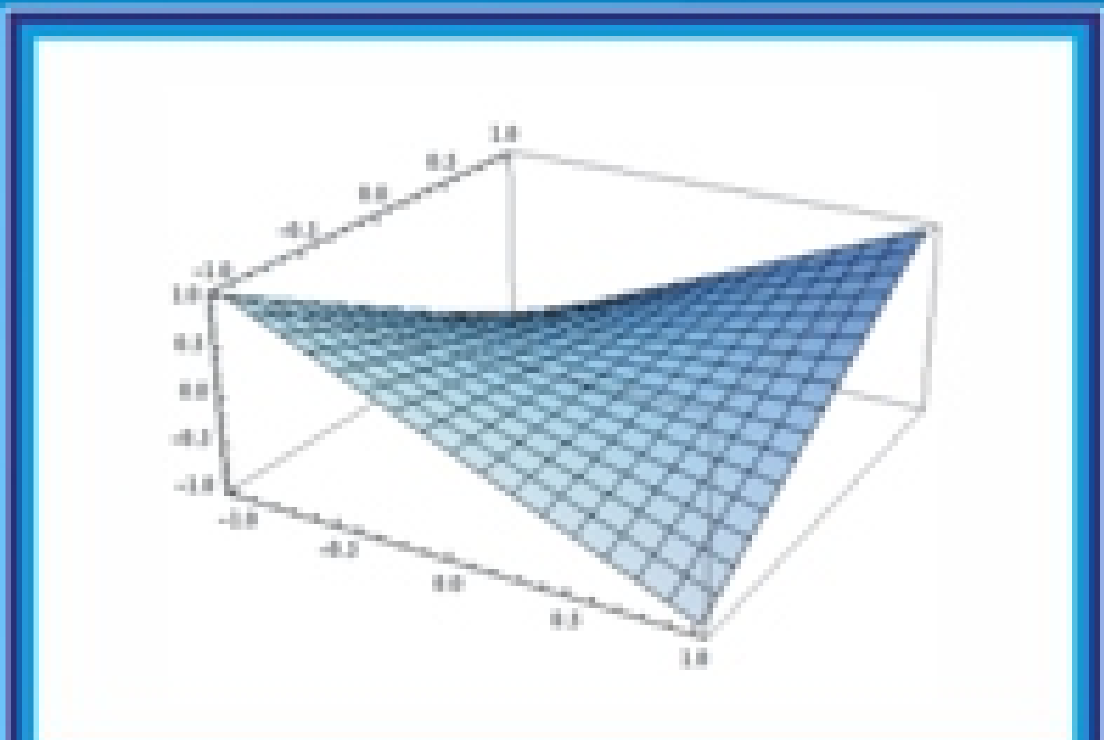
Vicuța NEAGOȘ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Noțiuni teoretice și aplicații



UTPRESS
Cluj-Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-604-3

Vicuța NEAGOȘ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Noțiuni teoretice și aplicații

UTPRESS
Cluj - Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-604-3

Editura UTPRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: ing. Dan Colțea

Recenzia: Prof.dr. Mircea Ivan
Lect.dr. Mircia Gurzău

Pregătire format electronic: Gabriela Groza

ISBN 978-606-737-604-3
Bun de tipar: 06.12.2022

Cuprins

Capitolul 1

Serii de numere reale

1.1 Noţiuni de bază

Definiţii 1.1.1. *Fie* $(u_n)_{n\geq 1}$ *un şir. Vom considera şirul* $(S_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Perechea $((u_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1})$ *reprezintă seria cu termenul general* $(u_n)_{n\geq 1}$ *şi se notează*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ sau } \sum_{n\geq 1} u_n.$$

Şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ *se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă iar* S *se numeşte suma seriei* $\left(\text{se scrie } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S\right)$.

Dacă $S = \pm\infty$ *sau nu există atunci seria este divergentă* $\left(\text{convergenţa seriei este dată de convergenţa şirului } (S_n)_{n\geq 1}\right)$.

A stabili natura unei serii înseamnă a stabili dacă este convergentă sau divergentă.

Proprietatea 1.1.2. *1. Dacă la o serie se modifică ordinea unui număr finit de termeni, natura seriei nu se schimbă. În caz de convergenţă, suma seriei obţinute este aceeaşi cu suma seriei date.*

2. Dacă la o serie se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, natura seriei obţinute este aceeaşi cu natura seriei date. În caz de convergenţă, suma seriei obţinute diferă, în general, de suma seriei date.

Dacă rangul primului termen al seriei este $k \in \mathbb{N}$, seria se notează $\sum\limits_{n=k}^{\infty} u_n$.
Studiul unei serii constă în:

1. stabilirea naturii seriei (criterii de convergenţă),
2. calculul sumei seriei.

Serii remarcabile

1. Seria geometrică de raţie q:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

   Are loc relaţia $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ pentru $q \neq 1$.

   Seria geometrică este convergentă pentru $|q| < 1$ şi are suma

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}\,.$$

   În caz contrar, seria este divergentă. Astfel, pentru $q \geq 1$ seria are suma ∞ ($q = 1 \Rightarrow S_n = n$) iar pentru $q \leq -1$ seria nu are sumă.

2. Seria armonică:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

   Seria armonică este divergentă, având suma ∞ (seria se numeşte astfel deoarece orice termen, începând cu al doilea, este media armonică a termenilor alăturaţi lui).

   Seria armonică generalizată este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ care este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi este divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Exemple: Să se stabilească natura seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Rezolvare:

a) $u_n = 3^{n-1} \Rightarrow$ serie divergentă ($q = 3 > 1$), $S = \infty$

b) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow$ serie convergentă ($q = \frac{2}{5}, |q| < 1$), $S = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

c) Pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}$, $q = -2 < -1 \Rightarrow$ serie divergentă (nu are sumă).

d) Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ este divergentă având $\alpha = \frac{2}{3} \leq 1$.

e) Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ este convergentă având $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

În calculul sumei unei serii convergente folosim proprietatea următoare:

Proprietatea 1.1.3. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *două serii convergente având sumele* S_1 *respectiv* S_2 *şi fie* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ *este convergentă şi are suma* $\alpha S_1 + \beta S_2$.

Exemplu: Să se calculeze suma seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{4^n}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Criterii generale de convergenţă

Teorema 1.1.4. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie convergentă. Sunt adevărate afirmaţiile:*

a. Şirul sumelor parţiale este mărginit.

b. Şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ *este convergent la zero.*

Relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *reprezintă condiţia necesară de convergenţă a seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *În caz contrar, seria este divergentă.*

Condiţia $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ nu este şi suficientă (există serii pentru care are loc condiţia dar nu sunt convergente).

Exemple: Să se verifice dacă următoarele serii îndeplinesc condiţia necesară de convergenţă şi să se calculeze suma, dacă este cazul:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Rezolvare: a) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow$ condiţia necesară de convergenţă este verificată. Calculăm (dacă există) suma seriei.

Scriem $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, deci $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Obţinem :

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Seria dată este convergentă având suma $S = 1$.

b) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ serie divergentă (condiţia necesară de convergenţă nu este verificată)

c) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ condiţia necesară de convergenţă este verificată. Şirul sumelor parţiale este:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots \\ &+ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-1) = \infty \end{aligned}$$

Seria este divergentă având suma $S = \infty$.

Criteriul general al lui Cauchy

Teorema 1.1.5. *Seria* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Exemplu: Să se arate că seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Rezolvare: Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pentru $p = n$ avem:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

rezultă că seria armonică este divergentă.
Altfel, $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) = \infty \Rightarrow$ serie divergentă.

1.2 Serii cu termeni pozitivi

O serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numeşte serie cu termeni pozitivi dacă $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru o serie cu termeni pozitivi, şirul sumelor parţiale este strict crescător. Prin urmare, o serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit superior.

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

1. Criteriul comparaţiei
   Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ astfel încât $u_n \leq v_n$.

   a. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

   b. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

2. Criteriul de comparaţie la limită
   Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $u_n > 0, v_n > 0$. Dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ atunci:

   a. pentru $l \in \mathbb{R}_+^*$ seriile au aceeaşi natură;

   b. dacă $l = 0$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă atunci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

   c. dacă $l = \infty$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă atunci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

3. Criteriul raportului (d'Alembert)
   Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

   a. Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

   b. Dacă $l > 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

4. Criteriul rădăcinii (Cauchy)
   Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

   a. Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

   b. Dacă $l > 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

5. Criteriul Raabe-Duhamel
   Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l$.

   a. Dacă $l > 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

   b. Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

6. Criteriul logaritmic
   Fie $u_n > 0$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$.

   a. Dacă $l > 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

   b. Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

7. Criteriul integral
   Fie $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie descrescătoare şi $a_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent ($\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ este finită).

Obs.: Criteriile $3-6$ sunt ineficiente pentru $l = 1$.

Exemple: 1. Să se studieze convergenţa seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{4n-3}\right)^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot \ldots \cdot (4n)}$

2. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{\frac{1}{n}}$, prin două metode: folosind criteriul logaritmic respectiv criteriul integral.

Rezolvare: 1. a) $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = v_n$ iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ serie convergentă.

b) $u_n = \frac{3^n}{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+2n+1} = 3.$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, rezultă că seria dată este divergentă.

c) $u_n = \left(\frac{3n-4}{4n-3}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-4}{4n-3} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

d) $u_n = \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot \ldots \cdot (4n)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n+3)}{4\cdot 8\cdot \ldots \cdot (4n+4)}$

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{4n+4} = 1$, deci criteriul raportului este ineficient. Aplicăm criteriul lui Raabe.

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+4}{4n+3} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n+3} = \frac{1}{4} < 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2. Aplicăm mai întâi criteriul logaritmic. Notăm $u_n = \frac{1}{n^2}\, e^{\frac{1}{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{n^2}{e^{\frac{1}{n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^2 - \ln e^{\frac{1}{n}}}{\ln n} = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,\ln n} = 2 > 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Folosim criteriul integral. Fie $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{t}}$.

Avem: $I_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = -e^{\frac{1}{t}}\Big|_1^n = -e^{\frac{1}{n}} + e \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = e - 1.$

Integrala fiind convergentă, rezultă că seria dată este convergentă.

1.3 Serii cu termeni oarecare

O serie cu termeni oarecare are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.
Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă.
Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este semiconvergentă (simplu convergentă) dacă este convergentă dar nu este absolut convergentă (seria valorilor absolute este divergentă).
Exemplu: Să se stabilească dacă seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$ este convergentă respectiv absolut convergentă.
Rezolvare: Seria dată este absolut convergentă dacă seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin na}{n^2}\right|$ este convergentă. Deoarece $\displaystyle\left|\frac{\sin na}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ iar seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria dată este absolut convergentă, deci şi convergentă.

Criteriul Abel-Dirichlet

Teorema 1.3.1. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir descrescător convergent la zero şi fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cu proprietatea că şirul sumelor parţiale este mărginit. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ este convergentă.*

Exemplu: Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este convergentă.
Rezolvare: Notăm $a_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n = \sin nx$.
Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător convergent la zero.
Şirul sumelor parţiale asociate seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este definit prin:
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. Deoarece $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$, rezultă că şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Atunci, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ este convergentă.
O serie alternantă este o serie de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ unde $u_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Criteriul lui Leibniz

Teorema 1.3.2. *O serie alternantă* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *cu proprietatea că şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$ *este descrescător şi convergent la* 0*, este convergentă.*

Exemple: 1. Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă.
2. Să se studieze convergenţa respectiv absolut convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

Rezolvare: 1. Şirul definit prin $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, este descrescător şi are limita 0, de unde rezultă că seria alternantă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă. Seria valorilor absolute corespunzătoare acesteia este seria armonică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este divergentă, deci seria dată este semiconvergentă.
2. Notăm $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Avem $u_n > u_{n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, de unde rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz.
Pentru $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ folosim un criteriu de comparare. Deoarece $\ln(n+1) < n$, $n \geq 1$, rezultă că $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n}$, de unde, ţinând cont că seria armonică este divergentă, deducem că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}u_n|$ este divergentă. În concluzie, seria dată este semiconvergentă.

1.4 Exerciţii rezolvate

1. Să se stabilească dacă următoarele serii îndeplinesc condiţia necesară de convergenţă:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$$

2. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ este convergentă.

3. Folosind criterii de comparaţie, să se stabilească natura seriilor:

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2+n\cdot 3^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{a}{2^n}$, $a>0$

4. Să se stabilească natura următoarelor serii:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$

5. Să se studieze convergenţa seriilor:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}$

6. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an-1}{n+1}\right)^n$, $a>0$.

7. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

8. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

9. Aplicând criteriul logaritmic, să se stabilească natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

10. Aplicând criteriul integral, să se stabilească natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

11. Aplicând criteriul lui Abel-Dirichlet, să se arate că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ este convergentă.

12. Folosind criteriul lui Leibniz, să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

13. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

14. Să se calculeze sumele următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$$

Soluţii:

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow$ condiţia necesară nu este verificată, deci seria este divergentă
b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln 1 = 0 \Rightarrow$ condiţia necesară de convergenţă este verificată. Folosind formula $\ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$, deducem că şirul sumelor parţiale este:
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty \Rightarrow$ serie divergentă, având suma $S = \infty$.
2. Vom arăta că şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este fundamental.

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}, \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \qquad (2)$
Din (1) şi (2) rezultă că:
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ este convergentă.
3. a) $u_n = \frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$ iar $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n$ este divergentă. Aplicând criteriul de comparaţie, rezultă că $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă.
b) $u_n = \frac{n}{2+n\cdot 3^n} \leq \frac{n}{n \cdot 3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = v_n$ iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ este convergentă. Aplicând criteriul de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

c) $u_n = \sin\dfrac{a}{2^n}$, $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = a \in (0,\infty)$, de unde rezultă că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ au aceeaşi natură. Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, aplicând criteriul de comparaţie la limită pentru serii cu termeni pozitivi, deducem că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{n^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{n^2}$ este serie divergentă

b) Seria fiind cu termeni pozitivi, se poate aplica un criteriu de comparaţie.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}} = 1 \in (0,\infty),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}\,\text{serie convergentă}\,,$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n^2}$ este convergentă.

5. a) Aplicăm criteriul rădăcinii pentru $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{e} < 1$, deci seria dată este convergentă.

b) Notăm $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}$. Aplicăm criteriul raportului.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2} = \infty.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, rezultă că seria este divergentă.

6. Folosim criteriul rădăcinii.

$$u_n = \left(\frac{an-1}{n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{n+1} = a,\ a>0.$$

Conform criteriului rădăcinii, seria este convergentă pentru $a \in (0,1)$ şi este divergentă pentru $a > 1$.

Pentru $a = 1$ vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{\frac{-2n}{n+1}} = \frac{1}{e^2}\,.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, rezultă că nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă, deci, pentru $a = 1$, seria dată este divergentă.

7. Folosim criteriul raportului.

$$u_n = n\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\,\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right) = \frac{1}{2} < 1\,,$$

de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

8. Notăm $u_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$. Atunci:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}\cdot (n+1)!}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

deci criteriul raportului este ineficient.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+2} = \frac{-1}{2} < 1.$$

Conform criteriului lui Raabe, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n\sqrt{n}}{\ln n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n\sqrt{n})}{\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right) = \frac{3}{2} > 1,$

de unde rezultă, conform criteriului logaritmic, că seria dată este convergentă.
Am folosit: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x} = 0.$

10. Fie $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$.

$$\int_2^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\ln t)\Big|_2^{\infty} = \infty \Rightarrow \text{seria dată este divergentă.}$$

11. Şirul definit prin $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$, are termeni pozitivi, este descrescător şi are limita 0. De asemenea, şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, unde $u_n = \sin nx$, este mărginit. Conform criteriului lui Abel-Dirichlet, deducem că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n u_n$ este convergentă.

12. Notăm $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, $n \geq 1$.
Avem: $u_n = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.
Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$, $n \geq 1$, este descrescător şi convergent la 0. Aplicând criteriul lui Leibniz, deducem că seria alternantă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă.

13. Notăm $u_n = \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$. Avem $u_n > u_{n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ este convergentă.

Seria modulelor este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$. Deoarece $\dfrac{1}{n \cdot 2^n} < \dfrac{1}{n^2}$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}\right|$ este convergentă, deci seria alternantă este absolut convergentă.

14. a) Termenul general al seriei se scrie astfel:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right).$$

Obţinem:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right. \\ &- \left.\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

b) Folosind relaţia $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, se obţine:

$$u_n = \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{1+n^2-1} = \operatorname{arctg}\frac{(n+1)-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n-1)$, de unde, prin însumare, rezultă:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \operatorname{arctg} 2 - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} + \operatorname{arctg} 3 - \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} + \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2 + \ldots \\ &+ \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n-1) = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg}(n+1). \end{aligned}$$

Trecând la limită, obţinem:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

c) Avem $u_n = \dfrac{n(n+1)-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$. Şirul sumelor parţiale ale seriei este definit prin:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$ deci seria dată are suma $S = 2$.

1.5 Exerciţii propuse

1. Să se afle pentru care dintre următoarele serii este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

2. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se arate că seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este divergentă pentru $\alpha \leq 1$ şi este convergentă pentru $\alpha > 1$.

3. Folosind criterii de comparaţie, să se afle natura seriilor:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \qquad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}}$$

4. Aplicând criteriul raportului, să se stabilească natura seriilor:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$$

5. Aplicând criteriul radicalului, să se stabilească natura seriilor:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^3} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2}$$

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)^n$$

6. Aplicând criteriul lui Raabe, să se studieze natura seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$

7. Folosind criteriul logaritmic, să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}\,(n+2)}{\sqrt[3]{n^2+2}\,(n^2+1)}$ este convergentă.

8. Folosind criteriul integral, să se stabilească natura seriei $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

9. Aplicând criteriul lui Abel-Dirichlet, să se afle natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$.

10. Folosind criteriul lui Leibniz, să se stabilească natura seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$

11. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

12. Să se calculeze sumele seriilor următoare:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-3}{5^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

13. Să se determine sumele seriilor următoare:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Capitolul 2

Calcul diferenţial

2.1 Funcţii reale de o variabilă reală

2.1.1 Limite de funcţii

Definiţii 2.1.1. (*i*) *Fie* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Se numeşte vecinătate a lui* x_0 *o mulţime* V *care conţine un interval deschis centrat în* x_0.
(*ii*) *Fie* $A \subset \mathbb{R}$ *o mulţime şi* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Punctul* x_0 *se numeşte punct de acumulare al mulţimii* A *dacă orice vecinătate* V *a lui* x_0 *conţine cel puţin un punct* $x \neq x_0$ *din* A. *Un punct care nu este punct de acumulare se numeşte punct izolat.*

Definiţia 2.1.2. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punct de acumulare al mulţimii* D. *Spunem că* f *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *când* x *tinde la* x_0 *dacă pentru orice vecinătate* U *a lui* l *există o vecinătate* V *a lui* x_0 *astfel încât oricare ar fi* $x \neq x_0$ *din* $V \cap D$ *să rezulte* $f(x) \in U$.

Se notează: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
Au loc următoarele definiţii echivalente pentru limita unei funcţii într-un punct.

Definiţia 2.1.3. *Spunem că* $l \in \mathbb{R}$ *este limita funcţiei* f *în* x_0 *(finit) dacă* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\forall\, x \in D$, *pentru care* $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, *să rezulte* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiţia 2.1.4. *Spunem că* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *este limita funcţiei* f *în* x_0 *dacă pentru orice şir* (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, *având limita* x_0, *şirul* $(f(x_n))$ *are limita* l.

2.1.2 Funcţii continue

Definiţia 2.1.5. *O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă într-un punct $x_0 \in D$ dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap D$ să rezulte $f(x) \in U$.*

Dacă x_0 este punct de acumulare pentru D atunci funcţia f este continuă în x_0 dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
O funcţie este continuă pe o mulţime dacă este continuă în orice punct al mulţimii. Funcţiile elementare sunt continue pe domeniul maxim de definiţie. Dacă f nu este continuă în x_0 spunem că f este discontinuă în acest punct. În acest caz, x_0 se numeşte punct de discontinuitate (de speţa întâi sau speţa a doua) pentru funcţia f.

Teorema 2.1.6. *O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Teorema 2.1.7. *Fie funcţia continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$ atunci există cel puţin un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.*

Proprietatea 2.1.8. *Dacă funcţia continuă $f : I \to \mathbb{R}$ nu se anulează pe I atunci ea are semn constant pe I.*

Exemple: 1. Să se arate că ecuaţia $e^x = 2\cos x$ are cel puţin o rădăcină reală în intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Să se rezolve inecuaţia $x^3 + x^2 - 6x < 0$.
Rezolvare: 1. Funcţia $f(x) = e^x - 2\cos x$ este continuă pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ iar $f(0) < 0$ şi $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Conform teoremei 2.1.7, există $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.
2. Pentru funcţia continuă $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ se aplică proprietatea 2.1.8. Funcţia f are zerourile $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Dând valori lui x se obţine că f este strict pozitivă pe $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ şi este strict negativă pe $(0, 2)$. Soluţia inecuaţiei este $(0, 2)$.

2.1.3 Funcţii derivabile

Derivata unei funcţii. Funcţii derivabile. Diferenţiala.

Definiţia 2.1.9. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D. Spunem că funcţia f admite derivată în x_0 dacă există limita*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (finită) spunem că f este derivabilă în x_0.

Exemplu: Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ avem:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty.$$

Astfel, funcţia admite derivată în 0 dar nu este derivabilă în 0.
Dacă f este derivabilă în orice punct al lui D spunem că f este derivabilă pe D. Funcţia $x\mapsto f'(x)$ se numeşte derivata funcţiei f.

Interpretarea geometrică a derivatei

Dacă f este derivabilă în x_0 atunci tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 are ecuaţia:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Exemplu: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în $x_0=1$.

Rezolvare: a) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2-(-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$
sau $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$
b) $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-3$

Teorema 2.1.10. *Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca nu este adevărată.*

Reguli de derivare:

$$\begin{gathered}(f+g)'=f'+g'\,;\ \ (af)'=af'\ (a\in\mathbb{R})\\ (f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'\,;\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}\\ (f(u))'=f'(u)\cdot u'\qquad (u=u(x))\\ (u^v)'=vu^{v-1}\,u'+u^v\ln u\,v'\end{gathered}$$

Definiţia 2.1.11. *Fie $f:I\to\mathbb{R}$, unde I este un interval deschis. Spunem că f este diferenţiabilă în $x_0\in I$ dacă există $A\in\mathbb{R}$ şi $\alpha:I\to\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)=0$ astfel încât*

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),\ \forall\,x\in I.$$

Aplicaţia liniară $h\mapsto A\cdot h$ se notează $\mathrm{d}f(x_0)$ şi se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 (s-a notat $h=x-x_0$).

Teorema 2.1.12. *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval deschis, este diferenţiabilă în $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în x_0. În acest caz,* $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$.

Se observă că, în cazul funcţiei $f(x) = x$, relaţia anterioară devine

$$\mathrm{d}f(x)(h) = \mathrm{dx}(h) = f'(x) \cdot h = x' \cdot h = h,\ \forall\, h \in \mathbb{R},$$

adică, putem scrie $h = \mathrm{d}x$.
Astfel, se obţine relaţia $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, relaţie care justifică notaţia folosită uneori pentru derivata unei funcţii: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ (notaţia a fost introdusă de Leibniz).
Exemple: Să se calculeze:

a) $\mathrm{d}f(4)$ pentru $f(x) = \sqrt{x}$ b) $\mathrm{d}^2 f(x)$ pentru $f(x) = x^3 + 2x$

Rezolvare: a) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \mathrm{d}f(4) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{d}x$
b) $f'(x) = 3x^2 + 2, f''(x) = 6x \Rightarrow \mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)\mathrm{d}x^2 = 6x\,\mathrm{d}x^2$

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Definiţia 2.1.13. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in D$ este punct de minim (maxim) local dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$) pentru orice $x \in V \cap D$.*

Un punct de minim sau maxim local se numeşte punct de extrem local (sau relativ).

Teorema 2.1.14. *(Fermat) Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă $x_0 \in IntD$ este un punct de extrem local pentru f şi f este derivabilă în x_0 atunci $f'(x_0) = 0$.*

Un punct $x_0 \in IntD$ pentru care $f'(x_0) = 0$, se numeşte punct critic sau staţionar al funcţiei f.

Teorema 2.1.15. *(Rolle) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Dacă $f(a) = f(b)$ atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Teorema 2.1.16. *(Lagrange) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Teorema lui Lagrange este cunoscută ca prima teoremă de medie sau teorema creşterilor finite şi a fost obţinută în anul 1797.

Teorema 2.1.17. *(Cauchy) Fie funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue pe* $[a, b]$*, derivabile pe* (a, b)*,* $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$*. Atunci* $g(a) \neq g(b)$ *şi* $\exists\, c \in (a, b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema lui Cauchy este cunoscută ca a doua teoremă de medie a calculului diferenţial.
Teorema lui Lagrange este importantă prin consecinţele ei utile în studiul monotoniei funcţiilor sau în studiul derivabilităţii unei funcţii într-un punct.

Teorema 2.1.18. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă pe* I*.*

(i) Dacă $f'(x) \geq 0$ *pe* I *atunci* f *este crescătoare pe* I*.*

(ii) Dacă $f'(x) \leq 0$ *pe* I *atunci* f *este descrescătoare pe* I*.*

(iii) Dacă $f'(x) = 0$ *pe* I *atunci* f *este constantă pe* I*.*

Afirmaţiile reciproce sunt adevărate.

Teorema 2.1.19. *Fie funcţia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continuă pe* I *şi derivabilă pe* $I \setminus \{x_0\}$*. Dacă există* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ *atunci* f *admite derivată în* x_0 *şi are loc* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$*.*

Reciproca teoremei nu este adevărată.

Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $f' : D \to \mathbb{R}$ derivata sa. Spunem că f este derivabilă de două ori într-un punct $x_0 \in D$ dacă f' este derivabilă în x_0. Derivatele de ordin superior se definesc recursiv prin:

$$f'' = (f')',\ f''' = (f'')',\ \ldots,\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})',\ n \geq 1.$$

Derivata de ordinul n a funcţiei f se mai notează $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.
Au loc formulele:

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \text{ şi}$$

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \ldots + C_n^n f g^{(n)} \text{ (Leibniz).}$$

Formula lui Taylor permite aproximarea unei funcţii printr-un polinom cu condiţia să se cunoască valorile derivatelor funcţiei într-un punct.
Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivate continue până la ordinul $n+1$ şi $x_0 \in I$. Pentru orice $x \in I$ se defineşte polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

numit polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcţiei f în x_0.
Are loc formula lui Taylor:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

unde restul $R_n(x)$ este dat prin mai multe forme. Avem, de exemplu, restul în forma Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),\ 0 < \theta < 1.$$

Pentru $x_0 = 0$ se obţine formula lui MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

unde

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

Exemplu: Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul 4 în punctul $x_0 = 0$ pentru funcţia $f(x) = e^{-2x}$.
Rezolvare: $T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4$

$$f'(x) = -2e^{-2x},\ f''(x) = 4e^{-2x},\ f^{(3)}(x) = -8e^{-2x},\ f^{(4)}(x) = 16e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = -2,\ f''(0) = 4,\ f^{(3)}(0) = -8,\ f^{(4)}(0) = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_4(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^4$$

Se demonstrează următoarele formule:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \theta \in (0,1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\ + R_n(x)$$

Pentru funcţiile trigonometrice hiperbolice

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se deduc formulele:

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x).$$

Observaţia 2.1.20. *Dacă f este o funcţie polinomială de grad n atunci f este egală cu polinomul lui Taylor de gradul n într-un punct x_0 (restul din formula lui Taylor este nul). Spunem că polinomul f se dezvoltă după puterile lui $x - x_0$.*

Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ admite derivate de orice ordin atunci acesteia i se poate asocia seria Taylor: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pentru $x \in D$, atunci seria Taylor asociată funcţiei f este convergentă având ca sumă funcţia f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),\ x \in D.$$

Spunem că am dezvoltat funcţia f în serie de puteri ale lui $x - x_0$. Pentru $x_0 = 0$ se obţine dezvoltarea în serie MacLaurin.

De exemplu, pentru funcţia $f(x) = e^x$ are loc formula $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 1$ se obţine: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

Aplicaţii ale derivatelor

Calculul limitelor de funcţii în cazuri exceptate
Eliminarea nedeterminărilor $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty\right)$ se face folosind limite fundamentale sau regula lui l'Hospital.

Teorema 2.1.21. *(regula lui l'Hospital) Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 punct de acumulare pentru I. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

a) f şi g sunt derivabile pe I şi $g'(x) \neq 0, \forall x \neq x_0$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Un rezultat analog are loc pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.
Exemple: Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{x^2 - x}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - x)$

d) $\lim\limits_{x \searrow 0} (x \ln x)$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

Rezolvare:
a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{3x^2(x^2+1)} = \frac{1}{3}$
b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$
c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - x) = \lim\limits_{x \to \infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = \infty$ deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$
d) $\lim\limits_{x \searrow 0} (x \ln x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \searrow 0} (-x) = 0$
e) Folosind formula $u^v = e^{v \ln u}$, putem scrie $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Puncte de extrem

Teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcţii derivabile se află printre punctele staţionare. Avem deci o condiţie necesară pentru punctele de extrem ale unei funcţii. Pentru a stabili dacă un punct critic este punct de extrem folosim următorul rezultat:

Teorema 2.1.22. *Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de n ori în $x_0 \in I$ astfel încât:*

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dacă n este par atunci x_0 este punct de extrem al lui f, şi anume: punct de maxim pentru $f^{(n)}(x_0) < 0$ şi punct de minim pentru $f^{(n)}(x_0) > 0$. Dacă n este impar, atunci x_0 nu este punct de extrem al lui f.

Exemple: 1. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ nu admite puncte de extrem.
2. Să se arate că $x = 0$ este punct de extrem al funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Rezolvare: 1. Avem $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$.
Din $f'(x) = 0$ deducem că $x = 0$ este singurul punct staţionar al lui f.
Din $f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$, conform teoremei 2.1.22, se obţine că $x = 0$ nu este punct de extrem.

2. $f'(x)=e^x - e^{-x} - 2\sin x \Rightarrow f'(0)=0, f''(x)=e^x+e^{-x} - 2\cos x \Rightarrow f''(0)=0,$

$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x \Rightarrow f'''(0)=0, f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x \Rightarrow f^{IV}(0)>0,$

deci $x = 0$ este punct de minim local pentru f.

Consecinţa 2.1.23. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă în punctul staţionar $x_0 \in I$. Dacă $f''(x_0) < 0$ atunci x_0 este punct de maxim local pentru f iar dacă $f''(x_0) > 0$ atunci x_0 este punct de minim local.*

Exemplu: Să se afle punctele de extrem local ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1.$$

Rezolvare: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0$, deci $x_1 = 1$ şi $x_2 = 5$ sunt puncte staţionare pentru f. Din $f''(x) = 6x - 18$ rezultă că $f''(1) < 0$ respectiv $f''(5) > 0$. Aplicând 2.1.22, x_1 este punct de maxim local iar x_2 este punct de minim local.

2.2 Funcţii reale de mai multe variabile reale

2.2.1 Noţiuni generale

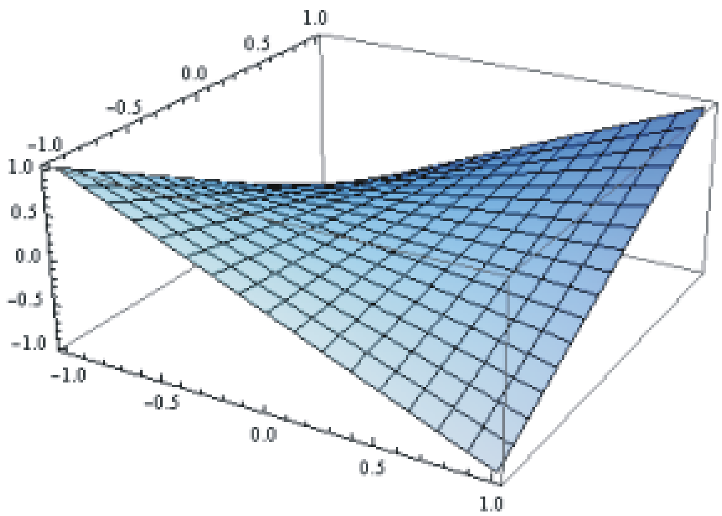
O funcţie reală de mai multe variabile reale se defineşte astfel:

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2.$$

Pentru $n = 2$, $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, este o funcţie reală cu două variabile reale. Graficul funcţiei f este suprafaţa definită prin:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D, z = f(x, y)\right\}.$$

De exemplu, graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, este reprezentat în figura de mai jos:



Pentru $n = 3$, $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$, este o funcţie reală cu trei variabile reale.

2.2.2 Limite şi continuitate

Definiţia 2.2.1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punct de acumulare al lui D. Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în (x_0, y_0) dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui (x_0, y_0) astfel încât $\forall\, (x, y) \in V \cap D, (x, y) \neq (x_0, y_0)$ să avem $f(x, y) \in U$.*

Se foloseşte notaţia: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l.$

Pentru calculul limitelor de funcţii de două variabile se folosesc regulile de calcul din cazul funcţiilor de o variabilă. Nedeterminările care pot să apară sunt aceleaşi şi se elimină prin metode similare.

Exemple: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{x^2-4}{x+5y}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,\infty)} \dfrac{x^2 y}{y+1}$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

Rezolvare: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3;2)} \dfrac{x^2-4}{x+5y} = \dfrac{3^2-4}{3+5\cdot 2} = \dfrac{5}{13}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2;\infty)} \dfrac{x^2 y}{y+1} = \lim\limits_{(x,y)\to(-2;\infty)} \dfrac{x^2}{1+\frac{1}{y}} = 4.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} \left(\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot \lim\limits_{y\to -1} y = 1\cdot(-1) = -1$

O metodă practică folosită în cazul $\dfrac{0}{0}$ este metoda dreptei variabile (sau a curbei variabile). Astfel, dacă valoarea limitei depinde de drumul pe care ne deplasăm spre un punct (x_0, y_0), atunci limita funcţiei în acest punct nu există.

Exemplu:

Să se studieze existenţa limitei în origine pentru funcţia $f(x,y) = \dfrac{x-3y}{x+2y}$.

Rezolvare:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x-3y}{x+2y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x(1-3m)}{x(1+2m)} = \frac{1-3m}{1+2m},$$

deci limita nu există (depinde de m).

Definiţia 2.2.2. *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $(x_0, y_0) \in D$ dacă*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Funcţia f este continuă pe D dacă este continuă $\forall\,(x,y)\in D$.

Teorema 2.2.3. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Dacă mulţimea D este închisă şi mărginită atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe D.*

Exemplu: Să se determine domeniul de continuitate pentru funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Rezolvare: f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Studiem continuitatea în origine.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2},$$

deci limita nu există, rezultă că f nu este continuă în origine.

2.2.3 Derivate parţiale

Derivate parţiale de ordinul întâi

Definiţia 2.2.4. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $M_0(x_0, y_0) \in D$ un punct de acumulare pentru D. Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x în (x_0, y_0) dacă există şi este finită limita*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Analog, f este derivabilă parţial în raport cu y dacă există şi este finită limita

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Se mai folosesc notaţiile $f'_x(x_0, y_0)$ respectiv $f'_y(x_0, y_0)$. O funcţie f este derivabilă parţial în raport cu o variabilă pe domeniul D dacă este derivabilă parţial în raport cu variabila respectivă în orice punct $(x, y) \in D$.

Observaţia 2.2.5. *Derivata parţială în raport cu o variabilă se calculează considerând cealaltă variabilă constantă şi considerând variabilă doar aceea în raport cu care se derivează. Se folosesc formulele de la derivarea funcţiilor de o variabilă.*

Funcţiile elementare sunt derivabile parţial în raport cu fiecare variabilă în orice punct din interiorul domeniului maxim de definiţie.

Exemplu: Să se calculeze derivatele parţiale $f'_x(1,2)$ şi $f'_y(1,2)$ pentru

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Rezolvare : $f'_x(1,2) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x,2) - f(1,2)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + 2x + 4) - (1 + 2 + 4)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = 4,$$

$$f'_y(1,2)=\lim_{y\to 2}\frac{f(1,y)-f(1,2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{(1+y+y^2)-(1+2+4)}{y-2}$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{y^2+y-6}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{(y+3)(y-2)}{y-2}=5\,.$$

Aplicând formulele şi regulile de derivare ale funcţiilor, derivatele parţiale pot fi obţinute astfel:

$$f'_x(x,y)=(x^2+xy+y^2)'_x=2x+y\Rightarrow f'_x(1,2)=4\,,$$
$$f'_y(x,y)=(x^2+xy+y^2)'_y=x+2y\Rightarrow f'_y(1,2)=5\,.$$

Observaţia 2.2.6. *Dacă o funcţie are derivate parţiale într-un punct nu rezultă că este continuă în acel punct.*

Exemplu: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2-xy+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0\,,$$

deci funcţia admite derivate parţiale în $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{xy}{x^2-xy+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1-m+m^2)}=\frac{m}{1-m+m^2}\,,$$

deci limita nu există. Rezultă că f nu este continuă în $(0,0)$.

Derivate parţiale de ordin superior

Definiţia 2.2.7. *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$ o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul întâi. Spunem că f admite derivate parţiale de ordinul doi dacă există derivatele parţiale ale funcţiilor f'_x, f'_y.*

Se folosesc notaţiile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Alte notaţii: $f''_{x^2}=(f'_x)'_x\,,\ f''_{xy}=(f'_x)'_y\,,\ f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x\,,\ f''_{y^2}=\left(f'_y\right)'_y\,.$

Are loc teorema lui Schwarz:

Teorema 2.2.8. *Dacă f admite derivate parţiale de ordinul doi continue pe D atunci derivatele parţiale mixte sunt egale:* $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Derivatele parţiale se pot defini şi pentru funcţii reale de trei sau mai multe variabile. De exemplu, pentru o funcţie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se definesc derivatele parţiale de ordinul întâi f'_x, f'_y, f'_z şi derivatele parţiale de ordinul doi f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{xz} şi f''_{yz}.
Se folosesc şi notaţiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial xz}, \frac{\partial^2 f}{\partial yz}.$$

Exemple: Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru:

a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2xy^4$ b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$.

Rezolvare:
a) $f'_x(x,y) = (x^3y^2 - 2xy^4)'_x = 3x^2y^2 - 2y^4$,
$f'_y(x,y) = (x^3y^2 - 2xy^4)'_y = 2x^3y - 8xy^3$,
$f''_{x^2}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x = (3x^2y^2 - 2y^4)'_x = 6xy^2$,
$f''_{y^2}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y = (2x^3y - 8xy^3)'_y = 2x^3 - 24xy^2$,
$f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y = (3x^2y^2 - 2y^4)'_y = 6x^2y - 8y^3$.
b) $f'_x(x,y,z) = (x^2y + y^2z + z^2x)'_x = 2xy + z^2$,
$f'_y(x,y,z) = (x^2y + y^2z + z^2x)'_y = x^2 + 2yz$,
$f'_z(x,y,z) = (x^2y + y^2z + z^2x)'_z = y^2 + 2zx$,
$f''_{x^2}(x,y,z) = (2xy + z^2)'_x = 2y, f''_{y^2}(x,y,z) = (x^2 + 2yz)'_y = 2z$,
$f''_{z^2}(x,y,z) = (y^2 + 2zx)'_z = 2x, f''_{xy}(x,y,z) = (2xy + z^2)'_y = 2x$,
$f''_{xz}(x,y,z) = (2xy + z^2)'_z = 2z, f''_{yz}(x,y,z) = (x^2 + 2yz)'_z = 2y$.

2.2.4 Derivarea funcţiei compuse

Derivarea funcţiei compuse de o variabilă

Fie $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f = f(u,v)$ o funcţie de două variabile reale unde $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}, u = u(x), v = v(x)$ sunt funcţii de o variabilă astfel încât $(u(x), v(x)) \in D, \forall\, x \in (a,b)$. Se numeşte funcţie compusă de o variabilă reală funcţia

$$F : (a,b) \to \mathbb{R},\ F(x) = f(u(x), v(x)).$$

Teorema 2.2.9. *Dacă funcţiile u şi v sunt derivabile pe (a,b) iar f are derivate parţiale continue pe D, atunci F este derivabilă pe (a,b) şi are loc*

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(x)) \cdot v'(x).$$

Exemplu: Să se calculeze $F'(x)$ şi $F''(x)$ pentru $F(x) = f(x^2 + 1, \cos x)$.
Rezolvare: $u(x) = x^2 + 1$, $v(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = 2x, v'(x) = -\sin x$.
Obţinem succesiv: $F'(x) = 2x \cdot f'_u - \sin x \cdot f'_v$,

$$F''(x) = 2f'_u + 2x(f''_{u^2} \cdot u'(x) + f''_{uv} \cdot v'(x)) - \cos x f'_v - \sin x(f''_{vu} \cdot u'(x) + f''_{v^2} \cdot v'(x))$$

$$= 2f'_u - \cos x f'_v + 4x^2 f''_{u^2} - 4x \sin x f''_{uv} + \sin^2 x f''_{v^2}.$$

Derivarea funcţiei compuse de două variabile

Fie mulţimile $D, D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ şi funcţiile reale u, v definite pe D_1, astfel încât $(u(x, y), v(x, y)) \in D$ pentru orice $(x, y) \in D_1$.

Se numeşte funcţie compusă de două variabile reale, funcţia

$$F : D_1 \to \mathbb{R},\ F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) \text{ unde } f : D \to \mathbb{R}.$$

Teorema 2.2.10. *Dacă u şi v au derivate parţiale continue pe D_1 iar f are derivate parţiale continue pe D atunci funcţia compusă F are derivate parţiale pe D_1 şi au loc relaţiile:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Exemplu: Să se calculeze F'_x şi F'_y pentru $F(x, y) = f(x^2 - y^2, xy)$.
Rezolvare: Notăm $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = xy$.
Avem: $u'_x = 2x$, $u'_y = -2y$, $v'_x = y$, $v'_y = x$. Rezultă că:

$$F'_x(x, y) = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \Rightarrow F'_x(x, y) = 2x \cdot f'_u + y \cdot f'_v,$$

$$F'_y(x, y) = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \Rightarrow F'_y(x, y) = -2y \cdot f'_u + x \cdot f'_v.$$

2.2.5 Operatori diferenţiali. Derivata după o direcţie.

Operatori diferenţiali

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie având derivate parţiale de ordinul întâi continue.

Definiţia 2.2.11. *(i) Se numeşte gradientul lui f, funcţia $\nabla f : D \to \mathbb{R}^2$, $\nabla f = grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Operatorul care asociază gradientul unei funcţii date se numeşte operatorul gradient.*

(ii) Dacă f admite derivate parţiale de ordinul întâi şi doi continue atunci $\triangle f : D \to \mathbb{R}$, $\triangle f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ se numeşte laplacianul lui f. Operatorul $\triangle$ se numeşte operatorul lui Laplace.

O funcţie pentru care $\triangle f(x,y) = 0$, se numeşte funcţie armonică.
Operatorii $\bigtriangledown$ (nabla) şi $\triangle$ se pot defini şi pentru funcţii de trei sau mai multe variabile.
Exemple: 1. Să se determine $\bigtriangledown f$ şi $\triangle f$ pentru:
a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$ b) $f(x,y,z) = (x^3 - y)\sin z$
2. Să se arate că funcţia $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ este funcţie armonică.
Rezolvare: 1. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$. Rezultă:

$$\bigtriangledown f = \big(2x + 3y^2,\, 6xy\big)\,,\ \triangle f = 2 + 6x\,.$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\sin z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = (x^3 - y)\cos z\,,$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\sin z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (-x^3 + y)\sin z\,.$ Rezultă că:

$$\bigtriangledown f = \big(3x^2\sin z,\, -\sin z, (x^3 - y)\cos z\big)\,,\ \triangle f = (6x - x^3 + y)\sin z\,.$$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2}\right)'_x = \dfrac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2}\right)'_y = \dfrac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.
Rezultă că $\triangle f(x,y) = \dfrac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$.

Derivata după o direcţie

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{Int}(E)$.
Considerăm o direcţie în $\mathbb{R}^n$ caracterizată de vectorul u de modul 1 (versor). Spunem că $f : E \to \mathbb{R}$ este derivabilă după direcţia u în punctul a dacă există şi este finită limita

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}\,.$$

Teorema 2.2.12. *Dacă $f : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}^n$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe o vecinătate a lui $a \in Int(E)$, atunci f este derivabilă pe orice direcţie $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$ şi are loc relaţia*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(a) = f'_{x_1}(a)u_1 + f'_{x_2}(a)u_2 + \ldots + f'_{x_n}(a)u_n = \bigtriangledown f(a) \cdot u.$$

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = xyz$, $A(1, 2, -3), B(1, 5, 1)$. Să se calculeze derivata funcţiei f în punctul A după direcţia dreptei AB.
Rezolvare: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0, 3, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 5$
Un versor al dreptei AB este $\overrightarrow{u} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$f'_x = yz, f'_y = xz, f'_z = xy \Rightarrow f'_x(1, 2, -3) = -6, f'_y(1, 2, -3) = -3, f'_z(1, 2, -3) = 2$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(1, 2, -3) = f'_x(1, 2, -3) \cdot x_u + f'_y(1, 2, -3) \cdot y_u + f'_z(1, 2, -3) \cdot z_u,$$

$$\text{deci, } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(1, 2, -3) = -6 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{-1}{5}.$$

2.2.6 Formula lui Taylor pentru funcţii reale de mai multe variabile reale

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu convex şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite derivate parţiale continue de ordinul $n+1$. Atunci $\forall\, (x_0, y_0) \in D$, $\forall\, (x, y) \in D$ are loc relaţia:

$$f(x, y) = T_n f(x, y) + R_n f(x, y), \text{ unde}$$

$$\begin{aligned} T_n f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0, y_0) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

este polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcţiei f relativ la punctul (x_0, y_0). Pentru $(x_0, y_0) = (0, 0)$ se obţine formula lui Mac-Laurin:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(0, 0) + R_n f(x, y).$$

Exemplu: Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul doi asociat funcţiei $f(x,y) = x^2 e^y$ în punctul $(1,0)$.
Rezolvare: Avem: $n = 2, x_0 = 1, y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= f(1,0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)(y-0)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(1,0)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,0)(x-1)(y-0) + f''_{y^2}(1,0)(y-0)^2\right]. \end{aligned}$$

Calculăm valorile funcţiei f şi a derivatelor parţiale în $(1,0)$.

$$f(x,y) = x^2 e^y \Rightarrow f(1,0) = 1$$
$$f'_x(x,y) = 2xe^y \Rightarrow f'_x(1,0) = 2,\ f'_y(x,y) = x^2 e^y \Rightarrow f'_y(1,0) = 1$$
$$f''_{x^2}(x,y) = 2e^y \Rightarrow f'_{x^2}(1,0) = 2,\ f''_{y^2}(x,y) = x^2 e^y \Rightarrow f''_{y^2}(1,0) = 1$$
$$f''_{xy}(x,y) = 2xe^y \Rightarrow f''_{xy}(1,0) = 2$$
$$T_2 f(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + \frac{1}{2}\left[2(x-1)^2 + 4(x-1)y + y^2\right],$$
$$\text{adică, } T_2 f(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + (x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{y^2}{2}.$$

2.2.7 Funcţii diferenţiabile. Diferenţiala unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Diferenţiala funcţiei de două variabile

Definiţia 2.2.13. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ şi (x_0, y_0) un punct de acumulare pentru D. Spunem că f este diferenţiabilă în (x_0, y_0) dacă există $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha : D \to \mathbb{R}$ care îndeplineşte condiţia $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y) = \alpha(x_0,y_0) = 0$, astfel încât:*

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + \alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

oricare ar fi $(x,y) \in D$.

Se notează $h = x - x_0, y = y - y_0$. Dacă f este diferenţiabilă în (x_0, y_0), aplicaţia liniară

$$(h,k) \mapsto (A,B)(h,k) = Ah + Bk,\ (h,k) \in \mathbb{R}^2,$$

se numeşte diferenţiala funcţiei f. Se notează:

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = Ah + Bk.$$

Considerăm funcţiile $p(x,y) = x$ şi $q(x,y) = y$. Aplicând definiţia 2.2.13, se obţine că funcţiile p şi q sunt diferenţiabile şi $\mathrm{d}p(x_0,y_0) = h$, $\mathrm{d}q(x_0,y_0) = k$. Deoarece diferenţialele funcţiilor p şi q sunt aceleaşi în orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, acestea se notează

$$\mathrm{d}p(x,y) = \mathrm{d}x = h, \ \mathrm{d}q(x,y) = \mathrm{d}y = k$$

şi se numesc diferenţialele variabilelor independente.

Teorema 2.2.14. *Dacă o funcţie f este diferenţiabilă într-un punct atunci, în acest punct, este continuă şi derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă. Are loc egalitatea:*

$$\mathrm{d}f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Dacă f admite derivate parţiale de ordinul doi continue pe D atunci diferenţiala de ordinul doi a lui f este

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}y^2.$$

Exemplu: Să se determine $\mathrm{d}f(1,0)$ şi $\mathrm{d}^2 f(1,0)$ pentru $f(x,y) = (x^2+1)e^{2y}$.

$$\text{Rezolvare : } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x^2+1)e^{2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 4,$$

$$\mathrm{d}f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}f(1,0) = 2\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4(x^2+1)e^{2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = 4xe^{2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,0) = 4,$$

$$\mathrm{d}^2 f(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\,\mathrm{d}y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(1,0) = 2\,\mathrm{d}x^2 + 8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 8\,\mathrm{d}y^2.$$

Diferenţiala unei funcţii se poate defini şi pentru funcţii reale de trei sau mai multe variabile reale.
De exemplu, pentru o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, care admite derivate parţiale de ordinul întâi continue, se defineşte:

$$\mathrm{d}f(x,y,z)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Se mai notează $\mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y + f'_z\,\mathrm{d}z$.
Dacă f admite derivate parţiale de ordinul doi, atunci diferenţiala de ordinul doi este:

$$\mathrm{d}^2 f = f''_{x^2}\,\mathrm{d}x^2 + f''_{y^2}\,\mathrm{d}y^2 + f''_{z^2}\,\mathrm{d}z^2 + 2f''_{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2f''_{xz}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2f''_{yz}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Exemplu: Să se calculeze $\mathrm{d}f(1,1,1)$ pentru $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

$$\textbf{Rezolvare}:\ f'_x = y^2z^3,\ f'_y = 2xyz^3,\ f'_z = 3xy^2z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1,1) = 1,\ f'_y(1,1,1) = 2,\ f'_z(1,1,1) = 3,$$
$$\text{deci, } \mathrm{d}f(1,1,1) = \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y + 3\,\mathrm{d}z.$$

2.2.8 Puncte de extrem ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Definiţia 2.2.15. *Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ şi $(x_0,y_0) \in D$. Punctul $M_0(x_0,y_0)$ se numeşte:*

(i) punct de minim local al lui f dacă există o vecinătate V a lui (x_0,y_0) astfel încât $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in V \cap D$;

(ii) punct de maxim local al lui f dacă există o vecinătate V a lui (x_0,y_0) astfel încât $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in V \cap D$.

Punctele de minim local şi maxim local se numesc puncte de extrem local iar valorile funcţiei f în aceste puncte se numesc extreme locale.

Definiţia 2.2.16. *Se numeşte punct staţionar (critic) pentru funcţia f un punct în care derivatele parţiale de ordinul întâi se anulează.*

Teorema 2.2.17. *Dacă f admite derivate parţiale de ordinul întâi în (x_0,y_0) şi (x_0,y_0) este punct de extrem pentru f atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.*

Teorema 2.2.18. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul doi pe $IntD$ şi (x_0, y_0) un punct staţionar al lui f.*

1. *Dacă $f''_{x^2}(x_0, y_0)f''_{y^2}(x_0, y_0) - f''^2_{xy}(x_0, y_0) > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de extrem local pentru f şi anume:*

    (i) dacă $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de minim local;

    (ii) dacă $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de maxim local.

2. *Dacă $f''_{x^2}(x_0, y_0)f''_{y^2}(x_0, y_0) - f''^2_{xy}(x_0, y_0) < 0$ atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem local pentru f (se numeşte punct şa).*

Criteriul din teorema anterioară se numeşte *criteriul lui Sylvester*.
În alte situaţii, de exemplu, dacă $f''_{x^2}f''_{y^2} - f''_{xy} = 0$, nu se poate stabili dacă (x_0, y_0) este punct de extrem. În aceste cazuri se poate folosi definiţia punctului de extrem.

Exemplu: Să se determine punctele de extrem şi valorile extreme ale funcţiei $f(x, y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$.
Rezolvare: Avem: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 21y + 36$, $f'_y(x, y) = 3y^2 + 21x + 36$.
Rezolvând sistemul $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0 \\ y^2 + 7x + 12 = 0 \end{cases}$, se obţin punctele staţionare $M_1(-3, -3)$, $M_2(-4, -4)$.
Folosind $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 21 \\ 21 & 6y \end{vmatrix}$, obţinem:
$\Delta(-3, -3) < 0 \Rightarrow M_1(-3, -3)$ nu este punct de extrem.
$\Delta(-4, -4) > 0$ şi $f''_{x^2}(-4, -4) < 0$ deci $M_2(-4, -4)$ este punct de maxim local pentru f şi $f_{\max} = f(-4, -4)$.
Pentru a stabili dacă punctul critic (x_0, y_0) este punct de extrem local pentru f se mai poate folosi diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f în (x_0, y_0).
Astfel, dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$ este pozitiv definită atunci (x_0, y_0) este punct de minim local iar dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$ este negativ definită atunci (x_0, y_0) este punct de maxim local pentru f. Dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$ este semidefinită (pozitiv sau negativ) atunci nu se poate stabili dacă avem punct de extrem iar dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$ este nedefinită atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem.
De exemplu, pentru funcţia din exerciţiul anterior, avem:

$$\mathrm{d}^2 f(-4, -4) = -24\,\mathrm{d}x^2 + 42\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 24\,\mathrm{d}y^2, \text{ care se scrie}$$

$$\mathrm{d}^2 f(-4, -4) = -24\left[\left(\mathrm{d}x - \frac{7}{8}\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{15}{64}\mathrm{d}y^2\right],$$

deci este o formă pătratică negativ definită. Rezultă că $(-4,-4)$ este punct de maxim local pentru f.
De asemenea, $\mathrm{d}^2 f(-3,-3) = -18\,\mathrm{d}x^2 + 42\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 18\,\mathrm{d}y^2$, care se scrie:

$$\mathrm{d}^2 f(-3,-3) = -18\left(\mathrm{d}x^2 - \frac{7}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\right).$$

Fiind o formă pătratică nedefinită, deducem că $(-3,-3)$ nu este punct de extrem pentru f.
Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul doi. Punctele de extrem ale funcţiei f se pot determina aplicând *criteriul lui Sylvester*.
Mai întâi, se determină punctele staţionare ale funcţiei f, rezolvând sistemul $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 0 \\ f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$. Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct staţionar.
În continuare, se consideră matricea hessiană:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{pmatrix}.$$

Se notează $d_1 = f''_{x^2}$, $d_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix}$ şi $d_3 = \det H_f$. Cazuri:

1) $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0 \Rightarrow M$ punct de minim local pentru f;
2) $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0 \Rightarrow M$ punct de maxim local pentru f.

Un alt criteriu de stabilire a punctelor de extrem constă în determinarea valorilor proprii ale matricei H.

De asemenea, putem folosi semnul diferenţialei a doua a lui f în fiecare punct critic. Astfel, dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0, z_0) > 0$ (formă pătratică pozitiv definită) atunci M este punct de minim local iar dacă $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0, z_0) < 0$ (formă pătratică negativ definită) atunci M este punct de maxim local al lui f.
Exemple: Să se determine punctele de extrem şi valorile extreme ale funcţiilor:

a) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2x + 2y + 6z$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Rezolvare: a) $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 0 \\ f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 4y + 2x + 2z + 2 = 0 \\ 2z + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $M(-3, 5, -8)$ punct staţionar

$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ are elemente constante, rezultă că:

$$d_1(-3,5,-8) = 4 > 0,\ d_2(-3,5,-8) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{şi } d_3(-3,5,-8) = |H_f(-3,5,-8)| = 8 > 0,$$

deci, M este punct de minim local pentru f şi $f_{\min} = f(-3,5,-8)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y+4=0 \\ 2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow M(-1,-2,3)$ punct staţionar.

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

de unde rezultă că $\mathrm{d}^2 f(-1,-2,3) = 2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}z^2 > 0$, deci $M(-1,-2,3)$ este punct de minim pentru f.
Altfel, observăm că $f(x,y,z) = (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-14 \geq -14$ pentru orice (x,y,z) deci $M(-1,-2,3)$ este punct de minim pentru f şi $f_{\min} = -14$.

2.2.9 Extreme condiţionate

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ şi ecuaţia $F(x,y) = 0$ care defineşte implicit funcţia $y = y(x)$. Problema determinării extremelor funcţiei f cu condiţia suplimentară $F(x,y) = 0$ se numeşte problemă de extrem condiţionat. Funcţia f se numeşte funcţie scop (funcţie obiectiv) iar condiţia suplimentară se numeşte legătură.
Determinarea extremelor condiţionate (cu legături) se poate face prin două metode.
1. Metoda directă (metoda înlocuirii variabilelor) se foloseşte în cazul în care din condiţia suplimentară se poate explicita o variabilă în funcţie de cealaltă. Problema se reduce la determinarea extremelor unei funcţii de o variabilă.
2. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange este o metodă generală care se foloseşte dacă explicitarea unei variabile nu este posibilă.

Se consideră funcţia auxiliară $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda F(x,y)$. Se determină punctele staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y) &= 0 \\ F(x,y) &= 0 \end{cases}.$$

Pentru a stabili natura punctelor staţionare, se studiază semnul diferenţialei $\mathrm{d}^2\mathcal{L}$. Dacă este nevoie (diferenţiala este semidefinită) se foloseşte şi diferenţiala legăturii (se obţine o relaţie între $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$). Punctele de extrem ale funcţiei $\mathcal{L}$ sunt puncte de extrem condiţionat ale funcţiei f.

Exemplu: Să se determine extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x,y) = x^2 + y^2$ ştiind că $2x - y = 3$.
Rezolvare:
Metoda I Din condiţia (legătura) $2x - y = 3$ obţinem $y = 2x - 3$. Înlocuim y în expresia funcţiei f şi obţinem o funcţie de gradul doi, de variabilă x:

$$g(x) = x^2 + (2x-3)^2 = 5x^2 - 12x + 9,$$

care admite un minim pentru $x = \dfrac{6}{5}$, de unde rezultă $y = 2 \cdot \dfrac{6}{5} - 3 = -\dfrac{3}{5}$.

Astfel, $\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ este punct de minim condiţionat pentru $f(x,y)$ iar $f_{\min} = f\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{45}{25} = \dfrac{9}{5}$.
Metoda II Considerăm funcţia auxiliară:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(2x - y - 3).$$

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y) &= 0 \\ F(x,y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda &= 0 \\ 2y - \lambda &= 0 \\ 2x - y &= 3 \end{cases},$$

obţinem $\lambda = -\dfrac{6}{5},\ x = \dfrac{6}{5},\ y = -\dfrac{3}{5}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{x^2} & \mathcal{L}''_{xy} \\ \mathcal{L}''_{xy} & \mathcal{L}''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,\ \mathcal{L}''_{x^2} > 0,$$

deci, $\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ este punct de minim condiţionat pentru $f(x,y)$.
Problemele de extrem condiţionat se pot folosi în geometria analitică.

Aplicaţie: Să se determine cea mai mică şi cea mai mare distanţă de la origine la un punct al cercului $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$.
Vom afla punctele de extrem condiţionat ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$ cu legătura $F(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$. Distanţele cerute vor fi $d_{\min} = \sqrt{f_{\min}}$ respectiv $d_{\max} = \sqrt{f_{\max}}$.
Funcţia lui Lagrange este $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$. Se obţin punctele staţionare $M_1\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ pentru $\lambda_1 = 4$ şi $M_2\left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$ pentru $\lambda_2 = -6$.
Folosind semnul diferenţialei $\mathrm{d}^2\mathcal{L}$ se arată că M_1 este punct de minim condiţionat pentru f, $f_{\min} = f\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) = 16$ iar M_2 este punct de maxim condiţionat pentru f, $f_{\max} = f\left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right) = 36$. Rezultă $d_{\min} = 4$ şi $d_{\max} = 6$.
Prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange, se pot afla punctele de extrem condiţionat pentru funcţii cu trei sau mai multe variabile.
Exemplu: Să se afle extremele funcţiei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ supusă legăturii $ax + by + cz = 1$.
Rezolvare: Fie $\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + by + cz - 1)$.
Rezolvând sistemul: $\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2x + a\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2y + b\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2z + c\lambda = 0 \\ ax + by + cz = 1 \end{cases}$, obţinem punctul staţionar $\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c}{a^2+b^2+c^2}\right)$ pentru $\lambda = -\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$.
Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei $\mathcal{L}$ este:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}z^2,$$

care este o formă pătratică pozitiv definită. Rezultă că în punctul obţinut, funcţia f are un minim condiţionat:

$$f_{\min} = \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

Problema are o interpretare geometrică. Astfel, dacă se cere să se determine distanţa de la origine la planul $ax + by + cz = 1$, se poate considera funcţia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Deoarece minimul condiţionat al acestei funcţii este $f_{\min} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$, distanţa cerută va fi $d = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Acelaşi rezultat se poate obţine şi folosind formula distanţei de la un punct la un plan, din geometria analitică.

În mod analog se precedează şi în situaţiile în care funcţia scop este supusă mai multor legături.

Exemplu: Să se afle extremele locale ale funcţiei $f(x, y, z) = z$ dacă au loc condiţiile $x + y + z = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Rezolvare: Funcţia lui Lagrange este:

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z), \text{ adică,}$$

$$\mathcal{L}(x, y, z) = z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Aflăm punctele staţionare. Pentru aceasta, rezolvăm sistemul:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{L}'_x(x, y, z) & = & 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, z) & = & 0 \\ \mathcal{L}'_z(x, y, z) & = & 0 \\ F_1(x, y, z) & = & 0 \\ F_2(x, y, z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda + 2\mu x & = & 0 \\ \lambda + 2\mu y & = & 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Sistemul are două soluţii:

$$x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}, z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \lambda_1 = -\frac{1}{3}, \mu_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ respectiv,}$$

$$x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}, z_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \mu_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Pentru a stabili natura celor două puncte staţionare, calculăm diferenţiala a doua a funcţiei $\mathcal{L}$. Vom folosi şi diferenţialele celor două legături. Avem:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\mu\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) + 2(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}\lambda + 2(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}\mu\,,$$

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0,\ 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z = 0, \text{ de unde rezultă că}$$
$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\mu\,\left[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (-\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)^2\right] = 4\mu(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2).$$

În primul caz, avem $\mathrm{d}^2\mathcal{L} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\left[\left(\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{3}{4}\,\mathrm{d}y^2\right]$, care este o formă pătratică pozitiv definită, deci $M_1\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3},\right)$ este punct de minim condiţionat pentru funcţia f.
În al doilea caz, se obţine $\mathrm{d}^2\mathcal{L} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\left[\left(\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{3}{4}\,\mathrm{d}y^2\right]$, care este o formă pătratică negativ definită, deci $M_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3},\right)$ este punct de maxim condiţionat pentru f.

2.2.10 Funcţii implicite. Extremele funcţiilor definite implicit.

Definiţia 2.2.19. *Fie funcţia $F : D \to \mathbb{R}, A \times B \subset D \subset \mathbb{R}^2$. Se numeşte funcţie implicită definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$ o funcţie $f : A \to B$ care verifică relaţia $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in A$.*

Ecuaţia $F(x, y) = 0$ poate defini una sau mai multe funcţii implicite sau să nu definească nici o funcţie implicită.

Exemple: 1. Fie funcţia $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 - 2y + 1$. Ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte implicit funcţia $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.
2. Ecuaţia $F(x, y) = x - y^2 = 0$ defineşte două funcţii implicite:
$f_1 : [0, \infty) \to [0, \infty), f_1(x) = \sqrt{x}$ şi $f_2 : [0, \infty) \to [-\infty, 0], f_2(x) = -\sqrt{x}$.
3. Ecuaţia $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ nu defineşte nici o funcţie implicită (ecuaţia nu are soluţii reale în raport cu y).
4. Fie funcţia $F(x, y) = x^3 + y^3 - x + y - 2$. Este greu de stabilit dacă ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de x.
Se pune problema în ce condiţii ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte o funcţie implicită şi cum se poate calcula derivata acesteia. Teorema următoare oferă condiţii suficiente pentru existenţa şi unicitatea funcţiei implicite şi o formulă de calcul pentru derivata acesteia.

Teorema 2.2.20. *Fie funcţia $F : D \to \mathbb{R}, A \times B \subset D \subset \mathbb{R}^2$ şi $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 \in IntA, y_0 \in IntB$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) *există $U \in \mathcal{V}_{x_0}, V \in \mathcal{V}_{y_0}$, $U \subset A, V \subset B$, astfel încât F are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $U \times V$,*

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci există $U_0 \in \mathcal{V}_{x_0}, V_0 \in \mathcal{V}_{y_0}$ şi funcţia $f : U_0 \to V_0$ astfel încât

a) $f(x_0) = y_0$,

b) $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in U_0$,

c) *f are derivată de ordinul întâi continuă pe U_0 şi*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \forall x \in U_0.$$

Exemple: 1. Arătaţi că ecuaţia $F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - x - y - 10 = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de x pe o vecinătate a punctului $M_0(2, 1)$ şi calculaţi $y'(2)$ şi $y''(2)$.
2. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M_0(1, 0)$ la curba definită prin ecuaţia $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 = 0$.
Rezolvare: 1. Avem: $F'_x = 3x^2 + 2x - 1$ şi $F'_y = 3y^2 - 1$.
Condiţiile de existenţă a funcţiei implicite: $F(2, 1) = 0$ şi $F'_y(2, 1) \neq 0$ sunt verificate, rezultă că există $y = y(x)$ astfel încât $y(2) = 1$ şi $F(x, y(x)) = 0$ (într-o vecinătate a punctului $M_0(2, 1)$). Obţinem succesiv:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{3x^2 + 2x - 1}{3y^2 - 1} \Rightarrow y'(2) = -\frac{15}{2}, \text{ respectiv,}$$

$$y''(x) = -\left(\frac{3x^2 + 2x - 1}{3y^2(x) - 1}\right)' = -\frac{(6x + 2)(3y^2 - 1) - (3x^2 + 2x - 1) \cdot 6y \cdot y'}{(3y^2 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow y''(2) = -\frac{703}{4}.$$

2. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 \Rightarrow F'_x = 2x + 6, F'_y = 2y + 4$.
Ecuaţia tangentei la curba dată în punctul $M_0(1, 0)$ (care aparţine curbei) este: $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$.
Aplicând teorema 2.2.20, rezultă $y'(1) = -\dfrac{F'_x(1, 0)}{F'_y(1, 0)} = -2$.
Astfel, ecuaţia tangentei este: $y = -2(x - 1)$.
Rezultatele anterioare pot fi extinse pentru funcţii cu mai multe variabile.
Prezentăm cazul unei ecuaţii cu trei necunoscute.

Definiţia 2.2.21. *Fie funcţia $F : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ şi $A \subset \mathbb{R}^2, B \subset \mathbb{R}$, astfel încât $A \times B \subset D$. Se numeşte funcţie implicită definită de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ o funcţie $f : A \to B$ care verifică relaţia $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pentru orice $(x, y) \in A$.*

Existenţa funcţiei implicite de două variabile are loc în condiţii analoage cazului funcţiei implicite de o variabilă.

Exemplu: Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ defineşte o funcţie implicită $z = z(x, y)$ într-o vecinătate a punctului $(-1, 0, 1)$ şi să se calculeze derivatele parţiale $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 0)$.
Rezolvare: Notăm $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy$.
Avem: $F'_x = 2x - y$, $F'_y = 2y - x$, $F'_z = -2z$.
Condiţiile de existenţă a funcţiei implicite: $F(-1, 0, 1) = 0$ şi $F'_z(-1, 0, 1) \neq 0$

sunt verificate, rezultă că există $z = z(x, y)$ astfel încât $z(-1, 0) = 1$ şi $F(x, y, z(x, y)) = 0$, într-o vecinătate a punctului M. Obţinem succesiv:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-y}{-2z} = \frac{2x-y}{2z} \Rightarrow z'_x(-1, 0) = -1$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y-x}{-2z} = \frac{2y-x}{2z} \Rightarrow z'_y(-1, 0) = \frac{1}{2}$$

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = \left(\frac{2x-y}{2z}\right)'_x = \frac{4z - (2x-y)\cdot 2z'_x}{4z^2} = \frac{2z - (2x-y)\cdot z'_x}{2z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''_{x^2}(-1, 0) = \frac{2\cdot 1 - (-2-0)\cdot(-1)}{2\cdot 1} = 0\,.$$

Pentru a determina punctele de extrem ale unei funcţii definite implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$, se vor afla punctele staţionare ale acesteia şi se va studia natura lor. Punctele staţionare ale funcţiei implicite se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} F'_x(x, y) &= 0 \\ F(x, y) &= 0 \\ F'_y(x, y) &\neq 0 \end{cases}.$$

Pentru precizarea punctelor de extrem, se află semnul derivatei a doua a funcţiei implicite în punctele staţionare obţinute. Deoarece într-un punct staţionar y' se anulează, vom putea folosi formula:

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{x^2}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Astfel, dacă $y''(x_0) > 0$, avem punct de minim pentru $y = y(x)$ iar dacă $y''(x_0) < 0$, avem punct de maxim pentru funcţia implicită.

Exemplu: Să se determine extremele funcţiilor definite implicit de ecuaţia

$$F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0.$$

Rezolvare : $\begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0 \\ 4y - 2x - 1 \neq 0 \end{cases}$

Se obţin punctele critice $M_1(-3, -1)$, $M_2(-4, -2)$ pentru care sunt verificate condiţiile de existenţă a funcţiei implicite definite de ecuaţia dată. Avem:

$$y''(-3) = -\frac{F''_{x^2}(-3, -1)}{F'_y(-3, -1)} = -2 < 0,\ y''(-4) = -\frac{F''_{x^2}(-4, -2)}{F'_y(-4, -2)} = 2 > 0\,.$$

Rezultă că $x=-3$ este punct de maxim pentru $y=y(x)$, $y_{\max}=y(-3)=-1$ iar $x=-4$ este punct de minim pentru $y=y(x)$, $y_{\min}=y(-4)=-2$.

Punctele de extrem se pot determina şi pentru funcţii implicite cu mai multe variabile.

De exemplu, să considerăm funcţia de clasă C^2, $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$. Presupunem că ecuaţia $F(x,y,z)=0$ îndeplineşte condiţiile de existenţă a funcţiei implicite $z=f(x,y)$. Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) &= 0 \\ F'_y(x,y,z) &= 0 \\ F(x,y,z) &= 0 \end{cases}, \text{ pentru care este verificată condiţia } F'_z(x,y,z) \neq 0.$$

Natura punctelor staţionare se stabileşte folosind semnul diferenţialei $\mathrm{d}^2 z$ în fiecare punct. Astfel, dacă $\mathrm{d}^2 z$ este pozitiv definită, avem un punct de minim al funcţiei implicite f iar dacă este negativ definită, avem punct de maxim.

Exemplu: Să se determine extremele funcţiei $z=z(x,y)$ definite implicit de ecuaţia $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

Rezolvare: Notăm $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$.

Avem: $F'_x=2x-2, F'_y=2y+2, F'_z=2z-4$.

Aflăm punctele staţionare ale funcţiei implicite.

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} F'_x(x,y,z) &= 0 \\ F'_y(x,y,z) &= 0 \\ F(x,y,z) &= 0 \end{cases}$. Din primele două ecuaţii se obţine $x=1$, $y=-1$. Înlocuind în a treia ecuaţie, obţinem $z^2-4z-12=0$ cu soluţiile $z_1=-2$, $z_2=6$. Punctele $(1,-1,-2)$ şi $(1,-1,6)$ îndeplinesc condiţia $F'_z(1,-1)\neq 0$.

Natura acestor puncte este dată de semnul diferenţialei $\mathrm{d}^2 z$.

Prin diferenţierea ecuaţiei $F(x,y,z)=0$ se obţine

$$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-2\,\mathrm{d}z=0\,.$$

Mai diferenţiem o dată, ţinând cont că $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$ sunt constante. Rezultă:

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+z\,\mathrm{d}^2z-2\,\mathrm{d}^2z=0 \Rightarrow \mathrm{d}^2z(x,y)=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}{2-z}.$$

În punctele staţionare, avem $\mathrm{d}z=0$, deci vom avea:

$$\text{pentru } (1,-1,-2),\ \mathrm{d}^2z(1,-1)=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{4}>0,$$

$$\text{pentru } (1,-1,6),\ \mathrm{d}^2z(1,-1)=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{-4}<0\,.$$

În concluzie, în punctul staţionar $(1,-1)$, ecuaţia $F(x,y,z)=0$ defineşte două funcţii implicite $z=z_1(x,y)$ şi $z=z_2(x,y)$, având valorile extreme locale: $z_{\min}=z_1(1,-1)=-2$ respectiv $z_{\max}=z_2(1,-1)=6$.

2.3 Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze limitele:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

$$\text{c)} \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad \text{d)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$$

2. Să se studieze continuitatea în origine pentru funcţiile:

$$\text{a)}\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\text{b)}\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi în origine pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru $f(x,y) = x^2e^{xy}$.

5. Să se arate că $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ este funcţie armonică.

6. Fie $z = yf(x^2-y^2)$, unde f este o funcţie arbitrară care admite derivată. Să se arate că are loc relaţia:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

7. Calculaţi $\mathrm{d}f(3,4,5)$ pentru $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. Să se determine punctele de extrem local şi valorile extreme ale funcţiei $f(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$.

9. Să se determine punctele de extrem şi extremele locale pentru funcţia $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

10. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţiile:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + 1$

b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$

11. Să se afle punctele de extrem condiţionat ale funcţiei $f(x,y) = xy$ dacă $x + y = 1$.

12. Să se înscrie în elipsa de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ un dreptunghi de arie maximă.

13. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ dacă $xyz = a^3,\ a > 0$.

14. Să se arate că $z'_x - z'_y = -1$ unde $z = z(x,y)$ este funcţia implicită definită de ecuaţia $F(x+y, y-z, x+z) = 0$.

15. Să se determine extremele funcţiilor definite implicit de ecuaţia $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

16. Să se determine extremele funcţiilor definite implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Soluţii:

1. a) Aplicăm metoda curbei variabile. Vom calcula limita deplasându-ne spre origine pe o curbă variabilă de ecuaţie $y = mx^2 - x$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2 - x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3 - x^2}{mx^2} = -\frac{1}{m},$$

de unde rezultă că limita nu există.

b) $0 \le \left|\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^2y^3}{2xy}\right| = \dfrac{1}{2}|x|y^2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$

c) Pentru $x > 0$ şi $y > 0$ avem:

$$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \le \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Trecem la limită, ţinând cont că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Conform criteriului cleştelui, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

d) Pentru $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} = \dfrac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \overset{xy=t}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ şi}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} ,$$

deci limita nu există. Rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

2. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$, deci limita nu există.
Rezultă că funcţia nu este continuă în origine.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Deoarece $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 1$.

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ aplicăm criteriul cleştelui. Vom folosi formula de calcul $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ şi inegalităţile $|a+b| \le |a|+|b|$, $|2xy| \le x^2+y^2$. Obţinem:

$$0 < \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y||x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \le |x+y|\left(1+\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \le \frac{3}{2}\,|x+y|.$$

Trecând la limită, rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

În concluzie, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, deci funcţia dată este continuă în origine.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, deci funcţia admite derivate parţiale în $(0,0)$ deşi nu este continuă în acest punct, după cum s-a arătat în exerciţiul anterior.

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2e^{xy}\cdot(xy)'_x = e^{xy}(2x+x^2y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{xy}\cdot(xy)'_y = x^3e^{xy}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \left[e^{xy}(2x+x^2y)\right]'_x = (e^{xy})'_x\,(2x+x^2y) + e^{xy}(2x+x^2y)'_x \\
&= e^{xy}[\,y\,(2x+x^2y)+2+2xy] = e^{xy}(4xy+x^2y^2+2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(x^3e^{xy})'_x=3x^2e^{xy}+x^3e^{xy}\cdot y=e^{xy}(3x^2+x^3y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(x^3e^{xy})'_y=x^3e^{xy}(xy)'_y=x^4e^{xy}$$

5. Funcţia f este armonică $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

6. Folosind formula de derivare a funcţiei compuse, obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xy\cdot f'(x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot 2y.$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot f'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}\cdot f(x^2-y^2)-2y\cdot f'(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

7. $\mathrm{d}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{-zx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(3,4,5)=\frac{-3}{25},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-zy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(3,4,5)=\frac{-4}{25},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(3,4,5)=\frac{1}{5}.\text{ Rezultă că :}$$

$$\mathrm{d}f(3,4,5)=-\frac{3}{25}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{25}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{5}\,\mathrm{d}z\,.$$

8. Aflăm mai întâi punctele staţionare ale funcţiei f.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3+4xy^2-8 = 0\\ 4y^3+4x^2y+8 = 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+xy^2 = 2\\ y^3+x^2y = -2\end{cases}$$

Însumând ecuaţiile din ultimul sistem, obţinem:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + y) + y^2(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2) = 0$$

Cum din sistem reiese că $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, deci $x^2 + y^2 \neq 0$, deducem că $x + y = 0$. Înlocuind $y = -x$ în prima ecuaţie din ultimul sistem, se obţine ecuaţia $2x^3 = 2$ cu soluţia reală $x = 1$. Rezultă că $M(1, -1)$ este punct staţionar.
Matricea hessiană asociată funcţiei f este:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 12y^2 + 4x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det H(1, -1) = \begin{vmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{vmatrix} > 0,\ f''_{x^2}(1, -1) = 16 > 0\,.$$

Conform criteriului lui Sylvester, rezultă că $M(1, -1)$ este punct de minim local pentru f, $f_{\min} = f(1, -1) = -12$.

9. $f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$, $f'_y(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y$.
Rezolvând sistemul $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ se obţin punctele staţionare $M_1(0, 0)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Derivatele parţiale de ordinul doi ale lui f sunt $f''_{x^2} = 12x^2-4$, $f''_{y^2} = 12y^2-4$, $f''_{xy} = 4$, de unde se obţine $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$.
Pentru M_1 nu se poate aplica criteriul lui Sylvester deoarece $\Delta(0, 0) = 0$. Folosim semnul diferenţialei a doua.
Avem $\mathrm{d}^2 f(0, 0) = -4\,\mathrm{d}x^2 + 8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}y^2 = -4\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)^2 \leq 0$, de unde rezultă că $M_1(0, 0)$ nu este punct de extrem pentru f (diferenţiala $\mathrm{d}^2 f(0, 0)$ este semidefinită).
Pentru $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, avem $\mathrm{d}^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20\,\mathrm{d}x^2 + 8\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 20\,\mathrm{d}y^2$ care se scrie $\mathrm{d}^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 \left[\left(\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\,\mathrm{d}y \right)^2 + \frac{24}{25}\,\mathrm{d}y^2 \right]$. Fiind o formă pozitiv definită, rezultă că $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este punct de minim local pentru f. Analog se obţine că şi punctul $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este punct de minim local pentru f. Valoarea minimă locală a funcţiei este

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8.$$

Observăm că pentru punctele M_2 şi M_3 se putea aplica criteriul lui Sylvester. De exemplu, pentru $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, avem $\Delta(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$, $f''_{x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$

deci M_2 este punct de minim local.

10. Punctele staţionare ale fiecărei funcţii se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Natura fiecărui punct staţionar se stabileşte folosind criteriul lui Sylvester sau semnul diferenţialei a doua a lui f.

a) Funcţia are un singur punct staţionar, $M(1,-1,0)$. Matricea hessiană este: $H_f(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $d_1 = 2 > 0$, $d_2 = 3 > 0$, $d_3 = 6 > 0$, rezultă că M este punct de minim local.

b) Singurul punct staţionar este $(0,0,0)$. În acest punct, diferenţiala de ordinul doi este:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(0,0,0) &= 2\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2 + 4\,\mathrm{d}z^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= (\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y)^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 + (\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}z)^2, \end{aligned}$$

deci este o formă pătratică pozitiv definită. Deducem că $(0,0,0)$ este punct de minim local pentru f.

11. Aflăm punctele staţionare ale funcţiei

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda F(x,y) = xy + \lambda(x+y-1).$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y) &= 0 \\ F(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+\lambda &= 0 \\ x+\lambda &= 0 \\ x+y &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ x = y = \dfrac{1}{2} \end{matrix}.$$

Funcţia $\mathcal{L}(x,y) = xy - \dfrac{1}{2}\,(x+y-1)$ are punctul staţionar $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Din $\mathcal{L}''_{x^2} = \mathcal{L}''_{y^2} = 0$, $\mathcal{L}''_{xy} = 1$, deducem că $\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Prin diferenţierea relaţiei de legătură $x+y-1=0$, se obţine $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$, adică, $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$. Astfel, $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -2\,\mathrm{d}x^2 < 0$.

În concluzie, $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ este punct de maxim condiţionat pentru funcţia f iar $f_{\max} = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

12. $M(x,y) \in E \Rightarrow f(x,y) = 4xy$, $x \in (0,3), y \in (0,2)$

Fie $\mathcal{L}(x,y) = 4xy + \lambda\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + \dfrac{2\lambda}{9}x = 0 \\ 4x + \dfrac{2\lambda}{4}y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}.$$

Sistemul omogen $\begin{cases} \dfrac{\lambda}{9}x + 2y = 0 \\ 2x + \dfrac{\lambda}{4}y = 0 \end{cases}$ are soluţii nenule, deci determinantul matricei sistemului este nul. Se obţin valorile $\lambda = \pm 12$.

Pentru $\lambda = 12$, va rezulta că x şi y au valori de semne contrare ceea ce nu convine problemei.

Pentru $\lambda = -12$ rezultă că $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ şi $y = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$, deci $M\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ este punct staţionar.

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = \mathcal{L}''_{x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\mathcal{L}''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathcal{L}''_{y^2}\mathrm{d}y^2,$$

unde $\mathcal{L}''_{x^2} = -\dfrac{8}{3}$, $\mathcal{L}''_{xy} = 4$, $\mathcal{L}''_{y^2} = -6$. Obţinem:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = -4\left(\frac{2}{3}\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{3}{2}\mathrm{d}y^2\right) = -4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\right)^2.$$

Diferenţiem ecuaţia $F(x,y) = 0$ şi avem:

$$\mathrm{d}F = \frac{2x}{9}\mathrm{d}x + \frac{2y}{4}\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}F\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{9\sqrt{2}}\mathrm{d}x + \frac{4}{4\sqrt{2}}\mathrm{d}y = 0,$$

de unde rezultă că $\mathrm{d}y = -\dfrac{2}{3}\mathrm{d}x$. Astfel, obţinem:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -4\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}^2\mathrm{d}x\right)^2 < 0,\ \forall\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \neq (0,0),$$

deci, $M\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de maxim condiţionat pentru f. Rezultă că aria maximă a dreptunghiului înscris în elipsa dată este:

$$f_{\max} = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 12.$$

Generalizând, aria maximă a unui dreptunghi înscris într-o elipsă de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, este $2ab$.

13. Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x,y,z)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-a^3)\,.$$

Derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=y+2z+\lambda yz,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=x+2z+\lambda xz,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=2x+2y+\lambda xy\,.$$

Pentru a afla punctele staţionare, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x=0\\ \mathcal{L}'_y=0\\ \mathcal{L}'_z=0\\ xyz=a^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+2z+\lambda yz=0\\ x+2z+\lambda xz=0\\ 2x+2y+\lambda xy=0\\ xyz=a^3\end{cases}.$$

Din $xyz=a^3$ deducem că x,y,z sunt nenule. Atunci, primele trei ecuaţii ale sistemului se pot scrie astfel:

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{y}+\lambda=0,\ \frac{1}{z}+\frac{2}{x}+\lambda=0,\ \frac{2}{y}+\frac{2}{x}+\lambda=0\,.$$

Din primele două ecuaţii observăm că $x=y$. A treia ecuaţie devine $\dfrac{4}{x}+\lambda=0$, de unde $\lambda=-\dfrac{4}{x}$. Înlocuind în a doua ecuaţie, vom avea $\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{x}=0$, adică $x=2z$, deci $y=2z$. Relaţia de legătură devine $4z^3=a^3$. Se obţin astfel valorile:

$$x=y=\frac{2a}{\sqrt[3]{4}}\,,\ z=\frac{a}{\sqrt[3]{4}}\,,\ \lambda=-\frac{2\sqrt[3]{4}}{a}\,.$$

În continuare, vom studia semnul diferenţialei $\mathrm{d}^2\mathcal{L}$ în punctul staţionar obţinut, unde diferenţiala legăturii se anulează.

Pentru funcţia $\mathcal{L}(x,y,z)=xy+2xz+2yz-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{a}(xyz-a^3)\,,$ avem :

$$\mathcal{L}''_{x^2}=\mathcal{L}''_{y^2}=\mathcal{L}''_{z^2}=0,\ \mathcal{L}''_{xy}=1+\lambda z=-1,\ \mathcal{L}''_{xz}=2+\lambda y=-2\,,$$

$$\mathcal{L}''_{yz}=2+\lambda x=-2\Rightarrow \mathrm{d}^2\mathcal{L}=-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Pentru a exprima $\mathrm{d}z$ în funcţie de $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$, diferenţiem legătura $xyz=a^3$. În punctul obţinut, relaţia $yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=0$ devine:

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}z=0\Rightarrow \mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}\,.$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = -2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\left(-\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{2}\right) = 2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y^2\,,$$

care se scrie $\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\left[\left(\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{3}{4}\,\mathrm{d}y^2\right] > 0$. Deducem că în punctul obţinut funcţia f are un minim condiţionat,

$$f_{\min} = f\left(\frac{2a}{\sqrt[3]{4}}, \frac{2a}{\sqrt[3]{4}}, \frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{6a^2}{\sqrt[3]{2}}\,.$$

14. Fie $u(x,y,z) = x + y$, $v(x,y,z) = y - z$, $w(x,y,z) = x + z$. Folosind formula de derivare a funcţiei compuse, ţinând cont că $z = z(x,y)$, vom obţine succesiv:

$$F'_u \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x + F'_w \cdot w'_x = 0 \Rightarrow F'_u - F'_v \cdot z'_x + F'_w \cdot (1 + z'_x) = 0\,,$$

$$F'_u \cdot u'_y + F'_v \cdot v'_y + F'_w \cdot w'_y = 0 \Rightarrow F'_u + F'_v \cdot (1 - z'_y) + F'_w \cdot z'_y = 0\,,$$

de unde rezultă $z'_x = \dfrac{F'_u + F'_w}{F'v - F'_w}$, $z'_y = \dfrac{F'_u + F'_v}{F'_v - F'_w}$, deci $z'_x - z'_y = -1$.

15. $\begin{cases} F'_x(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \\ -2x + 10y + 4 \neq 0 \end{cases}$

$$y = x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x(x-1) + 5(x-1)^2 - 2x + 4(x-1) - 1 = 0$$

Se obţine ecuaţia $4x^2 - 6x = 0$ cu soluţiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = \dfrac{3}{2}$.
Din $y = x - 1$, rezultă $y_1 = -1$ şi $y_2 = \dfrac{1}{2}$.
Considerăm punctele $M_1(0,-1)$ şi $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sunt verificate condiţiile $F'_y(0,-1) \neq 0$ şi $F'_y\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq 0$.
Folosim formula pentru derivata a doua a funcţiei implicite $y = y(x)$ într-un punct staţionar şi obţinem:

$$y''(0) = -\frac{F''_{x^2}(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3} > 0,\ y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{F''_{x^2}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}{F'_y\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{6} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ punct de minim, } y_{\min} = -1,\ x_2 = \frac{3}{2} \text{ punct de maxim, } y_{\max} = \frac{1}{2}.$$

16. Aflăm mai întâi punctele staţionare ale funcţiei implicite.
Pentru aceasta, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) & = & 0 \\ F'_y(x,y,z) & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 & = & 0 \\ 2y + 4 & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z^2 - 6z - 16 = 0 \end{cases}.$$

Se obţin punctele $M_1(1,-2,-2)$ şi $M_2(1,-2,8)$ pentru care este verificată condiţia $F'_z(x,y,z)\neq 0$ $(2z-6\neq 0)$.
Rezultă că ecuaţia $F(x,y,z)=0$ defineşte două funcţii implicite:

$$z=z_1(x,y) \text{ pentru punctul } M_1 \text{ şi } z=z_2(x,y) \text{ pentru } M_2.$$

Avem: $F''_{x^2}=2, F''_{xy}=0, F''_{y^2}=2.$
Pentru $z=z_1(x,y)$ obţinem:

$$z''_{x^2}(1,-2,-2)=-\frac{F''_{x^2}(1,-2,-2)}{F'_z(1,-2,-2)}=-\frac{2}{-10}=\frac{1}{5}\,,$$

$$z''_{xy}(1,-2,-2)=-\frac{F''_{xy}(1,-2,-2)}{F'_z(1,-2,-2)}=0\,,$$

$$z''_{y^2}(1,-2,-2)=-\frac{F''_{y^2}(1,-2,-2)}{F'_z(1,-2,-2)}=-\frac{2}{-10}=\frac{1}{5}\,,$$

de unde rezultă:

$$\begin{vmatrix} z''_{x^2}(1,-2,-2) & z''_{xy}(1,-2,-2) \\ z''_{xy}(1,-2,-2) & z''_{y^2}(1,-2,-2) \end{vmatrix}=\frac{1}{25}>0,\ z''_{x^2}(1,-2,-2)>0,$$

deci $(1,-2)$ este punct de minim pentru $z=z_1(x,y)$ şi $z_{\min}=-2$.
Pentru $z=z_2(x,y)$ obţinem:

$$z''_{x^2}(1,-2,8)=-\frac{F''_{x^2}(1,-2,8)}{F'_z(1,-2,8)}=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}\,,$$

$$z''_{xy}(1,-2,8)=-\frac{F''_{xy}(1,-2,8)}{F'_z(1,-2,8)}=0\,,$$

$$z''_{y^2}(1,-2,8)=-\frac{F''_{y^2}(1,-2,8)}{F'_z(1,-2,8)}=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}\,,$$

de unde rezultă:

$$\begin{vmatrix} z''_{x^2}(1,-2,8) & z''_{xy}(1,-2,8) \\ z''_{xy}(1,-2,8) & z''_{y^2}(1,-2,8) \end{vmatrix}=\frac{1}{25}>0,\ z''_{x^2}(1,-2,8)<0,$$

deci $(1,-2)$ este punct de maxim pentru $z=z_2(x,y)$ şi $z_{\max}=8$.

2.4 Exerciţii propuse

1. Să se calculeze limitele:

$$\text{a) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} \qquad \text{b) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^4} \qquad \text{d) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3} \qquad \text{e) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

2. Să se studieze continuitatea în origine pentru funcţiile următoare:

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi pentru funcţiile:

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x-y}{2x+3y} \qquad \text{b) } f(x,y) = y^x$$

$$\text{c) } f(x,y) = \sqrt{x^2-xy+y^2} \qquad \text{d) } f(x,y,z) = e^{yz}\cdot\sin x$$

4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi pentru funcţiile:

$$\text{a) } f(x,y) = x^3y^2 + 2x^4y - 5y^2 + 3xy^3 \qquad \text{b) } f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$$

$$\text{c) } f(x,y,z) = e^{-2x} + \cos(yz) \qquad \text{d) } f(x,y,z) = x^3z + y^2\ln z$$

5. Să se demonstreze relaţiile:

   a) $xf'_x + yf'_y = 2$ unde $f(x,y) = \ln(x^2+xy+y^2)$

   b) $f'_x + f'_y + f'_z = 0$ unde $f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$

6. Să se calculeze F'_x, F'_y şi F''_{x^2} pentru $F(x,y) = f(2x+3y, x^2+2y^2)$.

7. Fie $f(x,y) = x^2y - xy^2$.

   a) Să se determine $\mathrm{d}f(2,-1)$, $\bigtriangledown f$ şi $\triangle f$.

   b) Să se calculeze derivata funcţiei f în punctul $A(-2,1)$ după direcţia vectorului $\overrightarrow{v} = 6\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$.

8. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul doi pentru $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ în punctul $(1,1)$.

9. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor:

   a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 3y - 3$
   b) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 24$
   c) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xy - 2x$
   d) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}, x, y, z > 0$

10. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$ ştiind că $x + y = 1$.

11. Să se determine cea mai mică şi cea mai mare distanţă de la origine la cercul de ecuaţie $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

12. Să se determine extremele condiţionate pentru $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ dacă $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

13. Să se determine punctele de extrem condiţionat pentru:

    a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \dfrac{1}{2}y^2$ dacă $x^2 + y^2 = 1$
    b) $f(x,y,z) = xyz$, dacă $x + y + z = a$

14. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei $f(x,y,z) = xyz$ cu legăturile $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

15. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M(-2,1)$ la curba definită prin ecuaţia $x^3 + x^2y - 3xy^2 + 2y^3 - 4 = 0$.

16. Demonstraţi că ecuaţia $F(x,y) = x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de x pe o vecinătate a punctului $M_0(1,1)$ şi calculaţi $y'(1)$ şi $y''(1)$.

17. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II ale funcţiei implicite definite de ecuaţia $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ în vecinătatea punctului $M_0(2,0,1)$.

18. Să se determine extremele funcţiilor definite implicit de ecuaţia $y^3 + x^2 - xy - 3x - y + 4 = 0$.

19. Să se afle extremele funcţiei $z = z(x,y)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0$.

Capitolul 3

Calcul integral

3.1 Integrarea funcţiilor reale de o variabilă reală

3.1.1 Primitive

Definiţia 3.1.1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Spunem că $F : D \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f dacă F este derivabilă şi $F'(x) = f(x), x \in D$.*

Dacă f admite o primitivă F atunci admite o infinitate de primitive. Mulţimea primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a lui f şi se notează $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Are loc relaţia:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}.$$

Proprietatea 3.1.2. *O funcţie continuă admite primitive.*

Metode de calcul a integralelor nedefinite: metoda directă (tabelul primitivelor funcţiilor elementare), metoda integrării prin părţi şi metoda substituţiei (schimbare de variabilă).

Formula de integrare prin părţi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Schimbare de variabilă

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă a funcţiei f.

Exemple: Să se calculeze integralele:

$$\text{a)} \int x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Rezolvare:

$$\text{a)} \begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \sin x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & -\cos x \end{array}$$

$$\Rightarrow \int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + \mathcal{C}$$

b) Pentru $I = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ se aplică de două ori metoda de integrare prin părţi.

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \sin x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x \right) = e^x(\sin x - \cos x) - I \end{aligned}$$

Se obţine $I = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + \mathcal{C}$.

Altfel, $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}$, $F(x) = ae^x \sin x + be^x \cos x$.
Valorile reale ale lui a şi b se determină prin identificare folosind relaţia

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow ae^x \sin x + ae^x \cos x + be^x \cos x - be^x \sin x = e^x \sin x.$$

Împărţind ultima relaţie cu e^x se obţine:

$$(a-b)\sin x + (a+b)\cos x = \sin x \Rightarrow \begin{array}{rcl} a-b & = & 1 \\ a+b & = & 0 \end{array} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c)} \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\left(-x^2\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + \mathcal{C} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \mathcal{C}$$

3.1.2 Integrale definite

Noţiunea de integrală definită este strâns legată de noţiunea de arie. Astfel, s-a pus problema să se calculeze aria mulţimii plane cuprinse între graficul unei funcţii continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$ (aria subgraficului funcţiei f).

Definiţii 3.1.3. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(i) *Mulţimea* $\Delta_n[a, b] = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *se numeşte diviziune a intervalului* $[a, b]$. *Norma diviziunii* $\Delta_n[a, b]$ *este numărul* $\|\Delta_n[a, b]\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x_i - x_{i-1})$.

(ii) *Se numeşte sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii* $\Delta_n[a, b]$ *o mulţime de puncte* $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *cu proprietatea:* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$.

(iii) *Se numeşte sumă Riemann asociată funcţiei* f, *diviziunii* $\Delta_n[a, b]$ *şi sistemului de puncte intermediare* $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *suma:*

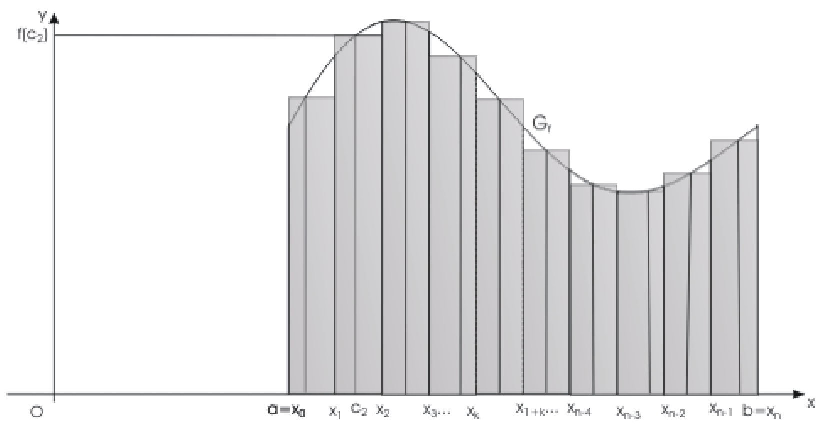
$$\sigma_\Delta(f; \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 3.1.4. *Spunem că* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a, b]$ *dacă există numărul real*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_\Delta(f; \xi_i)$$

unde $\|\Delta_n[a, b]\| \to 0$. *Numărul* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *se numeşte integrala definită a funcţiei* f.

În desenul de mai jos, pentru o funcţie cu valori pozitive, se poate vedea cum o sumă Riemann poate reprezenta o aproximare pentru aria subgraficului funcţiei.



Proprietatea 3.1.5. *Au loc următoarele proprietăţi:*

1. *O funcţie continuă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a, b]$.

2. *O funcţie monotonă şi mărginită pe $[a, b]$ este integrabilă.*

3. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)f(c)$.*

Teorema 3.1.6. *Pentru o funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ are loc formula lui Leibniz-Newton:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a funcţiei f.

Proprietatea 3.1.7. *Dacă f şi g sunt funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi α, β sunt numere reale atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi are loc relaţia:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(liniaritatea integralei în raport cu funcţia).

Proprietatea 3.1.8. *Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $c \in (a, b)$ atunci f este integrabilă pe $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi are loc relaţia:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(aditivitatea integralei faţă de interval).

Proprietatea 3.1.9. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi $x \in (a, b)$ atunci funcţia :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$.

Aplicaţii ale integralei definite

1. Aria subgraficului unei funcţii continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se calculează prin formula:

$$A(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue atunci aria suprafaţei plane cuprinsă între graficele celor două funcţii şi dreptele $x = a, x = b$ este:

$$A(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Volumul corpului obţinut ptin rotirea graficului unei funcţii continue în jurul axei Ox (corp de rotaţie) este:

$$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Lungimea graficului unei funcţii continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se poate calcula astfel:

$$\mathcal{L}(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Aria suprafeţei obţinute prin rotirea graficului unei funcţii continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ în jurul axei Ox este:

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

5. Centrul de greutate al unei plăci plane omogene, având forma subgraficului unei funcţii continue $f : [a,b] \to (0,\infty)$, are coordonatele :

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Exemple:

a) Să se calculeze aria mulţimii plane mărginite de graficul funcţiei $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x + x^3}$, axa Ox şi dreptele $x = 1, x = 2$.

b) Calculaţi aria domeniului mărginit de graficele funcţiilor $f(x) = x^2$ şi $g(x) = 3x + 10$.

c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, în jurul axei Ox.

d) Calculaţi lungimea graficului funcţiei $f(x) = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}; 2\sqrt{2}]$.

e) Calculaţi aria sferei de rază r având centrul în origine.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} a)\ \mathcal{A} &= \int_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} \end{aligned}$$

b) Pentru a aplica formula $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$, vom determina abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii şi vom stabili semnul diferenţei $f(x) - g(x)$ pe intervalul obţinut.

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ y &= 3x + 10 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0,\ \text{pentru}\, x \in [-2, 5] \Rightarrow f(x) \leq g(x),\ x \in [-2, 5]$$

Rezultă $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-2}^{5} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} (3x + 10 - x^2)\,\mathrm{d}x$. Se obţine $\mathcal{A} = \dfrac{343}{6}$.

c) $V = \pi \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^\pi - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{d) } \mathcal{L}(G_f) &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \cdot x\,\mathrm{d}x \overset{x^2+1=t^2}{=} \int_2^3 \frac{t}{t^2-1} \cdot t\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = t\Big|_2^3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \end{aligned}$$

e) Sfera se obţine rotind graficul funcţiei $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ în jurul axei Ox (se roteşte un semicerc în jurul unui diametru).

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi r x\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

3.2 Integrale improprii (generalizate)

Integralele definite ale funcţiilor reale de o variabilă reală se calculează pe intervale mărginite. O integrală improprie este o integrală a unei funcţii definite pe un interval nemărginit sau a unei funcţii nemărginite pe intervalul de integrare.

Integrale pe intervale nemărginite

Se definesc următoarele integrale:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ unde } f:[a,\infty)\to\mathbb{R} \text{ şi}$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ unde } f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}.$$

Atunci când limita respectivă există şi este finită, aceasta este valoarea integralei improprii. În acest caz spunem că integrala este convergentă. În caz contrar integrala improprie este divergentă.
Pentru a studia convergenţa unei integrale generalizate se poate aplica definiţia (calcul) sau se folosesc criterii de convergenţă.

Exemplu: Integrala $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $\alpha>1$ şi divergentă pentru $\alpha\le 1$. Astfel, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Observaţia 3.2.1. *Integrala* $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ *are aceeaşi natură ca seria* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Observaţia anterioară se bazează pe următoarea teoremă (criteriul integral al lui Cauchy).

Teorema 3.2.2. *Fie* $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}_+$ *o funcţie monoton descrescătoare. Atunci* $\displaystyle\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ *şi seria* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ *au aceeaşi natură.*

Criterii de convergenţă

1. Fie $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$ astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall\, x\in[a,\infty)$.
   Dacă $\displaystyle\int_a^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
   Dacă $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă atunci $\displaystyle\int_a^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$ $(a>0)$. Dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât
   $$\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}f(x)=l,\ l\in\mathbb{R}_+,$$
   atunci pentru $\alpha>1$ integrala $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă iar pentru $\alpha\le 1$ şi $l\ne 0$, $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

3. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+, f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Integrala $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge dacă şi numai dacă $grad\, Q \geq grad\, P + 2$.

Exemple: Să se studieze convergenţa integralelor:

$$\text{a)} \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$$

Rezolvare: a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+1} - \sqrt{2}\right) = \infty$
$\Rightarrow$ integrală divergentă

b) Scriem $\displaystyle I = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) = \frac{\pi}{2} \text{ iar}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, deci integrala este convergentă.

c) Fie $\alpha = \dfrac{5}{2}$. Avem:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x\sqrt{x^3+1}} = 1 \in \mathbb{R}_+ ,$$

deci integrala $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă ($\alpha > 1$).

Integrale ale unor funcţii nemărginite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ unde } f : (a, b] \to \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\nearrow b} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ unde } f : [a, b) \to \mathbb{R}$$

Exemplu: Integrala $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi este divergentă pentru $\alpha \geq 1$. Astfel, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este convergentă iar integralele $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ şi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sunt divergente.

Definiţia 3.2.3. *Integrala* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este absolut convergentă dacă* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Proprietatea 3.2.4. *Dacă integrala* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *este convergentă atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Criterii de convergenţă

1. Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$.
   Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
   Dacă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă atunci şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.
2. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}_+$. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b}(b-x)^\alpha f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}_+$, atunci integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi este divergentă pentru $\alpha \geq 1$ şi $l \neq 0$.

Exemple: Să se studieze convergenţa integralelor:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

Rezolvare: a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t \searrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim\limits_{t \searrow 0}\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2 \Rightarrow$ integrală convergentă

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \int\limits_0^t \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \left(-\ln|\cos t| + \underbrace{\ln|\cos 0|}_{0}\right) = -(-\infty) = \infty$

$\Rightarrow$ integrală divergentă

c) $\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Astfel, pentru $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$ avem $\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}f(x)\in\mathbb{R}_+$, deci integrala este convergentă.

3.3 Integrale care depind de un parametru

$$I(t)=\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \text{(integrală care depinde de parametrul } t)$$

Derivarea (în raport cu t):

$$\left(\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)'=\int_{u(t)}^{v(t)} f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x+v'(t)f(v(t),t)-u'(t)f(u(t),t)$$

Cazuri particulare:

$$\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)'=\int_a^b f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

$$\left(\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=v'(t)f(v(t))-u'(t)f(u(t)) \quad (2)$$

Prin derivarea unor integrale cu parametru se pot calcula unele integrale.

Exemplu: Să se calculeze: $I(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{t-1}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x,\ t\geq 1$.

Rezolvare:

$$I'(t)=\int_0^1\left(\frac{x^{t-1}-1}{\ln x}\right)'_t\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\ln x}\cdot x^{t-1}\ln x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{t-1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^t}{t}\Big|_0^1=\frac{1}{t}$$

de unde rezultă că $I(t)=\ln t+C$.
Pentru $t=1\Rightarrow I(1)=0\Rightarrow \ln 1+C=0\Rightarrow C=0$.
Rezultă că $I(t)=\ln t$.

Teorema 3.3.1. *(Teorema de integrare a integralelor cu parametru)*
Dacă funcţia $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci are loc formula:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Astfel, integrala $I(t)$ din exemplul anterior se poate calcula observând că

$$\frac{x^{t-1}-1}{\ln x} = \int_0^{t-1} x^y \, \mathrm{d}y.$$

Aplicând teorema 3.3.1, se obţine:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^1 \left(\int_0^{t-1} x^y \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^{t-1} \left(\int_0^1 x^y \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{t-1} \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\right) \mathrm{d}y = \int_0^{t-1} \frac{1}{y+1} \, \mathrm{d}y = \ln(y+1)\Big|_0^{t-1} = \ln t. \end{aligned}$$

Funcţiile (integralele) lui Euler

Integralele lui Euler sunt funcţii speciale definite prin integrale cu parametri, eventual improprii.

Funcţia Γ (Gamma) a lui Euler:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \mathrm{d}x, \ p > 0$$

Funcţia B (Beta) a lui Euler:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \mathrm{d}x, \ p,q > 0$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. Funcţia Γ este convergentă pentru orice $p > 0$.
   Funcţia B este convergentă pentru $p, q > 0$.
2. (i) $\Gamma(1) = 1$ (ii) $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$ (iii) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$
3. (i) $B(p,q) = B(q,p)$ (ii) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
4. $B(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, $p \in (0,1)$
5. (i) $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \pi$ (ii) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Observaţia 3.3.2. *Din ultima relaţie rezultă că* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. *Prin schimbarea de variabilă* $x = t^2$ *se obţine* $\displaystyle 2\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$*, adică:*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\textit{integrala Euler-Poisson}).$$

Exemple: Să se calculeze integralele:

$$\text{a)} \int_0^\infty x^4 e^{-3x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^6)^3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, \cos^{12} x\,\mathrm{d}x$$

Rezolvare: a) Notăm $3x^2 = t$ deci $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, t^{\frac{1}{2}}$, $6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Avem:

$$I = \frac{1}{18\sqrt{3}} \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{18\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{3}}\,.$$

b) Notăm $\dfrac{1}{1+x^6} = t$, de unde $x = \left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{6}}$. Rezultă că:

$$\frac{x^2}{(1+x^6)^3} = \frac{(1-t)^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} \cdot t^3 = t^{\frac{8}{3}}\,(1-t)^{\frac{1}{3}}.$$

De asemenea, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{-\frac{5}{6}} \cdot \dfrac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{6}\,(1-t)^{-\frac{5}{6}} \cdot t^{-\frac{7}{6}}\,\mathrm{d}t$.
Pentru $x = 0$ avem $t = 1$ iar pentru $x = \infty$, $t = 0$. Integrala devine:

$$I = -\frac{1}{6}\int_1^0 t^{\frac{8}{3}}\,(1-t)^{\frac{1}{3}}\,(1-t)^{-\frac{5}{6}}\,t^{-\frac{7}{6}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

$I = \dfrac{1}{6}\,B(p,q)$ cu $p - 1 = \dfrac{3}{2}$ şi $q - 1 = -\dfrac{1}{2}$, adică $p = \dfrac{5}{2}$ şi $q = \dfrac{1}{2}$.
Se obţine:

$$I = \frac{1}{6}\,B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{6}\,\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2!} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{16}\,.$$

c) Notăm $\sin x = u$ deci $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$, $u(0) = 0$ şi $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ iar $\cos x = \sqrt{1-u^2}$ pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Integrala devine:

$$I = \int_0^1 u^{10}\,(\sqrt{1-u^2}\,)^{11}\,\mathrm{d}u \overset{u^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\,(1-t)^{\frac{11}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}{\Gamma(12)} = \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 11!} = \frac{63\pi}{2^{20}}\,.$$

Generalizare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,\cos^q x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right),\; p > -1, q > -1$$

3.4 Integrale curbilinii

Lungimea unui arc de curbă

Fie $(C) : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, un arc elementar de curbă în spaţiu. Dacă arcul (C) este neted atunci lungimea arcului este dată de:

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Expresia $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ se numeşte element de arc.
În plan, lungimea unui arc neted de curbă este:

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \text{ sau } \mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu: Pentru curba definită prin $(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ (elice cilindrică), elementul de arc este:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t$$

Rezultă că $\mathcal{L}(C) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.4.1 Integrale curbilinii de speţa întâi

Fie $(C) : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, un arc de curbă rectificabil şi $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ conţine curba (C).
Integrala curbilinie în raport cu arcul (de speţa întâi) a funcţiei f pe arcul (C) este:

$$\int_{(C)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t) + z'^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

În plan: $\displaystyle\int_{(C)} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t.$

În cazul unei curbe plane definită explicit, (C): $y = y(x),\ x \in [a, b]$, avem:

$$\int_{(C)} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Din formulele de calcul pentru integralele curbilinii de speţa întâi, se observă că acestea se calculează prin reducerea lor la integrale definite.

Exemple:

a) $\displaystyle\int_{(C)} \sqrt{y(2-y)}\,\mathrm{d}s,\ \ (C):\begin{cases} x &= t-\sin t \\ y &= 1-\cos t \end{cases},\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$

b) $\displaystyle I=\int_{(C)} y\,\mathrm{d}s,\ \ (C): y=\sqrt{x},\ x\in[2,3]$

c) $\displaystyle I=\int_{(C)} (x^2-2y+z)\,\mathrm{d}s,\ \ (C):\begin{cases} x &= 3\cos t \\ y &= \frac{3}{\sqrt{2}}\sin t \\ z &= -\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases},\ \ t\in[0,2\pi]$

Rezolvare: a) $x'=1-\cos t, y'=\sin t \Rightarrow x'^{\,2}+y'^{\,2}=2-2\cos t=4\sin^2\dfrac{t}{2}$
Rezultă că $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^{\,2}+y'^{\,2}}\,\mathrm{d}t=2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=2\sin\dfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t$ pentru $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Avem $y(2-y)=(1-\cos t)(1+\cos t)=1-\cos^2 t=\sin^2 t$, de unde se obţine $\sqrt{y(2-y)}=|\sin t|=\sin t,\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Integrala devine:

$$\begin{aligned}\int_{(C)}\sqrt{y(2-y)}\,\mathrm{d}s &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}\sin^3\frac{\pi}{4}=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

b) Avem: $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
Se obţine integrala $I=\displaystyle\int_2^3\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^3\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x.$
Notăm $\sqrt{4x+1}=u\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}(u^2-1)\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}u\,\mathrm{d}u, u(2)=3,\ u(3)=\sqrt{13}.$
Rezultă $I=\displaystyle\frac{1}{4}\int_3^{\sqrt{13}}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}u^3\Big|_3^{\sqrt{13}}=\frac{1}{12}\left(13\sqrt{13}-27\right).$

c) $\begin{array}{l} x'=-3\sin t\\ y'=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\\ z'=-\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\end{array}\Rightarrow x'^{\,2}+y'^{\,2}+z'^{\,2}=9\sin^2 t+9\cos^2 t=9\Rightarrow \mathrm{d}s=3\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^{2\pi}\left(9\cos^2 t-\frac{6}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathrm{d}t=27\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &- \frac{27}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{27}{2}\,t\Big|_0^{2\pi}+\frac{27}{2}\underbrace{\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{0}+\frac{27}{\sqrt{2}}\underbrace{\cos t\Big|_0^{2\pi}}_{0}=27\pi.\end{aligned}$$

3.4.2 Integrale curbilinii de speţa a doua

Fie $(C) : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, un arc de curbă rectificabil şi funcţia vectorială $F = (P, Q, R)$, unde P, Q, R sunt funcţii continue de trei variabile reale, definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$, care conţine curba C.
Integrala curbilinie de speţa a doua a funcţiei F pe arcul (C) se notează $I = \int_{(C)} F\,\mathrm{d}r = \int\limits_{(C)} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ şi se calculează cu formula:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pentru o curbă plană $(C) : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ şi o funcţie vectorială $F : D \to \mathbb{R}^2, F = (P, Q)$ avem:

$$\int_{(C)} F\,\mathrm{d}r = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Pentru o curbă definită explicit, $(C) : \vec{r}(t) = (x, y(x)), x \in [a, b]$, are loc relaţia:

$$\int\limits_{(C)} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

Exemple: a) $I = \int_C (x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$

b) $I = \int_{(C)} (x - y)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}z$, $(C) : \begin{cases} x &= 2t - 1 \\ y &= 2t^2 + 1 \\ z &= t^2 - t \end{cases}, \ t \in [0, 1]$

Rezolvare: a) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi] \Rightarrow \begin{cases} x' = -2\sin t \\ y' = 2\cos t \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi [(2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t) \cdot 2\cos t]\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^\pi (-\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= -4\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{d}t + 4\int_0^\pi \cos 2t\,\mathrm{d}t = 2\cos 2t\Big|_0^\pi + 2\sin 2t\Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

b) $x'(t) = 2,\ y'(t) = 4t,\ z'(t) = 2t - 1$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[2(2t - 2t^2 - 2) + 4t(t^2 + t - 1) + (4t^2 + 2)(2t - 1)\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (12t^3 - 4t^2 + 4t - 6)\mathrm{d}t = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

3.4.3 Integrale curbilinii independente de drum

Definiţia 3.4.1. *Integrala curbilinie în raport cu coordonatele a unei funcţii $F : D \to \mathbb{R}^3, D \subset \mathbb{R}^3$, este independentă de drum în D dacă, alegând două puncte A şi B, valoarea integralei $\int\limits_{(\widehat{AB})} F\,\mathrm{d}r$ este constantă oricare ar fi arcul neted de curbă din D care le uneşte.*

Definiţia 3.4.2. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$. Forma diferenţială $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este o formă diferenţială exactă dacă există $U \in C^1(D)$ astfel încât $\mathrm{d}\,U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.*

Are loc formula:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z)\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.4.3.1}$$

Teorema 3.4.3. *Fie $(\widehat{AB}) : r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, un arc neted în D şi $F = (P, Q, R)$ unde $P, Q, R : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$, sunt funcţii de clasă C^1 pe D. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

(i) integrala curbilinie de speţa a doua $\int_{(\widehat{AB})} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ nu depinde de drumul de integrare în D;

(ii) expresia $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este o diferenţială totală exactă;

(iii) au loc relaţiile: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}.$

Dacă U este o primitivă a formei diferenţiale totale $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$,

$$\text{atunci} \int\limits_{(\widehat{AB})} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Exemple: Să se calculeze următoarele integrale curbilinii, arătând mai întâi că acestea nu depind de drumul de integrare.

a) $I = \int_{\widehat{AB}} (3x^2y + y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + x)\,\mathrm{d}y$ unde $A(1,1), B(2,3)$

b) $I = \int_{(C)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ unde (C) este un arc de curbă care uneşte punctele $A(1,1,0), B(2,3,1)$

Rezolvare:

a) $\begin{array}{rcl} P(x,y) &=& 3x^2y + y \\ Q(x,y) &=& x^3 + x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} P'_y(x,y) &=& 3x^2 + 1 \\ Q'_x(x,y) &=& 3x^2 + 1 \end{array} \Rightarrow P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$

$\Rightarrow$ integrala este independentă de drum $\Rightarrow I = U(2,3) - U(1,1)$ unde

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} (3t^2y + y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} (x_0^3 + x_0)\,\mathrm{d}t = (t^3y + ty)\Big|_{x_0}^{x} + (x_0^3 + x_0)\,t\Big|_{y_0}^{y}.$$

Prin calcul se obţine $U = x^3y + xy + C$ de unde rezultă că $I = 28$.
b) $\frac{\partial P}{\partial y} = z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y}$, deci integrala nu depinde de drumul de integrare.

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} yz\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} x_0 z\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} x_0 y_0\,\mathrm{d}t \\ &= yz(x - x_0) + x_0 z(y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = xyz + C \end{aligned}$$

Rezultă că $I = xyz\Big|_{(1,1,0)}^{(2,3,1)} = 6$, cum se putea obţine direct observând că expresia $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ este diferenţiala funcţiei $U(x,y,z) = xyz$.

3.4.4 Aplicaţii ale integralelor curbilinii

1. Aria unui domeniu plan
   Fie D un domeniu plan mărginit de curba închisă (C) definită prin $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a,b]$.

$$aria(D) = \int_{(C)} x\,\mathrm{d}y = -\int_{(C)} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{(C)} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$

2. Lungimea unui arc neted de curbă (C) din spaţiu este:

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t) + z'^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3. Masa unui corp filiform. Coordonatele centrului de greutate.
   Fie (C) un corp filiform considerat ca un arc neted de curbă, având densitatea $\rho : (C) \to \mathbb{R}$.

$$M = \int_{(C)} \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s, \; x_G = \frac{1}{M} \int_{(C)} x\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{(C)} y\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s, \; z_G = \frac{1}{M} \int_{(C)} z\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s.$$

4. Momentele de inerţie ale unui corp filiform
   (i) în raport cu originea: $I_O = \int_{(C)} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s$
   (ii) în raport cu axele de coordonate:

$$I_{Ox} = \int_{(C)} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s, \; I_{Oy} = \int_{(C)} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s,$$

$$\text{respectiv, } I_{Oz} = \int_{(C)} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s$$

   (iii) în raport cu planele de coordonate:

$$I_{xOy} = \int_{(C)} z^2\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s, \; I_{yOz} = \int_{(C)} x^2\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s,$$

$$\text{respectiv, } I_{xOz} = \int_{(C)} y^2\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}s.$$

5. Lucrul mecanic efectuat de forţa $F = (P, Q, R)$ de-a lungul curbei $(C) : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, se calculează cu formula:

$$L = \int_{(C)} F \,\mathrm{d}r = \int_{(C)} P(x, y, z) \,\mathrm{d}x + Q(x, y, z) \,\mathrm{d}y + R(x, y, z) \,\mathrm{d}z.$$

6. Fie (C) o curbă închisă netedă şi $F = (P, Q, R)$, $P, Q, R : (C) \to \mathbb{R}$. Circulaţia câmpului vectorial F de-a lungul curbei (C) este:

$$\mathcal{C} = \oint_{(C)} F \,\mathrm{d}r = \oint_{(C)} P(x, y, z) \,\mathrm{d}x + Q(x, y, z) \,\mathrm{d}y + R(x, y, z) \,\mathrm{d}z.$$

Exemplu: Să se calculeze aria domeniului mărginit de astroidă.

Rezolvare: Ecuaţiile astroidei sunt $\begin{cases} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$

$$\text{Avem}: \ x' = -3a\cos^2 t \sin t, \ y' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Folosim formula de calcul pentru aria unui domeniu plan mărginit de o curbă închisă şi formula de calcul a integralei curbilinii în raport cu coordonatele.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3a^2\sin^4 t\cos^2 t + 3a^2\sin^2 t\cos^4 t\right)\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

3.5 Integrale duble

3.5.1 Calculul integralei duble

Integrale duble pe un domeniu dreptunghiular

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

Dacă f este integrabilă pe D şi există $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$, $\forall\, x \in [a,b]$ atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Dacă f este integrabilă pe D şi există $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$, $\forall\, y \in [c,d]$ atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Dacă $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, $\forall\,(x,y) \in D$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y.$$

Exemple:

a) $I = \iint_D (x^2 - xy + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \ D = [-1,1]\times[0,2]$

b) $I = \iint_D \frac{\sin x}{\cos^2 y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,, \; D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$

Rezolvare:

$$\text{a) } I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}(x^2 - xy + y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(x^2 y - x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 + \frac{8x}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{b) } I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y} \, \mathrm{d}y = -\cos x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \operatorname{tg} y \,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

Integrale duble pe un domeniu simplu

Considerăm un domeniu de forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b, u(x) \le y \le v(x)\},$$

unde $u, v \in C[a, b]$ (domeniu simplu în raport cu axa Oy).
Dacă f este integrabilă pe D şi $\forall\, x \in [a, b]$ există $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$, atunci:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \qquad (3.5.1.1)$$

Presupunem că D este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, adică,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \le y \le d, u(y) \le x \le v(y)\}, \; u, v \in C[c, d].$$

Dacă f este integrabilă pe D şi $\forall\, y \in [c, d]$ există $\displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$, atunci:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (3.5.1.2)$$

Exemple:

a) $I = \iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,, \; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y\}$

b) Să se calculeze $\iint_D (2x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul plan limitat de curbele de ecuaţii $y = x^2$ şi $x = y^2$.

Rezolvare:
a) Avem de calculat o integrală dublă pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox deci aplicăm formula (3.5.1.2).

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=y^2}^{x=y}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y^3-y^5\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}$$

b) Domeniul limitat de cele două curbe este simplu în raport cu fiecare axă. Considerăm că avem domeniu simplu în raport cu Oy, deci vom integra mai întâi în raport cu y apoi în raport cu x. Astfel, scriem domeniul sub forma:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\}.$$

Aplicând formula (3.5.1.1), obţinem succesiv:

$$I_1=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(2x+y)\,\mathrm{d}y=\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}-2x^3+\frac{x-x^4}{2},$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left(2x\sqrt{x}-2x^3+\frac{x-x^4}{2}\right)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1-2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^2}{4}\Big|_0^1-\frac{x^5}{10}\Big|_0^1\\ &= \frac{4}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{9}{20}.\end{aligned}$$

Schimbarea variabilelor în integrale duble

Considerăm două domenii D şi D_1 mărginite de două curbe plane închise între care există o corespondenţă biunivocă dată prin relaţiile:

$$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), (x,y)\in D, (u,v)\in D_1,$$

unde φ şi ψ au derivatele parţiale de ordinul întâi şi derivatele parţiale mixte de ordinul doi continue.
Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.
Are loc următoarea formulă de schimbare de variabile:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

unde $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$

Se folosesc des coordonatele polare şi coordonatele polare generalizate.

Pentru integrarea pe domenii circulare folosim trecerea de la coordonatele carteziene ale unui punct (x, y) la *coordonate polare*:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \text{ unde } \rho > 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho \Rightarrow \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

De exemplu, pentru $D : x^2 + y^2 \leq R^2$, se obţine $D_1 = [0, R] \times [0, 2\pi]$.
Pentru calculul unei integrale duble pe un domeniu plan mărginit de o elipsă, se folosesc *coordonatele polare generalizate*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \text{ unde } \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]\,,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Exemple:

a) $I = \displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

b) $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

Rezolvare:

a) $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},\quad \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow \rho^2 \leq 1 \Rightarrow \rho \in [0, 1] \\ y \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi] \end{matrix} \quad \Rightarrow D_1 = [0, 1] \times [0, \pi]$

$$I = \iint_{D_1} \frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\cdot\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

b) $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases},\ \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow D_1 = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Rezultă că:

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{\rho^2}\cdot ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ab\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = ab\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi ab}{3}.$$

3.5.2 Aplicaţii ale integralei duble

1. Aria unui domeniu plan mărginit:

$$\text{aria}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Volumul unui corp cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit de planul xOy şi suprafaţa $z = f(x, y)$, unde $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, este:

$$V = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Masa şi coordonatele centrului de greutate pentru o placă materială plană, având densitatea $\rho(x,y)$ se calculează astfel:
$$M = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \text{ respectiv}$$
$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Pentru o placă omogenă (densitate constantă, $\rho = k$) avem:
$$x_G = \frac{1}{\text{aria}(D)}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ y_G = \frac{1}{\text{aria}(D)}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. Momentele de inerţie ale unei plăci materiale plane având forma unui domeniu D şi densitatea $\rho : D \to \mathbb{R}$ se calculează astfel:

   a) momentul de inerţie faţă de origine:
   $$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   b) momentul de inerţie faţă de axa Ox:
   $$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   c) momentul de inerţie faţă de axa Oy:
   $$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exemple:

a) Calculaţi aria domeniului plan mărginit de curbele $y = x+2$ şi $y = x^2$.

b) Calculaţi volumul corpului mărginit de graficul funcţiei f, planul xOy şi domeniul D, unde $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+xy)^2}$ iar $D = [0,1]\times[0,1]$.

Rezolvare: a) $\begin{cases} y &= x+2 \\ y &= x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

Deoarece $x^2 - x - 2 \le 0$, adică, $x^2 \le x+2$ pentru $x \in [-1,2]$, se obţine domeniul: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x+2\}$.
$$\begin{aligned} \text{aria}(D) &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

b) $V = \iint\limits_{D} \frac{1}{(1+xy)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+xy)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(1+xy)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\frac{-1}{xy+1}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right) = \frac{-1}{x}\cdot\frac{-x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$

Volumul este : $V = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2.$

3.5.3 Formula lui Green

Fie (C) o curbă plană închisă, netedă şi D domeniul mărginit de aceasta. Formula lui Green exprimă o relaţie între o integrală curbilinie în raport cu coordonatele pe curba (C) şi o integrală dublă pe domeniul D.

Teorema 3.5.1. *Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D, având derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D. Are loc relaţia:*

$$\oint\limits_{(C)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(*curba (C) este parcursă în sens trigonometric*).

Exemplu: Folosind formula lui Green, să se calculeze

$$I = \int\limits_{(C)} (2xy - y)\,\mathrm{d}x + (x^2 + x)\,\mathrm{d}y,$$

unde (C) este cercul cu centrul în origine şi de rază 2.

Rezolvare: $\begin{array}{c} P(x,y) = 2xy - y \\ Q(x,y) = x^2 + x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} P'_y = 2x - 1 \\ Q'_x = 2x + 1 \end{array} \Rightarrow Q'_x - P'_y = 2$

Aplicând formula lui Green, integrala devine: $I = \iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D : x^2 + y^2 \leq 4$.
Observăm că $I = 2 \cdot \text{aria}(D) = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$.
Altfel, folosind formula de calcul a integralei curbilinii, avem:

$$(C) : x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \begin{array}{c} \mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = -2\sin t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = 2\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \left[(8\cos t\sin t - 2\sin t)(-2\sin t) + \left(4\cos^2 t + 2\cos t\right) 2\cos t\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-16\sin^2 t\cos t + 4\sin^2 t + 8(1-\sin^2 t)\cos t + 4\cos^2 t\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-24\sin^2 t\cos t + 4 + 8\cos t\right) \mathrm{d}t = -24 \cdot \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi} + 4t\,\Big|_0^{2\pi} + 8\sin t\Big|_0^{2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

3.6 Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze integralele improprii: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze integrala cu parametru $I(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+t\sin x}{1-t\sin x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, unde $|t| < 1$.

3. Să se calculeze următoarele integrale, cu ajutorul funcţiilor speciale ale lui Euler:

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ b) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,\cos^4 x\,\mathrm{d}x$ d) $I = \displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_{(C)} (x+y)\,\mathrm{d}s$, curba (C) fiind reuniunea segmentelor $[OA]$ şi $[OB]$, unde $A(1,0)$, $B(2,1)$.

5. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{(C)} z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, $(C): x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$, unde $t \in [0,1]$.

6. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa a doua:

   a) $I = \displaystyle\int_{(C)} xy\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y$, $(C): x = t^2, y = t^3,\ t \in [0,1]$

   b) $I = \displaystyle\int_{(C)} (x-2y)\,\mathrm{d}x + (2x+y)\,\mathrm{d}y$ unde $(C): y = x^2, x \in [-1,2]$

7. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \displaystyle\int_{(C)} x\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + xyz\,\mathrm{d}z$, unde $(C): x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t,\ t \in [0,1]$

8. Să se calculeze integrala curbilinie în raport cu coordonatele
$$I=\int_{(C)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z \text{ unde } (C)=[AB],\ A(1,-1,3), B(2,1,0).$$

9. Să se calculeze integrala curbilinie în raport cu coordonatele
$$I = \int_{(0,0,1)}^{(1,\pi,\frac{\pi}{2})} (e^x\cos y + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - e^x\sin y)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$
arătând în prealabil că este independentă de drum.

10. Să se calculeze lungimile curbelor definite prin:
a) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{matrix} t\in[0,2\pi] \\ a>0 \end{matrix}$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^2 t \\ y = \sqrt{2}\sin^2 t \\ z = \sin 2t \end{cases}$, $t\in[0,\pi]$

11. Calculaţi coordonatele centrului de greutate a firului material de forma curbei $(C): x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$, având densitatea $\rho = \sqrt{y}$.

12. Să se calculeze următoarele integrale duble:
a) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3\le x\le 4, 1\le y\le 2\}$
b) $\displaystyle\iint_D xe^{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=[0,1]\times[0,1]$

13. Să se calculeze integralele:
a) $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 2x\le y\le x^2+1\}$
b) $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le y\le 1, -y\le x\le y\}$

14. Să se calculeze integralele:
a) $\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este limitat de $y = 2-x^2$ şi $y = 2x-1$
b) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este limitat de dreapta $x+y-1=0$ şi arcul de elipsă $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $y\ge 0$
c) $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2, x^2\le y\}$

15. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \mathrm{Int}(ABC)$, $A(2,3)$, $B(7,2)$, $C(4,5)$.

16. Să se calculeze prin schimbare de variabile integralele:
a) $\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$
b) $\iint_D (y-x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$

17. Să se calculeze aria domeniului mărginit de o elipsă.

18. Să se calculeze volumul corpului determinat de suprafaţa $z = xy+1$, $x, y\in D$ unde D este domeniul limitat de $y = x^2,\ y = 8-x^2$.

19. Determinaţi coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene de forma domeniului $D = \{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \cos x\}$.

20. Folosind formula lui Green să se calculeze integrala:

$$I = \int\limits_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,\mathrm{d}y$$

unde (C) este frontiera domeniului $D = [1,4]\times[0,2]$.

Soluţii:

1. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^0 xe^x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}(x-1)e^x\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(-1-(t-1)e^t\right)$

Deoarece $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{t-1}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = 0$, rezultă că $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x = -1$, adică integrala este convergentă.

b) Scriem $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int_2^3\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$. Calculăm prima integrală.

$$\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\nearrow 2}\int\limits_1^t \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\nearrow 2}(\ln|t-2|-\ln|-1|) = -\infty$$

Cum prima integrală este divergentă, nu mai este cazul să o calculăm şi pe a doua. Deducem că integrala dată este divergentă.

2. $\displaystyle f(x,t) = \ln\frac{1+t\sin x}{1-t\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x} \Rightarrow I'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1-t\sin x}{1+t\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{(1-t\sin x)^2}\cdot\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{1-t^2\sin^2 x} \Rightarrow I'(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,\mathrm{d}x}{1-t^2\sin^2 x}$$

Notăm $\operatorname{tg} x = u \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$, $\sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$, $u(0)=0, u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\infty$.

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^\infty \frac{2}{1-\frac{t^2u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1-t^2)u^2+1} = \frac{2}{1-t^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{1-t^2}} \\ &= \frac{2}{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot \operatorname{arctg} u\sqrt{1-t^2}\Big|_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\left(\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg} 0\right). \end{aligned}$$

Rezultă că $I'(t) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}$ deci $I(t) = \pi \arcsin t + C$.
$I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, de unde deducem că $I(t) = \pi \arcsin t$.
3. a) Notând $\dfrac{x}{2} = t$, obţinem:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 8\,t^3\,e^{-t}\cdot 2\,\mathrm{d}t = 16\,\Gamma(4) = 16\cdot 3! = 96.$$

b) $\dfrac{1}{1+x^4} = t \Rightarrow x = \sqrt[4]{\dfrac{1-t}{t}} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\,(1-t)^{-\frac{3}{4}}\cdot t^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}t$
Pentru $x = 0$ rezultă $t = 1$ iar pentru $x = \infty$, $t = 0$. Integrala devine:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot t\cdot(1-t)^{-\frac{3}{4}}\cdot t^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}\,(1-t)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

Am obţinut integrala:

$$I = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

c) Putem folosi relaţia:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,\cos^q x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right),\ p > -1, q > -1.$$

Pentru $p = 6$ şi $q = 4$, se obţine integrala:

$$\frac{1}{2}\,B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{5}{2}\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right]^2}{5!} = \frac{1}{4\cdot 4!}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{3\pi}{512}.$$

d) Folosim succesiv substituţiile: $x^2 = u$, $u = 9t$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{u}\cdot\sqrt{9-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 3\sqrt{t}\cdot 3\sqrt{1-t}\cdot 9\,\mathrm{d}t = \frac{81}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{81}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{81}{2}\,\frac{\frac{1}{4}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = \frac{81\,\pi}{16}. \end{aligned}$$

4. $I = \int_{(C)} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{[OA]} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{[AB]} (x+y)\,\mathrm{d}s$

Pentru prima integrală, avem:

$$[OA]: \begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{[OA]} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Pentru a doua integrală, avem:

$$[AB]: y = x - 1,\ x \in [1,2] \Rightarrow \mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^{\,2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x,$$

de unde rezultă: $\int_{[AB]} (x+y)\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_1^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}(x^2 - x)\big|_1^2 = 2\sqrt{2}.$

Însumând, obţinem $I = \dfrac{1}{2} + 2\sqrt{2}$.

5. Avem: $x' = \cos t - t\sin t, y' = \sin t + t\cos t, z' = 1$. Înlocuind în relaţia $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2} + z'^{\,2}}\,\mathrm{d}t$, obţinem $\mathrm{d}s = \sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t$. Integrala devine:

$$I = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\sqrt{2+t^2}(t^2)'\,\mathrm{d}t \overset{t^2=u}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{2+u}\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{2+u=v^2}{=} \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (v^2-2)\cdot v \cdot 2v\,\mathrm{d}v = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (v^4 - 2v^2)\,\mathrm{d}v = \left(\frac{v^5}{5} - \frac{2v^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}.$$

Se obţine $I = -\dfrac{\sqrt{3}}{5} + \dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.

6. a) Deoarece $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = 3t^2\,\mathrm{d}t$, rezultă că

$$I = \int_0^1 \left(2t^6 - 3t^8\right)\mathrm{d}t = \frac{2t^7}{7}\Big|_0^1 - \frac{t^9}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{21}.$$

b) Folosind formula de calcul a integralei curbilinii de speţa a doua pentru curbe definite explicit, vom avea:

$$I = \int_{-1}^{2} \left[(x - 2x^2) + (2x + x^2)\cdot 2x\right]\mathrm{d}x. \text{ Prin calcul, se obţine } I = 15.$$

7. $\mathrm{d}x = x'\,\mathrm{d}t = e^t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z = z'\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$. Rezultă că:

$$I = \int_0^1 \left(e^{2t} - e^{-t} + 2t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}e^{2t} + e^{-t} + t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2} + \frac{1}{e}.$$

8. Parametrizarea segmentului $[AB]$ este:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}, t \in [0,1] \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= 3 - 3t \end{cases}, t \in [0,1].$$

Avem: $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z = -3\,\mathrm{d}t$. Integrala devine:

$$\int_0^1 \left[1 + t + 2(-1+2t)^2 - 3(1+t)(3-3t)\right] \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-6 - 7t + 17t^2\right) \mathrm{d}t.$$

Se obţine $I = -\dfrac{23}{6}$.

9. Avem: $P'_y = -e^x \sin y + z$, $P'_z = y$, $Q'_x = z - e^x \sin y$, $Q'_z = x$, $R'_x = y$, $R'_y = x \Rightarrow P'_y = Q'_x, P'_z = R'_x, Q'_z = R'_y \Rightarrow I$ nu depinde de drum. Folosind formula (3.4.3.1), se obţine $U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + C$, de unde rezultă că $I = (e^x \cos y + xyz)\Big|_{(0,0,1)}^{(1,\pi,\frac{\pi}{2})} = -e + \dfrac{\pi^2}{2} - 1$.

10. a) Elementul de arc al curbei date este:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t, \text{ pentru } t \in [0, 2\pi].$$

Rezultă că:

$$L = a\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

$$\text{b) } x' = \sqrt{2}\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t) = -\sqrt{2}\sin 2t \Rightarrow x'^{\,2} = 2\sin^2 2t$$

$$y' = \sqrt{2}\cdot 2\sin t\cdot\cos t = \sqrt{2}\sin 2t \Rightarrow y'^{\,2} = 2\sin^2 2t$$

$$z' = 2\cos 2t \Rightarrow z'^{\,2} = 4\cos^2 2t$$

$$\Rightarrow x'^{\,2} + y'^{\,2} + z'^{\,2} = 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t = 4 \Rightarrow \mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \int_{(C)} \mathrm{d}s = 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}t = 2t\Big|_0^{\pi} = 2\pi.$$

11. Folosim formulele:

$$M = \int_{(C)} \rho(x,y)\,\mathrm{d}s,\ x_G = \frac{1}{M}\int_{(C)} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s,\ y_G = \frac{1}{M}\int_{(C)} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Elementul de arc al curbei este:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t, \text{ deci}$$

$$M = \int_{(C)} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = a\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2a}(t-\sin t)\big|_0^{2\pi} = 2\pi a\sqrt{2a}.$$

$$\begin{aligned}\int_{(C)} x\sqrt{y}\,\mathrm{d}s &= a^2\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(t-t\cos t-\sin t+\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\sqrt{2a}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} - t\sin t\big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = 2\pi^2 a^2\sqrt{2a}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(C)} y\sqrt{y}\,\mathrm{d}s &= a^2\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = a^2\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= a^2\sqrt{2a}\cdot\frac{3t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2\sqrt{2a}.\end{aligned}$$

Centrul de greutate are coordonatele:

$$x_G = \frac{2\pi^2 a^2\sqrt{2a}}{2\pi a\sqrt{2a}} = \pi a, \quad y_G = \frac{3\pi a^2\sqrt{2a}}{2\pi a\sqrt{2a}} = \frac{3a}{2}.$$

Observaţie: Abscisa centrului de greutate se putea obţine direct, ţinând cont că axa de simetrie a unui arc de cicloidă este $x = \pi a$, deci $x_G = \pi a$.

12. a) $I_1 = \int\limits_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{x+y}\Big|_{y=1}^{y=2} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$

Rezultă că $\int_3^4 \left(\int\limits_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_3^4 = \ln\frac{5}{6} - \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{25}{24}.$

b) $\iint_D xe^{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,e^{x^2}\Big|_0^1\cdot e^y\Big|_0^1 = \frac{(e-1)^2}{2}.$

13. a) $I = \int_0^1\left(\int_{2x}^{x^2+1} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$$I_1 = \int_{2x}^{x^2+1} x\,\mathrm{d}y = xy\big|_{2x}^{x^2+1} = x(x^2+1-2x) = x^3-2x^2+x, \text{ deci}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

b) $I_1 = \int_{-y}^{y} y\,\mathrm{d}x = yx\big|_{-y}^{y} = y(y+y) = 2y^2$,

$I = \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} y^2\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \dfrac{4}{3}.$

14. a) Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy.

$$\begin{cases} y &= 2-x^2 \\ y &= 2x-1 \end{cases} \quad \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=-3, x_2=1,$$

iar pentru $x\in[-3,1]$, $x^2+2x-3\le 0$, adică, $2x-1\le 2-x^2$.
S-a obţinut domeniul $D=\big\{(x,y)\big|-3\le x\le 1, 2x-1\le y\le 2-x^2\big\}$.

$$I_1 = \int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,\mathrm{d}y = xy\Big|_{2x-1}^{2-x^2} - \frac{y^2}{2}\Big|_{2x-1}^{2-x^2} = -\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}$$

iar $I = \iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(-\dfrac{x^5}{10} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2}\right)\Big|_{-3}^{1} = \dfrac{64}{15}.$

b) Sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$, $y\ge 0$, implică ecuaţia $5y^2-2y-3=0$ cu soluţia pozitivă $y=1$. Deducem că domeniul din plan mărginit de dreapta $x+y-1=0$ şi arcul de elipsă $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, $y\ge 0$, este un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi este definit prin:

$$D = \{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ 1-y\le x\le 2\sqrt{1-y^2}\,\}.$$

Calculăm succesiv integralele:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{1-y}^{2\sqrt{1-y^2}}(x-y)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_{1-y}^{2\sqrt{1-y^2}} = \frac{4(1-y^2)-(1-2y+y^2)}{2} \\ &- 2y\sqrt{1-y^2} + y(1-y) = \frac{3}{2} + 2y - \frac{7}{2}y^2 - 2y\sqrt{1-y^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\frac{3}{2}+2y-\frac{7}{2}y^2-2y\sqrt{1-y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{3y}{2}+y^2-\frac{7y^3}{6}+\frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

c) Aflăm abscisele punctelor de intersecţie dintre cercul $x^2+y^2=2$ şi parabola $y=x^2$. Pentru aceasta, rezolvăm sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2=y \end{cases}$

Se obţine ecuaţia $x^2 + x^4 = 2$ cu soluţiile reale $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Domeniul plan limitat de cerc şi parabolă este un domeniu simplu în raport cu Oy şi este definit prin:

$$D = \{(x, y) \,|\, -1 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le \sqrt{2 - x^2}\,\}.$$

$$\text{Avem : } I_1 = \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2 - x^2 - x^4}{2}\,,\ \text{de unde rezultă că}$$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(2 - x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(2 - x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{22}{15}\,.$$

15. $I = \displaystyle\iint_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Aflăm domeniile D_1 şi D_2.

$$\text{Avem : } AB : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow y = \frac{17-x}{5},$$

$$BC : \frac{x-7}{-3} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow y = 9 - x,$$

$$AC : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = x + 1$$

$$\Rightarrow\ D_1 = \left\{(x, y)\,\Big|\, 2 \le x \le 4,\, \frac{17-x}{5} \le y \le x + 1\right\}$$

$$\text{şi } D_2 = \left\{(x, y)\,\Big|\, 4 \le x \le 7,\, \frac{17-x}{5} \le y \le 9 - x\right\}.$$

Prima integrală este:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^4\left(\int_{\frac{17-x}{5}}^{x+1} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_2^4\left[x(x+1) - \frac{x(17-x)}{5}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int_2^4 (6x^2 - 12x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(2x^3 - 6x^2\right)\Big|_2^4 = 8. \end{aligned}$$

A doua integrală este:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_4^7\left(\int_{\frac{17-x}{5}}^{9-x} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_4^7\left[x(9-x) - \frac{x(17-x)}{5}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int_4^7 (28x - 4x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(14x^2 - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_4^7 = 18. \end{aligned}$$

Se obţine $I = I_1 + I_2 = 26$.

16. a) Folosim schimbarea de variabile prin coordonate polare.

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0,1],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow\ I = \iint_{D'} \rho^3 \cos\theta \sin\theta\, e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^2\, e^{\rho^2}(\rho^2)'\,\mathrm{d}\rho \overset{\rho^2=u}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u(u-1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{iar } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ de unde rezultă că } I = \frac{1}{4}.$$

b) Folosim schimbarea de variabile prin coordonate polare generalizate.

$$\begin{cases} x &= a\rho\cos\theta \\ y &= b\rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (y - x + 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D'} (b\rho\sin\theta - a\rho\cos\theta + 2)ab\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= ab\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (b\rho^2\sin\theta - a\rho^2\cos\theta + 2\rho)\,\mathrm{d}\theta \right)\mathrm{d}\rho \\
&= ab\int_0^1 \left(-b\rho^2\cos\theta\Big|_0^{2\pi} - a\rho^2\sin\theta\Big|_0^{2\pi} + 2\rho\,\theta\Big|_0^{2\pi} \right)\mathrm{d}\rho \\
&= ab\int_0^1 4\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi ab\,\rho^2\Big|_0^1 = 2\pi ab.
\end{aligned}$$

17. $\text{aria}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$. Folosim schimbarea de variabile prin coordonate polare generalizate.

$$\begin{cases} x &= a\rho\cos\theta \\ y &= b\rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \text{aria}(D) = ab\iint_{D'} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ab\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi ab.$$

18. $V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, $f(x,y) = xy + 1$, $x, y \in D$, $D \subset xOy$. Domeniul D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy.

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ y &= 8 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2,$$

iar pentru $x \in [-2, 2]$, $x^2 \leq 8 - x^2$.
Rezultă $D = \left\{(x, y)\middle| -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - x^2\right\}$.

$$I_1 = \int_{x^2}^{8-x^2} (xy + 1)\,\mathrm{d}y = \left(x \cdot \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_{x^2}^{8-x^2} = \frac{x(64 - 16x^2)}{2} + 8 - 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_{-2}^{2} (32x - 8x^3)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} (8 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}.$$

19. Placa fiind omogenă (densitate constantă), folosim formulele:

$$x_G = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,,\; y_G = \frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,.$$

Calculăm integralele:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,,$$

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} x\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin x)'\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1\,,$$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} y\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2x}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\,.$$

Am obţinut: $G\left(\frac{\pi}{2} - 1,\, \frac{\pi}{8}\right)$.

20. Avem : $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$Q(x, y) = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y\left(y + \frac{1}{x^2 + y^2}\right),$$

de unde rezultă că $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = y^2$. Aplicăm formula lui Green şi obţinem:

$$I = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \mathrm{d}x \cdot \int_0^2 y^2\,\mathrm{d}y = x\Big|_1^4 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 8\,.$$

3.7 Exerciţii propuse

1. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b) } \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \qquad \text{c) } \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d) } \int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e) } \int \frac{1}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x$$

2. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b) } \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

3. Să se calculeze următoarele integrale cu parametru:

$$\text{a) } I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x,\ t>0$$

$$\text{b) } I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(t\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x,\ t\in(0,1)$$

4. Să se calculeze următoarele integrale, cu ajutorul funcţiilor speciale ale lui Euler:

$$\text{a) } \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\cos^5 x\,\mathrm{d}x \qquad \text{d) } \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

5. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa întâi:

$$\text{a) } \int_{(C)} x\,\mathrm{d}s,\ (C): x=t, y=t^2, t\in[0,1]$$

$$\text{b) } \int_{(C)} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s,\ (C): \begin{cases} x &= 4\cos t \\ y &= 4\sin t \\ z &= 3t \end{cases},\ t\in[0,1]$$

$$\text{c) } \int_{(C)} (x+z)\,\mathrm{d}s,\ (C): x=t^2\cos t, y=t^2\sin t, z=2t, t\in[0,\pi]$$

6. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa a doua:

$$\text{a) } \int_{(C)} (x+3y)\,\mathrm{d}x + 4y\,\mathrm{d}y \quad \text{unde } (C): x=t^2+1, y=t^3-t,\ t\in[0,2]$$

b) $\displaystyle\int_{(C)} (xy - y)\,dx + (xy + x)\,dy,\ (C) : \begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]$

c) $\displaystyle\int_{(C)} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ unde $(C) : x = \dfrac{r}{2}(1+\cos t),\ y = \dfrac{r}{2}(1-\cos t),$
$z = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$

7. Arătând mai întâi că sunt independente de drum, să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_{(0,4)}^{(3,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$

b) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,5)} yz(2x + y + z)\,\mathrm{d}x + xz(x + 2y + z)\,\mathrm{d}y + xy(x + y + 2z)\,\mathrm{d}z$

8. Să se calculeze lungimea curbei (C) definită prin ecuaţiile $\begin{cases} x &= ae^{-t}\cos t \\ y &= ae^{-t}\sin t \\ z &= be^{-t} \end{cases},\ t \in [0, \infty),\ a, b > 0.$

9. Să se calculeze masa firului material care are forma arcului de ecuaţii $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt,\ a, b > 0,\ t \in [0, 2\pi],\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

10. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\iint_D (xy + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = [1, 2] \times [0, 1]$

b) $\displaystyle\iint_D \sin(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

11. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

b) $\displaystyle\iint_D (x - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 2y\}$

12. Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este mărginit de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x + 3$

b) $\displaystyle\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, unde D este limitat de $y^2 = x$ şi $x + y = 2$

13. Să se calculeze integrala $\iint_D \sqrt{xy - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \mathrm{Int}(OAB)$, $A(10,1)$, $B(1,1)$.

14. Să se calculeze integralele următoare prin schimbare de variabile:

    a) $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

    b) $\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

    c) $\iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

15. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele $y = x$ şi $y = x^2$.

16. Să se calculeze aria domeniului limitat de dreptele de ecuaţii $x + y = 1$, $y = 2x + 1$, $x = 2y + 1$.

17. Să se determine masa plăcii materiale plane având forma domeniului $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0\right\}$ şi densitatea $\rho(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

18. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate pentru placa omogenă cu forma domeniului $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 4x^2 \leq y \leq 4\}$.

19. Să se calculeze următoarele integrale folosind formula lui Green sau formula de calcul a integralei curbilinii în raport cu coordonatele:

a) $\int_{(C)} -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$ unde (C) este cercul unitate $x^2 + y^2 = 1$

b) $\int_{(C)} e^x(1+\cos x)\,\mathrm{d}x + e^y(1+\sin x)\,\mathrm{d}y$ unde (C) este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

c) $\int_{(C)} (xy - y)\,\mathrm{d}x + (xy + x)\,\mathrm{d}y$ unde (C) este frontiera domeniului plan $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Bibliografie

[1] Chiriţă, Stan, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

[2] Crăciun, Ion, *Analiză matematică. Calcul Integral.* Editura PIM, Iaşi, 2007

[3] Demidovici, B., *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956

[4] Flondor, P., Donciu, N., *Algebră şi analiză matematică. Culegere de probleme.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

[5] Flondor, P., Stănăşilă, O., *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, ALL, 1998

[6] Georgescu, Paul, *Elemente de calcul integral*, MatrixRom, Iaşi, 2015

[7] Mureşan, Viorica, *Analiză matematică*, Mega, Cluj-Napoca, 2008

[8] Potra, G. Teodor, *Calcul diferenţial*, Editura Transilvania Press, 2005

[9] Potra, G. Teodor, *Calcul integral. Teoria matematică a câmpului. Cuadraturi şi cubaturi.* Editura Transilvania Press, 2006

[10] Procopiuc, Gh., Ispas, M., *Probleme de analiză matematică*, Iaşi, 2002

[11] Roşculeţ, Marcel N., *Manual de Analiză matematică*, vol. 1, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964

[12] Sireţchi, Gheorghe, *Calcul diferenţial şi integral*, vol. 1, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985