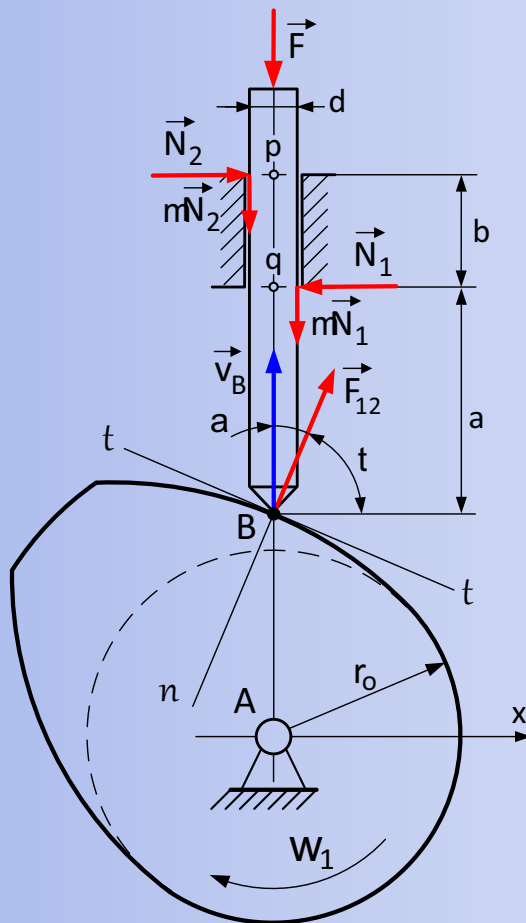


Călin RUSU

MECANISME II

SUPPORT DE CURS



UTPRESS
CLUJ-NAPOCA, 2022
ISBN 978-606-737-578-7

Călin RUSU

MECANISME II

SUPPORT DE CURS



UTPRESS
Cluj-Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-578-7



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: ing. Viorica Domșa

Recenzia: Prof.dr.ing. Mircea Bara
Prof. dr.ing. Olimpiu Tătar

Pregătire online: Gabriela Groza

Copyright © 2022 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-578-7

Bun de tipar: 30.05.2022

CUPRINS

PREFAȚĂ.....	3
1. MECANISME CU CAMĂ.....	4
1.1 Clasificare	4
1.2 Elementele geometrice ale mecanismului cu camă.	6
1.3 Sinteza mecanismelor cu camă.....	9
1.3.1 Legea de mișcare cu accelerație zero	9
1.3.2 Legea de mișcare cu accelerație constantă	11
1.3.3 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală	13
1.3.4 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală	15
1.3.5 Determinarea razei cercului de bază la mecanismul cu camă și tchet de translație	17
1.3.6 Determinarea razei cercului de bază la mecanismul cu camă și tchet oscilant.....	21
1.3.7 Determinarea profilului camei cu tchet de translație.....	23
1.3.8 Determinarea profilului camei cu tchet oscilant.....	26
1.4 Analiza cinetostatică a mecanismelor cu camă	28
1.4.1 Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă și tchet de translație.....	28
1.4.2 Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă și tchet oscilant.....	31
1.5 Exemplu.....	32
2. CINETOSTATICA MECANISMELOR.....	34
2.1 Forțe care acționează asupra mecanismelor	34
2.2 Determinarea forțelor de inerție prin metoda concentrării maselor.....	38
2.2.1 Concentrarea maselor în două puncte	40
2.3 Determinarea forțelor de legătură.....	42
2.3.1 Determinarea reacțiunilor din cuplele diadelor	42
2.3.2 Determinarea forțelor de legătură pentru elementele conducătoare.....	50

2.3.3	Determinarea forțelor de legătură în cuplele angrenajelor cilindrice.....	53
2.3.4	Transmiterea forțelor în mecanisme. Unghiul de transmitere.....	55
2.4	Forțele de frecare din cuplele cinematice	58
2.5	Reducerea forțelor și maselor mecanismelor.....	64
2.5.1	Forța redusă. Momentul redus.....	64
2.5.2	Masa redusă. Momentul de inerție redus.....	65
2.6	Exemple	67
3.	ECHILIBRAREA MECANISMELOR	74
3.1	Introducere.....	74
3.2	Echilibrarea rotorilor prin proiectare	75
3.3	Echilibrarea experimentală a rotorilor	81
3.3.1	Echilibrarea statică experimentală.....	81
3.3.2	Echilibrarea dinamică experimentală	83
3.4	Echilibrarea statică a mecanismelor	88
3.4.1	Echilibrarea mecanismului patrulater.....	91
3.4.2	Echilibrarea mecanismului manivelă piston.....	93
4.	MIȘCAREA MECANISMELOR SUB ACȚIUNEA FORȚELOR EXTERIOARE	97
4.1	Ecuții de mișcare.....	97
4.2	Fazele de mișcare ale mecanismelor.....	102
4.3	Randamentul mecanismelor.....	103
	BIBLIOGRAFIE.....	108

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare a fost realizată pe baza programei analitice a disciplinei “Mecanisme II” pentru studenții din anul III ai specializărilor: Mecatronică, Mecanică fină și nanotehnologii, Sisteme și echipamente termice și Mașini și instalații pentru agricultură și industria alimentară. Conținutul este structurat pe 4 capitole și tratează aspecte ale studiului mecanismelor cu came și bare articulate.

În prima parte a lucrării sunt prezentate elemente de analiză și sinteză a mecanismelor cu camă iar în continuare sunt prezentate noțiuni privind cinetostatica mecanismelor și echilibrarea statică și dinamică. Ultimul capitol tratează mișcarea mecanismelor sub acțiunea forțelor exterioare

Prin tematica abordată și modul de prezentare lucrarea își propune să ofere noțiunile necesare pentru studiul mecanismelor cu came și bare articulate întâlnite în diverse sisteme mecanice prin urmare poate fi utilă și pentru studenții altor specializări.

Cluj-Napoca, Mai 2022

Autorul

1. MECANISME CU CAMĂ

1.1 Clasificare

Aceste mecanisme sunt formate în principal, dintr-un element conducător cu un anumit profil, numit *camă* care transmite mișcarea unui element condus numit *tachet*. Pentru a se asigura continuitatea transmiterii mișcării, cama și tachetul trebuie să se afle permanent în contact, astfel cele două elemente se formează o cuplă superioară de clasa 4 cu contact punctiform în planul mișcării. Deoarece camele pot avea o gamă variată de profiluri, tachetul poate realiza cele mai diverse legi de mișcare [4].

În literatura de specialitate există mai multe criterii de clasificare a mecanismelor cu camă [4],[7],[12],[13]. De exemplu, în funcție de forma profilului camei, există mecanisme cu *camă plană* (fig. 1.1 a, b, e) și mecanisme cu *camă spațială* (fig. 1.1 c, d). După felul mișcării realizate de elementul condus sunt mecanisme cu camă și *tachet de translație* (fig. 1.1 a, c, d, e) respectiv mecanisme cu camă și *tachet oscilant* (fig. 1.1 b). Dacă se ia în considerare felul mișcării realizate de camă, pot fi mecanisme cu *camă de rotație* (fig. 1.1 a, b, c, d) și mecanisme cu *camă de translație* (fig. 1.1 e).

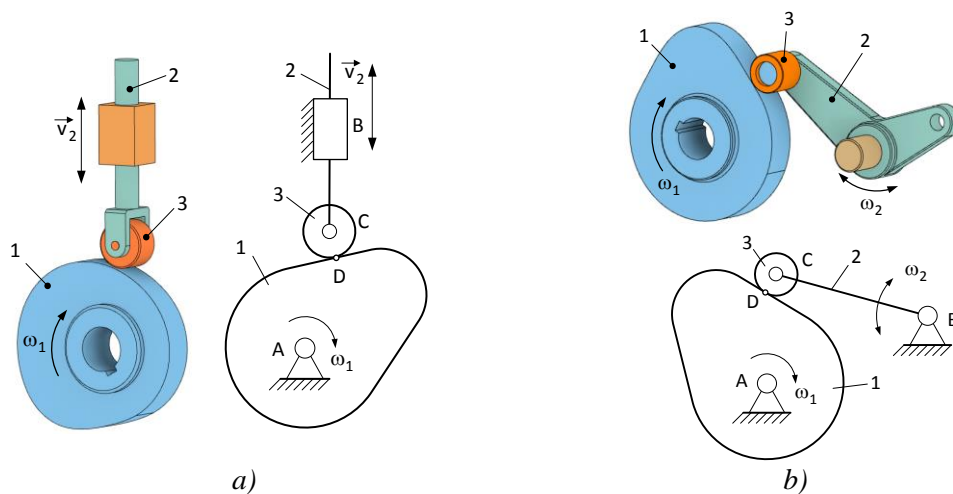


Fig.1.1 Mecanisme cu camă[10]

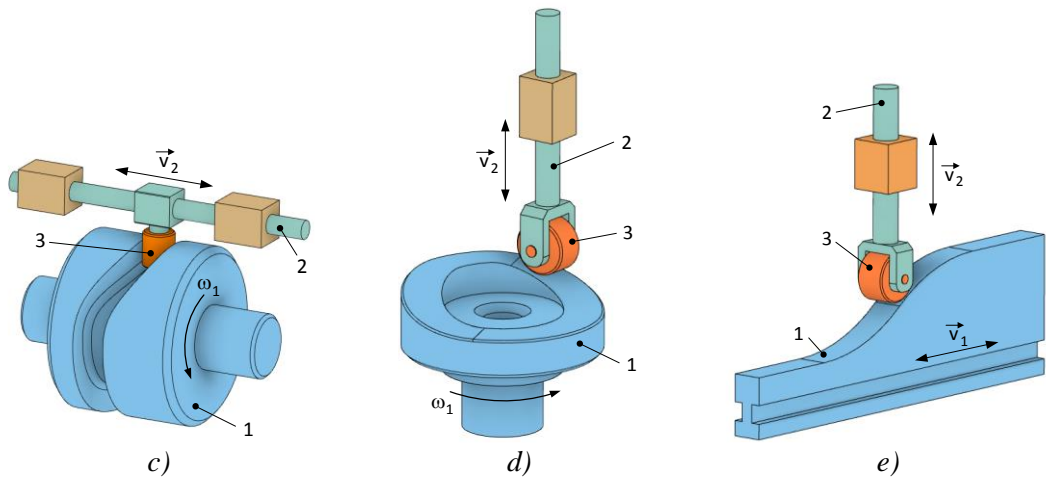


Fig.1.1 Mecanisme cu camă (continuare)[10]

În funcție de forma tachelului în zona de contact cu cama, există *tachet cu vârf* (fig. 1.2 a), *tachet plan* (fig. 1.2 b), *tachet cu rolă* (fig.1.2 c) sau *tachet sferic* (fig. 1.2 d)

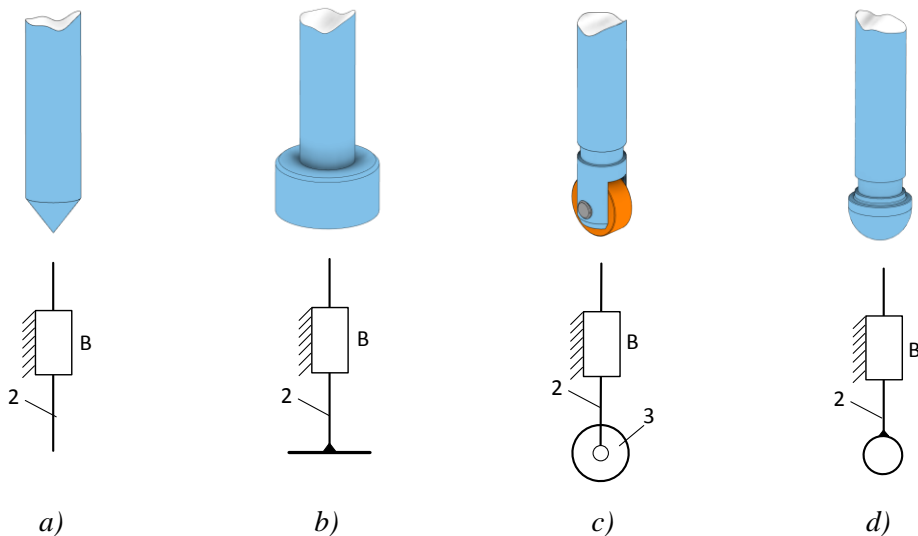


Fig.1.2 Variante constructive pentru tacheți

Mecanismele cu camă, prin comparație cu mecanismele cu bare, prezintă câteva avantaje cum ar fi: gabarit redus, durabilitate, funcționare silențioasă și nu în ultimul rând posibilitatea de modificare a legii de mișcare a tachelului prin schimbarea camei, păstrând același gabarit al mecanismului. În schimb uzura camei sau a tachelului poate duce la modificări importante ale legilor de mișcare. De asemenea cama se realizează

de obicei din materiale cu proprietăți speciale, rezistente la uzură ceea ce face ca profilul să fie uneori dificil de prelucrat [8].

Studiul mecanismelor cu camă cuprinde mai multe etape. *Sinteza dimensională* are ca obiectiv determinarea profilului camei și a elementelor geometrice ale mecanismului cunoscând legea de mișcare impusă tachelului, cursa acestuia și unghiurile de rotație a camei. *Analiza structurală și cinematică* urmărește validarea rezultatelor obținute în urma sintezei. Mai exact analiza structurală urmărește determinarea gradului de mobilitate și a mecanismului înlocuitor. Mecanismul înlocuitor se obține prin înlocuirea cuplei superioare cu un element cinematic și două cuple de clasa a cincea. Apoi, în cadrul analizei cinematice se determină legea de mișcare a tachelului, fiind cunoscute geometria mecanismului cu camă precum și legea de mișcare a elementului conducător. *Analiza cinetostatică* studiază transmiterea forțelor și are ca principal obiectiv determinarea forțelor de legătură (reacțiuni) care apar în cuplele mecanismului [8].

Toate aceste etape sunt prezentate pe larg în [4], [7], [8], [13]. În cadrul acestui capitol se vor prezenta doar aspecte legate de sinteza și analiza cinetostatică în cazul mecanismelor cu camă și tachel de translație respectiv tachel oscilant.

1.2 Elementele geometrice ale mecanismului cu camă

Indiferent de forma camei sau de felul mișcării tachelului, mecanismele cu camă au un singur grad de mobilitate. Dacă între camă și tachel se interpune o rolă, rezultă un grad de mobilitate suplimentar care este considerat pasiv. De regulă cama, care este elementul conducător, se rotește cu o viteză unghiulară cunoscută și imprimă elementului condus adică tachelului, o lege de mișcare periodică care este divizată în patru faze distincte: faza de *urcare* sau înaintare, faza de *repaus superior*, faza de *coborâre* sau revenire și faza de *repaus inferior*.

În cazul unui mecanism cu camă și tachel de translație, cele patru faze ale legii de mișcare a tachelului sunt prezentate în figura 1.3. Atunci când cama 1 se rotește cu viteza unghiulară ω_1 în jurul cuplei de rotație A, tachelul 2 intră în contact cu porțiunea *ab* a profilului și prin urmare distanța dintre centrul de rotație al camei și vârful tachelului, crește. Tachelul va ocupa o poziție extremă superioară când ajunge în punctul *b* de pe profilul camei. În timp ce punctul de contact se deplasează pe arcul *bc* tachelul își va menține poziția. Mișcare de rotație a camei va determina tachelul să intre în contact cu profilul *cd* și să se apropie continuu de centrul de rotație al camei. Pe perioada contactului cu profilul *da* al camei, tachelul va menține o poziție extremă inferioară

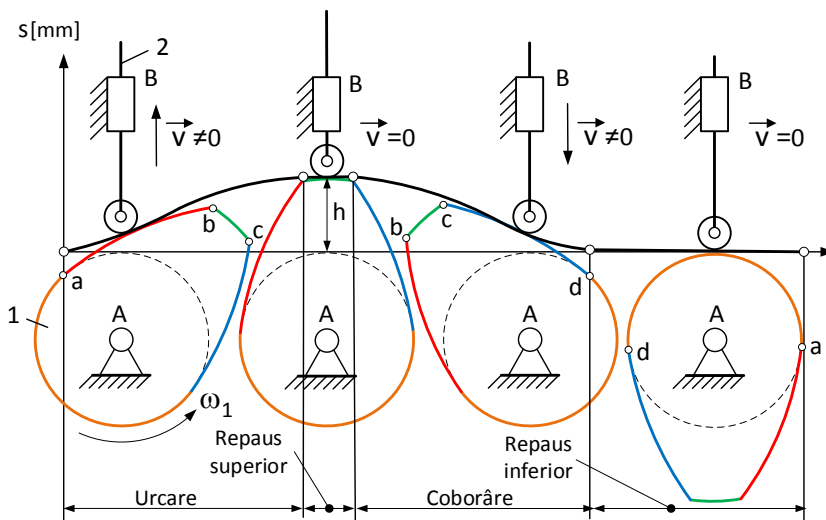


Fig.1.3 Fazele mișcării tachelului la mecanismul cu camă și tachel de translație

Cele patru zone ale profilului camei corespunzătoare fazelor de mișcare ale tachelului sunt: ab pentru urcare, bc pentru repaus superior, cd la coborâre respectiv da pentru repausul inferior.

În timpul fazei de urcare, tachelul de translație se deplasează pe o distanță h numită *cursa tachelului*, iar tachelul oscilant va descrie un arc care are la vârf unghiul β numit *unghi de oscilație*

Unghiul măsurat la centrul camei corespunzător fiecărei faze se numește *unghi de profil* și se notează cu θ_u pentru faza de urcare, θ_c pentru faza de coborâre, respectiv θ_R și θ_r pentru cele două faze de repaus. Profilul camei corespunzător fazelor de repaus superior și inferior a tachelului este format din arce de cerc cu centrele în A și raze R respectiv r_0 . Profilul camei pentru fazele de urcare și coborâre se determină, prin sinteză dimensională, în funcție de legea de mișcare impusă tachelului.

Cercul cu raza r_0 se numește *cerc de bază* al camei iar distanța la care se găsește axa de mișcare a tachelului față de centrul de rotație al camei se notează cu e și se numește *excentricitate*. Cercul de bază împreună cu excentricitatea tachelului determină dimensiunile de gabarit ale mecanismului.

Cele patru zone ale profilului camei împreună cu unghiurile de profil sunt prezentate în figura 1.4 pentru cama cu tachel de translație, respectiv în figura 1.5 pentru cama cu tachel oscilant.

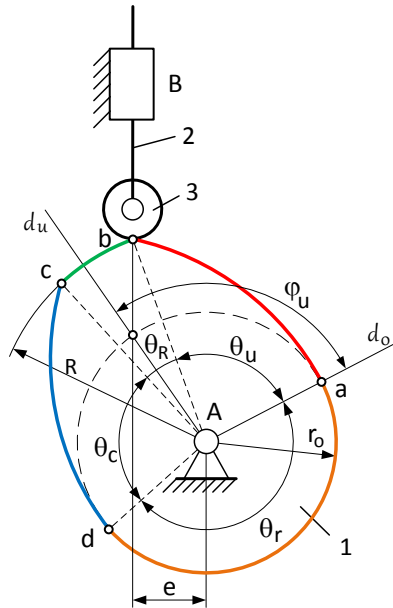


Fig.1.4 Unghiurile de profil la mecanismul cu camă și tachtet de translație [10]

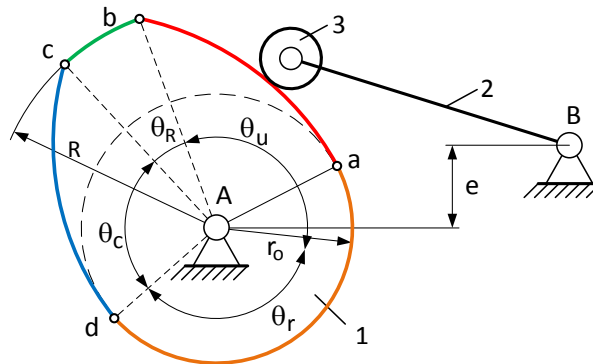


Fig.1.5 Unghiurile de profil la mecanismul cu camă și tachtet de oscilant

Unghiul cu care se rotește cama pentru realizarea unei faze din legea de mișcare a tachtetului, se numește *unghi de rotație* sau *unghi de fază* și se notează cu φ_u , φ_c , respectiv φ_R și φ_r . Pentru mecanismul cu camă din figura 1.4, unghiul de rotație pentru faza de urcare φ_u se obține între dreapta d_o , față de care se măsoară unghiul de profil θ_u și dreapta d_u ce unește punctul A cu punctul de intersecție al direcției de deplasare a tachtetului cu cercul de rază r_o .

Dacă excentricitatea tachtetului de translație este nulă atunci unghiurile de rotație sunt egale cu cele de profil iar distanța parcursă de tachtet este $h = R - r_o$.

1.3 Sinteza mecanismelor cu camă

Sinteza mecanismelor cu camă se realizează în mai multe etape, după cum urmează [12]:

- se adoptă o lege de mișcare pentru tachtet;
- se alege o schemă structurală a mecanismului cu camă și se determină dimensiunile de bază și gabaritul acestuia;
- se determină profilul camei prin metode analitice sau grafice.

Legea de mișcare poate fi dată în mai multe forme, în funcție de destinația mecanismului cu camă. De exemplu, pentru un mecanism din structura unui sistem automat de sortare se poate impune legea de variație a spațiului parcurs de tachtet. Sau dacă se urmărește limitarea forțelor de inerție din considerente dinamice, se poate impune legea de variație a accelerației tachtetului. În această situație trebuie să se țină cont de faptul că variațiile bruște ale accelerației, duc la apariția șocurilor în funcționarea mecanismului [4].

În continuare se vor prezenta câteva legi de mișcare care pot fi utilizate în sinteza mecanismelor cu camă.

1.3.1 Legea de mișcare cu accelerație zero

Se consideră că în faza de urcare, spațiul s parcurs de tachtet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după următoarea relație:

$$s = C_1\varphi + C_2 \quad (1.1)$$

Prin derivarea relației (1.1) de două ori în raport cu timpul se obține:

$$\frac{v}{\omega} = C_1 \quad (1.2)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = 0 \quad (1.3)$$

unde: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const$, iar C_1 și C_2 reprezintă constante ale căror valori se determină din condițiile la limită pentru faza de urcare.

La începutul fazei de urcare unghiul de rotație al camei și spațiul parcurs de tachtet sunt egale cu zero, adică $\varphi = 0$, $s = 0$ iar la finalul fazei unghiul de rotație are valoarea $\varphi = \varphi_u$ iar spațiul parcurs este egal cu cursa impusă tachtetului, adică $s = h$. Prin înlocuirea acestor valori în relațiile (1.1) și (1.5) rezultă expresiile constantelor:

$C_2 = 0$ și $C_1 = \frac{h}{\varphi_u}$. Prin urmare pentru faza de urcare, legea de mișcare cu accelerație zero poate fi exprimată astfel [10]:

$$\begin{cases} s = \frac{h}{\varphi_u} \varphi \\ \frac{v}{\omega} = \frac{h}{\varphi_u} \\ \frac{a}{\omega^2} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

În figura 1.6 este prezentată variația legii de mișcare cu accelerație zero pentru fazele de urcare și coborâre.

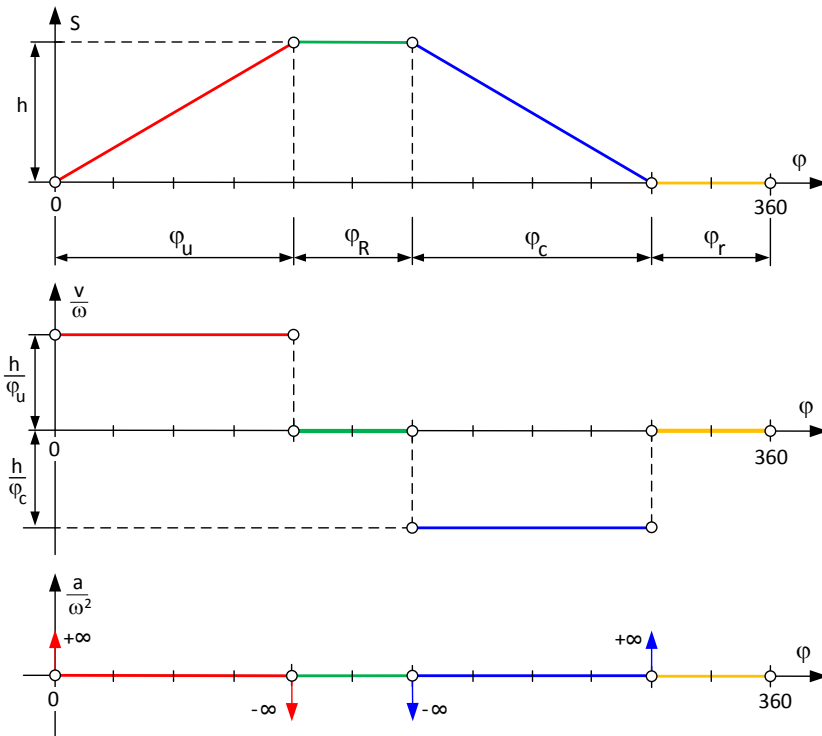


Fig.1.6 Legea de mișcare cu accelerație zero [10]

În fazele de urcare și coborâre viteza este constantă. Dar, trecerea de la o fază la alta este însoțită de variația bruscă a valorilor vitezei care determină, teoretic, valori infinite ale accelerației. Acest fenomen duce la apariția unor șocuri dure în funcționarea mecanismului, motiv pentru care legea de mișcare cu accelerație zero se utilizează pentru came cu viteze foarte mici de rotație.

1.3.2 Legea de mișcare cu accelerație constantă

Această lege de mișcare este numită și *legea de mișcare parabolică*, deoarece spațiul parcurs de tchet este format din două arce de parabolă. Viteza tchetului variază liniar având la începutul și sfârșitul fazei valoarea zero iar la mijlocul fazei valoarea maximă. Din acest motiv legea de mișcare este studiată pe două intervale [4].

În faza de urcare spațiul s parcurs de tchet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după următoarea relație:

$$s = C_1\varphi^2 + C_2\varphi + C_3 \quad (1.5)$$

Dacă se derivează relația (1.5) de două ori succesiv în raport cu timpul, rezultă:

$$\frac{v}{\omega} = 2C_1\varphi + C_2 \quad (1.6)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = 2C_1 \quad (1.7)$$

La începutul primului interval, condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$ iar la finalul aceluiași interval vor fi: $\varphi = \frac{\varphi_u}{2}$, $s = \frac{h}{2}$. Cu aceste valori, din relațiile (1.5) și (1.6) rezultă expresiile constantelor sub forma: $C_1 = \frac{2h}{\varphi_u^2}$, $C_2 = 0$ și $C_3 = 0$. Astfel, pentru prima jumătate a fazei de urcare, legea de mișcare cu accelerație constantă se poate scrie sub forma [4]:

$$s = \frac{2h}{\varphi_u^2}\varphi^2; \quad \frac{v}{\omega} = \frac{4h}{\varphi_u^2}\varphi; \quad \frac{a}{\omega^2} = \frac{4h}{\varphi_u^2} \quad (1.8)$$

Cel de-al doilea interval al fazei de urcare este caracterizat de următoarele condiții la limită: la începutul intervalului $\varphi = \frac{\varphi_u}{2}$, $s = \frac{h}{2}$ iar la final $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Cu aceste valori rezultă expresiile constantelor sub forma $C_1 = -\frac{4h}{\varphi_u^2}$, $C_2 = \frac{4h}{\varphi_u}$ și $C_3 = -h$. Înlocuind constantele în relațiile (1.5), (1.6) și (1.7) se obține expresia legii de mișcare cu accelerație constantă pentru cea de a doua jumătate a intervalului [4]:

$$s = h - \frac{2h}{\varphi_u^2}(\varphi_u - \varphi)^2; \quad \frac{v}{\omega} = \frac{4h}{\varphi_u^2}(\varphi_u - \varphi); \quad \frac{a}{\omega^2} = -\frac{4h}{\varphi_u^2} \quad (1.9)$$

Pentru determinarea legii de mișcare pentru faza de coborâre se utilizează relațiile (1.5), (1.6) și (1.7) și se scriu condițiile la limită pentru această fază. Variația

legii de mișcare cu accelerație constantă pentru faza de urcare și coborâre este reprezentată în figura 1.7

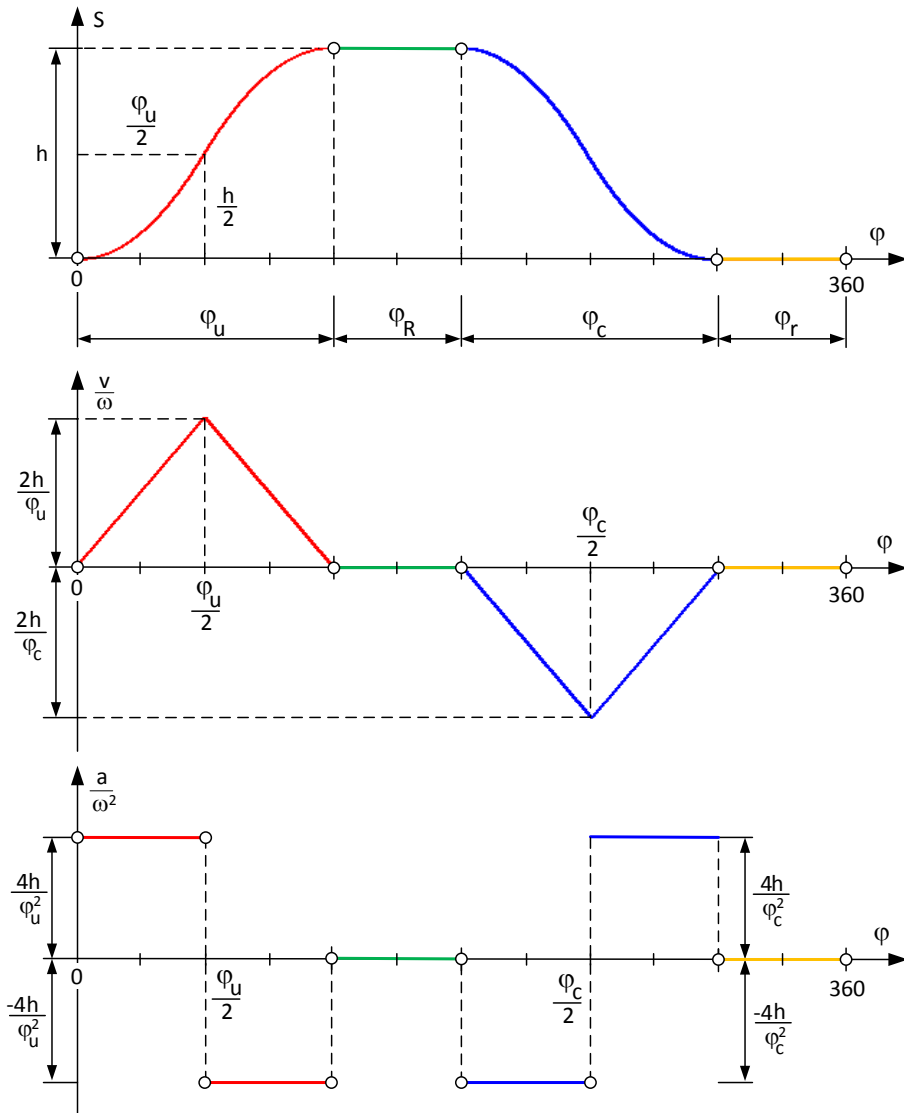


Fig.1.7 Legea de mișcare cu accelerație constantă [10]

La începutul, mijlocul și finalul fazelor de urcare și coborâre, accelerația are salturi bruște cu valori finite ceea ce are ca efect apariția unor șocuri moi în funcționarea mecanismului.

1.3.3 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală

La această lege de mișcare, perioada de variație a accelerației este egală cu dublul fazei active (urcare sau coborâre). Spațiul s parcurs de tchet în faza de urcare variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, după relația:

$$s = C_1 \cos k\varphi + C_2\varphi + C_3 \quad (1.10)$$

Prin derivarea relației (1.10) de două ori succesiv în raport cu timpul se obțin expresiile vitezei și accelerației după cum urmează:

$$\frac{v}{\omega} = -kC_1 \sin k\varphi + C_2 \quad (1.11)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = -k^2 C_1 \cos k\varphi \quad (1.12)$$

La începutul fazei de urcare condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$, iar la finalul fazei: $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Pe baza acestora, din relațiile de mai sus se obțin expresiile constantelor sub forma: $C_1 = -\frac{h}{2}$, $C_2 = 0$, $C_3 = \frac{h}{2}$ și $k = \frac{\pi}{\varphi_u}$.

Înlocuind constantele în relațiile (1.10), (1.11) și (1.12), legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală pentru faza de urcare, poate fi scrisă sub forma [4]:

$$\begin{cases} s_u = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi \right) \\ \frac{v_u}{\omega} = \frac{\pi h}{2\varphi_u} \cdot \sin \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi \\ \frac{a_u}{\omega^2} = \frac{\pi^2 h}{2\varphi_u^2} \cdot \cos \frac{\pi}{\varphi_u} \varphi \end{cases} \quad (1.13)$$

Valoarea maximă a vitezei se obține la jumătatea fazei active iar accelerația maximă la începutul și sfârșitul fazei active. Acestea pot fi exprimate cu relațiile :

$$\begin{cases} v_{max_u} = \frac{\pi h}{2\varphi_u} \cdot \omega \\ a_{max_u} = \frac{\pi^2 h}{2\varphi_u^2} \cdot \omega^2 \end{cases} \quad (1.14)$$

În figura 1.8 este reprezentată variația legii de mișcare cu accelerație cosinusoidală pentru fazele de urcare și coborâre. Se observă că la începutul și sfârșitul

fazelor, există salturi finite ale valorii accelerației, ceea ce poate duce la apariția șocurilor moi în funcționarea mecanismului.

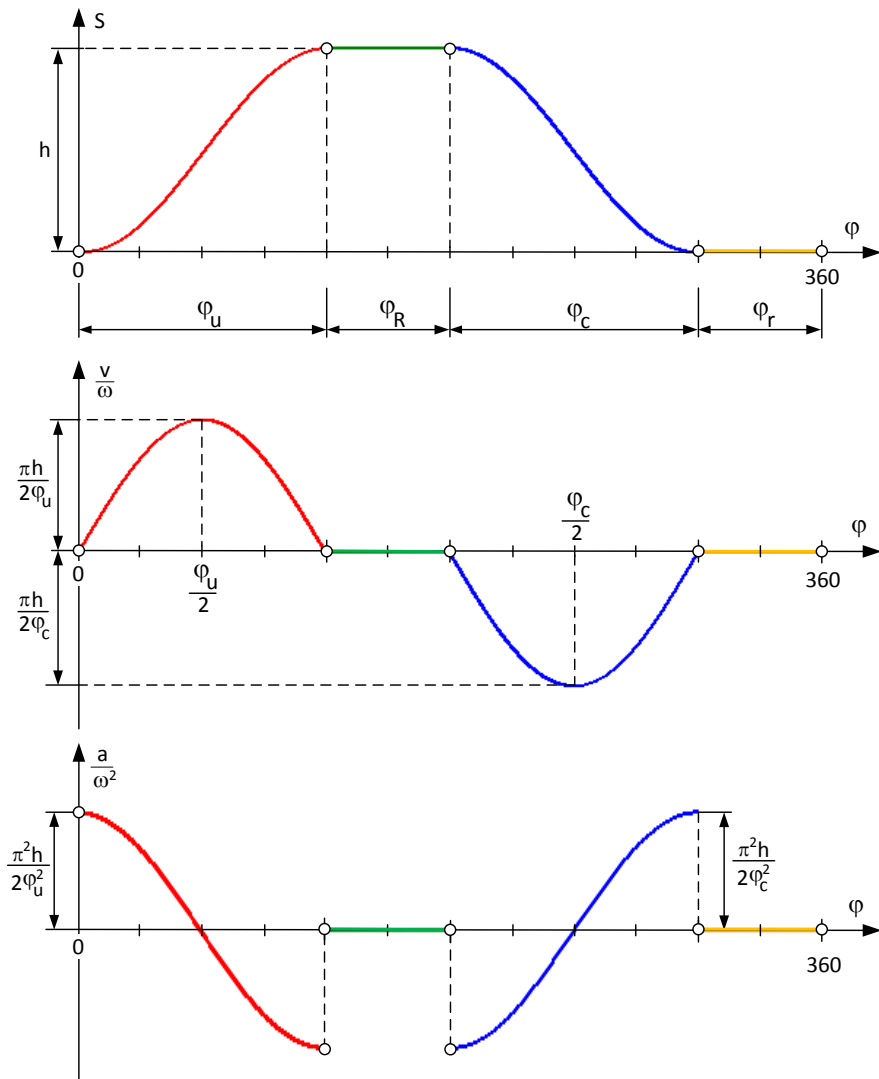


Fig.1.8 Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală [10]

Pentru determinarea expresiei legii de mișcare pentru faza de coborâre se utilizează relațiile (1.10), (1.11) și (1.12), cu condițiile la limită pentru această fază, adică $\varphi = \varphi_u + \varphi_r$, $s = h$, $v = 0$ la începutul fazei și $\varphi = \varphi_u + \varphi_r + \varphi_c$, $s = 0$, $v = 0$ la final. Prin urmare legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală pentru faza de coborâre, are următoarea expresie:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_c = h - \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_c} \varphi \right) \\ \frac{v_c}{\omega} = -\frac{\pi h}{2\varphi_c} \cdot \sin \frac{\pi}{\varphi_c} \varphi \\ \frac{a_c}{\omega^2} = -\frac{\pi^2 h}{2\varphi_c^2} \cdot \cos \frac{\pi}{\varphi_c} \varphi \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Valorile maxime ale vitezei și accelerației pot fi exprimate cu relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{max_c} = -\frac{\pi h}{2\varphi_c} \cdot \omega \\ a_{max_c} = -\frac{\pi^2 h}{2\varphi_c^2} \cdot \omega^2 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

1.3.4 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală

În cazul acestei legi de mișcare, perioada de variație a accelerației este egală cu faza activă (urcare sau coborâre). Pentru faza de urcare, spațiul s parcurs de tachtet variază în funcție de unghiul φ de rotație al camei, conform relației:

$$s = C_1 \sin k\varphi + C_2\varphi + C_3 \quad (1.17)$$

Prin derivarea relației (1.17) de două ori succesiv în raport cu timpul, rezultă expresiile vitezei și accelerației sub forma:

$$\frac{v}{\omega} = kC_1 \cos k\varphi + C_2 \quad (1.18)$$

$$\frac{a}{\omega^2} = -k^2 C_1 \sin k\varphi \quad (1.19)$$

Pentru începutul fazei de urcare condițiile la limită sunt: $\varphi = 0$, $s = 0$, $v = 0$, iar pentru finalul fazei: $\varphi = \varphi_u$, $s = h$, $v = 0$. Din relațiile (1.17) și (1.18) rezultă valorile constantelor: $C_1 = -\frac{h}{2\pi}$, $C_2 = \frac{h}{\varphi_u}$, $C_3 = 0$ și $k = \frac{2\pi}{\varphi_u}$.

Înlocuind constantele în relațiile (1.17), (1.18) și (1.19), legea de mișcare cu accelerație sinusoidală are următoarea expresie [4]:

$$\begin{cases} s_u = h \left(\frac{\varphi}{\varphi_u} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi \right) \\ \frac{v_u}{\omega} = \frac{h}{\varphi_u} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi \right) \\ \frac{a_u}{\omega^2} = \frac{2\pi h}{\varphi_u^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{\varphi_u} \varphi \end{cases} \quad (1.20)$$

Viteza maximă a tachelului este la jumătatea fazei, iar accelerația maximă se obține pentru $\varphi = \frac{\varphi_u}{4}$. Acestea au expresiile:

$$\begin{cases} v_{max_u} = \frac{2h}{\varphi_u} \cdot \omega \\ a_{max_u} = \frac{2\pi h}{\varphi_u^2} \cdot \omega^2 \end{cases} \quad (1.21)$$

Pentru determinarea expresiei legii de mișcare pentru faza de coborâre, se procedează ca și în cazul legii de mișcare cu accelerație cosinusoidală. Rezultă astfel:

$$\begin{cases} s_c = h - h \left(\frac{\varphi}{\varphi_c} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_c} \varphi \right) \\ \frac{v_c}{\omega} = -\frac{h}{\varphi_c} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_c} \varphi \right) \\ \frac{a_c}{\omega^2} = -\frac{2\pi h}{\varphi_c^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{\varphi_c} \varphi. \end{cases} \quad (1.22)$$

Viteza maximă a tachelului respectiv accelerația maximă a acestuia, în faza de coborâre, se pot determina cu relațiile :

$$\begin{cases} v_{max_c} = -\frac{2h}{\varphi_c} \cdot \omega \\ a_{max_c} = -\frac{2\pi h}{\varphi_c^2} \cdot \omega^2 \end{cases} \quad (1.23)$$

În figura 1.9 este reprezentată variația legii de mișcare cu accelerație sinusoidală pentru fazele de urcare și coborâre. După cum se poate observa, accelerația nu prezintă salturi, prin urmare nu vor apărea șocuri în funcționarea mecanismului cu camă. Prin comparație cu legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală și cea cu accelerație constantă, în cazul acestei legi amplitudinea accelerației este mult mai mare, ceea ce poate constitui un dezavantaj.

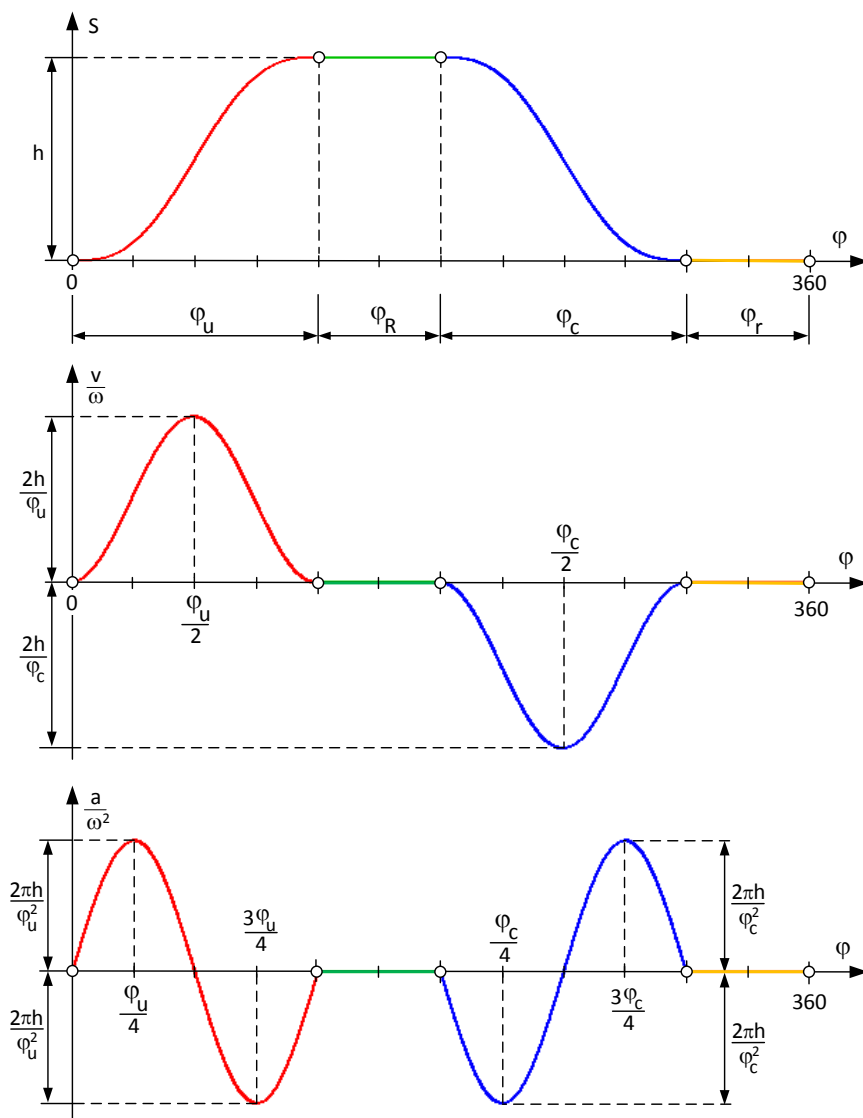


Fig.1.9 Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală [10]

1.3.5 Determinarea razei cercului de bază la mecanismul cu camă și tchet de translație

Profilul camei pe care se află tchetul în faza de repaus inferior este determinat de *cercul de bază* al camei. Pentru o anumită cursă h impusă tchetului, raza acestui cerc împreună cu excentricitatea e a tchetului definesc dimensiunile de gabarit ale mecanismului cu camă.

Considerăm mecanismul cu camă și tchet de translație din figura 1.10. Cama 1 se rotește în jurul punctului A cu o viteză unghiulară ω și imprimă tchetului 2 o mișcare de translație cu viteza \vec{v}_B . Între direcția mișcării tchetului și normala $n-n$ dusă prin punctul de contact B se formează unghiul α numit *unghi de presiune* iar între normala $n-n$ și direcția axei x este unghiul τ numit *unghi de transmitere*. Cele două unghiuri sunt complementare $\alpha + \tau = 90^\circ$. După cum se va vedea din paragraful 1.4, buna funcționare a mecanismelor cu camă este condiționată de limitarea valorii acestor unghiuri. De aceea, determinarea razei cercului de bază trebuie precedată de stabilirea unei relații de legătură, de exemplu între valoarea unghiului de transmitere și dimensiunile geometrice ale mecanismului cu camă.

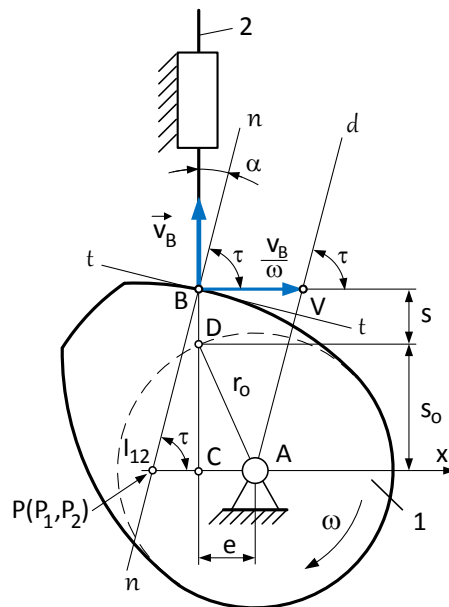


Fig.1.10 Legătura între unghiul de transmitere și dimensiunile geometrice ale camei

La intersecția normalei $n-n$ la profilul camei cu direcția axei x se găsește *centrul instantaneu de rotație* I_{12} . În acest punct viteza relativă dintre două puncte P_1 și P_2 suprapuse dar aparținând camei respectiv tchetului, este nulă. Se poate scrie astfel:

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2} + \vec{v}_{P_1P_2} \text{ unde } \vec{v}_{P_1P_2} = 0. \quad (1.24)$$

Ținând cont de faptul că $\vec{v}_{P_1} = \omega \cdot AP$ și $\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_B$, din relația (1.24) rezultă:

$$AP = \frac{v_B}{\omega} \quad (1.25)$$

În triunghiul dreptunghic BCP se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{s_0 + s}{PC} \quad (1.26)$$

unde: $PC = AP - e$ sau ținând cont de relația (1.25), $PC = \frac{v_B}{\omega} - e$

s – distanța parcursă de tchet

În funcție de mărimea razei r_0 și a excentricității e , tchetul nu va putea coborî, mai jos de cota s_0 măsurată față de centrul de rotație al camei. Aceasta se poate determina din triunghiul dreptunghic ACD pe baza relației:

$$s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2} \quad (1.27)$$

Pentru o excentricitate e impusă, relația (1.27) stabilește o legătură directă între cota s_0 și raza r_0 . Din relațiile (1.27) și (1.26) rezultă:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}}{\frac{v_B}{\omega} \pm e} \quad (1.28)$$

Din relația de mai sus se observă că valoarea unghiului de transmitere depinde de valoarea razei r_0 și a excentricității e . Pentru că relația este valabilă pentru orice poziție a tchetului față de camă, valoarea unghiului de transmitere este variabilă.

O funcționare corespunzătoare a mecanismului cu camă implică o bună transmitere a forțelor, adică o valoare cât mai mare a unghiului de transmitere. Aceasta duce creșterea valorii razei r_0 a cercului de bază și deci la un gabarit crescut al mecanismului cu camă. Un mecanism cu camă cu dimensiuni mai reduse, duce implicit la scăderea valorii unghiului de transmitere ceea ce are ca efect înrăutățirea condițiilor de transmitere a forțelor sau chiar blocarea mecanismului. Determinarea razei cercului de bază trebuie deci făcută în strânsă legătură cu limitarea valorii unghiului de transmitere, respectându-se condiția:

$$\operatorname{tg} \tau_{adm} \leq \frac{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}}{\frac{v_B}{\omega} \pm e} \quad (1.29)$$

unde: $\tau_{adm} = 45 \dots 75^\circ$ [4], [9].

Dacă prin centrul de rotație al camei se duce o paralelă la normala $n - n$ iar prin punctul B o paralelă la direcția axei orizontale, rezultă un segment a cărui mărime, conform figurii 1.10, poate fi exprimată astfel:

$$BV = AP = \frac{v_B}{\omega} \quad (1.30)$$

Dreapta d ce unește punctul V cu centrul de rotație al camei face cu direcția axei x unghiul τ . Dacă se impune unghiul de transmitere admisibil și se cunoaște legea de variație a vitezei tachelului $\frac{v_B}{\omega}(\varphi)$, se poate determina zona în care poate fi ales centrul de rotație al camei față de direcția de deplasare a tachelului și astfel se poate determina valoarea minimă a razei cercului de bază [4], [10].

Pentru determinarea valorii minime a razei r_0 în funcție de valoarea unghiului de transmitere admisibil, se parcurg următoarele etape (fig.1.11) [10]:

- Se reprezintă grafic legea de variație a spațiului $s(\varphi)$ și vitezei $\frac{v_B}{\omega}(\varphi)$ pentru fazele de urcare și coborâre și se împart unghiurile φ_u și φ_c într-un număr de intervale egale.
- Pe dreapta $y - y$ care reprezintă direcția de mișcare a tachelului, se măsoară începând din punctul B segmente care reprezintă cursa s a tachelului pentru rotația camei cu unghiurile $\varphi_1, \varphi_2 \dots$

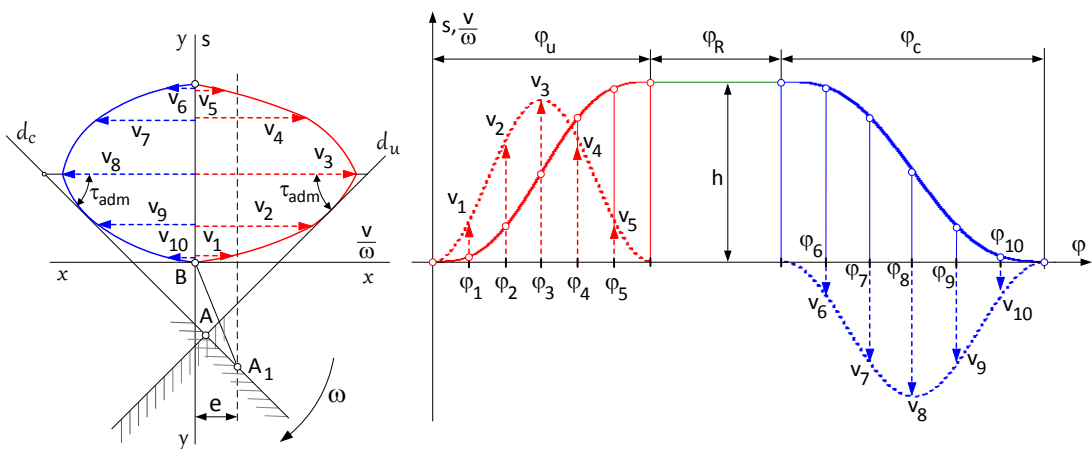


Fig.1.11 Determinarea razei cercului de bază al camei cu tachel de translație [10]

- În punctele astfel obținute se plasează vectorii $v_1, v_2 \dots$ roțiți cu 90° în sensul vitezei de rotație a camei;

- Se unesc vârfurile vectorilor, rezultând astfel câte o curbă închisă pentru urcare și coborâre;

- Se trasează dreptele d_u și d_c care formează cu dreapta $x - x$ unghiul τ_{adm} și sunt tangente la curba închisă obținută anterior. Cele două drepte se vor intersecta în punctul A situat, sub punctul B , de o parte sau de alta a direcției de deplasare a tachelului. Dacă fazele de urcare și coborâre sunt simetrice și valorile vitezelor sunt egale, punctul de intersecție al dreptelor d_u și d_c se poate găsi chiar pe direcția de deplasare a tachelului. Pentru ca să nu fie depășită valoarea unghiului de presiune admisibil, centrul de rotație al camei se alege în zona dublu hașurată.

- Dacă valoarea excentricității tachelului este egală cu zero, atunci punctul A este centrul de rotație al camei iar raza minimă a cercului de bază este $r_o = AB$

- În cazul în care valoarea excentricității e este diferită de zero, se trasează o dreaptă paralelă cu dreapta $y - y$ la o distanță egală cu e . Aceasta va intersecta zona dublu hașurată de exemplu în punctul A_1 . În acest caz, centrul de rotație al camei va fi punctul A_1 iar raza minimă a cercului de bază, $r_o = A_1B$.

1.3.6 Determinarea razei cercului de bază la mecanismul cu camă și tachel oscilant

Se consideră mecanismul din figura 1.12 format din cama 1 care se poate roti în jurul punctului A cu o viteză unghiulară ω_1 cunoscută și imprimă tachelului 2 o mișcare de oscilație în jurul punctului C cu viteza unghiulară ω_2 .

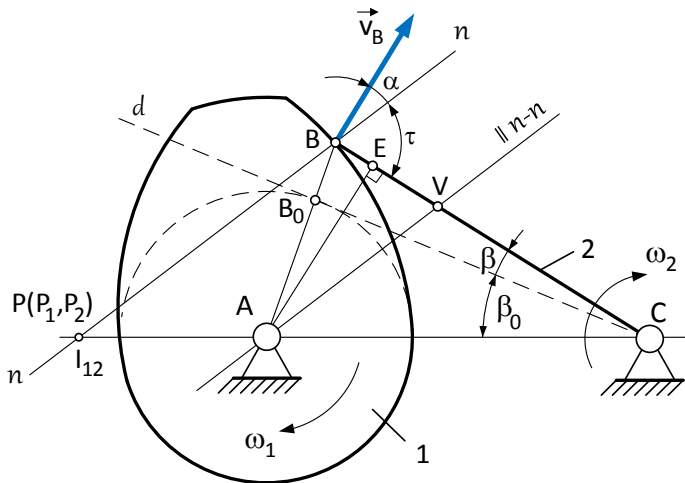


Fig.1.12 Legătura între unghiul de transmitere și dimensiunile geometrice ale camei cu tachel oscilant

Între direcția vectorului vitezei punctului B notat cu v_B și normala $n-n$ dusă prin punctul de contact dintre camă și tchet se formează unghiul de presiune α iar între normala $n-n$ și segmentul BC este unghiul de transmitere τ . Segmentul BC reprezintă distanța dintre centrul de oscilație al tchetului și punctul de contact al acestuia cu profilul camei.

La intersecția normalei $n-n$ la profilul camei cu direcția dreptei care unește punctele A și C se află centrul instantaneu de rotație I_{12} , unde viteza relativă dintre două puncte P_1 și P_2 suprapuse dar aparținând camei respectiv tchetului oscilant, este nulă. Se poate scrie astfel:

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2} + \vec{v}_{P_1P_2} \text{ unde } \vec{v}_{P_1P_2} = 0. \quad (1.31)$$

Ținând cont de faptul că $\vec{v}_{P_1} = \omega_1 \cdot AP$ și $\vec{v}_{P_2} = \omega_2 \cdot CP$ din relația de mai sus rezultă:

$$\frac{AP}{CP} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21} \quad (1.32)$$

Pentru că triunghiurile ΔACV și ΔPCB sunt asemenea, se poate scrie:

$$BV = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot CB = \frac{v_B}{\omega_1} \quad (1.33)$$

Din triunghiul dreptunghic ΔAEV rezultă:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{AE}{EV} = \frac{AC \cdot \sin(\beta_0 + \beta)}{BV - BE} = \frac{AC \cdot \sin(\beta_0 + \beta)}{\frac{v_B}{\omega_1} - [CB - AC \cdot \cos(\beta_0 + \beta)]} \quad (1.34)$$

unde: β este unghiul de oscilație al tchetului care depinde de unghiul de rotație al camei.

Și în acest caz o funcționare corespunzătoare a mecanismului cu camă implică o valoare cât mai mare a unghiului de transmitere ceea ce va duce la creșterea gabariturii mecanismului. Raza cercului de bază poate fi exprimată în funcție de unghiul β_0 , din triunghiul AB_0C cu următoarea relație:

$$r_0 = AB_0 = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \beta_0} \quad (1.35)$$

Relația (1.34) este valabilă pentru orice poziție a camei și tchetului, prin urmare valoarea unghiului de transmitere este variabilă. Și în acest caz determinarea

razei cercului de bază trebuie făcută în strânsă legătură cu limitarea valorii unghiului de transmitere, respectându-se următoarea condiție:

$$\operatorname{tg} \tau_a \leq \frac{AC \cdot \sin(\beta_0 + \beta)}{\frac{v_B}{\omega_1} - [CB - AC \cdot \cos(\beta_0 + \beta)]} \quad (1.36)$$

unde: $\tau_{adm} = 25^\circ$ [4], [9].

În figura 1.12 se observă că, dreapta paralelă la $n-n$ dusă prin punctul prin A va intersecta segmentul BC în punctul V . Mărimea segmentului BV astfel obținut, este dată de relația (1.33). Unghiul dintre dreapta paralelă la $n-n$ și segmentul BC este chiar unghiul de transmitere τ . În plus segmentul BV se poate obține prin rotirea cu 90° a vectorului vitezei $\frac{v_B}{\omega_1}$ în sensul vitezei ω_1 de rotație a camei. Atunci când se impune un unghi de transmitere admisibil și se cunoaște legea de variație a vitezei tchetului, se poate determina grafic raza r_0 a cercului de bază cu respectarea condiției (1.36). Această metodă de determinare este descrisă pe larg în [4] și [12].

1.3.7 Determinarea profilului camei cu tchet de translație

După obținerea valorii razei cercului de bază al camei în funcție de unghiul de presiune admisibil, se poate determina profilul camei. Acesta poate fi determinat analitic sau grafic.

Coordonatele polare ale unui punct de pe *profilul teoretic* al camei sunt date de relațiile [4],[10]:

$$r_i = \sqrt{(s_0 + s_i)^2 + e^2} \quad \text{unde } s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}$$

$$\theta_i = \varphi_i \mp \operatorname{arctg} \frac{e \cdot s_i}{e^2 + (s_0 + s_i)s_0} \quad (1.37)$$

unde: r_0 – reprezintă raza cercului de bază,
 e – este excentricitatea tchetului,
 s_i – spațiul parcurs de tchet în faza activă (urcare sau coborâre),
 φ_i – unghiul de rotație (fază) al camei.

La mecanismele cu camă la care tchetul este prevăzut cu rolă, *profilul teoretic* trece prin centrul rolei. *Profilul practic* al camei este cel care vine în contact cu rola (fig.1.13)

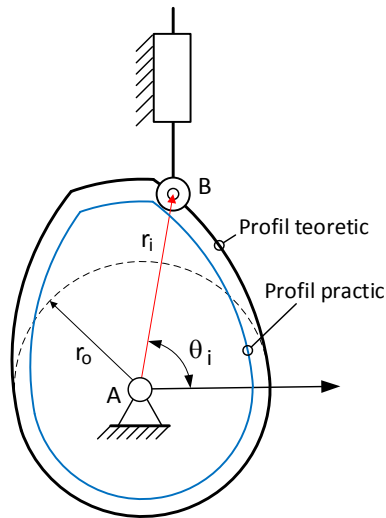


Fig.1.13 Profilul teoretic și practic al camei cu tchet de translație

Pentru determinarea grafică a profilului camei trebuie cunoscute: legea de mișcare și cursa h impuse tchetului, sensul de rotație al camei, raza cercului de bază r_0 , raza rolei tchetului r , excentricitatea e și unghiurile de rotație ale camei corespunzătoare celor patru faze adică $\varphi_u, \varphi_c, \varphi_R, \varphi_r$. Se parcurg următoarele etape [10]:

- Pe graficul de variație al spațiului parcurs de tchet în funcție de unghiul de rotație al camei, se împart fazele de urcare și coborâre într-un număr egal de intervale după cum rezultă din figura 1.14. Pentru unghiurile de rotație $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ se obțin astfel distanțele parcurse de tchet notate cu $s_1, s_2 \dots$

- Față de dreapta verticală $y - y$ care reprezintă direcția de deplasare a tchetului se trasează o dreaptă la distanța e (la dreapta sau la stânga în funcție de semnul excentricității). Cunoscând raza r_0 , se determină centrul de rotație al camei care în figura 1.14, este punctul A. Cercul de rază r_0 și dreapta $y - y$ se intersectează în punctul b_0 care reprezintă poziția de referință a tchetului.

- Pornind din punctul b_0 se măsoară distanțele $s_1, s_2 \dots$ rezultând astfel punctele $b_1, b_2 \dots$ pe dreapta $y - y$.

- Pentru determinarea primului punct C_1 de pe profilul camei, se rotește segmentul Ab_1 cu unghiul φ_1 în sens invers vitezei unghiulare ω_1 . Dacă profilul camei ar fi cunoscut, atunci la o rotație a acesteia cu unghiul φ_1 , tchetul se va deplasa din b_0 în b_1 și va veni în contact cu cama în punctul C_1 .

- Pentru determinarea punctului C_2 de pe profilul camei, se va roti segmentul Ab_2 cu unghiul φ_2 în sens invers vitezei unghiulare ω_1 . Se procedează similar și pentru celelalte puncte de pe profilul camei în faza de urcare

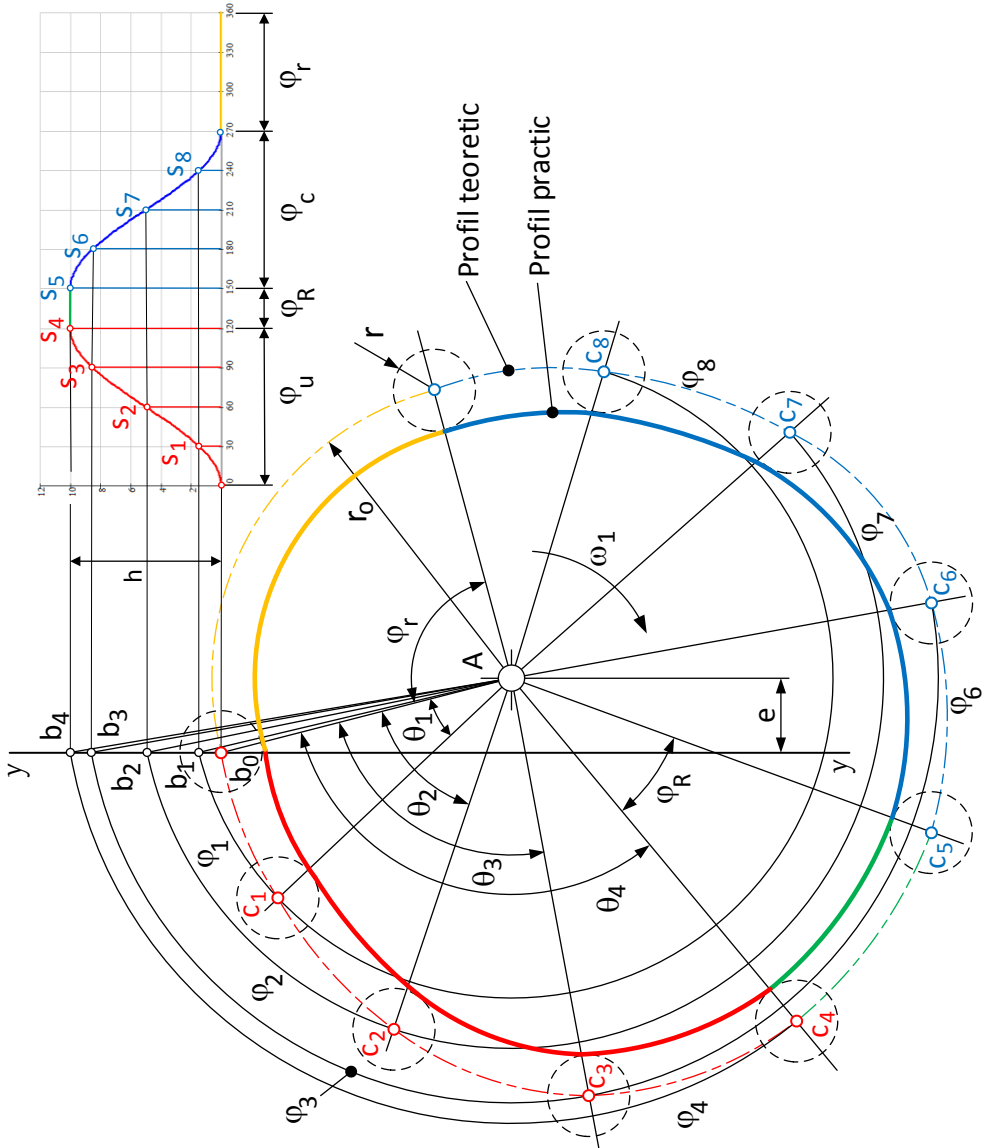


Fig.1.14 Construirea profilului camei cu tachtet de translație [10]

- În faza de repaus superior profilul camei este un arc de cerc cu raza Ab_4 cu unghiul la centru egal cu φ_R , după cum se observă din figura 1.14.

- Pentru determinarea punctelor de pe profilul camei corespunzător fazei de coborâre se procedează similar. În faza de repaus inferior profilul camei este un arc de cerc cu raza r_0 și unghiul la centru φ_r .

- Se aproximează cu o curbă punctele $C_1, C_2 \dots$ determinate anterior rezultând astfel *profilul teoretic* al camei. *Profilul practic* se obține scăzând din profilul teoretic raza rolei de pe tachtet.

1.3.8 Determinarea profilului camei cu tachtet oscilant

Coordonatele polare ale unui punct de pe *profilul teoretic* al camei cu tachtet oscilant din figura 1.15 sunt date de relațiile [4]:

$$r_i = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos(\beta_0 + \beta_i)}$$

$$\theta_i = \varphi_i - \left\{ \arcsin\left(\frac{BC}{r_0} \sin \beta_0\right) - \arcsin\left(\frac{BC}{r_0} \sin(\beta_0 + \beta_i)\right) \right\} \quad (1.38)$$

unde: r_0 – reprezintă raza cercului de bază,
 φ_i – unghiul de rotație (fază) al camei.
 β_i - unghiul de oscilație al tachtetului

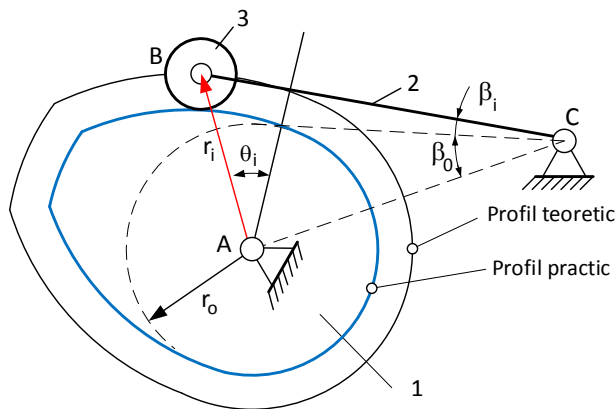


Fig.1.15 Profilul teoretic și practic al camei cu tachtet oscilant

Pentru determinarea grafică a profilului camei cu tachtet oscilant (fig.1.16) trebuie cunoscute: legea de mișcare și unghiul de oscilație β impuse tachtetului, sensul de rotație al camei, raza cercului de bază r_0 , raza rolei tachtetului r și unghiurile de rotație ale camei corespunzătoare celor patru faze adică $\varphi_u, \varphi_c, \varphi_R, \varphi_r$.

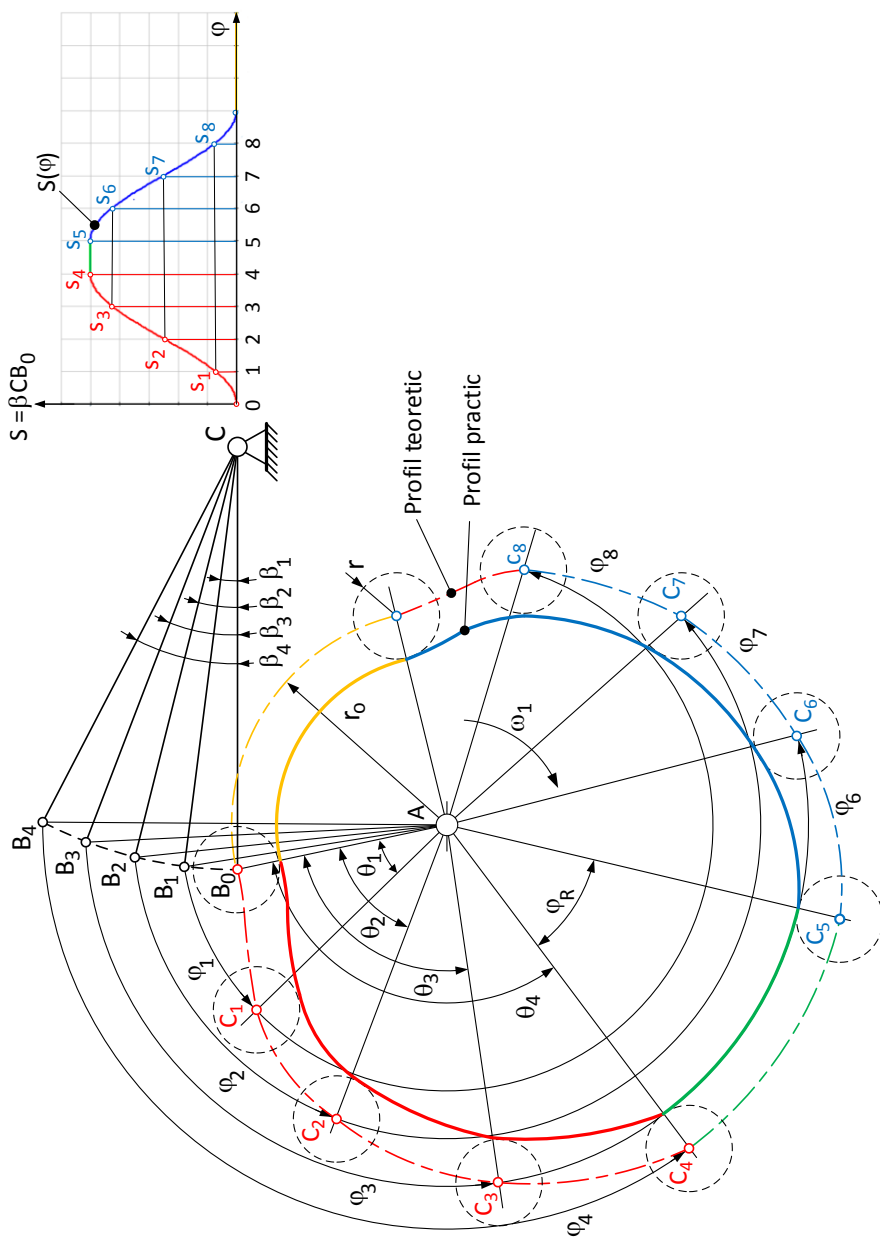


Fig.1.16 Construirea profilului camei cu tachtet oscilant

Se parcurg următoarele etape [4]:

- Pe graficul de variație al spațiului parcurs de vârful tachtetului în funcție de unghiul de rotație al camei, se împart fazele de urcare și coborâre într-un număr egal

de intervale după cum rezultă din figura 2.16. Pentru unghiurile de rotație $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ se obțin astfel distanțele parcurse de tchet notate cu $s_1, s_2 \dots$

- Distanțele astfel obținute se transpun pe arcul descris de vârful tchetului, începând din punctul B_0 . Astfel $B_0B_1 = s_1, B_0B_2 = s_2, \dots$

- Se unesc punctele B_0, B_1, \dots cu centrul A de rotație al camei. Acesta se poate determina dacă se cunosc raza r_0 a cercului de bază al camei și distanța AC

- Atunci când tchetul ocupă cea mai de jos poziție, va fi în contact cu profilul camei în punctul B_0 . Practic primul punct al profilului camei va fi $C_0 = B_0$. Pentru ca un punct C_i de pe profilul camei să vină în contact cu vârful tchetului în punctul B_i , cama trebuie să se rotească în jurul punctului A cu unghiul φ_i în sensul vitezei unghiulare ω_1 .

- Pentru determinarea poziției următorului punct C_1 de pe profilul camei se rotește segmentul AB_1 cu unghiul φ_1 în sens contrar vitezei unghiulare ω_1 . În mod similar se obțin și restul punctelor aferente profilului camei în faza de urcare.

- În faza de repaus superior profilul camei este un arc de cerc cu raza AB_4 cu unghiul la centru egal cu φ_R , după cum se observă din figura 1.16.

- Pentru determinarea punctelor de pe profilul camei corespunzător fazei de coborâre se procedează similar. În faza de repaus inferior profilul camei este un arc de cerc cu raza r_0 și unghiul la centru φ_r .

- Se aproximează cu o curbă punctele $C_1, C_2 \dots$ determinate anterior rezultând astfel *profilul teoretic* al camei. *Profilul practic* se obține scăzând din profilul teoretic raza rolei care, la acest mecanism, este bine să fie cât mai mare pentru reducerea solicitării la presiunea de contact

1.4 Analiza cinetostatică a mecanismelor cu camă

Realizarea unei anumite legi de mișcare impune tchetului este condiționată de evitarea fenomenului de autoblocare a mecanismului cu camă. Prin urmare, mecanismul trebuie proiectat astfel încât să asigure transmiterea în bune condiții a forțelor.

1.4.1 Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă și tchet de translație

Se consideră mecanismul cu camă și tchet de translație reprezentat în figura 1.17, asupra căruia acționează din exterior, forța \vec{F} . Cama 1 se rotește cu viteza

unghiulară ω_1 și pune în mișcare tachelul 2 acționând asupra lui cu forța \vec{F}_{12} pe direcția normalei în punctul de contact B. Forța \vec{F}_{12} trebuie să învingă forța exterioară \vec{F} , și forțele de frecare produse de reacțiunile \vec{N}_1 și \vec{N}_2 .

Între direcțiile vectorilor \vec{F}_{12} și \vec{v}_B se formează unghiul de presiune α , iar între direcția vectorului \vec{F}_{12} și direcția axei x este unghiul de transmitere τ .

Se consideră că întregul sistem este în echilibru static sub acțiunea forțelor. Se poate scrie astfel:

$$F_{12} \sin \tau - F - \mu N_1 - \mu N_2 = 0 \quad (1.39)$$

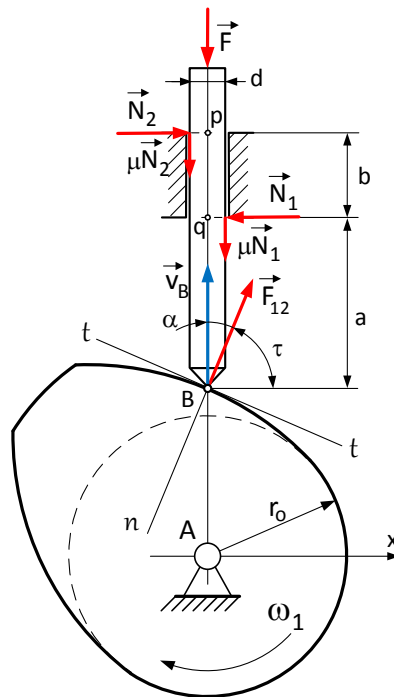


Fig. 1.17 Forțele din mecanismul cu camă și tachel de translație [10]

Se scriu ecuațiile de momente față de punctele q și p situate axa de simetrie a tachelului:

$$\begin{aligned} -aF_{12} \cos \tau + bN_2 + \mu N_1 \frac{d}{2} - \mu N_2 \frac{d}{2} &= 0 \\ -(a + b)F_{12} \cos \tau + bN_1 + \mu N_1 \frac{d}{2} - \mu N_2 \frac{d}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Momentele de frecare $\mu N_1 \frac{d}{2}$ și $\mu N_2 \frac{d}{2}$ din relațiile de mai sus nu se iau în considerare deoarece au valori neglijabile. Rezultă astfel expresiile reacțiunilor N_1 și N_2 sub forma:

$$N_1 = \frac{a+b}{b} F_{12} \cos \tau \quad (1.41)$$

$$N_2 = \frac{a}{b} F_{12} \cos \tau \quad (1.42)$$

Înlocuind relațiile (1.41) și (1.42) în relația (1.39) se obține expresia forței F_{12} astfel:

$$F_{12} = \frac{F}{\sin \tau - \mu \left(\frac{2a+b}{b} \right) \cos \tau} \quad (1.43)$$

unde: μ – reprezintă coeficientul de frecare dintre tchet și ghidaj,

b – lungimea ghidajului,

a – distanța între punctul de contact și ghidaj (în general $b \approx 2a$).

Dacă $\tau = 90$ reacțiunile N_1 și N_2 sunt nule și $\vec{F}_{12} = \vec{F}$. Dacă valoarea unghiului de transmitere τ scade, numitorul relației (1.43) se micșorează. Prin urmare valoarea forței \vec{F}_{12} , necesară pentru învingerea forței rezistente \vec{F} , crește. În cazul în care numitorul se anulează, forța \vec{F}_{12} are teoretic o valoare infinită. Unghiul de transmitere corespunzător acestei situații, se numește *unghi de transmitere critic* τ_{cr} și se poate determina în funcție de lungimea tchetului și a ghidajului, cu relația:

$$\operatorname{tg} \tau_{cr} = \mu \left(\frac{2a+b}{b} \right) \quad (1.44)$$

Ajungerea în această situație echivalează cu autoblocarea mecanismului deoarece pentru învingerea unei forțe \vec{F} oricât de mică, este necesar din partea camei o forță \vec{F}_{12} exagerat de mare. Pentru o funcționare corespunzătoare a mecanismului cu camă și tchet de translație este necesar să se respecte următoarea condiție:

$$\tau \geq \tau_{adm} > \tau_{cr} \quad (1.45)$$

în care $\tau_{adm} = 45 \dots 75^\circ$ este unghiul de transmitere admisibil, iar τ_{cr} reprezintă unghiul de transmitere critic [8], [9].

Pentru a putea ține seama de limitarea valorii unghiului de transmitere, este necesar să se stabilească o legătură între acest unghi și dimensiunile camei (vezi paragraful 1.3.5).

1.4.2 Transmiterea forțelor la mecanismul cu camă și tchet oscilant

Se consideră mecanismul cu camă și tchet oscilant din figura 1.18, asupra căruia acționează din exterior, momentul M . Cama 1 se rotește cu viteza unghiulară ω_1 și pune în mișcare tchetul 2 acționând asupra lui cu forța \vec{F}_{12} pe direcția normalei în punctul de contact B. În cupla C vor apărea reacțiunea $\vec{F}_{02} = -\vec{F}_{12}$ și momentul de frecare $M_f = F_{02} \cdot \mu \cdot r$, în care μ reprezintă coeficientul de frecare din cuplă iar r este raza axului.

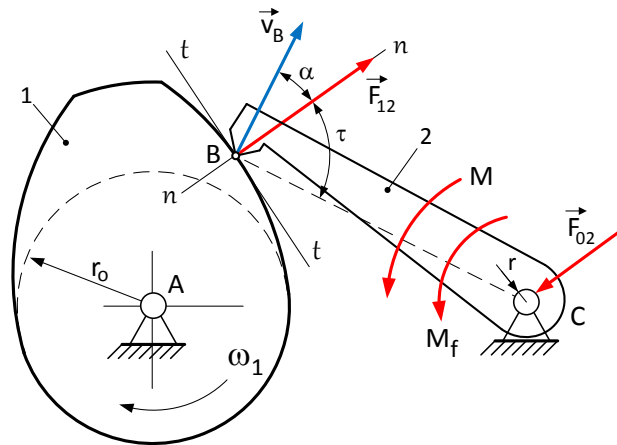


Fig. 1.18 Forțele și momentele din mecanismul cu camă și tchet oscilant

Se scrie ecuația de echilibru a tchetului 2 sub forma momentelor față de punctul C:

$$F_{12}L \sin \tau - M - M_f = 0 \quad (1.46)$$

Din relația de mai sus se poate obține expresia forței \vec{F}_{12} astfel:

$$F_{12} = \frac{M}{L \sin \tau - \mu r} = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{\sin \tau - \mu \frac{r}{L}} \quad (1.47)$$

În cazul în care valoarea unghiului de transmitere τ descrește, numitorul relației (1.47) se micșorează și valoarea forței \vec{F}_{12} , necesară pentru învingerea momentului rezistent M , crește. Dacă numitorul se anulează, forța \vec{F}_{12} are teoretic o valoare infinită. Unghiul de transmitere corespunzător acestei situații, se numește *unghi de transmitere critic* τ_{cr} și se poate determina cu relația:

$$\sin \tau_{cr} = \mu \frac{r}{L} \quad (1.48)$$

Pentru o funcționare corespunzătoare a mecanismului cu camă și tchet oscilant este necesar să se respecte relația (1.45) în care $\tau_{adm} = 25^\circ$.

1.5 Exemplu

Se consideră un mecanism cu camă și tchet de translație la care legea de mișcare impusă tchetului are următoarele caracteristici: cursa maximă $h = 10 \text{ mm}$, unghiurile de fază pentru urcare $\varphi_u = 90^\circ$, coborâre $\varphi_c = 120^\circ$, repaus superior $\varphi_R = 60^\circ$ și repaus inferior $\varphi_r = 90^\circ$. Pentru faza de urcare se impune o lege de variație cu accelerație constantă iar pentru coborâre cu accelerație cosinusoidală. Excentricitatea tchetului este $e = 5 \text{ mm}$, iar unghiul de transmitere admisibil este $\tau_{adm} = 45^\circ$. Se cere reprezentarea grafică a legilor de mișcare și determinarea profilului camei.

Pentru reprezentarea grafică a legilor de mișcare se utilizează relațiile (1.8) și (1.9) pentru faza de urcare, respectiv (1.15) pentru faza de coborâre. Valoarea razei cercului de bază se determină prin metoda descrisă în paragraful 1.3.5 și pentru valoarea impusă unghiului de transmitere, se obține $r_0 \approx 20 \text{ mm}$. Pentru determinarea profilului camei s-au utilizat relațiile (1.37). Rezultatele obținute sunt prezentate în figurile 1.19 și 1.20.

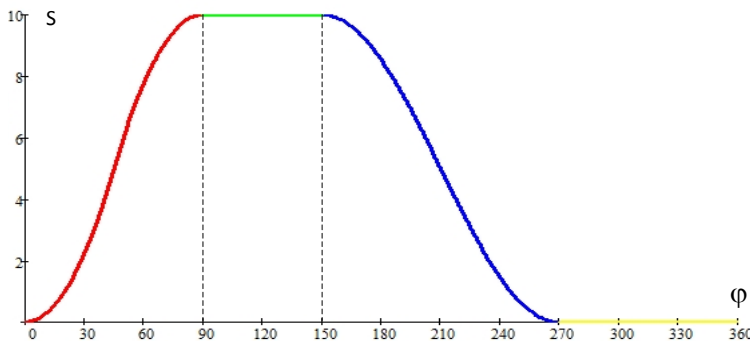


Fig. 1.19 Variația legilor de mișcare impuse tchetului

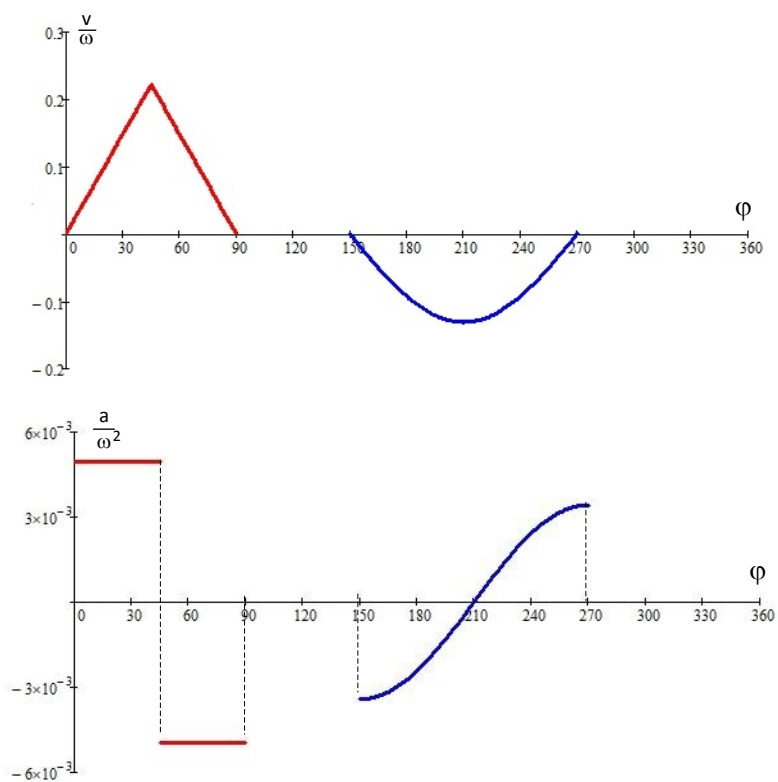


Fig. 1.19 Variația legilor de mișcare impuse tachetului (continuare)

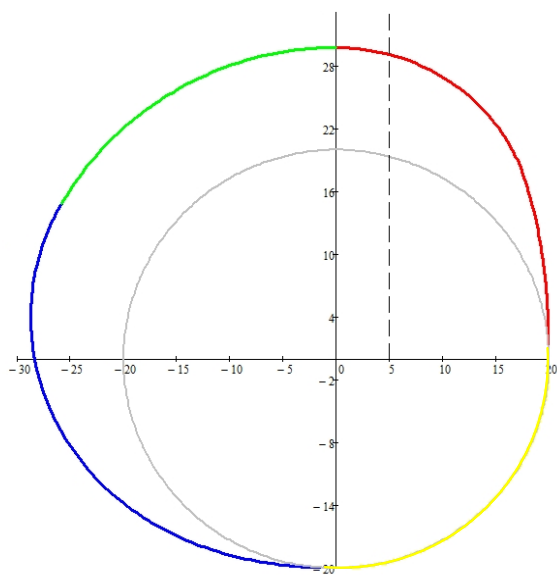


Fig. 1.20 Profilul camei

2. CINETOSTATICA MECANISMELOR

2.1 Forțe care acționează asupra mecanismelor

În cadrul analizei cinematice, legea de mișcare a elementului conducător a fost considerată cunoscută fără a se preciza însă cauza care o determină. În realitate mișcările elementelor mecanismelor sunt cauzate de forțele și momentele care acționează asupra lor iar legea de mișcare a elementului conducător este influențată de acestea [4],[13].

Elementele cinematice ale mecanismelor sunt supuse acțiunii următoarele tipuri de forțe și/sau momente:

1. *Forțe motoare* (\vec{F}_m). Elementele conducătoare ale mecanismelor pot fi puse în mișcare de forțe motoare aplicate în anumite puncte ale elementelor (Fig. 2.1) sau de momente motoare care acționează asupra elementelor [10].

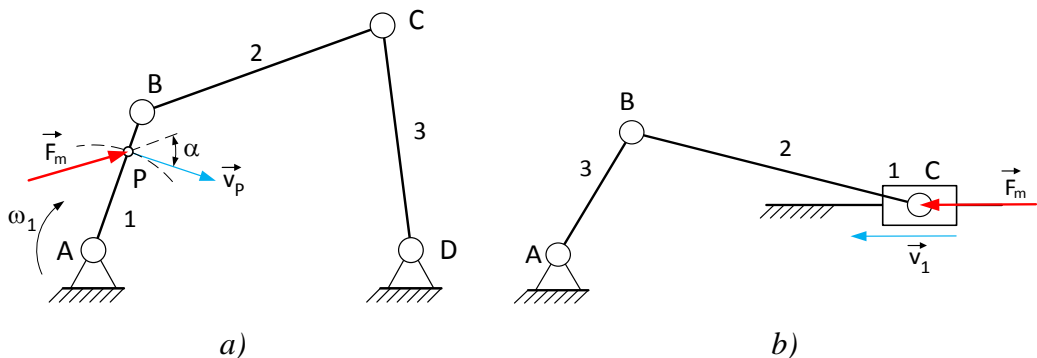


Fig. 2.1 Forțe motoare aplicate mecanismelor[10]

Forța motoare tinde să mărească viteza elementului conducător, prin urmare lucrul mecanic elementar dezvoltat va fi pozitiv: $dL_m = F_m \cos \alpha \cdot ds > 0$.

2. *Forțe rezistente* (\vec{F}_r). Acționează asupra elementului condus al mecanismului în sens contrar mișcării acestuia după cum se observă din figura 2.2

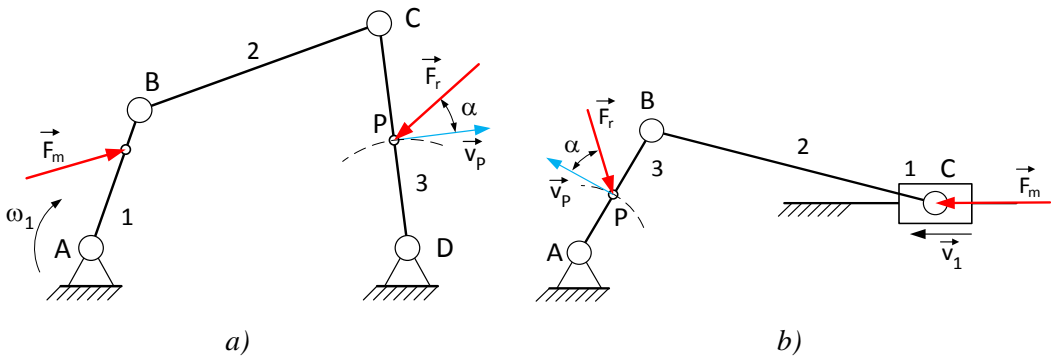


Fig. 2.2 Forțe rezistente aplicate mecanismelor [10]

Forțele rezistente tind să micșoreze viteza mecanismului prin urmare realizează un lucru mecanic negativ: $dL_r = F_r \cos \alpha \cdot ds < 0$. Mecanismele trebuie proiectate astfel încât să învingă aceste forțe [10].

3. *Forțe de greutate* (\vec{G}). Au punctul de aplicație în centrul de greutate al elementului și dezvoltă lucru mecanic pozitiv sau negativ în funcție de direcția de deplasare a acestuia. Dacă elementul realizează mișcare de rotație sau o mișcare plan paralelă periodică, lucrul mecanic, dezvoltat de forța de greutate, corespunzător unei perioade este zero $dL_G = \int G \cdot ds = 0$ [10].

4. *Forțe de frecare* (\vec{F}_f). Se mai numesc forțe de rezistență pasivă și apar în cuplele mecanismului. Prestează întotdeauna un lucru mecanic negativ: $dL_f = F_f \cdot ds < 0$ [4].

5. *Forțe elastice* (\vec{F}_e) sau *momente elastice* (M_e) Apar datorită deformațiilor unor arcuri sau acumulării energiei potențiale pe seama lucrului mecanic motor într-o fază de mișcare care apoi este redată sub formă de energie cinetică într-o altă fază [4].

6. *Forțe de inerție*. Sunt forțe masice repartizate pe elementele mecanismului. În general forțele de inerție pot fi reduse la un torses adică la un vector principal \vec{F}_i și un moment de inerție M_i . Dacă se alege ca punct de reducere centrul de greutate al elementului, torsesul forțelor de inerție are următoarea formă:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m\vec{a}_G \\ M_i = -I_G\varepsilon \end{cases} \quad (2.1)$$

unde: m – reprezintă masa elementului,
 \vec{a}_G – vectorul accelerației centrului de greutate,
 ε – accelerația unghiulară a elementului,
 I_G – momentul de inerție masic în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate.

Forța de inerție \vec{F}_i este un vector cu aceeași direcție cu accelerația \vec{a}_G dar cu sens opus și care are punctul de aplicație în centrul de greutate al elementului. Momentul forțelor de inerție M_i are sensul opus accelerației unghiulare ε a elementului [10].

În funcție de tipul mișcărilor realizate de elementele mecanismelor, tursorul forțelor de inerție poate avea diferite forme. Situațiile posibile sunt reprezentate în figura 2.3 [8].

Pentru elemente care execută mișcări de translație, tursorul forțelor de inerție se reduce la o forță $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$, care acționează, pe direcția mișcării, în centrul de greutate și are sensul opus accelerației, după cum rezultă din figura 2.3 a.

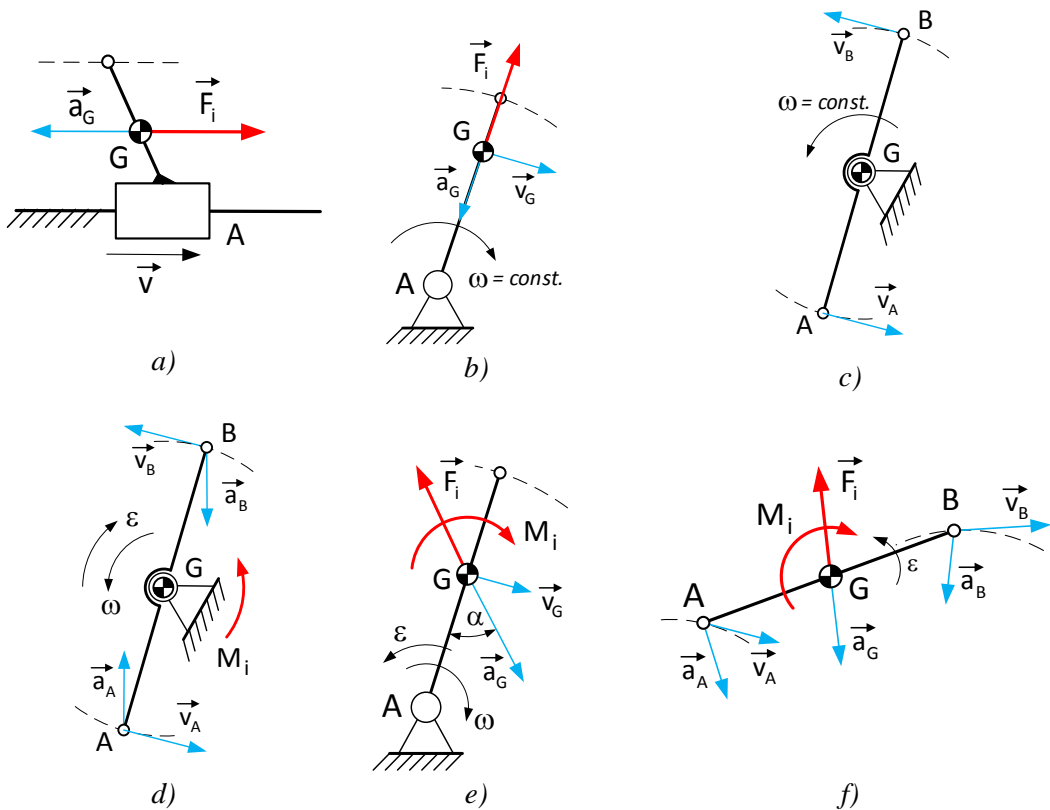


Fig. 2.3 Cazuri particulare ale tursorului forțelor de inerție [10]

Dacă elementul cinematic realizează o mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă în jurul unei axe care nu trece prin centrul de greutate (fig. 2.3 b) tursorul se reduce la o forță de inerție $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$ cu aceeași direcție cu accelerația \vec{a}_G dar cu sens opus. În cazul elementului cinematic care se rotește cu viteză unghiulară constantă în jurul centrului de greutate, tursorul forțelor de inerție se anulează (fig. 2.3 c).

Mișcarea de rotație neuniformă ($\varepsilon \neq 0$) a unui element cinematic în jurul centrului său de greutate este caracterizată de un tursor format doar din momentul de inerție $M_i = -I_G\varepsilon$, după cum rezultă din figura 2.3 d. Momentul de inerție are sensul opus accelerației unghiulare ε .

Pentru elementul care realizează o mișcare de rotație neuniformă în jurul unui punct care nu coincide cu centrul său de greutate ca în figura 2.3 e, tursorul forțelor de inerție are forma generală dată de relația (2.1). Aceeași formă a tursorului apare și în cazul elementului care realizează o mișcare plan paralelă, caz prezentat în figura 2.3 f.

Există mai multe metode pentru determinarea forțelor de inerție, prezentate pe larg în [4],[7],[12],[13]. Cea mai utilizată metodă, presupune distribuirea masei elementului într-un număr de puncte și se numește *metoda concentrării maselor*.

7. *Forțe de legătură* (\vec{F}_{ij}). Se mai numesc *reacțiuni* și apar în cuplele cinematice ca efect al tuturor forțelor și momentelor care acționează asupra elementelor mecanismului. Dacă nu se ține seama de frecări, reacțiunea \vec{F}_{12} dintr-o cuplă de rotație are punctul de aplicație în centrul cuplei și direcția necunoscută. În cazul cuplei de translație reacțiunea \vec{F}_{03} este perpendiculară pe direcția mișcării iar mărimea și suportul x sunt necunoscute (fig. 2.4).

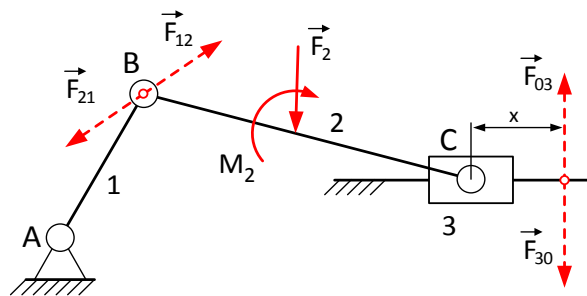


Fig.2.4 Reacțiuni în cuplele unui mecanism [10]

Metodele de determinare a reacțiunilor în cuplele cinematice au la bază grupele structurale. Acestea sunt considerate static determinate sub acțiunea forțelor și momentelor exterioare. Determinarea reacțiunilor fără frecare poate fi făcută prin

metode grafo-analitice [4],[7],[12] sau analitice [7],[13] și este utilă pentru calculele de dimensionare a cuplelor.

2.2 Determinarea forțelor de inerție prin metoda concentrării maselor

Pentru determinarea forțelor de inerție prin această metodă se înlocuiește elementul cu masa m repartizată, cu un sistem de mase fictive concentrate în n puncte, care vor avea același torsesor al forțelor de inerție (fig.2.5) [4], [10].

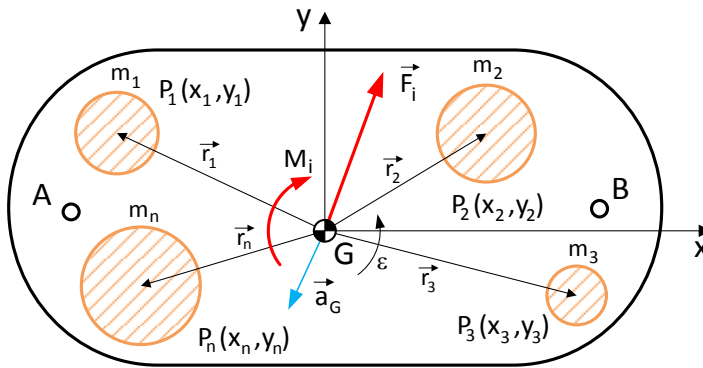


Fig. 2.5 Concentrarea maselor unui element cinematic [10]

Se poate scrie astfel:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \end{cases} \quad (2.2)$$

unde: - \vec{F}_i și M_i reprezintă torsesorul forțelor de inerție al elementului cu masa m ;

- \vec{F}_{ij} și M_{ij} reprezintă torsesorul forțelor de inerție ale maselor concentrate.

Concentrarea maselor presupune respectarea următoarelor condiții:

1. Suma maselor concentrate în cele n puncte trebuie să fie egală cu masa elementului, adică:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{j=1}^n m_j = m \quad (2.3)$$

2. Centrul de greutate al maselor concentrate să se suprapună peste centrul de greutate al elementului, adică suma momentelor statice ale maselor concentrate în raport cu centrul de greutate să fie egală cu zero. Dacă poziția centrului de greutate se suprapune cu cea a sistemului de referință, adică $x_G = 0$ și $y_G = 0$, se poate scrie:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n = \sum_{j=1}^n m_jx_j = 0$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_ny_n = \sum_{j=1}^n m_jy_j = 0$$
(2.4)

3. Suma momentelor de inerție masice ale maselor concentrate în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate să fie egală cu momentul de inerție masic al elementului în raport cu aceeași axă, adică:

$$\sum_{j=1}^n m_j(x_j^2 + y_j^2) = I_G$$
(2.5)

În relațiile (2.3), (2.4) și (2.5) valorile maselor concentrate precum și coordonatele x_j , y_j ale punctelor în care se află acestea, nu sunt cunoscute. Prin urmare, fiecare punct de concentrare introduce câte $3n$ necunoscute.

Dacă sunt îndeplinite toate cele trei condiții se realizează *concentrarea dinamică* a maselor. În acest caz numărul parametrilor arbitrari care pot fi aleși pentru definirea punctelor este:

$$p_D = 3n - 4$$
(2.6)

Pentru *concentrarea statică* a maselor, este suficientă respectarea primelor două condiții, caz în care numărul parametrilor arbitrari este dat de relația:

$$p_S = 3n - 3$$
(2.7)

Pentru concentrarea maselor într-un punct $n = 1$, din relațiile (2.6) și (2.7) se obține: $p_D = -1$ și $p_S = 0$. În acest caz este posibilă doar concentrarea statică iar din relațiile (2.3) și (2.4) rezultă: $m_1 = m$, $m_1x_1 = 0$ și $m_1y_1 = 0$. Punctul de concentrare este centrul de greutate al elementului deoarece $x_1 = y_1 = 0$. Acest tip de concentrare este indicat pentru elemente cinematice care realizează mișcări de translație.

Indiferent de tipul concentrării, după determinarea maselor și a coordonatelor punctelor de concentrare, forțele de inerție ce acționează în aceste puncte se determină cu relația:

$$\vec{F}_{ij} = -m_j \vec{a}_{P_j}; \quad j = 1 \dots n \quad (2.8)$$

unde accelerațiile \vec{a}_{P_j} ale punctelor P_j sunt considerate cunoscute fiind determinate în urma analizei cinematice.

2.2.1 Concentrarea maselor în două puncte

Pentru *concentrarea statică* a maselor în două puncte, se consideră originea sistemului de coordonate în centrul de greutate G al elementului ca în figura 2.6. Masa m a elementului este distribuită în punctele A și B aflate la distanțele a și $-b$ considerate cunoscute [10].

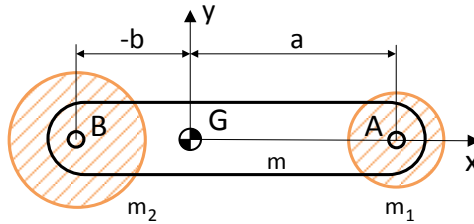


Fig.2.6 Concentrarea statică a maselor în două puncte [10]

Pentru concentrarea statică în două puncte ($n = 2$), relațiile (2.3) și (2.4) se scriu astfel:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Numărul parametrilor ce pot fi aleși pentru definirea punctelor de concentrare este în acest caz $p_s = 3$. Conform notațiilor din figura 2.7, rezultă: $x_1 = a$, $x_2 = -b$, $y_1 = y_2 = 0$ iar relațiile (2.9) devin:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 a - m_2 b = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Prin rezolvarea sistemului (2.10) se obțin valorile maselor concentrate în punctele A și B:

$$m_1 = m \frac{b}{a+b}; \quad m_2 = m \frac{a}{a+b} \quad (2.11)$$

Pentru *concentrarea dinamică* în două puncte (fig. 2.7) se consideră cunoscută poziția punctului A în care este concentrată masa m_1 . Este de asemenea cunoscut momentul de inerție masic I_G în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate al elementului. Trebuie determinate poziția celui de al doilea punct de concentrare și valorile maselor.

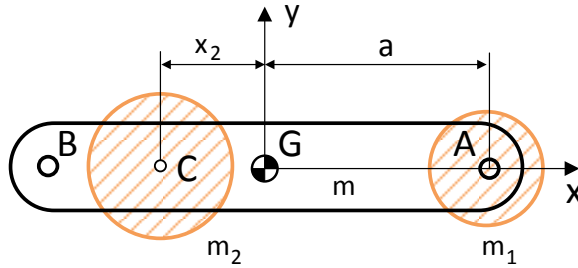


Fig.2.7 Concentrarea dinamică a maselor în două puncte [10]

În cazul concentrării dinamice în două puncte relațiile (2.3), (2.4) și (2.5) se scriu astfel:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \\ m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) = I_G \end{cases} \quad (2.12)$$

Numărul parametrilor care se pot alege arbitrar este $p_D = 2$, adică $x_1 = a$ și $y_1 = y_2 = 0$. Relațiile (2.12) devin:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 a + m_2 x_2 = 0 \\ m_1 a^2 + m_2 x_2^2 = I_G \end{cases} \quad (2.13)$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$m_1 = \frac{m I_G}{m a^2 + I_G}; \quad m_2 = \frac{m^2 a^2}{m a^2 + I_G}; \quad x_2 = -\frac{I_G}{m a} \quad (2.14)$$

Forțele de inerție care acționează asupra elementului în cele două puncte de concentrare se determină cu relațiile:

$$\vec{F}_{i1} = -m_1 \vec{a}_A; \quad \vec{F}_{i2} = -m_2 \vec{a}_C \quad (2.15)$$

2.3 Determinarea forțelor de legătură

Forțele de legătură sau reacțiunile, după cum s-a precizat anterior, apar în cuplele cinematice ale mecanismelor ca efect al tuturor forțelor și momentelor care acționează asupra elementelor.

Dacă nu se ține seama de frecare, o cupla de clasa a cincea introduce din punct de vedere al reacțiunilor, două necunoscute. Dacă într-un lanț cinematic există teoretic, un număr de C_5 cuple de clasa a cincea, acestea vor introduce $2C_5$ necunoscute. Este cunoscut faptul că pentru forțele care acționează pe un element cinematic în planul mișcării acestuia, se pot scrie câte trei ecuații de echilibru. Dacă un lanț cinematic conține n elemente cinematice, numărul total de ecuații de echilibru va fi $3n$. Pentru ca un lanț cinematic să fie static determinat, este necesar ca numărul ecuațiilor de echilibru să fie egal cu numărul necunoscutelor, mai exact: $3n - 2C_5 = 0$. Această relație caracterizează grupele structurale (diadele) prezentate în capitolul 1, prin urmare se poate spune că aceste grupe sunt static determinate [4].

2.3.1 Determinarea reacțiunilor din cuplele diadelor

Grupele structurale de clasa a II-a și ordinul 2 mai sunt numite *diade*. Sunt formate din două elemente cinematice și trei cuple de clasa a cincea, una centrală și două libere. În continuare se prezintă modul de determinare a reacțiunilor din cuplele acestor grupe structurale, fără a se ține seama de forțele de frecare. În toate situațiile se consideră grupa structurală în echilibru cinetostatic.

Diada RRR Se consideră că asupra elementelor grupei structurale din figura 2.8 acționează forțele și momentele cunoscute \vec{F}_2, \vec{F}_3 respectiv M_2 și M_3 .

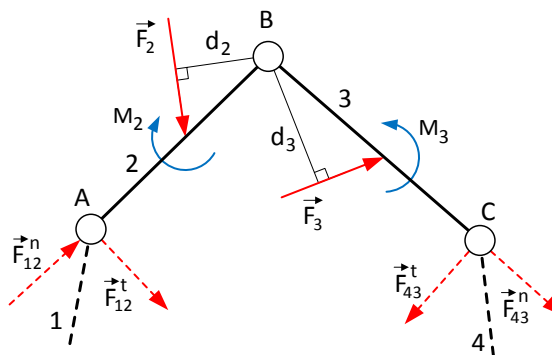


Fig.2.8 Forțele și momentele care acționează asupra diadei RRR

Se introduc în cuplele libere A și C forțele de legătură \vec{F}_{12} cu componentele $\vec{F}_{12}^n \parallel AB$ și $\vec{F}_{12}^t \perp AB$ respectiv \vec{F}_{43} cu componentele $\vec{F}_{43}^n \parallel BC$ și $\vec{F}_{43}^t \perp BC$. Vectorii acestor forțe sunt cunoscuți doar ca direcție. Ecuația de echilibru a grupeii, sub forma forțelor are următoarea expresie, în care vectorii cunoscuți sunt subliniați cu două linii iar cei la care este cunoscută doar direcția sunt subliniați cu o singură linie:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\vec{F}_{12}^n}} + \underline{\vec{F}_2} + \underline{\vec{F}_3} + \underline{\vec{F}_{43}^t} + \underline{\vec{F}_{43}^n} = 0 \quad (2.16)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru ale fiecărui element, sub forma ecuațiilor de momente față de cupla centrală B . Rezultă astfel:

$$\begin{aligned} F_{12}^t l_2 + F_2 d_2 - M_2 &= 0 \\ F_{43}^t l_3 - F_3 d_3 - M_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

De aici se pot determina componentele F_{12}^t și F_{43}^t după cum urmează:

$$\begin{aligned} F_{12}^t &= \frac{M_2 - F_2 d_2}{l_2} \\ F_{43}^t &= \frac{F_3 d_3 + M_3}{l_3} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dacă din ecuațiile (2.18) semnul componentelor F_{12}^t sau F_{43}^t rezultă negativ, sensul lor va fi contrar celui ales inițial. Valorile acestor componente permit, pe baza relației 2.16, construirea poligonului forțelor din figura 2.9 și de aici determinarea necunoscutelor \vec{F}_{12}^n și \vec{F}_{43}^n .

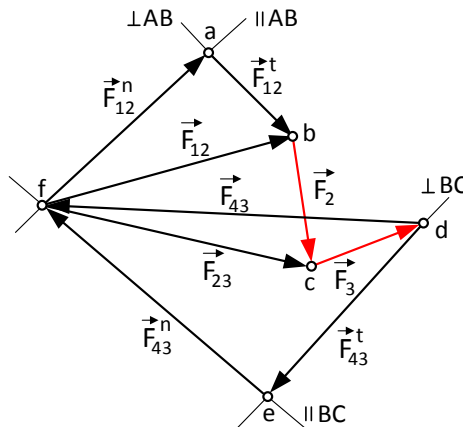


Fig.2.9 Poligonul forțelor pentru diada RRR

Pentru determinarea reacțiunii \vec{F}_{32} din cupla centrală B , se scrie ecuația de echilibru a elementului 2 sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} = 0 \quad (2.19)$$

Poligonul forțelor se construiește la o scară $k_F \left[\frac{N}{mm} \right]$ astfel că de exemplu mărimea reacțiunii \vec{F}_{43} se poate determina cu relația:

$$\vec{F}_{43} = fd \cdot k_F [N] \quad (2.20)$$

Diada RRT Se consideră că asupra elementelor grupei structurale din figura 2.10, acționează forțele și momentele cunoscute \vec{F}_2, \vec{F}_3 respectiv M_2 și M_3 .

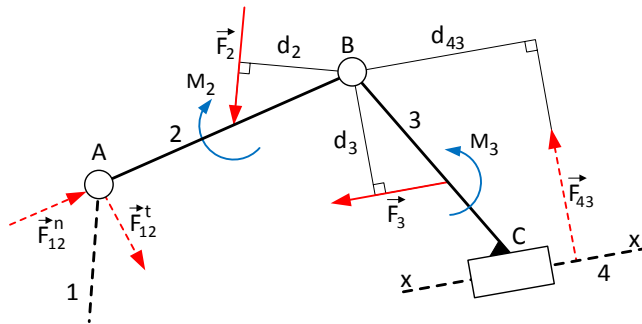


Fig.2.10 Forțele și momentele care acționează asupra diadei RRT

Se introduc în cuplele libere A și C forțele de legătură \vec{F}_{12} cu componentele $\vec{F}_{12}^n \parallel AB$ și $\vec{F}_{12}^t \perp AB$ respectiv $\vec{F}_{43} \perp x-x$ al cărei punct de aplicație, adică distanța d_{43} nu este cunoscut. Vectorii acestor forțe sunt cunoscuți doar ca direcție. Ecuația de echilibru a grupei sub forma forțelor, are următoarea expresie:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\vec{F}_{12}^n}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{F}_{43}}} = 0 \quad (2.21)$$

Se scrie ecuația de echilibru a elementului 2, sub forma momentului față de cupla centrală B :

$$F_{12}^t l_2 + F_2 d_2 - M_2 = 0 \quad (2.22)$$

Se poate determina astfel componenta F_{12}^t , după cum urmează:

$$F_{12}^t = \frac{M_2 - F_2 d_2}{l_2} \quad (2.23)$$

Astfel pe baza relației (2.21) se poate construi poligonului forțelor din figura 2.11 și de aici se pot determina necunoscutele \vec{F}_{12}^n și \vec{F}_{43} .

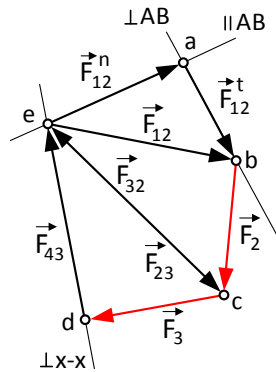


Fig.2.11 Poligonul forțelor pentru diada RRT

Pentru determinarea distanței d_{43} se scrie ecuația de echilibru a elementului 3 sub forma momentelor față de cupla centrală B :

$$F_{43}d_{43} - F_3d_3 + M_3 = 0 \tag{2.24}$$

Rezultă astfel:

$$d_{43} = \frac{F_3d_3 - M_3}{F_{43}} \tag{2.25}$$

Dacă din relația (2.25) rezultă o valoare negativă pentru d_{43} atunci reacțiunea F_{43} are punctul de aplicație în stânga cuplei centrale B.

Diada RTR Se consideră că asupra elementelor grupei structurale din figura 2.12, acționează forțele și momentele cunoscute \vec{F}_2, \vec{F}_3 respectiv M_2 și M_3 .

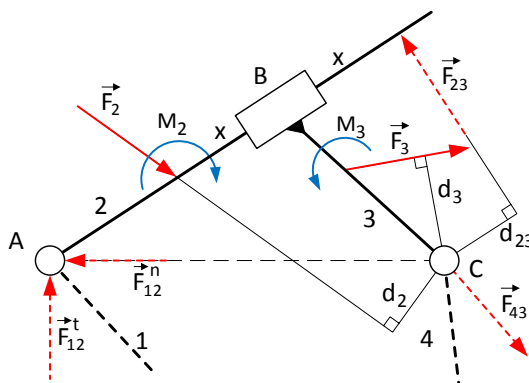


Fig.2.12 Forțele și momentele care acționează asupra diadei RTR

Se introduc în cuplele libere A și C forțele de legătură \vec{F}_{12} cu componentele $\vec{F}_{12}^n \parallel AC$ și $\vec{F}_{12}^t \perp AC$ respectiv \vec{F}_{43} cu direcția necunoscută. Ecuația de echilibru a grupei, sub forma momentelor față de cupla C , are următoarea expresie:

$$\vec{F}_{12}^t l_{AC} - \vec{F}_2 d_2 + M_2 + \vec{F}_3 d_3 - M_3 = 0 \quad (2.26)$$

Astfel se poate determina valoarea componentei \vec{F}_{12}^t după cum urmează:

$$\vec{F}_{12}^t = \frac{\vec{F}_2 d_2 - M_2 - \vec{F}_3 d_3 + M_3}{l_{AC}} \quad (2.27)$$

Se scrie ecuația de echilibru a elementului 2 sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\vec{F}_{12}^n}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} = 0 \quad (2.28)$$

și cu ajutorul poligonului forțelor din figura 2.13 se pot determina reacțiunile \vec{F}_{12} respectiv \vec{F}_{32} .

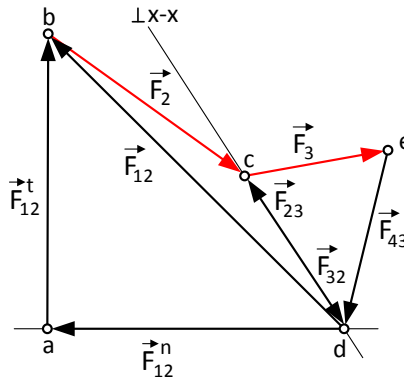


Fig.2.13 Poligonul forțelor pentru diada RRT

Pentru determinarea punctului de aplicație al reacțiunii \vec{F}_{23} se scrie ecuația de echilibru a elementului 3 sub forma momentelor față de cupla C :

$$F_{23} d_{23} - F_3 d_3 + M_3 = 0 \quad (2.29)$$

de unde rezultă:

$$d_{23} = \frac{F_3 d_3 - M_3}{F_{23}} \quad (2.30)$$

Reacțiunea \vec{F}_{43} se poate determina din ecuația de echilibru a grupei scrisă sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\vec{F}_{12}^n}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{F}_{43}}} = 0 \quad (2.31)$$

Diada TRT Se consideră că asupra elementelor grupei structurale din figura 2.14, acționează forțele și momentele cunoscute \vec{F}_2, \vec{F}_3 respectiv M_2 și M_3 . Se introduc în cuplele libere A și C forțele de legătură $\vec{F}_{12} \perp x - x$ respectiv $\vec{F}_{43} \perp y - y$

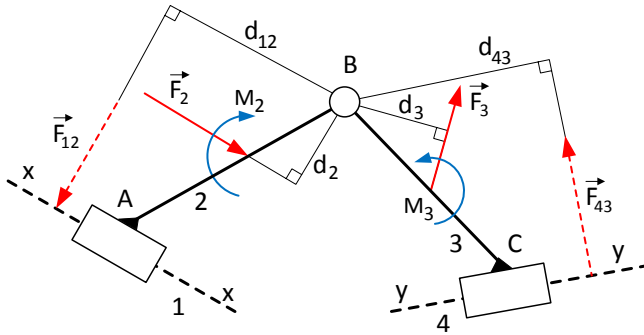


Fig.2.14 Forțele și momentele care acționează asupra diadei TRT

Ecuția de echilibru a grupei scrisă sub forma forțelor, are următoarea expresie:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{F}_{43}}} = 0 \quad (2.32)$$

Cu ajutorul poligonului forțelor din figura 2.15, se pot determina reacțiunile \vec{F}_{12} respectiv \vec{F}_{43} .

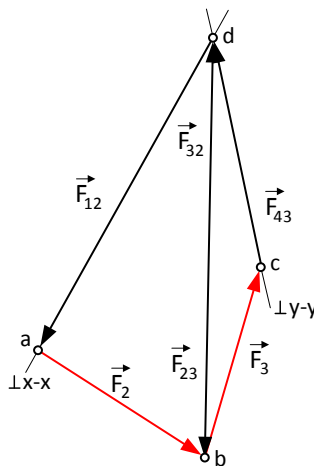


Fig.2.15 Poligonul forțelor pentru diada TRT

Reacțiunea \vec{F}_{32} rezultă din ecuația de echilibru a elementului 2 scrisă sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \vec{F}_{32} = 0 \quad (2.33)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru a elementelor 2 și 3 sub forma momentelor față de cupla centrală B, după cum urmează:

$$F_{12}d_{12} - M_2 + F_2d_2 = 0 \quad (2.34)$$

$$F_{43}d_{43} - M_3 + F_3d_3 = 0 \quad (2.35)$$

Rezultă astfel distanțele d_{12} respectiv d_{43} :

$$d_{12} = \frac{M_2 - F_2d_2}{F_{12}} \quad (2.36)$$

$$d_{43} = \frac{F_3d_3 + M_3}{F_{43}} \quad (2.37)$$

Diada RTT Se consideră că asupra elementelor grupe structurale din figura 2.16, acționează forțele și momentele cunoscute \vec{F}_2, \vec{F}_3 respectiv M_2 și M_3 . Se introduc în cuplele libere A și C forțele de legătură \vec{F}_{12} cu direcția necunoscută respectiv $\vec{F}_{43} \perp y - y$ la care nu se cunoaște punctul de aplicație

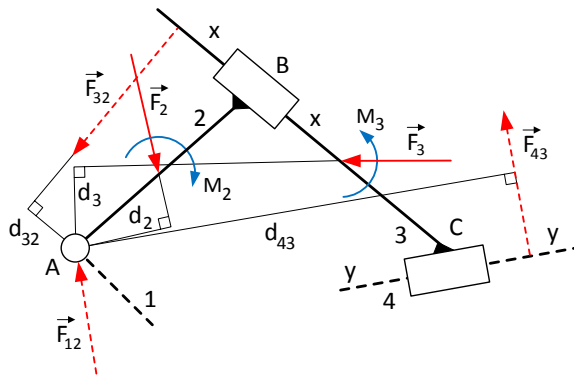


Fig.2.16 Forțele și momentele care acționează asupra diadei RTT

Se scrie ecuația de echilibru a elementului 3 sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{23}}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{F}_{43}}} = 0 \quad (2.38)$$

Reacțiunile \vec{F}_{23} și \vec{F}_{43} se pot determina cu ajutorul poligonului forțelor din figura 2.17.

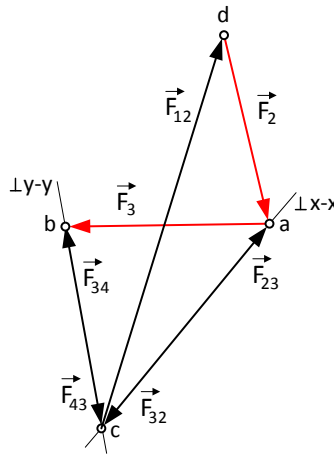


Fig.2.17 Poligonul forțelor pentru diada RTT

Din ecuația de echilibru a elementului 2 scrisă sub forma forțelor se determină reacțiunea \vec{F}_{12} din cupla A.

$$\vec{F}_{12} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} = 0 \quad (2.39)$$

Punctul de aplicație al reacțiunii \vec{F}_{43} , adică distanța d_{43} , se poate determina din ecuația de echilibru a grupeii scrisă sub forma momentelor față de cupla A:

$$F_{43}d_{43} + M_3 + F_3d_3 - M_2 - F_2d_2 = 0 \quad (2.40)$$

de unde:

$$d_{43} = \frac{M_2 + F_2d_2 - M_3 - F_3d_3}{F_{43}} \quad (2.41)$$

Pentru determinarea distanței d_{23} se scrie ecuația de echilibru a elementului 2 sub forma momentelor față de cupla A, după cum urmează:

$$F_{32}d_{32} - M_2 + F_2d_2 = 0 \quad (2.42)$$

de unde rezultă:

$$d_{32} = \frac{M_2 - F_2d_2}{F_{32}} \quad (2.43)$$

2.3.2 Determinarea forțelor de legătură pentru elementele conducătoare

Mecanismele sunt formate prin legarea unei grupe structurale sau a mai multor astfel de grupe, la un element conducător respectiv la un element considerat fix. Mișcarea elementului conducător în raport cu elementul fix este permisă de o cuplă de clasa a cincea de rotație sau translație. Această cuplă introduce, din punctul de vedere al reacțiunilor, două necunoscute iar pentru elementul conducător se pot scrie trei ecuații de echilibru. Pentru echilibrul cinetostatic este necesar ca numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuațiilor de echilibru. De aceea asupra elementului conducător trebuie să mai acționeze încă o forță sau un moment numite *forță de echilibrare* \vec{F}_e respectiv *moment de echilibrare* M_e [4].

În cazul în care elementul conducător realizează o mișcare de rotație, asupra lui vor acționa (fig.2.18): forța \vec{F}_1 și momentul M_1 cu valori cunoscute, reacțiunea \vec{F}_{21} determinată prin analiza cinetostatică a grupei structurale legată de elementul conducător, reacțiunea \vec{F}_{01} din partea elementului fix și forța de echilibrare \vec{F}_e care acționează pe o direcție cunoscută.

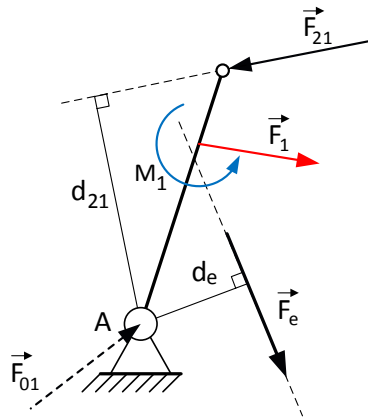


Fig.2.18 Forța de echilibrare pentru elementul conducător de rotație

Se scrie ecuația de echilibru a elementului conducător sub forma momentelor față de cupla A:

$$F_{21}d_{21} + M_1 - F_1d_1 - F_e d_e = 0 \quad (2.44)$$

de unde forța de echilibrare are valoarea:

$$F_e = \frac{F_{21}d_{21} + M_1 - F_1d_1}{d_e} \quad (2.45)$$

Ecuția de echilibru a elementului conducător scrisă sub forma forțelor are următoarea expresie:

$$\vec{F}_{01} + \underline{\underline{\vec{F}_1}} + \underline{\underline{\vec{F}_e}} + \underline{\underline{\vec{F}_{21}}} = 0 \quad (2.46)$$

Astfel din poligonul forțelor din figura 2.19 a, construit pe baza relației de mai sus, se poate determina reacțiunea \vec{F}_{01} .

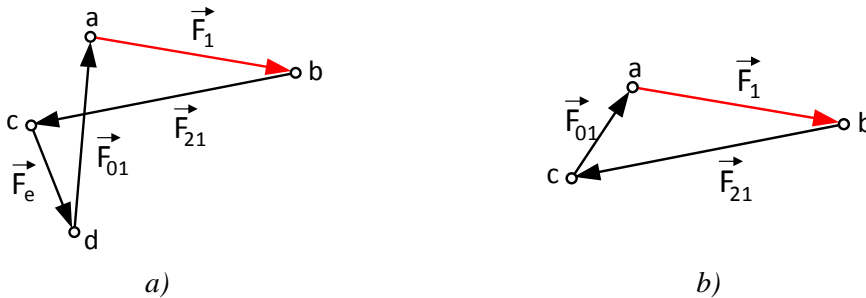


Fig.2.19 Poligoanele forțelor pentru elementul conducător de rotație

Dacă asupra elementului conducător acționează un moment de echilibrare M_e , valoarea acestuia poate fi determinată din următoarea relație:

$$F_{21}d_{21} + M_1 - F_1d_1 = M_e \quad (2.47)$$

Pe baza ecuației de echilibru a elementului sub forma forțelor, se poate determina cu ajutorul poligonului forțelor din figura 2.19 b, valoarea reacțiunii \vec{F}_{01} . Ecuția de echilibru are expresia:

$$\vec{F}_{01} + \underline{\underline{\vec{F}_1}} + \underline{\underline{\vec{F}_{21}}} = 0 \quad (2.48)$$

În cazul în care elementul conducător realizează o mișcare de translație (fig. 2.20), asupra lui vor acționa: forța \vec{F}_1 și momentul M_1 cu valori cunoscute, reacțiunea \vec{F}_{21} care este cunoscută din analiza cinetostatică a grupeii structurale legată de elementul conducător, reacțiunea $\vec{F}_{01} \perp x - x$ la din partea elementului fix și forța de echilibrare \vec{F}_e care acționează pe o direcție paralelă cu direcția de mișcare a elementului

Mărimea reacțiunii \vec{F}_{01} și a forței de echilibrare \vec{F}_e se pot determina din poligonul forțelor din figura 2.21 obținut pe baza ecuației de echilibru a elementului scrisă sub forma forțelor, după cum urmează:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{01}}} + \underline{\underline{\vec{F}_1}} + \underline{\underline{\vec{F}_e}} + \underline{\underline{\vec{F}_{21}}} = 0 \quad (2.49)$$

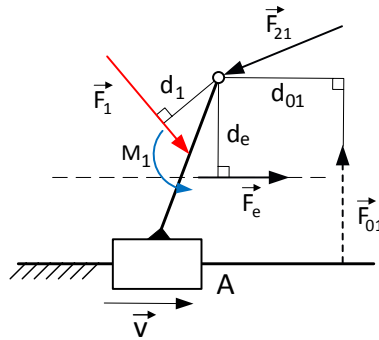


Fig.2.20 Forța de echilibrare pentru elementul conducător de translație

Distanța d_{01} se determină din ecuația de echilibru a elementului sub forma momentelor față de A:

$$F_1 d_1 + M_1 + F_e d_e + F_{01} d_{01} = 0 \quad (2.50)$$

de unde:

$$d_{01} = \frac{M_1 - F_1 d_1 - F_e d_e}{F_{01}} \quad (2.51)$$

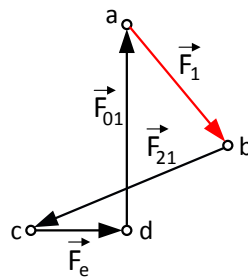


Fig.2.21 Poligonul forțelor pentru elementul conducător de translație

Forța sau momentul de echilibrare care acționează asupra elementului conducător mențin în echilibru cinetostatic întregul sistem de forțe care acționează asupra elementelor unui mecanism. Ele sunt de regulă furnizate de sistemul de acționare al mecanismului. Deoarece momentul de echilibrare își schimbă valoarea de la o poziție la alta a mecanismului, nu va fi egal tot timpul egal cu momentul dezvoltat de sistemul de acționare. De aceea se consideră o valoare medie a acestuia pentru un ciclu cinematic.

2.3.3 Determinarea forțelor de legătură în cuplele angrenajelor cilindrice

În structura mecanismelor cu roți dințate (angrenajelor) apare o cuplă superioară de clasa a patra, la contactul teoretic punctiform dintre profilurile dinților celor două roți dințate [4].

Se consideră un angrenaj exterior cu axe fixe din figura 2.22, format din roțile dințate 1 și 2 care se pot roti în jurul axelor O_1 respectiv O_2 . Asupra roții conduse 2 acționează momentul rezistent M_2 a cărui valoare este cunoscută.

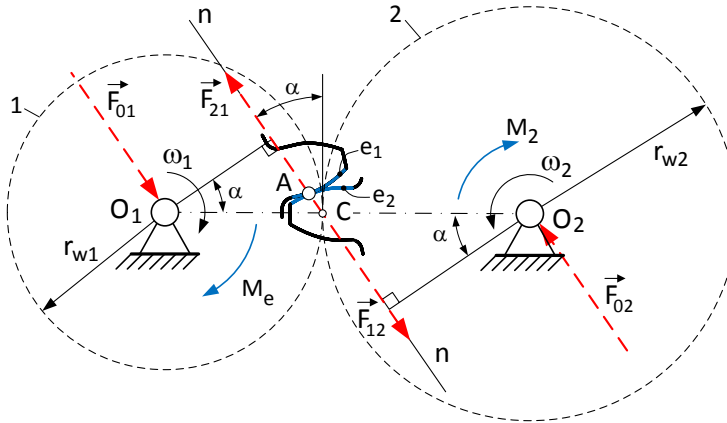


Fig.2.22 Forțele și momentele care acționează asupra unui angrenaj exterior

În punctul A de contact dintre profilurile dinților celor două roți dințate reacțiunile $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ au direcția normalei $n-n$. Unghiul α dintre normala $n-n$ și linia centrelor O_1O_2 este unghiul de angrenare.

Se scrie ecuația de echilibru a roții 2 sub forma momentelor față de cupla O_2 :

$$F_{12}r_{w2} \cos \alpha - M_2 = 0 \quad (2.52)$$

de unde se poate determina valoarea reacțiunii \vec{F}_{12} , după cum urmează:

$$F_{12} = \frac{M_2}{r_{w2} \cos \alpha} \quad (2.53)$$

Din ecuația de echilibru a roții 2 scrisă sub forma forțelor rezultă că $\vec{F}_{02} = -\vec{F}_{12}$, iar din ecuația de echilibru a roții 1 $\vec{F}_{01} = -\vec{F}_{21}$.

Momentul de echilibrare M_e se determină din ecuația de echilibru a roții 1 scrisă sub forma momentelor față de cupla O_1 :

$$F_{21}r_{w1} \cos \alpha - M_e = 0 \quad (2.54)$$

Deoarece $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, din relațiile (2.53) respectiv (2.54) rezultă:

$$M_e = \frac{M_2}{r_{w2} \cos \alpha} r_{w1} \cos \alpha = M_2 \frac{r_{w1}}{r_{w2}} = \frac{M_2}{i_{12}} \quad (2.55)$$

unde: i_{12} – reprezintă raportul de transmitere al angrenajului iar r_{w1} și r_{w2} sunt razele de rostogolire ale celor două roți dințate.

La angrenajul cilindric interior cu axe fixe din figura 2.23, asupra roții 2 acționează momentul rezistent M_2 a cărui valoare este cunoscută. Reacțiunile $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ au direcția normalei $n-n$ dusă prin punctul A de contact dintre profilurile dinților celor două roți dințate.

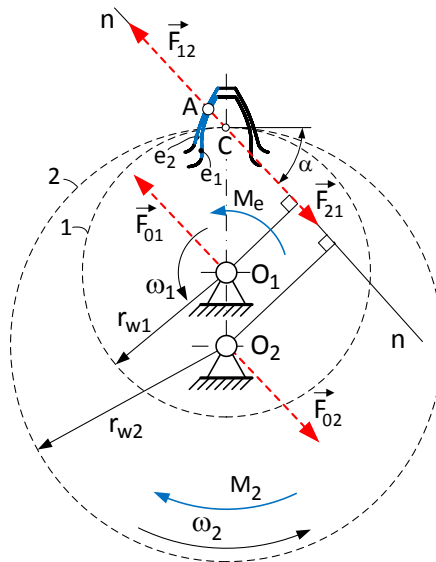


Fig.2.23 Forțele și momentele care acționează asupra unui angrenaj interior

Se scrie ecuația de echilibru a roții 2 sub forma momentelor față de cupla O_2 :

$$F_{12}r_{w2} \cos \alpha - M_2 = 0 \quad (2.56)$$

de unde rezultă expresia reacțiunii F_{12} conform relației de mai jos:

$$F_{12} = \frac{M_2}{r_{w2} \cos \alpha} \quad (2.57)$$

Din ecuația de echilibru a roții 2 scrisă sub forma forțelor rezultă că $\vec{F}_{02} = -\vec{F}_{12}$, iar din ecuația de echilibru a roții 1 $\vec{F}_{01} = -\vec{F}_{21}$. Momentul de echilibrare M_e se determină din ecuația de echilibru a roții 1 sub forma momentelor față de cupla O_1 :

$$F_{21}r_{w1} \cos \alpha - M_e = 0 \quad (2.58)$$

Prin înlocuirea relației (2.58) în (2.54) și ținând cont de faptul că $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, rezultă:

$$M_e = M_2 \frac{r_{w1}}{r_{w2}} = \frac{M_2}{i_{12}} \quad (2.59)$$

în care: i_{12} – reprezintă raportul de transmitere al angrenajului iar r_{w1} și r_{w2} sunt razele de rostogolire ale celor două roți dințate.

În cazul sistemelor de angrenaje cu axe fixe formate din mai multe roți dințate, forțele de legătură și momentele de echilibrare se determină în mod similar [4].

2.3.4 Transmiterea forțelor în mecanisme. Unghiul de transmitere

De regulă funcționarea mecanismelor cu bare articulate are un caracter periodic, iar perioada după care elementele ajung în aceeași poziție se numește *ciclu cinematic*. Dacă elementul conducător al unui mecanism realizează de exemplu o mișcare de rotație, ciclul cinematic va corespunde unei rotații complete a elementului. Pe perioada unui ciclu cinematic, elementele mobile ale mecanismelor ajung în anumite poziții particulare, numite *poziții moarte*. În aceste cazuri o forță sau un moment exterior aplicate mecanismului, nu pot produce mișcarea acestuia.

Ce consideră mecanismul manivelă piston din figura 2.24, la care pe elementul conducător 3 acționează forța exterioară \vec{F} .

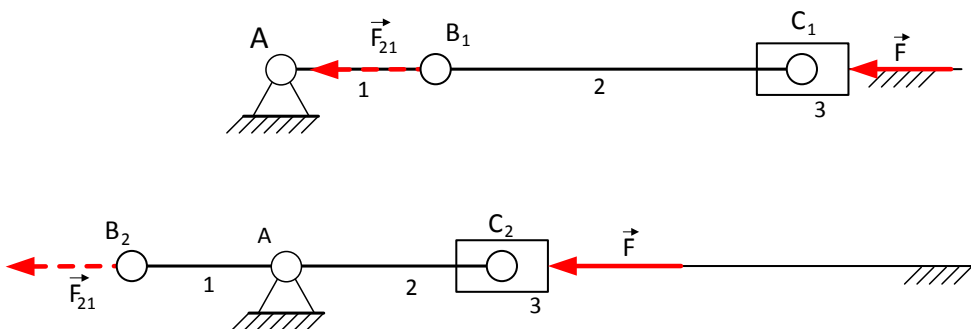


Fig.2.24 Pozițiile moarte la mecanismul manivelă piston

Dacă biela 2 și manivela 1 sunt în prelungire sau suprapuse, mișcarea nu mai poate fi transmisă deoarece forța de reacțiune \vec{F}_{21} este suprapusă peste direcția de mișcare a elementul 3 iar momentul acesteia față de punctul A este zero. În aceste poziții mecanismul se *autoblochează*. Scoaterea mecanismului din aceste poziții se poate face cu ajutorul forței de inerție generată de un volant sau prin cuplarea în paralel a mai multor mecanisme similare ale căror elemente sunt decalate (ex: motoarele cu ardere internă) [4]. În situația în care elementul 1 este elementul conducător al mecanismului, aceste poziții nu mai pot să apară.

Deoarece mecanismele trebuie să asigure transmiterea în bune condiții a forțelor este importantă determinarea *unghiului de transmitere*. Pentru mecanismul din figura 2.25, unghiul de transmitere τ de la elementul 2 spre elementul 3 este: ”unghiul format de direcția $d_r - d_r$ a mișcării relative a punctului C față de punctul B și direcția $d_a - d_a$ a mișcării absolute a punctului C” [4]. Prin urmare $\tau = \sphericalangle BCD$. Deoarece în timpul funcționării mecanismului cele două elementele își schimbă poziția relativă, unghiul de transmitere este variabil

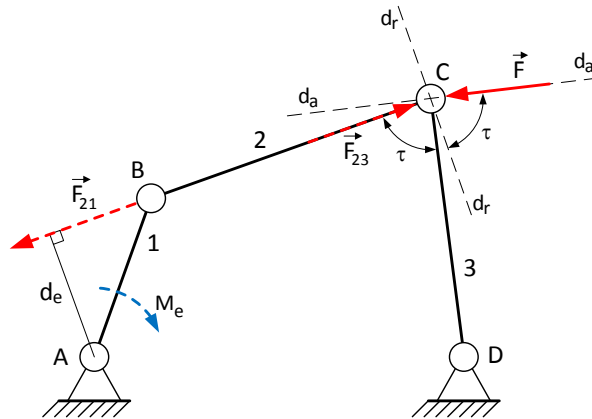


Fig.2.25 Unghiul de transmitere la mecanismul patrulater

În cazul mecanismului manivelă piston din figura 2.26, unghiul de transmitere τ este format între elementul 2 și normala $n - n$ dusă prin cupla C la direcția de deplasare a elementului 3. Dacă asupra elementului 3 acționează din exterior forța \vec{F} , acesteia i se va reacțiunea \vec{F}_{23} determinată de momentul de echilibrare ce acționează pe elementul conducător 1. Se poate scrie astfel:

$$F_{12} = F_{23} = \frac{F}{\sin \tau} = \frac{M_e}{d_e} \quad (2.60)$$

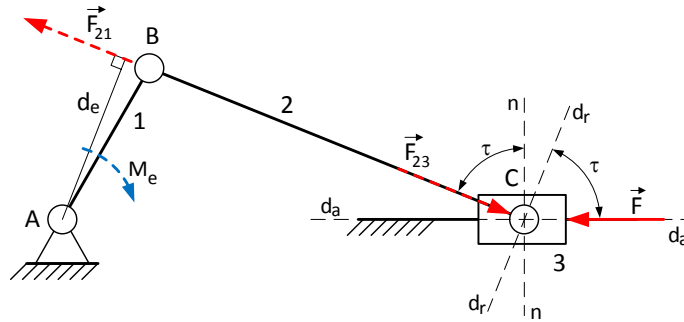


Fig.2.26 Unghiul de transmitere la mecanismul manivelă piston

Prin urmare, pentru o forță exterioară \vec{F} cunoscută, reacțiunea \vec{F}_{23} și momentul de echilibrare M_e depind de valoarea unghiului de transmitere τ . Cu cât valoarea acestuia este mai mică cu atât valorile pentru \vec{F}_{23} și M_e trebuie să crească. În situația în care $\tau = 0^\circ; 180^\circ$ mecanismul de autoblochează deoarece $F_{12} \rightarrow \infty$ și $M_e \rightarrow \infty$.

Pentru o bună transmitere a forțelor de la elementul conducător la cel condus, este necesar ca valoarea unghiului de transmitere să fie cât mai aproape de 90° , mai exact:

$$\tau_{adm} \leq \tau \leq 180^\circ - \tau_{adm} \tag{2.61}$$

unde: $\tau_{adm} \approx 40^\circ$ reprezintă unghiul de transmitere admisibil pentru care forțele încă se mai transmit în bune condiții.

După cum s-a precizat anterior, valoarea unghiului de transmitere se modifică în funcție de poziția relativă a elementelor mecanismului, motiv pentru care este necesară identificarea pozițiilor în care valoarea unghiului are valori extreme. Cea mai simplă metodă este metoda grafică prezentată în figura 2.27 a, pentru mecanismul manivelă piston, respectiv în figura 2.27 b, pentru mecanismul patruleter.

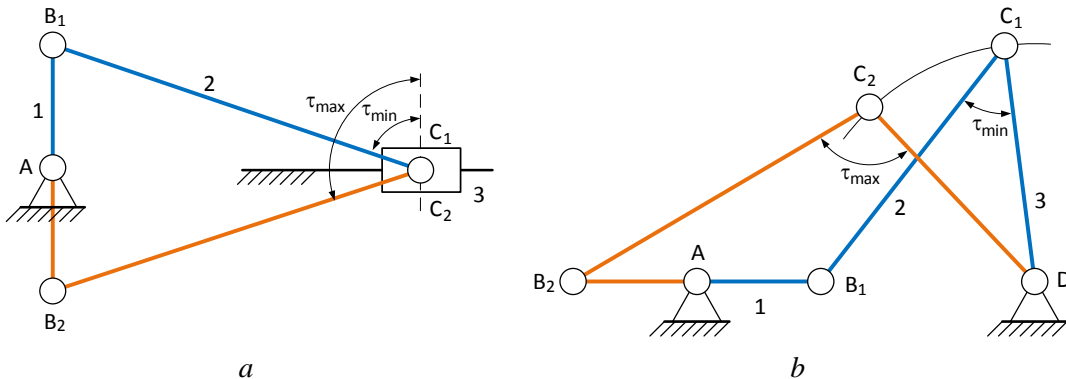


Fig.2.27 Unghiul de transmitere la mecanismul manivelă piston

2.4 Forțele de frecare din cuplele cinematice

Dacă se ține seama de frecare, reacțiunea dintr-o cuplă de rotație nu mai trece prin centrul acesteia. În cupla de rotație reprezentată în figura 2.24, reacțiunea normală \vec{F}_{12}^0 a elementului 1 față de elementul 2, generează forța de frecare $F_{12f} = \mu F_{12}^0$ (μ reprezintă coeficientul de frecare). Se observă că reacțiunea totală \vec{F}_{12} este tangentă la cercul de rază ρ numit *cerc de frecare*.

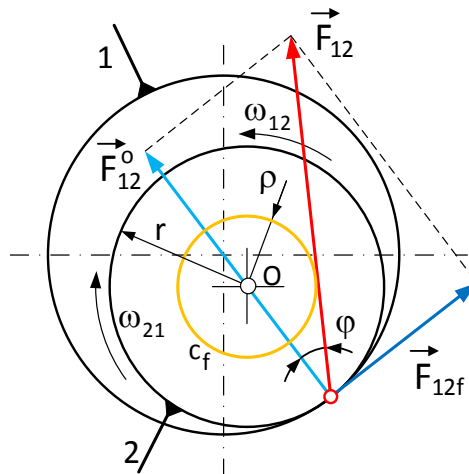


Fig.2.28 Reacțiuni cu frecare în cupla de rotație [10]

Raza cercului de frecare se poate determina cu relația: $\rho = r \cdot \sin \varphi$. Deoarece valoarea unghiului de frecare este de regulă mai mică de 10^0 , se poate considera că $\sin \varphi \cong \operatorname{tg} \varphi$ respectiv $\operatorname{tg} \varphi = \mu$. Astfel raza cercului de frecare se poate aproxima cu relația $\rho \cong r \cdot \mu$

Reacțiunea \vec{F}_{12} determină față de centrul cuplei, un moment în același sens cu viteza unghiulară ω_{12} numit *moment de frecare* și care poate fi determinat cu relația:

$$M_{21f} = F_{21}\rho = F_{12f}r \quad (2.62)$$

Dacă forța exterioară care acționează asupra elementului 2, intersectează cercul de frecare, mișcarea nu mai poate avea loc și se produce fenomenul de *blocare* a cuplei. De regulă acest fenomen nu este de dorit, dar sunt situații în care autoblocarea în cupla de rotație este necesară, de exemplu în sistemele de fixare cu excentric [4].

În figura 2.29, prin rotirea excentricului 1 în jurul punctului A se poate realiza fixarea piesei 2 prin apariția în punctul C a reacțiunii $\vec{F}_{21} \perp x - x$.

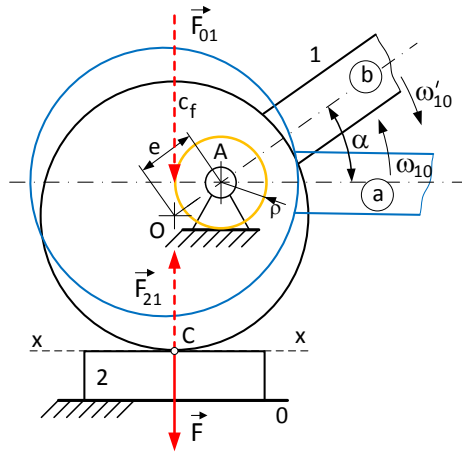


Fig.2.29 Sistem de fixare cu excentric

Excentricul odată ajuns în poziția b trebuie să se autoblocheze, adică să nu mai permită deplasarea piesei 2. Pentru ca acest lucru să fie posibil, este necesar ca forța \vec{F}_{21} să fie, la limită, tangentă la cercul de frecare din cupla A sau chiar să-l intersecteze. În această situație: $e \leq \frac{\rho}{\cos\alpha}$, unde $e = OA$ reprezintă excentricitatea elementului 1. Reacțiunea \vec{F}_{01} este tangentă la cercul de frecare și produce față de punctul O un moment în sensul vitezei ω'_{10} . În situația în care $e \leq \rho$, autoblocarea are loc pentru orice poziție a elementului 1 [4].

În cazul cuplei de translație din figura 2.30, formată din elementul 2 care se mișcă cu viteza \vec{v}_{21} față de elementul 1, reacțiunea normală \vec{F}_{12}^0 produce forța de frecare $\vec{F}_{12f} = \mu\vec{F}_{12}^0$. Reacțiunea totală $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^0 + \vec{F}_{12f}$ este înclinată, față de normala pe direcția mișcării, cu unghiul φ , după generatoarea unui con C_f numit *con de frecare*. Dacă suportul forței care acționează asupra elementului 2, se află în interiorul conului de frecare, atunci mișcarea nu mai poate avea loc și cupla se autoblochează [10].

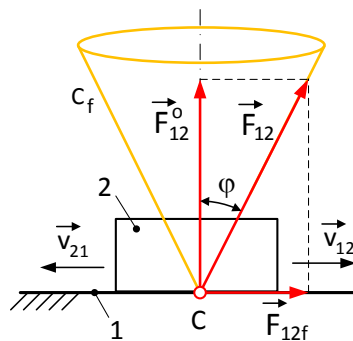


Fig.2.30 Reacțiuni cu frecare în cupla de translație deschisă [10]

De regulă în structura mecanismelor se utilizează cuple de translație închise, (fig. 2.31) motiv pentru care în continuare se prezintă modul de determinare al reacțiunilor pentru aceste cuple.

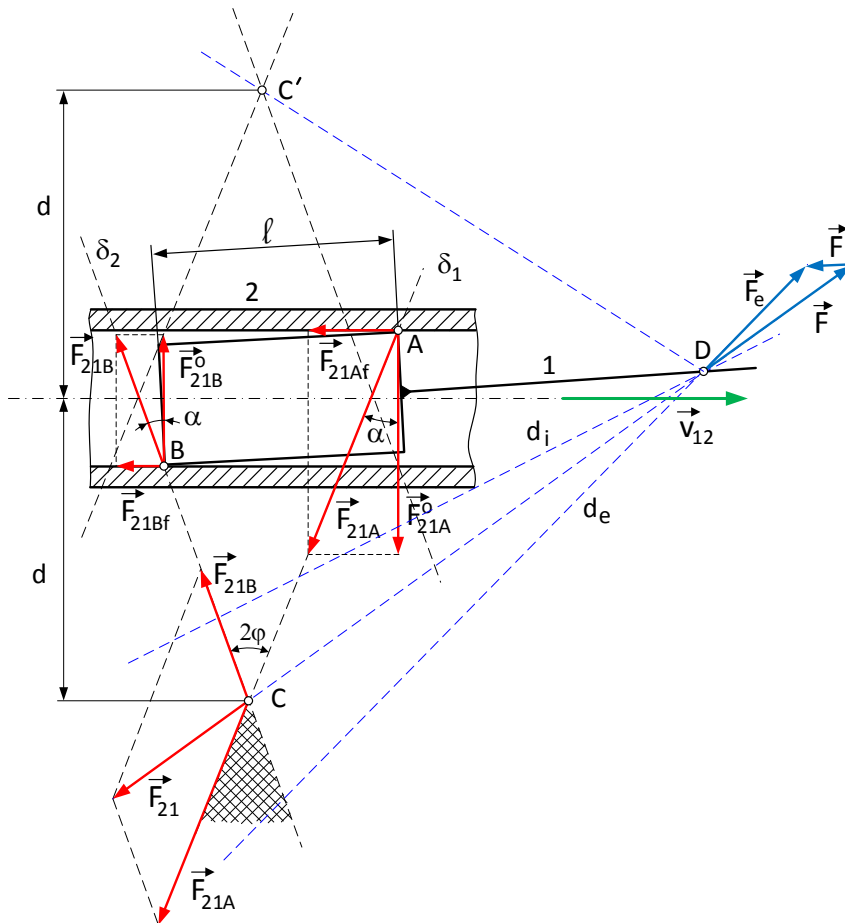


Fig.2.31 Reacțiuni cu frecare în cupla de translație închisă

Deoarece între elementele 1 și 2 există întotdeauna un joc care face posibilă mișcarea, din cauza acțiunii forței exterioare \vec{F} vor apărea în punctele A respectiv B reacțiunile normale \vec{F}_{21A}^0 și \vec{F}_{21B}^0 . Acestea vor genera forțele de frecare $F_{21Af} = \mu F_{21A}$ respectiv $F_{21Bf} = \mu F_{21B}$. Reacțiunile din partea elementului 2 spre elementul mobil 1 se pot determina cu relațiile:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21A} &= \vec{F}_{21A}^0 + \vec{F}_{21Af} \\ \vec{F}_{21B} &= \vec{F}_{21B}^0 + \vec{F}_{21Bf}\end{aligned}\tag{2.63}$$

Dacă se ține seama de forțele de frecare, reacțiunea totală a elementului 2 față de elementul 1, este dată de relația:

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{21A} + \vec{F}_{21B} \quad (2.64)$$

Din figura 2.31 se observă că această reacțiune trece prin punctul C . Din ecuația de echilibru a elementului 1 rezultă că $\vec{F}_{21} = -\vec{F}$.

Poziția punctului C este determinată de dimensiunile elementului 1 și de generatoarele δ_1 și δ_2 ale conurilor de frecare care au vârfurile în punctele A și B .

În situația în care suportul forței exterioare \vec{F} trece prin punctul C , elementul mobil 1 este în echilibru la limită. Dacă vectorul forței exterioare are suportul d_i atunci elementul 1 are o mișcare accelerată. În cazul în care forța \vec{F}_e are suportul d_e , atunci se poate descompune în două componente: forța \vec{F} al cărui suport trece prin punctul C și care anulează forța de reacțiune și o forță \vec{F}' care are tendința să deplaseze elementul 1 în sens contrar vitezei \vec{v}_{12} . În această situație apare autoblocarea cuplei.

Dacă se cunoaște lungimea l a elementului 1 atunci distanța d de la punctul C până la axa de simetrie a cuplei se poate determina cu relația:

$$d = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{l}{2\mu} \quad (2.65)$$

În concluzie, pentru ca să nu apară fenomenul de autoblocare al cuplei este necesar ca suportul forței exterioare \vec{F} să fie în interiorul unghiului $\sphericalangle CDC'$. Dacă forța exterioară este paralelă cu direcția mișcării atunci suportul ei trebuie să fie între punctele C și C' adică să nu intersecteze zona dublu hașurată [4].

Se consideră cupla superioară din figura 2.32, formată la contactul punctiform dintre două elemente cu profilul circular. Asupra elementului 1 acționează forța exterioară \vec{F} , care față de punctul de contact A cauzează momentul $M = d \cdot F$. În acest caz sunt posibile două mișcări relative: o translație de-a lungul tangentei comune $t-t$ și o rotație în jurul punctului A . Apar astfel două tipuri de frecare, cea de alunecare dată de forța $F_{21f} = \mu F_{21}$ respectiv frecarea de rostogolire dată de momentul $M_{21f} = sF_{21}$ (s reprezintă coeficientul de frecare de rostogolire).

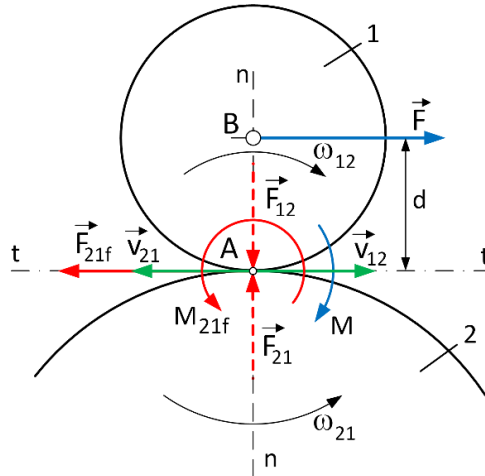


Fig.2.32 Reacțiuni cu frecare în cupla superioară formată între două profile circulare

Sunt posibile patru situații [4]:

1. $M \leq sF_{21}$ și $F \leq \mu F_{21}$ – caz în care elementul 1 este în repaus față de elementul 2,
2. $M < sF_{21}$ și $F > \mu F_{21}$ – elementul 1 alunecă fără să se rostogolească față de elementul 2,
3. $M > sF_{21}$ și $F > \mu F_{21}$ – elementul 1 alunecă și în același timp se rostogolește față de elementul 2,
4. $M > sF_{21}$ și $F < \mu F_{21}$ – elementul 1 timp se rostogolește fără alunecare față de elementul 2.

Tipul mișcării realizate de elementul 1 față de elementul 2 poate fi determinat doar dacă se cunosc forța exterioară \vec{F} și momentul M a cărui valoare depinde de distanța d .

Se notează cu d_0 distanța pentru care $M = s \cdot F_{21}$ adică:

$$F \cdot d_0 = s \cdot F_{21} \quad (2.66)$$

de unde:

$$d_0 = \frac{s \cdot F_{21}}{F} \quad (2.67)$$

Dacă $d > d_0$ rezultă că $M > s \cdot F_{21}$ și atunci elementul 1 alunecă și se rostogolește față de elementul 2, iar dacă $d < d_0$ atunci $M < s \cdot F_{21}$, caz în care elementul 1 are o mișcare de alunecare fără rostogolire față de elementul 2.

Contactul punctiform apare și între un profil circular și o dreaptă. Reacțiunile cu frecare în acest caz sunt prezentate în figura 2.33.

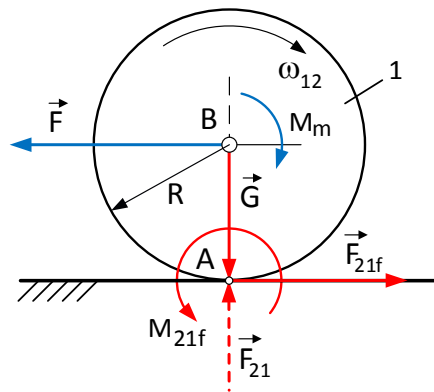


Fig.2.33 Reacțiuni cu frecare în cupla superioară formată între un cerc și o dreaptă

Dacă asupra elementului I acționează forța \vec{F} , condițiile pentru realizarea unei mișcări de rostogolire fără alunecare sunt: $M > sF_{21}$ și $F < \mu F_{21}$. Ținând cont de faptul că $M = R \cdot F$, rezultă:

$$R > \frac{s}{\mu} \quad (2.68)$$

În cazul în care $s = 0,05$ și $\mu = 0,1$, pentru realizarea unei mișcări de rostogolire, elementul I trebuie să aibă raza $R > 0,5$ cm.

Dacă asupra elementului I acționează momentul M_m care produce forța \vec{F} , condiția pentru realizarea unei mișcări de rostogolire fără alunecare este: $F \leq F_{21}$ sau $F \leq \mu \cdot F_{21}$

Se scrie ecuația de echilibru a elementului I sub forma momentelor față de punctul de contact A, sub forma:

$$M_m - R \cdot F - M_{21f} = 0 \quad (2.69)$$

de unde:

$$F = \frac{M_m - s \cdot F_{21}}{R} \quad (2.70)$$

Pentru un moment M_m , valoarea forței \vec{F} crește cu micșorarea razei elementului I , sau a forței \vec{F}_{21} .

2.5 Reducerea forțelor și maselor mecanismelor

Pentru studiul mișcării mecanismelor sub acțiunea forțelor și momentelor exterioare, trebuie luate în considerare puterea și energia cinetică dezvoltate de mecanisme. În acest scop se poate utiliza un model simplificat al mecanismului la baza căruia stă *elementul de reducere* care este de regulă elementul conducător.

2.5.1 Forța redusă. Momentul redus

Forța redusă F^r sau *momentul redus* M^r sunt forța respectiv momentul fictiv care acționează asupra elementului de reducere și dezvoltă aceeași putere ca întregul sistem de forțe și momente care acționează asupra mecanismului (fig.2.34)

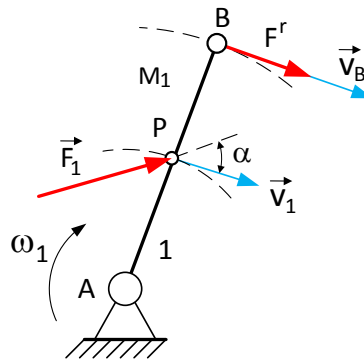


Fig.2.34 Forța redusă

Forța redusă acționează pe direcția vitezei punctului de aplicație. Se poate scrie astfel:

$$P = F^r v_B = \sum_{j=1}^n (F_j v_j \cos \alpha_j + M_j \omega_j) \quad (2.71)$$

$$P = M^r \omega_1 = \sum_{j=1}^n (F_j v_j \cos \alpha_j + M_j \omega_j)$$

unde: - v_B și ω reprezintă viteza punctului de reducere a forței respectiv viteza unghiulară a elementului de reducere,

- F_j și M_j sunt forța respectiv momentul ce acționează asupra elementului j ,

- v_j și ω_j reprezintă viteza punctului de aplicație al forței F_j respectiv viteza unghiulară a elementului j .

- α_j este unghiul format între direcțiile vectorilor F_j și v_j
- n reprezintă numărul de elemente mobile ale mecanismului

Din relațiile (2.70) se obțin expresiile forței și momentului redus sub forma:

$$F^r = \sum_{j=1}^n \left(F_j \frac{v_j}{v_B} \cos \alpha_j + M_j \frac{\omega_j}{\omega_1} \right)$$

$$M^r = \sum_{j=1}^n \left(F_j \frac{v_j}{\omega_1} \cos \alpha_j + M_j \frac{\omega_j}{\omega_1} \right)$$
(2.72)

În relațiile de mai sus produsul $M_j \omega_j$ este pozitiv dacă ambele mărimi au același sens și este negativ în sens contrar. Dacă valorile pentru F^r și M^r rezultă negative înseamnă că forța și momentul redus au un sens contrar sensului de mișcare al elementului de reducere. F^r și M^r nu depind de viteza elementului de reducere deoarece rapoartele $\frac{v_j}{v_B}, \frac{\omega_j}{\omega_1}, \frac{v_j}{\omega_1}, \frac{\omega_j}{\omega_1}$ reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întâi care sunt caracteristici geometrice ale mecanismelor. În schimb, forța și momentul redus depind de mărimile forțelor și momentelor exterioare și de punctele lor de aplicație și de asemenea de pozițiile elementelor mecanismului [4], [10].

Variația forțelor și momentelor reduse este periodică iar perioada după care aceste se repetă se numește *ciclu energetic*. Ele înlocuiesc din punct de vedere a puterii întregul sistem de forțe și momente care acționează asupra mecanismului, astfel că:

$$F^r = -F_e, \quad M^r = -M_e$$
(2.73)

unde: F_e și M_e reprezintă forța respectiv momentul de echilibrare (vezi 2.3.2).

2.5.2 Masa redusă. Momentul de inerție redus

Masa redusă m^r este o masă fictivă plasată într-un punct al elementului de reducere care, mișcându-se împreună cu acesta, dezvoltă o energie cinetică egală cu cea dezvoltată de întregul mecanism (fig. 2.35 a) [10].

Dacă masele se reduc la întregul element de reducere care are o mișcare de rotație, nu la un punct de pe acesta, se definește noțiunea de moment de inerție redus

Momentul de inerție redus I^r este momentul fictiv creat de un volant care, rotindu-se cu aceeași viteză unghiulară ca și elementul de reducere, dezvoltă o energie cinetică egală cu cea dezvoltată de întregul mecanism (fig. 2.35 b) [10].

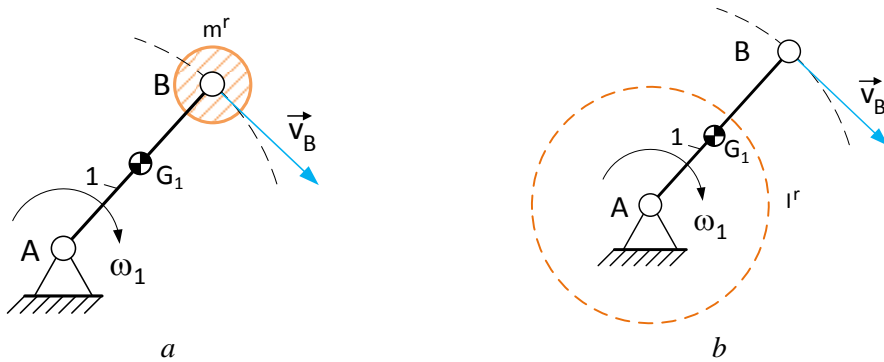


Fig.2.35 Masa redusă și momentul de inerție redus

Pe baza definițiilor se pot scrie următoarele relații:

$$E_c = m^r \frac{v_B^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left(I_{Gj} \frac{\omega_j^2}{2} + m_j \frac{v_{Gj}^2}{2} \right) \quad (2.74)$$

$$E_c = I^r \frac{\omega_1^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left(I_{Gj} \frac{\omega_j^2}{2} + m_j \frac{v_{Gj}^2}{2} \right)$$

unde:

- v_B și ω reprezintă viteza punctului de reducere a masei respectiv viteza unghiulară a elementului de reducere,
- m_j și I_{Gj} sunt masa respectiv momentul de inerție mecanic în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate al elementului j ,
- v_{Gj} și ω_j reprezintă viteza centrului de greutate respectiv viteza unghiulară a elementului j .
- n este numărul de elemente mobile al mecanismului

Din relațiile (2.74) rezultă expresiile masei și a momentului de inerție redus, după cum urmează:

$$m^r = \sum_{j=1}^n \left[I_{Gj} \left(\frac{\omega_j}{v_B} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{Gj}}{v_B} \right)^2 \right] \quad (2.75)$$

$$I^r = \sum_{j=1}^n \left[I_{Gj} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{Gj}}{\omega_1} \right)^2 \right]$$

Atât masa cât și momentul de inerție redus nu depind de viteza elementului de reducere, deoarece rapoartele $\frac{\omega_j}{v_B}, \frac{v_{Gj}}{v_B}, \frac{\omega_j}{\omega_1}, \frac{v_{Gj}}{\omega_1}$ reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întâi care sunt caracteristici geometrice ale mecanismelor. Depind însă de poziția elementelor, de natura mișcărilor efectuate de acestea precum și de masele aflate în mișcare. Masa și momentul de inerție reduse sunt variabile, iar perioada lor variație reprezintă *ciclul geometric*[4],[10].

2.6 Exemple

Exemplul 1. *Determinarea reacțiunilor în cuple și a momentului de echilibrare pentru mecanismul patrulater*

Se consideră mecanismul patrulater din figura 2.36 la care sunt cunoscute: lungimile elementelor mobile, distanța dintre cuplele A și D precum și valorile forțelor \vec{F}_2, \vec{F}_3 și a momentului M_3 . Se cere determinarea reacțiunilor în cuple și momentului de echilibrare care acționează asupra elementului conducător.

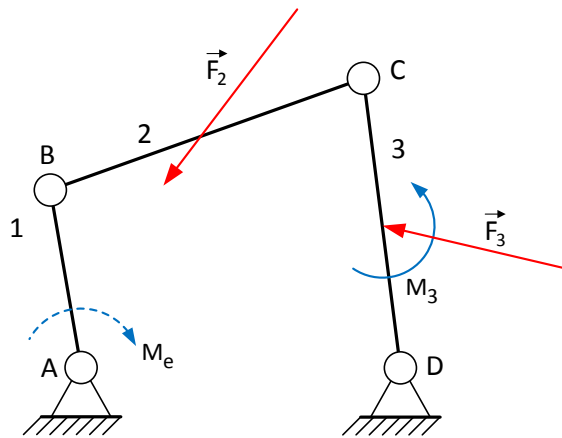


Fig.2.36 Forțele și momentul care acționează pe mecanismul patrulater

Se separă grupa structurală de elementul conducător și de cel fix (fig 2.37) și se introduc în cuplele marginale B și D forțele de legătură \vec{F}_{12} și \vec{F}_{03} descompuse în câte două componente perpendiculare $\vec{F}_{12}^n \parallel BC$ și $\vec{F}_{12}^t \perp BC$ respectiv $\vec{F}_{03}^n \parallel CD$ și $\vec{F}_{03}^t \perp CD$. Sensurile componentelor sunt în această fază, alese arbitrar.

Ecuția de echilibru a grupei scrisă sub forma forțelor este:

$$\underline{\vec{F}_{12}^t} + \underline{\vec{F}_{12}^n} + \underline{\vec{F}_2} + \underline{\vec{F}_3} + \underline{\vec{F}_{03}^t} + \underline{\vec{F}_{03}^n} = 0 \quad (2.76)$$

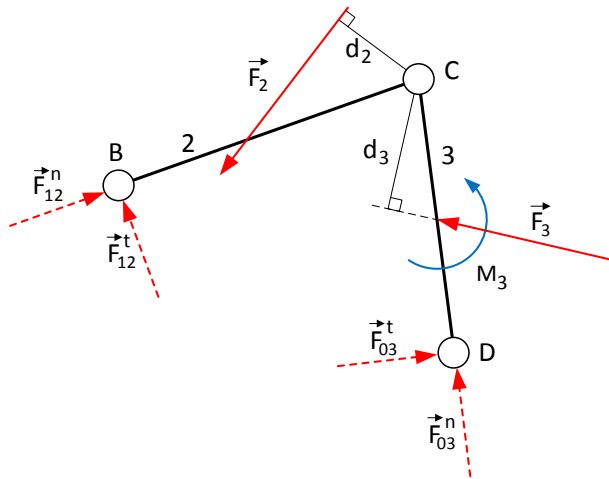


Fig.2.37 Grupa structurală în echilibru cinetostatic

Se scriu ecuațiile de momente în raport cu cupla centrală C a grupei pentru elementele 2 respectiv 3. Rezultă astfel:

$$\begin{aligned} F_{12}^t l_2 + F_2 d_2 &= 0 \\ F_{03}^t l_3 - F_3 d_3 - M_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Din relațiile (2.77) se obțin expresiile componentelor F_{12}^t și F_{03}^t după cum urmează:

$$\begin{aligned} F_{12}^t &= \frac{-F_2 d_2}{l_2} \\ F_{03}^t &= \frac{F_3 d_3 + M_3}{l_3} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pe baza mărimilor forțelor determinate cu relațiile (2.78) și ținând cont de ecuația de echilibru a grupei (2.76), se poate construi la o scară aleasă convenabil, poligonul forțelor din figura 2.38. Acesta permite determinarea mărimii componentelor \vec{F}_{12}^n și \vec{F}_{03}^n . De asemenea se observă că:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_{12}^n \\ \vec{F}_{03} &= \vec{F}_{03}^t + \vec{F}_{03}^n \end{aligned} \quad (2.79)$$

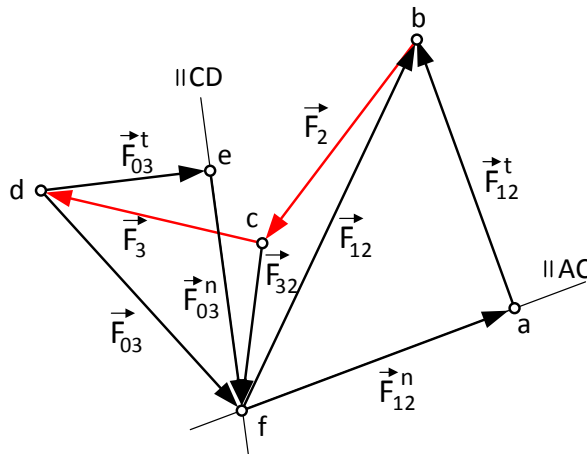


Fig.2.38 Poligonul forțelor pentru Exemplul 1

Pentru determinarea reacțiunii \vec{F}_{32} din cupla C se scrie ecuația de echilibru a elementului 2 sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} = 0 \quad (2.80)$$

Mărimea reacțiunii \vec{F}_{32} rezultă din poligonul forțelor. Pentru determinarea momentului de echilibrare se separă elementul conducător de restul mecanismului (fig.2.39).

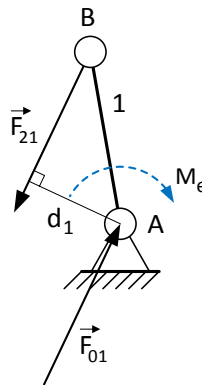


Fig.2.39 Elementul conducător în echilibru cinetostatic

Se scrie ecuația de echilibru a elementului sub forma forțelor:

$$\vec{F}_{01} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (2.81)$$

care permite determinarea reacțiunii \vec{F}_{01} . După cum se observă din figura 2.39 cele două reacțiuni formează un cuplu de forțe care trebuie echilibrat de momentul de echilibrare M_e a cărui mărime este $M_e = d_1 F_{12}$

Exemplul 2. Determinarea reacțiunilor în cuple și a momentului de echilibrare pentru mecanismul manivelă piston

Se consideră mecanismul manivelă piston din figura 2.40 la care sunt cunoscute: lungimile elementelor mobile, și valorile forțelor \vec{F}_2, \vec{F}_3 . Se cere determinarea reacțiunilor în cuple și momentul de echilibrare care acționează asupra elementului conducător.

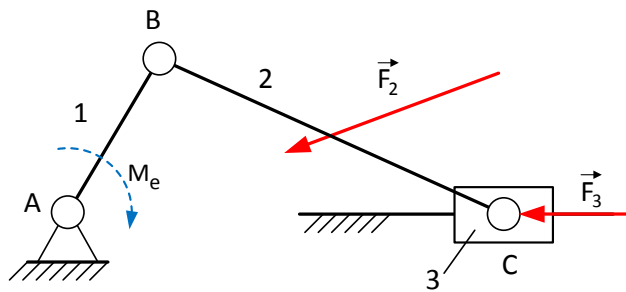


Fig.2.40 Forțele care acționează asupra mecanismului manivelă piston

Se separă grupa structurală de elementul conducător și de cel fix (fig 2.41) și se introduc în cuplele marginale B și C forța de legătură \vec{F}_{12} cu componentele $\vec{F}_{12}^n \parallel BC$ și $\vec{F}_{12}^t \perp BC$ respectiv și $\vec{F}_{03} \perp x - x$. Sensul componentelor este ales arbitrar. Dacă în urma calculelor rezultă valori negative, se schimbă sensul ales inițial.

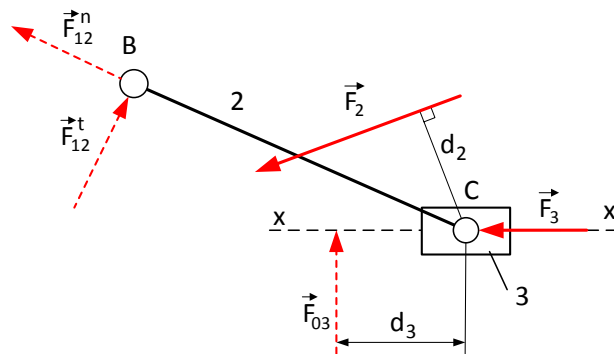


Fig.2.41 Grupa structurală în echilibru cinetostatic

Ecuția de echilibru a grupei scrisă sub forma forțelor este:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\vec{F}_{12}^n}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{F}_{03}}} = 0 \quad (2.82)$$

În continuare se scrie ecuația de momente în raport cu cupla C:

$$F_{12}^t l_2 - F_2 d_2 = 0 \quad (2.83)$$

și rezultă astfel expresia componentei F_{12}^t sub forma:

$$F_{12}^t = \frac{F_2 d_2}{l_2} \quad (2.84)$$

Deoarece $F_{03} d_3 = 0$, înseamnă că punctul de aplicație al reacțiunii F_{03} este chiar centul cuplei C.

Cunoscând valoarea componentei F_{12}^t și ținând cont de ecuația de echilibru a grupei (2.82), se poate construi la o scară aleasă convenabil, poligonul forțelor din figura 2.42. Acesta permite determinarea mărimii componentelor \vec{F}_{12}^n și \vec{F}_{03} .

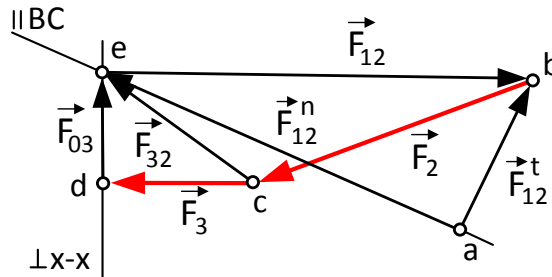


Fig.2.42 Poligonul forțelor pentru Exemplul 2

Pentru determinarea reacțiunii \vec{F}_{32} din cupla C se scrie ecuația de echilibru a elementului 2 sub forma forțelor:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} = 0 \quad (2.85)$$

Mărimea reacțiunii \vec{F}_{32} rezultă din poligonul forțelor. Pentru determinarea momentului de echilibrare se separă elementul conducător de restul mecanismului (fig.2.43) și se scrie ecuația de echilibru a elementului sub forma forțelor:

$$\vec{F}_{01} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (2.86)$$

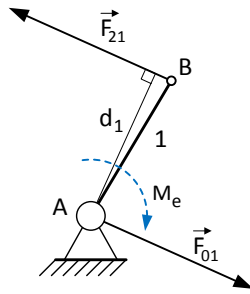


Fig.2.43 Element conducător în echilibru cinetostatic

După cum se observă din figura 2.43 cele două reacțiuni formează un cuplu de forțe care trebuie echilibrat de momentul de echilibrare M_e a cărui mărime este $M_e = d_1 F_{12}$.

Exemplul 3. Determinarea masei reduse și a momentului de inerție redus la mecanismul patrulater

Se consideră mecanismul patrulater din figura 2.44 la care sunt cunoscute: geometria mecanismului, viteza unghiulară ω_1 a elementului conducător, masele m_1 , m_2 și m_3 , pozițiile centrelor de greutate, respectiv valorile momentelor de inerție mecanice I_{G1} , I_{G2} și I_{G3} în raport cu axa O_z . Se cere determinarea masei reduse și a momentului de inerție redus. Elementul de reducere este elementul conducător.

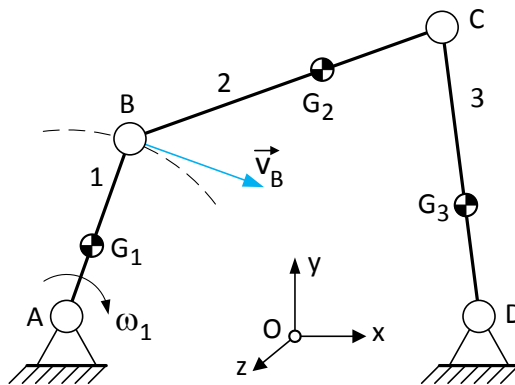


Fig.2.44 Mecanismul patrulater din Exemplul 3

Pentru început se determină prin analiza cinematică vitezele v_B și v_C respectiv vitezele centrelor de greutate v_{G1} , v_{G2} și v_{G3} . În acest exemplu s-a folosit metoda grafo-analitică de determinare a vitezelor. Se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= l_{AB} \times \omega_1, \quad \vec{v}_B \perp AB \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \quad \vec{v}_C \perp CD \text{ și } \vec{v}_{CB} \perp BC\end{aligned}\quad (2.87)$$

Pe baza relațiilor (2.87) se construiește la o scară convenabil aleasă, planul vitezelor din figura 2.45.

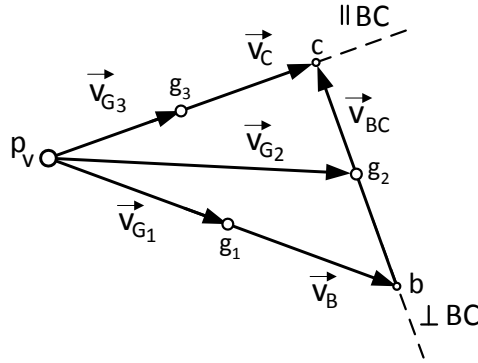


Fig.2.45 Planul vitezelor pentru Exemplul 3

Vitezele unghiulare ale elementelor 2 și 3 se pot determina cu relațiile $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$ respectiv $\omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}}$. Masa redusă a mecanismului se obține pe baza relației (2.74), astfel:

$$\begin{aligned}m^r &= m_1 \left(\frac{v_{G1}}{v_B} \right)^2 + I_{G1} \left(\frac{\omega_1}{v_B} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{G2}}{v_B} \right)^2 + I_{G2} \left(\frac{\omega_2}{v_B} \right)^2 + \\ &+ m_3 \left(\frac{v_{G3}}{v_B} \right)^2 + I_{G3} \left(\frac{\omega_3}{v_B} \right)^2\end{aligned}\quad (2.88)$$

În relația (2.86) se fac următoarele notații: $\frac{\omega_1}{v_B} = \frac{1}{l_{AB}}$, $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$, $\omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}}$ și rezultă:

$$\begin{aligned}m^r &= m_1 \left(\frac{v_{G1}}{v_B} \right)^2 + I_{G1} \left(\frac{1}{l_{AB}} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{G2}}{v_B} \right)^2 + I_{G2} \left(\frac{v_{CB}}{l_{BC} \cdot v_B} \right)^2 \\ &+ m_3 \left(\frac{v_{G3}}{v_B} \right)^2 + I_{G3} \left(\frac{v_C}{l_{CD} \cdot v_B} \right)^2\end{aligned}\quad (2.89)$$

În cazul în care punctul de reducere este cupla B, momentul de inerție redus se poate determina cu relația:

$$I^r = m^r \left(\frac{v_B}{\omega_1} \right)^2 = m^r l_{AB}^2 \quad (2.90)$$

3. ECHILIBRAREA MECANISMELOR

3.1 Introducere

Echilibrarea mecanismelor urmărește micșorarea sau anularea acțiunii torsorului forțelor de inerție. Forțele de inerție, care au mărimi și direcții variabile, produc în cuplele și elementele cinematice ale mecanismelor, solicitări dinamice. Mecanismele realizează de obicei mișcări periodice, prin urmare forțele de inerție vor avea și ele un caracter periodic fapt ce poate duce la apariția vibrațiilor. Dacă frecvența acestor oscilații coincide cu frecvența oscilațiilor proprii ale unui element sau mecanism, se produce fenomenul de *rezonanță mecanică* [10], [12].

Torsorul forțelor de inerție redus la centrul de greutate al unui element are în general, următoarea expresie [4]:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= -m\vec{a}_G \\ M_i &= [-I_1\varepsilon_x - (I_3 - I_2)\omega_x\omega_y]\vec{i} + \\ &+ [-I_2\varepsilon_y - (I_1 - I_3)\omega_z\omega_x]\vec{j} + \\ &+ [-I_3\varepsilon_z - (I_2 - I_1)\omega_z\omega_y]\vec{k}\end{aligned}\tag{3.1}$$

unde:

- m reprezintă masa elementului;
- \vec{a}_G este accelerația centrului de greutate;
- I_1, I_2, I_3 sunt momentele de inerție centrale;
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ și $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ reprezintă proiecțiile vitezelor și accelerațiilor unghiulare ale elementului pe axele principale de inerție.

Când elementul cinematic execută doar o mișcare de rotație se poate realiza echilibrarea forțelor de inerție în interiorul elementului deoarece se poate face $\vec{a}_G = 0$.

Dacă elementul realizează o mișcare plan paralelă, de exemplu biela unui mecanism patrulater, atunci torsorul forțelor de inerție se poate scrie astfel:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_G \quad (3.2)$$

$$M_i = (I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2)\vec{i} + (I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\omega^2)\vec{j} + I_z\varepsilon\vec{k}$$

unde:

- I_{xz} și I_{yz} reprezintă momentele de inerție centrifugale
- I_z este momentul de inerție mecanic în raport cu axa perpendiculară pe planul mișcării ce trece prin centrul de greutate al elementului;
- ω și ε sunt viteza respectiv accelerația unghiulară a elementului
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ reprezintă versorii axelor sistemului de coordonate cu originea în centrul de greutate al elementului.

Centrul de greutate al unui element care realizează o mișcare plan paralelă, se deplasează după curbă închisă. De aceea forțele de inerție nu pot fi echilibrate în interiorul elementului deoarece $\vec{a}_G \neq 0$ și de cele mai multe ori $\varepsilon \neq 0$.

În funcție de elementele torsorului forțelor de inerție care se anulează, sunt posibile două tipuri de echilibrări:

- *echilibrarea statică* unde se anulează numai efectul forțelor de inerție \vec{F}_i
- *echilibrarea dinamică* la care se anulează forțele de inerție \vec{F}_i și se asigură condiția ca axa de rotație să fie o axă principală de inerție $I_{xz} = I_{yz} = 0$. În acest caz componenta $I_z\varepsilon\vec{k}$ din relația (3.2) nu se poate anula.

Echilibrarea statică sau dinamică se poate aplica elementelor care realizează mișcări de rotație. Mecanismele ale căror elementele realizează mișcări plan paralele sau funcționează la viteze ridicate se echilibrează doar static [10].

3.2 Echilibrarea rotorilor prin proiectare

Elementele care realizează mișcări de rotație, numite *rotori*, sunt des întâlnite în practică (ex: rotoarele motoarelor electrice, arbori cotiți, rotoare de turbine etc). Deoarece acestea funcționează la turații ridicate, echilibrarea lor este o necesitate. *Echilibrarea prin proiectare*, utilizată la rotori cu o distribuție neuniformă a masei (ex: arbori cotiți). Repartizarea maselor se alege în faza de proiectare, astfel încât centrul lor de greutate să fie cât mai apropiat de axa de rotație [10], [12]. Din cauza neomogenității materialului din care este realizat rotorul și a erorilor tehnologice, chiar

dacă acesta este echilibrat prin proiectare, în realitate va rezulta un dezechilibru care poate fi redus doar prin echilibrarea experimentală.

Se consideră rotorul dezechilibrat din figura 3.1, a cărei masă m este concentrată într-un număr de puncte $P_1, P_2 \dots P_n$ situate într-un plan perpendicular pe axa de rotație. În această situație, axa principală de inerție este chiar axa de rotație, prin urmare pentru realizarea echilibrării necesar ca $\vec{F}_i = 0$. Astfel centrul de greutate al rotorului va fi pe axa de rotație și $\vec{a}_G = 0$.

Masele concentrate nefiind situate pe axa de rotație produc dezechilibre date de vectorii $\vec{U}_j = m_j \vec{r}_j$ care sunt coliniari și în același sens cu vectorii de poziție \vec{r}_j . Vectorul total de dezechilibru se poate determina cu relația:

$$\vec{U}_d = \sum_{j=1}^n \vec{U}_j = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_j \vec{r}_j \quad (3.3)$$

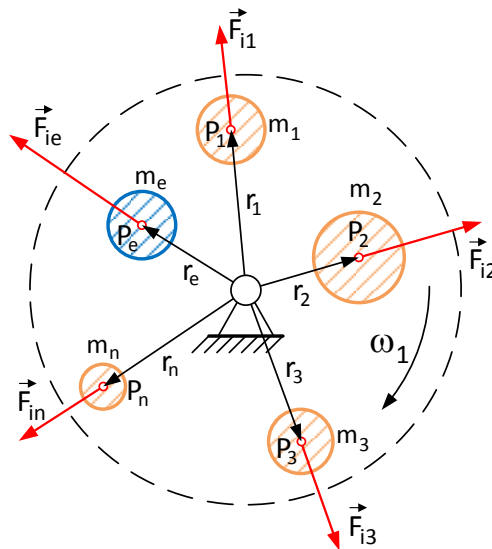


Fig.3.1 Distribuția maselor unui rotor dezechilibrat

Echilibrarea se poate realiza prin adăugarea unei mase suplimentare m_e în planul maselor $m_1, m_2 \dots m_n$ astfel încât întregul sistem de forțe să fie în echilibru, adică:

$$\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ie} = 0 \quad (3.4)$$

sau:

$$\sum_{j=1}^n m_j \bar{r}_j \omega_1^2 + m_e \bar{r}_e \omega_1^2 = 0 \quad (3.5)$$

unde:

- \bar{r}_j sunt vectorii de poziție ai punctelor P_j
- \bar{r}_e reprezintă vectorul de poziție al punctului în care se va plasa masa de echilibrare

Prin simplificarea relației (3.5) cu ω_1^2 și ținând cont de relația (3.3) se poate scrie:

$$m_e \bar{r}_e = - \sum_{j=1}^n m_j \bar{r}_j \quad \text{sau} \quad \bar{U}_e = -\bar{U}_d. \quad (3.6)$$

Se reprezintă la o scară k_F convenabil aleasă, vectorii de dezechilibru $m_j \bar{r}_j$, închiderea poligonului realizându-se prin vectorul $m_e \bar{r}_e$ (fig.3.2). Mărimea acestuia se calculează cu relația:

$$m_e \bar{r}_e = (np) k_F \quad (3.7)$$

Prin adoptarea vectorului de poziție \bar{r}_e rezultă mărimea masei de echilibrare m_e , sau invers. Direcția și poziția unde trebuie plasată masa de echilibrare rezultă din poligonul de vectori din figura 3.2.

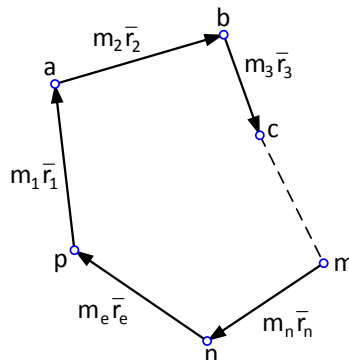


Fig.3.2 Poligonul vectorilor de dezechilibru

În exemplul prezentat s-a considerat cunoscută poziția planului unde acționează vectorii de dezechilibru. În realitate nu se cunoaște exact poziția planului sau există situații în care vectorii de dezechilibru acționează în mai multe plane paralele.

Se consideră rotorul din figura 3.3 la care masele de dezechilibru m_1, m_2, m_3 sunt situate în trei plane perpendiculare pe axa de rotație. Aceste plane se găsesc la distanțele cunoscute z_1, z_2, z_3 față de un planul xOy . Pozițiile celor trei mase sunt determinate de vectorii de poziție $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ale căror origini se găsesc pe axa de rotație Oz .

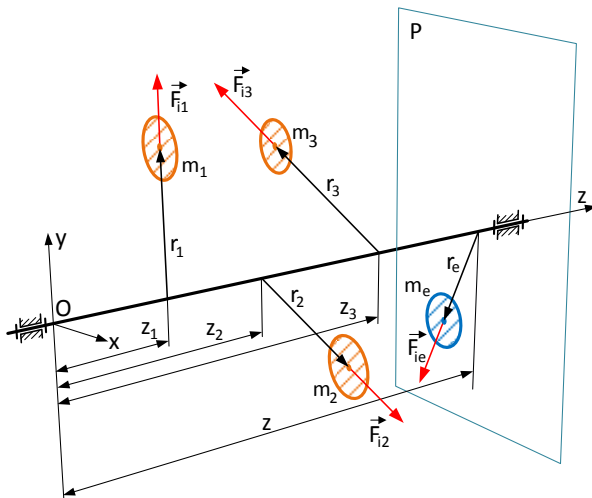


Fig.3.3 Echilibrarea statică a unui rotor cu masele distribuite în trei plane

Pentru echilibrarea statică ($\vec{F}_i = 0$) a maselor aflate în mișcare, este suficient să se plaseze o masă de echilibrare m_e într-un plan P pe o direcție bine determinată și la o anumită distanță față de axa de rotație, astfel încât:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_e \vec{r}_e = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_e = 0 \quad (3.8)$$

Pe baza relației (3.8) se construiește la o scară k_F poligonul vectorilor de dezechilibru și astfel rezultă mărimea $m_e \vec{r}_e = (cp)k_F$ și direcția vectorului \vec{U}_e . Prin alegerea mărimii vectorului de poziție \vec{r}_e rezultă valoarea masei de echilibrare m_e

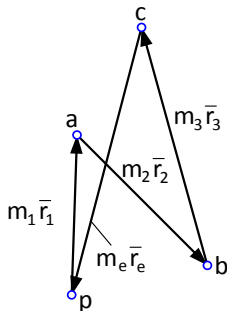


Fig.3.4 Poligonul vectorilor de dezechilibru pentru echilibrarea statică

Echilibrarea dinamică ($\vec{F}_i = 0$, $M_{ix} = M_{iy} = 0$) se poate realiza cu ajutorul a două mase de echilibrare m_{e1} respectiv m_{e2} plasate în două plane P_I, P_{II} , aflate la distanța cunoscută z , care de regulă sunt materializate de suprafețele frontale ale rotorului (fig.3.5).

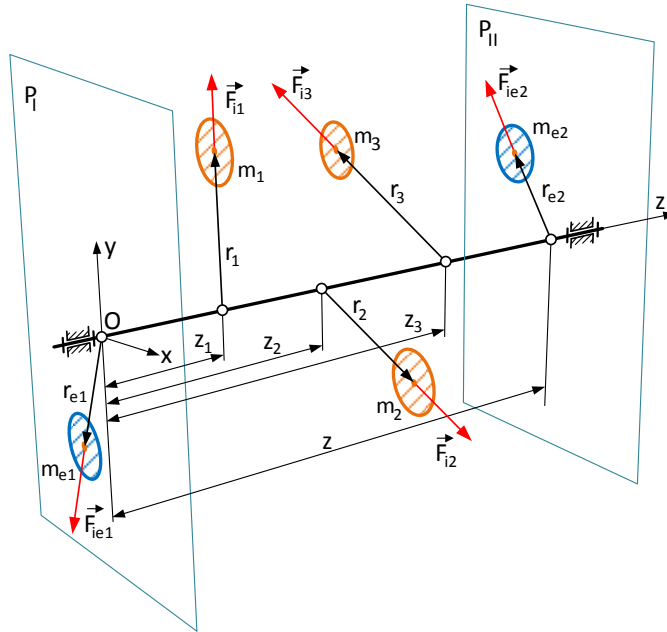


Fig. 3.5 Echilibrarea dinamică a unui rotor cu mase distribuite în trei plane

Pentru $\vec{F}_i = 0$ este nevoie să fie îndeplinită condiția:

$$\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ieI} + \vec{F}_{ieII} = 0 \quad (3.9)$$

sau:

$$\sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j \omega_1^2 + m_{e1} \vec{r}_{e1} \omega_1^2 + m_{e2} \vec{r}_{e2} \omega_1^2 = 0 \quad (3.10)$$

Dacă suma momentelor forțelor de inerție în raport cu orice punct de pe axa Oz este nulă atunci $M_{ix} = M_{iy} = 0$. Se scriu ecuațiile de momente față de punctul O [4]:

$$\sum_{j=1}^n \vec{z}_j \times \vec{F}_{ij} + \vec{z} \times \vec{F}_{ie2} = 0 \quad (3.11)$$

sau:

$$\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \times (m_j \bar{r}_j \omega^2) + \bar{z} \times (m_{e2} \bar{r}_{e2} \omega^2) = 0 \quad (3.12)$$

Se simplifică ω^2 cu relația (3.12) și se construiește poligonul momentelor din planul P_I la o scară k_M (fig. 3.6). Vectorii care reprezintă aceste momente au punctele de aplicație în O și direcțiile perpendiculare pe planele definite de vectorii $m_j \bar{r}_j$ și distanțele \bar{z}_j . Deci sunt perpendiculari pe vectorii $m_j \bar{r}_j$ dar roțiți cu 90° în sens orar. Poligonul se închide prin vectorul $\bar{z} \times m_{e2} \bar{r}_{e2}$ a cărui mărime este dată de relația:

$$|\bar{z} \times m_{e2} \bar{r}_{e2}| = (pc)k_M \quad (3.13)$$

Prin alegerea convenabilă a mărimii vectorului de poziție \bar{r}_{e2} se poate determina valoarea masei de echilibrare m_{e2} . Direcția și poziția de amplasare a masei m_{e2} se obțin prin rotirea vectorului cp cu 90° în sens trigonometric.

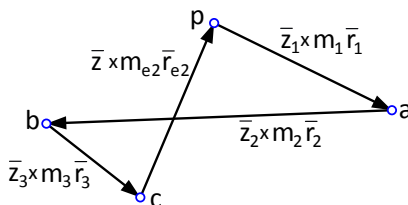


Fig.3.6 Poligonul momentelor de dezechilibru din planul P_I

După simplificarea relației (3.10) cu ω^2 se poate construi poligonul vectorilor de dezechilibru din figura 3.7, la o scară k_F . Închiderea poligonului se realizează prin vectorul $m_{e1} \bar{r}_{e1}$ a cărui mărime este dată de relația:

$$m_{e1} \bar{r}_{e1} = (dp)k_F \quad (3.14)$$

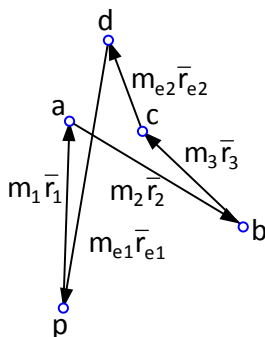


Fig.3.7 Poligonul vectorilor de dezechilibru

Prin alegerea mărimii vectorului \vec{r}_{e1} rezultă valoarea masei de echilibrare m_{e1} sau invers. Direcția și poziția de amplasare a masei m_{e1} se obțin din figura 4.7. În concluzie prin plasarea celor doua mase de echilibrare m_{e1} și m_{e2} în planele P_I, P_{II} rotorul este echilibrat dinamic [4].

3.3 Echilibrarea experimentală a rotorilor

3.3.1 Echilibrarea statică experimentală

Cea mai simplă echilibrare experimentală este *echilibrarea statică* a rotorilor care se reduce la suprapunerea centrului de greutate peste axa de rotație.

Acest tip de echilibrare este suficientă pentru rotorii a căror lățime este mult mai mică comparativ cu diametrul, adică pentru *discuri*. Este important ca planul de simetrie al discului să fie perpendicular pe axa de rotație.

Pentru realizarea echilibrării, discul *1* este pus pe două prisme cu muchii ascuțite, notate cu *2* în figura 3.8. Discul fiind dezechilibrat, va oscila până când centrul său de greutate ocupă o poziție stabilă, pe direcție verticală sub axa de rotație.

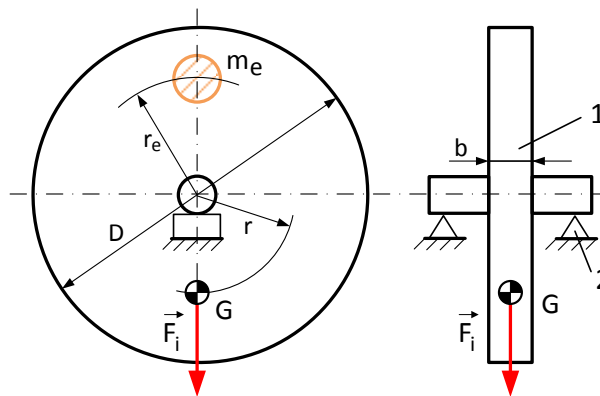


Fig.3.8 Echilibrarea statică a discurilor [10]

Forța de inerție care provoacă dezechilibrul este dată de relația:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_G = m\vec{r}\omega^2 \quad (3.15)$$

în care: m este masa discului, ω viteza de oscilație a discului iar r reprezintă distanța unde se găsește centrul de greutate în raport cu de axa de rotație. Cu excepția masei m , toate celelalte mărimi sunt necunoscute, prin urmare mărimea și sensul forței nu pot fi determinate analitic. Din acest motiv se recurge la echilibrarea experimentală [10].

Pentru realizarea echilibrării, este necesară plasarea unei mase de echilibrare m_e , în partea opusă punctului de aplicare a forței \vec{F}_i , care să genereze o forță de echilibrare dată de relația:

$$\vec{F}_{ie} = m_e \vec{r}_e \omega^2 = -\vec{F}_i \quad (3.16)$$

Echilibrarea se realizează prin încercări, cu diferite mase de echilibrare, până când discul va sta în echilibru pe cele două prisme indiferent de poziție. În această situație este valabilă relația:

$$m_e = m \frac{r}{r_e} \quad (3.17)$$

Echilibrarea se poate realiza și prin îndepărtarea de material (prin găurire sau pilire) din aceeași parte a discului în care acționează forța \vec{F}_i .

Se pot utiliza și dispozitive de echilibrat static care permit echilibrarea direct fără încercări, cum este cel prezentat în figura 3.9

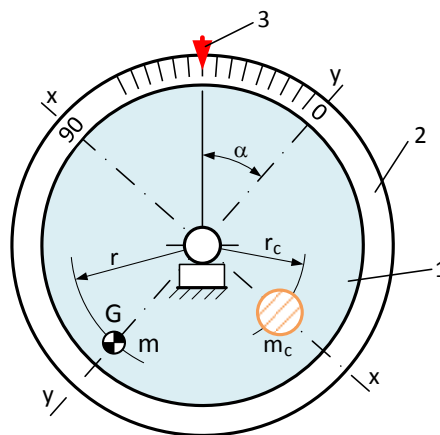


Fig.3.9 Schema de principiu a dispozitivului de echilibrat static

Pentru realizarea echilibrării se parcurg următoarele etape:

- După ce discul 1 nu mai oscilează, se poziționează cadranul 2 cu gradația 0 pe verticală;
- Se plasează o masă de comparație m_c cunoscută la distanța r_c pe direcția $x - x \perp y - y$. Din cauza acestei mase, discul se va roti până ajunge într-o poziție de echilibru dată de unghiul α . Se poate scrie:

$$mr \cdot \sin \alpha = m_c r_c \cdot \cos \alpha \quad (3.18)$$

sau

$$mr = m_c r_c \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad (3.19)$$

de unde distanța r se poate determina cu relația:

$$r = \frac{m_c}{m} r_c \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad (3.20)$$

- Se îndepărtează masa de comparație și se adaugă pe direcția $y - y$, la distanța r_e , deasupra centrului de rotație, masa de echilibrare m_e a cărei valoare se poate calcula cu relația:

$$m_e = m \frac{r}{r_e} \quad (3.21)$$

Teoretic se consideră că dezechilibrul are loc în planul median al discului. În realitate nu se cunoaște exact planul în care acționează forța care produce dezechilibrul. Adăugarea sau eliminarea de masă în vederea echilibrării se face de obicei pe una din fețele discului, sau mai rar pe periferia acestuia. Prin urmare forțele \vec{F}_i și \vec{F}_{ie} nu sunt situate în același plan și determină un cuplu de forțe care rămâne neechilibrat. Practic se realizează echilibrarea forțelor de inerție, prin urmare se obține doar o *echilibrare statică* a discului [10].

3.3.2 Echilibrarea dinamică experimentală

Echilibrarea dinamică se realizează pe mașini de echilibrat, în două plane perpendiculare pe axa de rotație a rotorului, care sunt materializate de regulă de suprafețele frontale ale acestuia. În aceste plane se determina vectorii de dezechilibru $\vec{U}_1 = m_1 \vec{r}_1$ respectiv $\vec{U}_2 = m_2 \vec{r}_2$ precum și pozițiile unghiulare ale acestora. Vectorii se echilibrează prin adăugarea sau îndepărtarea unor mase în cele două plane. Modulele vectorilor \vec{r}_1 și \vec{r}_2 care determină pozițiile de fixare a maselor de echilibrare se aleg în funcție de dimensiunile rotorului [12]

Principiul de funcționare al mașinilor de echilibrat se bazează pe vibrațiile produse de forțele de inerție. Rotorul este montat pe un cadru sau un sistem de lagăre elastice, care-i permit acestuia să oscileze într-un plan orizontal sau vertical (în funcție de construcția mașinii de echilibrat). Sub acțiunea forțelor de inerție care variază după o lege armonică, sistemul elastic cu un singur grad de mobilitate intră în oscilații forțate amortizate. Prin măsurarea acestor oscilații, alternativ în cele două plane de echilibrare,

se obțin informații referitoare la vectorii de dezechilibru, la valorile maselor de echilibrare și implicit la poziția acestora [4],[12],[13].

În figura 3.10 se consideră rotorul dezechilibrat I montat pe un cadru oscilant 2 astfel încât axa de oscilație să fie conținută într-unul din cele două plane de echilibrare. Deoarece rotorul poate fi echilibrat cu ajutorul a două mase, teoretic poate fi înlocuit cu masele m_1 și m_2 numite *mase de dezechilibru*. Acestea sunt de fapt opusele maselor de echilibrare [12].

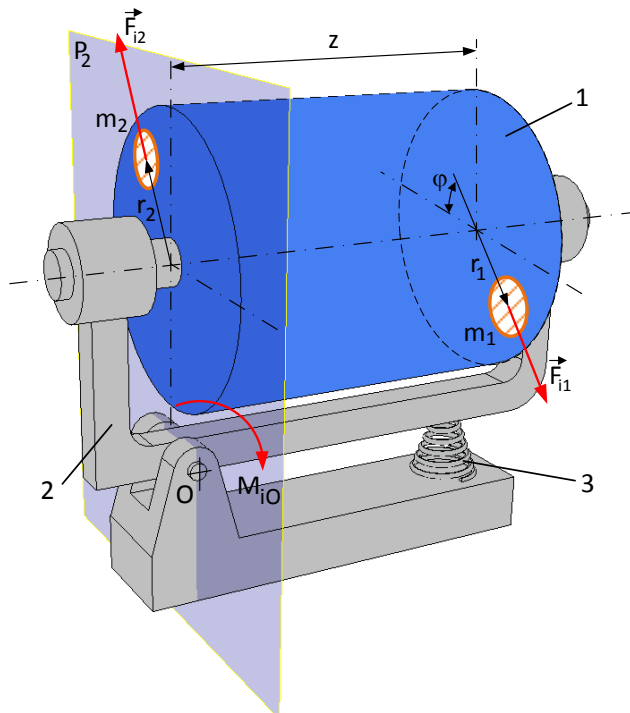


Fig.3.10 Principiul echilibrării dinamice

Dacă se imprimă rotorului o mișcare de rotație, masele de dezechilibru vor genera forțele de inerție \vec{F}_{i1} și \vec{F}_{i2} ale căror vectori se rotesc împreună cu rotorul. Deoarece planul P_2 conține axa de oscilație, efectul produs de forța de inerție \vec{F}_{i2} este eliminat. Astfel, momentul forței \vec{F}_{i1} în raport cu axa de oscilație O este dat de relația:

$$M_{i0} = m_1 r_1 \omega^2 z \cdot \sin \varphi \quad (3.22)$$

în care φ reprezintă unghiul vectorului de poziție r_1 în raport cu axa orizontală.

Acest moment are un caracter variabil motiv pentru care va cauza oscilații în jurul axei O . Echilibrarea se realizează în două etape: prima dată de echilibrează vectorul de dezechilibru $\vec{U}_1 = m_1 \vec{r}_1$ apoi se montează rotorul invers pe cadrul oscilant și se echilibrează vectorul $\vec{U}_2 = m_2 \vec{r}_2$. În prima etapă a echilibrării trebuie determinată mărimea masei de dezechilibru m_1 și valoarea unghiului φ .

În funcție de raportul dintre viteza unghiulară ω cu care se rotește rotorul și pulsația p a oscilațiilor proprii ale sistemului, există trei tipuri de echilibrare [12]:

- Echilibrare la turația de rezonanță ($\omega = p$)
- Echilibrare subcritică ($\omega \ll p$)
- Echilibrare supracritică ($\omega \gg p$)

În continuare se va prezenta *metoda turației la rezonanță* care se bazează pe faptul că amplitudinea oscilațiilor este în domeniul rezonanței, proporțională cu amplitudinea factorului perturbator. Pentru că în sistemul analizat factorul perturbator este reprezentat de momentul M_{i0} dat de relația (3.22), amplitudinea oscilațiilor la rezonanță A_1 este dată de relația:

$$A_1 = kF_{i1}z = km_1r_1\omega^2z \quad (3.23)$$

unde: k reprezintă constanta de proporționalitate a mașinii de echilibrat
 z este lungimea rotorului

Se rotește rotorul cu o turație superioară celei de rezonanță și apoi se lasă să se rotească liber. Datorită frecărilor, turația va scădea până când la rezonanță, sistemul își va mări amplitudinea oscilațiilor, înregistrându-se amplitudinea A_1 dată de relația (3.23). Amplitudinea oscilațiilor va avea faza decalată cu $\pi/2$ în urma fazei forței \vec{F}_{i1} care o produce (fig. 3.11).

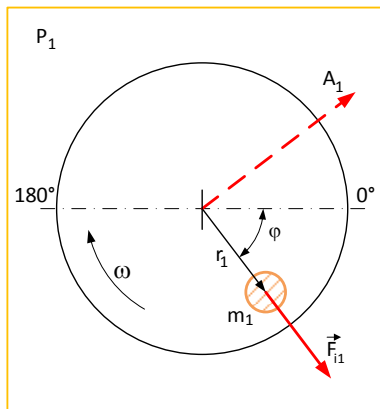


Fig.3.11 Amplitudinea A_1 la rezonanță

În planul P_1 la o poziție unghiulară aleasă arbitrar și notată cu 0° , se plasează la distanța r o masă m cunoscută. Se rotește din nou rotorul cu o turație superioară celei de rezonanță și apoi se lasă să oscileze liber. Când turația acestuia scade și trece prin rezonanță, se va înregistra amplitudinea A_2 dată de relația:

$$A_2 = kRz \quad (3.24)$$

în care, conform figurii 3.12:

$$\vec{R} = \vec{F}_{i1} + \vec{Q}; \quad Q = mr\omega^2 \quad (3.25)$$

Amplitudinea A_2 va avea faza decalată cu $\pi/2$ în urma fazei forței \vec{R} care o produce.

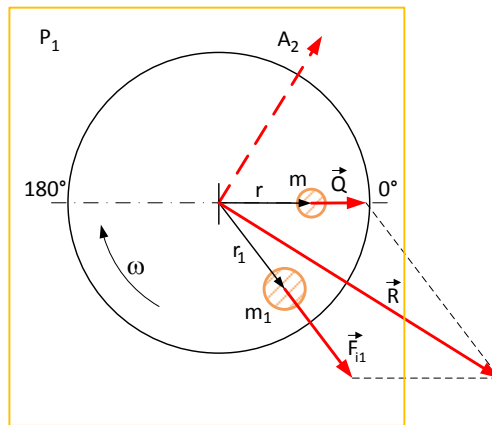


Fig.3.12 Amplitudinea A_2 la rezonanță

În același plan, se plasează diametral opus la distanța r aceeași masă cunoscută m . Se imprimă rotorului o turație superioară celei de rezonanță după care se lasă liber să oscileze. În acest caz la trecerea prin rezonanță, se va înregistra amplitudinea A_3 dată de relația:

$$A_3 = kR_1z \quad (3.26)$$

unde conform figurii 3.13:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_{i1} - \vec{Q}; \quad Q = mr\omega^2 \quad (3.27)$$

Și de această dată amplitudinea va avea faza decalată cu $\pi/2$ în urma fazei forței care o produce. Prin suprapunerea celor trei amplitudini A_1, A_2 și A_3 se poate obține paralelogramul amplitudinilor.

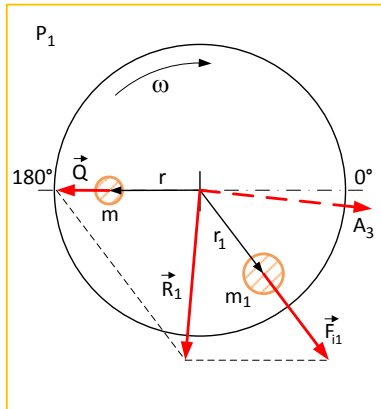


Fig.3.13 Amplitudinea A_3 la rezonanță

În paralelogramul amplitudinilor prezentat în figura 3.14, amplitudinea A corespunde oscilației la rezonanță a rotorului perfect echilibrat la care s-a adăugat masa de dezechilibru m la distanța r .

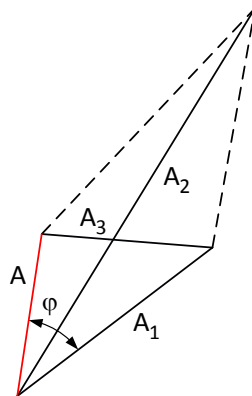


Fig.3.14 Paralelogramul amplitudinilor

Astfel, se poate scrie [4]:

$$A = kQz = kmr\omega^2 z \quad (3.28)$$

unde A se determină cu relația:

$$A = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}} \quad (3.29)$$

Prin împărțirea relațiilor (3.23) și (3.28) rezultă valoarea masei de echilibrare m_{e1} care plasată la distanța r_{e1} va echilibra masa m_1 , după cum urmează:

$$m_1 r_1 = m r \frac{A_1}{A} = m_{e1} r_{e1} \quad (3.30)$$

Poziția masei de echilibrare m_{e1} , care echilibrează rotorul în planul P_1 , este dată de unghiul φ care se măsoară față de gradația 180° , conform figurii 3.15

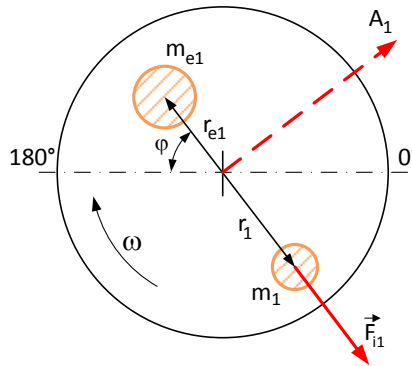


Fig.3.15 Poziția masei de echilibrare m_{e1}

Valoarea unghiului φ se obține cu ajutorul relației:

$$\varphi = \arccos \frac{A_1^2 + A^2 - A_3^2}{2A_1A} \quad (3.31)$$

Pentru echilibrarea completă a rotorului, se repetă aceleași operații după ce în prealabil rotorul a fost rotit cu 180° în cadrul 2 (fig. 3.10). Metoda turației la rezonanță are rezultate bune doar dacă dezechilibrul rotorului este relativ mic și prin urmare produce oscilații cu amplitudini reduse [4].

Practic, anularea completă a dezechilibrului nu este posibilă. Întotdeauna echilibrarea se realizează cu un dezechilibru rezidual a cărui mărime depinde de dimensiunile rotorului.

3.4 Echilibrarea statică a mecanismelor

Echilibrarea mecanismelor cu elemente articulate are ca obiectiv reducerea sau anularea componentelor tursorului forțelor de inerție generate de fiecare element cinematic al mecanismului. Echilibrarea dinamică, adică anularea totală a tursorului de inerție, este un procedeu complicat care duce la creșterea exagerată a maselor aflate în mișcare, motiv pentru care se realizează numai în situații speciale. De cele mai multe

ori este suficient să se anuleze doar efectul forțelor de inerție, adică să se realizeze o echilibrare statică [10], [12].

Un mecanism plan este echilibrat dacă centrul său de greutate are o poziție fixă pe tot timpul mișcării, caz în care $\vec{a}_G = 0$ și $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G = 0$.

Pentru echilibrarea statică a mecanismelor plane trebuie avute în vedere următoarele aspecte:

- stabilirea centrului de greutate al mecanismului,
- determinarea maselor care adăugate mecanismului, fac din centrul de greutate un punct fix.

În general, vectorul de poziție \vec{r}_G al centrului de greutate al unui mecanism (fig.3.16) se poate determina din relația:

$$m\vec{r}_G = \sum_{i=0}^n m_i\vec{r}_i \quad (3.32)$$

unde: m – reprezintă masa întregului mecanism;

m_i – este masa elementului i ;

\vec{r}_i – vectorul de poziție al centrului de greutate al elementului i ;

n – numărul de elemente mobile ale mecanismului

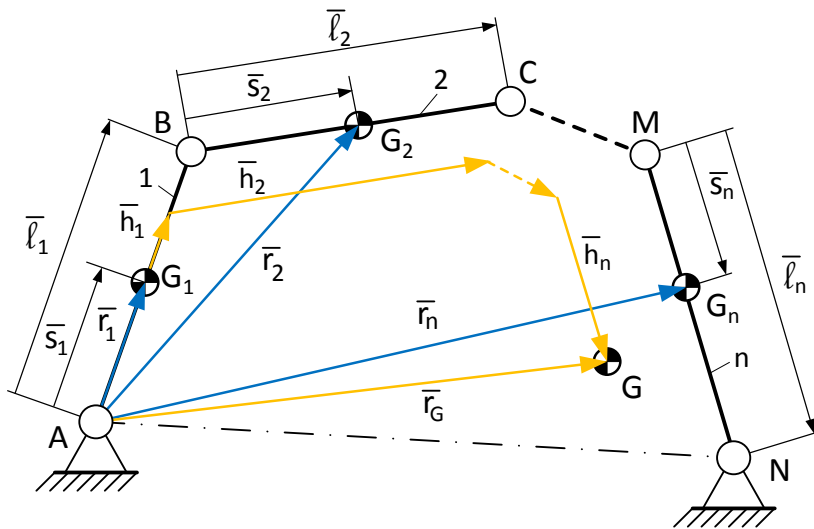


Fig.3.16 Centrul de greutate al unui mecanism

Vectorii de poziție pot fi exprimați prin relațiile:

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_1 &= \bar{s}_1, \\
 \bar{r}_2 &= \bar{l}_1 + \bar{s}_2, \\
 &\vdots \\
 \bar{r}_i &= \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_{i-1} + \bar{s}_i, \\
 &\vdots \\
 \bar{r}_n &= \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_{n-1} + \bar{s}_n
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Prin înlocuirea relațiilor (3.33) în (3.32) rezultă:

$$m\bar{r}_G = m_1\bar{s}_1 + m_2(\bar{l}_1 + \bar{s}_2) + \dots + m_n(\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_{n-1} + \bar{s}_n) \tag{3.34}$$

de unde:

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_G &= \frac{m_1\bar{s}_1 + (m_2 + m_3 \dots + m_n)\bar{l}_1}{m} + \frac{m_2\bar{s}_2 + (m_3 + m_4 \dots + m_n)\bar{l}_2}{m} + \\
 &+ \dots + \frac{m_{n-1}\bar{s}_{n-1} + m_n\bar{l}_{n-1}}{m} + \frac{m_n\bar{s}_n}{m}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Se introduc notațiile:

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_1 &= \frac{m_1\bar{s}_1 + (m_2 + m_3 \dots + m_n)\bar{l}_1}{m}, \\
 \bar{h}_2 &= \frac{m_2\bar{s}_2 + (m_3 + m_4 \dots + m_n)\bar{l}_2}{m}, \\
 &\vdots \\
 \bar{h}_n &= \frac{m_n\bar{s}_n}{m}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

cu ajutorul cărora vectorul de poziție \bar{r}_G al centrului de greutate al mecanismului poate fi exprimat după cum urmează:

$$\bar{r}_G = \sum_{i=0}^n \bar{h}_i = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \dots + \bar{h}_n \tag{3.37}$$

Vectorii \bar{h}_i au direcțiile paralele cu elementele mecanismului și modulul constant pe tot timpul mișcării mecanismului [4].

Pentru determinarea mărimii vectorului \bar{h}_i corespunzător elementului i din figura 3.17, se parcurg următoarele etape :

- în prima cuplă P a elementului considerat se concentrează masele tuturor elementelor situate înaintea lui
- în a doua cuplă Q a elementului se concentrează masele elementelor situate după elementul considerat
- în centrul de greutate al elementului se consideră masa proprie a elementului considerat
- în punctul H de pe element, se consideră masa întregului mecanism
- se scrie ecuația de echilibru sub forma momentelor statice ale maselor concentrate, în raport cu prima cuplă și astfel se obțin relațiile (3.36)

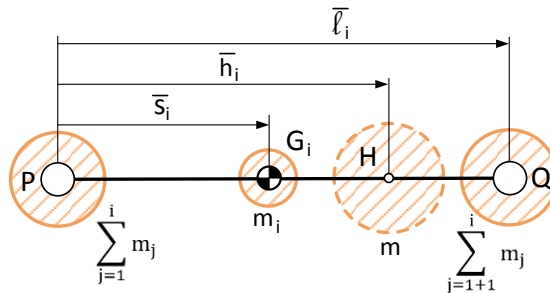


Fig.3.17 Vectorul principal \bar{h}_i aferent unui element

3.4.1 Echilibrarea mecanismului patrulater

Se consideră mecanismul patrulater din figura 3.18 pentru care sunt cunoscute: lungimile elementelor și masele m_1, m_2, m_3 ale elementelor mobile. Pentru ca mecanismul să fie echilibrat static este necesar ca centrul său de greutate să devină un punct fix.

Masele m_1, m_2, m_3 se concentrează static în două puncte. Se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned}
 m_A &= m_1 \frac{l_1 - s_1}{l_1}, \\
 m_B &= m_{1B} + m_{2A} = m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2}, \\
 m_C &= m_{2C} + m_{3C} = m_2 \frac{s_2}{l_2} + m_3 \frac{l_3 - s_3}{l_3}, \\
 m_D &= m_3 \frac{s_3}{l_3}.
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Pentru că masele m_A și m_D nu generează forțe de inerție, se vor echilibra doar masele m_B și m_C . Acest lucru se poate realiza prin plasarea maselor de echilibrare m_{e1} și m_{e3} în prelungirea elementelor 1 și 3 la distanțele r_{e1} respectiv r_{e3}

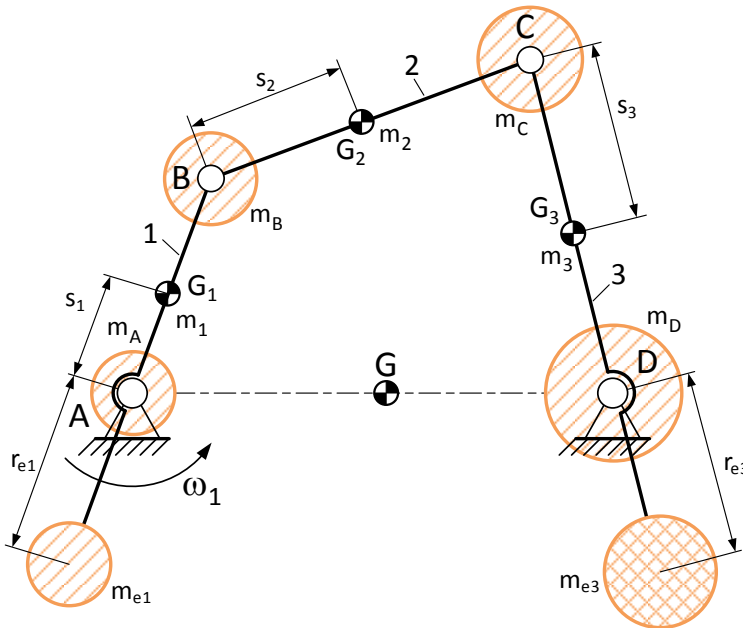


Fig.3.18 Echilibrarea mecanismului patruleter

În cazul în care sunt îndeplinite condițiile $m_{e1}r_{e1} = m_B l_1$ și $m_{e3}r_{e3} = m_C l_3$ cu relațiile de mai jos se pot determina valorile maselor de echilibrare, dacă se impun distanțele r_{e1} respectiv r_{e3} :

$$m_{e1} = m_B \frac{l_1}{r_{e1}}, \quad m_{e3} = m_C \frac{l_3}{r_{e3}} \quad (3.39)$$

Astfel, masele m_A , m_B și m_{e1} au centrul de greutate în cupla A iar m_D , m_C și m_{e3} vor avea centrul de greutate în cupla D. Centru de greutate al întregului mecanism se găsește între cuplele fixe A și D, iar poziția lui se poate determina din relația:

$$(m_A + m_B + m_{e1})AG = (m_D + m_C + m_{e3})(AD - AG) \quad (3.40)$$

de unde:

$$AG = AD \frac{m_D + m_C + m_{e3}}{m_A + m_B + m_D + m_C + m_{e1} + m_{e3}} \quad (3.41)$$

3.4.2 Echilibrarea mecanismului manivelă piston

Pentru mecanismul manivelă piston din figura 3.19, se consideră cunoscute lungimile elementelor, pozițiile centrelor de greutate precum și mărimile maselor m_1, m_2, m_3 ale acestora. În vederea echilibrării se concentrează static în două puncte masele m_1, m_2 și într-un punct masa m_3 a pistonului. Rezultă astfel:

$$m_A = m_1 \frac{l_1 - s_1}{l_1},$$

$$m_B = m_{1B} + m_{2B} = m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2}, \quad (3.42)$$

$$m_C = m_3 + m_2 \frac{s_2}{l_2}.$$

Masa m_A fiind concentrate în cupla fixă A, nu va genera forță de inerție. Prin urmare se vor echilibra doar masele m_B și m_C

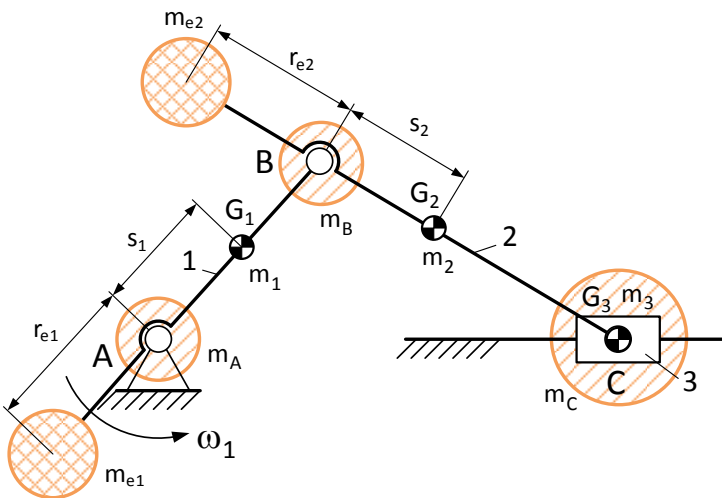


Fig.3.19 Echilibrarea statică a mecanismului manivelă piston

Prin plasarea masei m_{e2} în prelungirea elementului 2, se aduce centrul de greutate al bielei și pistonului 3 în centrul cuplei B. În acest caz suma momentelor statice ale acestor mase în raport cu punctul B trebuie să fie zero adică:

$$m_{e2}r_{e2} = m_C l_2 \quad (3.43)$$

Masa m_{e1} aflată în prelungirea elementului 1 la distanța r_{e1} , aduce centrul de greutate al bielei 2, pistonului 3 și manivelei 1 în centrul cuplei A. Se poate scrie astfel:

$$m_{e1}r_{e1} = (m_{e2} + m_{1B} + m_2 + m_3)l_1 \quad (3.44)$$

Dacă distanțele r_{e1} și r_{e2} se aleg constructiv în funcție de gabaritul mecanismului, din relațiile (3.42) (3.43) și (3.44) se determină mărimile maselor de echilibrare după cum urmează:

$$m_{e2} = m_c \frac{l_2}{r_{e2}} \quad (3.45)$$

$$m_{e1} = \left(m_c \frac{l_2}{r_{e2}} + m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 + m_3 \right) \frac{l_1}{r_{e1}}$$

În acest fel centrul de greutate al mecanismului este adus în centrul cuplei A, care este un punct fix. Masa m_{e2} plasată în prelungirea bielei mărește gabaritul mecanismului, motiv pentru care acest tip de echilibrare nu este des utilizat. De cele mai multe ori se preferă o echilibrare parțială prin adăugarea unei singure mase m_e în prelungirea manivelei, așa cum este prezentat în figura 3.20 [4], [10]

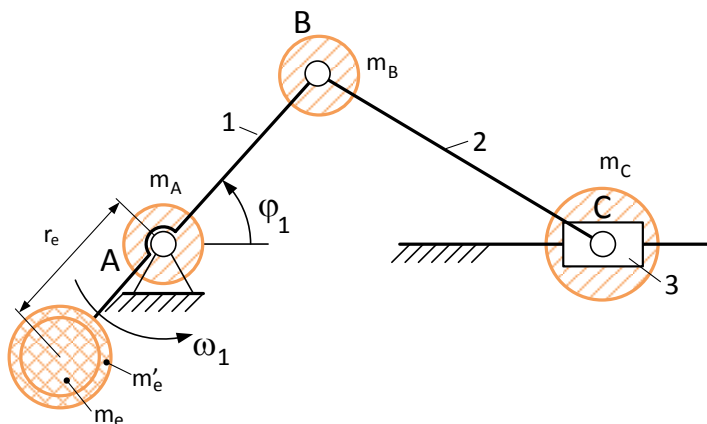


Fig.3.20 Echilibrarea parțială a mecanismului manivelă piston

Cu această masă se echilibrează doar masa concentrată în punctul B, adică:

$$m_e r_e = m_B l_1 \quad (3.46)$$

Dacă se alege r_e , din relațiile (3.42) și (3.46) se poate obține mărimea masei de echilibrare, după cum urmează:

$$m_e = \left(m_1 \frac{s_1}{l_1} + m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2} \right) \frac{l_1}{r_e} \quad (3.47)$$

În acest fel masa m_c concentrată în punctul C , rămâne neechilibrată. Elementul 3 execută o mișcare de translație, prin urmare forța de inerție produsă de masa m_c are direcția mișcării elementului și dacă $\omega_1 = \text{const}$, poate fi determinată cu relația [4]:

$$F_{iC} = -m_c a_c = m_c l_1 \omega_1^2 (A_1 \cos \varphi + 4A_2 \cos 2\varphi + 16A_4 \cos 4\varphi + \dots) \quad (3.48)$$

Dacă se introduc notațiile:

$$\begin{aligned} F_{i1} &= m_c l_1 \omega_1^2 A_1 \cos \varphi_1 \\ F_{i2} &= m_c l_1 \omega_1^2 4A_2 \cos 2\varphi_1 \\ F_{i4} &= m_c l_1 \omega_1^2 16A_4 \cos 4\varphi_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.49)$$

expresia forței de inerție devine:

$$F_{iC} = F_{i1} + F_{i2} + F_{i4} + \dots \quad (3.50)$$

Se poate spune că forța de inerție produsă de masa m_c este formată dintr-o serie de forțe de inerție de diferite ordine (armonici). În practică se echilibrează doar forțele de inerție de ordin inferior, deoarece dezechilibrul maxim este produs de primele două armonici [7], [12]. Dacă masa de echilibrare m_e din prelungirea manivelei, se suplimentează până la valoarea m'_e (fig. 3.20), forța de inerție generată de această masă va echilibra prima armonică a forței de inerție din piston. Se poate scrie astfel:

$$m'_e r_e = m_B l_1 A_1, \quad A_1 = 1 \quad (3.51)$$

Prin plasarea acestei mase, se mută dezechilibrul din planul orizontal în cel vertical. Celelalte armonici ale forței de inerție rămân neechilibrate. În cazul motoarelor cu ardere internă, deoarece sunt mai multe astfel de mecanisme ale căror manivele sunt decalate în funcție de numărul de cilindrii, unele armonici ale forțelor de inerție se pot echilibra fără adăugarea de mase suplimentare [12], [13].

Un mod de echilibrare a primei armonici fără a produce dezechilibru pe direcție verticală, constă în descompunerea forței F_{i1} în două componente F'_{i1} și F''_{i1} și apoi anularea acestora, așa cum este prezentat în figura 3.21. Aceasta se poate realiza prin

rotirea a două mase de echilibrare în sensuri contrare, cu ajutorul unor roți dințate [4], [12].

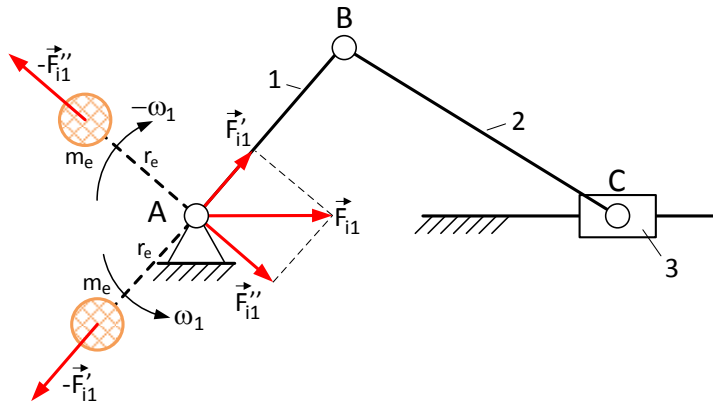


Fig.3.21 Modalitate de echilibrare armonicii de ordinul întâi

După cum se observă, forța F'_{i1} este anulată de o forță $-F'_{i1}$ egală și de sens contrar generată prin rotirea masei m_e cu viteza unghiulară ω_1 în același sens cu elementul 1. Forța F'_{i1} va fi anulată de forța egală și de sens contrar $-F'_{i1}$ generată de o altă masă m_e care se rotește în sens contrar, cu viteza unghiulară $-\omega_1$. Mărimea maselor m_e se poate determina cu relația:

$$2m_e r_e \omega_1^2 = m_c l_1 A_1 \omega_1^2 \quad (3.52)$$

de unde:

$$m_e = m_c \frac{l_1 A_1}{2r_e} \quad (3.53)$$

4. MIȘCAREA MECANISMELOR SUB ACȚIUNEA FORȚELOR EXTERIOARE

4.1 Ecuații de mișcare

Pentru determinarea ecuațiilor de mișcare, mecanismul se înlocuiește cu un model dinamic echivalent la baza căruia stă *elementul de reducere*. De regulă elementul de reducere este chiar elementul conducător al mecanismului [10].

Ecuația de mișcare a unui mecanism este relația cu care se poate determina legea de mișcare reală a elementului conducător, cunoscând sistemul de forțe și momente ce acționează asupra elementelor cinematice.

Astfel, pentru elementul de reducere se poate scrie relația [4]:

$$dE_C = dL \quad (4.1)$$

în care: dE_C – reprezintă variația elementară a energiei cinetice

dL – este lucrul mecanic elementar prestat de forța sau momentul redus ce acționează asupra elementului de reducere.

În cazul în care elementul de reducere realizează o mișcare de rotație energia lui cinetică are expresia:

$$E_C = I^r \frac{\omega^2}{2} \quad (4.2)$$

iar pentru cazul mișcării de translație, are următoarea formă:

$$E_C = m^r \frac{v^2}{2} \quad (4.3)$$

Lucrul mecanic elementar în cazul celor două tipuri de mișcări ale elementului de reducere, poate fi scris astfel:

$$dL = M^r d\varphi$$

$$dL = F^r ds$$
(4.4)

Semnificația termenilor utilizați în expresiile energiei cinetice și a lucrului mecanic, sunt următoarele:

- I^r, m^r – sunt momentul de inerție redus și masa redusă a mecanismului,
- M^r, F^r – reprezintă momentul redus respectiv forța redusă,
- ω, v – sunt viteza unghiulară sau liniară a elementului de reducere,
- $d\varphi, ds$ – deplasarea elementară unghiulară respectiv liniară al elementului de reducere în cazul în care F^r acționează pe direcția deplasării.

Prin înlocuirea relațiilor (4.2), (4.3) respectiv (4.4) în relația (4.1), rezultă expresiile:

$$d\left(I^r \frac{\omega^2}{2}\right) = M^r d\varphi$$

$$d\left(m^r \frac{v^2}{2}\right) = F^r ds$$
(4.5)

în care momentul redus M^r și forța redusă F^r pot fi exprimate după cum urmează:

$$M^r = M_m^r - M_r^r$$

$$F^r = F_m^r - F_r^r$$
(4.6)

unde: M_m^r și F_m^r – sunt momentul motor redus respectiv forța motoare redusă,

M_r^r și F_r^r – reprezintă momentul rezistent redus și forța rezistentă redusă

Momentul rezistent redus M_r^r sau forța rezistentă redusă F_r^r pot fi determinate din relațiile:

$$M_r^r = M_{ru}^r + M_{rp}^r \pm M_G^r$$

$$F_r^r = F_{ru}^r + F_{rp}^r \pm F_G^r$$
(4.7)

în care: M_{ru}^r și F_{ru}^r – sunt momentul redus sau forța redusă a momentelor sau forțelor de exterioare (ex: forțe tehnologice sau de rezistență utilă),

M_{rp}^r și F_{rp}^r – reprezintă momentul redus sau forța redusă a momentelor sau forțelor de rezistență pasive (ex: momente sau forțe de frecare),

M_G^r și F_G^r – sunt momentul redus sau forța redusă a forțelor de greutate ale elementelor mecanismului.

Prin integrarea relațiilor (4.5) rezultă [4]:

$$\Delta E_{c_{12}} = I_2^r \frac{\omega_2^2}{2} - I_1^r \frac{\omega_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_m^r - M_r^r) d\varphi = L_{m_{12}} - L_{r_{12}} \quad (4.8)$$

$$\Delta E_{c_{12}} = m_2^r \frac{v_2^2}{2} - m_1^r \frac{v_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} (F_m^r - F) ds = L_{m_{12}} - L_{r_{12}}$$

unde: I_2^r și I_1^r – sunt momentele de inerție reduse ale mecanismului corespunzătoare unghiurilor de rotație φ_2 respectiv φ_1 ale elementului de reducere,

ω_2 și ω_1 – reprezintă valorile vitezei unghiulare a elementului de reducere în cele două poziții,

m_2^r și m_1^r – sunt masele reduse ale mecanismului corespunzătoare pozițiilor s_2 respectiv s_1 ale elementului de reducere,

v_2 și v_1 – sunt valorile vitezei liniare a elementului de reducere în cele două poziții.

Pentru un mecanism, relațiile (4.8) reprezintă *ecuațiile de mișcare sub formă finită*. Această formă a ecuațiilor de mișcare se utilizează în situația în care forțele și momentele exterioare depind doar de poziția elementului de reducere. Rezolvarea ecuației de mișcare sub formă finită se face de regulă pe cale grafică utilizând metodele prezentate în [4].

Dacă forțele și momentele exterioare și implicit M^r și F^r depind de poziția elementelor, viteză și timp, adică $M^r = M^r(\varphi, \omega, t)$ și $F^r = F^r(s, v, t)$, relațiile (4.5) pot fi scrise astfel:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(I^r \frac{\omega^2}{2} \right) = M^r(\varphi, \omega, t)$$

$$\frac{d}{ds} \left(m^r \frac{v^2}{2} \right) = F^r(s, v, t) \quad (4.9)$$

Pentru că I^r , m^r respectiv ω și v depind de poziția elementului de reducere, prin derivarea relațiilor (4.9) rezultă:

$$I^r \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI^r}{d\varphi} = M^r(\varphi, \omega, t) \quad (4.10)$$

$$m^r \omega \frac{dv}{ds} + \frac{v^2}{2} \frac{dm^r}{ds} = F^r(s, v, t)$$

sau:

$$I^r \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI^r}{d\varphi} = M^r(\varphi, \omega, t) \quad (4.11)$$

$$m^r \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} \frac{dm^r}{ds} = F^r(s, v, t)$$

Relațiile (4.11) reprezintă *ecuațiile de mișcare sub formă diferențială*. Rezolvarea ecuației de mișcare în formă diferențială se poate face pe cale numerică, dacă de exemplu, în locul diferențelor $d\omega$, $d\varphi$ și dI^r se introduc diferențele finite:

$$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i \quad (4.12)$$

$$\Delta I^r = I_{i+1}^r - I_i^r$$

Astfel, dacă elementul de reducere realizează o mișcare de rotație, ecuația de mișcare sub formă diferențială (4.11) poate fi scrisă în următoarea formă [4]:

$$I_i^r \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\Delta\varphi} \omega_i + \frac{I_{i+1}^r - I_i^r}{\Delta\varphi} \frac{\omega_i^2}{2} = M_i^r(\varphi_i, \omega_i, t_i) \quad (4.13)$$

unde: φ_i și φ_{i+1} – reprezintă două poziții succesive ale elementului de reducere,

I_i^r și I_{i+1}^r – sunt momentele de inerție reduse ale mecanismului în cele două poziții,

$M_i^r(\varphi_i, \omega_i, t_i)$ – este momentul redus al mecanismului în poziția i .

Dacă se cunoaște viteza elementului de reducere în poziția inițială i , viteza ω_{i+1} în poziția următoare se poate determina cu relația de mai jos, obținută prin rezolvarea ecuației (4.13):

$$\omega_{i+1} = \frac{M_i^r(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{I_i^r \omega_i} \Delta\varphi + \frac{\omega_i}{2I_i^r} (3I_i^r - I_{i+1}^r) \quad (4.14)$$

Relația (4.14) este o formulă de recurență care permite determinarea vitezei unghiulare a elementului de reducere [4]. Deoarece:

$$\frac{\omega_i + \omega_{i+1}}{2} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (4.15)$$

timpul necesar elementului de reducere pentru a ajunge din poziția inițială în poziția următoare poate fi determinat cu relația:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_{i+1} + \omega_i} \quad (4.16)$$

unde: t_i și t_{i+1} – reprezintă timpii la care elementul de reducere ocupă pozițiile i respectiv $i+1$.

Din relația (4.15) se poate obține legea de variație a vitezei în funcție de unghiul de rotație a elementului de reducere $\omega = \omega(\varphi)$ iar din (4.16) rezultă $t = t(\varphi)$. Se pot obține astfel $\omega = \omega(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ respectiv $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ [4].

De regulă funcționarea mecanismelor este ciclică, motiv pentru care mărimile din relațiile (4.8) vor avea la rândul lor o variație ciclică.

Perioada după care se repetă momentul de inerție redus I^r sau masa redusă m^r poarte denumirea de *ciclu geometric* (ϕ_g). Intervalul după care motor redus M_m^r respectiv forța motoare redusă F_m^r se repetă se numește *ciclu energetic motor* (ϕ_m). Perioada după care momentul rezistent redus M_r^r respectiv forța rezistentă redusă F_r^r se repetă, reprezintă *ciclul energetic rezistent* (ϕ_r) iar perioada după care I^r sau m^r , M_m^r sau F_m^r , M_r^r sau F_r^r respectiv ω sau v , revin la aceeași valoare se numește *ciclu cinematic* (ϕ_c).

Prin rezolvarea ecuațiilor de mișcare, indiferent de forma lor, se obține legea de mișcare a elementului de reducere care de regulă este elementul conducător al mecanismului. Apoi prin intermediul analizei cinematice se pot determina legile de mișcare pentru celelalte elemente ale mecanismului [4].

4.2 Fazele de mișcare ale mecanismelor

Funcționarea mecanismelor este caracterizată de trei faze: *faza de pornire*, *faza de regim* respectiv *faza de oprire*. Dacă elementul de reducere al unui mecanism realizează o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω , atunci în faza de pornire aceasta va crește de la valoarea zero la o valoare nominală ω_m , în faza de regim va oscila în jurul acestei valori ca urmare a efectului forțelor și /sau momentelor exterioare iar în faza de oprire va scădea până la valoarea zero (fig. 4.1)

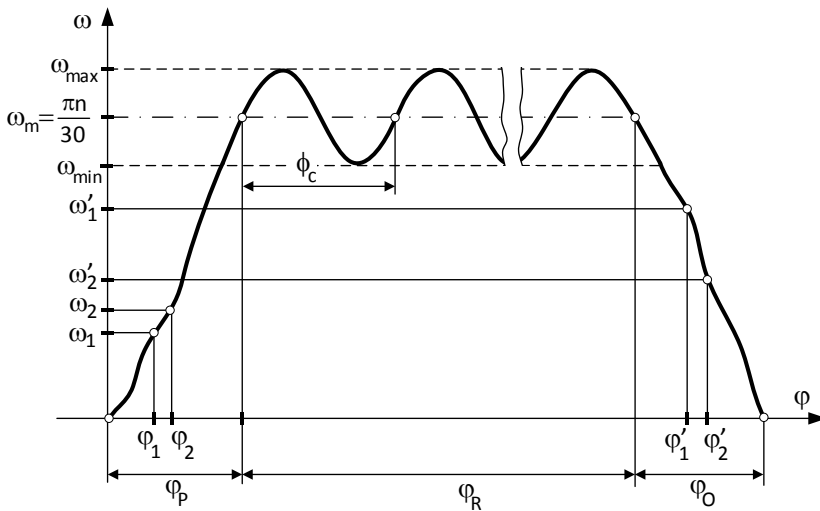


Fig.4.1 Fazele de funcționare ale unui mecanism

În *faza de pornire*, dacă se consideră pozițiile φ_1 și φ_2 ale elementului de reducere la capetele unui ciclu geometric ($I_1^r = I_2^r$, $\omega_2 > \omega_1$), din relația (4.8) rezultă:

$$\int_{\varphi_c} (M_m^r - M_r^r) d\varphi > 0, \quad L_m > L_r \quad (4.17)$$

adică, pentru ca un mecanism să se poate pune în mișcare este necesar ca lucrul mecanic motor L_m să fie mai mare decât lucrul mecanic rezistent L_r .

În *faza de oprire*, considerând două poziții φ_1 și φ_2 pentru elementul de reducere la capetele unui ciclu geometric ($I_1^r = I_2^r$, $\omega'_2 < \omega'_1$), din relația (4.8) rezultă:

$$\int_{\varphi_c} (M_m^r - M_r^r) d\varphi < 0, \quad L_m < L_r \quad (4.18)$$

adică, pentru ca un mecanism să se poată opri este necesar ca lucrul mecanic rezistent L_r să fie mai mare decât lucrul mecanic motor L_m .

În *faza de regim* pentru două poziții la capetele unui ciclu cinematic ($I_1^r = I_2^r$, $\omega_2 = \omega_1$), pe baza relației (4.8) se poate scrie:

$$\int_{\phi_c} (M_m^r - M_r^r) d\phi = 0, \quad L_m = L_r \quad (4.19)$$

adică, lucrul mecanic motor L_m în intervalul unui ciclu cinematic, este egal cu lucrul mecanic rezistent L_r .

În această fază, viteza unghiulară ω nu este constantă și are o variație periodică, deoarece momentele I^r , M_m^r și M_r^r își modifică valorile în funcție de poziția elementelor mecanismului. Prin urmare mișcarea mecanismului nu este uniformă. Pentru a putea caracteriza această mișcare se utilizează noțiunea de *grad de neregularitate*. Valoarea acestuia se poate determina cu relația [4]:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \quad (4.20)$$

în care: ω_m – reprezintă viteza unghiulară medie sau nominală din faza de regim.

Pentru a putea evidenția și variația accelerației unghiulare a elementului de reducere, se utilizează *coeficientul de dinamicitate* al mecanismului care poate fi determinat pe baza relației [4]:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{max}}{\omega_m^2} \quad (4.21)$$

4.3 Randamentul mecanismelor

Randamentul mecanic mediu η al unui mecanism este raportul dintre lucrul mecanic al forțelor de rezistență utilă și lucrul mecanic al forțelor motoare pe durata unui ciclu cinematic, și poate fi exprimat cu relația:

$$\eta = \frac{L_{ru}}{L_m} \quad (4.22)$$

Deoarece $L_m = L_{ru} + L_{rp}$ unde L_{rp} reprezintă lucrul mecanic al forțelor de rezistență pasivă (ex: forțele de frecare), relația (4.22) poate fi scrisă sub forma:

$$\eta = 1 - \frac{L_{rp}}{L_m} = 1 - \varphi \quad (4.23)$$

unde: φ – reprezintă coeficientul de pierderi.

Dacă se ține seama de puterile medii aferente unui ciclu cinematic, definite de relațiile:

$$\begin{aligned} P_m^m &= \frac{L_m}{t_c}, \\ P_{ru}^m &= \frac{L_{ru}}{t_c}, \\ P_{rp}^m &= \frac{L_{rp}}{t_c} \end{aligned} \quad (4.24)$$

în care t_c reprezintă durata sau timpul aferent unui ciclu cinematic, randamentul mai poate fi exprimat după cum urmează:

$$\eta = \frac{P_{ru}^m}{P_m^m} = 1 - \frac{P_{rp}^m}{P_m^m} = 1 - \varphi \quad (4.25)$$

Randamentul mediu este o măsură a eficienței cu care funcționează un mecanism. Poate fi determinat prin calcule dar de cele mai multe ori se preferă determinarea experimentală, cu ajutorul unor standuri care permit măsurarea lucrurilor mecanice motoare și a forțelor /momentelor rezistente.

Se consideră mai multe mecanisme cu randamente cunoscute, legate în serie ca în figura 4.2.

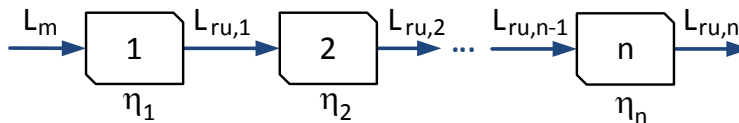


Fig.4.2 Cazul mecanismelor legate în serie

Primul mecanism primește lucrul mecanic motor L_m și cedează lucrul mecanic util $L_{ru,1}$ celui de al doilea mecanism. Valoarea acestuia se determină în funcție de randamentul primului mecanism. Următorul mecanism primește $L_{ru,1}$ ca lucru mecanic motor și cedează celui de-al treilea mecanism lucrul mecanic util $L_{ru,2}$. Pe baza acestui raționament se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned}
L_{ru,1} &= \eta_1 L_m \\
L_{ru,2} &= \eta_2 L_{ru,1} = \eta_1 \eta_2 L_m \\
&\vdots \\
L_{ru,n} &= \eta_n L_{ru,n-1} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n L_m
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

de unde:

$$\eta = \frac{L_{ru,1}}{L_m} \frac{L_{ru,2}}{L_{ru,1}} \dots \frac{L_{ru,n}}{L_{ru,n-1}} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n
\tag{4.27}$$

În concluzie, randamentul total al mai multor mecanisme legate în serie este produsul randamentelor parțiale și este mai mic decât valoarea celui mai mic randament parțial [4].

Se consideră situația în care mai multe mecanisme cu randamente cunoscute, sunt legate în paralel ca în figura 4.3.

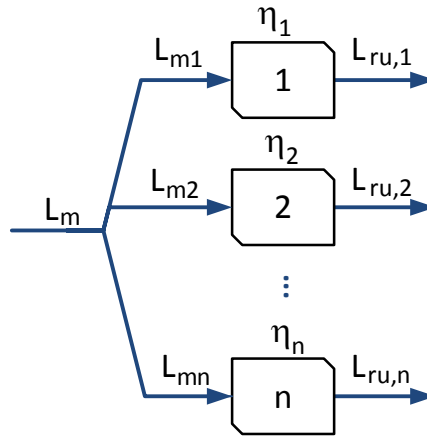


Fig.4.3 Cazul mecanismelor legate în paralel

Astfel fiecare mecanism primește o parte din lucrul mecanic motor total L_m și cedează un lucru mecanic util care depinde de randamentul mecanismului respectiv. Se poate scrie:

$$\begin{aligned}
L_m &= \sum_{i=1}^n L_{mi} = L_{m1} + L_{m2} + \dots + L_{mn} \\
L_{ru} &= \sum_{i=1}^n L_{ru,i} = \eta_1 L_{m1} + \eta_2 L_{m2} + \dots + \eta_n L_{mn}
\end{aligned}
\tag{4.28}$$

Expresia randamentului total în cazul legării în paralel este:

$$\eta = \frac{L_{ru}}{L_m} = \frac{\eta_1 L_{m1} + \eta_2 L_{m2} + \dots + \eta_n L_{mn}}{L_{m1} + L_{m2} + \dots + L_{mn}} \quad (4.29)$$

sau:

$$\eta = \frac{L_{ru,1} + L_{ru,2} + \dots + L_{ru,n}}{\frac{L_{ru,1}}{\eta_1} + \frac{L_{ru,2}}{\eta_2} + \dots + \frac{L_{ru,n}}{\eta_n}} \quad (4.30)$$

În această situație randamentul total este mai mare decât valoarea celui mai mic randament parțial și mai mic decât valoarea celui mai mare randament parțial. Pentru a se putea determina valoarea randamentului total trebuie cunoscută repartizarea lucrului mecanic motor pe cele n mecanisme sau lucrurile mecanice rezistente prestate de forțele rezistențelor utile la ieșirea fiecărui mecanism [4], [12].

Se consideră mai multe mecanisme legate mixt: n mecanisme cu randamentele $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ cunoscute legate în paralel și p mecanisme cu randamentele cunoscute $\eta_{a_1}, \eta_{a_2}, \dots, \eta_{a_p}$ legate în serie, ca în figura 4.4.

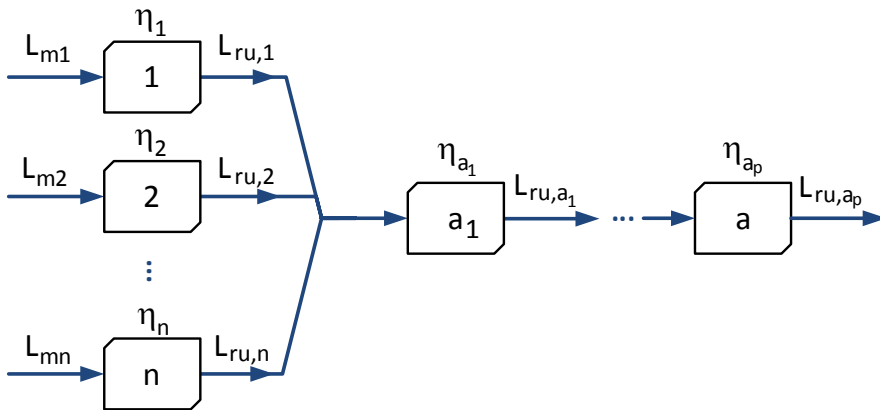


Fig.4.4 Cazul mecanismelor legate mixt

În acest caz expresia randamentului mediu total este dată de relația:

$$\eta = \frac{\eta_{a_1} \eta_{a_2} \dots \eta_{a_p} (\eta_1 L_{m1} + \eta_2 L_{m2} + \dots + \eta_n L_{mn})}{L_{m1} + L_{m2} + \dots + L_{mn}} \quad (4.31)$$

sau:

$$\eta = \frac{\eta_{a_1} \eta_{a_2} \dots \eta_{a_p} (L_{ru,1} + L_{ru,2} + \dots + L_{ru,n})}{\frac{L_{ru,1}}{\eta_1} + \frac{L_{ru,2}}{\eta_2} + \dots + \frac{L_{ru,n}}{\eta_n}} \quad (4.32)$$

În cazul unor mecanisme cum ar fi cele cu camă și tachet, puterea pierdută prin frecare variază destul de mult de la o poziție la alta. De exemplu în pozițiile în care unghiul de transmitere are valori mici, puterea pierdută ajunge la valori maxime. În aceste situații, pentru studiul eficienței mecanismului, este mai util să se utilizeze noțiunea de *randament instantaneu*. Pentru început, se împarte relația (4.1) cu dt și rezultă [4]:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad (4.33)$$

sau:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} (L_m - L_{ru} - L_{rp} \mp L_G) = P_m - P_{ru} - P_{rp} \mp P_G \quad (4.34)$$

unde: P_m – reprezintă puterea motoare, P_{ru} – reprezintă puterea instantanee a forțelor de rezistență utile, P_{rp} – este puterea instantanee a forțelor de rezistență pasive (ex. forțe de frecare), iar P_{ru} – este puterea instantanee a greutateților elementelor.

Deoarece $\frac{dE_c}{dt} = -P_i$ unde P_i reprezintă puterea instantanee a forțelor de inerție, relația (4.34) poate fi scrisă astfel:

$$P_m - P_{ru} - P_{rp} \mp P_G \mp |P_i| = 0 \quad (4.34)$$

Semnul din fața puterii P_G se consideră “-” în cazul în care forța de greutate este o forță rezistentă, respectiv “+” în situația în care acționează ca forță motoare. Semnul din fața puterii $|P_i|$ este “-” atunci când energia cinetică a mecanismului crește și se consideră “+” dacă energia cinetică a mecanismului scade. Relația (4.34) definește *bilanțul energetic* al mecanismului [4].

Randamentul instantaneu poate fi definit cu relațiile:

$$\eta_i = \frac{P_{ru} + |P_G + P_i|}{P_m}, \quad \text{dacă: } P_G, P_i \text{ sunt puteri rezistente} \quad (4.35)$$

$$\eta_i = \frac{P_{ru}}{P_m + |P_G + P_i|}, \quad \text{dacă: } P_G, P_i \text{ –sunt puteri motoare}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Crețu, S.M – *Mecanisme. Analiza structurală. Teorie și aplicații*, Editura SITECH, Craiova, 2010.
- [2] Deleanu, D – *Bazele proiectării mecanismelor*, Editura Nautica, Constanța, 2018
- [3] Handra-Luca, V – *Funcții de transmitere în studiul mecanismelor*, Editura Academiei, București 1983.
- [4] Handra-Luca, V, Stoica, I.A – *Introducere în teoria mecanismelor. vol I și II*, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1983.
- [5] Manafi, N – *Bazele Mecanicii aplicate. Cinematica*. Disponibilă online la adresa: <https://cursmecanica.blogspot.com>.
- [6] Myszka, D.H – *Machines and Mechanisms. Applied Kinematic Analysis*. Prentice Hall, USA, 2012.
- [7] Norton, R.L – *Design of Machinery. An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*, McGraw-Hill Inc. 1999.
- [8] Popovici, Gh.A – *Mecanisme. Note de curs*. Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași, 2009.
- [9] Rothbart, H.A., (Ed) – *Cam Design Handbook*, McGraw-Hill, USA, 2004.
- [10] Rusu, C – *Mecanisme*. Editura UTPress, Cluj Napoca 2021
- [11] Russell, K, Shen, O, Raj, S, Sodhi, R.S - *Kinematics and dynamics of mechanical systems : Implementation in MATLAB and SimMechanics*, CRC Press, Taylor & Francis, 2018.
- [12] Szekely, I, Dali, A. – *Mecanisme*. Litografia UTCN 1992.
- [13] Uicker, J.J, Pennock, G.R, Shigley, J.E – *Theory of Machines and Mechanisms*, International 4th Edition, Oxford University Press, 2011.
- [14] Vinogradov, O – *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms*, CRC Press, USA, 2000.