frac{1}{s C_l}} = \frac{s L_t}{s^2 L_t C_l + 1} \end{cases}$$

Se înlocuiește $s = j\omega$ și se obține:

$$\begin{cases} Z_l = -j \cdot \frac{\omega^2 L_l C_l - 1}{\omega C_l} \\ Z_t = j \cdot \frac{\omega L_t}{\omega^2 L_t C_l - 1} \end{cases}$$

Înlocuind în (6.1.4), rezultă:

$$-1 < -\frac{\omega^4 L_l C_l L_t C_l - (L_l C_l + L_t C_l) + 1}{4 \cdot \omega C_l L_t} < 0$$

Având în vedere că raportul $Z_l/4Z_t$ este negativ, rămâne condiția $-1 < \frac{Z_l}{4Z_t}$:

$$\omega^4 L_l C_l L_l C_l - (L_l C_l + L_l C_l + 4 \cdot \omega C_l L_l) + 1 < 0$$

Cu valori numerice, se obține:

$$16.38 \cdot 10^{-21} \cdot \omega^4 - 320 \cdot 10^{-12} \cdot \omega^2 + 1 < 0$$

de unde rezultă frecvențele de tăiere:

$$\begin{cases} \omega_s = 125 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \\ \omega_i = 62.5 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_s = 19.89 \cdot 10^3 \text{ Hz} \\ f_i = 9.95 \cdot 10^3 \text{ Hz} \end{cases}$$

Comparând aceste rezultate cu valorile date în enunț, se observă că diferențele sunt nesemnificative.

6.2.5. Se consideră filtrul K -constant din Figura 6.6a. Să se determine filtrul m derivat, dacă $m = 0.4$.

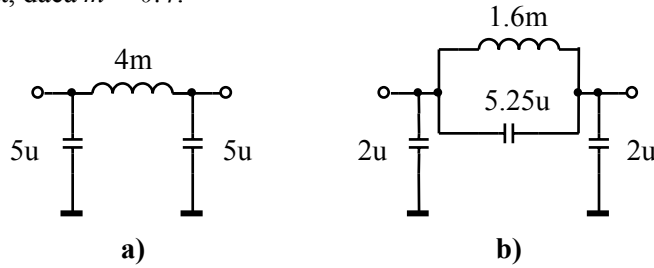


Figura 6.6. FTJ de tip K și m -derivat

Rezolvare:

Din Figura 6.6a rezultă: $L = 4mH$ și $\frac{C}{2} = 5\mu \Rightarrow C = 10\mu F$.

Pentru a proiecta filtrul m -derivat, se aplică (6.1.10), (6.1.11) și rezultă:

$$\begin{cases} Y_{lm} = m \cdot sC \\ Y_{lm} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{sL} + \frac{1-m^2}{4m} \cdot sC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{lm} = m \cdot C \\ C_{lm} = \frac{1-m^2}{4m} \cdot C \\ L_{lm} = m \cdot L \end{cases}$$

Din expresia lui Y_{lm} , rezultă că bobina de pe ramura longitudinală a filtrului K se înlocuiește cu o conexiune LC paralelă (Y_{lm} fiind o sumă de admitanțe).

$$\begin{cases} L_{lm} = 0.4 \cdot 4m = 1.6mH \\ C_{lm} = \frac{1-0.16}{4 \cdot 0.4} \cdot 10\mu = 5.25\mu F \\ C_{tm} = 0.4 \cdot 10\mu = 4\mu F \end{cases}$$

Structura filtrului m -derivat este prezentat în Figura 6.6b.

6.2.6. Se proiecteze un FTS m -derivat în structură T , având $m = 0.5$, frecvența de tăiere $1/4\pi Hz$ și rezistența de sarcină 10Ω .

Rezolvare:

Filtrul K din care rezultă filtrul cerut are structura din Figura 6.1c. Parametrii filtrului K se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} L = \frac{R_s}{2\omega_t} = \frac{10}{2\pi \cdot \frac{1}{4\pi}} = 20H \\ C = \frac{1}{2\omega_t R_s} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot 10} = 0.2F \end{cases}$$

Parametrii filtrului m -derivat rezultă din (6.1.8) și (6.1.9), iar structura filtrului m -derivat este prezentată în Figura 6.7:

$$\begin{cases} C_{lm} = \frac{1}{m} \cdot C = \frac{1}{5 \cdot 0.5} = 0.4F \\ L_{tm} = \frac{1}{m} \cdot L = \frac{20}{0.5} = 40H \\ C_{tm} = \frac{4m}{1-m^2} \cdot C = \frac{4 \cdot 0.5}{1-0.5^2} \cdot 0.2 = \frac{8}{15} = 0.53F \end{cases}$$

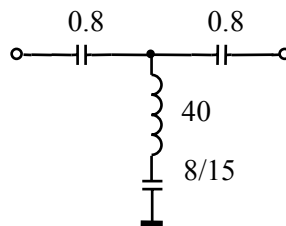


Figura 6.7. FTS m -derivat proiectat

6.2.7. Se se proiecteze un *FTJ* *m*-derivat în structură *T*, având $m = 0.8$, frecvența de tăiere 5rad/s și rezistența de sarcină 2Ω .

Rezolvare:

Filtrul *K* din care rezultă filtrul *m*-derivat are structura din Figura 6.1a. Parametrii filtrului *K* se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} L = \frac{2R_s}{\omega_t} = \frac{2 \cdot 2}{5} = 0.8H \\ C = \frac{2}{\omega_t R_s} = \frac{2}{5 \cdot 2} = 0.2F \end{cases}$$

Parametrii filtrului *m*-derivat rezultă din (6.1.8) și (6.1.9):

$$\begin{cases} L_{lm} = m \cdot L = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64F \\ L_{tm} = \frac{1-m^2}{4m} \cdot L = \frac{1-0.64}{4 \cdot 0.8} = \frac{9}{80}H \\ C_{tm} = m \cdot C = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16F \end{cases}$$

Structura filtrului *m*-derivat este prezentată în Figura 6.8.

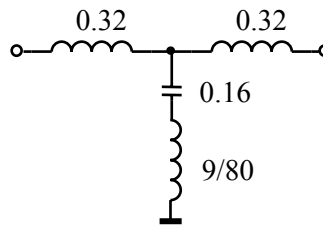


Figura 6.8. *FTJ* *m*-derivat proiectat

6.2.8. Să se proiecteze un *FTJ* *m*-derivat în structură *II*, având $m = 0.5$, frecvența de tăiere 1rad/s și rezistența de sarcină 5Ω .

Rezolvare:

Filtrul *K* din care rezultă filtrul *m*-derivat are structura din Figura 6.1b. Parametrii filtrului *K* se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} L = \frac{2R_s}{\omega_t} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10H \\ C = \frac{2}{\omega_t R_s} = \frac{2}{1 \cdot 5} = 0.4F \end{cases}$$

Parametrii filtrului m -derivat rezultă din (6.1.10) și (6.1.11):

$$\begin{cases} L_{lm} = m \cdot L = 0.5 \cdot 10 = 5F \\ C_{lm} = \frac{1-m^2}{4m} \cdot C = \frac{1-0.25}{4 \cdot 0.5} \cdot 0.4 = \frac{3}{20}H \\ C_{im} = m \cdot C = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2F \end{cases}$$

Structura filtrului m -derivat este prezentată în Figura 6.9.

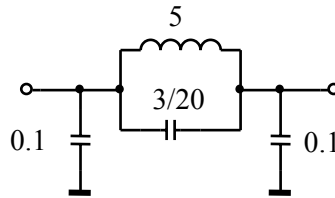


Figura 6.9. FTJ m -derivat proiectat

6.2.9. Se proiecteze un FOB m -derivat în structură T , având $m = 0.5$, frecvențele de tăiere $2rad/s$, respectiv $4rad/s$, iar rezistența de sarcină 1Ω .

Rezolvare:

Filtrul K din care rezultă filtrul m -derivat are structura din Figura 6.1g. Parametrii filtrului K se determină din (6.1.7):

$$\begin{cases} L_l = \frac{2 \cdot (4-2)}{2 \cdot 4} = 0.5H \\ C_l = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (4-2)} = 0.25F \end{cases}, \quad \begin{cases} L_t = \frac{1}{2 \cdot (4-2)} = 0.25H \\ C_t = \frac{2 \cdot (4-2)}{2 \cdot 4 \cdot 1} = 0.5F \end{cases}$$

Parametrii filtrului m -derivat rezultă din (6.1.8) și (6.1.9). Având în vedere că ramura longitudinală este o conexiune paralelă, este mai ușor să se lucreze cu admitanțe:

$$Z_{lm} = m \cdot Z_l \Rightarrow Y_{lm} = \frac{1}{m} \cdot Y_l = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{sL_l} + sC_l \right)$$

de unde rezultă parametrii de pe ramura longitudinală a filtrului m -derivat:

$$\begin{cases} L_{lm} = m \cdot L_l = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 F \\ C_{lm} = \frac{1}{m} \cdot C_l = \frac{1}{0.5} \cdot 0.25 = 0.5 H \end{cases}$$

Pentru ramura transversală se aplică (6.1.9) și se obține:

$$Z_{tm} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{sC_t} + sL_t \right) + \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{sL_l} + sC_l}$$

de unde rezultă că ramura transversală a filtrului m -derivat va fi o structură LC serie, în serie cu o structură LC paralel. Parametrii de pe ramura transversală sunt:

$$\begin{cases} L_{ts} = \frac{1}{m} \cdot L_t = \frac{1}{0.5} \cdot 0.25 = 0.5 H \\ C_{ts} = m \cdot C_t = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 F \end{cases}, \begin{cases} L_{tp} = \frac{1-m^2}{4m} \cdot L_l = \frac{1-0.25}{4 \cdot 0.5} \cdot 0.5 = \frac{3}{16} H \\ C_{tp} = \frac{4m}{1-m^2} \cdot C_l = \frac{4 \cdot 0.5}{1-0.25} \cdot 0.25 = \frac{2}{3} F \end{cases}$$

Structura filtrului m -derivat este prezentată în Figura 6.10.

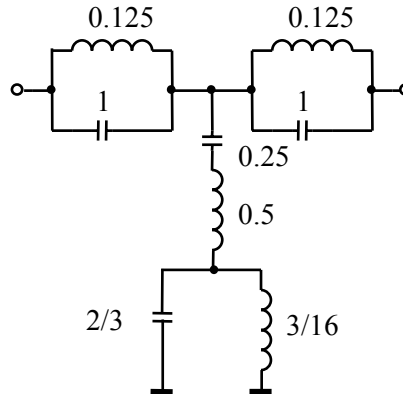


Figura 6.10. *FOB* m -derivat proiectat

6.2.10. Pentru filtrele de tip m -derivat din Figura 6.11, să se determine filtrul K -constant din care derivă, factorul de derivare m , frecvența de tăiere și rezistența de sarcină.

Rezolvare:

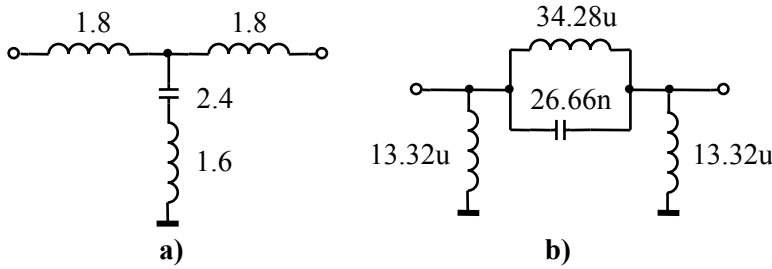


Figura 6.11. Filtre m -derivate

Filtrul din Figura 6.11a poate să derive numai din filtrul din Figura 6.1a (FTJ K -constant în T). Se scriu parametrii filtrului m -derivat în funcție de parametrii celui de tip K și se obține:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{L}{2} = 1.8 \\ m \cdot C = 2.4 \\ \frac{1-m^2}{4m} \cdot L = 1.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{3.6}{m} \\ \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{3.6}{m} = 1.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0.6 \\ L = 6H \\ C = 4F \end{cases}$$

Frecvența de tăiere și rezistența de sarcină se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.22 \Omega \\ \omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cong 0.4 \text{ rad/s} \Rightarrow f_t = \frac{0.4}{2\pi} = \frac{1}{5\pi} \text{ Hz} \end{cases}$$

Filtrul din Figura 6.11b poate să derive numai din filtrul din Figura 6.1d (FTS K -constant în I). Se scriu parametrii filtrului m -derivat în funcție de parametrii celui de tip K și se obține:

$$\begin{cases} \frac{4m}{1-m^2} \cdot L = 34.28 \mu H \\ \frac{1}{m} \cdot C = 26.66 nF \\ \frac{1}{m} \cdot 2L = 13.32 \mu H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 6.66 \cdot 10^{-6} \cdot m \\ \frac{4m}{1-m^2} \cdot 6.66 \cdot m = 34.28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0.75 \\ L = 5 \mu H \\ C = 20 nF \end{cases}$$

Frecvența de tăiere și rezistența de sarcină se determină din (6.1.6):

$$\begin{cases} R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-9}}} \cong 15.8 \Omega \\ \omega_t = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\sqrt{5 \cdot 20 \cdot 10^{-15}}} = 1.58 \text{ Mrad/s} \Rightarrow f_t = 251.6 \text{ kHz} \end{cases}$$

6.2.11. Cât trebuie să fie factorul de derivare m , la un FTJ de tip m , astfel încât frecvența de tăiere să fie 20MHz , iar frecvența de atenuare infinită 50MHz .

Rezolvare:

Din (6.1.12) rezultă factorul de derivare:

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{50}\right)^2} = 0.92$$

6.2.12. Câte celule de FTJ de tip K sunt necesare pentru ca filtrul rezultat prin cascada să aibă frecvența de tăiere în banda de trecere de 1kHz , iar la frecvența de 3kHz atenuarea să fie cel puțin 40dB ?

Rezolvare:

În banda de oprire, atenuarea este dată în expresia (6.1.3):

$$a = 2 \cdot \operatorname{arccch} \left| \frac{X_l}{2R_s} \right| = 2 \cdot \operatorname{arccch} \left(\frac{\omega}{\omega_t} \right)$$

unde $\frac{\omega}{\omega_t} = \frac{3 \cdot 10^3}{10^3} = 3$. În acest caz, atenuarea devine:

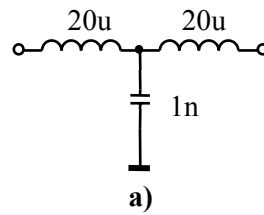
$$a = 2 \cdot \operatorname{arcch}(3) = 3.525 \text{ Np} = 30.62 \text{ dB}$$

Prin urmare, va fi nevoie de un număr minim de celule egal cu $\frac{40}{30.62} = 1.306$, adică minim 2 celule de tip *K*.

6.3. Probleme propuse

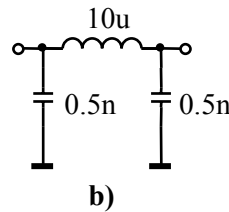
6.3.1. Să se proiecteze un *FTJ* de tip *K*-constant în *T*, cu frecvența de tăiere 1.59 MHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 200Ω . Desenați structura filtrului proiectat.

Soluție: Vezi Figura 6.12a.



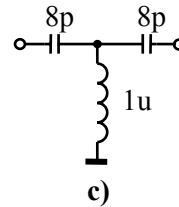
6.3.2. Să se proiecteze un *FTJ* de tip *K*-constant în *II*, cu frecvența de tăiere 3.18 MHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 100Ω . Desenați structura filtrului proiectat.

Soluție: Vezi Figura 6.12b.



6.3.3. Să se proiecteze un *FTS* de tip *K*-constant în *T*, cu frecvența de tăiere 39.78 MHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de $0.5 \text{ k}\Omega$. Desenați structura filtrului proiectat.

Soluție: Vezi Figura 6.12c.



6.3.4. Să se proiecteze un *FTS* de tip *K*-constant în *II*, cu frecvența de tăiere 0.796 MHz , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 100Ω . Desenați structura filtrului proiectat.

Soluție: Vezi Figura 6.12d.

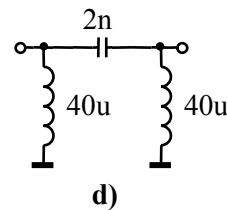


Figura 6.12. Soluțiile problemelor 6.3.1–6.3.4

- 6.3.5. Pentru filtrele de tip K -constant din Figura 6.13, să se determine frecvența de tăiere și rezistența de sarcină pe care trebuie să lucreze în condiții de adaptare.

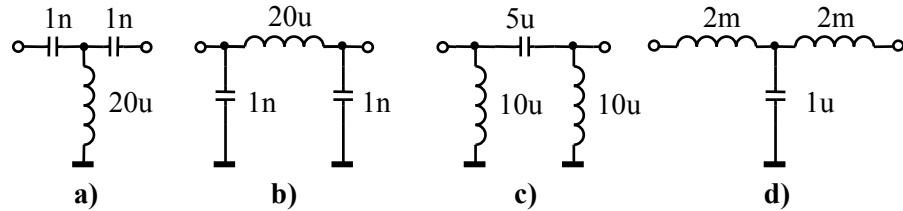


Figura 6.13. Filtre K -constant

Soluție:

- a) $R_s=200\Omega$, $f_i=79.57kHz$; b) $R_s=100\Omega$, $f_i=2.25MHz$; c) $R_s=1\Omega$, $f_i=16kHz$; d) $R_s=63.25\Omega$, $f_i=5kHz$.

- 6.3.6. Să se proiecteze un FTJ în T , de tip m -derivat, cu $m = 0.6$, frecvența de tăiere $4 rad/s$ și rezistența de sarcină 30Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.14a.

- 6.3.7. Să se proiecteze un FTS în T , de tip m -derivat, cu $m = 0.9$, frecvența de tăiere $10 rad/s$ și rezistența de sarcină 3Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.14b.

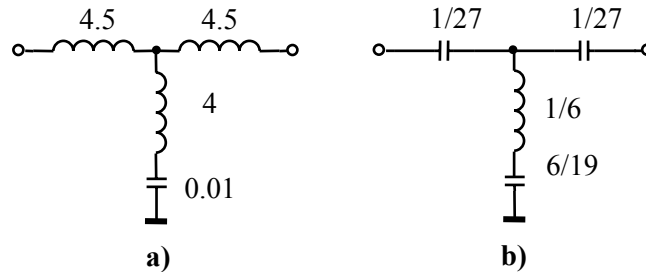


Figura 6.14. Soluțiile problemelor 6.3.6, 6.3.7

- 6.3.8. Să se proiecteze un FTS în T , de tip m -derivat, cu $m = 0.6$, frecvența de tăiere $5/2\pi Hz$ și rezistența de sarcină 2Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.15a.

6.3.9. Să se proiecteze un *FTJ* în *T*, de tip *m*-derivat, cu $m = 0.3$, frecvența de tăiere $1/\pi$ Hz și rezistența de sarcină 4Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.15b.

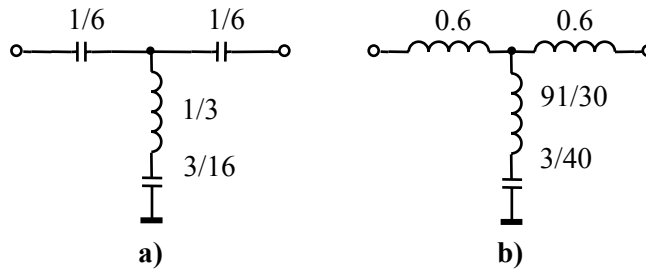


Figura 6.15. Soluțiile problemelor 6.3.8, 6.3.9

6.3.10. Să se proiecteze un *FTS* în *II*, de tip *m*-derivat, cu $m = 0.5$, frecvența de tăiere $1/4\pi$ Hz și rezistența de sarcină 10Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.16a.

6.3.11. Să se proiecteze un *FTS* în *II*, de tip *m*-derivat, cu $m = 0.8$, frecvența de tăiere $1/\pi$ Hz și rezistența de sarcină 4Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.16b.

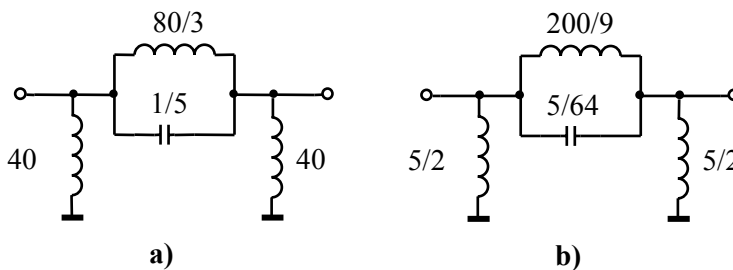


Figura 6.16. Soluțiile problemelor 6.3.10, 6.3.11

6.3.12. Să se proiecteze un *FTJ* în *II*, de tip *m*-derivat, cu $m = 0.8$, frecvența de tăiere 5 rad/s și rezistența de sarcină 2Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.17a.

6.3.13. Să se proiecteze un *FTJ* în *II*, de tip *m*-derivat, cu $m = 0.4$, frecvența de tăiere 2 rad/s și rezistența de sarcină 5Ω .

Soluție: Vezi Figura 6.17a.

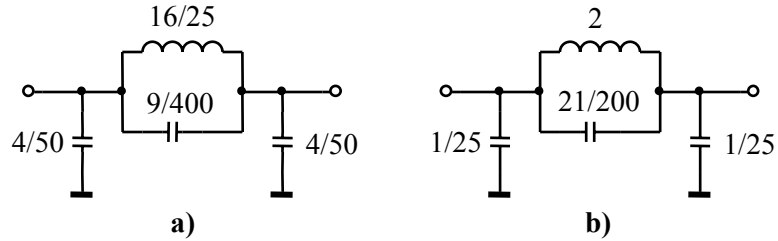


Figura 6.17. Soluțiile problemelor 6.3.12, 6.3.13

6.3.14. Câte celule de *FTJ* de tip *K* sunt necesare pentru ca filtrul rezultat prin cascaderă să aibă frecvența de tăiere în banda de trecere de 2.5 kHz , iar la frecvența de 12 kHz atenuarea să fie cel puțin 80 dB ?

Soluție: $a = 2 \cdot \text{arcch}(4.8) = 4.501 \text{ Np} = 39.1 \text{ dB} \Rightarrow 3 \text{ celule } K$

6.3.15. Ce defazaj (ieșire față de intrare) introduce un *FTJ* la frecvența de 2 kHz , dacă frecvența de tăiere este 8 kHz ?

Soluție: $b = 2 \cdot \text{arcsin}(0.25) = 0.505 \text{ rad} = 28.93^\circ \Rightarrow \varphi = -b = -28.93^\circ$ (vezi relația (4.1.19) – Capitolul 4).

6.3.16. Să se proiecteze un *FOB* de tip *K*-constant, cu frecvențele de tăiere 1 rad/s și 2 rad/s , care să lucreze pe o rezistență de sarcină de 2Ω .

Soluție: Vezi structurile din Figurile 6.1a și b.

$$\text{structura în } \mathbf{T} : \begin{cases} L_t / 2 = 1H \\ 2C_t = 1/2F \\ L_t = 1H \\ C_t = 1/2F \end{cases}, \quad \text{structura în } \mathbf{II} : \begin{cases} L_t = 2H \\ C_t = 1/4F \\ 2L_t = 2H \\ C_t / 2 = 1/4F \end{cases}$$

Bibliografie

1. M. Țopa – “*Semnale, circuite și sisteme. Partea a II-a: Teoria sistemelor*”, Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2002.
2. V. Popescu – “*Semnale, circuite și sisteme. Partea III: Teoria semnalelor*”, Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2003.
3. I. Popescu, V. Popescu, E. Szopos, M. Țopa – “*Semnale, circuite și sisteme. Îndrumător de laborator IV*”, Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2003.
4. A. Mateescu, N. Dumitriu, L. Stanciu – “*Semnale și sisteme. Aplicații în filtrarea semnalelor*”, Ed. Teora, București, 2001.
5. Wai-Kai Chen – “*The circuits and filters handbook*”, CRC Press, 1995.
6. M. Săvescu – “*Semnale, circuite și sisteme. Probleme*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
7. N. Balabanian, T. Bickart – “*Teoria modernă a circuitelor*”, Editura Tehnică, București, 1974.
8. C. Vlad, N. Palaghiță – “*Sisteme continue – Culegere de probleme*”, Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 1995.
9. N. Palaghiță, D. Petreus, C. Fărcaș, “*Electronică de comandă și reglaj*”, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.
10. A.V. Oppenheim, A. Willsky – “*Signals and systems*”, Prentice Hall, 2000.
11. J. Distephano, A. Stubberud, I. Williams, “*Feedback and control systems*”, Schaum’s outlines series, McGraw-Hill, 1990.
12. R. Mancini, “*Op Amps for everyone*”, Design reference, Texas Instruments, 2002.