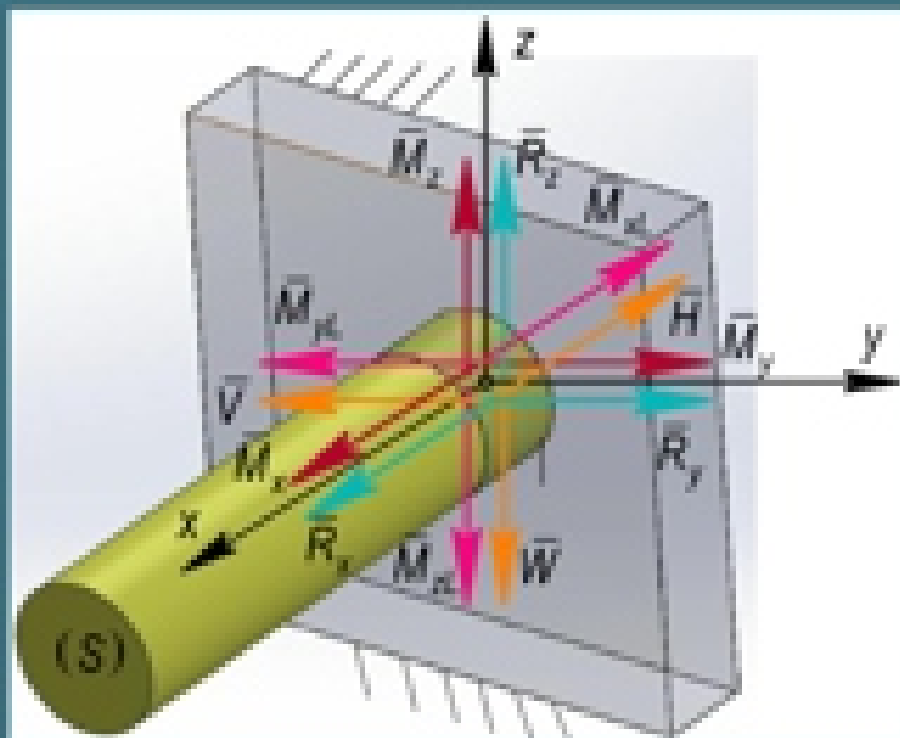


Claudiu SCHONSTEIN

Gabriel FODOR

MECANICĂ TEORETICĂ

Statică și Cinematică



UTPRESS

Cluj-Napoca, 2022

ISBN 978-606-737-606-7

Claudiu SCHONSTEIN

Gabriel FODOR

Mecanică teoretică

Statică și Cinematică



UTPRESS
Cluj - Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-606-7



Editura UTPRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
<http://biblioteca.utcluj.ro/editura>

Director: ing. Dan Colțea

Recenzia: Conf.dr.ing. Felicia Cristea
Conf.dr.ing. Bogdan Gherman

Pregătire format electronic: Gabriela Groza

Copyright © 2022 Editura UTPRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii UTPRESS.

ISBN 978-606-737-606-7

Bun de tipar: 06.12.2022

Prefață

Mecanica teoretică este una dintre disciplinele fundamentale, care stă la baza formării unui inginer mecanic. Este o știință aplicativă care studiază mișcarea și echilibrul corpurilor sub acțiunea sistemelor de forțe ce acționează asupra lor, întrucât tot ceea ce ne înconjoară este supus acțiunii acestor elemente.

În facultățile cu profil mecanic, disciplina se studiază pe parcursul a trei mari părți - *Statică, Cinematică și Dinamică*. În prezentarea acestei lucrări, se urmărește tratarea unor elemente de bază, care să permită aprofundarea unei părți din mecanica teoretică, disciplină fundamentală în formarea inginerescă.

Lucrarea tratează didactic și lapidar două dintre cele trei părți – Statică și Cinematică. Astfel, în Statică sunt tratate elemente și noțiuni privind reducerea sistemelor de forțe, condițiile de echilibru pentru punct, corp și sisteme de corpuri. De asemenea conține noțiuni legate de distribuția maselor.

În Cinematică sunt tratate elementele fundamentale, precum viteza, accelerația, dar și legile de variație ale acestora pentru cele mai uzuale tipuri de mișcări întâlnite: mișcare de translație, mișcare de rotație în jurul unei axe fixe, mișcare de rototranslație, mișcarea plan-paralelă și mișcarea sferică.

Lucrarea se dorește a fi un îndrumător pentru curs și seminar, întrucât conține pe lângă elementele teoretice din statică și cinematică, și exemple de aplicații, în conexiune cu noțiunile tratate în fiecare capitol. Pentru aprofundarea materialului din fiecare capitol, unele dintre problemele prezentate sunt rezolvate integral, la altele sunt date doar indicații de rezolvare, având scopul de a ușura pe de o parte înțelegerea noțiunilor elementare, iar pe de altă parte însușirea cunoștințelor de mecanică utilizând în acest scop aparatul matematic accesibil studenților din anii întâi și doi de studiu, și nu numai.

Cartea se adresează în special studenților de la facultățile cu profil mecanic, dar poate fi utilizată de toți cei ce doresc să-și însușească noțiuni legate de elementele de bază ale „științei mișcării și echilibrului” .

Autorii

Capitolul 1 Reducerea sistemelor de forțe

1.1. Considerații teoretice

Forța, prin definiție, este o mărime fizică vectorială, ce măsoară interacțiunea mecanică dintre punctele materiale. Ca și clasificare, în funcție de tipul lor, forțele pot fi: **exterioare** (forțe efectiv aplicate corpului); **interioare** (forțe aparținând aceluiași sistem care interacționează reciproc); **de legătură** (forțe care înlocuiesc legăturile geometrice impuse unui sistem material). O altă clasificare a forțelor, poate fi realizată, în funcție de modul în care acționează, adică: **forțe concentrate** (acționează în diferite puncte ale sistemului); forțe distribuite (forțe ce revin unei porțiuni elementare liniare (dl), de suprafață (dA) sau de volum (dV).

Într-un sistem de referință cartezian, (vezi Figura 1.1), orice forță are componente pe toate cele trei axe.

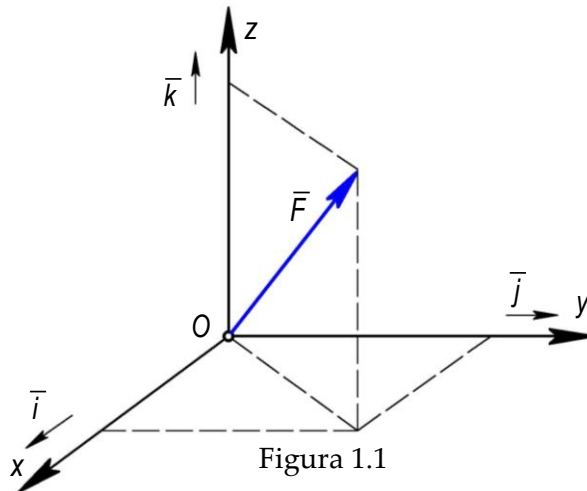


Figura 1.1

Astfel forța poate fi definită atât vectorial prin (1.1), cât și matricial prin (1.2), astfel:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}; \quad (1.1)$$

$$[\vec{F}]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T \quad (1.2)$$

Dacă se cunosc componentele forței pe cele trei axe, modulul forței se poate calcula:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad (1.3)$$

Orientarea oricărui vector este dată de versorul acestuia, astfel versorul forței F este:

$$\frac{\vec{F}}{F} = \left(\frac{F_x}{F}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{F_y}{F}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{F_z}{F}\right) \cdot \vec{k}; \quad (1.4)$$

În relația (1.4), rapoartele se numesc cosinusuri directoare:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (1.5)$$

Moment polar

În Figura 1.2 se consideră o forță \vec{F} , care acționează în punctul A asupra unui solid rigid (SR).

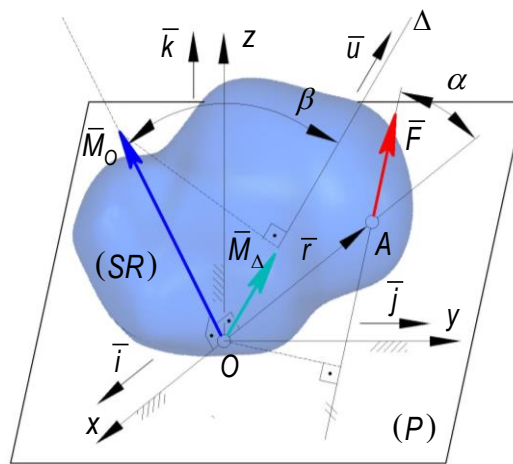


Figura 1.2

Se numește *moment al forței \vec{F}* în raport cu punctul O sau *momentul polar al forței* față de O un vector cu punctul de aplicație în O egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței în raport cu O și forța dată, adică:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.6)$$

Modulul momentului polar este:

$$|\vec{M}_O \cdot (\vec{F})| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot d, \quad (1.7)$$

adică modulul momentului polar este egal cu produsul modulul forței și brațul forței (distanța de la punctul O la suportul forței).

Astfel, momentul polar este un vector legat de polul O și este situat perpendicular pe planul definit de vectorii \vec{F} și \vec{r} în sensul în care \vec{r} , \vec{F} și \vec{M}_O formează un triedru drept

orientat. Sensul este definit de sensul de rotație al vectorului forță \vec{F} (sau regula burghiului) având drept axă suportul momentului.

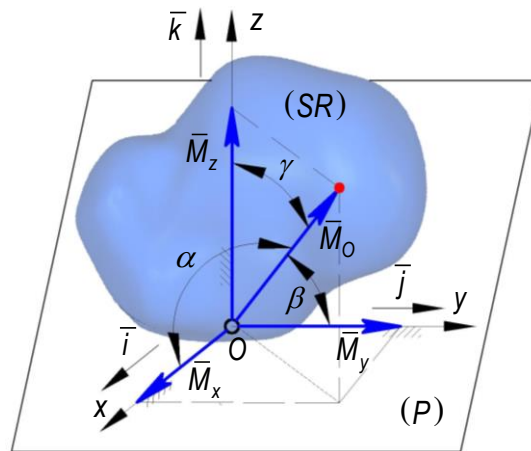


Figura 1.3.

Alegând un sistem de referință Oxyz legat de corp cu originea în polul O, vezi Figura 1.3 și notând cu M_x, M_y, M_z , componentele carteziene ale momentului polar, cu x, y, z coordonatele punctului de aplicație al forței și cu F_x, F_y, F_z componentele carteziene ale forței în acest reper, relația (1.6) poate fi scrisă dezvoltat:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}, \quad (1.8)$$

de unde, prin identificarea coeficienților versorilor deducem proiecțiile momentului polar:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x \quad (1.9)$$

și în continuare valoarea lui:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (1.10)$$

Orientarea vectorului moment polar este dată de cosinusurile directoare:

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos \beta = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos \gamma = \frac{M_z}{M_O} \quad (1.11)$$

Moment axial

În aceeași Figură 1.2 se consideră o axă (Δ) care trece prin polul O și versorul acestei axe \bar{u} . Se numește *moment al forței \bar{F} în raport cu axa (Δ) sau moment axial al forței \bar{F} față de axa (Δ)* proiecția pe axă a momentului forței calculat în raport cu un punct oarecare de pe axă. În cazul de față:

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = |\bar{M}_O(\bar{F})| \cos \beta \quad (1.12)$$

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = \bar{M}_O \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = (\bar{r}, \bar{F}, \bar{u}) \quad (1.13)$$

unde $\Delta = \{x; y; z\}$ a cărei orientare este dată de versorul $\bar{u} = \{\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}\}$.

Așadar, momentul unei forțe în raport cu o axă se poate exprima prin produsul mixt dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței, vectorul forță și versorul axei.

Observații:

- Nu contează poziția polului pe axă;
- Expresiile lui M_x, M_y, M_z , din relațiile (1.9) sunt momente axiale;
- Momentul axial este nul dacă forța este coplanară cu axa.

Cuplu de forțe

Două forțe, egale în modul, având sensuri opuse și care acționează pe suporturi paralele diferite formează un *cuplu de forțe* (vezi Figura 1.4).

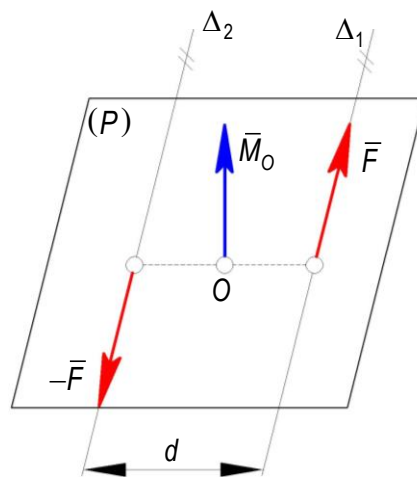


Figura. 1.4

Cuplul de forțe se reprezintă printr-un vector \bar{M}_O , numit *momentul cuplului*, plasat pe normala la planul forțelor (planul cuplului) și dirijat în sensul de înaintare al șurubului drept rotit în sensul în care forțele tind să rotească rigidul, având modulul egal cu produsul dintre modulul uneia dintre forțe și brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor):

$$M_O = F \cdot d \quad (1.14)$$

În Figura 1.5 un cuplu de forțe \bar{F} și $-\bar{F}$ acționează în punctele A, respectiv B asupra rigidului (C).

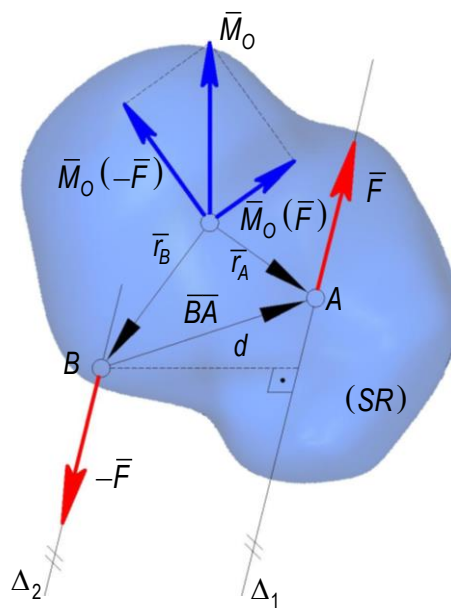


Figura 1.5

Se calculează suma momentelor celor două forțe în raport cu un punct O al corpului:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O(\bar{F}) + \bar{M}_O(-\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times (-\bar{F}) = (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F} = \bar{BA} \times \bar{F} \quad (1.15)$$

Înseamnă că suma momentelor celor două forțe, adică momentul este normal pe planul cuplului și are modulul:

$$|\bar{M}_O| = BA \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d \quad (1.16)$$

Observație: Momentul unui cuplu este nu depinde de alegerea polului O, adică este un vector liber, perpendicular pe planul de acțiune al cuplului, sensul fiind dat de sensul de rotație al cuplului de forțe, iar modulul dat de expresia (1.10).

1.2 Reducerea unui sistem de forțe aplicate unui rigid

În Figura 1.6. a) se consideră un solid rigid (C) supus acțiunii unui sistem de “n” forțe $\vec{F}_i (i=1 \rightarrow n)$ aplicate în punctele $A_i (i=1 \rightarrow n)$, poziționate față de un sistem de referință cartezian Oxyz prin vectorii de poziție $\vec{r}_i (i=1 \rightarrow n)$.

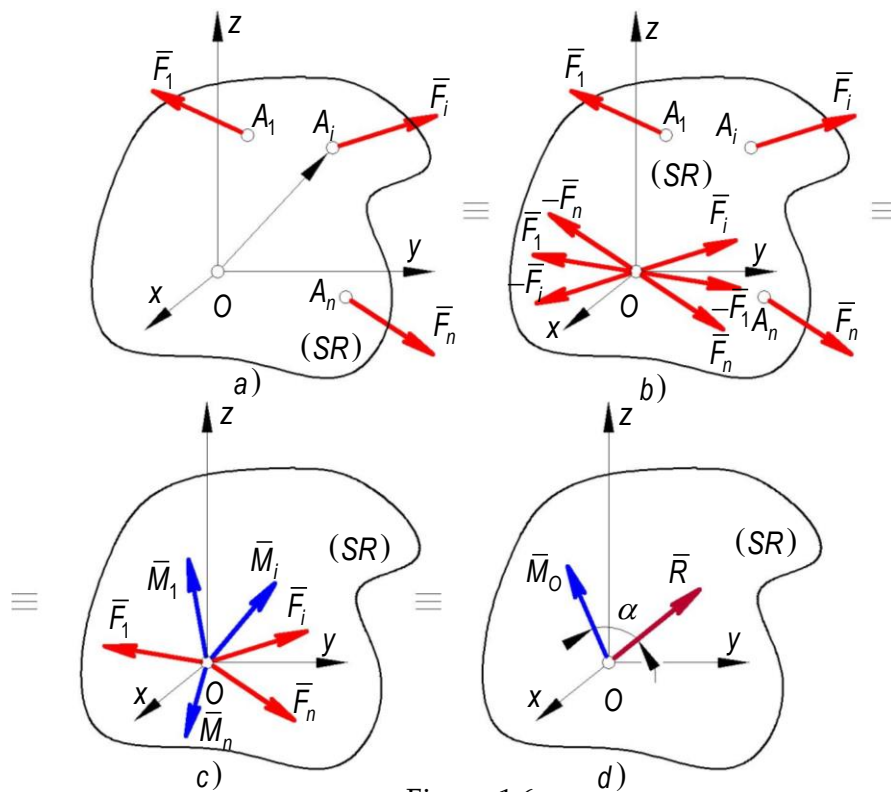


Figura 1.6.

Prin *reducerea sistemului de forțe* se înțelege înlocuirea lui cu cel mai simplu sistem posibil mecanic echivalent cu cel inițial. În acest scop, se plasează într-un punct O oarecare al corpului perechile de forțe \vec{F}_i și $-\vec{F}_i (i=1 \rightarrow n)$, astfel, sistemul obținut (vezi Figura 1.6b) este echivalent cu cel inițial. Cuplurile de forțe \vec{F}_i și $-\vec{F}_i (i=1 \rightarrow n)$ aplicate în A_i și respectiv O se înlocuiesc cu momentele lor:

$$\vec{M}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1.17)$$

Sistemul de $3n$ forțe din Figura 1.6b se transformă într-un sistem de $2n$ vectori, n vectori forță aplicați în O și n vectori moment aplicați tot în O (Fig. 1.6c). Cele două tipuri de vectori concurenți se înlocuiesc cu vectorii rezultanți corespunzători: *vectorul rezultant (forța rezultantă)* egal cu suma vectorială a celor n forțe și *momentul rezultant* egal cu suma vectorială a celor n momente (Fig. 1.6d):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (1.18)$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad (1.19)$$

Deoarece au fost aplicate operațiile elementare de echivalență sistemele de forțe din Figurile 1.6a-1.6d sunt echivalente între ele. Astfel sistemul inițial de forțe s-a transformat în sistemul echivalent din Figura 1.6d format din două elemente vectoriale, vectorul rezultat și momentul rezultat, care determină *torsorul de reducere* $\bar{\tau}_O$ al sistemului de forțe în punctul O:

$$\bar{\tau}_O(\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n) \equiv \left\{ \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i; \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \right\} \quad (1.20)$$

1.3 Calculul elementelor torsorului de reducere

Se consideră în Figura 1.7 un solid rigid, iar în punctul O al acestuia un sistem de referință Oxyz, legat de corp. Asupra corpului acționează în punctele A_i de coordonate x_i, y_i, z_i , un sistem de forțe F_i , având proiecțiile F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} . Cunoscând vectorii de poziție \bar{r}_i ai fiecărei forțe F_i , momentele axiale sunt M_x, M_y, M_z . În aceste condiții, forma analitică a elementelor torsorului de reducere în raport cu polul O, se determină pe baza relațiilor:

$$\bar{R} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} + R_z \cdot \bar{k} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot \bar{i} + F_{iy} \cdot \bar{j} + F_{iz} \cdot \bar{k}) \quad (1.21)$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}, \quad (1.22)$$

unde:

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}); M_y = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}); M_z = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \quad (1.23)$$

Modulele celor doi vectori sunt date de relațiile:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.24)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (1.25)$$

Orientarea vectorilor rezultanți se obține prin coșinusurile directoare:

$$\cos \alpha_1 = \frac{R_x}{R}; \cos \beta_1 = \frac{R_y}{R}; \cos \gamma_1 = \frac{R_z}{R} \quad (1.26)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{M_x}{M}; \cos \beta_2 = \frac{M_y}{M}; \cos \gamma_2 = \frac{M_z}{M} \quad (1.27)$$

unde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sunt unghiurile pe care le face vectorul rezultant \bar{R} cu axele sistemului de referință, iar $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sunt unghiurile pe care le face momentul rezultant M_O cu axele aceluiași sistem.

Torsor minimal

Dacă în urma reducerii unui sistem de forțe într-un punct al unui rigid (vezi Fig. 1.7), se obține un torsor compus din vectorul rezultant \bar{R} și vectorul moment rezultant \bar{M}_O care închid între direcțiile lor un unghi α , iar dacă unghiul α ia valorile particulare: $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$, torsorul sistemului de forțe se numește *torsor minimal*.

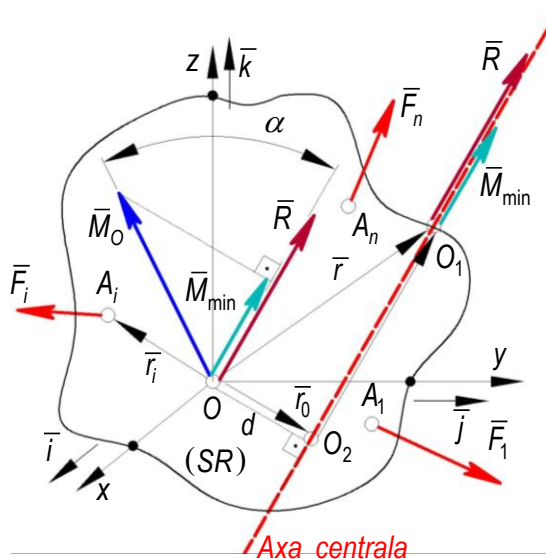


Figura 1.7.

Locul geometric al punctelor în raport cu care sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal este o dreaptă numită *axa centrală* a sistemului de forțe.

În continuare, se vor determina ecuațiile vectoriale și cele scalare ale axei centrale, plecând de la premisa că se cunosc elementele torsorului de reducere dat de forțele $\bar{F}_i, i = 1 \rightarrow n$, ce acționează asupra solidului rigid, din Figura 1.7.

Determinarea expresiei vectoriale a axei centrale

Proiectând vectorul \bar{M}_O pe direcția vectorului rezultat \bar{R} , se obține momentul minimal \bar{M}_{\min} , adică:

$$M_{\min} = M_O \cdot \cos \alpha \quad (1.28)$$

Dacă se cunosc componentele carteziene ale elementelor tursorului de reducere în O, momentul minim se determină cu expresia:

$$M_{\min} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \quad (1.29)$$

Se consideră, în conformitate cu Figura 1.7, un punct O_1 , ce aparține axei centrale, a cărei poziție este încă necunoscută. Torsorul de reducere în punctul O_1 pentru sistemul de forțe este $\bar{r}_{O_1} = (\bar{R}, \bar{M}_{O_1})$. Conform legii de variație a momentului rezultat la schimbarea polului de reducere, rezultă:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{OO_1} \times \bar{R} \quad (1.30)$$

Dar în conformitate cu Figura 1.7:

$$\overline{OO_1} = -\overline{O_1O} = \bar{r} \quad (1.31)$$

Astfel ținând seama de (1.31), expresia (1.30) devine:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O - \bar{r} \times \bar{R} \quad (1.32)$$

Expresia (1.32) se înmulțește vectorial la stânga cu \bar{R} , astfel că rezultă:

$$\bar{R} \times \bar{M}_{O_1} = \bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{R} \times (\bar{r} \times \bar{R}) \quad (1.33)$$

Dar, ținând seama că vectorii \bar{R} și \bar{M}_{O_1} sunt colineari, expresia anterioară devine, o ecuație vectorială în \bar{r} :

$$\bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{R} \times (\bar{r} \times \bar{R}) = 0 \quad (1.34)$$

Utilizând formula lui Gibbs, expresia (1.34) se scrie:

$$\bar{R} \times \bar{M}_O - [(\bar{R} \cdot \bar{R}) \cdot \bar{r} - (\bar{R} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{R}] = 0 \quad (1.35)$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{R}^2 \cdot \bar{r} + (\bar{R} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{R} = 0 \quad (1.36)$$

Expresia (1.36) este o ecuație vectorială, de gradul întâi în r , care arată că locul geometric al extremității vectorului de poziție ce satisface condiția de torsor minimal este pe o dreaptă.

Fie un punct particular O_2 , al locului geometric căutat, având vectorul de poziție \bar{r}_O , ce satisface condiția $\bar{R} \cdot \bar{r}_O = 0$, adică cei doi vectori sunt perpendiculari ($\bar{R} \perp \bar{r}_O$). Substituind \bar{r} cu \bar{r}_O în (1.36), se obține :

$$\bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{R}^2 \cdot \bar{r}_O = 0 \quad (1.37)$$

Din (1.37) se deduce că:

$$\bar{r}_O = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{\bar{R}^2} \quad (1.38)$$

Expresia anterior obținută este o soluție particulară a ecuației vectoriale (1.37).

Făcând diferența între (1.36) și (1.37), rezultă:

$$-\bar{R}^2 \cdot \bar{r} + \bar{R}^2 \cdot \bar{r}_O + (\bar{R} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{R} = 0 \quad (1.39)$$

Expresia (1.39) se rescrie conform cu:

$$\bar{R}^2 \cdot (\bar{r} - \bar{r}_O) = (\bar{R} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{R} \quad (1.40)$$

Sau:

$$\bar{r} - \bar{r}_O = \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}}{\bar{R}^2} \cdot \bar{R} \quad (1.41)$$

Expresia anterioară se pune sub forma: $\bar{r} = \bar{r}_O + \lambda \cdot \bar{R}$ (1.42)

Relația (1.42), arată că O_1O_2 determină o axă ce trece prin O_2 și este paralelă cu \bar{R} , adică este **axă centrală**.

Observație: Distanța de la O la axa centrală este:

$$d = |\bar{r}_O| = \frac{|\bar{R} \times \bar{M}_O|}{\bar{R}^2} = \frac{R \cdot M_O \cdot \sin \alpha}{R^2} = \frac{M_O \cdot \sin \alpha}{R} \quad (1.43)$$

Determinarea analitică a ecuației axei centrale

Pentru stabilirea expresiei analitice a axei centrale, se utilizează expresia (1.32), în care \bar{M}_{O_1} coliniar cu \bar{R} , se înlocuiește cu: $\bar{M}_{O_1} = \lambda \cdot \bar{R}$. Așadar, (1.32) se rescrie sub forma:

$$\bar{M}_O - (\bar{r} \times) \bar{R} = \lambda \cdot \bar{R} \quad (1.44)$$

unde $(\bar{r} \times)$ se numește *matrice antisimetrică asociată vectorului de poziție* $\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ și

$$\text{este definită ca: } (\bar{r} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Pe baza considerentelor anterioare, expresia (1.44), se rescrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Prin identificare, se obține un sistem de trei ecuații scalare, de forma:

$$\begin{cases} M_x - y \cdot R_z + z \cdot R_y = \lambda \cdot R_x \\ M_y - z \cdot R_x + x \cdot R_z = \lambda \cdot R_y \\ M_z - x \cdot R_y + y \cdot R_x = \lambda \cdot R_z \end{cases} \quad (1.46)$$

Eliminând parametrul λ din (1.46) se obține **expresia analitică a axei centrale**:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \quad (1.47)$$

Egalând două câte două rapoartele din (18) se obține un sistem de ecuații cu trei necunoscute independente x, y, z , reprezentând coordonatele unui punct de pe axa centrală.

Observații:

1. În raport cu punctele axei centrale sistemul de forțe este echivalent cu un torsesor minimal având ca elemente vectorul rezultat și vectorul moment minim:

$$\bar{r}_O(F_i, i=1 \rightarrow n) \equiv \bar{r}_{\min} \equiv \left\{ \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i; \bar{M}_{\min} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R^2} \bar{R} \right\} \quad (1.48)$$

2. Dacă $\bar{M}_{\min} = 0$, rezultă $\bar{M}_O \cdot \bar{R} / R = 0$, adică $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, și sistemul de forțe se reduce, în raport cu punctele axei centrale, la o rezultantă unică.

3. Pentru un sistem dat de forțe, oriunde ar fi polul de reducere rămân invariante: vectorul rezultat, trinomial invariant, momentul minim și axa centrală.

Teorema lui Varignon

Dacă \bar{M}_{\min} și \bar{R} sunt elementele torsorului minimal în punctul A de pe axa centrală (vezi Figura 1.7), iar O un punct oarecare. \bar{M}_{\min} și ținând cont că $\overline{OA} = \bar{r}$, relația **Error! Reference source not found.** se poate pune sub forma:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{\min} + \bar{r} \times \bar{R} \quad (1.49)$$

ce reprezintă *forma canonică* sau *invariantă* a axei centrale.

În cazul în care $\bar{M}_{\min} = 0$, adică pentru sistemele de forțe ce se reduc la o rezultantă unică față de punctele axei centrale, din (3.44) rezultă:

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{R} \text{ sau: } \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{r} \times \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right), \quad (1.50)$$

relație ce exprimă *teorema lui Varignon* (Varignon, Pierre, 1654-1722) conform căreia: *momentul rezultat al unui sistem de forțe care respectă condiția $\bar{M}_{\min} = 0$, în raport cu un pol O, este egal cu momentul rezultantei sistemului plasată pe axa centrală, în raport cu același pol O.*

Observație: Condiția teoremei lui Varignon este respectată de sistemele de forțe concurente, coplanare și papalele.

1.4 Reducerea sistemelor de forțe coplanare

În Figura 1.8 este reprezentat un solid rigid (C) sollicitat de un sistem de forțe coplanare $\bar{F}_i (i = 1 \rightarrow n)$ în punctele $A_i (i = 1 \rightarrow n)$. Se alege un sistem de referință, astfel încât planul xOz să coincidă cu planul forțelor.

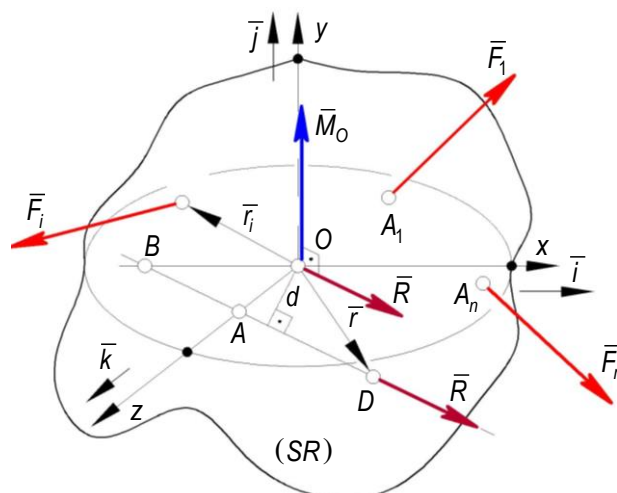


Figura 1.8
16

În raport cu punctul O sistemul de forțe coplanare se reduce la un torsor (\bar{R}, \bar{M}_O) ale cărui elemente se determină analitic cu expresiile anterior prezentate:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \neq 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \neq 0 \quad (1.51)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = 0;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{iz}) \neq 0; \quad (1.52)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = 0$$

Din (1.51) și (1.52) se deduce că vectorul rezultat este situat în planul forțelor, iar vectorul moment rezultat este perpendicular pe acest plan, iar că momentul minim este nul.

1.5 Reducerea sistemelor de forțe paralele. Centrul forțelor paralele

În Figura 1.9 este prezentat un rigid (C) sollicitat de un sistem spațial de "n" forțe paralele $\bar{F}_i (i=1 \rightarrow n)$ având versorul direcției comune \bar{u} , aplicate în punctele $A_i (i=1 \rightarrow n)$. Așadar, se poate scrie :

$$\bar{F}_i = F_i \cdot \bar{u} \quad (1.53)$$

unde F_i poate fi pozitiv sau negativ după cum forța \bar{F}_i are același sens sau sens contrar cu versorul direcției comune \bar{u} a forțelor.

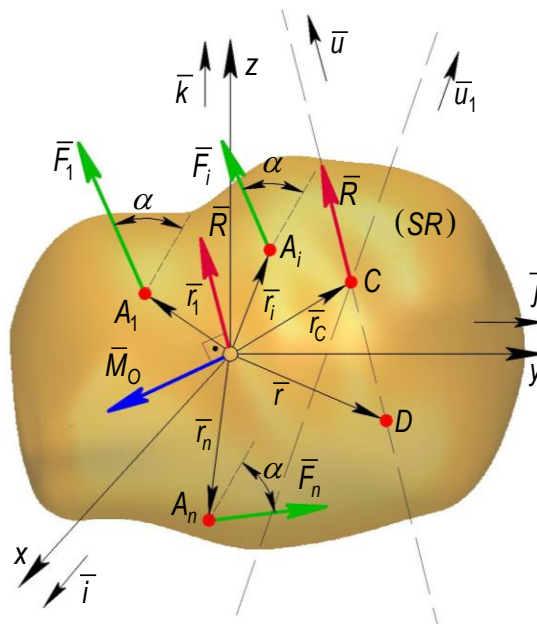


Figura 1.9

Cu ajutorul relațiilor (1.18) și (1.23) se pot determina elementele torsorului de reducere în O al sistemului de forțe paralele:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \bar{u} = \bar{u} \sum_{i=1}^n F_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u} \quad (1.54)$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times F_i \bar{u}) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i \times \bar{u} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i \right) \times \bar{u} \quad (1.55)$$

Deoarece trinomul invariant este nul:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i \right) \times \bar{u} \right] = 0 \quad (1.56)$$

momentul minim este nul:

$$M_{\min} = 0 \quad (1.57)$$

ecuația vectorială a axei centrale a sistemului de forțe paralele este:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \frac{\lambda'}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \bar{u} = \bar{r}_C + \lambda \cdot \bar{u} \quad (1.58)$$

În această situație, axa centrală a sistemului de forțe paralele are aceeași direcție cu direcția comună a forțelor și trece în permanență printr-un punct fix C, numit *centrul forțelor paralele*, al cărui vectorul de poziție este:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (1.59)$$

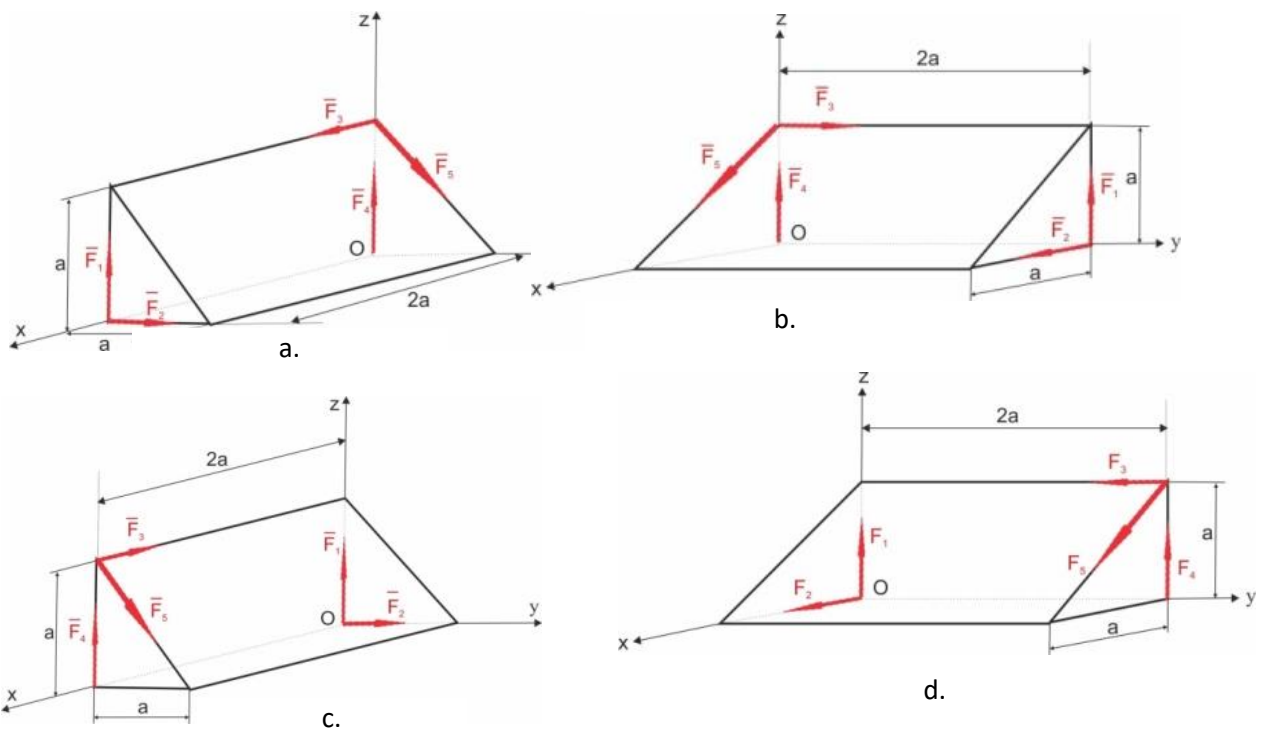
având coordonatele carteziene determinate cu:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (1.60)$$

1.6 Aplicații

P1.2 Asupra prisme rigide din figură acționează un sistem de cinci forțe. Cele cinci forțe au mărimile $F_1=F_2=F_3=F_4=P$ și $F_5=P\sqrt{2}$. Se cere să se determine:

1. Torsorul în punctul O (să se reducă sistemul de forțe în O);
2. Torsorul minimal (în raport cu punctele axei centrale);
3. Ecuațiile axei centrale.



Indicații:

1. Ținând seama de dimensiunile corpului se determină coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor;
2. Se stabilesc componentele forțelor pe axele sistemului de referință;
3. Se calculează componentele lui \vec{R} cu formulele:

$$R_x = \sum_{i=1}^5 F_{ix} ; R_y = \sum_{i=1}^5 F_{iy} ; R_z = \sum_{i=1}^5 F_{iz}$$

4. Se calculează componentele lui \vec{M}_O cu formulele:

$$M_x = \sum_{i=1}^5 (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}); M_y = \sum_{i=1}^5 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}); M_z = \sum_{i=1}^5 (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$

Observație – M_x , M_y și M_z sunt de fapt proiecțiile lui \bar{M}_O pe axele unui sistem de referință cartezian, adică momentele axiale ale forțelor (momentele în raport cu axele reperului);

- ele se pot calcula mai simplu dacă se aplică proprietatea "momentul axial e nul dacă forța e coplanară cu axa", adică dacă fie forța e paralelă cu axa, fie o intersectează momentul axial e nul.
- practic adunăm momentele axiale ale forțelor în raport cu fiecare axă

$$M_x = \sum_{i=1}^5 M_{ix} ; M_y = \sum_{i=1}^5 M_{iy} ; M_z = \sum_{i=1}^5 M_{iz}$$

5. Torsorul în O este (\bar{R}, \bar{M}_O) ;

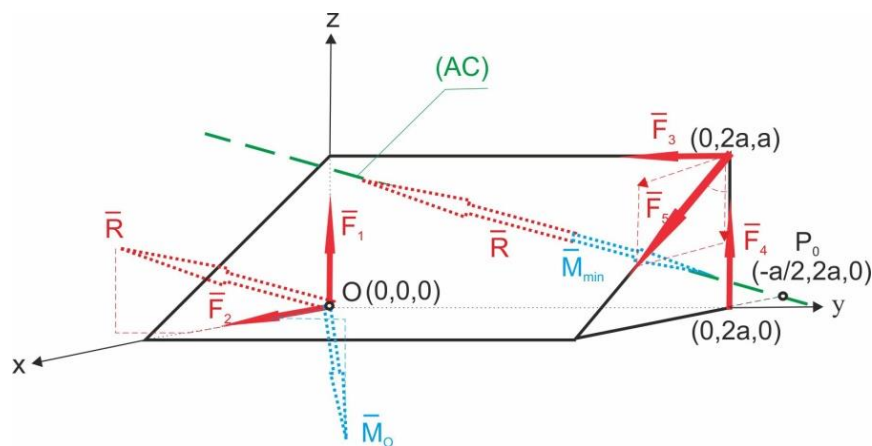
6. Torsorul minimal are ca elemente (\bar{R}, \bar{M}_{min}) , deci mai trebuie calculat numai M_{min} care este proiecția lui \bar{M}_O pe direcția lui \bar{R} ;

$$M_{min} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

7. Axa centrală reprezintă locul geometric al punctelor în care făcând reducerea se obține torsorul minimal (\bar{R}, \bar{M}_{min}) , de ecuații:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}$$

Exemplu: prisma d)



Urmărind indicațiile 1 și 2 se pot centraliza datele într-un tabel:

i	F _{ix}	F _{iy}	F _{iz}	x _i	y _i	z _i
1	0	0	P	0	0	0
2	P	0	0	0	0	0
3	0	-P	0	0	2a	a
4	0	0	P	0	2a	0
5	P	0	-P	0	2a	a

Se ține cont că:

$$F_{3x} = 0; F_{5x} = F_5 \sin \frac{\pi}{4} = P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = P; F_{5z} = -F_5 \cos \frac{\pi}{4} = -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -P.$$

Rezultă imediat $R_x = 2P, R_y = -P, R_z = P$ și modulul $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = P\sqrt{6}$.

Se determină M_x mai întâi după indicația 4, adică:

$$M_x = 0 \cdot P - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 2a \cdot 0 - a \cdot (-P) + 2a \cdot P - 0 \cdot 0 + 2a \cdot (-P) - a \cdot 0 = aP$$

Sau mai rapid dacă se ia în considerare observația:

$$M_x = a \cdot F_3 + 2a \cdot F_4 - 2a \cdot F_{5y} = aP.$$

Câteodată e mai comod să se considere componentele unei forțe și să se calculeze momentul axial al fiecărei componente dacă brațul forței nu e evident!

Pentru forța F_5 , rezulta: $M_y = a \cdot F_{5x} = aP$ și $M_z = -2a \cdot F_{5x} = -2aP$.

Modulul se stabilește cu: $M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = aP\sqrt{6}$.

Se pot calcula apoi și cosinușii directori ai celor doi vectori \bar{R}, \bar{M}_O .

Se calculează utilizând indicația 6:

$$M_{min} = \frac{aP \cdot 2P + aP \cdot P + (-2aP) \cdot P}{P\sqrt{6}} = -aP/\sqrt{6},$$

prin urmare proiecția lui \bar{M}_O pe direcția lui \bar{R} are sens contrar lui \bar{R} .

Indicația 7 dă ecuațiile axei centrale ca intersecție a două plane

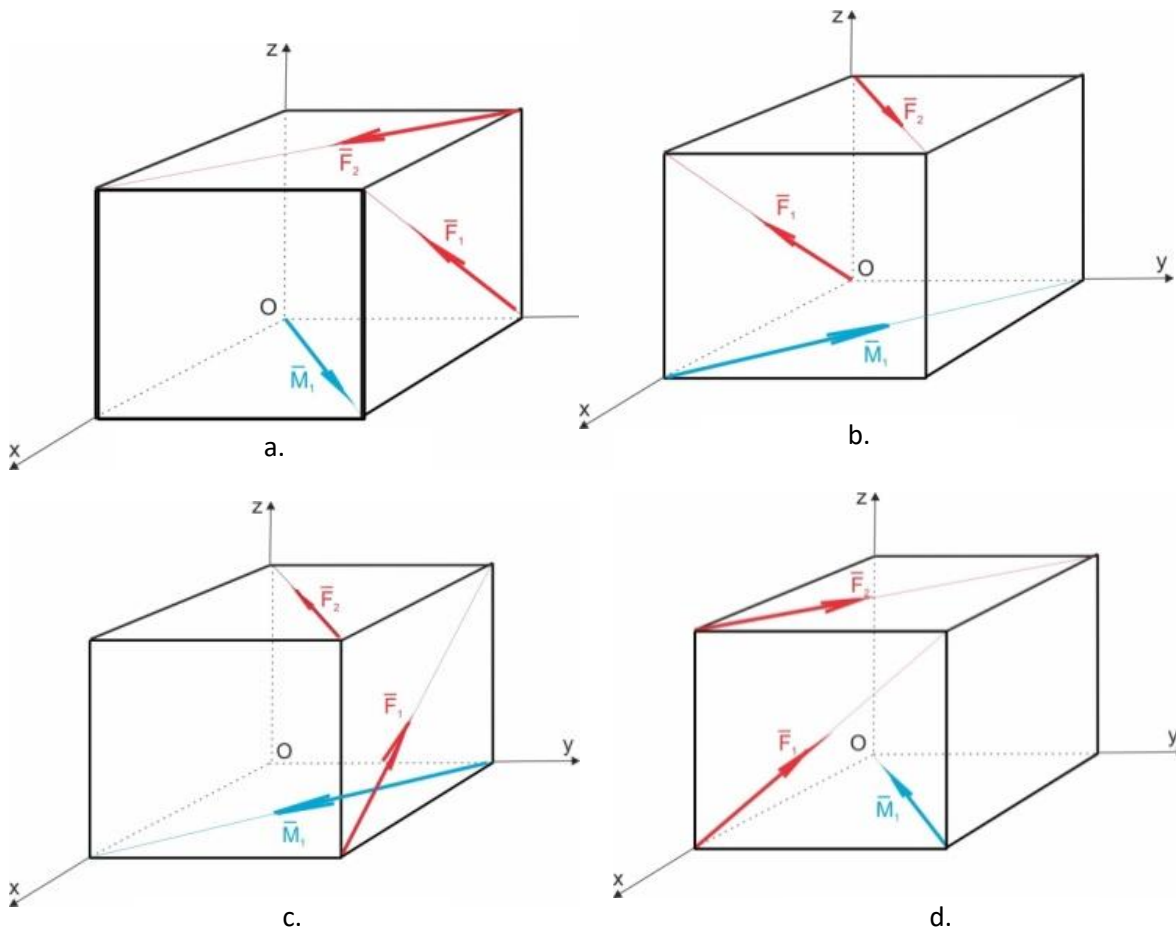
$$\frac{aP - yP + z(-P)}{2P} = \frac{aP - z2P + xP}{-P} = \frac{-2aP - x(-P) + y2P}{P}.$$

După simplificarea fiecărui raport, luând rapoartele 1 cu 2 și 2 cu 3 găsim ecuațiile a două

plane a căror intersecție e chiar axa centrală (AC): $\begin{cases} 2x + 2y - 2z - 3a = 0 \\ -2x + y + 5z - 3a = 0 \end{cases}$

Punctul P_0 de intersecție al (AC) cu planul xOy se poate obține punând $z=0$ în ecuațiile (AC) $\begin{cases} 2x_0 + 2y_0 - 3a = 0 \\ -2x_0 + y_0 - 3a = 0 \end{cases}$ cu soluția $y_0=2a$ $x_0=-a/2$ rezultă $P_0(-a/2, 2a, 0)$.

P1.2. Se consideră un cub de latură a asupra căruia acționează forțele $F_1=F_2=P\sqrt{2}$ și un moment $M_1=2aP\sqrt{2}$ orientate conform figurii. Să se reducă sistemul în raport cu punctul O , să se determine apoi momentul minim și ecuațiile axei centrale.

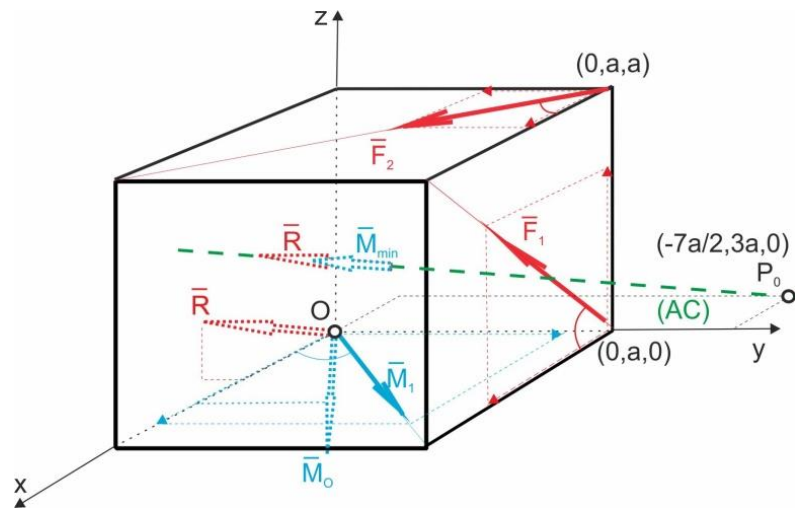


Indicații:

1. Se utilizează indicațiile de la **P1.1**;
2. Dacă asupra corpului acționează pe lângă sistemul de n forțe și un sistem de m momente, acestea intervin în calculul momentului rezultat \bar{M}_O astfel:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j .$$

Exemplu: cubul din Fig. a)



Se determină elementele din tabel:

i	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	x_i	y_i	z_i
1	P	0	P	0	a	0
2	P	-P	0	0	a	a

Se ține cont că:

$$F_{1x} = F_1 \cos \pi/4 ; F_{1z} = F_1 \sin \pi/4$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \pi/4 ; F_{2y} = -F_2 \sin \pi/4$$

Rezultă imediat componentele lui \bar{R} : $R_x = 2P$; $R_y = -P$; $R_z = P$

și modulul: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = P\sqrt{6}$.

Proiecțiile lui \bar{M}_1 se determină:

$$M_{1x} = M_1 \cos \frac{\pi}{4} = 2aP\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2aP ;$$

$$M_{1y} = M_1 \sin \pi/4 = 2aP\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2aP ; M_{1z} = 0 .$$

Componentele lui \bar{M}_0 se pot determina mai simplu conform cu:

$$M_x = a \cdot F_{1z} + a \cdot F_{2y} + M_{1x} = aP + aP + 2aP = 4aP$$

$$M_y = a \cdot F_{2x} + M_{1y} = aP + 2aP = 3aP$$

$$M_z = -aF_{1x} - aF_{2x} = -aP - aP = -2aP$$

și modulul: $M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = aP\sqrt{29}$.

Conform cu indicația 6 de la **P1** rezultă:

$$M_{min} = \frac{4aP \cdot 2P - 3aP \cdot P + (-2aP) \cdot P}{P\sqrt{6}} = 3aP/\sqrt{6}$$

ceea ce arată că proiecția lui \bar{M}_O pe direcția lui \bar{R} are sensul lui \bar{R} .

Indicația 7 de la **P1** conduce la ecuațiile axei centrale:

$$\frac{4aP - yP + z(-P)}{2P} = \frac{3aP - z2P + xP}{-P} = \frac{-2aP - x(-P) + y2P}{P},$$

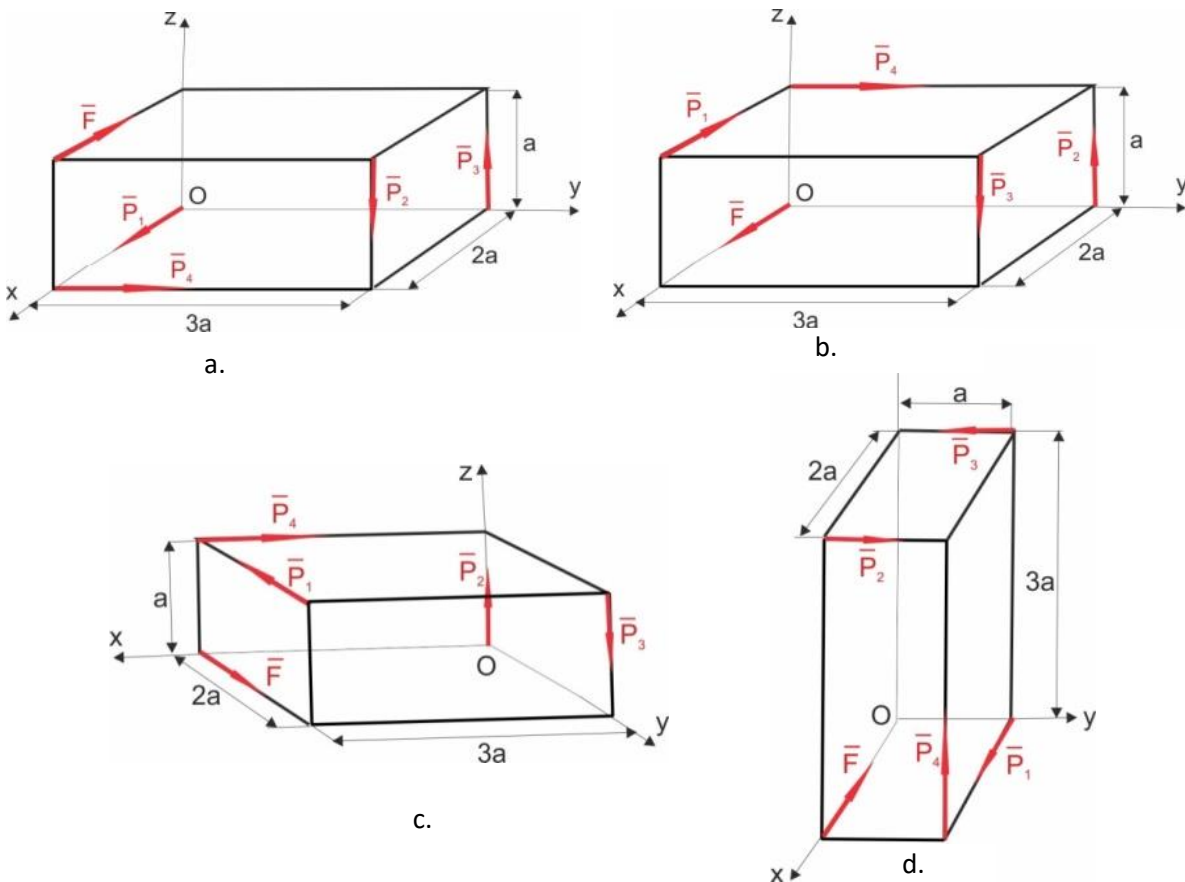
După simplificarea fiecărui raport, luând rapoartele 1 cu 2 și 2 cu 3 găsim ecuațiile axei

centrale sub forma: (AC) $\begin{cases} 2x + 2y - 2z + a = 0 \\ 2x + 5y + z - 8a = 0 \end{cases}$

Punctul P_0 de intersecție al (AC) cu planul xOy se poate obține punând $z=0$ în

ecuațiile (AC) $\begin{cases} 2x_0 + 2y_0 + a = 0 \\ 2x_0 + 5y_0 - 8a = 0 \end{cases}$ cu soluția $y_0=3a$ $x_0=-7a/2$ rezultă $P_0(-7a/2, 3a, 0)$.

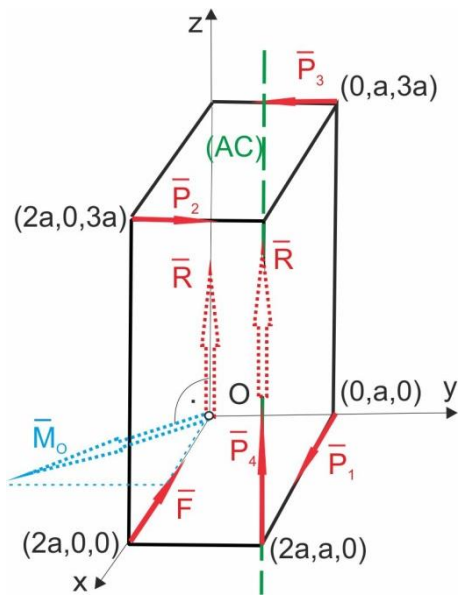
P1.3. Asupra unui paralelipiped dreptunghic, cu muchiile $2a$, $3a$ și a acționează forțele din figură. Știind că $P_1=P_4=2P$, $P_2=P_3=P$ să se determine forța F astfel încât sistemul de forțe să se reducă la o rezultantă unică și să se găsească suportul acesteia.



Indicații:

1. Sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică când $(\bar{R}, \bar{M}_{min} = 0)$. Avem de-a face cu un torsesor și mai particular decât torsesorul minimal (\bar{R}, \bar{M}_{min}) având ca suport tot axa centrală (AC) ;
2. Condiția de rezultantă unică se obține anulând numărătorului lui M_{min} dat de indicația 6 de la P1 $M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = 0$;
3. Înainte de a pune condiția trebuie calculate componentele vectorilor \bar{R}, \bar{M}_O ;
4. Din condiție va rezulta mărimea forței F;
5. Se recalculează componentele vectorilor \bar{R}, \bar{M}_O ;
6. Se determină în final ecuațiile axei centrale (AC).

Exemplu: se considera cazul d)



Se observă că toate forțele sunt orientate după muchii paralelipipedului și se poate întocmi tabelul în care se introduc pe ultima linie componentele forței necunoscute și coordonatele punctului ei de aplicație

i	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	x_i	y_i	z_i
1	2P	0	0	0	a	0
2	0	P	0	2a	0	3a
3	0	-P	0	0	a	3a
4	0	0	2P	2a	a	0
5	-F	0	0	2a	0	0

Rezultă imediat componentele lui \bar{R} :

$$R_x = P_1 - F = 2P - F; R_y = P_2 - P_3 = 0; R_z = P_4 = 2P$$

și componentele lui \bar{M}_O calculate:

$$\begin{cases} M_x = -3aP_2 + 3aP_3 + aP_4 = 2aP \\ M_y = -2aP_4 = -4aP \\ M_z = -aP_1 + 2aP_2 = 0 \end{cases}$$

Condiția de rezultantă unică devine $2aP \cdot (2P - F) + (-4aP) \cdot 0 + 0 \cdot 2P = 0$ care este îndeplinită dacă: $(2P - F) = 0 \rightarrow F = 2P$.

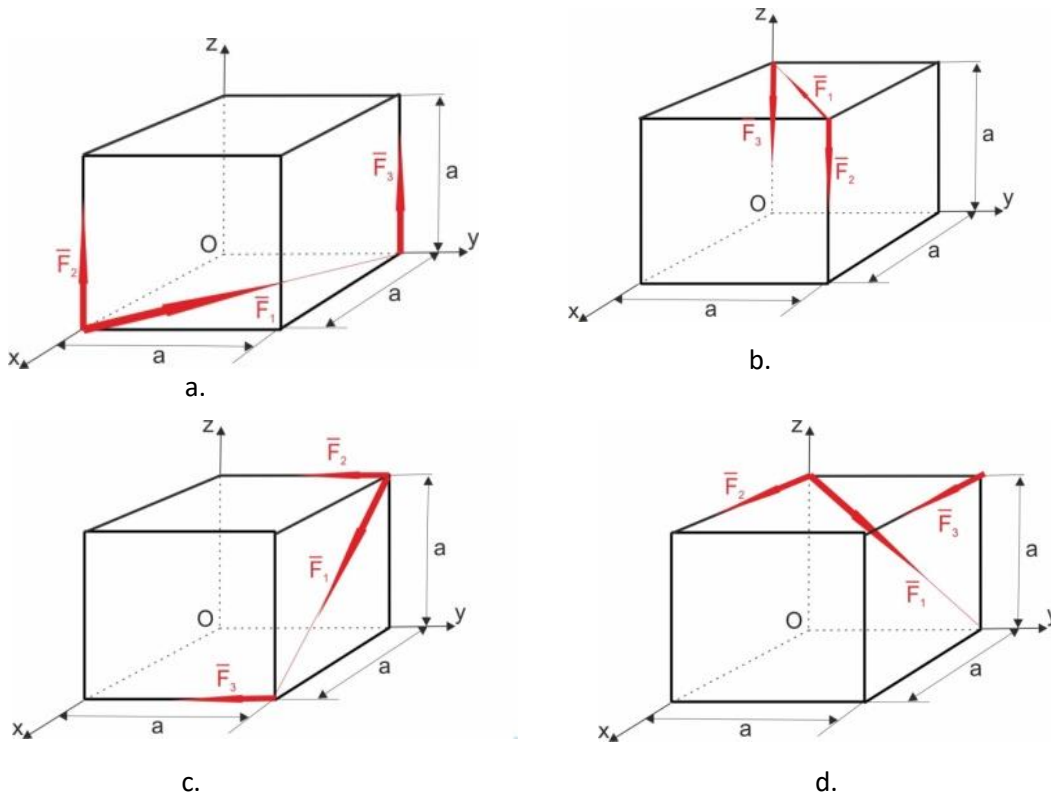
Se observă faptul că: $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 2P \end{cases} \begin{cases} M_x = 2aP \\ M_y = -4aP \\ M_z = 0 \end{cases}$ din care se vede că cei doi vectori ai

torsorului în O sunt ortogonali.

Se poate găsi șirul de rapoarte egale: $\frac{2aP - y2P}{0} = \frac{-4aP + x2P}{0} = \frac{0}{2P}$

din care se obțin ecuațiile axei centrale (AC) $\begin{cases} x = 2a \\ y = a \end{cases}$ care în acest caz este o dreaptă paralelă cu axa z.

P1.4. Se dă un cub de latură a asupra căruia acționează conform figurii un sistem de forțe având mărimile $F_2=F_3=P$ și $F_1=P\sqrt{2}$. Să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O și apoi să se determine torsorul minimal și ecuațiile axei centrale. Să se reducă apoi sistemul de forțe în raport cu punctul de intersecție al cubului cu axa y punct diferit de O.

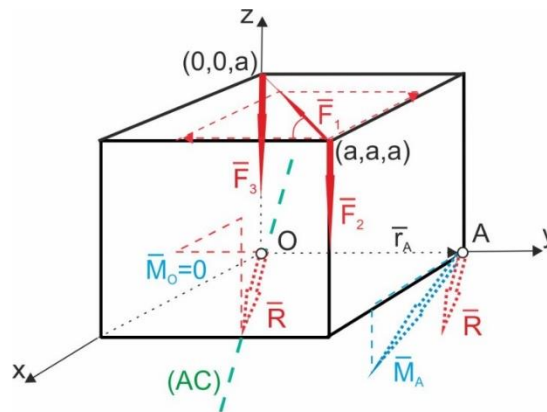


Indicații:

1. Problema este clasică și se ține cont de indicațiile de la **P1.1**;
2. În plus se cere determinarea torsorului și într-un al doilea pol de reducere;
3. Schimbând polul de reducere se modifică numai momentul rezultant (forța rezultantă fiind un invariant al operației de reducere) după legea

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R}.$$

Exemplu: fie cazul b)



Tabelul cu proiecțiile forțelor și cu coordonatele punctelor de aplicație ale acestora este

i	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	x_i	y_i	z_i
1	-P	-P	0	a	a	a
2	0	0	-P	a	a	a
3	0	0	-P	0	0	a

Proiecțiile lui \bar{R} se determină:

$$\begin{cases} R_x = -P \\ R_y = -P \\ R_z = -2P \end{cases},$$

iar cele ale lui \bar{M}_O se calculează prin:

$$\begin{cases} M_x = a \cdot F_{1y} - aF_2 = aP - aP = 0 \\ M_y = -aF_{1x} + aF_2 = -aP + aP = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}.$$

Modulele lor vor fi $R=P\sqrt{6}$ și $M_0=0$.

Prin urmare sistemul de forțe dat se reduce la o rezultantă unică, iar axa centrală (AC) trece prin O fapt ce se poate verifica ușor.

Șirul de rapoarte egale este:

$$\frac{-y(-2P) + z(-P)}{-P} = \frac{-z(-P) + x(-2P)}{-P} = \frac{-x(-P) + y(-P)}{-2P}$$

din care rezultă ecuațiile axei centrale după simplificarea fiecărui raport și luând rapoartele 1 cu 2 și 2 cu 3 sub forma (AC) $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$.

Coordonatele punctului P_0 sunt soluția sistemului obținut prin particularizarea $z=0$ în ecuațiile axei centrale: $\begin{cases} 2x_0 + 2y_0 = 0 \\ 5x_0 - y_0 = 0 \end{cases}$, adică $P_0(0,0,0)$ identic cu originea O a reperului cartezian.

Punctul de intersecție al axei y cu cubul, diferit de O , este A având vectorul de poziție \bar{r}_A . Torsorul de reducere în polul A este (\bar{R}, \bar{M}_A) . Dar $\overline{AO} = -\bar{r}_A$ și

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \overline{AO} \times \bar{R} = -\bar{r}_A \times \bar{R} = - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a & 0 \\ -P & -P & -2P \end{vmatrix} = 2aP\bar{i} - aP\bar{k} \text{ de modul } M_A = aP\sqrt{5}.$$

Capitolul 2 - Geometria maselor

2.1 Considerații asupra geometriei maselor

Pe Pământ există un câmp gravitațional, care acționează asupra fiecărui punct material, cu o forță de atracție $\bar{G} = m \cdot \bar{g}$, numită forță gravitațională, direct proporțională cu masa m , factorul de proporționalitate g , a cărui mărime măsoară intensitatea câmpului gravitațional și poartă denumirea de *acelerație gravitațională*. Acelerația gravitațională este un vector orientat întotdeauna spre centrul Pământului, mărimea acesteia variind atât cu latitudinea, cât și cu altitudinea, în calculele ingineresti, este valabilă ipoteza că vectorul $\bar{g} = cst.$ atât în modul cât și în orientare.

2.2 Centrul maselor pentru un sistem discret de puncte materiale

Se consideră în Figura 2.1, un sistem discret de n particule materiale notate M_i , caracterizate prin masele m_i , asupra cărora acționează forțele gravitaționale $\bar{G}_i = m_i \cdot \bar{g}$, în punctele definite de $\bar{r}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$, unde $i = 1 \rightarrow n$.

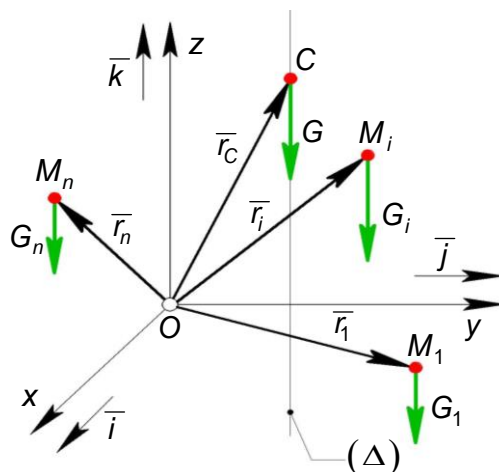


Figura. 2.1

Se obține un sistem de forțe paralele orientate în același sens, care prin reducere este echivalent cu o rezultantă unică egală cu:

$$\bar{R} = \bar{G} = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{g} = \bar{g} \sum_{i=1}^n m_i = \bar{g} \cdot M. \quad (2.1)$$

În relația anterioară, s-a notat cu $\sum_{i=1}^n m_i = M$ masa totală a sistemului.

Relația (2.1) reprezintă greutatea totală a sistemului de forțe materiale dirijate după axa centrală (Δ), care trece prin punctul (C), definit ca fiind centrul forțelor paralele, prin:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \bar{G}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot m_i \cdot g}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot g} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot m_i}{M}. \quad (2.2)$$

Proiecțiile vectorului \bar{r}_C pe un sistem de axe $xOyz$ sunt date de relațiile:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot m_i}{M}. \quad (2.3)$$

Expresiile (2.2) și (2.3) caracterizează așa numitul centru al maselor sistemului discret de puncte materiale, rezultă așadar că centrul de greutate este identic cu centrul maselor.

2.3 Noțiunea de densitate

În Figura 2.2, se consideră un corp rigid tridimensional (S_1), divizat într-un număr finit de particule elementare Δm_i caracterizat prin vectorul de poziție \bar{r}_i , la care se cunoaște centrul de masă \bar{r}_C .

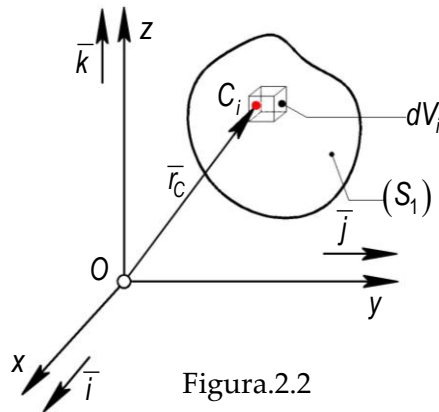


Figura.2.2

Particulele Δm_i sunt caracterizate printr-un volum elementar ΔV_i , care va da naștere unei densități volumetrică medii, de forma: $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$. Știind densitatea volumetrică medie, se poate determina densitatea volumetrică punctuală sau de volum a maselor, prin trecere la limita cu relația:

$$\rho_V = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} = \frac{dm}{dV}. \quad (2.4)$$

În Figura 2.3, se consideră o placă (S_2), divizată într-un număr finit de particule elementare Δm_i , caracterizat prin vectorul de poziție \vec{r}_i , la care se cunoaște centrul de masă \vec{r}_C .

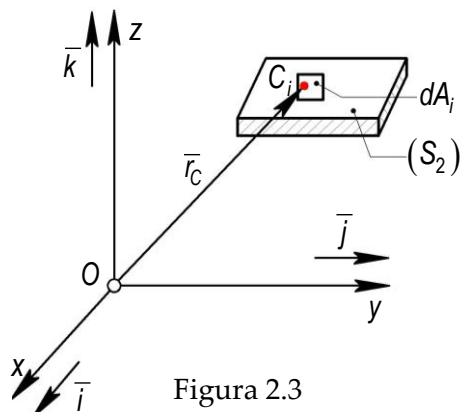


Figura 2.3

Particulele dm_i sunt caracterizate printr-o arie elementară ΔA_i . Aceasta va da naștere unei densități superficiale medii $\frac{\Delta m_i}{\Delta A_i}$. Cunoscând densitatea superficială medie, se calculează densitatea de suprafață a maselor prin relația:

$$\rho_A = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i} = \frac{dm}{dA}. \quad (2.5)$$

În Figura 2.4, se consideră o bară (S_3), divizată într-un număr finit de particule elementare Δm_i , caracterizat prin vectorul de poziție \vec{r}_i , la care se cunoaște centrul de masă \vec{r}_C .

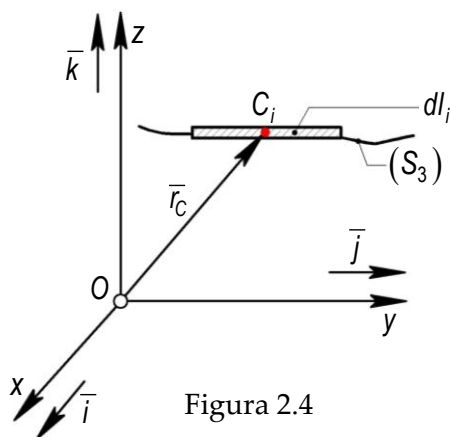


Figura 2.4

Particulele Δm_i sunt caracterizate printr-o lungime elementară Δl_i , care va da naștere unei densități liniare medii $\frac{\Delta m_i}{\Delta l_i}$.

Cunoscând densitatea liniară medie, se calculează densitatea de lungime a masei prin relația:

$$\rho_l = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i} = \frac{dm}{dl} \quad (2.6)$$

Observații:

➤ În aceste relații (2.4 – 2.6), dm reprezintă masa infimezimală a elementelor, distribuită într-o infinitate de puncte ale corpului rigid divizat într-o infinitate de volume elementare dV , arii elementare dA , sau lungimi elementare dl .

➤ Componentele scalare care definesc centrul maselor \bar{r}_c se exprimă prin ecuațiile (2.2) și (2.3), relații care vor sta la baza determinării centrului maselor pentru un corp oarecare.

Rezultă deci că masa elementară poate fi exprimată:

$$dm = \rho_V \cdot dV \text{ (3D)}; \quad dm = \rho_A \cdot dA \text{ (2D)}; \quad dm = \rho_l \cdot dl \text{ (1D)}$$

Un corp omogen are densitatea constantă ce poate ieși de sub integrale, și poate fi simplificată obținându-se:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r} \cdot \rho_V dV}{\int \rho_V \cdot dV} = \frac{\int \bar{r} \cdot dV}{\int dV};$$

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r} \cdot \rho_A dA}{\int \rho_A \cdot dA} = \frac{\int \bar{r} \cdot dA}{\int dA};$$

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r} \cdot \rho_l dl}{\int \rho_l \cdot dl} = \frac{\int \bar{r} \cdot dl}{\int dl}$$

vectorul de poziție al centrului de masă/greutate al unui corp omogen (volum omogen, placă omogenă și bară omogenă). Relațiile vectoriale fiind echivalente fiecare cu câte trei relații scalare avem formulele de calcul:

în 3D: $x_C = \frac{\iiint x \cdot dV}{\iiint dV}; \quad y_C = \frac{\iiint y \cdot dV}{\iiint dV}; \quad z_C = \frac{\iiint z \cdot dV}{\iiint dV}$ - pentru volume omogene

sau în 2D $x_C = \frac{\iint x \cdot dA}{\iint dA}; \quad y_C = \frac{\iint y \cdot dA}{\iint dA}; \quad z_C = \frac{\iint z \cdot dA}{\iint dA}$ - pentru plăci omogene

sau în 1D $x_C = \frac{\int x \cdot dl}{\int dl}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dl}{\int dl}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dl}{\int dl}$ - la bare omogene.

Reducerea dificultății calculului integralelor triple și duble pleacă de la alegerea inspirată a mărimii elementare (dV sau dA) astfel încât aceasta să depindă numai de o singură variabilă ceea ce duce la calcul de integrale simple!

Dacă corpul omogen este compus din „n” părți la care se cunoaște poziția centrului de masă a fiecărei părți atunci pentru întregul corp sunt valabile relațiile:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot \rho_V \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n \rho_V \cdot V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot \rho_A \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n \rho_A \cdot A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot \rho_l \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n \rho_l \cdot l_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}$$

în funcție de numărul de dimensiuni ale corpului. Ținând cont că relațiile sunt vectoriale se vor obține formulele de calcul:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_{C_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_{C_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \text{ pt. volume compuse omogene (3D)}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_{C_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_{C_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \text{ pt. plăci compuse omogene (2D)}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_{C_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_{C_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; \text{ pt. bare compuse omogene (1D).}$$

2.4 Centrul maselor pentru un corp cu o formă geometrică oarecare

Luând în studiu un rigid cu o formă geometrică oarecare (vezi Fig.2.2, 2.3 și 2.4) divizat într-un număr infinit de particule cu masa elementară Δm_i , presupunând că distribuția maselor este uniformă în infinitatea de puncte a rigidului, poziția centrului maselor față de un sistem de referință este dată de o ecuație vectorială de forma:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}. \quad (2.7)$$

Pentru a se obține poziția exactă a centrului de masă a rigidului, acesta este divizat într-un număr infinit de particule, caracterizate prin masele dm continuu distribuite. Astfel, sumele se transformă în integrale extinse (masice) pe întregul domeniu al rigidului, poziția centrului maselor fiind:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm}. \quad (2.8)$$

Prin analogie cu (2.3), componentele vectorului \bar{r}_C pe cele trei axe sunt următoarele:

$$x_C = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm}; \quad y_C = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm}; \quad z_C = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm}; \quad (2.9)$$

Ținând cont de relațiile (2.4), (2.5) și (2.6), se poate explicita dm în funcție de forma corpului, ca fiind egal cu:

$$dm = \{ \rho_V \cdot dv; \rho_A \cdot dA; \rho_l \cdot dl \}; \quad (2.10)$$

Înlocuind (2.3) în relația de definire a centrului maselor, se va obține:

$$\bar{r}_C = \left\{ \frac{\int \bar{r} \cdot dv}{\int dv}; \frac{\int \bar{r} \cdot dA}{\int dA}; \frac{\int \bar{r} \cdot dl}{\int dl} \right\}. \quad (2.11)$$

Proiecțiile vectorului de poziție definit în (2.11) pe cele trei axe ale unui sistem de referință ortogonal se poate exprima prin relațiile:

$$\begin{aligned} x_C &= \left\{ \frac{\int x \cdot dv}{\int dv}; \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}; \frac{\int x \cdot dl}{\int dl} \right\}; \\ y_C &= \left\{ \frac{\int y \cdot dv}{\int dv}; \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}; \frac{\int y \cdot dl}{\int dl} \right\}; \\ z_C &= \left\{ \frac{\int z \cdot dv}{\int dv}; \frac{\int z \cdot dA}{\int dA}; \frac{\int z \cdot dl}{\int dl} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observații:

➤ În relațiile anterioare, **numai pentru corpuri omogene** sunt valabile următoarele:

$$\int dv = V; \int dA = A; \int dl = L. \quad (2.13)$$

➤ Expresia (2.11) arată că în cazul corpurilor omogene, centrul maselor depinde de forma geometrică a corpurilor, deci centrul geometric coincide cu centrul de masă.

Proprietăți:

1. Dacă sistemul material este situat în interiorul unei suprafețe convexe, centrul de masă se va găsi în interiorul acelei suprafețe.

2. Dacă toate punctele sistemului sunt situate într-un plan, pe o axă, centrul masei se va găsi în plan sau pe axa considerată.

3. Dacă sistemul material admite un centru de simetrie în plan sau pe o axă de simetrie, centrul masei se va găsi în centru, în plan sau pe axa de simetrie.

2.5 Centrul maselor pentru un sistem de corpuri

Se consideră în Figura 2.5 un sistem de corpuri (S_i) , format din n corpuri. Sistemul de corpuri este caracterizat prin centrul maselor C_i definit de \bar{r}_{C_i} , masele M_i , pentru $i=1 \rightarrow n$. Plecând de la ecuația vectorială (2.2), în cazul unui sistem de corpuri neomogene, poziția centrului maselor se determină cu:

$$\bar{r}_{C_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{C_i} \cdot M_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=1}^n M_i \cdot \sigma_i}, \quad \sigma_i = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}; \quad (2.14)$$

În relația anterioară, σ_i reprezintă un operator care ia valoarea $+1$ în cazul în care corpurile rămân în sistem, și -1 atunci când se extrag corpuri din sistem.

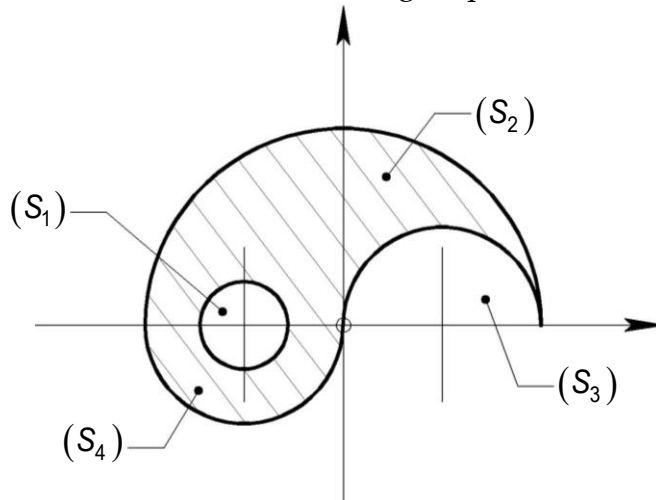


Figura 2.5

În cazul unui sistem de corpuri omogene, adică $\rho = cst.$, pentru toate cele n puncte din sistem, în funcție de forma corpului, m_i sunt substituite prin $M_i = \{\rho_V \cdot V_i; \rho_A \cdot A_i; \rho_l \cdot L_i\}$, relația (2.14) se transformă, astfel:

$$\bar{r}_C = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot V_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \sigma_i}; \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot A_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \sigma_i}; \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_{C_i} \cdot L_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=1}^n L_i \cdot \sigma_i} \right\} \quad (2.15)$$

Observație: În cazul în care rigidul are o formă geometrică complexă, pentru a putea fi stabilit centrul maselor, rigidul este divizat într-o mulțime finită de forme geometrice simple sau regulate, pentru care se poate aplica calculul integral conform relațiilor (2.11) și (2.13).

2.6 Momente masice

În Figura 2.6a se consideră un punct material M_i de masă m_i dintr-un sistem de $i=1 \rightarrow n$ particule, care este caracterizat de raza vectorie $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)^T$ și distanța δ_i la un plan, o axă sau un punct.

În Figura 2.7b se consideră un rigid oarecare (S), fracționat în n mase elementare distribuite uniform poziționate prin vectorul \bar{r} față de polul O .

Prin definiție se pot scrie următoarele relații pentru definirea momentelor masice:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i^p \cdot m_i; \int \delta^p \cdot dm \right\}; \text{ unde } p=0 \rightarrow 2; \quad (2.25)$$

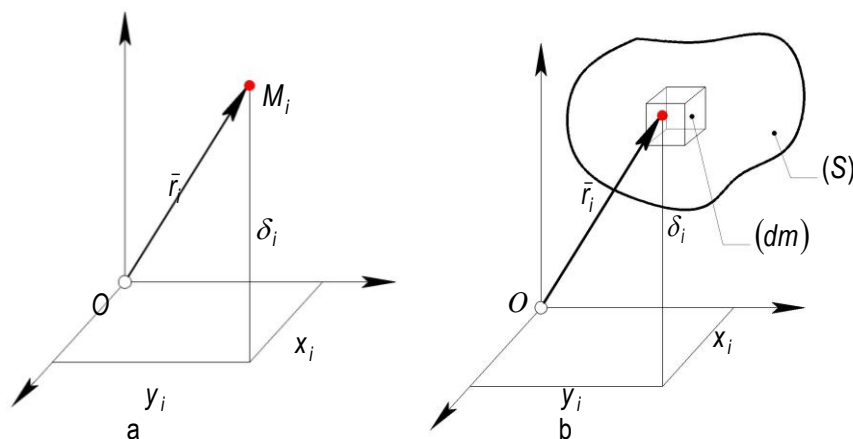


Figura 2.6

În funcție de valorile indicelui p , se disting următoarele momente masice:

➤ Pentru $p=0$, va rezulta un *moment masic* de ordinul zero:

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i; \int dm \right\}; \quad (2.26)$$

➤ Când $p = 1$, *moment static* de ordinul întâi va fi:

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot m_i; \int \delta \cdot dm \right\}; \quad (2.27)$$

➤ Dacă $p = 2$, *moment de inerție mecanic* de ordinul doi va avea forma:

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cdot m_i; \int \delta^2 \cdot dm \right\}. \quad (2.28)$$

Prin definiție, *momentele statice* reprezintă suma produselor dintre masele particulelor materiale și distanțele de la acestea la un plan, o axă sau un punct. Astfel, dacă:

➤ δ_i reprezintă distanța de la particulă la un plan, atunci apare un *moment static planar*:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot dm; & S_{xx} &= \int x \cdot dm; \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot dm; & S_{yy} &= \int y \cdot dm; \\ S_{zz} &= \sum_{i=1}^n z_i \cdot dm; & S_{zz} &= \int z \cdot dm; \end{aligned} \quad (2.29)$$

➤ δ_i reprezintă distanța la o axă Ox, Oy, Oz , apar *momente statice axiale*, definite prin:

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n \sqrt{y_i^2 + z_i^2} \cdot m_i; & S_x &= \int \sqrt{y^2 + z^2} \cdot dm; \\ S_y &= \sum_{i=1}^n \sqrt{z_i^2 + x_i^2} \cdot m_i; & S_y &= \int \sqrt{z^2 + x^2} \cdot dm; \\ S_z &= \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \cdot m_i; & S_z &= \int \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dm; \end{aligned} \quad (2.30)$$

Relatiile (2.29) și (2.30) pot fi scrise vectorial :

$$\bar{S}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot m_i; \quad \bar{S}_0 = \int \bar{r} \cdot dm = M \cdot \bar{r}_C; \quad (2.31)$$

Proiecția ecuației vectoriale (2.31) pe un sistem de axe $Oxyz$ este:

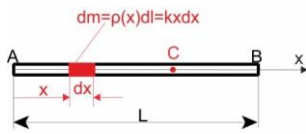
$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i; & S_{xx} &= \int x \cdot dm = M \cdot x_C; \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i; & S_{yy} &= \int y \cdot dm = M \cdot y_C; \\ S_{zz} &= \sum_{i=1}^n z_i \cdot m_i; & S_{zz} &= \int z \cdot dm = M \cdot z_C. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Expresiile definite în (2.32) reprezintă *Teorema momentelor statice*. Conform teoremei: *momentul static al unui sistem material în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului M , presupusă a fi concentrată în centrul masei și distanța de la centrul masei la planul considerat (x_C, y_C, z_C) .*

Observație: *Dacă sistemul material este situat integral în planul considerat, momentul static planar este zero.*

2.7 Aplicații

P2.1. Să se determine centrul de greutate/masă al barei drepte AB de lungime L a cărei densitate variază proporțional cu distanța la capătul A.



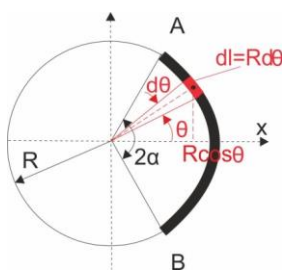
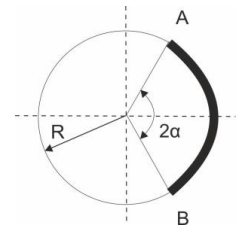
Rezolvare: Se izolează o masă elementară dm. Formula de calcul

proiectată pe axa x este:

$$x_c = \frac{\int_{(AB)} x dm}{\int_{(AB)} dm} = \frac{\int_0^L kx^2 dx}{\int_0^L kx dx} = \frac{\int_0^L x^2 dx}{\int_0^L x dx} = \frac{L^3 \frac{2}{3}}{L^2} = \frac{2L}{3}$$

deci centrul de greutate se află pe bară la două treimi de capătul A.

P2.2. Bara omogenă de forma unui arc de cerc este prezentată în figură. Să se găsească poziția centrului ei de greutate/masă. Particularizare pentru barele sfert de cerc și semicerc.



Rezolvare: Bara are axa x axă de simetrie deci $y_c=0$. Se alege o bară elementară de lungime dl ce subîntinde un unghi la centru $d\theta$. Bara elementară are centrul de greutate/masă la mijlocul ei. Formula de calcul este:

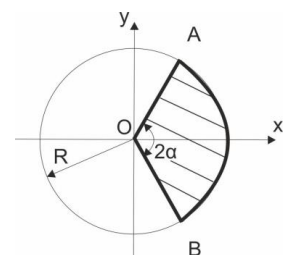
$$x_c = \frac{\int_{(AB)} x dl}{\int_{(AB)} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta} = R \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

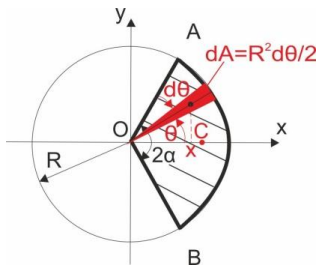
Deci centrul de greutate este pe axa de simetrie a barei având distanța x_c de la centrul cercului.

Particularizare: - dacă bara e un sfert de cerc $2\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi/4$ $x_c = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$

- dacă bara e semicerc $2\alpha=\pi$, $\alpha=\pi/2$ $x_c = \frac{2R}{\pi}$.

P2.3. Se dă o placă omogenă de forma unui sector circular conform figurii. Calculați coordonatele centrului de greutate/masă. Particularizare pentru plăcile sfert de cerc și semicerc.





Rezolvare: Se ia placa elementară de forma unui sector circular elementar dA care poate fi aproximat cu un triunghi isoscel având centrul de greutate/masă pe mediana corespunzătoare bazei la $2/3$ de vârf. Ținând cont de simetrie (axa x e axă de simetrie) $y_C=0$.

Formula de la plăci omogene proiectată pe axa x este:

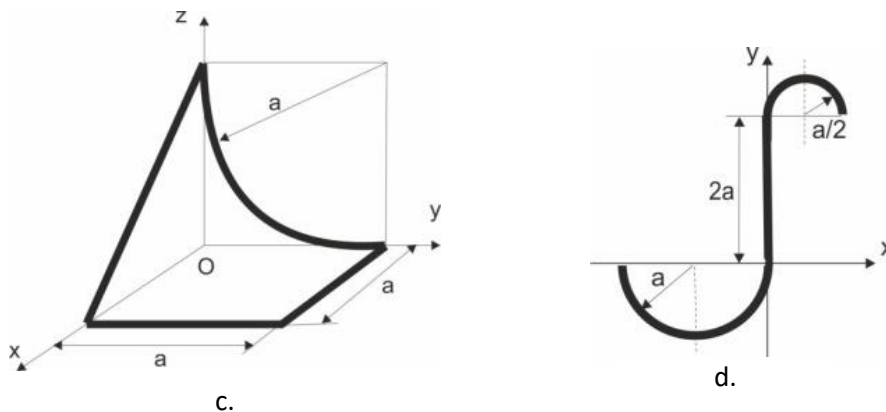
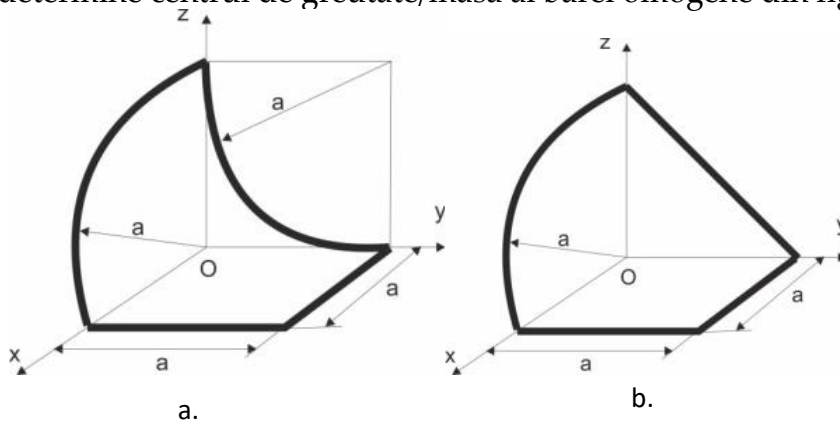
$$x_c = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{2R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{3 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2R \sin \alpha}{3 \alpha}$$

Deci centrul de greutate al sectorului circular se află pe axa sa de simetrie la distanța x_c de centrul cercului.

Particularizare: - dacă sectorul e un sfert de cerc $2\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi/4$ $x_c = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$

- dacă sectorul e un semicerc $2\alpha=\pi$, $\alpha=\pi/2$ $x_c = \frac{4R}{3\pi}$.

P2.4. Să se determine centrul de greutate/masă al barei omogene din figură.



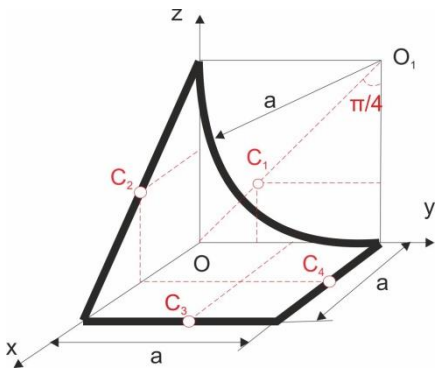
Indicații

1. Problemele a), b) și c) sunt spațiale (3D);
2. Problema d) este plană (2D);
3. Nici una nu admite vreo simetrie, deci trebuie calculate toate coordonatele;
4. Se aplică formulele de la barele compuse omogene

$x_C = \frac{\sum_{i=1}^p x_{Ci} L_i}{\sum_{i=1}^p L_i}$; $y_C = \frac{\sum_{i=1}^p y_{Ci} L_i}{\sum_{i=1}^p L_i}$; $z_C = \frac{\sum_{i=1}^p z_{Ci} L_i}{\sum_{i=1}^p L_i}$ unde p este numărul de părți în care a fost divizată bara [p=4 pt. a), b) și c), iar p=3 pt. d)].

5. Barele în formă de arc de cerc au centrele pe axa de simetrie la distanța $2R\sqrt{2}/\pi$ de centrul sfertului de cerc sau $2R/\pi$ de centrul semicercului.

Exemplu: bara compusă c) utilizăm formulele



$$\begin{cases} x_C = \frac{x_{C1}L_1 + x_{C2}L_2 + x_{C3}L_3 + x_{C4}L_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \\ y_C = \frac{y_{C1}L_1 + y_{C2}L_2 + y_{C3}L_3 + y_{C4}L_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \\ z_C = \frac{z_{C1}L_1 + z_{C2}L_2 + z_{C3}L_3 + z_{C4}L_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \end{cases}$$

$$L_1 = \pi a/2 \quad x_{C1} = 0, \quad y_{C1} = a - O_1 C_1 \sin(\pi/4) = (\pi - 2)a/\pi,$$

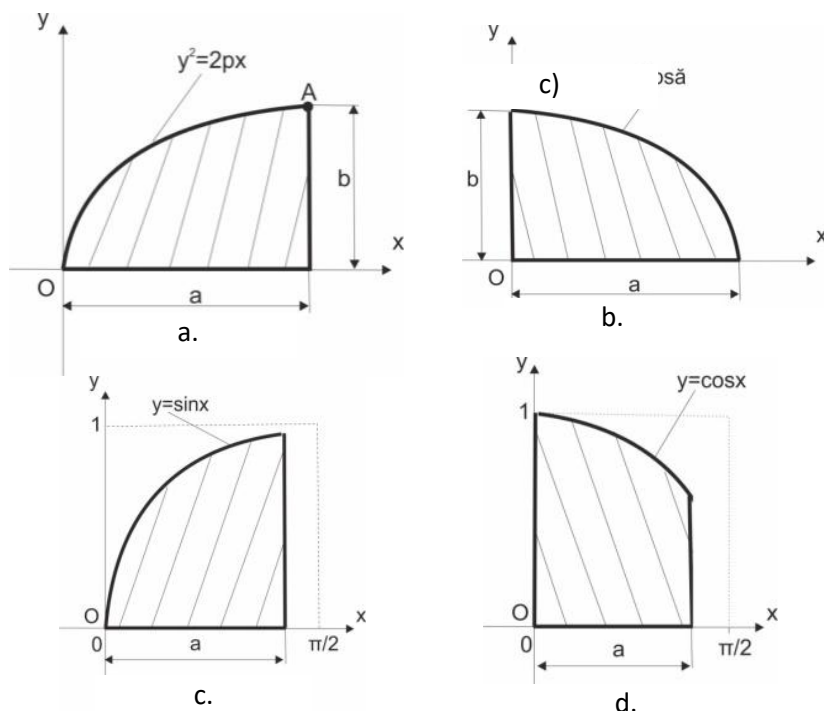
$$z_{C1} = a - O_1 C_1 \sin(\pi/4) = (\pi - 2)a/\pi;$$

$$L_2 = a\sqrt{2} \quad x_{C2} = a/2, \quad y_{C2} = 0, \quad z_{C2} = a/2;$$

$$L_3 = a \quad x_{C3} = a, \quad y_{C3} = a/2, \quad z_{C3} = 0;$$

$$L_4 = a \quad x_{C4} = a/2, \quad y_{C4} = a, \quad z_{C4} = 0.$$

P2.5. Să se determine centrul de greutate/masă al plăcii omogene din figură.



Indicații

1. Parametrul p al parabolei se determină punând condiția ca aceasta să treacă prin A ;
2. Aria elementară este aproximată cu un dreptunghi de înălțime y și lățime dx
 $dA=ydx$;
3. Trebuie calculate amândouă coordonatele x_c și y_c deoarece nu avem simetriei;
4. În expresia $y_c = \frac{\int_{(A)} y dA}{\int_{(A)} dA}$ y este ordonata centrului de greutate al ariei elementare fiind egal cu $y/2$ fiind că centrul dreptunghiului e la jumătatea înălțimii, iar integrala de la numitor reprezintă chiar aria plăcii;
5. Ecuațiile parametrice ale elipsei sunt $x = a \cos \theta$; $y = b \sin \theta$;
6. Se poate face o transformare de coordonate $x_1=x/a$ și $y_1=y/b$ care transformă elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ într-un cerc $x_1^2 + y_1^2 = 1$ și aplicăm formula de la sfertul de cerc.

Răspunsuri

- a) $x_c = \frac{3a}{5}$ $y_c = \frac{3b}{8}$ $A = \frac{2ab}{3}$
- b) $x_c = \frac{4a}{3\pi}$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$ $A = \frac{\pi ab}{4}$
- c) $x_c = \frac{\sin a - a \cos a}{1 - \cos a}$ $y_c = \frac{2a - \sin 2a}{8(1 - \cos a)}$ $A = 1 - \cos a$ (dacă $a=\pi/2$ $x_c=1$ $y_c=\pi/8$)
- d) $x_c = \frac{a \sin a + \cos a - 1}{\sin a}$ $y_c = \frac{2a + \sin 2a}{8 \sin a}$ $A = \sin a$ (dacă $a = \frac{\pi}{2}$ $x_c = \frac{\pi}{2} - 1$ $y_c = \frac{\pi}{8}$)

Exemplu: Se considera placa b). Se utilizează ecuațiile parametrice ale elipsei $x =$

$$a \cos \theta ; y = b \sin \theta$$

$$dA = ydx = b \sin \theta a \cos \theta d\theta \text{ depinde de 1 variabilă } \theta, \text{ iar}$$

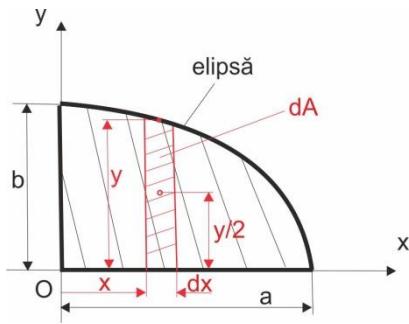
integralele sunt simple în loc de duble!!

$$x_C = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA}; \quad y_C = \frac{\int_{(A)} y dA}{\int_{(A)} dA}$$

Sunt de calculat trei integrale:

$$A = \int_{(A)} dA = \int_0^{\pi/2} ab \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi ab}{4}$$

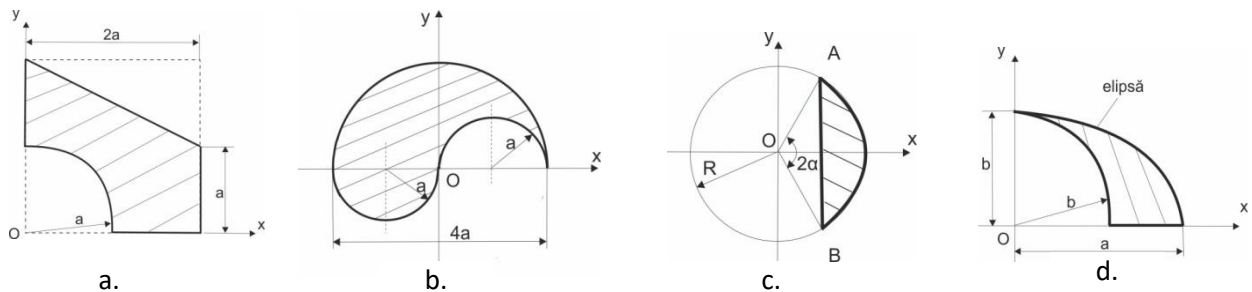
$$\int_{(A)} x dA = \int_0^{\pi/2} a^2 b \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^2 b}{3}$$



Ținând cont că y din formulă e de fapt $y/2$ (ordonata centrului ariei elementare), rezulta:

$$\int_{(A)} y dA = \int_{(A)} \frac{y}{2} dA = \int_0^{\pi/2} \frac{ab^2}{2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{ab^2}{3} \text{ și rezultă } x_C = \frac{4a}{3\pi} \quad y_C = \frac{4b}{3\pi} \quad A = \frac{\pi ab}{4} .$$

P2.6. Se consideră placa omogenă având dimensiunile din figură și se cere determinarea centrului de greutate/masă al plăcii.



Indicații

1. se aplică formulele de la plăcile compuse omogene în plan (2D)

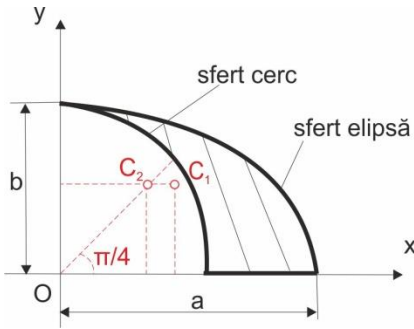
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^p x_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^p A_i} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^p y_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^p A_i} \quad p \text{ fiind numărul de părți în care am divizat placa}$$

compusă

$p=2$ placa c) și d) sau $p=3$ plăcile a) și b);

2. în cazurile a), b) și d) trebuie calculate ambele coordonate;
3. placa din c) are axa x axă de simetrie $y_C=0$.

Exemplu: placa d) poate fi considerată compusă dintr-un sfert de elipsă din care lipsește un sfert de cerc.



Formulele de la placa compusă iau forma:

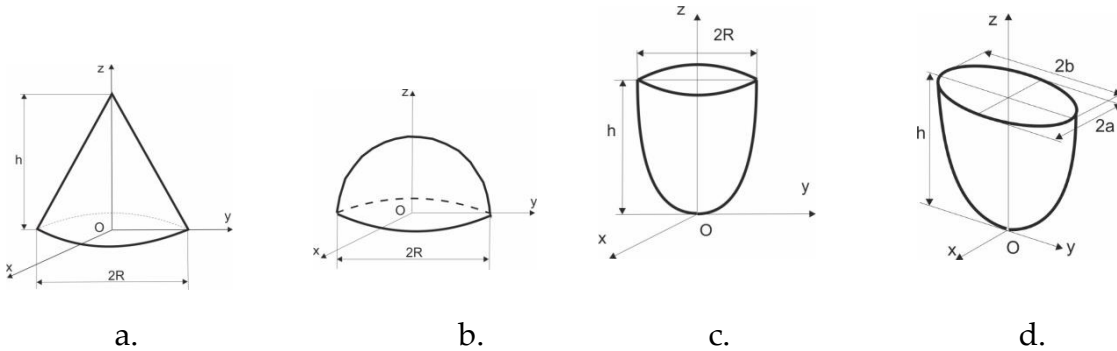
$$x_C = \frac{x_{C1}A_1 - x_{C2}A_2}{A_1 - A_2}; \quad y_C = \frac{y_{C1}A_1 - y_{C2}A_2}{A_1 - A_2}$$

unde

$$A_1 = \pi ab/4 \quad x_{C1} = 4a/(3\pi), \quad y_{C1} = 4b/(3\pi);$$

$$A_2 = \pi b^2/4 \quad x_{C2} = OC_2 \cos(\pi/4) = 4b/(3\pi), \quad y_{C2} = 4b/(3\pi)$$

P2.7. Să se determine centrul de greutate/masă al corpului/volumului omogen din figură.



Indicații

1. corpurile au axa z axă de simetrie ($x_c=y_c=0$);
2. volumul elementar este un cilindru aflat la cota z , are înălțimea dz , raza bazei y și se exprimă astfel $dV = \pi y^2 dz$ unde y se determină geometric din

a) asemănare de triunghiuri $\frac{y}{R} = \frac{h-z}{h}$,

b) aplicând Teorema lui Pitagora $R^2 = z^2 + y^2$,

c) ecuația parabolei din planul yOz $y^2 = \frac{R^2}{h} z$ [obținută din ecuația paraboloidului

de rotație

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h} z \text{ intersectată cu planul } yOz (x=0)]$$

3. pt. cazul d) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{h}$, se poate face o schimbare de axe astfel

$$x_1 = x/a \text{ și } y_1 = y/b \quad z_1 = z \text{ transformându-l într-un paraboloid de rotație } x_1^2 + y_1^2 = \frac{z}{h}$$

($R=1$) cazul c) care are același z_c !!

Răspunsuri problema P2.7

- a) $z_c=h/4$ $V=\pi R^2 h/3$; b) $z_c=3R/8$ $V=2\pi R^3/3$; c) $z_c=2h/3$ $V=\pi R^2 h/2$; d) $z_c=2h/3$
 $V=\pi abh/2$

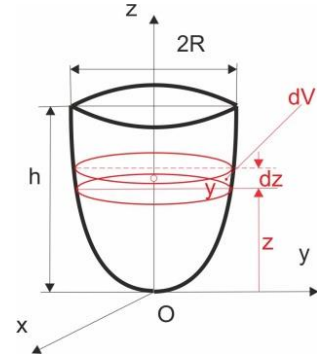
Exemplu: corpul c) paraboloid de rotație având ecuația $x^2 +$

$$y^2 = \frac{R^2}{h} z$$

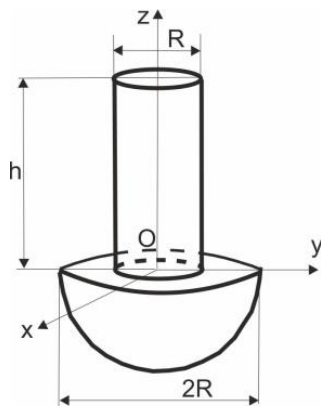
are centrul de greutate la $z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV}$ unde

$dV=\pi y^2 dz=\pi R^2 z/h$ depinde de 1 variabilă z rezultând calcul

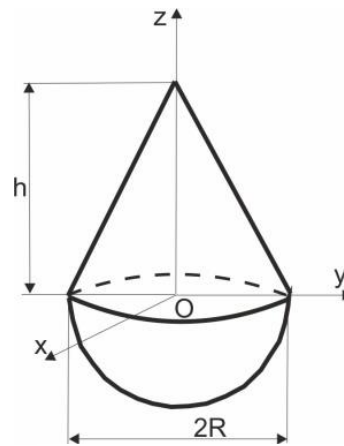
de integrale simple $z_C = \frac{\int_0^h \frac{\pi R^2 z^2 dz}{h}}{\int_0^h \frac{\pi R^2 z dz}{h}} = \frac{2h}{3}$.



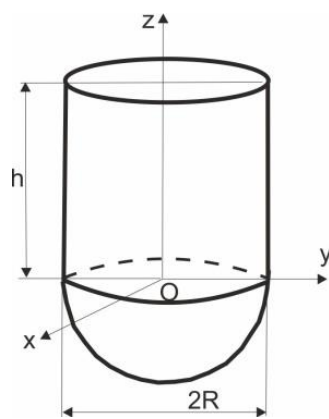
P2.8. Corpul omogen din figură se așează pe un plan orizontal. Să se discute echilibrul corpului în funcție de poziția centrului său de greutate/masă.



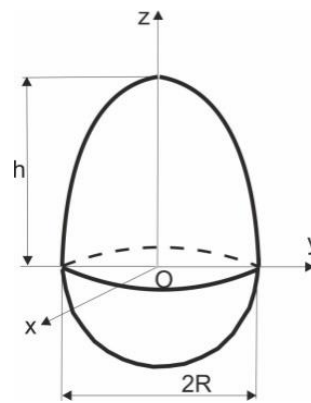
a.



b.



c.



d.

Indicații

1. Corpurile se consideră compuse din două părți, prima fiind un cilindru, con, sau paraboloid de rotație, iar a doua o emisferă;
2. Emisfera are cota centrului de greutate negativă (este sub planul xOy);
3. Centrul de greutate/masă se găsește pe axa z axă de simetrie ($x_c=y_c=0$);
4. Echilibrul se discută funcție de z_c pozitiv, zero sau negativ;

Discuție:

1. $z_c > 0$ ținând corpul pe verticală acesta rămâne în echilibru. Dacă se înclină greutatea creează un moment față de punctul de sprijin care răstoarnă corpul, situație de **echilibru instabil**;
2. $z_c = 0$ pe verticală rămâne în echilibru, chiar dacă se înclină greutatea trece tot timpul prin punctul de sprijin și corpul rămâne în echilibru, situație de **echilibru indiferent**;
3. $z_c < 0$ pe verticală rămâne în echilibru, iar dacă se înclină greutatea creează un moment față de punctul de sprijin care-l readuce înapoi la verticală, situație de **echilibru stabil**.

Răspunsuri problema P2.8

$$\text{a) } z_C = \frac{3(h^2 - 2R^2)}{2(3h + 8R)} \quad \text{b) } z_C = \frac{(h^2 - 3R^2)}{4(h + 2R)} \quad \text{c) } z_C = \frac{3(2h^2 - R^2)}{4(3h + 2R)} \quad \text{d) } z_C = \frac{3(h^2 - 2R^2)}{2(3h + 8R)}$$

Capitolul 3 - Echilibrul punctului material

3.1 Poziționarea punctului material. Grade de libertate

Parametrii geometrici independenți, cu ajutorul cărora se poate defini poziția unui punct caracterizează gradele de mobilitate ale acestuia. Se poate afirma așadar că, *numărul gradelor de libertate ale unui punct material este dat de numărul de miscări independente, pe care le poate efectua liber.*

Poziția unui punct material liber este convențional definită, ca în Figura 3.1, prin trei parametri independenți între ei, care se aleg în funcție de sistemul de referință utilizat: *coordonate carteziene; cilindrice sau sferice.*

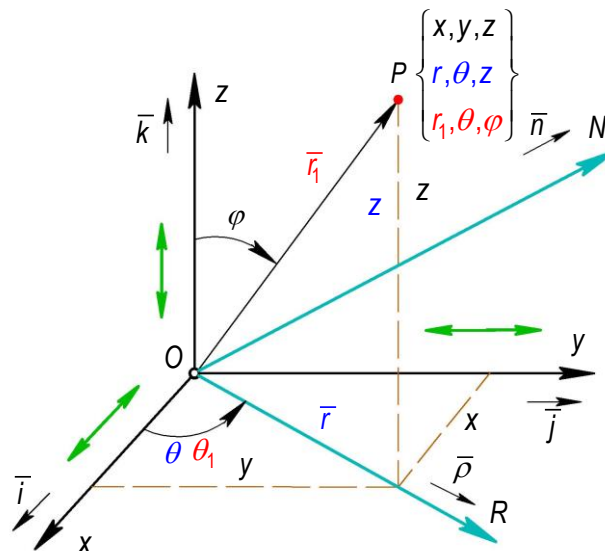


Figura 3.1.

Așadar, în funcție de sistemul de referință ales, este nevoie de trei lungimi (x, y, z) într-un sistem cartezian, sau de două lungimi și un unghi (r, θ, z) în sistemul cilindric sau de o lungime și două unghiuri (r_1, θ, φ) în coordonate sferice.

Conform Figurii 3.1, indiferent de sistemul de referință sunt necesari trei parametri deoarece punctul material poate face numai *trei translații* de-a lungul axelor sistemului cartezian.

Vectorul de poziție \bar{r}_1 al punctului poate fi exprimat în sistemele cartezian și cilindric astfel:

$$\bar{r}_1 = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = r \cdot \bar{\rho} + z \cdot \bar{k} \quad (3.1)$$

În cazul unui punct material liber în plan (vezi Figura 3.2), poziția sa este definită cu ajutorul a doi parametri independenți, astfel că punctul material liber în plan are două grade de libertate.

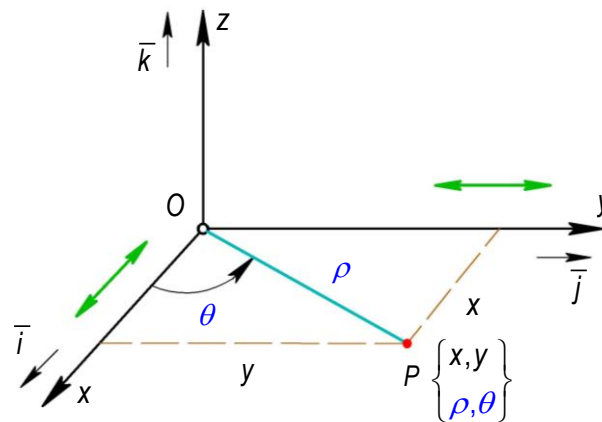


Figura 3.2.

Cei doi parametri, în funcție de sistemul de coordonate ales, pot fi două lungimi (x, y) , în cazul sistemului de coordonate carteziene, sau o lungime și un unghi (ρ, θ) în sistemul de coordonate polare.

Observatii: Astfel, un punct material liber are trei grade de libertate, un punct pe o suprafață are două grade de libertate (coordonatele curbilinii ale suprafeței), un punct pe o curbă are un grad de libertate (coordonata curbilinie a curbei), iar un punct obligat să rămână într-o poziție fixă nu are nici un grad de libertate.

3.2 Punct material liber. Punct material supus la legături

Un **punct material este liber**, dacă sub acțiunea unui sistem de forțe cu o distribuție spațială poate ocupa orice poziție în spațiu, iar sub acțiunea unui sistem de forțe coplanare poate ocupa orice poziție în planul forțelor.

Un **punct material este supus la legături** dacă este obligat să ocupe numai anumite poziții în spațiu, de exemplu să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-o poziție fixă din spațiu.

Prin legătură se înțelege o restricție geometrică impusă poziției punctului. Ca urmare numărul de mișcări simple posibile scade fiindcă legătura interzice anumite mișcări simple. Prin urmare scade și numărul gradelor de libertate ale sistemului

material, iar numărul de necunoscute crește. *Legătura introduce atâtea necunoscute câte grade de libertate sau mișcări simple suprimă.*

Forțele cu care se înlocuiește echivalentul mecanic al unei legături poartă numele de "**forțe de legătură**". Există o corespondență directă între forțele de legătură și mișcările simple suprimate de acestea: *forța de legătură are direcția mișcării simple suprimate, sens contrar ei și mărimea dată de sistemul de forțe active ce acționează asupra punctului material.*

Restricțiunile introduse de legăturile mecanice, sunt exprimate prin relații de forma:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) \geq 0, \quad i = 1 \rightarrow n \quad (3.2)$$

în care unele variabile pot să fie nule.

Sub aspectul comportamentului cinetic, legăturile se clasifică în:

- ✓ Legături geometrice – introduc restricții doar asupra parametrilor de situare și au forma:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi, t) = 0, \quad i = 1 \rightarrow n \quad (3.3)$$

- ✓ Legături cinematice – introduc restricții atât asupra parametrilor de situare, cât și asupra derivatelor lor de ordinul întâi în raport cu timpul au forma:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) = 0, \quad i = 1 \rightarrow n \quad (3.4)$$

Observatie: în cazul în care ecuațiile de legătură:

- ✓ sunt integrabile, **legăturile** se numesc **olonome**, de exemplu

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi, t) = 0, \quad i = 1 \rightarrow n \quad (3.5)$$

- ✓ sunt neintegrabile, **legăturile** se numesc **neolonome**, având forma (3.4)

- ✓ conțin în mod explicit parametrul timp, se numesc **reonome** (nestationare), și au forma (3.3);

- ✓ nu conțin în mod explicit parametrul timp, se numesc **scleronome**, astfel că legătura este **fixă și indeformabilă**, având forma:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi) = 0, \quad i = 1 \rightarrow n \quad (3.6)$$

3.3 Generalități despre legături. Axioma legăturilor. Ecuații vectoriale de echilibru

Prin aplicarea unei legături numărul de mișcări posibile scade fiindcă legătura interzice anumite mișcări simple. Prin urmare scade și numărul gradelor de libertate ale sistemului material, iar numărul de necunoscute crește.

Înlocuirea legăturilor prin forțele de legătură se face în baza **Axiomei legăturilor**, conform căreia: "*sistemul material poate fi considerat liber sub acțiunea forțelor date și de legătură*".

În baza acestei axiome se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură care se introduc în ecuațiile de echilibru. Se notează cu \bar{R} rezultanta forțelor date/active și cu \bar{R}_l rezultanta forțelor de legătură.

În cazul unui punct material, rezultă **o singură ecuație vectorială** de echilibru:

$$\bar{R} + \bar{R}_l = 0 \quad (3.7)$$

Observație: în statică se poate afirma că forțele de legătură sunt echilibrate de forțele date !!.

Scalar, numărul de ecuații de echilibru, este același ca și pentru sistemul material liber în spațiu, adică trei ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{aligned} R_x + R_{l_x} &= 0 \\ R_y + R_{l_y} &= 0 \\ R_z + R_{l_z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

În plan ecuațiile de proiecții de forțe pe x, pe y și pe z numai ecuația de proiecție de momente:

$$R_x + R_{l_x} = 0; R_y + R_{l_y} = 0 \quad (3.9)$$

Legăturile se pot clasifica după:

- 1. existența frecării** -legături ideale/lucii/fără frecare
-legături reale/aspre/ cu frecare
- 2. tipul expresiei matematice** -legături unilaterale/unilaterale
-legături bilaterale/bilaterale (ecuații)

3.4 Legături ideale ale punctului material

Legăturile ideale (în absența frecării) ale punctului material pot fi:

1. legătura pe o suprafață
2. legătura pe o curbă
3. legătura prin bară sau fir

Mișcările interzise sunt:

1. pe direcția normalei la suprafață
2. în planul normal la curbă
3. în lungul barei sau firului

Prin urmare forțele de legătură au direcția:

1. normală la suprafață
2. în planul normal la suprafață
3. de-a lungul barei sau firului

3.4.1 Legătura pe o suprafață lucie

Fie o suprafață (S) fixă, lucie/fără frecare având ecuația $f(x,y,z)=0$. Punctul material M este obligat să rămână pe suprafață sub acțiunea unui sistem de forte \vec{F}_i , $i=1 \rightarrow n$, (vezi Figura 3.3). El pierde **un grad de libertate**, datorită legăturii cu suprafața. În spațiu (3D) între cele trei coordonate (x,y,z) există o relație, *ecuația suprafeței*, deci rămân independente doar două coordonate ce determină poziția pe suprafață adică punctul mai are două **grade de libertate**.

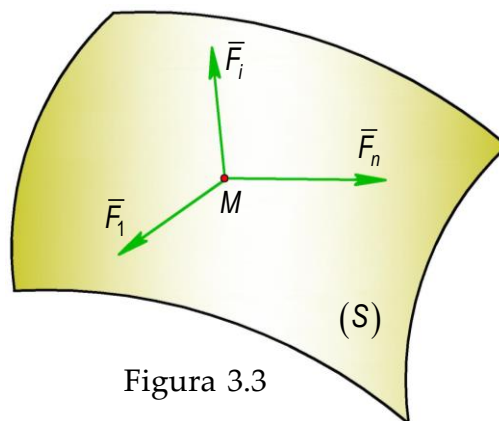
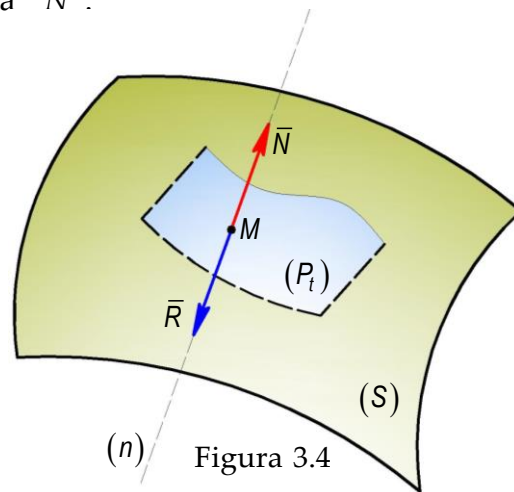


Figura 3.3

În schița mecanică: sistemul de forțe poate fi înlocuit cu rezultanta lui \bar{R} , iar legătura cu forța de legătură a suprafeței (Figura 3.4). Legătura împiedică mișcarea pe direcția perpendiculară/normalei la suprafața (S), iar forța de legătură are aceeași direcție și se numește "reacțiune normală" \bar{N} .



(n) Figura 3.4

Se duce planul (P_t) tangent la suprafață în punctul M. Ecuația vectorială de echilibru ia forma în cazul acesta:

$$\bar{R} + \bar{N} = 0 \quad (3.10)$$

Se poate observa că pt. echilibru \bar{R} *trebuie să se găsească pe normala (n) a suprafeței* (în caz contrar punctul material s-ar putea deplasa în planul (P_t) tangent la suprafață, mișcare care n-ar fi împiedicată de nici o forță). Reacțiunea normală introduce o singură necunoscută care se poate alege ori mărimea ei N ori parametrul λ din expresia:

$$\bar{N} = \lambda \cdot \nabla f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) \quad (3.11)$$

În spațiu sistemul de ecuații scalare se poate scrie:

$$\begin{cases} \bar{R}_x + \bar{N}_x = 0 \\ \bar{R}_y + \bar{N}_y = 0 \\ \bar{R}_z + \bar{N}_z = 0 \end{cases} \text{ sau: } \begin{cases} \bar{R}_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \bar{R}_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \bar{R}_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Primul sistem are ca necunoscute poziția de echilibru (x,y,z) și N, iar al doilea (x,y,z) și λ . Pentru a putea rezolva sistemul trebuie să i se atașeze ecuația suprafeței $f(x,y,z)=0$, rezultă astfel un sistem *de patru ecuații cu patru necunoscute*.

3.4.2 Legătura pe o curbă lucie

Fie o curbă (Γ) fixă, lucie/fără frecare având ecuațiile $f_1(x,y,z)=0$ și $f_2(x,y,z)=0$ (dată ca intersecție a două suprafețe). punctul material M este obligat să rămână pe curbă sub acțiunea unui sistem de forte \bar{F}_i $i = \overline{1,n}$ (Figura 3.5). El pierde două grade de libertate datorită legăturii pe curbă. În spațiu (3D) între cele trei coordonate (x,y,z) există două relații, ecuațiile curbei, deci rămâne independentă doar o coordonată ce determină poziția pe curbă adică îi mai rămâne punctului doar un grad de libertate (se poate mișca numai în lungul curbei).

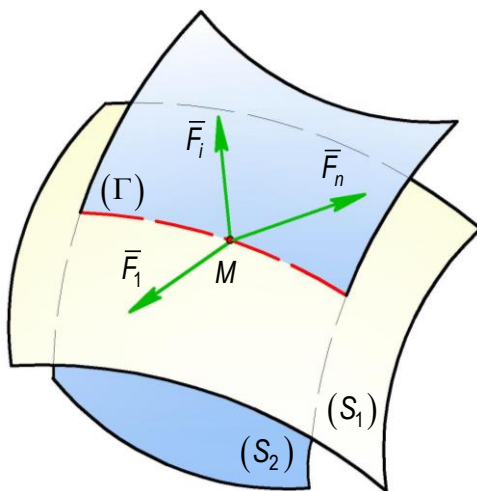


Figura 3.5

În schița mecanică, sistemul de forțe se înlocuiește cu rezultanta lui \bar{R} iar legătura cu forța de legătură a curbei (Figura 3.6). se duce tangenta (t) și planul (P_n) normal la curbă în punctul M . Legătura împiedică deplasarea în planul normal, iar forța de legătură se găsește în același plan și se numește tot "reacțiune normală" .

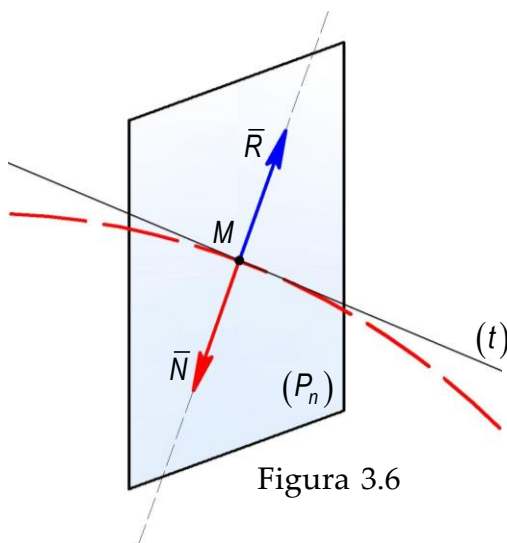


Figura 3.6

Ecuția vectorială de echilibru ia forma și în cazul acesta $\bar{R} + \bar{N} = 0$. Se poate observa că pentru echilibru rezultanta *trebuie să se găsească în planul normal (P_n) al curbei* (în caz contrar punctul s-ar putea deplasa în lungul tangentei (t) la curbă, mișcare care n-ar fi împiedicată de nici o forță). Reacțiunea normală introduce două necunoscute care se pot lua fie ca și componentele ei pe două direcții perpendiculare N_1 și N_2 , adică: $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$, fie ca parametri λ_1 și λ_2 din expresia:

$$\bar{N} = \lambda_1 \cdot \nabla f_1 + \lambda_2 \cdot \nabla f_2 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{k} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \bar{k} \right) \quad (3.13)$$

În spațiu sistemul de ecuații scalare se poate scrie:

$$\begin{cases} \bar{R}_x + \bar{N}_{1x} + \bar{N}_{2x} = 0 \\ \bar{R}_y + \bar{N}_{1y} + \bar{N}_{2y} = 0 \\ \bar{R}_z + \bar{N}_{1z} + \bar{N}_{2z} = 0 \end{cases} \text{ sau: } \begin{cases} \bar{R}_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \bar{R}_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ \bar{R}_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Primul sistem are ca necunoscute poziția de echilibru (x, y, z), N_1 și N_2 , iar al doilea (x, y, z), λ_1 și λ_2 . Pentru a putea rezolva sistemul trebuie să i se atașeze ecuațiile curbei $f_1(x, y, z) = 0$ și $f_2(x, y, z) = 0$ (se va obține un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute).

3.4.3 Legătura prin bară sau fir

Se consideră un punct material M atașat printr-un fir/bară de lungime l de un punct fix O . Punctul este supus acțiunii unui sistem de forte $\bar{F}_i, i = 1 \rightarrow n$ (vezi Figura 3.7). Dacă s-ar putea mișca punctul s-ar deplasa fie pe suprafața unei sfere de rază l în cazul legăturii prin bară rigidă sau pe sferă și în interiorul ei în cazul legăturii prin fir.

Observatii: De menționat că bara rezistă la întindere și compresiune pe când firul rezistă numai la întindere. Mișcarea suprimată este pe direcția barei/firului. Punctul pierde un grad de libertate.

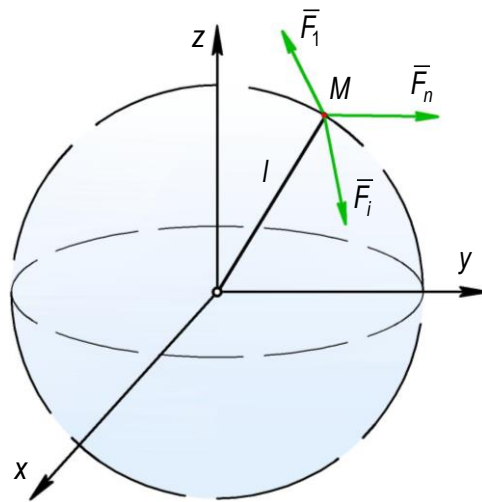


Figura 3.7

Legătura este exprimată matematic printr-o ecuație de forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \text{ - pentru bară} \quad (3.15)$$

sau printr-o inecuație de tipul:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2 \text{ - pentru fir.} \quad (3.16)$$

În spațiu (3D) între cele trei coordonate ale punctului există o relație (ecuație/inecuație), prin urmare numai două coordonate rămân independente deci punctul *are două grade de libertate*. În schema mecanică, sistemul de forțe se înlocuiește cu rezultanta lui \bar{R} , iar legătura cu forța de legătură a suprafeței (Figura 3.8).

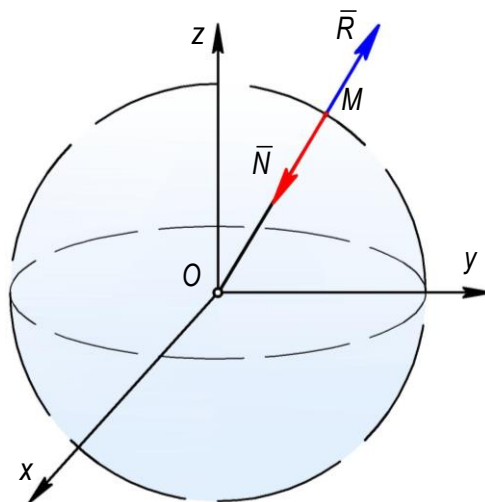


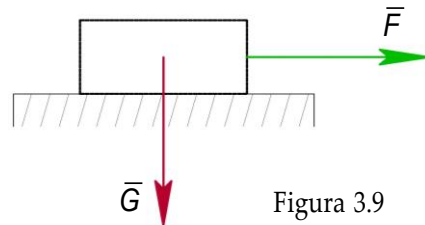
Figura 3.8

Forța de legătură are direcția barei/firului și se numește "tensiunea" din bară/fir \bar{S} . Ecuația vectorială de echilibru ia forma $\bar{R} + \bar{S} = 0$. Se observă că **rezultanta \bar{R} trebuie să fie orientată în lungul barei/firului** pentru echilibru. Tensiunea introduce o singură necunoscută, mărimea ei, S.

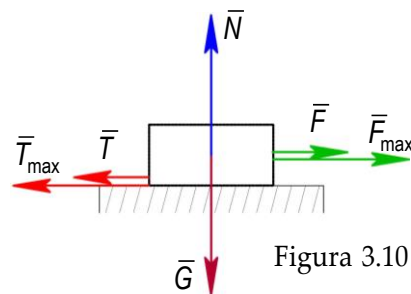
3.5 Legături cu frecare ale punctului material

3.5.1 Frecarea Coulombiană

Pentru a studia legăturile reale ale punctului material se ține seama de frecarea de alunecare/uscată/Coulombiană. Se consideră în plan (2D) un corp așezat pe o suprafață fixă și aspră (cu frecare) acționat de greutatea proprie \vec{G} , și de o forță de tracțiune \vec{F} (vezi Figura 3.9). Experimental se crește mărimea forței de tracțiune începând de la 0. Se constată că inițial corpul stă în echilibru pe suprafață până când se ajunge la o valoare maximă F_{\max} la care corpul iese din echilibru și începe să se deplaseze. La început corpul stă pe loc din cauza frecării cu suprafața.



Pentru studiul echilibrului, se consideră schița mecanică din Figura 3.10.



Inițial mișcările interzise de legătura cu suprafața sunt pe direcția normalei la suprafață și de-a lungul suprafeței în sensul forței de tracțiune. Forțele de legătură sunt reacțiunea normală \vec{N} și forța de frecare \vec{T} , iar forțele active/date sunt \vec{G} și \vec{F} . Ecuația vectorială de echilibru este:

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} = 0 \quad (3.17)$$

În plan cele două ecuații scalare (proiecțiile de forte pe orizontală și pe verticală) sunt:

$$\begin{cases} F - T = 0 \\ N - G = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

care permit determinarea forțelor de legătură: $T = F$, respectiv $N = G$.

Graficul forței de frecare în funcție de forța de tracțiune este prezentată în Figura 3.11.

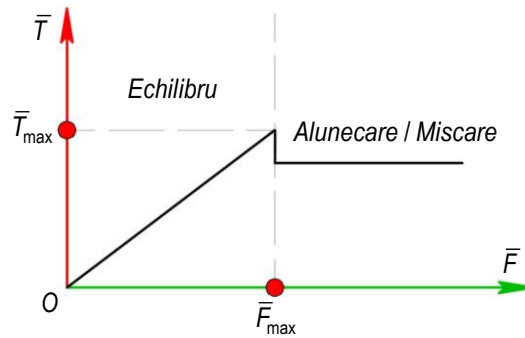


Figura 3.11

Se poate vorbi de o zonă de echilibru până la F_{\max} la care îi corespunde $T_{\max} = F_{\max}$ după care forța de frecare scade brusc cu cca 10-20% și rămâne constantă, iar corpul alunecă în sensul forței de tracțiune. Condiția de echilibru în cazul frecării este:

$$T \leq T_{\max} \quad (3.19)$$

Legile frecării, stabilite de Charles Augustin Coulomb sunt:

1. Valoarea maximă a forței de frecare nu depinde de mărimea suprafețelor în contact și de viteza lor relativă (la viteze mici);
2. Valoarea maximă a forței de frecare depinde de natura suprafețelor în contact, de gradul lor de prelucrare și de mărimea reacțiunii normale.

Matematic legile frecării uscate pot fi exprimate prin relația:

$$T_{\max} = \mu \cdot N \quad (3.20)$$

Observații: - ținând cont de condiția de echilibru se poate scrie:

$$T \leq \mu \cdot N \quad (3.21)$$

- μ poartă numele de "**coeficient de frecare**" (de aderență în zona de echilibru sau de alunecare în zona de mișcare);

- μ depinde de natura materialelor în contact și de rugozitatea suprafețelor;

3.5.2 Legătura pe o suprafață aspră

Fie o suprafață (S) fixă, aspră/cu frecare având ecuația $f(x,y,z)=0$. punctul material M este obligat să rămână pe suprafață sub acțiunea unui sistem de forte $\vec{F}_i, i=1 \rightarrow n$ (vezi Figura 3.12). În schița mecanică: sistemul de forte poate fi înlocuit cu rezultanta lui \vec{R} , iar legătura cu forțele de legătură ale suprafeței.

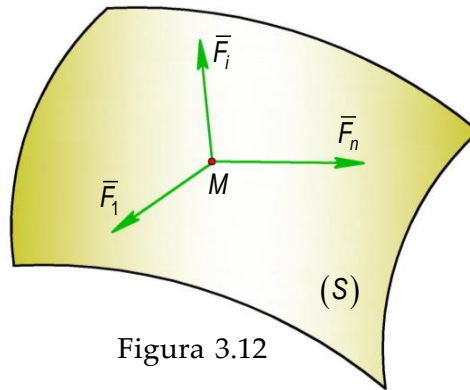


Figura 3.12

Legătura împiedică mișcările pe direcția normalei (n) la suprafața (S) și în planul tangent (Pt). Forțele de legătură sunt: **reacțiunea normală** și **forța de frecare**. Față de suprafața ideală, cea reală (cu frecare) introduce o necunoscută în plus ce intervine din cauza frecării (vezi Figura 3.13).

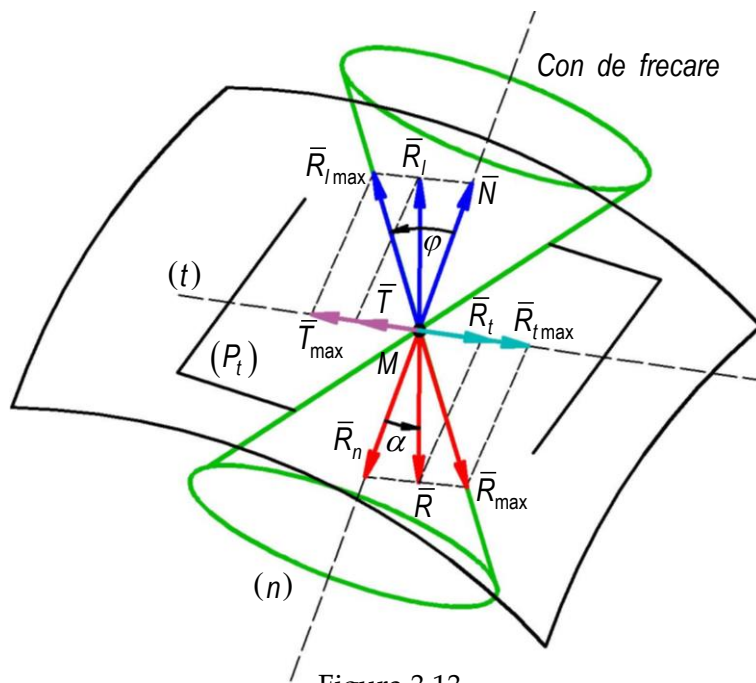


Figura 3.13

Se proiectează \vec{R} pe normală obținând \vec{R}_n . Axa normală (n) determină un plan ce intersectează (Pt) după tangenta (t). \vec{R} se proiectează pe aceasta prin \vec{R}_t . Componentei \vec{R}_n

ce apasă punctul pe suprafață i se opune reacțiunea normală \bar{N} , iar componentei \bar{R}_t i se opune forța de frecare \bar{T} . Compunând cele două reacțiuni se obține \bar{R}_l . Ecuația vectorială de echilibru $\bar{R} + \bar{R}_l = 0$ se poate explicita conform cu: $\bar{R} + \bar{N} + \bar{T} = 0$. (3.22)

Atunci când crește \bar{R}_t începând de la 0, peste depășirea unei valori $\bar{R}_{t\max}$ punctul M iese din echilibru și se mișcă. Compunând $\bar{R}_{t\max}$ cu \bar{R}_n rezultă \bar{R}_{\max} adică:

$$\bar{R}_{\max} = \bar{R}_n + \bar{R}_{t\max}. \quad (3.23)$$

Lui $\bar{R}_{t\max}$ i se opune \bar{T}_{\max} . Compunând \bar{T}_{\max} cu \bar{N} se obține, în sens opus lui, \bar{R}_{\max} , vectorul $\bar{R}_{l\max}$, astfel se poate scrie: $\bar{R}_{l\max} = \bar{N} + \bar{T}_{\max}$ (3.24)

Unghiul φ dintre $\bar{R}_{l\max}$ și \bar{N} este stabilit prin: $\tan \varphi = \frac{T_{\max}}{N} = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu$ (3.25)

Unghiul a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare se numește "unghi de frecare". Dacă se rotește pe $\bar{R}_{t\max}$ în planul tangent (P_t) în jurul normalei (n) constatăm că și \bar{R}_{\max} , \bar{T}_{\max} și $\bar{R}_{l\max}$ se vor roti și ele. Forțele \bar{R}_{\max} și $\bar{R}_{l\max}$ vor genera o suprafață conică în jurul normalei (n). Conul ce are normala la suprafață ca axă de simetrie și unghiul la vârf egal cu dublul unghiului de frecare se numește "con de frecare". Să notăm cu α unghiul dintre \bar{R} și \bar{N} . Se observă că *pentru echilibru rezultanta forțelor active/date trebuie să se afle în interiorul conului de frecare sau pe acesta în cazul echilibrului la limită*. Observația se poate traduce matematic în unghiuri: $\alpha \leq \varphi$ (3.26)

Aplicând asupra relației (3.26) funcția cosinus rezultă că: $\cos \alpha \geq \cos \varphi$. (3.27)

Primul cosinus se poate determina utilizând produsul scalar $\cos \alpha = \frac{|\bar{R} \cdot \nabla f|}{\bar{R} \cdot |\nabla f|}$ deoarece normala unei suprafețe este bine definită de gradientul ei, iar al doilea cosinus se determină prin:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (3.28)$$

Pe baza considerentelor anterioare, se obține expresia:

$$\frac{\left| R_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + R_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (3.29)$$

3.5.3 Legătura pe o curbă aspră

Fie o curbă (Γ) fixă, aspră/cu frecare având ecuațiile $f_1(x,y,z)=0$ și $f_2(x,y,z)=0$ (dată ca intersecție a două suprafețe (S_1) și (S_2)). punctul material M este obligat să rămână pe curba (Γ) sub acțiunea sistemului de forte $\vec{F}_i, i = 1 \rightarrow n$ (Figura 3.14).

În schița mecanică, sistemul de forte poate fi înlocuit cu rezultanta lui \vec{R} iar legătura cu forțele de legătură ale curbei. Legătura împiedică mișcările pe direcția tangentei (t) la curba (Γ) și în planul normal (P_n). Forțele de legătură sunt două: forța de frecare și reacțiunea normală. Față de legătura pe curba ideală, cazul real introduce o necunoscută în plus frecarea.

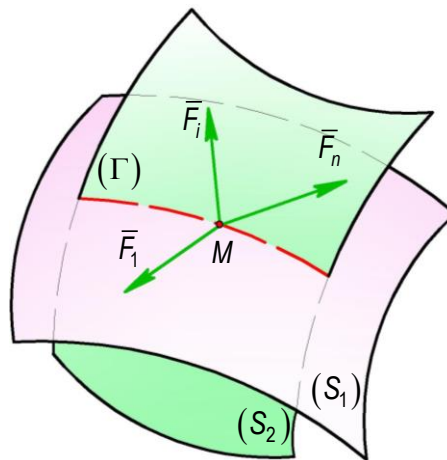


Figura 3.14

Se proiectează, conform Figurii 3.15, \vec{R} pe direcția tangențială, rezultând astfel \vec{R}_t .

Vectorul rezultat \vec{R} și axa (t) determină un plan ce intersectează (P_n) după normala (n).

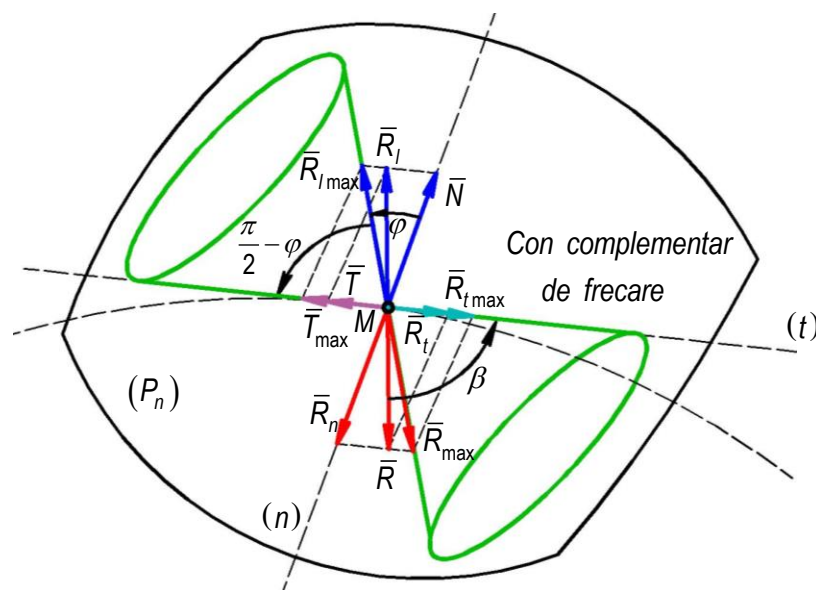


Figura 3.15

Proiectând vectorul \bar{R} pe direcția tangentei, se obține \bar{R}_t , iar la proiectare pe direcția lui (n), se obține \bar{R}_n . Componentei \bar{R}_n ce apasă punctul pe curbă i se opune reacțiunea normală \bar{N} , iar componentei \bar{R}_t i se opune forța de frecare \bar{T} . Compunând cele două reacțiuni \bar{N} și \bar{T} se obține \bar{R}_l .

Ecuția vectorială de echilibru: (3.7) devine:

$$\bar{R} + \bar{N} + \bar{T} = 0 \quad (3.30)$$

Atunci când \bar{R}_t crește de la 0 și depășește valoarea $\bar{R}_{t\max}$ punctul M iese din echilibru.

Compunând vectorii \bar{R}_n și $\bar{R}_{t\max}$ rezulta:

$$\bar{R}_{\max} = \bar{R}_n + \bar{R}_{t\max} \quad (3.31)$$

Vectorului $\bar{R}_{t\max}$ i se opune \bar{T}_{\max} , și compunand vectorii \bar{T}_{\max} cu \bar{N} , rezulta:

$$\bar{R}_{l\max} = \bar{N} + \bar{T}_{\max} \quad (3.32)$$

vectorul astfel obtinut este direct opus lui \bar{R}_{\max} .

Unghiul φ dintre $\bar{R}_{l\max}$ și \bar{N} este chiar **unghiul de frecare**. Între $\bar{R}_{l\max}$ și axa tangenta (t) este complementul unghiului φ , adică $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Dacă se rotește \bar{R}_n în planul normal (P_n) în jurul tangentei (t) se poate constata că \bar{R}_{\max} , $\bar{R}_{l\max}$ și \bar{N} se vor roti. Vectorii \bar{R}_{\max} și $\bar{R}_{l\max}$ vor genera o suprafață conică în jurul tangentei (t). Conul ce are tangenta la curbă ca axă de simetrie și unghiul la vârf egal cu dublul complementului unghiului de frecare se numește "*con complementar de frecare*".

Observatii: - pentru echilibru rezultanta forțelor active/date \bar{R} trebuie să se afle în exteriorul conului complementar de frecare sau pe acesta în cazul echilibrului la limită. Matematic, rezultă:

$$\beta \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (3.33)$$

Aplicând asupra relației (3.33) funcția cosinus, rezultă:

$$\cos \beta \leq \frac{\pi}{2} - \varphi = \sin \varphi \quad (3.34)$$

Tinand seama de faptul ca tangenta la o curbă are versorul bine determinat, adica:

$$\bar{\tau} = \frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k} \right) \quad (3.35)$$

se poate determina dintr-un produs scalar:

$$\cos \beta = \frac{|\bar{R} \cdot \bar{\tau}|}{\bar{R} \cdot |\bar{\tau}|} \quad (3.36)$$

Membrul drept al relatiei (3.34), se exprimă în funcție de tangență, sub forma:

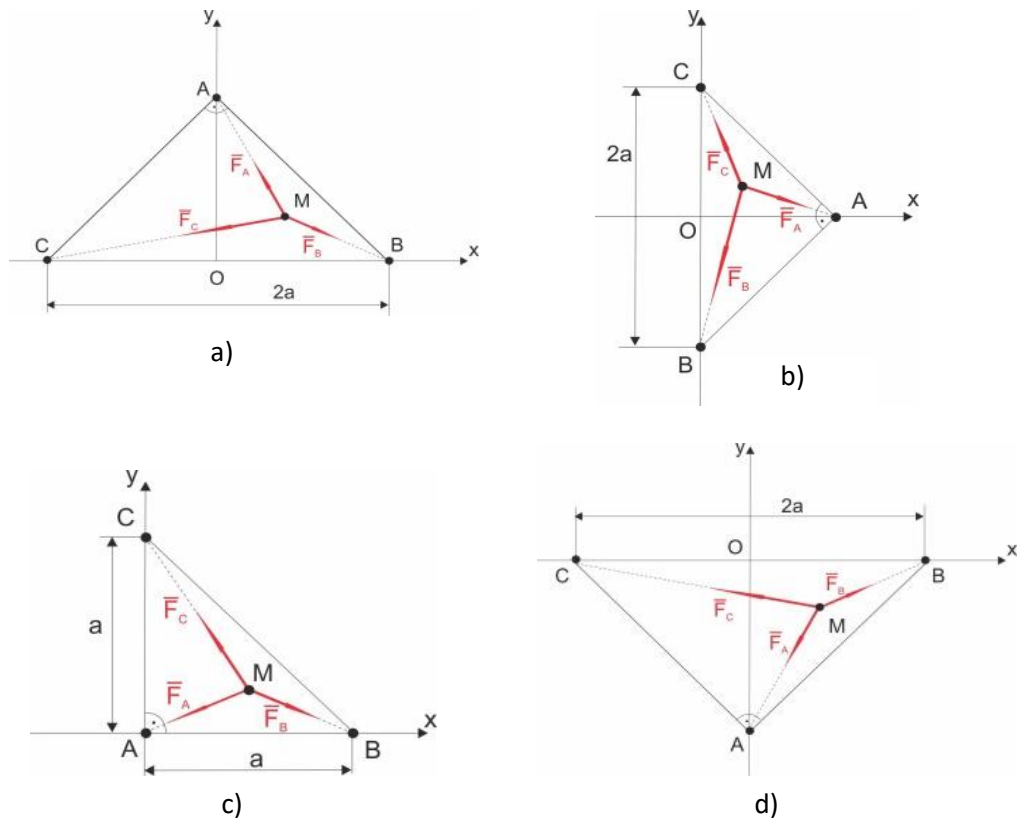
$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (3.37)$$

Pe baza considerentelor anterioare, se obține expresia:

$$\frac{\left| R_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + R_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (3.38)$$

3.6 Aplicații

P3.1. Trei puncte A, B și C situate în vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel atrag un punct material M cu forțe proporționale cu distanța până la vârful respectiv, constanta de proporționalitate fiind k. Să se determine poziția de echilibru a punctului M cunoscând dimensiunile triunghiului ABC.



Indicații: 1. Se face mai întâi schița mecanică a problemei;

2. Se scrie ecuația vectorială de echilibru;

3. Se alege un sistem de referință dacă nu este impus de problemă;

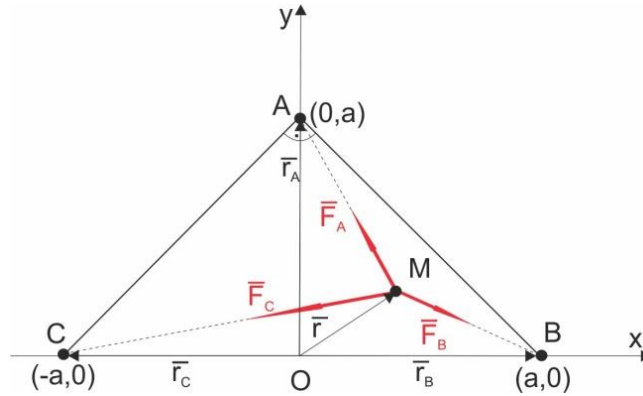
4. Ecuațiile scalare de echilibru se obțin proiectând pe axe ecuația vectorială;

5. Se rezolvă sistemul astfel obținut.

Se considera exemplul a) din problema P3.1

Având dimensiunile din figură putem preciza coordonatele vârfurilor triunghiului, deci

vectorii de poziție a punctelor A, B și C sunt $\vec{r}_A = a\vec{j}$ $\vec{r}_B = a\vec{i}$ $\vec{r}_C = -a\vec{i}$.



Punctului M nu i se cunoaște poziția și atunci notăm cu $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vectorul său de poziție. Ecuația vectorială de echilibru este:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0.$$

Se exprimă forțele

$$\begin{cases} \vec{F}_A = k\vec{MA} \\ \vec{F}_B = k\vec{MB} \\ \vec{F}_C = k\vec{MC} \end{cases}$$

Din schiță se pot determina vectorii: $\vec{MA} = \vec{r}_A - \vec{r}, \vec{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}, \vec{MC} = \vec{r}_C - \vec{r}$.

Se înlocuiesc forțele astfel exprimate în ecuația vectorială de echilibru

$$k(\vec{r}_A - \vec{r}) + k(\vec{r}_B - \vec{r}) + k(\vec{r}_C - \vec{r}) = 0$$

care este de fapt o ecuație de gradul I în \vec{r} .

Observații –1. ca poziție în spațiu cele trei forțe sunt coplanare deoarece imaginea geometrică a relației $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ este un triunghi care este o figură geometrică plană fiind suficient un sistem de referință plan;

2. Se poate rezolva ecuația vectorială, având grijă la proiecția soluției \vec{r} pe axe obținând poziția de echilibru a lui M;

3. sau se proiectează ecuația vectorială pe axe și se obține sistemul de ecuații scalare, se rezolvă, găsind poziția de echilibru a punctului;

4. dezavantajul ultimei variante este că trebuie rezolvat un sistem de două ecuații în loc de o singură ecuație (vectorială);

5. problema este de tip direct (se dau forțele și se cere poziția de echilibru) prin urmare necunoscând poziția punctului nu se poate alege originea sistemului de referință chiar în punct cum s-ar proceda la problema de tip invers (se dă poziția de echilibru și se cer forțele).

Se proiectează ecuația vectorială: $k(\vec{r}_A - \vec{r}) + k(\vec{r}_B - \vec{r}) + k(\vec{r}_C - \vec{r}) = 0$

pe axe:

$$\begin{cases} k(0 - x) + k(a - x) + k(-a - x) = 0 \\ k(a - y) + k(0 - y) + k(0 - y) = 0 \end{cases}$$

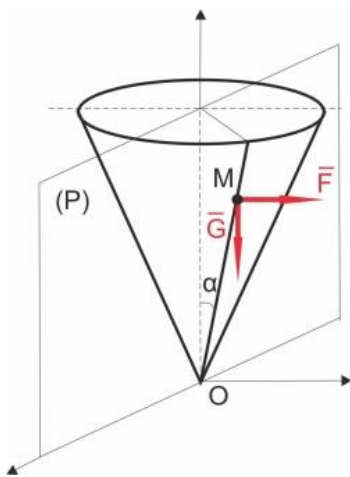
Sistemul ecuațiilor scalare are forma finală:

$$\begin{cases} -3kx = 0 \\ ka - 3ky = 0 \end{cases}$$

cu soluția $x=0$ $y=a/3$ coordonatele poziției de echilibru, exact centrul de greutate al triunghiului.

Varianta cealaltă conduce la $k(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) - 3k\vec{r} = 0$

cu soluția $\vec{r} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$ având proiecțiile pe axe $x=0$ $y=a/3$.

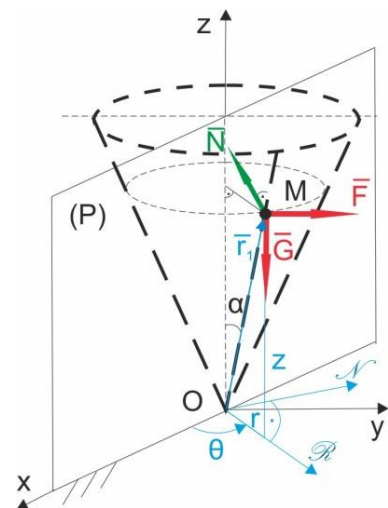


P3.2. Un punct material M de greutate G este așezat în interiorul unui con circular drept, având unghiul la vârf 2α și vârful în jos. Așupra punctului situat pe generatoarea conului acționează o forță de respingere paralelă cu axa Oy, proporțională cu distanța punctului față de planul (P) (plan ce coincide cu planul xOz). Știind că punctul stă în echilibru se cere poziția acestuia.

Se realizează schița mecanică a problemei. Punctul M este acționat de greutatea proprie, forța de respingere și reacțiunea conului.

Reacțiunea este orientată perpendicular pe generatoarea conului spre axa lui de simetrie.

Ecuația vectorială de echilibru este $\vec{G} + \vec{F} + \vec{N} = 0$.



Soluția în coordonate carteziene

Coordonatele lui M sunt $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \cot \alpha \end{cases}$ unde r este distanța până la axa conului.

Dacă se elimină parametrul θ se obține ecuația suprafeței conului:

$$x^2 + y^2 = r^2 = z^2 \tan^2 \alpha \text{ sub forma implicită } f(x, y, z) = 0 \quad x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0 .$$

Compunând forțele active/date $\vec{G} + \vec{F} = \vec{R}$ rezultă rezultanta lor.

$$\text{Normala la suprafață se calculează cu relația: } \vec{N} = \lambda \nabla f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\text{în care derivatele parțiale sunt: } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x ; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y ; \frac{\partial f}{\partial z} = -2z \tan^2 \alpha .$$

$$\text{Componentele lui } \vec{R} \text{ se determină : } R_x = 0 ; R_y = F = ky ; R_z = -G$$

$$\text{rezultând sistemul de ecuații de forma: } \begin{cases} \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\lambda \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Astfel } \begin{cases} \frac{0}{2x} = \frac{ky}{2y} = \frac{-G}{-2z \tan^2 \alpha} = -\lambda \\ x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0 \end{cases} \text{ sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute } \lambda, x, y \text{ și } z.$$

$$\text{Soluțiile lui sunt } \lambda = -\frac{k}{2} ; x = 0 ; z = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha ; y = \pm z \tan \alpha = \pm \frac{G}{k} \cot \alpha .$$

Se observă că sunt două poziții de echilibru situate în planul yOz simetric față de axa z care se notează cu M_1 și M_2 . Reacțiunea suprafeței se calculează cu:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

unde componentele se pot determina din ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Astfel rezultă: } \begin{cases} N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{k}{2} 2x = -kx = 0 \\ N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{k}{2} 2y = -ky = \mp G \cot \alpha \\ N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{k}{2} (-2z \tan^2 \alpha) = G \end{cases}$$

$$\text{cu care se obține: } N = \frac{G}{\sin \alpha} .$$

Soluția în coordonate cilindrice

$$\text{Din figură se constată că: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \text{ și } F = ky = kr \sin \theta . \\ z = r \cot \alpha \end{cases}$$

Se proiectează ecuația vectorială de echilibru pe axele sistemului cilindric găsim sistemul

de ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} F \sin \theta - N \cos \alpha = 0 \\ F \cos \theta = 0 \\ -G + N \sin \alpha = 0 \end{cases} .$$

Din ecuația a doua: $\cos \theta = 0$, se obțin 2 rădăcini: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ unde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Rezultă două poziții de echilibru situate într-un plan perpendicular pe (P).

Din ecuația a treia rezultă :

$$N = \frac{G}{\sin \alpha} ,$$

iar din prima

$$F = \frac{N \cos \alpha}{\sin \theta}$$

care permit determinarea lui r , sub forma:

$$r = \frac{F}{k \sin \theta} = \frac{G \cos \alpha}{k \sin \alpha \sin^2 \theta} = \frac{G \cot \alpha}{k \sin^2 \theta} .$$

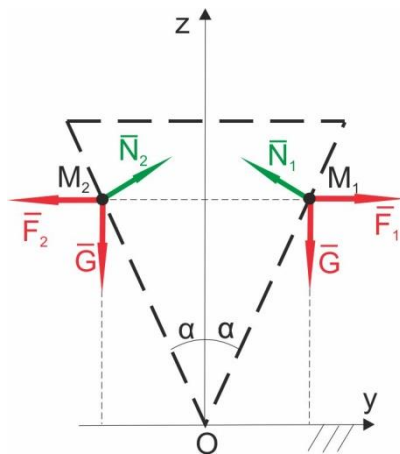
În sfârșit $z = r \cot \alpha = \frac{G \cot^2 \alpha}{k \sin^2 \theta}$, ținând cont de valorile lui θ se deduce:

$$r_1 = r_2 = \frac{G \cot \alpha}{k} \quad z_1 = z_2 = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha .$$

Pozițiile de echilibru au coordonatele cilindrice $M_1(r_1, \theta_1, z_1)$ și $M_2(r_2, \theta_2, z_2)$.

Soluția în plan

Elementul de plecare este observația 1 a problemei P3.1. Cele trei forțe sunt coplanare numai dacă punctul M se află în planul yOz caz cu două poziții simetrice față de axa z M_1 și M_2 .



Se pot scrie ecuațiile de echilibru scalare în acel plan pentru fiecare poziție în parte.

Pentru M_1 $\begin{cases} F_1 - N_1 \cos \alpha = 0 \\ N_1 \sin \alpha - G = 0 \end{cases} ,$

iar pentru M_2 $\begin{cases} -F_2 + N_2 \cos \alpha = 0 \\ N_2 \sin \alpha - G = 0 \end{cases} .$

Se poate observa că $N_1 = N_2 = \frac{G}{\sin \alpha}$ Din prima ecuație a sistemului 1 rezultă: $F_1 = N_1 \cos \alpha$, care conduce la: $y_1 = \frac{G}{k} \cot \alpha$.

Analog $F_2 = N_2 \cos \alpha$ și $y_2 = -\frac{F_2}{k} = -\frac{G}{k} \cot \alpha$.

Știind că punctele M se află pe con, coordonatele z_1 și z_2 se determină cu:

$$z_1 = y_1 \cot \alpha = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha \quad z_2 = -y_2 \cot \alpha = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha$$

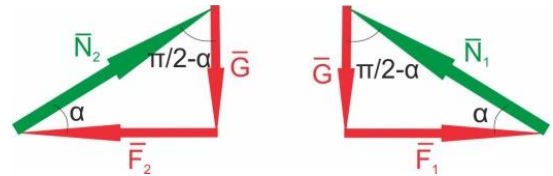
deci cele două puncte se află la aceeași cotă.

În planul yOz $x_1=x_2=0$ lucru care permite precizarea coordonatelor celor două puncte și reacțiunea normală.

Soluția geometrică

Considerând același plan yOz , sunt tot două poziții de echilibru, ecuațiile vectoriale de echilibru fiind:

$$\vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{N}_1 = 0 \quad \text{și} \quad \vec{G} + \vec{F}_2 + \vec{N}_2 = 0.$$



Imaginile geometrice ale celor două ecuații sunt două triunghiuri. Scriind teorema sinusurilor în cele două triunghiuri rezultă:

$$\frac{N_1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \quad \frac{N_2}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}.$$

Știind că: $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ rezultă:

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{\sin \alpha} \quad \text{și} \quad F_1 = F_2 = \frac{G \cos \alpha}{\sin \alpha} = G \cot \alpha,$$

din care în final se determină:

$$y_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{G}{k} \cot \alpha,$$

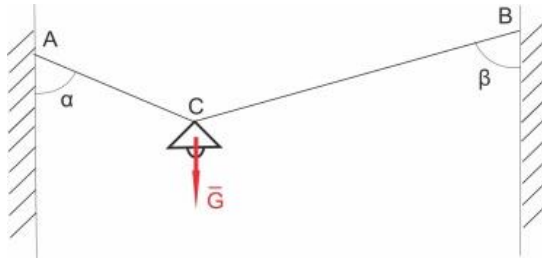
$$y_2 = -\frac{F_2}{k} = -\frac{G}{k} \cot \alpha,$$

$$z_1 = y_1 \cot \alpha = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha,$$

$$z_2 = -y_2 \cot \alpha = \frac{G}{k} \cot^2 \alpha.$$

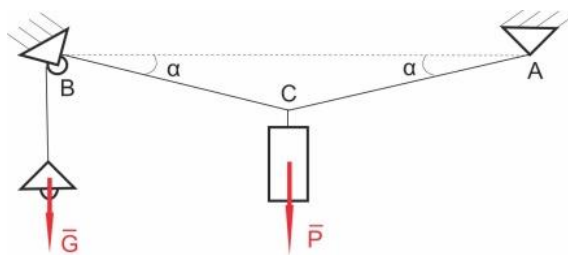
Observație – Se poate aplica soluția geometrică (mai rapidă) dacă sunt doar trei forțe ce acționează asupra punctului.

P3.3. O lampă de greutate G este suspendată în C printr-un fir conform schiței. Firul este prins între punctele A și B de doi pereți verticali. Să se determine valorile tensiunilor din fir.



- Indicații**
1. Se va studia echilibrul punctului C ;
 2. Se întocmește schița mecanică a problemei;
 3. Forțele ce solicită punctul sunt greutatea proprie G și tensiunile S_1 și S_2 din porțiunile CA respectiv CB ;
 4. Fiind numai trei forțe sistemul de referință este plan;

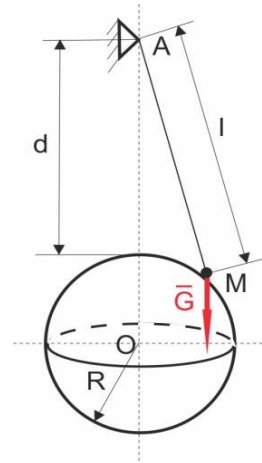
P3.4. O lampă de greutate G este suspendată printr-un fir fixat în A și petrecut peste un mic scripete ideal B . Înălțimea lămpii se poate regla cu o greutate atârnată în C conform schiței. Să se determine tensiunile din fir și mărimea greutății P .



Indicații -1. Sunt valabile indicațiile de la **P3.3**;

-2. Scripetele ideal din B are numai rolul de a schimba direcția firului, tensiunile de la capetele firului petrecut peste scripete fiind egale;

P3.5. Un punct material M de greutate G este suspendat printr-un fir de lungime l de un punct fix A și rezemat pe o sferă fixă de rază R . Știind că punctul A se află la distanța d de suprafața sferei să se determine tensiunea din fir și reacțiunea normală a sferei.

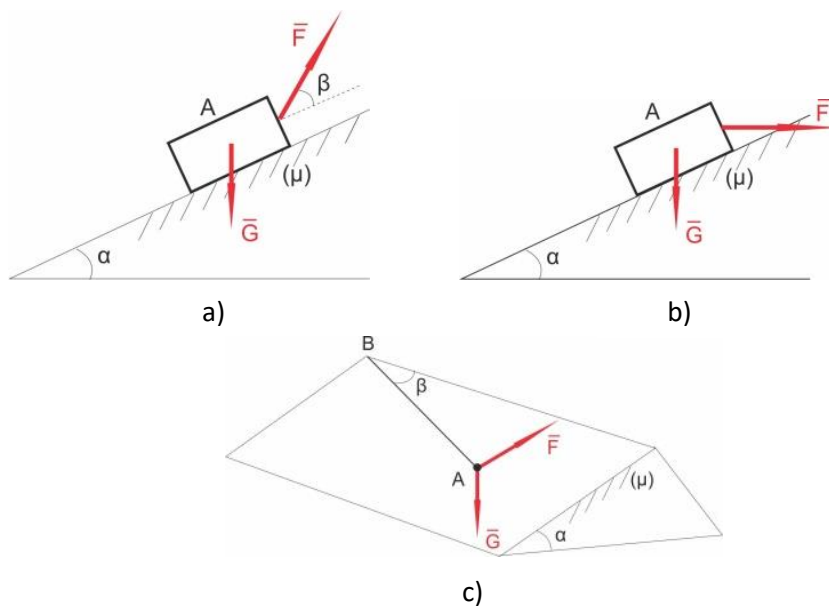


Indicații -1. Se întocmește schița mecanică a problemei;

-2. Problema este plană fiind numai trei forțe;

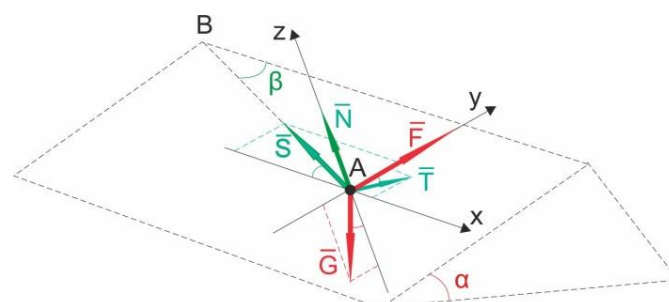
-3. Axele sistemului de referință cu originea în M sunt tangenta și normala la sferă;

P3.6. Un corp A asimilabil unui punct material este așezat pe un plan înclinat cu unghiul α . Planul este aspru având coeficientul de frecare la alunecare μ . Asupra corpului acționează o forță F conform schiței. Să se determine mărimea forței F astfel încât corpul să stea în echilibru.



Se va rezolva în continuare exemplul c), al problemei P3.6. Se izolează corpul A de legături întocmind

schiza mecanică.



Acesta are o legătură prin fir și este rezemat cu frecare pe planul înclinat. Forțele de legătură sunt tensiunea din fir \bar{S} , reacțiunea normală \bar{N} a planului și forța de frecare \bar{T} . Se scrie ecuația vectorială de echilibru:

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{S} + \bar{N} + \bar{T} = 0.$$

Corpul punctiform A fiind în echilibru în poziția cunoscută din schiță, se poate considera originea sistemului de referință chiar în punct. Forța de frecare este normală pe fir deoarece corpul A s-ar putea mișca pe un arc de cerc având ca rază firul. Existând două tendințe de mișcare posibile, fie urcă pe plan, fie coboară, în funcție de forța F, trebuie să fie considerate ambele situații.

I. Tendința de coborâre a corpului pe plan (vezi schița).

Ecuatiile scalare se obțin prin proiectarea celei vectoriale pe axe:

$$\begin{cases} T \sin \beta - S \cos \beta = 0 \\ F - G \sin \alpha + S \sin \beta + T \cos \beta = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Expresiilor anterioare, li se atașează relația pentru frecare $T \leq \mu N$.

Din prima ecuație se deduce S, care substituie în a doua ținând cont că N rezultă din ecuația a treia. Astfel, rezultă:

$$F - G \sin \alpha + \frac{T}{\cos \beta} = 0.$$

Dacă folosim relația frecării se obține inecuația:

$$F - G \sin \alpha + \frac{T}{\cos \beta} \geq 0$$

rezultând forța:

$$F \geq G(\sin \alpha - \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}).$$

Deci pentru ca să nu coboare pe plan trebuie ca $F \geq F_{min}$ de unde rezultă:

$$F_{min} = G(\sin \alpha - \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}).$$

II. Tendința de urcare pe plan.

Refăcând calculele se constată că se schimbă pe schiță sensul forței de frecare, semnul ei în ecuațiile de echilibru, sensul inegalității și semnul lui μ în rezultatul final. Se obține:

$$F \leq G(\sin \alpha + \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}).$$

Prin urmare ca să nu urce trebuie ca: $F \leq F_{max}$, unde:

$$F_{max} = G(\sin \alpha + \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}).$$

În concluzie, reunind cele două rezultate se obține următorul interval de valori pentru forța F:

$$F_{min} \leq F \leq F_{max}.$$

Capitolul 4 - Echilibrul solidului rigid

4.1 Poziționarea solidului rigid. Grade de libertate

Așa cum s-a arătat în *Capitolul trei*, gradele de mobilitate, sunt definite prin parametrii geometrici independenți, care descriu poziția unui punct sau solid rigid, astfel că numărul gradelor de libertate ale unui punct material/rigid este dat de numărul de mișcări independente, pe care le poate efectua liber. În cazul unui solid rigid liber în spațiu, poziția și orientarea acestuia se definește cu ajutorul a șase parametri independenți, astfel că are șase grade de libertate. Cei șase parametri geometrici independenți sunt: coordonatele (x_0, y_0, z_0) ale unui punct O al rigidului și unghiurile lui Euler (ψ, θ, φ) sau cosinusurile directoare ale axelor sistemului mobil $Oxyz$ față de axele sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$.

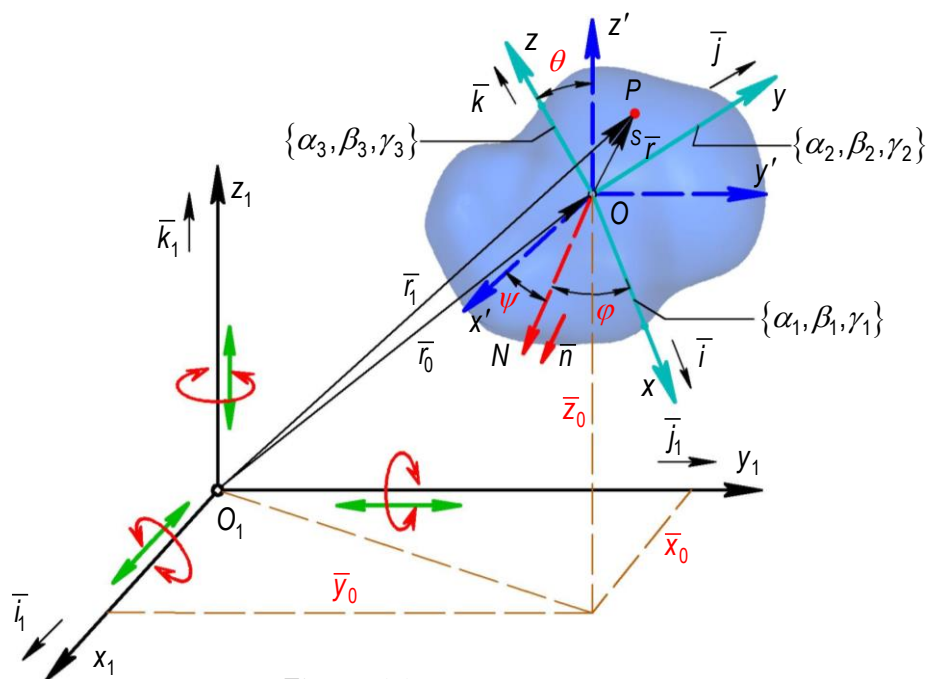


Figura 4.1

Pentru a pune în evidență cele șase grade de libertate, conform Figurii 4.1 se consideră un solid rigid (S). De asemenea, se consideră trei sisteme de referință, după cum urmează:

- un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$;
- un sistem de referință mobil $Ox'y'z'$, având axele tot timpul paralele cu sistemul de referință fix;

- *un sistem de referință tot mobil* $Oxyz \equiv \{S\}$, legat de rigid și cu originea într-un punct arbitrar ales O , astfel că își schimbă orientarea odată cu rotația rigidului.

Pentru a fi cunoscută poziția și orientarea rigidului trebuie cunoscută, poziția unui punct oarecare aparținând acestuia. Fie P un punct oarecare aparținând solidului rigid. Vectorul său de poziție față de sistemul fix este:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + {}^S\bar{r} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

În expresiile anterioare:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1, & \text{iar} \quad {}^S\bar{r} &= S_x \cdot \bar{i} + S_y \cdot \bar{j} + S_z \cdot \bar{k} \\ \bar{r}_0 &= x_0 \cdot \bar{i}_1 + y_0 \cdot \bar{j}_1 + z_0 \cdot \bar{k}_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se observă că vectorul de poziție al lui P față de rigid, ${}^S\bar{r}$, este exprimat față de axele sistemului mobil $Oxyz$. Orientarea axelor sistemului de referință mobil $Oxyz$, față de cel fix, $O_1x_1y_1z_1$, este dată de:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \cos \alpha_1 \cdot \bar{i}_1 + \cos \beta_1 \cdot \bar{j}_1 + \cos \gamma_1 \cdot \bar{k}_1; \\ \bar{j} &= \cos \alpha_2 \cdot \bar{i}_1 + \cos \beta_2 \cdot \bar{j}_1 + \cos \gamma_2 \cdot \bar{k}_1; \\ \bar{k} &= \cos \alpha_3 \cdot \bar{i}_1 + \cos \beta_3 \cdot \bar{j}_1 + \cos \gamma_3 \cdot \bar{k}_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

unde $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ sunt cosinusurile directoare ale axei Ox, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ cosinusurile directoare ale axei Oy și $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, cosinusurile directoare ale axei Oz, față de sistemul fix.

Așadar, fiecare axă a sistemului mobil $Oxyz$ este definită ca orientare prin cei trei versori, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ale căror componente sunt:

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{j} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Ca urmare, se poate scrie:

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} \bar{i}^T \cdot \bar{i}_1 \\ \bar{i}^T \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{i}^T \cdot \bar{k}_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{j} = \begin{bmatrix} \bar{j}^T \cdot \bar{i}_1 \\ \bar{j}^T \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{j}^T \cdot \bar{k}_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{k}^T \cdot \bar{i}_1 \\ \bar{k}^T \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{k}^T \cdot \bar{k}_1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Dacă asupra vectorului de poziție se impun restricții că modulul să fie egal cu unitatea și să fie ortogonale două câte două, între cosinusurile directoare există următoarele relații de legătură, de forma:

$$\begin{aligned} \bar{i}^T \cdot \bar{i}_1 &= \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1 \\ \bar{i}^T \cdot \bar{j}_1 &= \bar{j}^T \cdot \bar{i}_1 = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 = 0 \\ \bar{i}^T \cdot \bar{k}_1 &= \bar{k}^T \cdot \bar{i}_1 = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_3 = 0 \\ \bar{j}^T \cdot \bar{j}_1 &= \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1 \\ \bar{j}^T \cdot \bar{k}_1 &= \bar{k}^T \cdot \bar{j}_1 = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_3 = 0 \\ \bar{k}^T \cdot \bar{k}_1 &= \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ținând seama de (4.6) există 12 parametri pentru definirea poziției unui punct al unui rigid în spațiu $\{(x_0, y_0, z_0), \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}, i = 1 \rightarrow 3$, adică trei coordonate și nouă unghiuri.

Dar, luând în considerare (4.6), între cele nouă unghiuri de orientare se stabilesc șase relații de dependență. Cele șase relații de legătură reprezintă șase restricții geometrice, astfel $9-6=3$ parametri independenți, adică cele trei cosinusi directoare (unghiuri) independente sunt necesare în caz general pentru descrie orientarea sistemului atașat rigidului.

Așadar, se observa că, în cazul unui solid rigid în spațiu situarea este descrisă prin șase parametrii geometrici independenți, reprezentând și gradele de libertate, adică coordonatele (x_0, y_0, z_0) ale unui punct O al rigidului, și cele trei unghiuri (ψ, θ, φ) sau cosinusurile directoare ale axelor reperului mobil $Oxyz$.

Observații:

- Poziția unui solid rigid liber, în spațiu, este cunoscută, dacă se știu pozițiile a trei puncte necoliniare aparținând rigidului.

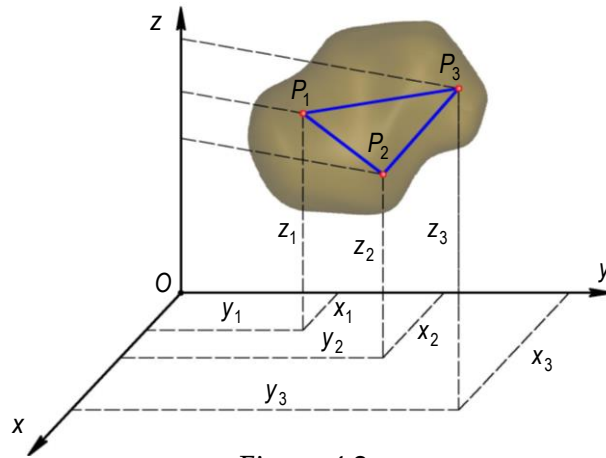


Figura 4.2

Conform Figurii 4.2 se consideră șase trei puncte aparținând unui solid rigid aflat în spațiul cartezian: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Distanțele dintre cele trei

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = cst.$$

puncte sunt: $P_2P_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = cst. \quad (4.7)$

$$P_3P_1 = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} = cst.$$

Rigidul fiind indeformabil, distanțele dintre cele trei puncte sunt constante, astfel că cele trei coordonate nu sunt independente. Așa cum se poate observa din (4.7), între cele nouă coordonate, se pot scrie doar trei relații de legătură, rezultând astfel că numai șase parametri rămân independenți, deci rigidul în spațiu are șase grade de libertate.

- Poziționarea unui solid rigid liber în plan este legată de cunoașterea coordonatelor a două puncte ce aparțin rigidului. Astfel, conform Figura 4.3, se consideră un solid rigid în planul $z = 0$, pentru care se cunosc coordonatele a două puncte aparținând corpului $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

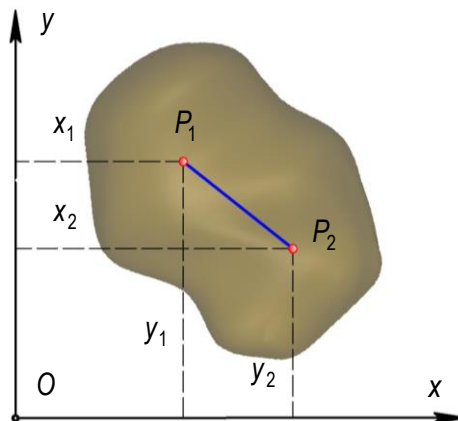


Figura 4.3

Distanța dintre cele două puncte este constantă, adică:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = cst.; \quad (4.8)$$

astfel că între cele patru coordonate, există o singură expresie de legătură, ceea ce conduce la concluzia că în cazul unui rigid liber situat într-un plan, poziția acestuia poate fi descrisă prin doar trei parametri independenți, astfel că el posedă trei grade de libertate. Cele trei grade de mobilitate ale rigidului liber situate într-un plan, provin din două translații, după două axe ce definesc planul, precum și o rotație în jurul celei de-a treia axe a unui sistem cartezian.

✓ În mecanica rigidului pentru orientare se utilizează în general un singur set de unghiuri, denumite *unghiurile lui Euler*, adică:

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \alpha_z = \psi \\ \beta_x = \theta \\ \gamma_z = \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

- unghiul ψ , numit *unghi de precesie*, este unghiul pe care *axa nodurilor* ON îl face cu axa Ox' , paralelă cu O_1x_1 . Axa nodurilor rezultă din intersecția planului mobil $Ox'y'$ cu planul Oxy .
- unghiul θ , numit *unghi de nutație*, este unghiul dintre axa Oz și Oz' .
- unghiul φ , numit *unghi de rotație proprie*, este unghiul dintre axa Ox și axa nodurilor ON.

Cele trei expresii din (4.5), pot fi integrate în următoarea expresie:

$${}^0_S[R] = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ (3 \times 1) & (3 \times 1) & (3 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Termenul ${}^0_S[R]$ definit în relația anterioară se numește *matrice de orientare rezultantă*. Conform cu (4.10), este o *matrice a cosinuşilor directori ai sistemului*, care exprimă prin cele trei coloane orientarea fiecărei axe a sistemului mobil $\{S\}$ în raport cu sistemul fix $\{0\}$.

Matricea care exprimă transferul vectorului \bar{r} din sistemul $\{S\}$ în sistemul $\{0\}$ este:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ y \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \bar{i}_1 + y \cdot \bar{j}_1 + z \cdot \bar{k}_1 = {}^0_S[R] \cdot {}^S\bar{r} \quad (4.11)$$

adică, ecuația de proiecție a vectorului ${}^S\bar{r}$ pe axele sistemului referință mobil $Oxyz$.

Concluzii: Un rigid liber se caracterizează prin șase parametri independenți, dintre care trei pentru poziție și alți trei pentru orientare:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ - \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 \ y_0 \ z_0)^T \\ - \\ (\psi \ \theta \ \varphi)^T \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Mișcările simple pe care le poate face un solid sunt trei translații în lungul axelor sistemului fix și trei rotații în jurul aceluiași axe, în total un număr de **șase mișcări simple**.

Având în vedere faptul că cele trei unghiuri ale lui Euler se află în componența matricei de rotație (4.10) se observă că aceasta se poate scrie ca o funcție de $R(\psi, \theta, \varphi)$, astfel încât există următoarea identitate:

$${}^0_S[R] = R(\psi, \theta, \varphi) \quad (4.13)$$

Ținând seama de (4.11) și de (4.13), relația (4.1) se poate rescrie ca fiind:

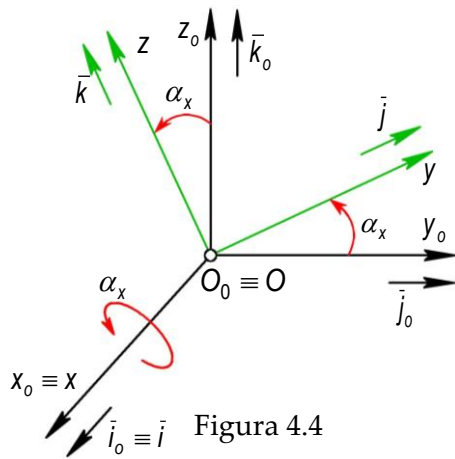
$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0 + R(\psi, \theta, \varphi) \cdot {}^S\bar{r} \quad (4.14)$$

astfel încât toți vectorii de poziție sunt proiectați pe axele sistemului de referință fix.

4.2 Matricele de rotație simplă

Pentru a pune în evidență conceptul de *matrice de rotație simplă*, se iau în studiu două sisteme de referință $\{O\}$ și $\{S\}$, cu aceeași origine $O_0 \equiv O$, în starea inițială fiind suprapuse.

În Figura 4.4, sistemului $\{S\}$ i se imprimă o rotație în jurul axei x cu un unghi α_x . Astfel, axa x rămâne coliniară/identică cu x_0 , celelalte două axe fiind rotite cu unghiul α_x în planul fix $x_0 = 0$. Unghiurile dintre versorii axelor sunt:



\sphericalangle	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
\bar{j}_0	$\frac{\pi}{2}$	α_x	$\frac{\pi}{2} + \alpha_x$
\bar{k}_0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \alpha_x$	α_x

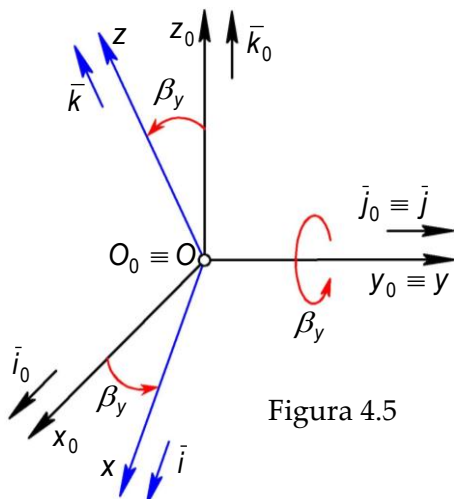
În acest caz, noua orientare a sistemului mobil este dată de către versorii:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \cos \sphericalangle [\bar{i}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{j} &= \cos \sphericalangle [\bar{j}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha_x \\ \sin \alpha_x \end{pmatrix}; \\ \bar{k} &= \cos \sphericalangle [\bar{k}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin \alpha_x \\ \cos \alpha_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Înlocuind (4.15) în (4.10), matricea de rotație rezultată devine:

$${}^0_i[R] = R(\bar{x}; \alpha_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

În Figura 4.5, se rotește cu un unghi β_y în jurul axei y_0 . Se observă că, axa y rămâne coliniară/identică cu y_0 , iar celelalte două axe se vor roti cu unghiul β_y în planul fix $y_0 = 0$. În acest caz, noua orientare a sistemului mobil este dată de:



\sphericalangle	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_0	β_y	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \beta_y$
\bar{j}_0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
\bar{k}_0	$\frac{\pi}{2} + \beta_y$	$\frac{\pi}{2}$	β_y

În acest caz, noua orientare a sistemului mobil este dată de către versorii:

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \cos \varphi [\bar{i}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} \cos \beta_y \\ 0 \\ -\sin \beta_y \end{pmatrix}; \\ \bar{j} &= \cos \varphi [\bar{j}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{k} &= \cos \varphi [\bar{k}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)] = \begin{pmatrix} \sin \beta_y \\ 0 \\ \cos \beta_y \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Înlocuind (4.17) în (4.10), matricea de rotație rezultată devine:

$${}^0_i[R] = R(\bar{y}; \beta_y) = \begin{bmatrix} \cos \beta_y & 0 & \sin \beta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_y & 0 & \cos \beta_y \end{bmatrix}\quad (4.18)$$

Conform Figurii 4.6, se imprimă o rotație cu un unghi γ_z , în jurul axei z_0 . Astfel, z rămâne coliniară/identică cu z_0 , iar celelalte două axe se vor roti cu unghiul γ_z în planul fix $z_0 = 0$. Noua orientare a sistemului mobil este dată prin:

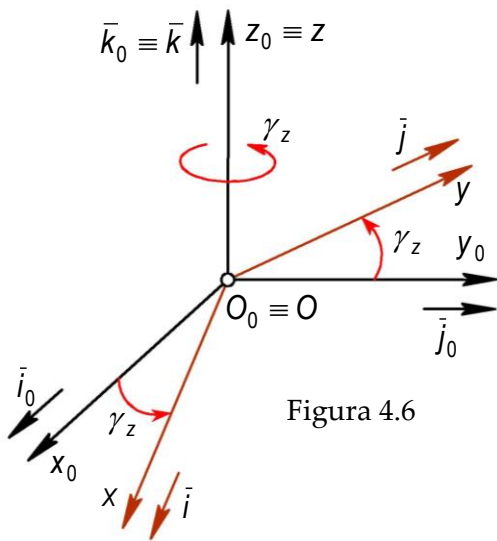


Figura 4.6

φ	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_0	γ_z	$\frac{\pi}{2} + \gamma_z$	$\frac{\pi}{2}$
\bar{j}_0	$\frac{\pi}{2} - \gamma_z$	γ_z	$\frac{\pi}{2}$
\bar{k}_0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

În acest caz, noua orientare a sistemului mobil este dată de către versorii:

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \cos \varphi \left[\bar{i}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0) \right] = \begin{pmatrix} \cos \gamma_x \\ \sin \gamma_x \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{j} &= \cos \varphi \left[\bar{j}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0) \right] = \begin{pmatrix} -\sin \gamma_x \\ \cos \gamma_x \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{k} &= \cos \varphi \left[\bar{k}, (\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0) \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.19}$$

Înlocuind (4.19) în (4.13), matricea de rotație rezultată devine:

$${}^0_i[R] = R(\bar{z}; \gamma_z) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_x & -\sin \gamma_x & 0 \\ \sin \gamma_x & \cos \gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{4.20}$$

4.3 Ecuațiile de echilibru ale solidului rigid liber

Condiția necesară și suficientă pentru că un solid rigid liber, asupra căruia acționează un sistem de forțe oarecare (vezi Figura 4.7), să fie în echilibru este că tursorul sistemului de forțe în raport cu un punct O arbitrar ales să fie nul:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O = 0\tag{4.21}$$

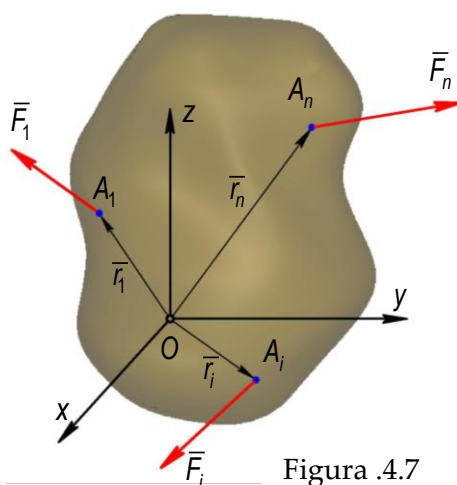


Figura .4.7

Proiectând ecuațiile vectoriale (4.21) pe axele unui sistem de referință Oxyz se obțin ecuațiile de echilibru scalare ale rigidului liber:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Observații:

- Sunt situații, în care forțele din sistemul de forțe, sunt paralele, așa cum reiese din Figura 4.8

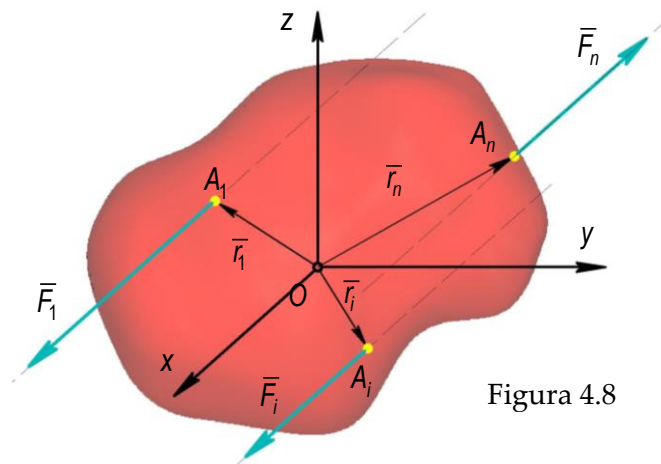


Figura 4.8

În acest caz, când forțele sunt paralele cu axa Ox, numărul ecuațiilor scalare de echilibru care pot fi scrise este trei:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix}) = 0; \quad M_z = \sum_{i=1}^n (-y_i \cdot F_{ix}) = 0 \quad (4.23)$$

adică o ecuație de echilibru pentru forțe, față de axa de care sunt paralele, și două ecuații de echilibru față de axele perpendiculare pe axa față de care sunt paralele forțele.

➤ În cazul forțelor coplanare, se pot scrie trei ecuații scalare de echilibru, conform cu Figura 4.9, astfel:

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = 0 \quad (4.24)$$

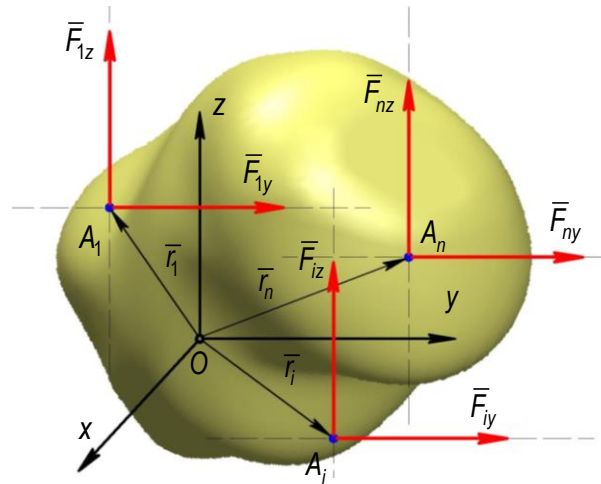


Figura 4.9

adică două ecuații de echilibru pentru forțe, față de axele în lungul cărora acționează acestea, și o ecuație de momente, față de cealaltă axă.

4.4 Echilibrul solidului rigid supus la legături fără frecare

Axioma legăturilor rămâne valabilă și în cazul rigidului supus la legături, conform căreia: *“Orice legătură poate fi înlocuită cu forțe și/sau momente de legătură (reacțiuni) care reprezintă echivalentul mecanic al legăturii, care acționând asupra corpului produce același efect mecanic că și legătura însăși”*.

Pentru a studia cazul general al echilibrului pentru un rigid supus la legături, se aplică axioma legăturilor, conform căreia asupra corpului luat în considerație va acționa alături de forțele active și un sistem al forțelor de legătură. Cele două sisteme de forțe se reduc în raport cu polul O , rezultând un torsesor al forțelor active notat $\vec{\tau}_0$ și un torsesor al forțelor de legătură $\vec{\tau}_L$, exprimate prin următoarele relații:

$$\bar{\tau}_0 = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{xL}=H \ R_{yL}=V \ R_{zL}=W]^T \\ \dots \\ [M_{xL} \ M_{yL} \ M_{zL}]^T \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

unde \bar{R} și \bar{M}_0 sunt elementele tursorului forțelor date care acționează asupra rigidului, iar \bar{R}_L și \bar{M}_{OL} reprezintă elementele tursorului de reducere, în același punct O , al forțelor de legătură.

Ecuțiile vectoriale de echilibru ale rigidului supus la legături fără frecare, ținând seama de axioma legăturilor, sunt:

$$\bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_L = 0 \quad (4.26)$$

ceea ce conduce la:

$$\bar{R} + \bar{R}_L = 0 \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_{OL} = 0 \quad (4.27)$$

Ecuțiile vectoriale anterioare, sunt echivalente cu șase ecuații de echilibru scalare:

$$\begin{aligned} R_x + R_{xL} &= 0; \\ R_y + R_{yL} &= 0; \\ R_z + R_{zL} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} M_x + M_{xL} &= 0; \\ M_y + M_{yL} &= 0; \\ M_z + M_{zL} &= 0; \end{aligned} \quad (4.29)$$

Necunoscutele din expresiile anterioare, se referă la parametrii care definesc poziția de echilibru a rigidului, respectiv forțele de legătură.

4.5 Legăturile fără frecare ale rigidului

În disciplina de mecanisme legăturile rigidului se clasifică după numărul gradelor de libertate suprimate, în cuple cinematice de clase de la 6 (încăstrarea), până la 1 (simpla rezemare), numărul clasei fiind dat de numărul de mișcări simple suprimate.

4.5.1. Reazemul simplu

Rezemarea simplă, este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să rămână pe o suprafață fixă și indeformabilă sau curbă dată.

Sub **aspect geometric**, conform definiției, punctul $O(x_0, y_0, z_0)$ al rigidului din Figura 4.10, trebuie să rămână pe suprafața fixă de ecuație: $f(x, y, z) = 0$. (4.30)

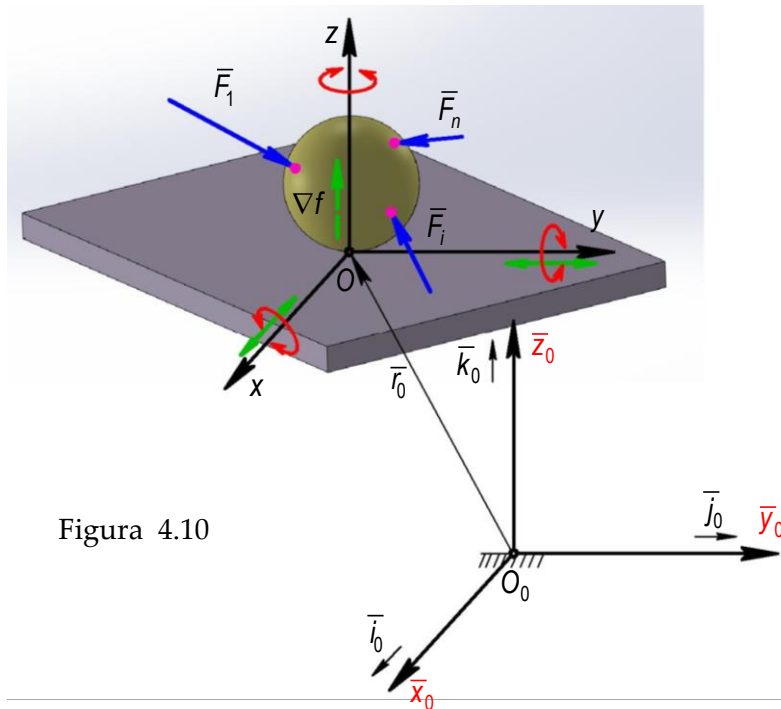


Figura 4.10

În acest caz, coordonatele punctului $O(x_0, y_0, z_0)$, trebuie să satisfacă ecuația suprafeței, adică:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (4.31)$$

Condițiilor de rigiditate (4.7), se adăuga restricția (4.31), ceea ce înseamnă că din cei nouă parametri scalari care poziționează un rigid liber în spațiu, numai cinci vor fi independenți.

Astfel, un reazem simplu suprimă un grad de libertate, deci un rigid simplu rezemat are în spațiu cinci grade de libertate, adică: translație și rotație în lungul/jurul axei Ox ; translație și rotație în lungul/jurul axei Oy , respectiv doar o rotație în jurul axei Oz . Ținând seama de (4.12), cele cinci grade de libertate sunt, exprimate prin:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 \quad y_0 \quad z_0 = cst.)^T \\ (\psi \quad \theta \quad \varphi)^T \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Pentru analiza acestui tip de legătură sub *aspect mecanic*, conform Figurii 4.11, se consideră un corp simplu rezemat în punctul O pe o suprafață de forma definită prin (4.31), unde $z_0 = cst.$

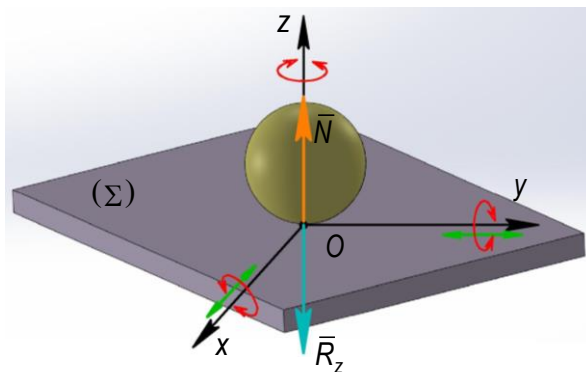


Figura 4.11

Așa cum se poate observa din figură, asupra rigidului acționează un sistem de forțe $\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n.$ În punctul de reazem, se alege un sistem de referință, la care axa Oz este dirijată după normala comună la cele două suprafețe (a planului și a rigidului), dusă prin punctul de contact, și simbolizată prin $\nabla f.$ Legătura nu permite deplasarea rigidului de-a lungul normalei la suprafață în punctul de contact, forța de legătură fiind plasată pe această normală. Ca atare rezultă:

$$R_{zL} = \bar{N} = \varphi \nabla f = \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \bar{i}_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot \bar{j}_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0} \cdot \bar{k}_0 \right) \quad (4.33)$$

Expresiile (4.25), se particularizează, și devin:

$$\bar{\tau}_0 = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \ 0 \ R_{zL} = N]^T \\ \dots \\ [0 \ 0 \ 0]^T \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul reazemului simplu devin:

$$\begin{aligned} R_x = 0; \ R_y = 0; \ R_z + N = 0; \\ M_x = 0; \ M_y = 0; \ M_z = 0; \end{aligned} \quad (4.35)$$

Observații: Din expresiile anterioare, și conform Figurii 4.11, rezultă că legătura de tip reazem simplu introduce o necunoscută, reprezentată prin modulul reacțiunii normale, în punctul O.

➤ Din (4.35), rezultă că momentul forțelor active în raport cu punctul O este nul, ceea ce arată că în cazul unei legături de tip simplă rezemare, pentru că rigidul să fie în echilibru static, este necesar ca sistemul de forțe exterioare să fie echivalent cu o rezultantă unică, al cărei suport să treacă prin normala dusă prin punctul de reazem O.

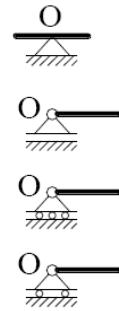


Figura 4.12

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.12.

4.5.2. Articulația sferică

Articulația sferică este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să rămână în permanență într-un punct fix, adică într-o poziție dată (fixă), când asupra rigidului acționează un sistem de forțe în spațiu..

Din punct de vedere geometric, condiția definitorie pentru articulația sferică, că un punct al rigidului să coincidă cu un punct fix O, impune rigidului trei restricții geometrice, adică $x_0 = \text{cst.}$, $y_0 = \text{cst.}$, $z_0 = \text{cst.}$ interzicând deplasările liniare în lungul celor trei axe de coordonate, astfel că numărul de grade de libertate este redus la trei. Cele trei grade de mobilitate sunt reprezentate prin rotații în jurul axelor care trec prin polul O. Ținând seama de (4.12), cele trei grade de libertate sunt exprimate prin:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 = \text{cst.} \quad y_0 = \text{cst.} \quad z_0 = \text{cst.})^T \\ (\psi \quad \theta \quad \varphi)^T \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Conform Figurii 4.13, pentru analiza acestui tip de legătură, se consideră un corp articulat sferic de un alt rigid, în punctul O. Asupra rigidului acționează un sistem de forțe \bar{F}_i , $i = 1 \rightarrow n$, al cărui torsesor în punctul O, este definit în (4.25).

Sub *aspect mecanic*, momentul forțelor active tinde să rotească rigidul în jurul articulației, dar neexistând frecare care să se opună, oprirea rotației este imposibilă.

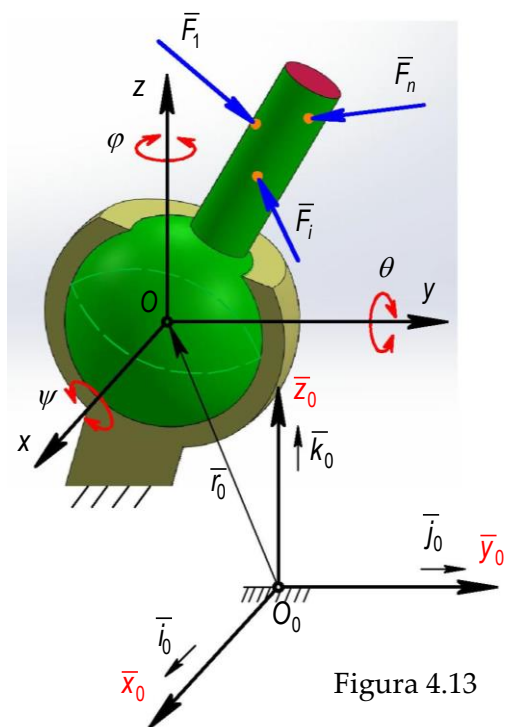


Figura 4.13

Astfel, pentru echilibru, este necesar ca $\bar{M}_O = 0$. Forța rezultantă, tinde să desprindă cele două corpuri, dar întrucât corpul (S) nu poate părăsi punctul fix O, conform principiului acțiunii și reacțiunii, în articulație se dezvoltă forțele de reacțiune \bar{R}_L , așa cum rezultă din Figura 4.14.

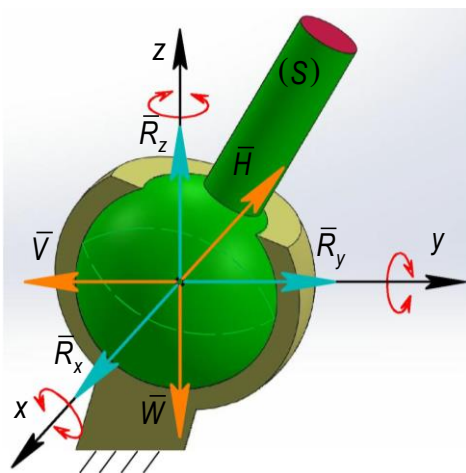


Figura. 4.14

Astfel, ținând seama de expresiile (4.25), prin particularizare devin:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0 = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{xL} = H \ R_{yL} = V \ R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [0 \ 0 \ 0]^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Prin aplicarea axiomei legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul articulației sferice devin:

$$\begin{aligned} R_x + H = 0; \quad R_y + V = 0; \quad R_z + W = 0; \\ M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0; \end{aligned} \quad (4.38)$$

Observații:

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.15.

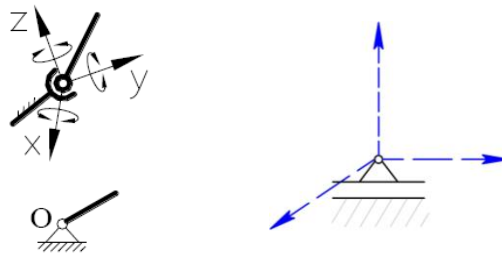


Figura 4.15

Articulația sferică este echivalentă cu trei reazeme simple, pe direcțiile celor trei axe ale unui sistem de referință, ale căror reacțiuni formează un sistem de forțe concurente în spațiu.

4.5.3. Articulația cilindrică

Acest tip de legătură, impune ca un segment de dreaptă al rigidului să-și păstreze suportul fix, (o axă a corpului fixă în spațiu) sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare.

Sub *aspect geometric*, corpul poate executa doua mișcări, rotația și translația în jurul și în lungul axei unui cilindru, fiindu-i suprimate celelalte patru mișcări, astfel că este o cupla cinematica de clasa a patra. Conform Figurii 4.16, restricțiile geometrice, aplicate rigidului (S), sunt $y_0 = cst., z_0 = cst., \theta = cst., \varphi = cst.$, fiind îngădite deplasările

liniare în lungul a doua axe, precum și rotația în jurul acestora, numărul de grade de libertate este redus la două.

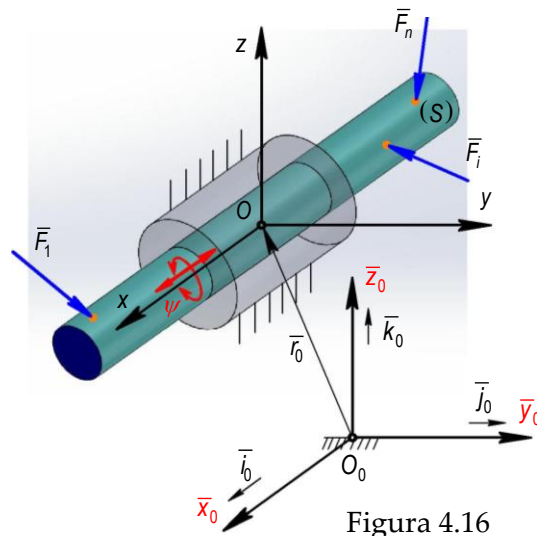


Figura 4.16

Cele două grade de mobilitate sunt reprezentate printr-o translație și o rotație în lungul și în jurul axei x_0 . Ținând seama de (4.12), gradele de libertate sunt exprimate prin:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 \quad y_0 = \text{cst.} \quad z_0 = \text{cst.})^T \\ (\psi \quad \theta = \text{cst.} \quad \varphi = \text{cst.})^T \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Conform Figurii 4.17, datorită acțiunii sistemului de forțe exterioare $\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n$, sub *aspect mecanic* rigidul (S), în absența frecării, poate executa o mișcare în lungul și în jurul axei Ox .

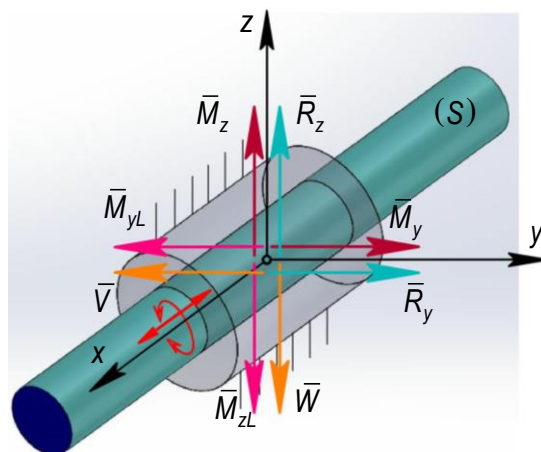


Figura 4.17

Eliminând legătura din fiecare punct al suprafeței cilindrice de contact și introducând forțele și momentele de legătură aferente, conform Figurii 4.17, ținând seama de (4.25), torsor forțelor active și de legătura în punctul O, devine:

$$\bar{\tau}_0 = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \ R_{yL} = V \ R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [0 \ M_{yL} \ M_{zL}]^T \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul articulației cilindrice devin:

$$\begin{aligned} R_x = 0; \quad R_y + V = 0; \quad R_z + W = 0; \\ M_x = 0; \quad M_y + M_{yL} = 0; \quad M_z + M_{zL} = 0; \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se poate observa, că sistemul este static determinat, întrucât numărul necunoscutelor (V, W, M_{yL}, M_{zL}) este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru.

Observație: Articulația cilindrică poate fi asimilată cu două reazeme simple având suporturile reacțiunilor din planul forțelor.

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.18.



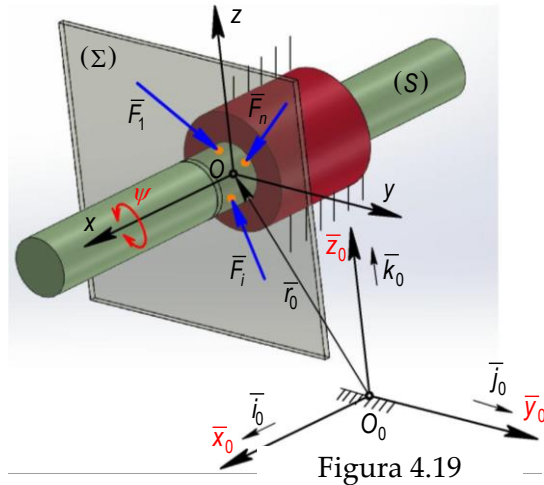
Figura 4.18

4.5.4. Cupla cilindrică plană

Articulația cilindrică plană este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să rămână în permanență într-o poziție fixă, sub acțiunea unui sistem de forțe active coplanare, care acționează asupra rigidului într-un plan perpendicular pe axa sa de simetrie.

Din punct de vedere geometric, corpul poate executa doar o mișcare de rotație în jurul axei proprii, fiindu-i suprimate celelalte cinci mișcări, astfel că articulația cilindrică plană este o cuplă cinematică de clasa a cincea. Conform Figurii 4.19, restricțiile

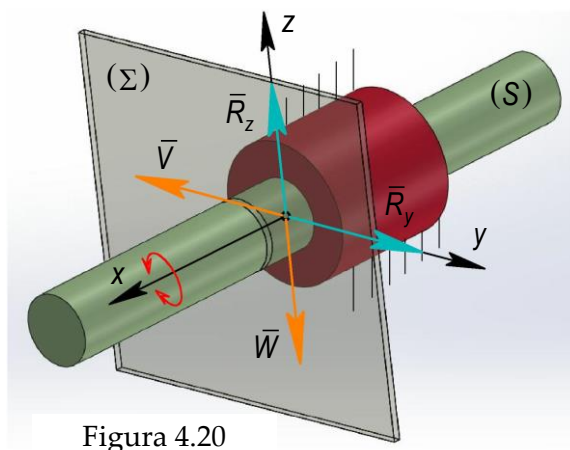
geometrice, aplicate rigidului (S), sunt $x_0 = cst., y_0 = cst., z_0 = cst., \theta = cst., \varphi = cst.$, fiind suprimate deplasările liniare în lungul axelor, precum și rotațiile în jurul axelor conținute în planul forțelor, ceea ce determină un singur grad de libertate, rotația în jurul axei de simetrie, perpendiculară pe planul forțelor.



Conform cu considerațiile anterioare, și ținând seama de (4.12), singurul grad de libertate este definit de:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 = cst. \quad y_0 = cst. \quad z_0 = cst.)^T \\ (\psi \quad \theta = cst. \quad \varphi = cst.)^T \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Conform Figurii 4.20, datorita acțiunii sistemului de forțe coplanare $\bar{F}_i, i = 1 \rightarrow n$ conținute în planul $\Sigma \equiv \{x = 0\}$, sub *aspect mecanic* rigidul (S), neglijând frecările, poate executa doar o mișcare în jurul axei Ox, cu unghiul ψ .



Prin eliminarea legăturii din fiecare punct al suprafeței cilindrice de contact și introducând forțele de legătura aferente, ținând seama de (4.25), torsesor forțelor active și de legătura în punctul O, devine:

$$\bar{\tau}_O = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ 0 \ 0]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \ R_{yL} = V \ R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [0 \ 0 \ 0]^T \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul articulației cilindrice plane devin:

$$R_y + V = 0; \quad R_z + W = 0; \quad (4.44)$$

Din expresia (4.44), se poate observa faptul că este o determinare statică, întrucât numărul de necunoscute (V, W) este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru static.

4.5.5. Cupla de rotație

Cupla de rotație este o cuplă de clasa a cincea, ea obligând două puncte ale rigidului să-și păstreze poziția fixă. Este exemplificată printr-un rigid de formă cilindrică, așezat într-un alt corp tot de formă cilindrică, de aceeași rază, care împiedică translația în lungul axei de rotație.

Sub aspect geometric, corpul (S) poate executa doar o mișcare de rotație așadar în jurul axei unui cilindru, fiindu-i suprimate celelalte cinci mișcări. Conform Figurii 4.21, restricțiile geometrice, aplicate rigidului (S), sunt $x_0 = cst., y_0 = cst., z_0 = cst., \theta = cst., \varphi = cst.$, astfel că sunt restricționate deplasările liniare în lungul celor trei axe ale sistemului de referință, precum și rotațiile în jurul axelor Ox și Oy, perpendiculare pe axa de rotație.

Conform cu considerațiile anterioare, și ținând seama de (4.12), singurul grad de libertate este definit:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 = cst. \ y_0 = cst. \ z_0 = cst.)^T \\ (\psi \ \theta = cst. \ \varphi = cst.)^T \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Conform Figurii 4.21, datorita acțiunii sistemului de forțe exterioare $\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n$, sub *aspect mecanic* rigidul (S), în ipoteza neglijării frecării, poate executa doar o mișcare de rotație în jurul axei Ox , cu unghiul ψ .

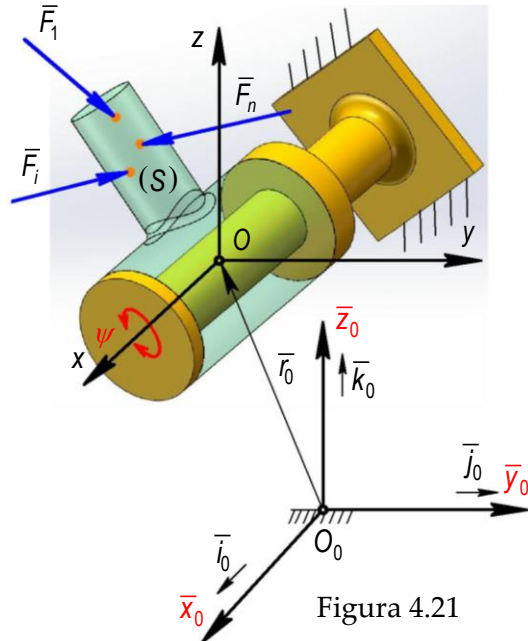


Figura 4.21

Prin eliminarea legaturii prin necare punct al suprafeței cilindrice de contact și introducând forțele de legătura aferente, conform cu Figura 4.22, ținând seama de (4.25), se determină torsorul forțelor active și de legătură în punctul O, prin:

$$\bar{\tau}_O = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{xL}=H \ R_{yL}=V \ R_{zL}=W]^T \\ \dots \\ [0 \ M_{yL} \ M_{zL}]^T \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

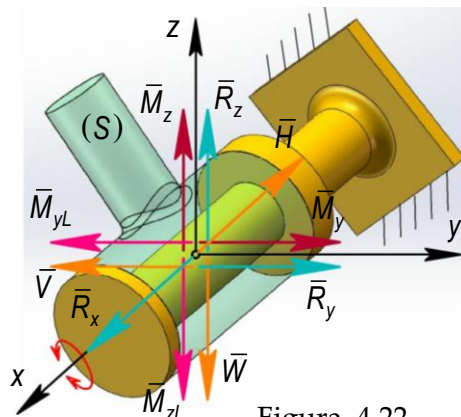


Figura 4.22

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul articulației cilindrice devin:

$$\begin{aligned} R_x + H = 0; \quad R_y + V = 0; \quad R_z + W = 0; \\ M_x = 0; \quad M_y + M_{yL} = 0; \quad M_z + M_{zL} = 0; \end{aligned} \quad (4.47)$$

Din (4.47) se obțin cele cinci necunoscute (H, V, W, M_{yL}, M_{zL}), ale sistemului de forțe de legătură, respectiv din ecuația de moment $M_O = 0$, rezultă că orientarea corpului este definită de unghiul de rotație ψ .

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.23.

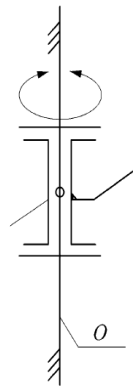


Figura 4.23

4.5.6. Cupla prismatică

Cupla prismatică este formată din două corpuri, cu o axă comună după care are loc o deplasare liniară a unuia față de celalalt, fără rotație, astfel încât două drepte paralele ale corpurilor își păstrează suporturile fixe. Conform Figurii 4.24, modelul fizic al unei cuple prismatice (translație), este materializat printr-un rigid de forma paralelipipedica (S), introdus într-un alt rigid, având un canal cu forma și dimensiunile transversale identice cu cele ale rigidului (S).

Sub **aspect geometric**, corpul (S), în conformitate cu Figura 4.24, poate executa doar o deplasare liniară, fiind posibilă doar translația în lungul axei O_x a cuplei. Ca atare, fiindu-i suprimate celelalte cinci mișcări, cuplă prismatică, este o cuplă de clasa a cincea.

Restricțiile geometrice, aplicate rigidului (S), sunt

$y_0 = cst., z_0 = cst., \psi = cst., \theta = cst., \varphi = cst.,$ astfel că sunt imposibile rotațiile în jurul celor trei axe ale sistemului de referință, precum și deplasările liniare în jurul axelor O_y și O_z .

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 \quad y_0 = cst. \quad z_0 = cst.)^T \\ \hline (\psi = cst. \quad \theta = cst. \quad \varphi = cst.)^T \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

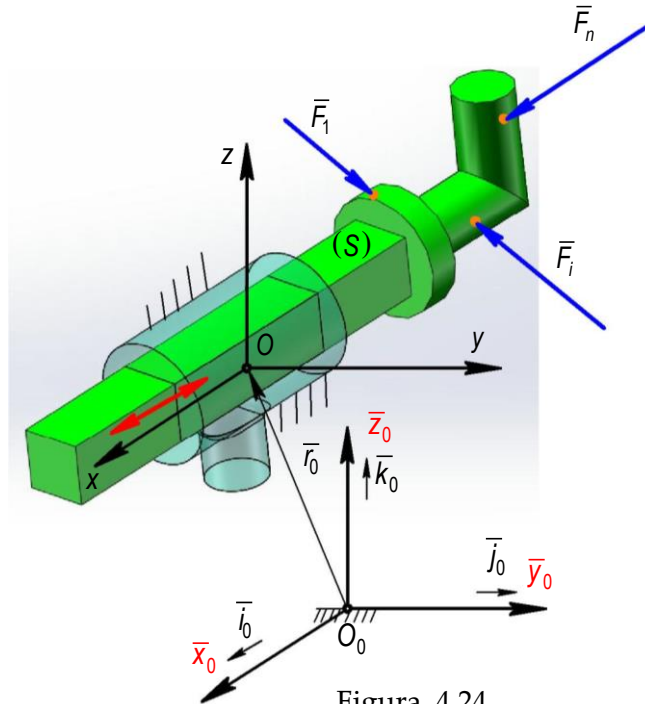


Figura 4.24

Prin eliminarea legăturii din fiecare punct al suprafeței contact și introducând forțele de legătură aferente, conform cu Figura 4.25, ținând seama de (4.25), se determină torsorul forțelor active și de legătură în punctul O, prin:

$$\bar{\tau}_O = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \quad R_y \quad R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \quad M_y \quad M_z]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \quad R_{yL} = V \quad R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [M_{xL} \quad M_{yL} \quad M_{zL}]^T \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Conform Figurii 4.25, datorită acțiunii sistemului de forțe exterioare $\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n,$ sub *aspect mecanic* rigidul (S), în ipoteza neglijării frecării, poate executa doar o mișcare liniară în lungul axei Ox.

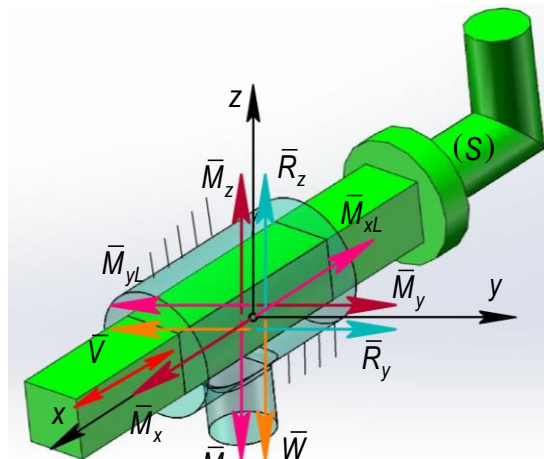


Figura 4.25

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul articulației prismatice devin:

$$\begin{aligned}
 R_y + V &= 0; & R_z + W &= 0; \\
 M_x + M_{xL} &= 0; & M_y + M_{yL} &= 0; & M_z + M_{zL} &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Din ecuațiile de echilibru (4.50), se determină cele cinci necunoscute ($V, W, M_{xL}, M_{yL}, M_{zL}$), ale sistemului de forțe, respectiv din ecuația de echilibru $R_x = 0$, rezultă deplasarea corpului.

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.26.

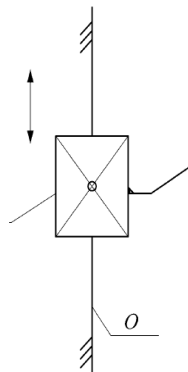


Figura 4.26

4.5.7. Încadrarea spațială

Încadrarea este legătura prin care un rigid este fixat într-un alt rigid, contactul se realizându-se într-o infinitate de puncte, pe mai multe suprafețe de contact. Astfel, sub aspect geometric, corpului (S), în conformitate cu Figura 4.27, îi sunt suprimate toate gradele de libertate.

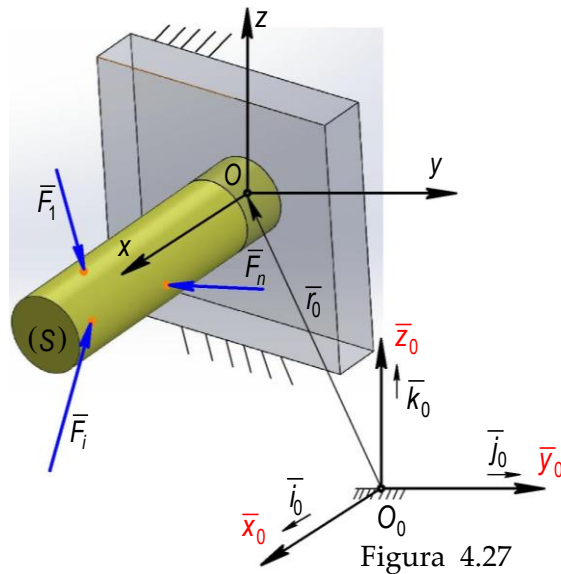


Figura 4.27

Astfel, restricțiile geometrice, aplicate rigidului (S), sunt $x_0 = cst., y_0 = cst., z_0 = cst.$, respectiv $\psi = cst., \theta = cst., \varphi = cst.$. Astfel, sunt împiedicate toate rotațiile precum și deplasările liniare față de axele unui sistem de referință cartezian, numărul gradelor de libertate fiind zero, deci, se poate scrie:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 = cst. \quad y_0 = cst. \quad z_0 = cst.)^T \\ (\psi = cst. \quad \theta = cst. \quad \varphi = cst.)^T \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Prin eliminarea legăturii din fiecare punct al suprafeței contact și introducerea forțelor de legătură, conform cu Figura 4.28, ținând seama de (4.25), tursorul forțelor active și de legătură în punctul O, este echivalent cu:

$$\bar{\tau}_O = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ R_y \ R_z]^T \\ \dots \\ [M_x \ M_y \ M_z]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{xL} = H \ R_{yL} = V \ R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [M_{xL} \ M_{yL} \ M_{zL}]^T \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Din punct de vedere *mecanic*, conform Figurii 4.28, acțiunea unui sistem de forțe exterioare $\bar{F}_i, i=1 \rightarrow n$, asupra rigidului (S), nu îi imprimă acestuia nicio deplasare.

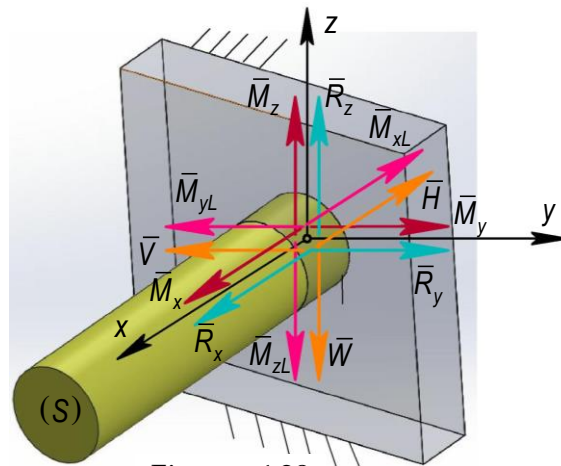


Figura 4.28

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul încastrării spațiale sunt:

$$\begin{aligned} R_x + H = 0; \quad R_y + V = 0; \quad R_z + W = 0; \\ M_x + M_{xL} = 0; \quad M_y + M_{yL} = 0; \quad M_z + M_{zL} = 0; \end{aligned} \quad (4.53)$$

➤ În aplicații, acest tip de legătură este reprezentat conform Figura 4.29.



Figura 4.29

4.5.8 Încăstrarea plană

Încăstrarea plană este o particularizare a încăstrării spațiale, atunci când asupra rigidului acționează un sistem de forțe coplanare. Sub *aspect geometric*, corpului (S), în conformitate cu Figura 4.30, îi sunt suprimate toate gradele de libertate, astfel că încăstrarea plană este o cuplă cinematică de clasa a șasea. Conform Figurii 4.30, restricțiile geometrice, aplicate rigidului (S), sunt $x_0 = cst., y_0 = cst., z_0 = cst., \psi = cst., \theta = cst., \varphi = cst.$, fiind împiedicate toate deplasările liniare, precum și rotațiile în jurul axelor unui sistem de referință cartezian.

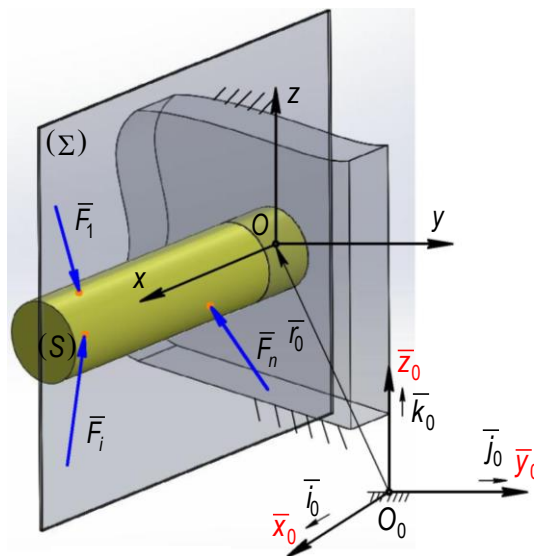


Figura 4.30

Așadar, ținând seama de (4.12), se poate scrie

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 = cst. \quad y_0 = cst. \quad z_0 = cst.)^T \\ (\psi = cst. \quad \theta = cst. \quad \varphi = cst.)^T \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Conform Figurii 4.31, sistemul de forțe coplanare $\bar{F}_i, i = 1 \rightarrow n$ conținute în planul $\Sigma \equiv xOz$, nu au nici un efect mecanic asupra rigidului (S).

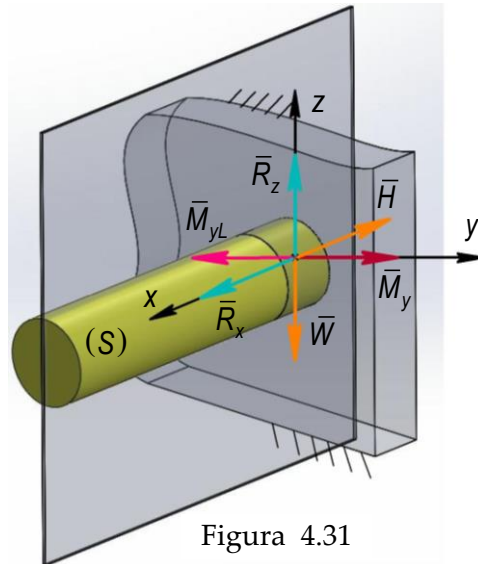


Figura 4.31

Reducând în raport cu polul O, sistemul de forțe coplanare, ținând seama de (4.25), torsor forțelor active și de legătura, devine:

$$\bar{\tau}_O = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \dots \\ \bar{M}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_x \ 0 \ R_z]^T \\ \dots \\ [0 \ M_y \ 0]^T \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_L = \begin{bmatrix} \bar{R}_L \\ \dots \\ \bar{M}_{OL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{xL} = H \ 0 \ R_{zL} = W]^T \\ \dots \\ [0 \ M_{yL} \ 0]^T \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Aplicând axioma legăturilor și ținând seama de (4.26), sau (4.27), ecuațiile scalare de echilibru, în cazul încastrării plane devin:

$$R_x + H = 0; \quad R_z + W = 0; \quad M_y + M_{yL} = 0 \quad (4.56)$$

4.6. Legătura prin fir și prin bară dublu articulată

În inginerie, sunt aplicații sunt corpuri fixate între ele prin fire și/sau prin bare. Analiza următoare, consideră firul ideal, adică *nu are masa, este perfect flexibil și inextensibil*, astfel că firele nu se pot comprima, deci ele nu preiau eforturi de compresiune. Ca urmare, în fir (vezi Figura 4.32) apare o forță de întindere, cu punctul de aplicație în punctul în care este legat firul de rigid și axa suport dreapta după care este întins firul, sensul este de la rigid către punctul de fixare al firului.

Așadar, *legătura prin fir este o legătură unilaterală*, considerațiile anterioare fiind valabile doar dacă firul este întins.

Pe baza *axiomei legăturilor*, forța de întindere din fir, este substituită cu o forță pe direcția și în sensul de întindere al firului, numită tensiune. Legătura suprimă deplasarea rigidului pe direcția firului, astfel că se pierde un grad de libertate.

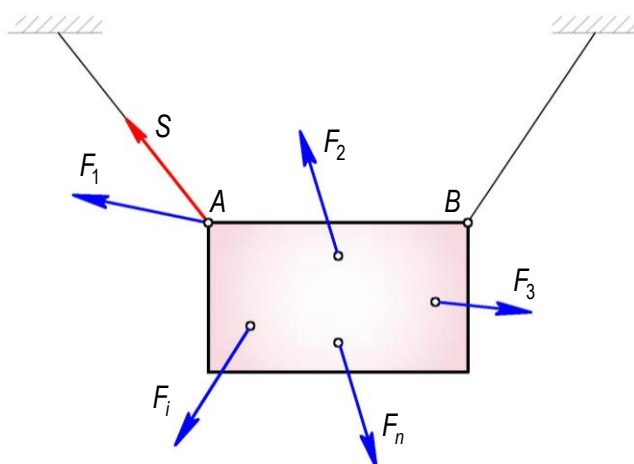


Figura 4.32

Stabilirea ecuațiilor de echilibru rigidului legat prin fire, are la bază substituirea firului prin tensiunile care acționează asupra rigidului. Ca urmare, rigidul este considerat un corp liber, asupra căruia acționează forțe exterioare, tensiuni în fire, și alte forțe de legătura introduse prin alte legături. Pentru ca sistemul ecuațiilor de echilibru să fie static determinat, corpul poate fi suspendat în spațiu prin maxim șase fire, iar în plan prin maxim trei, astfel încât numărul de ecuații să fie egal cu numărul de legături aplicate corpului.

În cazul *legăturii prin bare rigide*, articulate la ambele capete, este suprimată deplasarea corpului pe direcția barei (vezi Figura 4.33). Astfel, se introduce noțiunea de efort, reprezentând forța de legătură corespunzătoare barei articulate la ambele capetele, are sensul dat de acțiunea forțelor asupra punctului de legătură, și direcția barei.

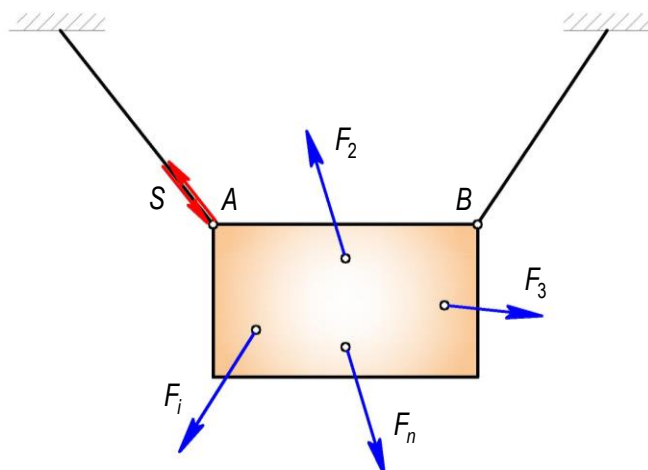


Figura 4.33

Se consideră următoare convenție: dacă forța „pleacă” din punctul de aplicație, adică „trage”, este considerată forța de întindere; dacă forța acționează asupra capătului, „apasă”, este considerată forța de compresiune.

Ținând seama de aceste aspecte, adică bara poate fi atât întinsă cât și comprimată, *legătura prin bară dublu articulată este bilaterală.*

În concluzie, *legătura prin fire, sau bare rigide articulate, suprimă un singur grad de libertate*, deplasarea pe direcția firului sau a barei.

Studiul echilibrului sistemelor supuse la legături, constă în :

- *aplicarea axiomei legăturilor prin eliberarea fiecărei legături și înlocuirea acestora prin elementele mecanice corespunzătoare fiecărei tip de legătura. Astfel legăturile se înlocuiesc prin forțele și momentele de legătura, orientate după direcțiile translațiilor/rotațiilor blocate de către aceste legături.*
- *stabilirea ecuațiilor de echilibru pe baza tuturor forțelor și momentelor active și de legătura, care acționează asupra corpului;*
- *determinarea necunoscutelor din sistemul de ecuații de echilibru.*

4.7 Studiul echilibrului rigidului supus la legături cu frecare

În cazul legăturilor care nu suprimă toate gradele de libertate ale unui rigid, la deplasare, apar forțe sau momente de legătură care se opun acestor tendințe de mișcare, denumite **frecări**.

4.7.1. Generalități privind frecările. Condiții de echilibru

În Figura 4.34a consideră un corp (C) care se sprijină pe un alt corp fix (C₁). Se considera, teoretic ca reazemul de face într-un singur punct O, dar datorită deformării, pe rezemarea se face o suprafață de contact. Asupra corpului (C) acționează un sistem de forțe \bar{F}_i , (i=1, 2,..., n), al cărui tursor de reducere în O este format din vectorul rezultat \bar{R} și momentul rezultat \bar{M}_O .

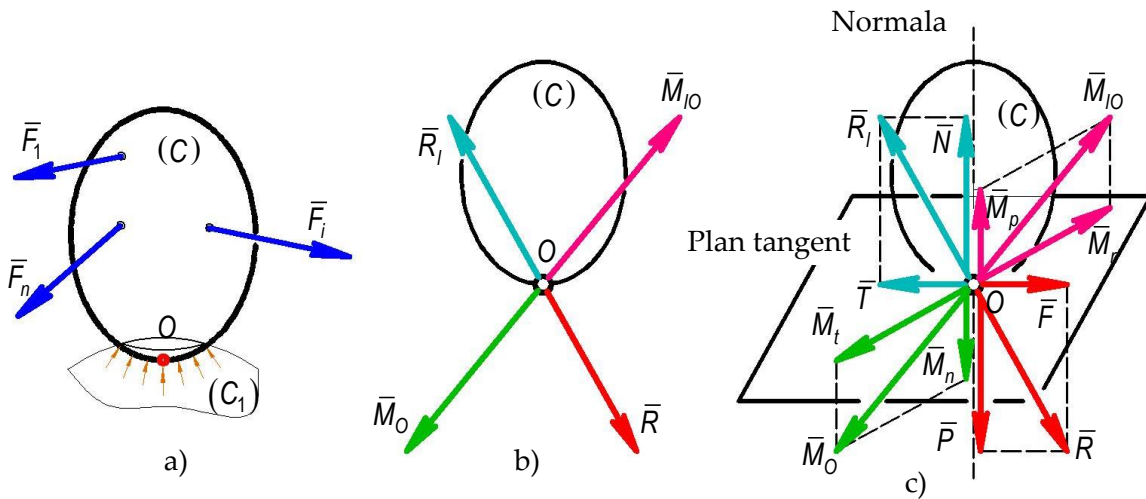


Figura 4.34

Se constată că rigidul (C) rămâne în echilibru, adică forțele de legătură din punctele de contact se reduc în același punct O la un torsesor, format din vectorul rezultat \bar{R}_1 și momentul rezultat \bar{M}_{10} , care echilibrează torsesorul forțelor date (vezi Figura 4.34b), astfel se scrie:

$$\bar{R} + \bar{R}_1 = 0; \bar{M}_O + \bar{M}_{10} = 0 \quad (4.57)$$

Pentru stabilirea condițiilor de echilibru ale corpului (C), supus legăturilor cu frecare, se descompun vectorii din ecuațiile (4.57) în componente după normala la suprafața de contact și planul tangent la aceasta în punctul teoretic de contact (fig 4.34 c):

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{F}; \bar{R}_1 = \bar{N} + \bar{T}; \bar{M}_O = \bar{M}_n + \bar{M}_t; \bar{M}_{10} = \bar{M}_p + \bar{M}_r \quad (4.58)$$

Conform cu expresia (4.57) rezultă:

$$\bar{P} + \bar{N} = 0; \bar{F} + \bar{T} = 0; \bar{M}_n + \bar{M}_p = 0; \bar{M}_t + \bar{M}_r = 0 \quad (4.59)$$

Ținând seama de Figura 4.34, în continuare se explică fiecare componentă:

➤ **Componenta \bar{P}** tinde să deplaseze corpul (C) interiorul corpului (C_1), mișcare numită **străpungere**. Acestei tendințe i se opune reacțiunea normală \bar{N} , egală în modul și direct opusă componentei \bar{P} .

➤ **Componenta** \bar{F} tinde să deplaseze corpul (C) în planul tangent la suprafața de contact, mișcare numită **alunecare**. Se opune acestei tendințe componenta \bar{T} a vectorului rezultat al forțelor de legătură, numita **forță de frecare de alunecare**. Experimental se demonstrează că alunecarea nu se produce atâta timp cât forța de frecare nu depășește o valoare maximă egală cu produsul dintre coeficientul frecării de alunecare și reacțiunea normală:

$$T \leq \mu N \quad (4.60)$$

➤ **Componenta** \bar{M}_n a momentului rezultat al forțelor exterioare date are tendința să rotească rigidul în jurul normalei, în punctul teoretic de contact la suprafața de contact, mișcare numită de pivotare. Tendinței de pivotare a corpului i se opune componenta \bar{M}_p a momentului forțelor de legătură, denumită **moment al frecării de pivotare**. Corpul nu pivotează dacă momentul frecării de pivotare este mai mic sau cel mult egal cu momentul maxim al frecării de pivotare, egal la rândul lui cu produsul dintre coeficientul frecării de pivotare și reacțiunea normală:

$$M_p \leq \nu N \quad (4.61)$$

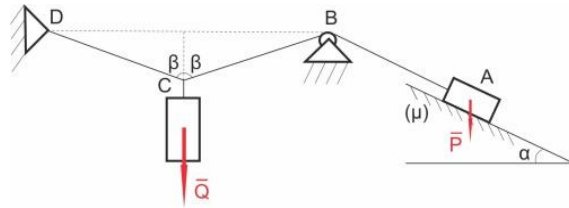
➤ **Componenta** M_t a momentului rezultat al forțelor exterioare date tinde să rotească rigidul în jurul unei tangente din planul tangent, în punctul teoretic de contact la suprafața de contact, numită **mișcare de rostogolire**. Tendința de rostogolire a corpului este împiedecată de componenta \bar{M}_r a momentului forțelor de legătură, denumită **moment al frecării de rostogolire**. Corpul nu se rostogolește dacă momentul frecării de rostogolire nu depășește momentul maxim al frecării de rostogolire, care este egal cu produsul dintre coeficientul frecării de rostogolire și reacțiunea normală:

$$M_r \leq sN \quad (4.62)$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile (4.60), (4.61) și (4.62) corpul rămâne în echilibru, adică nu alunecă nu pivotează și nu se rostogolește.

4.8 Aplicații

P4.1. Un corp A greutate G este așezat pe un plan aspru înclinat cu unghiul α și caracterizat prin coeficientul de frecare la alunecare μ . De A este atașat un fir petrecut peste un mic scripete ideal B având celălalt capăt fixat în D. Pe fir în C este atârnată o greutate P conform schiței. Să se determine, tensiunile din fir, reacțiunile pe planul înclinat și unghiul β al firului cu verticala.

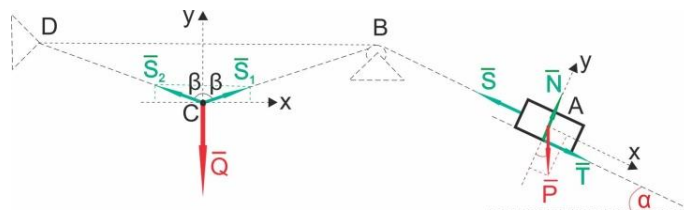


Indicații -1. Problema este dedicată studiului echilibrului unui sistem de două puncte materiale A și C atașate între ele printr-un fir;

-2. Se aplică metoda echilibrului părților.

Corpul A fie urcă, fie coboară pe plan funcție de mărimea lui Q având deci două tendințe de mișcare care trebuie analizate.

I. Tendința de urcare pe plan. Se separă cele două puncte A și C și se întocmesc schițele mecanice.



Ecuatiile vectoriale de echilibru sunt:

$$\bar{P} + \bar{S} + \bar{N} + \bar{T} = 0 \quad (\text{punctul } A)$$

$$\bar{Q} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0 \quad (\text{punctul } C).$$

Se proiectează pe axele sistemelor de referință proprii ale fiecăruia obținând:

$$\begin{cases} P \sin \alpha + T - S = 0 \\ N - P \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{punctul } A)$$

$$\begin{cases} S_1 \sin \beta - S_2 \sin \beta = 0 \\ S_1 \cos \beta + S_2 \cos \beta - Q = 0 \end{cases} \quad (\text{punctul } C)$$

Acestor doua sisteme se adăugă relația frecării $T \leq \mu N$.

În cazul punctului C rezultă:
$$S_1 = S_2 = \frac{Q}{2 \cos \beta}.$$

Scripetele numai schimbă direcția firului deci tensiunile pe capetele firului înfășurat pe scripete sunt egale prin urmare:
$$S_1 = S_2 = \frac{Q}{2 \cos \beta}.$$

Mai rămân trei necunoscute: N , T și β de calculat. Astfel:

$$N = P \cos \alpha, \quad P \sin \alpha + T - \frac{Q}{2 \cos \beta} = 0$$

din care ținând cont de frecare se obține inecuația:
$$P \sin \alpha + \mu P \cos \alpha - \frac{Q}{2 \cos \beta} \geq 0$$

care permite determinarea:

$$\cos \beta \geq \frac{Q}{P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = \cos \beta_{min}, \text{ deci } \cos \beta \geq \cos \beta_{min}.$$

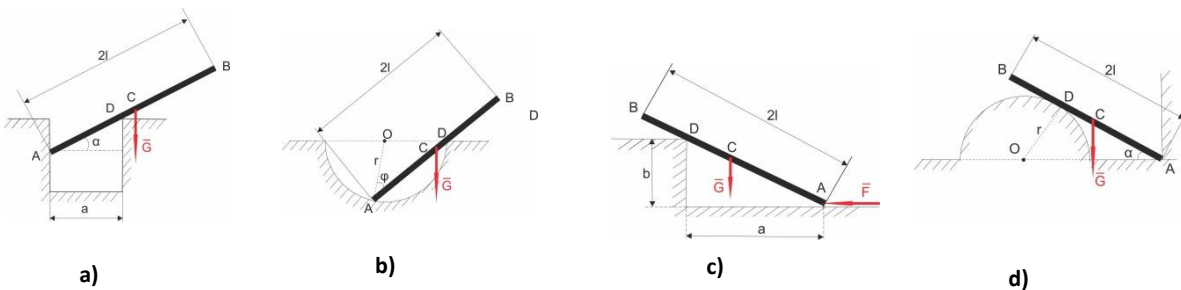
II. La tendința de coborâre pe plan, se obține:

$$\cos \beta \leq \frac{Q}{P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = \cos \beta_{max} \text{ sau } \cos \beta \leq \cos \beta_{max}.$$

În concluzie intervalul de valori pentru $\cos \beta$ este:

$$\cos \beta_{min} \leq \cos \beta \leq \cos \beta_{max}.$$

P4.2. Bara AB de lungime $2l$ și greutate G se reazemă fără frecare în punctele A și D. Să se determine reacțiunile din cele două puncte de reazem și poziția de echilibru a barei AB cu excepția cazului c) în care se cere forța F ce menține echilibrul barei.



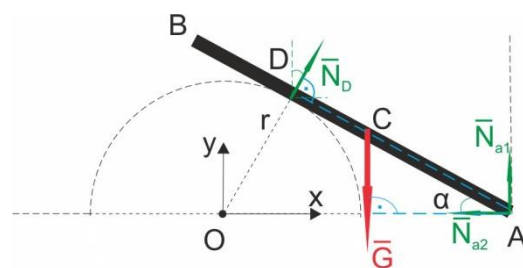
Indicații:

- 1. Reazemul simplu (simpla reazemare) suprimă un singur GDL împiedicând mișcarea de translație pe direcția normalei la suprafața de sprijin;
- 2. Legătura introduce o singură necunoscută reacțiunea normală la suprafață;

- 3. Dacă suprafața de sprijin are o discontinuitate în acel punct, prin el putem duce o infinitate de normale, o vom alege pe cea comună cu bara [vezi a), b) și c) în punctul D];
- 4. Legătura din A varianta d) împiedică deplasarea și pe orizontală și pe verticală ca și când ar fi un reazem dublu, vom introduce două necunoscute reacțiunile normale pe orizontală și pe verticală;
- 5. În plan sunt trei ecuații scalare de echilibru (pe x, pe y de proiecții de forțe și una de momente pe direcția perpendiculară pe plan.

Exemplu problema d)

Bara are reazeme simple în punctele A și D. Reacțiunea din D este normală pe suprafața cilindrică, iar în A sunt practic două reazeme în același punct, dar pe direcții diferite ceea ce se vede în schița mecanică a problemei.



Se consideră sistemul de referință în O și se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

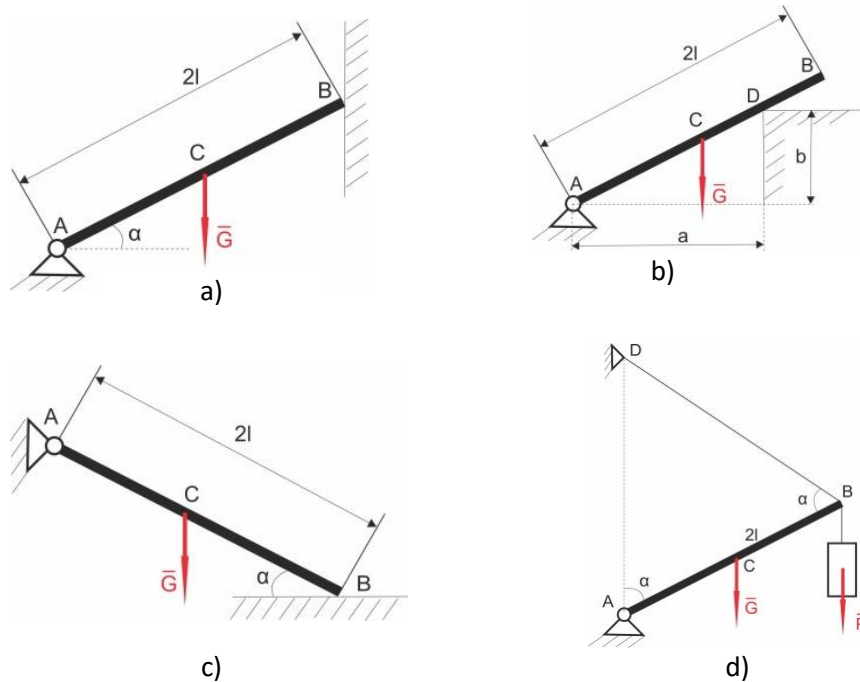
$$\begin{cases} N_D \sin \alpha - N_{a2} = 0 & (x) \\ N_D \cos \alpha - G + N_{a1} = 0 & (y) \\ Gl \cos \alpha - N_D r \cot \alpha = 0 & (A) \end{cases}$$

Ecuția de momente a fost exprimată față de punctul A deoarece două forțe trec prin A (N_{a1} și N_{a2}) și nu dau moment rămânând de calculat doar două momente ale lui G și N_D .

Sistemul are soluția:

$$N_D = \frac{Gl \sin \alpha}{r} ; N_{a1} = \frac{G(r-l \sin \alpha \cos \alpha)}{r} \text{ și } N_{a2} = \frac{Gl \sin^2 \alpha}{r} .$$

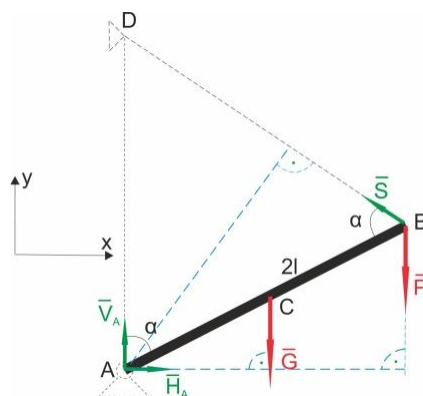
P 4.3. Bara AB de lungime $2l$ și greutate G este articulată în A și rezemată în B [figura a) și b)] sau în D [figura d)] fără frecare. În figura d) de capătul B este atașat un fir fixat în D și acționează o greutate P . Să se determine forțele de legătură.



Indicații -1. Articulația în plan împiedică două translații, suprimând 2GDL și introducând două necunoscute;
 -2. Se pot considera ca necunoscute fie două componente ortogonale (H, V) ale reacțiunii din articulație fie mărimea ei și un unghi.

Se considera cazul d), din problema P4.3

Se întocmește schița mecanică introducând forțele de legătură componentele \bar{H}_A, \bar{V}_A și tensiunea din fir \bar{S} .



Ecuțiile scalare de echilibru în plan sunt:

$$\begin{cases} H_A - S \sin(\pi - 2\alpha) = 0 \\ V_A - G - P + S \cos(\pi - 2\alpha) = 0 \\ Gl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + P2l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - S2l \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Cu observația că unghiul din D este $\pi - 2\alpha$ și că:

$$\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha, \quad \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha,$$

sistemul de ecuații ia forma finală după simplificarea cu $l \sin 2\alpha$ a ultimei ecuații:

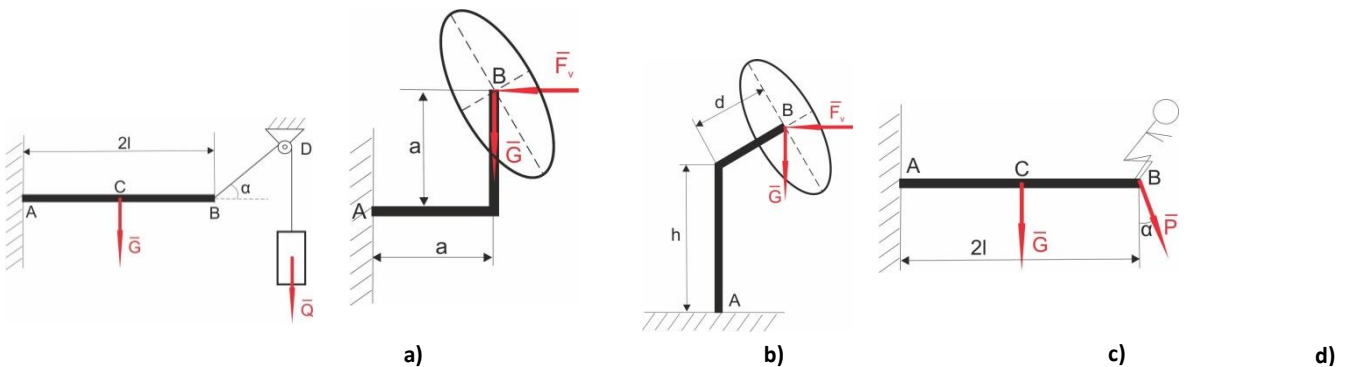
$$\begin{cases} H_A - S \sin 2\alpha = 0 \\ V_A - G - P - S \cos 2\alpha = 0 \\ G + 2P - 2S = 0 \end{cases}$$

Rezulta soluțiile:

$$S = \frac{G+2P}{2}; \quad H_A = \frac{G+2P}{2} \sin 2\alpha; \quad V_A = G \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right) + P(1 + \cos 2\alpha).$$

Reacțiunea din articulație va fi: $R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}.$

P 4.4. Bara AB de lungime $2l$ și greutate G este încastrată (fixată rigid) la capătul A și acționată la capătul B conform schiței. Se cer reacțiunile.



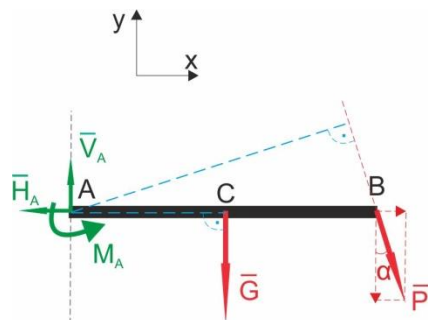
Indicații -1. Încastrarea nu mai permite nici o mișcare suprimând toate GDL (3 în plan, 6 în spațiu);

2. Se introduc atâtea necunoscute câte GDL suprimă;

3. Dacă mișcarea suprimată este translație atunci introducem o forță de legătură, iar dacă este o rotație atunci introducem un moment de legătură;

Exemplu problema d)

Încadrarea din A se înlocuiește cu două forțe H_A și V_A și un moment M_A , conform figurii, ținând seama ca forțele sunt coplanare.



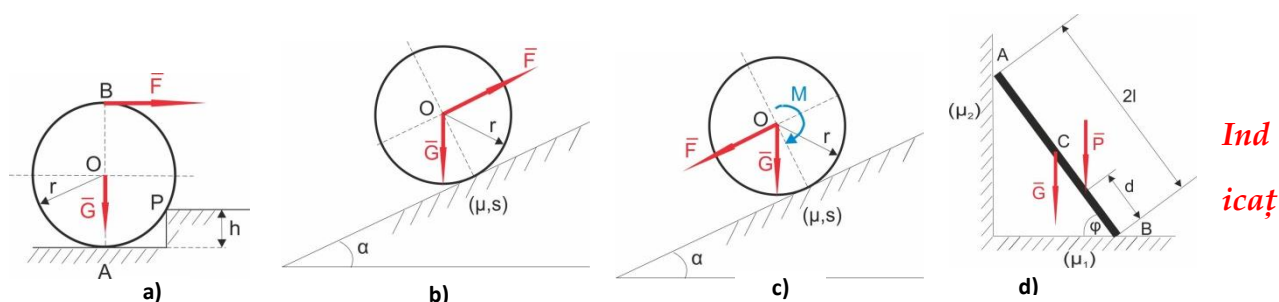
Sistemul ecuațiilor scalare de echilibru este:

$$\begin{cases} P \sin \alpha - H_A = 0 \\ V_A - G - P \cos \alpha = 0 \\ Gl + P2l \cos \alpha - M_A = 0 \end{cases} \quad (A)$$

și permite determinarea necunoscutelor:

$$H_A = P \sin \alpha ; V_A = G + P \cos \alpha ; M_A = (G + 2P \cos \alpha)l .$$

P4.5. Corpul rigid din figură este supus la legături cu frecare de alunecare și cu frecare de rostogolire. Se cere: a) forța F ca roata să urce pragul; b) forța motoare F ; c) forța de tracțiune F și cuplul motor M ; d) unghiul φ dacă omul P urcă pe scară la distanța d și reacțiunile din A și B.



*Ind
icaș*

ii -1. Roata a) are o singură tendință de alunecare și se reazemă în P;

-2. Roata trasă b) are două tendințe de alunecare și două de rostogolire;

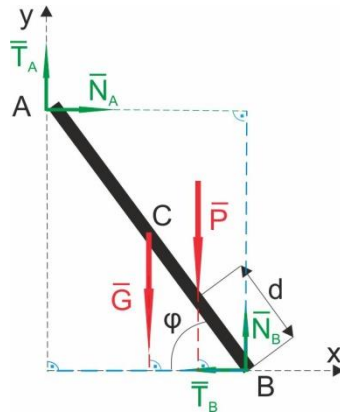
-3. Roata motoare c) are o tendință de alunecare și două de rostogolire;

-4. Scara din d) are o singură tendință de alunecare (nu poate decât să cadă);

-5. Fiind probleme cu frecare trebuie ținut cont de toate tendințele posibile.

Exemplu cazul din figura d)

Se realizează schița mecanică eliminând legăturile (reazeme simple cu frecare în A și B).



Se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} N_A - T_B = 0 \\ T_A - G - P + N_B = 0 \\ Gl \cos \varphi + Pd \cos \varphi - N_A 2l \sin \varphi - T_A 2l \cos \varphi = 0 \quad (B) \end{cases}$$

la care se atașează relațiile pentru frecare în cele două puncte: $\begin{cases} T_A \leq \mu_2 N_A \\ T_B \leq \mu_1 N_B \end{cases}$.

Dacă se consideră frecarea la limita de echilibru din primele două ecuații rezultă:

$$N_A = \frac{\mu_1(G+P)}{1+\mu_1\mu_2} \quad N_B = \frac{(G+P)}{1+\mu_1\mu_2}.$$

Ecuția de momente devine o inecuație:

$$Gl \cos \varphi + Pd \cos \varphi - \frac{\mu_1(G+P)}{1+\mu_1\mu_2} 2l \sin \varphi + \frac{\mu_1\mu_2(G+P)}{1+\mu_1\mu_2} 2l \sin \varphi \leq 0$$

și permite găsirea unghiului φ :

$$\tan \varphi \geq \left[Gl + Pd - \frac{(G+P)2l}{1+\mu_1\mu_2} \mu_1\mu_2 \right] \frac{1+\mu_1\mu_2}{2l(G+P)} = \frac{Gl+Pd}{2l(G+P)} (1 + \mu_1\mu_2) - \mu_1\mu_2 = (\tan \varphi)_{min}.$$

Capitolul 5 - Echilibrul sistemelor materiale

5.1 Echilibrul sistemelor de puncte materiale

Se consideră un sistem de n puncte materiale M_i $i = \overline{1, n}$. Dacă punctele sunt libere în spațiu sistemul va avea $3n$ grade de libertate. În cazul în care sistemul este supus la legături numărul de grade de libertate scade.

Se consideră că asupra sistemului acționează două categorii de forțe interioare și exterioare. Forțele exterioare pot fi forțe active și de legătură, iar cele interioare sunt forțe de interacțiune dintre punctele sistemului. **Sistemul este în echilibru dacă fiecare punct al său va fi în echilibru.** Fie două puncte din sistem M_i și M_j , vezi Figura 5.1.

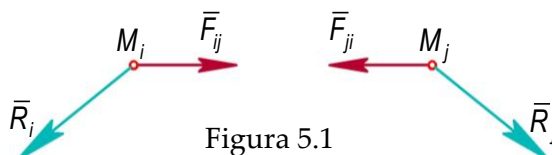


Figura 5.1

Asupra punctului M_i acționează un sistem de forțe concurente a căror rezultantă trebuie să fie nulă pentru echilibru, deci:

$$\bar{R}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{F}_{ij} = 0 \quad (8.1)$$

unde \bar{F}_{ij} este forța cu care punctul M_j acționează asupra lui M_i .

În cazul unui punct relația (8.1) este ecuația vectorială de echilibru a punctului „ i ”. Scriind câte o astfel de relație pentru fiecare punct din sistem rezultă „ n ” ecuații vectoriale de forma:

$$\bar{R}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{F}_{ij} = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (8.2)$$

Proiectând fiecare ecuație pe axele sistemului de referință rezulta un sistem de ecuații scalare cu ajutorul căruia se pot rezolva probleme de tipul celor întâlnite la echilibrul punctului. Dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații sistemul ecuațiilor scalare este static determinat, iar în caz contrar static nedeterminat.

5.2 Echilibrul sistemelor de solide rigide

Fie un sistem de două solide rigide (C_1) și (C_2) în Figura 5.2. Sistemul are legături exterioare în A și în B, iar în C o legătură interioară. Asupra fiecărui corp acționează câte un sistem de forțe active \bar{F}_{1i} $i = \overline{1, n}$ și \bar{F}_{2j} $j = \overline{1, m}$.

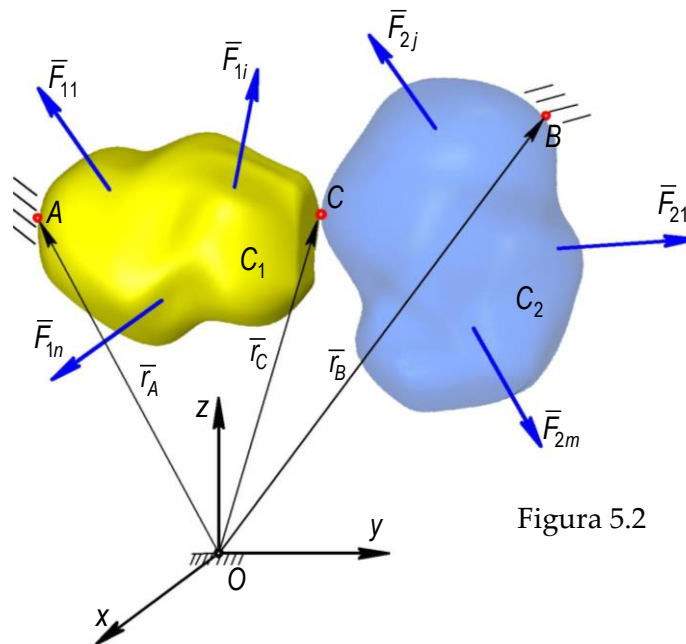


Figura 5.2

Teorema echilibrului părților afirmă că „*sistemul de corpuri stă în echilibru dacă fiecare parte a sa este în echilibru*„. Trebuie menționat aici că prin „parte„ se înțelege fie fiecare corp din sistem fie un subsistem de corpuri. Pe baza ei rezultă *metoda echilibrului părților* care permite separarea corpurilor aplicându-i fiecăruia axioma legăturilor.

Se notează:

(\bar{R}_1, \bar{M}_1) tursorul forțelor active aplicate lui (C_1) în O_1 ;

(\bar{R}_2, \bar{M}_2) tursorul forțelor active aplicate lui (C_2) în O_2 .

Conform cu Figura 5.3, se înlocuiesc legăturile exterioare sistemului de corpuri în A și B cu reacțiunile \bar{R}_A și \bar{R}_B , iar în cazul legăturii interioare sistemului de corpuri din C se ține seama de principiul acțiunii și reacțiunii și se introduc forțele de legătură $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$.

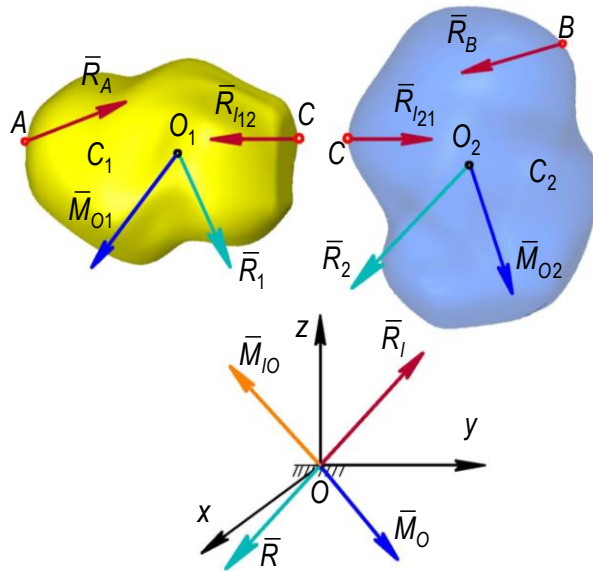


Figura 5.3

Se pot scrie ecuațiile vectoriale de echilibru pentru fiecare corp în parte:

$$\begin{cases} \bar{R}_1 + \bar{R}_A + \bar{R}_{l12} = 0 \\ \bar{M}_1 + \overline{OO}_1 \times \bar{R}_1 + \bar{r}_A \times \bar{R}_A + \overline{OC} \times \bar{R}_{l12} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} \bar{R}_2 + \bar{R}_B + \bar{R}_{l21} = 0 \\ \bar{M}_2 + \overline{OO}_2 \times \bar{R}_2 + \bar{r}_B \times \bar{R}_B + \overline{OC} \times \bar{R}_{l21} = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

Ecuațiile de momente au fost scrise față de același pol O și s-a ținut seama de legea de variație a momentului rezultat la schimbarea polului (se schimbă polul din O_1 în O și din O_2 în O). Rezultă așadar, în total $2n = 4$ ecuații vectoriale de echilibru echivalente cu $6n = 12$ ecuații scalare în spațiu (3D) sau cu $3n = 6$ ecuații scalare în plan (2D), „n” fiind numărul de părți (în cazul anterior amintit $n = 2$). Sistemul de ecuații scalare astfel obținut permite rezolvarea problemei statice.

Dacă se adună ecuațiile vectoriale de forțe între ele și ecuațiile de momente între ele se obține:

$$\begin{cases} \bar{R}_1 + \bar{R}_A + \bar{R}_{l12} + \bar{R}_2 + \bar{R}_B + \bar{R}_{l21} = 0 \\ \bar{M}_1 + \overline{OO}_1 \times \bar{R}_1 + \bar{r}_A \times \bar{R}_A + \overline{OC} \times \bar{R}_{l12} + \bar{M}_2 + \overline{OO}_2 \times \bar{R}_2 + \bar{r}_B \times \bar{R}_B + \overline{OC} \times \bar{R}_{l21} = 0 \end{cases} \quad (8.5).$$

Se notează:

$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$ - rezultanta forțelor active ce acționează asupra sistemului de corpuri;

$\bar{M}_O = \bar{M}_1 + \overline{OO}_1 \times \bar{R}_1 + \bar{M}_2 + \overline{OO}_2 \times \bar{R}_2 = \bar{M}_{1O} + \bar{M}_{2O}$ momentul rezultat al tuturor forțelor active în raport cu O;

$\bar{R}_l = \bar{R}_A + \bar{R}_B$ rezultanta forțelor de legătură exterioare sistemului de corpuri;

$\bar{M}_{lO} = \bar{r}_A \times \bar{R}_A + \bar{r}_B \times \bar{R}_B$ momentul rezultat al forțelor de legătură exterioare sistemului de corpuri.

Sistemul de ecuații (8.5) se poate scrie cu noile notații astfel:

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{R}_l + \bar{R}_{l12} + \bar{R}_{l21} = 0 \\ \bar{M}_{1O} + \bar{M}_{2O} + \bar{M}_{lO} + \overline{OC} \times \bar{R}_{l12} + \overline{OC} \times \bar{R}_{l21} = \bar{M}_O + \bar{M}_{lO} + \overline{OC} \times (\bar{R}_{l12} + \bar{R}_{l21}) = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Știind că $\bar{R}_{l12} + \bar{R}_{l21} = 0$ forma finală a sistemului de ecuații vectoriale este:

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{R}_l = 0 \\ \bar{M}_O + \bar{M}_{lO} = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

formă identică cu ecuațiile vectoriale de echilibru ale solidului rigid supus la legături ca și când sistemul de corpuri s-ar comporta ca un singur solidului rigid. Acest lucru permite enunțarea **teoremei solidificării** conform căreia „un sistem de solide rigide aflat în echilibru rămâne în echilibru și după ce a fost solidificat,,.

Observație – ultimul sistem de ecuații vectoriale de echilibru este o condiție necesară, dar nu și suficientă!

Sistemul prezentat în Figura 5.4 format din două bare identice AO și BO articulate între ele în O solicitat de forțele \bar{F}_A și \bar{F}_B egale și direct opuse îndeplinește condiția (necesitatea), dar barele se pot roti în jurul articulației O (nu și suficientă). Dacă se introduce un arc între cele două bare, vezi Figura 5.5, capetele A și B se vor apropia până când forța elastică din arc va echilibra sistemul și numai atunci se poate utiliza metoda solidificării.

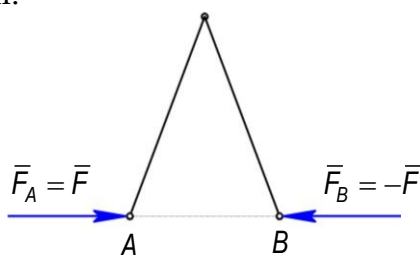


Figura 5.4

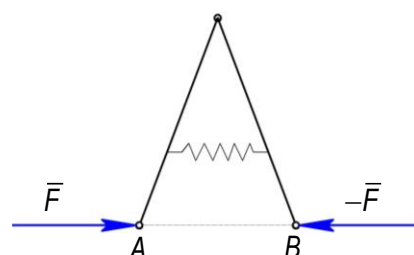


Figura 5.5

5.3 Aplicații

Problemele privind echilibrul sistemelor de solide rigide, pot fi divizate în trei categorii:

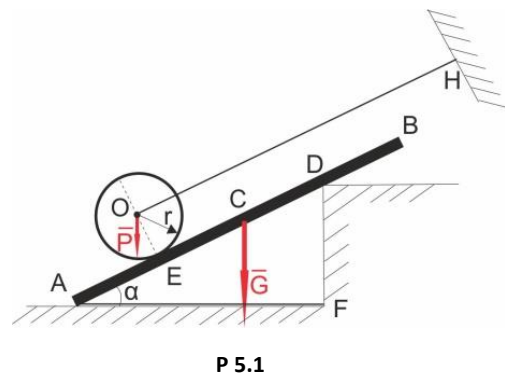
1. probleme fără frecare;

2. probleme în care apare fie frecare de alunecare fie frecarea firelor

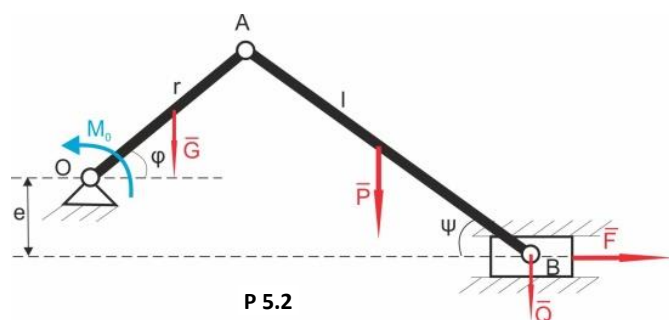
3. probleme cu frecare de alunecare și de rostogolire.

Categoria 1

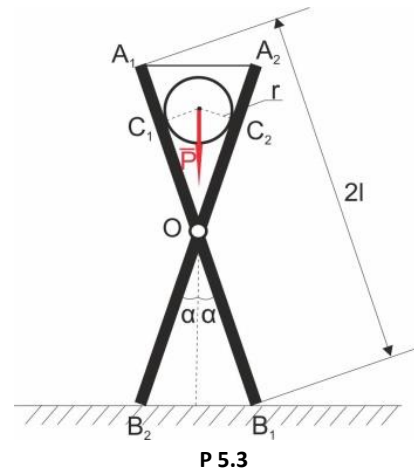
P5.1 O bară omogenă AB de lungime $4a$ și greutate G se reazemă fără frecare în A și în D pe o suprafață fixă conform figurii. Pe bară în E este așezată o roată de rază r și greutate P . Bara este prinsă în A printr-un fir orizontal atașat în F, iar roata în O printr-un alt fir atașat în H și paralel cu bara. Cunoșcând distanțele $AD = 3a$, $AE = a$ și poziția de echilibru a sistemului (unghiul α) să se determine tensiunile din fire și reacțiunile din punctele A, E și D.



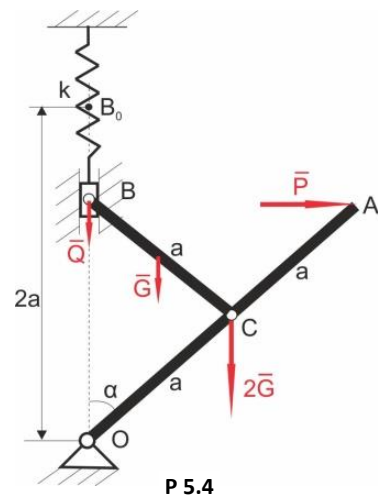
P5.2 Un mecanism bielă-manivelă cu excentric este acționat de cuplul motor M_0 și menținut în echilibru de o forță F aplicată culisei din B conform schiței. Să se determine mărimea forței F și reacțiunile din articulațiile O, A și B precum și reacțiunea culisei.



P5.3 Două bare identice omogene A_1B_1 și A_2B_2 de greutate G și lungime $2l$ sunt articulate între ele chiar în centrul lor de greutate O . Barele se reazemă în punctele B_1 și B_2 pe o suprafață orizontală lucie și sunt legate între ele printr-un fir A_1A_2 . Între bare este așezată o sferă de rază r și greutate P care se reazemă pe bare în punctele C_1 și C_2 . Cunocând unghiul α pe care îl fac barele cu verticala la echilibru se cere tensiunea din fir și reacțiunile din O , B_1 , B_2 , C_1 și C_2 .

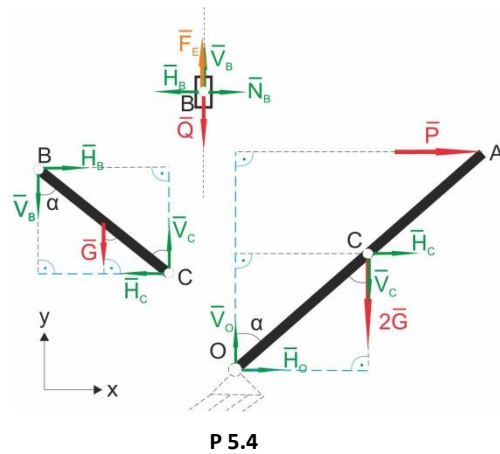
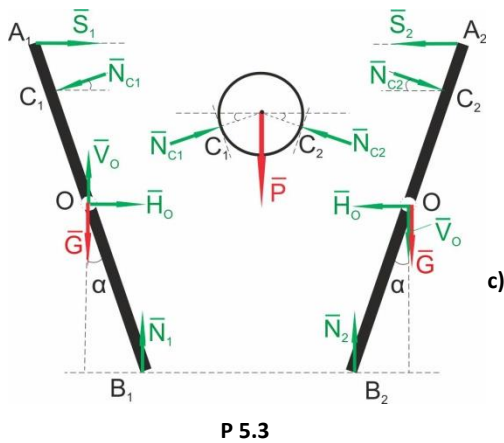
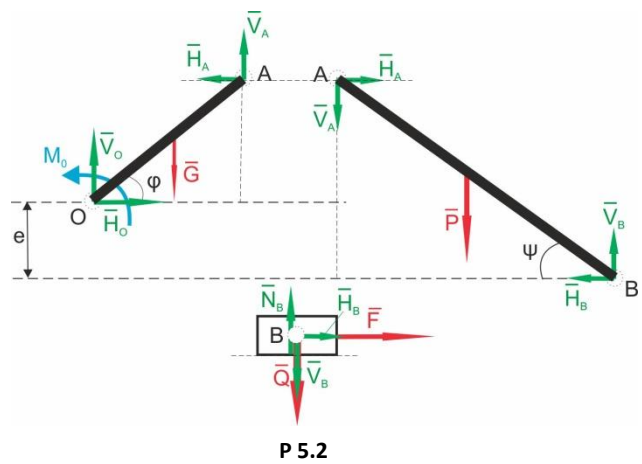
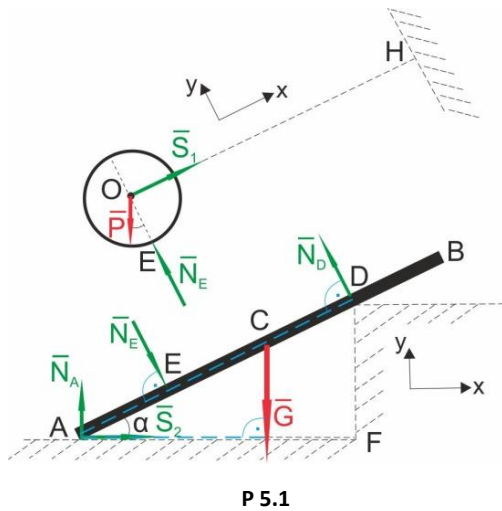


P5.4 Bara OA de lungime $2a$ și greutate $2G$ este articulată în O și acționată în A de o forță P . În C este articulată o altă bară BC de lungime a și greutate G care la rândul ei este articulată în B de o culisă având greutatea Q . Culisa este suspendată printr-un arc de constantă elastică k , arc care în poziția neîntinsă are capătul B în B_0 . Știind că în poziția de echilibru bara OA face unghiul α cu verticala se cer mărimile forțelor (forța elastică din arc și forța P), reacțiunile din articulațiile O , C și B precum și reacțiunea culisei din B .



- Indicații:**
1. Legăturile, ele se înlocuiesc cu forțele și momentele de legatură aferente;
 2. Se aplică principiul acțiunii și reacțiunii la legăturile interioare sistemului;
 3. Se întocmește schița mecanică separând corpurile dacă în problemă se cer reacțiunile interioare sistemului.

Schițele mecanice pentru cazurile P 5.1-P5.4 sunt:



4. Se scriu ecuațiile scalare de echilibru pentru fiecare corp, ținând seama de tipul de forte, planare sau spațiale.

In cele ce urmează, se va rezolva cazul P 5.4

$$\text{pt. bara OA} \begin{cases} H_O + H_C + P = 0 \\ V_O - V_C - 2G = 0 \\ 2Ga \sin \alpha + V_C a \sin \alpha + H_C a \cos \alpha - P 2a \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (O)$$

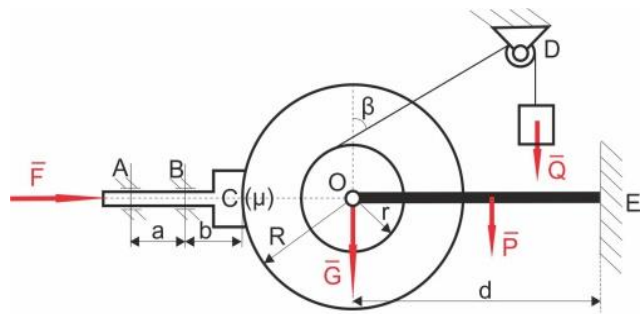
$$\text{pt. bara BC} \begin{cases} H_B - H_C = 0 \\ V_C - G - V_B = 0 \\ G \frac{a}{2} \sin \alpha + V_B a \sin \alpha - H_B a \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (C)$$

$$\text{pt. culisa din B} \begin{cases} N_B + H_B = 0 \\ F_e + V_B - Q = 0 \end{cases}$$

unde forța elastică este: $F_e = k\Delta l = k(OB_0 - OB) = k(2a - 2a \cos \alpha) = 2ak(1 - \cos \alpha)$. Prin rezolvarea sistemului de ecuații astfel obținut se determină necunoscutele: P , H_C , V_C , H_O , V_O , H_B , V_B și N_B . Reacțiunile din articulațiile O , C și B se calculează apoi cu relații de forma: $R_X = \sqrt{H_X^2 + V_X^2}$.

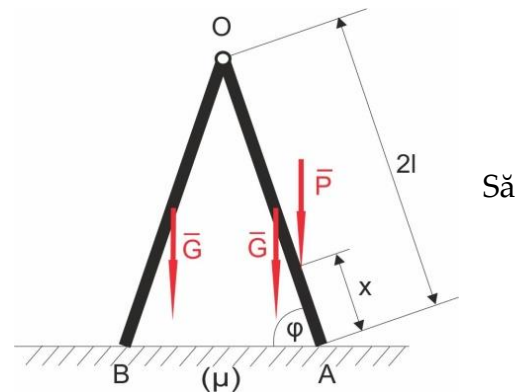
Categoria 2

P5.5 Se consideră sistemul mecanic din figură la care se cunosc dimensiunile geometrice și greutatea G , P și Q . Există frecare numai între troliu și sabot (μ). Se neglijează greutatea sabotului, iar scripetele din D este ideal. Firul petrecut peste scripete face unghiul β cu verticala. Să se determine forța F ce menține în echilibru sistemul și reacțiunile din articulația O , din încastrarea E și din punctele A , B și C .



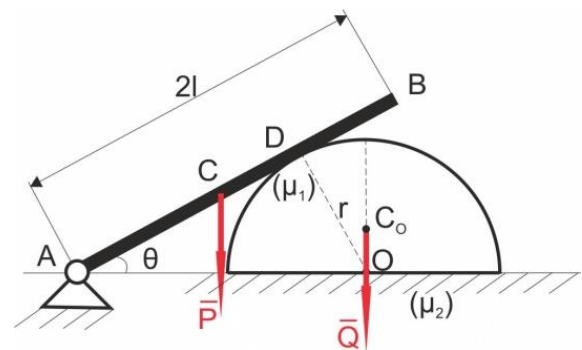
P 5.5

P5.6 O scară model A este așezată cu frecare pe o podea aspră orizontală (coeficient de frecare la alunecare μ). Pe scară se urcă Dorel (greutatea P). Să se determine distanța x până la care se poate urca Dorel pe scară și unghiul φ al scării pentru ca aceasta să stea în echilibru.



P 5.6

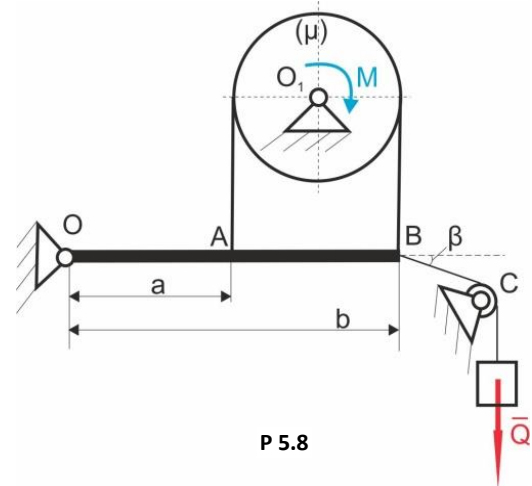
P5.7 Se consideră sistemul format dintr-o bară AB de lungime $2l$ și greutate P și un semicilindru de greutate Q și rază r . Bara este articulată în A și se reazemă cu frecare (coeficient de frecare la alunecare μ_1) în D pe semicilindru. Acesta este așezat tot cu frecare



P 5.7

(coeficient de frecare la alunecare μ_2) pe un plan orizontal. Se cere unghiul θ și distanța x față de O a punctului de aplicație al reacțiunii normale dintre semicilindru și plan precum și reacțiunile ca sistemul să stea în echilibru.

P5.8 O roată articulată în O_1 este acționată de cuplul motor M . Roata este ținută în echilibru cu ajutorul unei frâne cu cureaua (coeficient de frecare al curelei pe roată μ) conform schiței. Pârghia OB a frânei este acționată de o greutate P prin intermediul unui fir petrecut peste peste un mic scripete ideal C , fir ce face unghiul β cu pârghia. În ipoteza neglijării greutateilor roții și pârghiei se cer: tensiunile din cureaua, reacțiunile din articulațiile O și O_1 și mărimea forței Q .

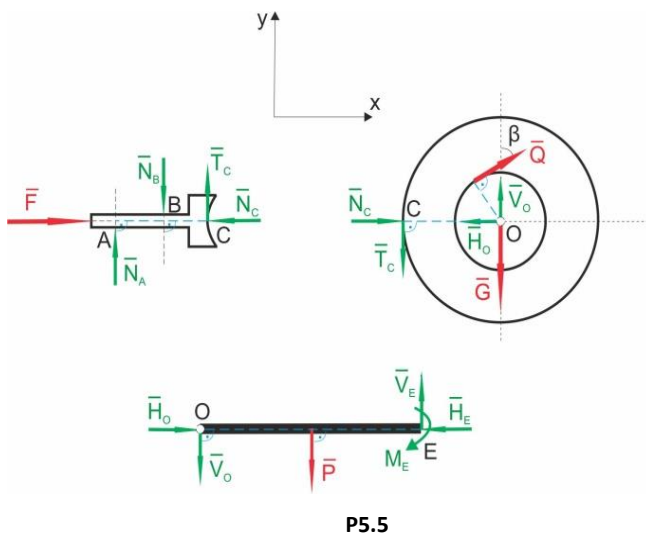


P 5.8

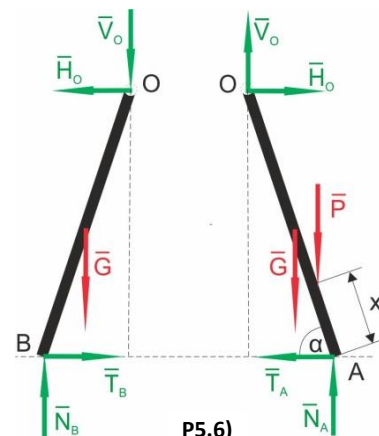
Indicații: 1. Se respectă indicațiile 1 - 3 de la categoria 1;

2. Din cauza existenței frecării se vor lua în considerare numai tendințele posibile de mișcare ale corpurilor;

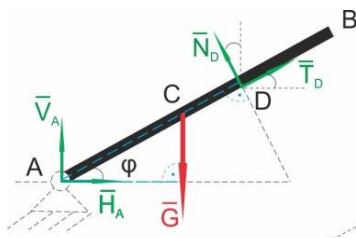
Schițele mecanice pentru cazurile P5.5 – P5.8 sunt:



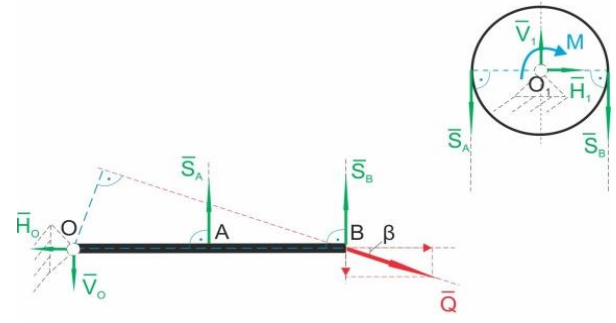
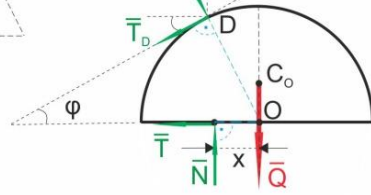
P5.5



P5.6)



P 5.7



P5.8

Ecuțiile de echilibru pentru cazul P5.8 sunt:

$$\text{pt. roată} \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 - S_1 - S_2 = 0 \\ S_1 \frac{b-a}{2} - M - S_2 \frac{b-a}{2} = 0 \end{cases} \quad (O_1)$$

relația pentru frecarea curelei: $S_1 \leq S_2 e^{\mu\pi}$

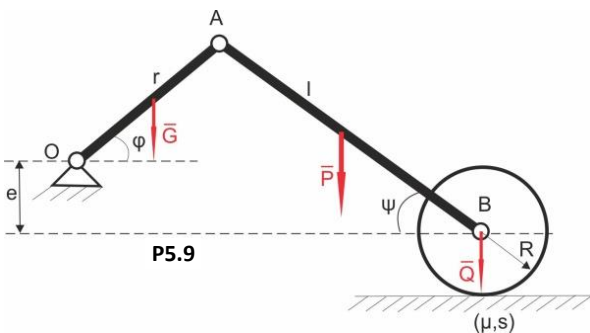
$$\text{pt. pârghie} \begin{cases} Q \cos \beta - H_0 = 0 \\ S_1 + S_2 - Q \sin \beta - V_0 = 0 \\ -S_1 a - S_2 b + Qb \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (O)$$

și se obține un sistem de 7 ecuații cu 7 nec. cu soluțiile:

$$S_2 = \frac{M}{R(e^{\mu\pi} - 1)} \quad S_1 = \frac{Me^{\mu\pi}}{R(e^{\mu\pi} - 1)} \quad Q = \frac{M(ae^{\mu\pi} + b)}{Rb \sin \beta (e^{\mu\pi} - 1)} \quad H_0 = \frac{M(ae^{\mu\pi} + b)}{Rb(e^{\mu\pi} - 1)} \cot \beta$$

$$V_0 = \frac{M(ae^{\mu\pi} + b)}{Rb(e^{\mu\pi} - 1)} \quad H_1 = 0 \quad V_1 = \frac{Me^{\mu\pi} + 1}{R(e^{\mu\pi} - 1)} = R_1 \quad R_0 = \sqrt{H_0^2 + V_0^2} .$$

Categoria 3



P5.9

P5.9 O roată este antrenată printr-un mecanism

bielă-manivelă cu excentric conform schiței.

Roata se poate mișca pe un plan orizontal aspru

(coeficienți de frecare μ la alunecare și s la

rostogolire) fiind articulată la capătul B al bieii.

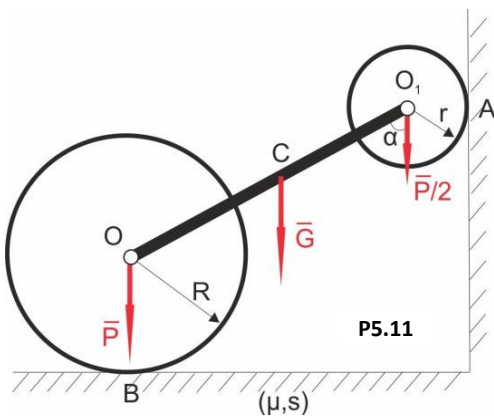
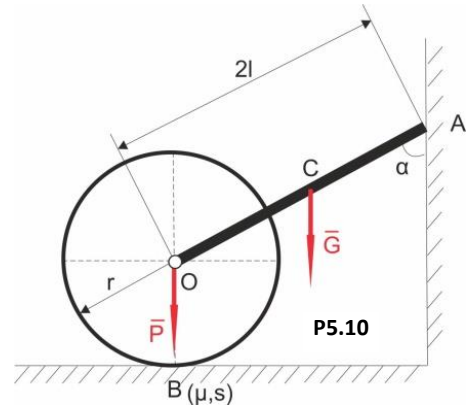
Cunocând greutatea G a manivelei, P a bieii, Q

a roții și dimensiunile sistemului să se determine coeficienții de frecare minimi μ și s

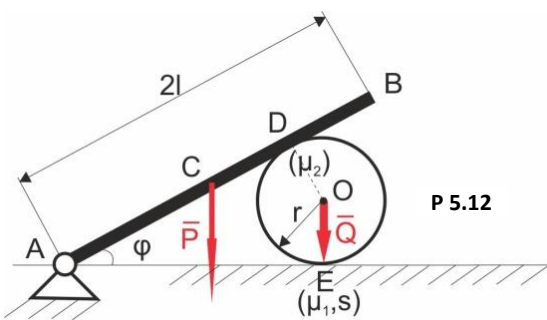
pentru echilibru fără alunecare și rostogolire precum și reacțiunile din articulațiile O , A , B

și din reazemul D .

P5.10 Se consideră sistemul format dintr-un cilindru de greutate P , rază r și o bară de greutate G și lungime $2l$. Cilindrul este articulat în O de bară și este rezemat cu frecare în B pe o suprafață orizontală. Bara este simplu rezemată fără frecare în A și face unghiul α cu verticala. Să se determine coeficienții de frecare la alunecare μ și la rostogolire s din punctul B astfel ca sistemul să rămână în echilibru. Se neglijează frecarea din articulația O .



P5.11 Se consideră sistemul format dintr-o bară și doi cilindri articulați în O și O_1 . Se cunosc $OO_1 = 2l$, unghiul α , G , P respectiv greutățile cilindrilor și R și r razele lor. Să se determine coeficienții de frecare la alunecare μ și la rostogolire s din punctul A pentru ca sistemul să rămână în echilibru. Se vor neglija frecările din O , O_1 și B .

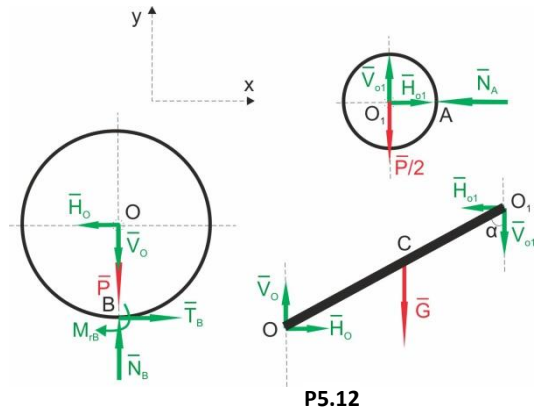
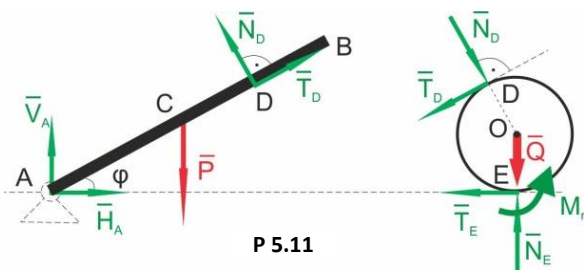
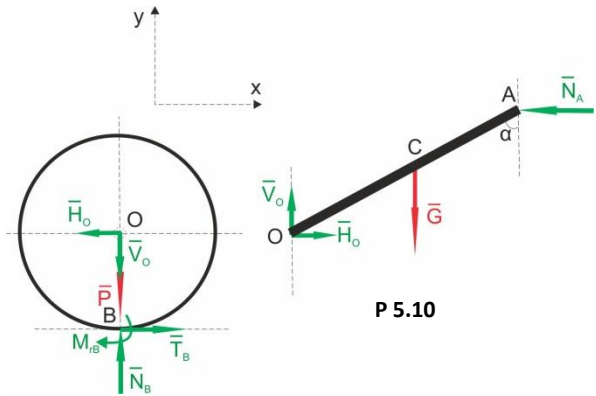
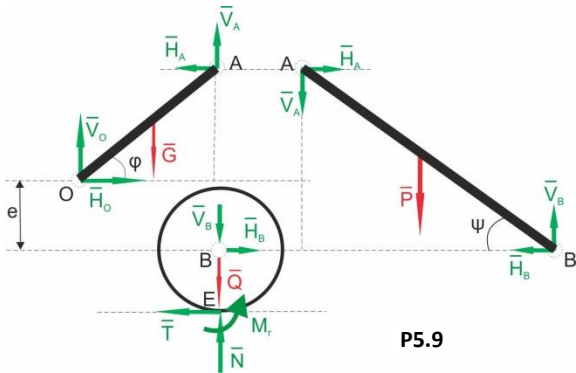


P5.12 Bara AB de greutate P și lungime $2l$ este articulată în A și rezemată cu frecare în D pe un cilindru de greutate Q așezat în E pe un plan orizontal aspru (coeficienți de frecare la alunecare μ_1 și la rostogolire s). Se cunoaște coeficientul de frecare la alunecare μ_2 din

punctul D între bară și cilindru și se neglijează frecarea din articulația barei. Să se determine valoarea greutății P , a unghiului φ și a coeficientului minim de frecare s la rostogolire ca sistemul să stea în echilibru.

Indicație: - se respectă cele indicate la categoria 2.

Schițele mecanice pentru cazurile P5.9 – P5.12 sunt:



Ecuțiile de echilibru pentru cazul P5.12 sunt:

$$\text{pt. bară} \begin{cases} H_A - N_D \sin \varphi + T_D \cos \varphi = 0 \\ V_A + N_D \cos \varphi + T_D \sin \varphi - P = 0 \\ Pl \cos \varphi - N_D R \cot \frac{\varphi}{2} = 0 \end{cases} \quad (A)$$

la care se atașează relația frecării: $T_D \leq \mu_2 N_D$

$$\text{pt. cilindru} \begin{cases} N_D \sin \varphi - T_D \cos \varphi - T_E = 0 \\ N_E - Q - N_D \cos \varphi - T_D \sin \varphi = 0 \\ T_D R - T_E R + M_r = 0 \end{cases} \quad (O)$$

$$\text{relațiile pentru frecări} \begin{cases} T_E \leq \mu_1 N_E \\ M_r \leq s N_E \end{cases}$$

și se obține un sistem de 9 ecuații cu 9 necunoscute care se poate rezolva facil.

Capitolul 6 - Statica firelor

6.1 Generalități și ipoteze simplificatoare

Modelul de „fir”, presupune o linie materială, flexibilă, inextensibilă și torsionabilă.

Prin urmare sunt valabile următoarele ipoteze:

1. lungimea este mult mai mare decât dimensiunile secțiunii transversale (firul este aproximat cu o linie materială);
2. firul ia orice formă fără să opună rezistență (nu rezistă la încovoiere și la compresiune adică este perfect flexibil);
3. firul se opune întinderii (rezistă la întindere deci este inextensibil);
4. firul poate fi răsucit (este torsionabil).

Asupra firului acționează două categorii de forțe: a. *concentrate* (într-un punct) și b. *repartizate* pe lungimea firului

Forma pe care o ia firul sub acțiunea forțelor se numește „curbă funiculară”. În statica firelor se pune problema:

- a. *determinării curbei funiculare;*
- b. *determinarea tensiunii într-un punct al firului sub acțiunea unui sistem de forțe dat.*

6.2 Fire suspendate

6.2.1 Ecuațiile vectoriale de echilibru

În Figura 6.1, se consideră un fir suspendat între punctele A și B acționat de o forță \bar{p} [N/m] uniform repartizată pe fir.

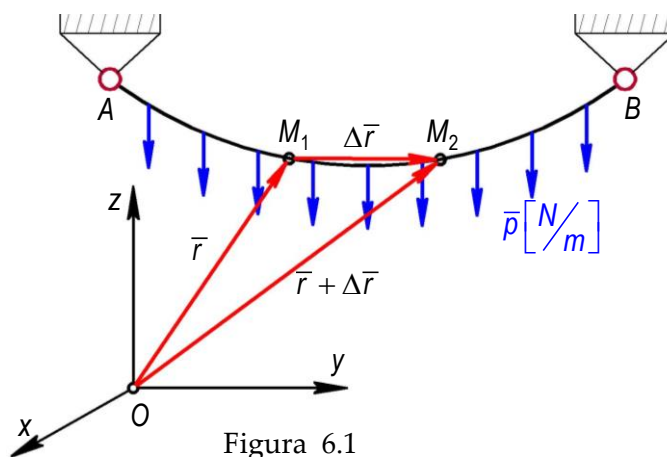


Figura 6.1

Poziția unui punct M_1 pe fir este dată de arcul de curbă s măsurat din capătul A al firului sau de vectorul de poziție \vec{r} față de reperul cartezian $Oxyz$. Un alt punct M_2 se găsește la un arc mic Δs sau la vectorul $\Delta\vec{r}$ de M_1 respectiv $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ de reperul cartezian. Firul se găsește în echilibru sub acțiunea forței repartizate \vec{p} , prin urmare și bucata de fir M_1M_2 trebuie să fie în echilibru. Pentru studiul echilibrului, se izolează bucata considerată de fir. La capetele bucății de fir, în M_1 și M_2 vor acționa părțile înlăturate de fir ca în Figura 6.2.

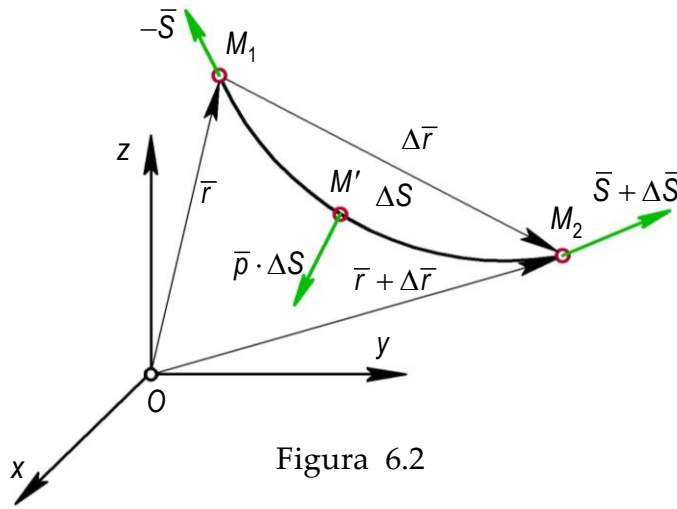


Figura 6.2

Ecuțiile vectoriale de echilibru ale bucății de fir M_1M_2 sunt

$$\begin{cases} -\vec{S} + \vec{p}\Delta s + \vec{S} + \Delta\vec{S} = 0 \\ \overline{M_2M_1} \times (-\vec{S}) + \overline{M_2M'} \times \vec{p}\Delta s = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

unde ecuația de momente este scrisă în raport cu punctul M_2 .

Ținând seama că $\overline{M_2M_1} = -\Delta\vec{r}$, fiecare ecuație se divizează cu Δs , rezultând:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta s} + \vec{p} = 0 \\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \times \vec{S} + \overline{M_2M'} \times \vec{p} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Trecând la limită când $\Delta s \rightarrow 0$, se obține:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{p} = 0 \\ \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{S} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \overline{M_2M'} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{p} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Rezultă:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 \\ \frac{d\bar{r}}{ds} \times \bar{S} = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

dar

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k} \quad (6.5)$$

deci

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 \\ \bar{\tau} \times \bar{S} = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Un produs vectorial e nul dacă termenii sunt coliniari și sistemul ia în forma finală *ecuațiile vectoriale de echilibru ale firelor suspendate*, adică:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 \\ \bar{S} = S\bar{\tau} \end{cases} \quad (6.7)$$

Prima ecuație conduce la concluzia că *tensiunea dintr-un punct al firului se datorează forței repartizate pe fir*, iar a doua că *tensiunea dintr-un punct al firului este tangentă la fir*.

6.2.2 Ecuațiile carteziene de echilibru

Pentru stabilirea ecuațiilor carteziene de echilibru, se consideră ecuațiile vectoriale de echilibru ale firelor suspendate, în care se exprimă toți vectorii în sistemul cartezian Oxyz și anume:

$$\bar{\tau} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k}; \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \quad (6.8)$$

$$\bar{S} = S\frac{dx}{ds}\bar{i} + S\frac{dy}{ds}\bar{j} + S\frac{dz}{ds}\bar{k}; \quad \bar{p} = p_x\bar{i} + p_y\bar{j} + p_z\bar{k} \quad (6.9)$$

Se înlocuiesc apoi în prima ecuație vectorială din (6.8) obținând:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\bar{i} + S\frac{dy}{ds}\bar{j} + S\frac{dz}{ds}\bar{k}\right) + p_x\bar{i} + p_y\bar{j} + p_z\bar{k} = 0, \quad (6.10)$$

Dând factori comuni versorii, se obține:

$$\left[\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right) + p_x\right]\bar{i} + \left[\frac{d}{ds}\left(S\frac{dy}{ds}\right) + p_y\right]\bar{j} + \left[\frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right) + p_z\right]\bar{k} = 0. \quad (6.11)$$

Expresia are sens numai dacă se anulează coeficienții versorilor ceea ce conduce la un sistem de trei ecuații scalare diferențiale de ordinul doi de forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(S \frac{dx}{ds} \right) + p_x = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(S \frac{dy}{ds} \right) + p_y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(S \frac{dz}{ds} \right) + p_z = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

În expresiile anterioare sunt patru necunoscute, și anume: valoarea tensiunii S , $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ ecuațiile parametrice ale curbei funiculare. Fiind numai trei ecuații diferențiale mai este nevoie de încă una (relația dintre cosinușii directori ai versorului tangentei la curbă $\bar{\tau}$), adică:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \quad (6.13)$$

Așadar, s-a ajuns la patru ecuații diferențiale, sistemul se poate integra și se pot obține necunoscutele.

6.3 Frecarea firelor

În Figura 6.3., un fir este așezat cu frecare (coeficient de frecare μ) pe o roată fixă între punctele M_1 și M_2 în care acționează tensiunile \bar{S}_1 și \bar{S}_2 . Unghiul α între razele corespunzătoare punctelor M_1 și M_2 poartă numele de "unghi de înfășurare" al firului

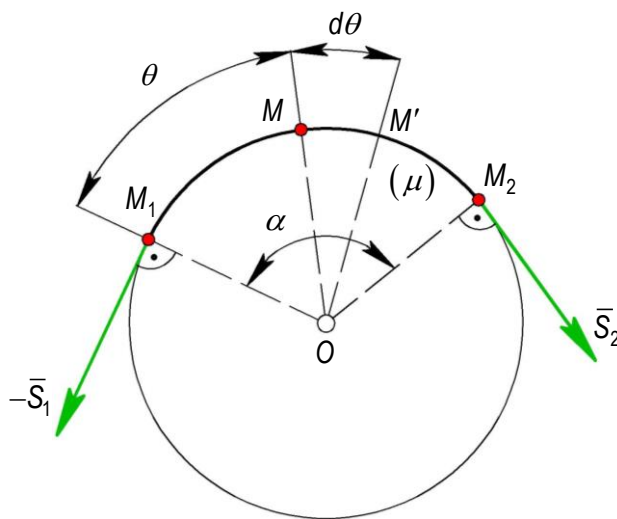


Figura 6.3

Se cere determinarea unei relații între tensiunile \bar{S}_1 și \bar{S}_2 astfel încât firul să stea în echilibru pe roată. În acest scop, din fir se izolează o bucată MM' infinitezimală de fir ce subîntinde unghiul la centru $d\theta$ și este plasată sub unghiul θ de M_1 . La echilibru, pentru tendința de alunecare în sens orar a firului, asupra bucății MM' acționează forțele din Figura 6.4.

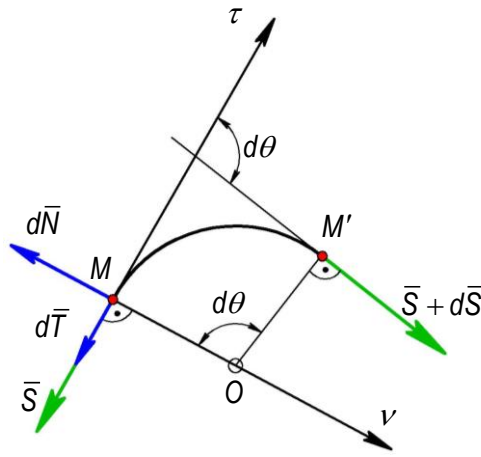


Figura 6.4

Ecuțiile scalare de echilibru proiectate pe axele tangență (τ) și normala principală (ν) sunt:

$$\begin{cases} (S + dS) \cos d\theta - S - dT = 0 \\ (S + dS) \sin d\theta - dN = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Aceste expresii li se adaugă relația frecării $dT \leq \mu dN$. Unghiul $d\theta$ fiind foarte mic se pot face aproximările: $\sin d\theta \approx d\theta$; $\cos d\theta \approx 1$.

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} S + dS - S - dT = 0 \\ Sd\theta + dSd\theta - dN = 0 \\ dT \leq \mu dN \end{cases} \quad (6.15)$$

Reducând termenii asemenea și neglijând infiniții mici de ordin superior ($dSd\theta$) pentru echilibrul la limită sunt valabile expresiile:

$$\begin{cases} dS - dT = 0 \\ Sd\theta - dN = 0 \\ dT = \mu dN \end{cases} \quad (6.16)$$

Din ecuația a doua a expresiilor (6.16) rezulta:

$$dN = Sd\theta, \quad (6.17)$$

Substituind (6.17) în expresia a treia din (6.16), iar apoi $dT = \mu Sd\theta$ îl substituim în prima ecuație din aceeași expresie (6.16), se obține o ecuație diferențială de ordinul I cu variabile separabile de forma:

$$dS - \mu Sd\theta = 0. \quad (6.18)$$

Se separă variabilele:

$$\frac{dS}{S} = \mu d\theta. \quad (6.19)$$

și prin integrare rezultă:

$$\ln S = \mu\theta + C. \quad (6.20)$$

Constanta de integrare se poate determina din condiția la limită în M_1 , unde: $\theta=0$ $S=S_1$.

Astfel, rezulta:
$$C = \ln S_1 \quad (6.21)$$

Ținând seama de (6.21) și (6.20), rezulta:

$$\ln S = \mu\theta + \ln S_1, \quad \ln S - \ln S_1 = \mu\theta \text{ sau } \ln \frac{S}{S_1} = \mu\theta \text{ din care } \frac{S}{S_1} = e^{\mu\theta}. \quad (6.22)$$

Condiția la limită în punctul M_2 , $\theta=\alpha$ $S=S_2$ permite determinarea relației dintre S_1 și S_2 în cazul echilibrului la limită $\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\alpha}$ cu tendința de alunecare în sens orar. Știind că forța rezistentă este S_1 , iar forța motoare este S_2 , pentru echilibru trebuie să fie îndeplinită condiția:

$$S_2 \leq S_1 e^{\mu\alpha}. \quad (6.23)$$

adică:

$$F_{mot} \leq F_{rez} e^{\mu\alpha}. \quad (6.24)$$

Observație: Dacă se ia în considerare cealaltă tendință de alunecare (în sens antiorar) se schimbă sensul forței de frecare pe schița mecanică, semnul frecării (dT) în ecuațiile scalare de echilibru și semnul lui μ și sensul inegalității în rezultatul final:

$$S_2 \geq S_1 e^{-\mu\alpha} \quad (6.25)$$

În acest caz, forța motoare este S_1 , iar forța rezistentă S_2 și se ajunge la același rezultat.

Combinând rezultatele obținute rezulta că pentru echilibru trebuie ca:

$$e^{-\mu\alpha} \leq \frac{S_2}{S_1} \leq e^{\mu\alpha}. \quad (6.26)$$

De remarcat că în problemele cu frecare trebuie analizate toate tendințele posibile de mișcare!!

6.4 Echilibrul firului petrecut peste un scripete

În Figura 6.5, pe un scripete de diametru $2R$ ce se poate roti în jurul axului său (de diametru $2r$) este înfășurat un fir/cablu acționat la capete de forțele motoare \bar{F}_m și rezistentă \bar{F}_r . **Se pune problema determinării unei relații între cele două forțe astfel încât sistemul mecanic să fie în echilibru.** În axul scripetelui există frecare (coeficient complex de frecare μ' al fusului în lagăr).

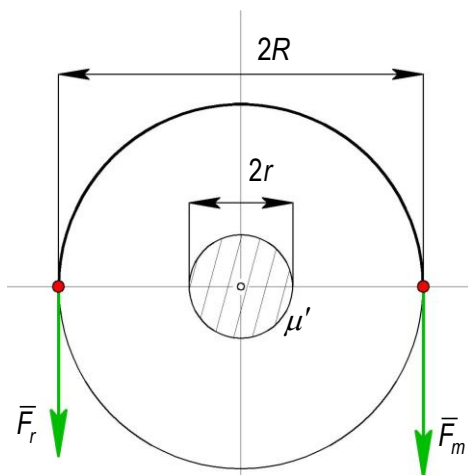


Figura 6.5

Firul este inextensibil, dar are o anumită rigiditate care-l face să se desprindă de scripete în A_1 în loc de A_0 și în B_1 în loc de B_0 (vezi Figura 6.6). Rigiditatea se explică prin *variația continuă a curburii firului* de la $1/R$ (pe scripete) la 0 (la capete) adică variația nu se poate face în salturi.

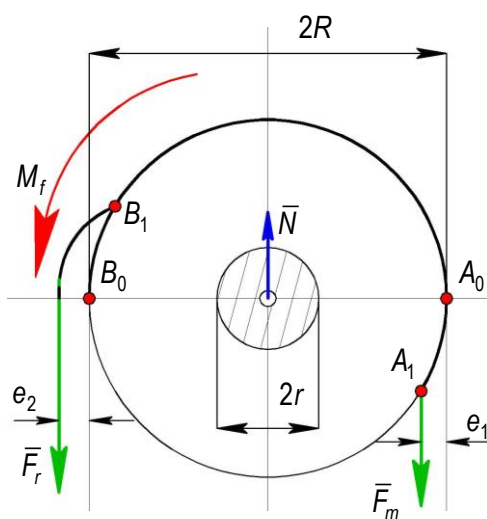


Figura 6.6

Izolând scripetele de ax se introduc forțele/momentele de legătură: reacțiunea normală \bar{N} și momentul frecării fusului \bar{M}_f . La ecuațiile scalare de echilibru în număr de două (una de proiecții de forțe pe verticală și una de momente):

$$\begin{cases} N - F_m - F_r = 0 \\ F_m(R - e_1) - F_r(R + e_2) - M_f = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

se adaugă relația pentru frecarea fusului în lagăr la limita echilibrului:

$$M_f = \mu' r N. \quad (6.28)$$

Din prima ecuație a expresiei (6.27) rezultă:

$$N = F_m + F_r. \quad (6.29)$$

care se înlocuiește în relația (6.28), astfel se obține:

$$M_f = \mu' r (F_m + F_r). \quad (6.30)$$

Ținând seama de (6.30) rezultă:

$$F_m (R - e_1 - \mu' r) - F_r (R + e_2 + \mu' r) = 0. \quad (6.31)$$

din care se exprimă forța motoare:

$$F_m = \frac{R + e_2 + \mu' r}{R - e_1 - \mu' r} F_r = \frac{R - e_1 - \mu' r + e_1 + e_2 + 2\mu' r}{R - e_1 - \mu' r} F_r = \left(1 + \frac{e_1 + e_2 + 2\mu' r}{R - e_1 - \mu' r} \right) F_r. \quad (6.32)$$

La numitor e_1 și $\mu' r$ sunt mult mai mici față de R și-i putem neglija, astfel:

$$F_m = \left(1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2\mu' r}{R} \right) F_r. \quad (6.33)$$

Se introduce notația:

$$k = \left(1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2\mu' r}{R} \right), \quad (6.34)$$

denumită "factor de amplificare al forței rezistente", și se constata că $k > 1$.

Termenii doi și trei din paranteză țin seama de rigiditatea firului și de frecarea fusului în lagăr. În final relația căutată este:

$$F_m = k F_r. \quad (6.35)$$

În cazul scripetelui ideal (se neglijează rigiditatea firului $e_1 = e_2 = 0$ și frecarea din axul scripetelui $\mu' = 0$) $k = 1$, iar forța motoare notată cu $F_{m0} = F_r$.

Randamentul scripetelui se definește ca fiind raportul dintre forța motoare a scripetelui ideal și forța motoare a scripetelui real, și se exprima:

$$\eta = \frac{F_{m0}}{F_m} = \frac{F_r}{k F_r} = \frac{1}{k}. \quad (6.36)$$

Capitolul 7- Cinematica punctului material

7.1 Noțiuni generale de cinematică

Dacă în **Statică** poziția punctului material depindea de coordonatele acestuia, în cinematică poziția se schimbă în timp deoarece punctul se deplasează. *Mișcarea se consideră cunoscută dacă se poate preciza poziția punctului în orice moment de timp.* Vectorul de poziție \vec{r}_1 depinde și de timp deci $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x, y, z, t)$ este o funcție vectorială de timp care trebuie să fie continuă, uniformă și derivabilă de cel puțin două ori.

Traectoria este locul geometric al pozițiilor succesive în timp ale punctului material. Ea se notează cu Γ vezi Figura 7.1.

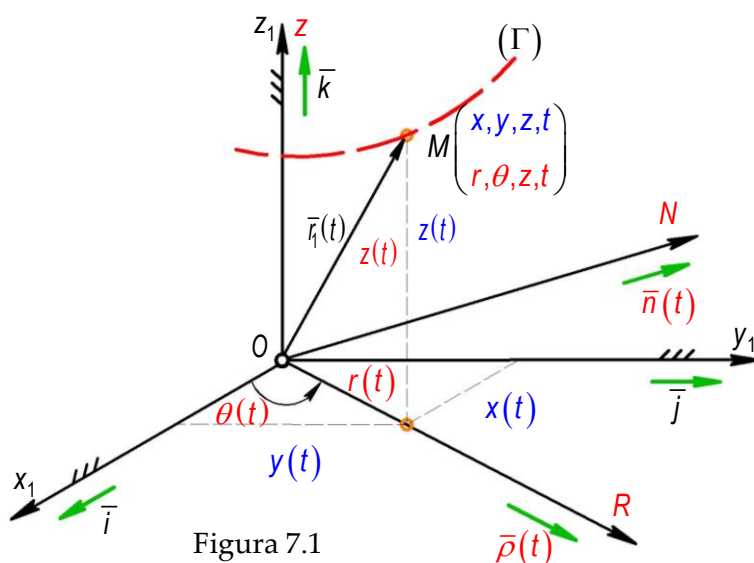


Figura 7.1

Expresiile coordonatelor ca funcții de timp poartă numele de *legi de mișcare* ale punctului material. Astfel în coordonate carteziene legile de mișcare sunt:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (7.1)$$

iar în coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (7.2)$$

Din punct de vedere matematic legile de mișcare nu sunt altceva decât *ecuațiile parametrice* ale traiectoriei având ca parametru timpul t .

Prin eliminarea parametrului între ecuații se obține traiectoria sub forma unei curbe strâmbe:

- în spațiul cartezian: $(\Gamma) \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}; \quad (7.3)$

- în spațiul cilindric: $(\Gamma) \begin{cases} g_1(r, \theta, z) = 0 \\ g_2(r, \theta, z) = 0 \end{cases} \quad (7.4)$

Poziția punctului material pe traiectorie este dată fie cunoscând legile de mișcare fie cunoscând arcul de curbă s măsurat dintr-o poziție inițială $M_0(t=0)$ până la punctul curent $M(t)$. Expresia:

$$s = s(t) . \quad (7.5)$$

se numește *ecuația orară* a mișcării.

În plan (vezi Figura 7.2) **sistemul de coordonate cilindrice** devine **sistem de coordonate polare** cu legile de mișcare:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} . \quad (7.6)$$

și în coordonate carteziene:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} . \quad (7.7)$$

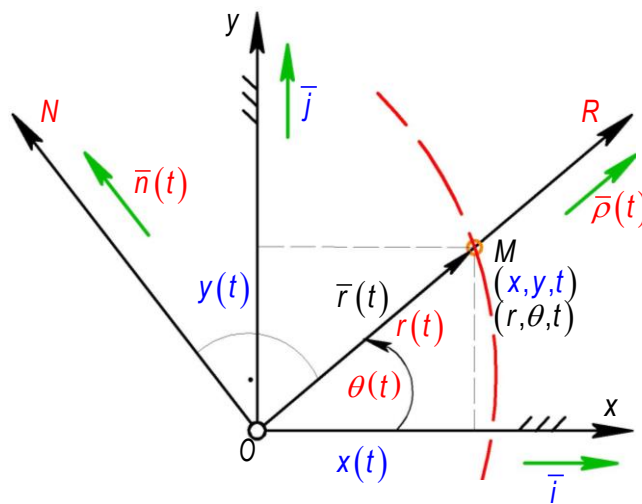


Figura 7.2

Ecuția traiectoriei se poate obține fie sub formă implicită

$$(\Gamma) f(x, y) = 0 \text{ sau } g(r, \theta) = 0 . \quad (7.8)$$

fie sub formă explicită:

$$(\Gamma) y = y(x) \text{ sau } r = r(\theta) . \quad (7.9)$$

după eliminarea parametrului timp.

Viteza este o mărime vectorială care descrie variația vectorului de poziție în timp ca mărime, direcție și sens.

În Figura 7.3, se consideră un punct material aflat în mișcare pe o traiectoria (Γ). La momentul t punct se găsește în M , iar după intervalul de timp Δt în M_1 .

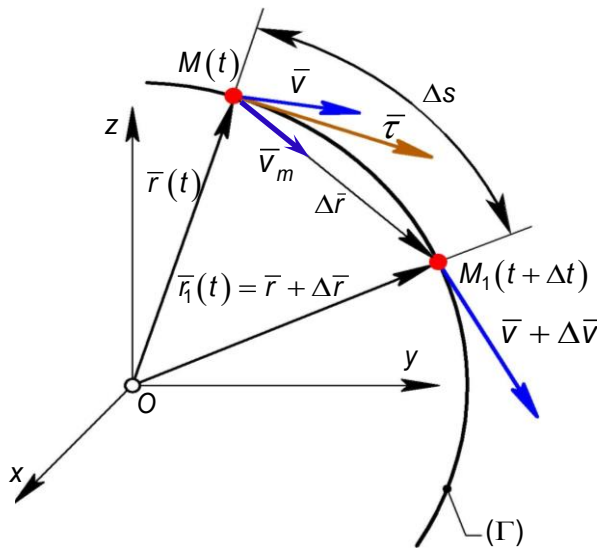


Figura 7.3

Poziția lui M este dată de vectorul de poziție \vec{r} față de sistemul de referință sau de arcul de curbă s față de poziția inițială M_0 . În M_1 , poziția față de sistemul de referință este cunoscută prin:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r} . \quad (7.10)$$

sau de arcul Δs față de M .

Se definește *viteza medie* prin:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \quad (7.11)$$

Dacă punctul M_1 se apropie foarte mult de M ($\Delta t \rightarrow 0$) prin trecere la limită se obține

viteza instantanee definită prin:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (7.12)$$

Se poate observa că *viteza este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție al punctului*, și se notează cu un punct deasupra vectorului (notație simplificată în mecanică) $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

În Sistemul Internațional de mărimi și unități, viteza măsoară în $[v]_{SI} = m/s$.

Tinand seama de arcul de curbă Δs , prin trecere la limită rezultă:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \vec{t} \quad (7.13)$$

cu observatia că $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$, asadar, rezultă că *vectorul vitează este întotdeauna tangent la traiectorie!!*

Accelerația este o mărime vectorială care descrie variația vectorului viteză în unitatea de timp ca mărime, direcție și sens.

În Figura 7.4, se consideră același punct material aflat în mișcare pe o traiectorie curbilinie în pozițiile M și M_1 . La momentul t are viteza \vec{v} , iar după intervalul de timp Δt viteza lui s-a schimbat devenind $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$.

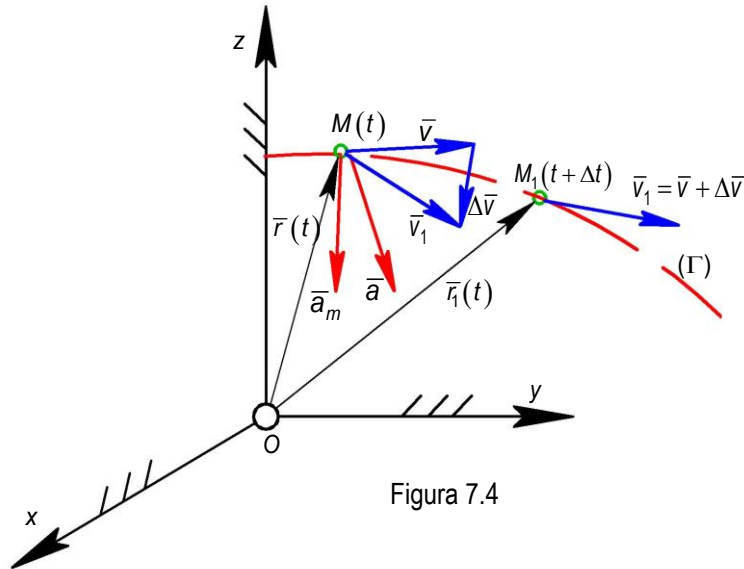


Figura 7.4

Ca și în cazul vitezei se definește *acelerație medie*:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (7.14)$$

și o *acelerație instantanee*:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (7.15)$$

Prin urmare accelerația este derivata întâi a vitezei sau derivata a doua a vectorului de poziție.

În Sistemul International de mărimi și unități, unitatea de măsură este $[a]_{SI} = m/s^2$.

Trebuie menționat că există și supraaccelerații care arată variația accelerației. De exemplu $\bar{a}_1 = \dot{\bar{a}} = \ddot{\vec{v}} = \dddot{\vec{r}}$ este prima supraaccelerație.

Observații: - de la \vec{r} la \vec{v} și \bar{a} se ajunge prin derivare;

-invers (de la \bar{a} sau \vec{v} la \vec{r}) se aplică integrarea și apar constantele de integrare care se determină din condițiile inițiale;

-condițiile inițiale ale mișcării sunt: la $t=0$ (momentul inițial) $\vec{r} = \vec{r}_0$ (poziția inițială) și $\vec{v} = \vec{v}_0$ (viteza inițială).

Viteza și accelerația areolară

Fie un punct material în mișcare pe o traiectorie plană (Γ). Se notează cu xOy planul traiectoriei. La momentul t punctul se află în M (având vectorul de poziție \vec{r}), iar după un interval Δt s-a deplasat în M_1 (de vector de poziție $\vec{r} + \Delta\vec{r}$) conform Figurii 7.5.

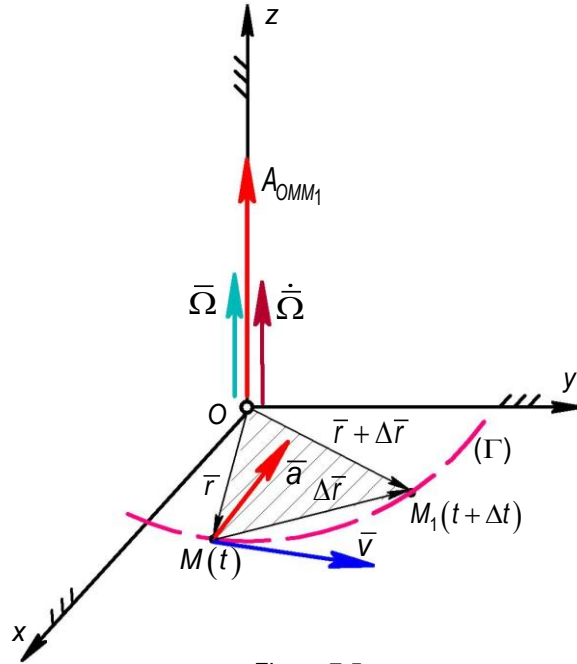


Figura 7.5

Se definește drept *arie orientată* vectorul având modulul egal cu aria triunghiului curbiliniu OMM_1 , direcția perpendiculară pe planul acestuia și sensul în sensul produsului vectorial $\vec{r} \times \Delta\vec{r}$. Când Δt este mic aria orientată poate fi aproximată cu aria triunghiului obținând:

$$\bar{A}_{OMM_1} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta\vec{r}. \quad (7.16)$$

Viteza areolară reprezintă aria măturată de raza vectoare în unitatea de timp adică:

$$\bar{\Omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{A}_{OMM_1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r} \times \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (7.17)$$

Accelerația areolară este derivata vitezei areolare și se poate calcula ca derivata unui produs, adică:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a}. \quad (7.18)$$

7.2 Componentele carteziene ale vitezei și accelerației

Se consideră un punct material în mișcare pe o traiectorie (Γ) care se află la momentul t în poziția din Figura 7.6. Vectorul de poziție al punctului M se exprimă în sistemul cartezian fix prin:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (7.19)$$

iar viteza lui prin:

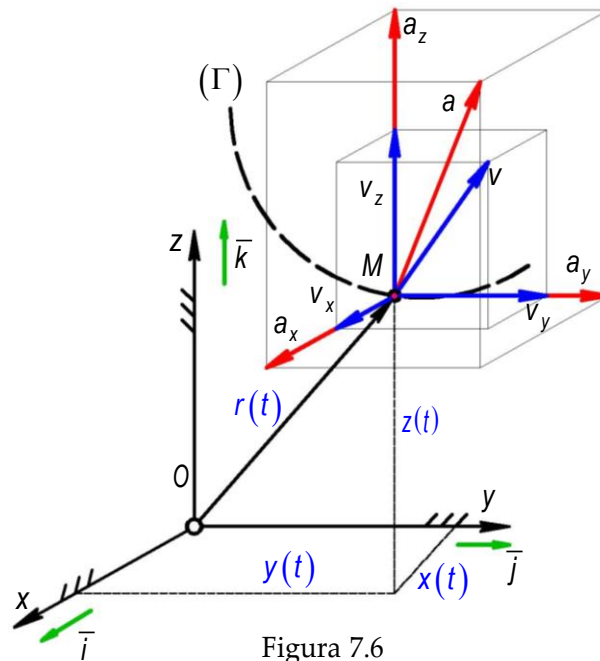
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (7.20)$$


Figura 7.6

Se consideră expresia de definiție a vitezei $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, adică: $v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

Prin identificarea coeficienților versorilor între cei doi membri ai relației vectoriale se

determină componentele carteziene ale viteze:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad (7.21)$$

care permit calculul modului vectorului viteză și cosinuzii săi directori:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad (7.22)$$

$$\cos \alpha = v_x/v; \quad \cos \beta = v_y/v; \quad \cos \gamma = v_z/v \quad (7.23)$$

în care α , β și γ sunt unghiurile pe care le face viteza cu axele sistemului de referință.

Accelerația în sistemul cartezian se exprimă la fel ca viteza $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, iar ținând cont de definiția ei $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ rezultă:

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (7.24)$$

Identificând din coeficienții versorilor, rezultă componentele carteziene ale accelerației:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (7.25)$$

Modulul și cosinușii directori se determină cu:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (7.26)$$

$$\cos \alpha_1 = a_x/a; \quad \cos \beta_1 = a_y/a; \quad \cos \gamma_1 = a_z/a \quad (7.27)$$

unde α_1, β_1 și γ_1 sunt unghiurile dintre accelerație și axele sistemului de referință.

7.3 Componentele cilindrice ale vitezei și accelerației

În coordonate cilindrice (vezi Figura 7.7) cu axele mobile R, N și axa fixă z vectorul de poziție $\vec{r}_1(t)$ se exprimă astfel:

$$\vec{r}_1(t) = r(t)\vec{\rho}(t) + z(t)\vec{k} \quad (7.28)$$

Derivând în raport cu timpul rezultă viteza:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{r}\vec{\rho} + r\dot{\vec{\rho}} + \dot{z}\vec{k} \quad (7.29)$$

care se poate scrie în coordonate cilindrice:

$$\vec{v} = v_R\vec{\rho} + v_N\vec{n} + v_z\vec{k}. \quad (7.30)$$

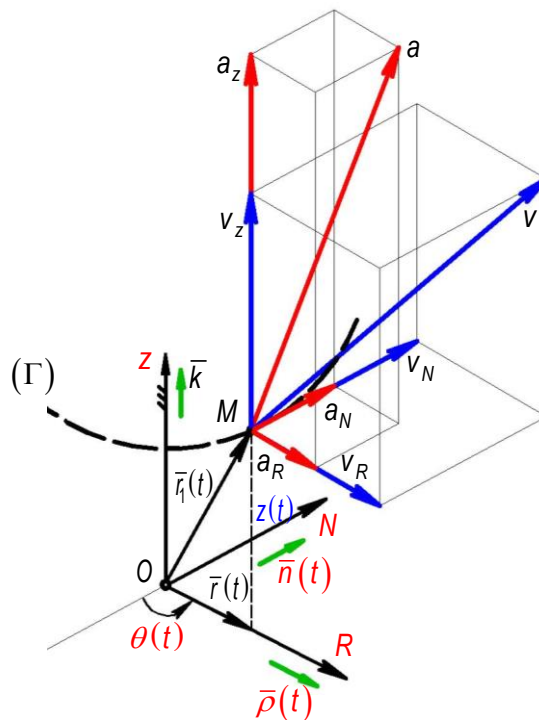


Figura 7.7

Derivatele versorilor mobili sunt: $\dot{\vec{\rho}} = \dot{\theta}\vec{n}; \quad \dot{\vec{n}} = -\dot{\theta}\vec{\rho}. \quad (7.31)$

Prin identificarea coeficienților versorilor rezultă *componentele cilindrice ale vitezei*:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} \\ v_N = r\dot{\theta} \\ v_Z = \dot{z} \end{cases} \quad (7.32)$$

cu care se calculează modulul ei: $v = \sqrt{v_R^2 + v_N^2 + v_Z^2}$. (7.33)

Accelerația în coordonate cilindrice este: $\bar{a} = a_R\bar{\rho} + a_N\bar{n} + a_z\bar{k}$. (7.34)

Ținând seama de (7.31), expresia (7.29), se rescrie sub forma:

$$\bar{v} = \dot{r}(t) \cdot \bar{\rho}(t) + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{n}(t) + \dot{z}(t) \cdot \bar{k} \quad (7.35)$$

Prin derivarea expresiei (7.35) și grupare după versori se obține:

$$\begin{aligned} a_R\bar{\rho} + a_N\bar{n} + a_z\bar{k} &= \ddot{r}\bar{\rho} + \dot{r}\dot{\bar{\rho}} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{n} + r\ddot{\theta}\bar{n} + r\dot{\theta}\dot{\bar{n}} + \ddot{z}\bar{k} = \\ &= \ddot{r}\bar{\rho} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{n} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{n} + r\ddot{\theta}\bar{n} - r\dot{\theta}^2\bar{\rho} + \ddot{z}\bar{k} = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{n} + (\ddot{z})\bar{k}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Identificând coeficienții versorilor se obțin *componentele cilindrice ale accelerației*:

$$\begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_N = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_Z = \ddot{z} \end{cases} \quad (7.37)$$

având modulul: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. (7.38)

În plan coordonatele cilindrice devin coordonate polare, (vezi Figuri 7.8) dispărând componenta după axa z atât a vitezei cât și a accelerației. Astfel, se scrie:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} \\ v_N = r\dot{\theta} \end{cases} ; \begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_N = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \quad (7.39)$$

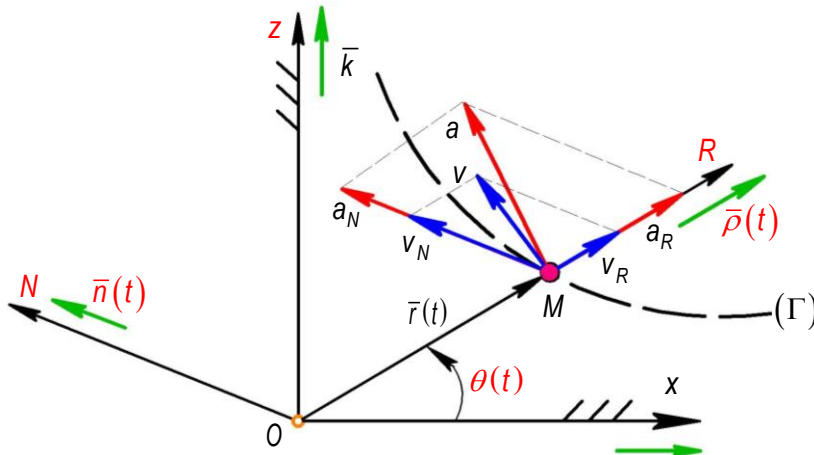


Figura 7.8

Se pot determina ușor derivatele versorilor mobili $\bar{\rho}(t)$ și $\bar{n}(t)$ dacă sunt exprimați în funcție de versorii fiși \bar{i} și \bar{j} :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(t) = \bar{i} \cos \theta(t) + \bar{j} \sin \theta(t) \\ \bar{n}(t) = -\bar{i} \sin \theta(t) + \bar{j} \cos \theta(t) \end{cases} \quad (7.40)$$

După care prin derivare, se obțin:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\rho}}(t) = -\bar{i}\dot{\theta} \sin \theta(t) + \bar{j}\dot{\theta} \cos \theta(t) = \dot{\theta}\bar{n} \\ \dot{\bar{n}}(t) = -\bar{i}\dot{\theta} \cos \theta(t) - \bar{j}\dot{\theta} \sin \theta(t) = -\dot{\theta}\bar{\rho} \end{cases} \quad (7.41)$$

7.4 Componentele intrinseci ale vitezei și accelerației

Un punct material se deplasează pe traiectoria (Γ) . Poziția lui este determinată de arcul de curbă s măsurat din poziția inițială $M_0(t=0)$. Se presupune cunoscută ecuația orară a mișcării $s=s(t)$. Se alege un sistem de referință mobil legat de punctul în mișcare și anume *triedrul lui Frenet*, cu axele: *tangenta* (T), *normala principală* (N) și *binormala* (B). La momentul t punctul se află în M și are viteza \bar{v} tangentă la traiectorie conform Figurii 7.9.

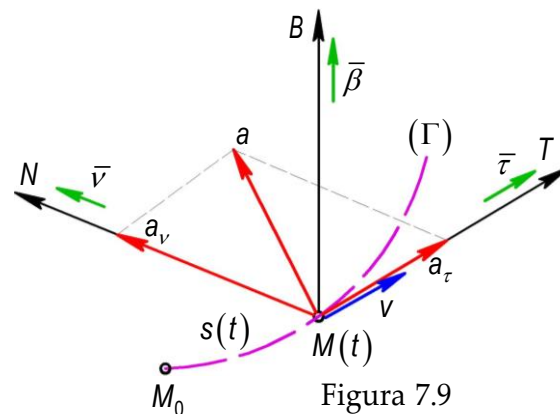


Figura 7.9

Din definiția vitezei se cunoaște $\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}$ unde $\bar{\tau}$ este versorul tangentei. Ceilalți doi versori sunt $\bar{\nu}$ și $\bar{\beta}$. Viteza ca vector în *triedrul lui Frenet*, se exprimă prin:

$$\bar{v} = v_{\tau}\bar{\tau} + v_{\nu}\bar{\nu} + v_{\beta}\bar{\beta} \quad (7.42)$$

Comparând cele două expresii se identifică *componentele intrinseci ale vitezei*:

$$\begin{cases} v_{\tau} = \dot{s} \\ v_{\nu} = 0 \\ v_{\beta} = 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

Ținând seama de componentele accelerației, $\bar{a} = a_{\tau}\bar{\tau} + a_{\nu}\bar{\nu} + a_{\beta}\bar{\beta}$ și știind că $\bar{a} = \dot{\bar{v}}$ se obține:

$$a_\tau \bar{\tau} + a_\nu \bar{\nu} + a_\beta \bar{\beta} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}} \text{ unde } \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \dot{s} \quad (7.44)$$

(s-a aplicat cea de-a doua formulă a lui Frenet $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu}$).

$$\text{În final rezultă:} \quad a_\tau \bar{\tau} + a_\nu \bar{\nu} + a_\beta \bar{\beta} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{\nu} \quad (7.45)$$

din care se determină **componentele intrinseci ale accelerației** :

$$\begin{cases} a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} \\ a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \\ a_\beta = 0 \end{cases} \quad (7.46)$$

De remarcat că ρ este *raza de curbură* a traiectoriei și că accelerația se află în planul osculator al curbei (plan determinat de tangentă și de normala principală) ea având componente numai pe cele două axe. De aici rezultă că "**accelerația este îndreptată întotdeauna spre concavitatea traiectoriei**". Mai mult *raza de curbură a traiectoriei apare numai în componentele intrinseci ale accelerației*. Modulul accelerației se poate calcula cu:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2 + a_\beta^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \quad (7.47)$$

$$\text{Relația permite determinarea razei de curbură:} \quad \rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} \quad (7.48)$$

7.5 Mișcarea circulară

Dacă mișcarea se face cu *raza de curbură constantă și finită* ($\rho = R = ct.$) traiectoria punctului este un cerc (vezi Γ_1 în Figura 7.10) în aceasta situație, mișcarea se numește **mișcare circulară**. Fie M_{01} poziția inițială pe cerc. Arcul de cerc s care poziționează punctul M la momentul t pe traiectorie este: $s(t) = R\theta(t)$. (7.49)

$$\text{Viteza punctului va fi:} \quad v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \quad (7.50)$$

tangentă la cerc. Se introduce un alt parametru cinematic **viteză unghiulară**:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (7.51)$$

care descrie variația unghiului θ în raport cu parametrul timp.

În Sistemul Internațional de mărimi și unități, unitatea de măsură este $[\omega]_{SI} = \text{rad/s}$.

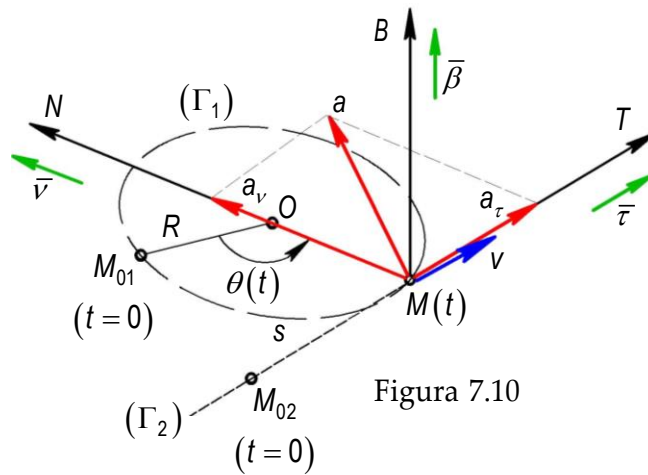


Figura 7.10

Componentele accelerației sunt :

$$\begin{cases} a_{\tau} = \dot{v} = \dot{s} = R\dot{\omega} = R\varepsilon \\ a_v = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \end{cases} \quad (7.52)$$

unde:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad (7.53)$$

descrie *variația vitezei unghiulare în timp* și se numește *accelerație unghiulară*.

În *Sistemul International de mărimi și unități*, unitatea de măsură este $[\varepsilon]_{SI} = \text{rad/s}^2$.

Observații: - a_{τ} arată cum variază viteza în timp;

- mișcarea circulară este accelerată dacă $a_{\tau} > 0$;

- dacă $a_{\tau} = 0$ mișcarea circulară este uniformă deoarece $v = ct. \Rightarrow a_v = ct.$;

- mișcarea circulară este încetinită pentru $a_{\tau} < 0$;

- a_v arată cum variază direcția vitezei.

7.6 Mișcarea rectilinie

Dacă mișcarea se face cu *raza de curbură infinită* ($\rho = \infty$) traiectoria punctului este o dreaptă (vezi Γ_2 în Figura 7.10), iar mișcarea se numește *mișcarea rectilinie*. Fie M_{02} poziția inițială pe dreaptă. Se observă că viteza $v = \dot{s}$ este orientată de-a lungul dreptei (traiectoriei), iar accelerația nu are componentă normală $a_v = \frac{v^2}{\infty} = 0$. Componenta tangențială a accelerației din (7.52) este:

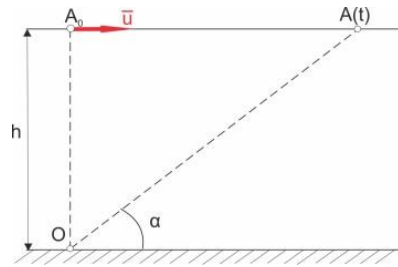
$$a_{\tau} = \dot{v} = \dot{s} \quad (7.54)$$

Observații:

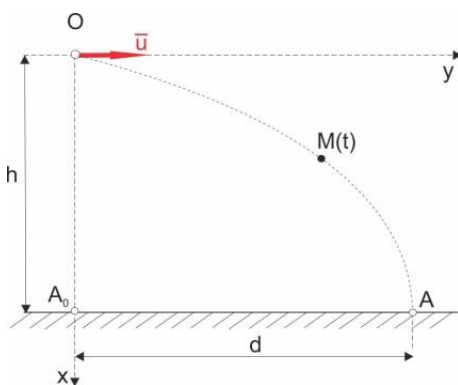
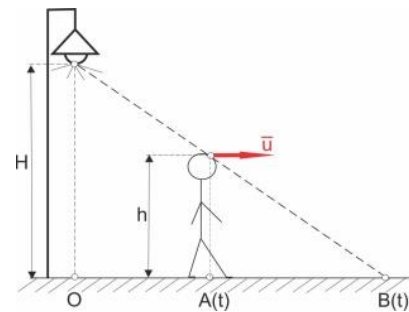
- mișcarea rectilinie este singura mișcare în care relația vectorială $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ este respectată și scalar $a = \dot{v}$ deoarece $a = a_{\tau}$;
- mișcarea rectilinie este variată (accelerată sau încetinită) dacă $a \neq 0$;
- mișcarea este rectilinie și uniformă când $a = a_{\tau} = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = ct.$

7.7 Aplicații

P7.1 Un avion zboară pe orizontală cu viteza constantă u . Pe sol, un observator plasat în O urmărește avionul. Când acesta ajunge pe verticală locului în A_0 , observatorul începe cronometrarea până când avionul ajunge în poziția A în care e văzut sub unghiul α . Să se determine înălțimea h la care zboară avionul. Dar dacă s-ar cunoaște înălțimea care ar fi viteza avionului?

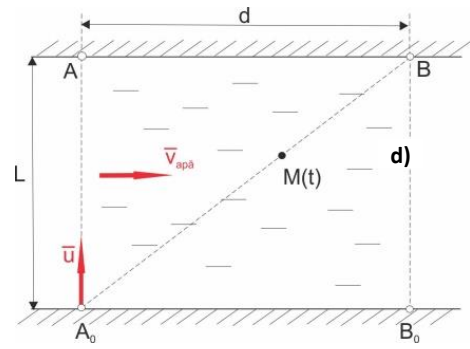


P7.2 Un om de înălțime h se plimbă cu viteza u constantă pe sub un felinar situat la înălțimea H . Să se determine viteza capătului umbrei omului.



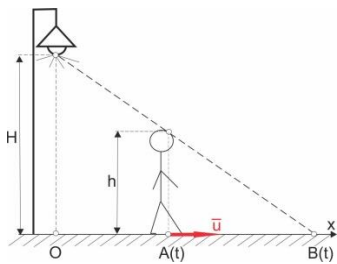
P7.3 O dronă ce zboară cu viteza u constantă la o înălțime h lansează un pachet care trebuie să ajungă în punctul A situat la distanța d de punctul A_0 aflat pe verticala locului. Să se determine legile de mișcare în coordonate carteziane și ecuația traiectoriei ale pachetului dacă se neglijează frecarea cu aerul. Care ar fi înălțimea dronei în ipoteza cunoașterii vitezei u și distanței d ?

P7.4 Un râu de lățime L curge cu $v_{\text{apă}}$ constantă. Un înotător care poate înota cu viteza constantă u vrea să treacă râul plecând din punctul A_0 . Datorită mișcării apei el este deviat și în loc de punctul A ajunge în B . La ce distanță de punctul de plecare se află B_0 (transversala lui B) și cât durează traversarea?



Indicații: 1. spațiul parcurs în timpul t cu viteza constantă u este ut ;
 2. la cazul b) raportul OA/OB rezultă din asemănarea triunghiurilor;
 3. cazul c) trebuie integrată accelerația pe verticală și viteza pe orizontală;
 4. viteza rezultantă are ca și componente viteza transversală u și viteza longitudinală $v_{\text{apă}}$.

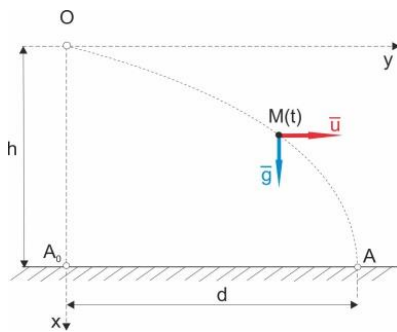
Soluții: **P7.1** $A_0A = ut \tan \alpha = \frac{h}{A_0A} = \frac{h}{ut}$ de unde $h = ut \tan \alpha$. Dacă se cunoaște h rezultă $u = \frac{h}{t} \cot \alpha$.



P7.2 din raportul de asemănare $\frac{AB}{OB} = \frac{h}{H}$ în care

$AB = x_B - x_A$ și $OB = x_B$ rezultă $x_B = \frac{H}{H-h} x_A$, iar prin derivare

$$\dot{x}_B = \frac{H}{H-h} \dot{x}_A \text{ sau } v_B = \frac{H}{H-h} v_A .$$



P7.3 $\begin{cases} a_x = g \\ v_y = u \end{cases}$ sau $\begin{cases} \ddot{x} = g \\ \dot{y} = u \end{cases}$ care sunt două ecuații

diferențiale. Se integrează:

$$\frac{dx}{dt} = g \quad dx = g dt \quad \dot{x} = gt + C_1 \quad dx = g t dt + C_1 dt$$

$$x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$\frac{dy}{dt} = u \quad dy = u dt \quad y = ut + C_3.$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale: la $t=0$ $x_0=0$ $y_0=0$ $v_{0x}=0$ $v_{0y}=u$ și rezultă: $C_1=0$ $C_2=0$ $C_3=0$.

Legile de mișcare în spațiul cartezian sunt: $\begin{cases} x(t) = \frac{gt^2}{2} \\ y(t) = ut \end{cases}$ din care eliminând timpul

$t = \frac{y}{u}$ rezultă traiectoria: $(\Gamma) x = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{u^2}$ - o parabolă.

Punând condiția ca traiectoria să treacă prin: A $t=t_A$ $x_A=h$ $y_A=d$

deci înălțimea de zbor este: $h = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{u^2}$.

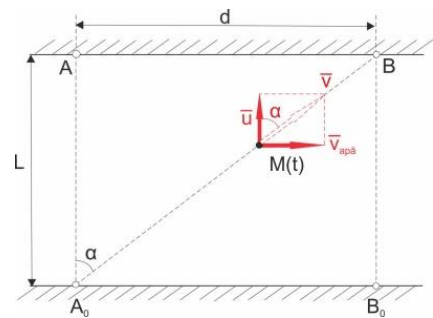
Dacă se cunoaște h rezultă viteza: $u = \sqrt{\frac{gd^2}{2h}}$.

P7.4 cele două componente ale vitezei sunt componenta transversală \bar{u} și componenta longitudinală $\bar{v}_{ap\grave{a}}$.

Prin urmare: $v = \sqrt{u^2 + v_{ap\grave{a}}^2}$.

Se observă din figură că: $\tan \alpha = \frac{d}{L}$, iar timpul de traversare se obține din:

$ut_t = L$ $t_t = L/u$ și distanța: $d = v_{ap\grave{a}} t_t = v_{ap\grave{a}} L/u$.



P7.5 Se dau legile de mișcare ale unui punct $\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = e^t + 1 \end{cases}$. Se cere traiectoria, viteza și accelerația punctului.

P7.6 Legile de mișcare ale unui punct sunt $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$. să se determine traiectoria, viteza, accelerația și raza de curbură inițială a traiectoriei.

P7.7 Să se găsească traiectoria, viteza și accelerația ale unui punct material care se mișcă după legile $\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = a \sin \omega t \end{cases}$.

P7.8 Cunoscând legile de mișcare $\begin{cases} x(t) = a \sin \omega t \\ y(t) = b \cos \omega t \end{cases}$ ale unui punct material să se cer: traiectoria, viteza și accelerația.

Indicații 1. eliminând timpul între legile de mișcare se determină ecuația carteziană a traiectoriei;

2. dacă parametrul apare sub funcțiile sin și cos aplicăm formula fundamentală a trigonometriei sau $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ dacă apare sub tan;

3. viteza și accelerația se obțin derivând coordonatele.

Soluții: P7.5 prin scăderea relațiilor avem $y-x=2$ de unde $y=x+2$ ecuația unei drepte

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = e^t \\ v_y = \dot{y} = e^t \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = e^t \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = e^t \end{cases} \quad \text{din care} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}e^t \text{ m/s} \quad \text{și } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2}e^t \text{ m/s}^2$$

P7.6 $t=x/2$ și găsim $y=x^2/4$ ecuația unei parabole și $\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 2t \end{cases} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2 \end{cases}$ prin urmare

accelerația are numai componentă verticală constantă mișcarea făcându-se uniform

accelerat pe traiectorie, $v = 2\sqrt{1+t^2}$ $a = 2$, iar raza de curbură se calculează cu $\rho =$

$$\frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} \text{ în care } \dot{v} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}. \text{ rezultă deci } \rho(t) = \frac{4(1+t^2)}{\sqrt{4+3t^2}} \text{ și } \rho_0 = \rho(0) = 2.$$

P7.7 $x^2+y^2=a^2\cos^2\omega t+a^2\sin^2\omega t=a^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=a^2$ rezultând ecuația unui cerc de rază a cu centrul în origine:

$$x^2+y^2=a^2 \begin{cases} \dot{x} = -a\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = a\omega \cos \omega t \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \text{ cu } v = a\omega \quad a = a\omega^2.$$

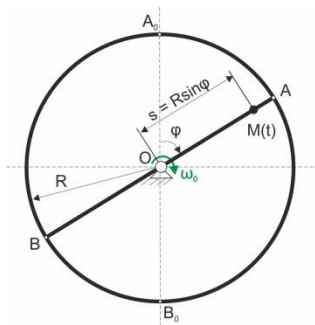
P7.8 $\sin \omega t = \frac{x}{a}$; $\cos \omega t = \frac{y}{b}$ de unde:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ecuația unei elipse cu semiaxele } a \text{ și } b.$$

P7.9 Un punct material se mișcă cu modulul vitezei constant $v = u$, iar raza vectorie se rotește și ea cu viteza unghiulară constantă ω_0 . Știind că în momentul inițial punctul era

în repaos să se determine ecuațiile traiectoriei în coordonate polare și în coordonate carteziene.

P7.10 Se dau expresiile componentelor vitezei în coordonate polare $\begin{cases} v_R = 2a \cos 2t \\ v_N = a \sin 2t \end{cases}$ și viteza unghiulară constantă a razei vectoriale $\omega = 1$. Se cere traiectoria, viteza și accelerația în condiții inițiale nule.



P7.11 Un disc de rază R se rotește în jurul normalei pe planul lui în centrul său cu viteza unghiulară constantă ω_0 . Pe diametrul său AB , plecând din poziția A_0B_0 , se mișcă un punct material M după legea $s = R \sin \varphi$. Să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului M .

P7.12 Un punct material se mișcă cu componenta radială a vitezei constantă $v_R = b$ având și viteza areolară constantă $\Omega = ar/2$. Știind că în momentul inițial punctul avea coordonatele polare $r = r_0$ și $\theta = 0$ să se determine traiectoria.

Indicație – Se utilizează coordonatele polare cu componentele polare ale vitezei și accelerației.

P7.9 determinarea ecuațiilor traiectoriei în coordonate polare

Se utilizează: $\begin{cases} v_R = \dot{r} \\ v_N = r\dot{\theta} \end{cases}$ și $\dot{\theta} = \omega_0$ $v = u = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2}$.

Rezultă două ecuații diferențiale: $\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_0 \\ \dot{r} = \sqrt{u^2 - r^2\omega_0^2} \end{cases}$

care se integrează: $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ $\theta = \omega_0 t + C_1$

$\frac{dr}{dt} = \sqrt{u^2 - r^2\omega_0^2}$ $\frac{dr}{\sqrt{u^2 - r^2\omega_0^2}} = dt$ $\frac{1}{\omega_0} \sin^{-1} \frac{\omega_0 r}{u} = t + C_2$.

Din condițiile inițiale, $t=0$ $r=0$ $\theta=0$ rezultă constantele de integrare: $C_1=0$ și $C_2=0$ și:

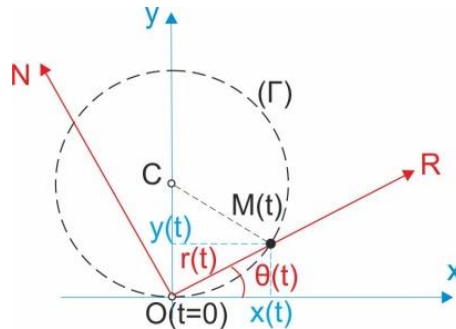
$$\begin{cases} \theta = \omega_0 t \\ \sin^{-1} \frac{\omega_0 r}{u} = \omega_0 t \end{cases} .$$

După aplicarea funcției sinus celei de a doua ecuații se obțin legile de mișcare în

coordonate polare:
$$\begin{cases} \theta = \omega_0 t \\ r = \frac{u}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{cases} .$$

Eliminând parametrul timp se obține traiectoria în coordonate polare:

$$(\Gamma) \quad r(\theta) = \frac{u}{\omega_0} \sin \theta .$$



Determinarea ecuațiilor traiectoriei în coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = OM \cos \theta = r \cos \theta = \frac{u}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{u}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \\ y = OM \sin \theta = r \sin \theta = \frac{u}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_0 t = \frac{u}{2\omega_0} (1 - \cos 2\omega_0 t) \end{cases} .$$

Se eliminăm timpul între legile de mișcare carteziene:

$$\sin 2\omega_0 t = \frac{2\omega_0 x}{u} \quad \cos 2\omega_0 t = 1 - \frac{2\omega_0 y}{u}$$

obținând traiectoria în coordonate carteziene: $(\Gamma) \quad x^2 + \left(y - \frac{u}{2\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{u}{2\omega_0}\right)^2$

având forma unui cerc de rază: $R = \frac{u}{2\omega_0}$, cu centrul în $C(0, \frac{u}{2\omega_0})$.

P7.11 În *sistemul de referință cartezian*: se utilizează expresia vitezei unghiulare $\omega_0 = \dot{\varphi}$, având forma unei ecuații diferențiale, care este integrată:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \quad d\varphi = \omega_0 dt \quad \varphi = \omega_0 t + C$$

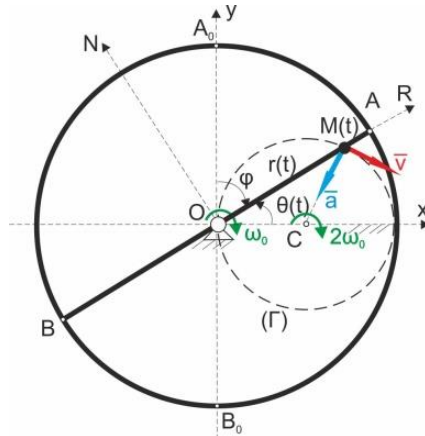
Din condițiile inițiale: $t=0$ $\varphi=0$, rezultă: $C=0$, iar legea de variație în timp este $\varphi = \omega_0 t$

Legile de mișcare/coordonatele carteziene sunt:

$$\begin{cases} x = OM \sin \varphi = s \sin \varphi = R \sin^2 \omega_0 t = \frac{R}{2}(1 - \cos 2\omega_0 t) \\ y = OM \cos \varphi = s \cos \varphi = R \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{R}{2} \sin 2\omega_0 t \end{cases}$$

Eliminând timpul rezulta traiectoria: $(\Gamma) \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$

un cerc de rază $R/2$ și centrul pe axa x în $(R/2, 0)$.



Viteza și accelerația se obțin prin derivarea vitezei, adică:

$$\begin{cases} \dot{x} = R\omega_0 \sin 2\omega_0 t \\ \dot{y} = R\omega_0 \cos 2\omega_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 2R\omega_0^2 \cos 2\omega_0 t \\ \ddot{y} = -2R\omega_0^2 \sin 2\omega_0 t \end{cases} \quad v=R\omega_0 \quad \text{și} \quad a = 2R\omega_0^2.$$

În **sistemul de referință polar** legile de mișcare sunt: $\begin{cases} r = s = R \sin \omega_0 t \\ \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_0 t' \end{cases}$

care se derivează o dată: $\begin{cases} \dot{r} = R\omega_0 \cos \omega_0 t \\ \dot{\theta} = -\omega_0 \end{cases}$

de două ori $\begin{cases} \ddot{r} = -R\omega_0^2 \sin \omega_0 t \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

după care pot fi calculate componentele polare ale vitezei și accelerației:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} = R\omega_0 \cos \omega_0 t \\ v_N = r\dot{\theta} = R\omega_0 \sin \omega_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2R\omega_0^2 \sin \omega_0 t \\ a_N = \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2R\omega_0^2 \cos \omega_0 t \end{cases}$$

precum și modulele:

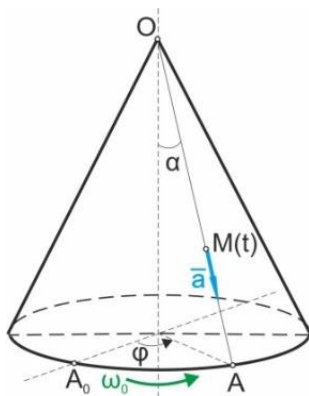
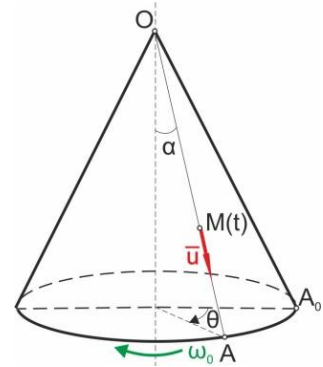
$$v = \sqrt{v_R^2 + v_N^2} = R\omega_0 \quad a = \sqrt{a_R^2 + a_N^2} = 2R\omega_0^2.$$

Ecuția traiectoriei în coordonate polare este:

$$r = R \sin \varphi = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = R \cos \theta \quad (\Gamma).$$

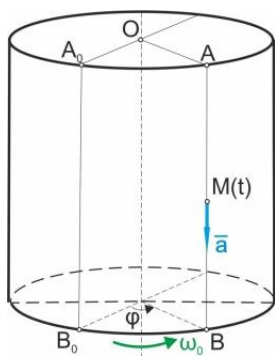
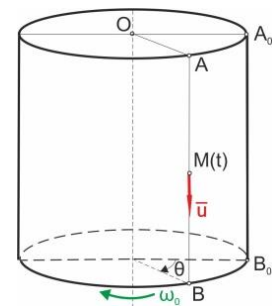
Observație – traiectoria fiind circulară, viteza $v = R \omega_0$ și raza traiectoriei de două ori mai mică ($R/2$) viteza unghiulară pe traiectorie va fi de două ori mai mare!

P7.12 Un con circular drept având unghiul de deschidere la vârf 2α se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω_0 conform figurii. Pe generatoarea OA a conului se mișcă, plecând din O , un punct material M cu viteza constantă u . Să se determine viteza și accelerația punctului știind că în momentul inițial generatoarea se afla în poziția A_0 .



P7.13 Un con circular drept având unghiul de deschidere la vârf 2α se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω_0 conform figurii. Pe generatoarea OA a conului se mișcă, plecând din O , un punct material M cu accelerația constantă a . Să se determine viteza și accelerația punctului știind că în momentul inițial generatoarea se afla în poziția A_0 .

P7.14 Un cilindru circular drept de rază R se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω_0 conform figurii. Pe generatoarea OA a cilindrului se mișcă, plecând din O , un punct material M cu viteza constantă u . Să se determine viteza și accelerația punctului știind că în momentul inițial generatoarea se afla în poziția A_0B_0 .

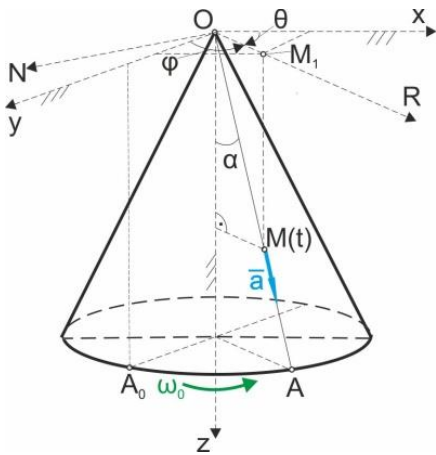


P7.15 Un cilindru circular drept de rază R se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω_0 conform figurii. Pe generatoarea OA a cilindrului se mișcă, plecând din O , un punct material M cu accelerația constantă a . Să se determine viteza și accelerația punctului știind că în momentul inițial generatoarea se

afla în poziția A_0B_0 .

- Indicații:** 1. mișcarea pe generatoare este rectilinie și uniformă dacă viteza e constantă, sau uniform accelerată dacă accelerația e constantă;
2. spațiul parcurs pe generatoare e ut în primul tip de mișcare și $at^2/2$ în cel de-al doilea;
3. sistemul de referință are originea în O și axa z chiar axa de simetrie;
4. rezolvarea se poate face fie în sistem de referința cartezian fie în coordonate cilindrice.

Soluții P7.13



Condițiile inițiale sunt la $t=0$ $\varphi=0$ pt. rotație și pe generatoare la $t=0$ $s(0)=0$ $\dot{s}(0)=0$. Se integrează mai întâi

$\dot{\varphi} = \omega_0$ $d\varphi = \omega_0 dt$ $\varphi = \omega_0 t + C_1$, din C.I. rezultă $C_1=0$ deci $\varphi(t) = \omega_0 t$.

Apoi pe generatoare $OM=s$, dar:

$$\ddot{s} = a \quad ds = a dt \quad \dot{s} = at + C_2$$

$$ds = at dt + C_2 dt \quad s = a \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3, \text{ din condițiile}$$

inițiale, rezultă: $C_1=C_2=0$

Deci pe generatoare legea de mișcare e $s(t) = a \frac{t^2}{2}$.

Coordonatele carteziene sunt:

$$\begin{cases} x = OM_1 \sin \varphi = s \sin \alpha \sin \varphi = \frac{at^2}{2} \sin \alpha \sin \omega_0 t \\ y = OM_1 \cos \varphi = s \sin \alpha \cos \varphi = \frac{at^2}{2} \sin \alpha \cos \omega_0 t, \\ z = OM \cos \alpha = s \cos \alpha = \frac{at^2}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

prin derivare se obțin componentele carteziene ale vitezei și accelerației:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{a}{2} \sin \alpha (2t \sin \omega_0 t + t^2 \omega_0 \cos \omega_0 t) \\ \dot{y} = \frac{a}{2} \sin \alpha (2t \cos \omega_0 t - t^2 \omega_0 \sin \omega_0 t) \\ \dot{z} = at^2 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{a}{2} \sin \alpha (2 \sin \alpha + 4t \omega_0 \cos \omega_0 t - t^2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t) \\ \ddot{y} = \frac{a}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 4t \omega_0 \sin \omega_0 t - t^2 \omega_0^2 \cos \omega_0 t) \\ \ddot{z} = a \cos \alpha \end{cases}$$

și modulele:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = at \sqrt{1 + \frac{t^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha}{4}} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = a \sqrt{1 + t^2 \omega_0^2 \sin \alpha (3 + \frac{t^2 \omega_0^2}{4})}.$$

La aceleași rezultate se poate ajunge și în **coordonate cilindrice**:

$$\begin{cases} r = OM_1 = \frac{at^2}{2} \sin \alpha \\ \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_0 t \\ z = OM \cos \alpha = \frac{at^2}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

Prin derivare rezultă:

$$\begin{cases} \dot{r} = at \sin \alpha \\ \dot{\theta} = -\omega_0 \\ \dot{z} = at \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{r} = a \sin \alpha \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = a \cos \alpha \end{cases}$$

Se determină apoi componentele cilindrice ale vitezei și accelerației :

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} = at \sin \alpha \\ v_N = r\dot{\theta} = -\frac{at^2\omega_0^2 \sin \alpha}{2} \\ v_z = \dot{z} = at \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a \sin \alpha \left(1 - \frac{t^2\omega_0^2}{2}\right) \\ a_N = \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2at\omega_0 \sin \alpha \\ a_z = \ddot{z} = a \cos \alpha \end{cases}$$

și modulele:

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_N^2 + v_z^2} = at \sqrt{1 + \frac{t^2\omega_0^2 \sin^2 \alpha}{4}}$$

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_N^2 + a_z^2} = a \sqrt{1 + t^2\omega_0^2 \sin \alpha \left(3 + \frac{t^2\omega_0^2}{4}\right)}$$

P7.14 se tratează asemănător cu **P7.13**, deosebirea că pe generatoare:

$$AM=s \quad \dot{s} = u \quad ds = udt, \quad s = ut + C_2$$

în care din condițiile inițiale rezultă: $C_2=0$,

iar legile de mișcare sunt:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega_0 t \\ y = R \sin \omega_0 t \\ z = ut \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r = R \\ \theta = \omega_0 t \\ z = ut \end{cases}$$

P7.15

$$\begin{cases} x = R \sin \omega_0 t \\ y = R \cos \omega_0 t \\ z = \frac{at^2}{2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r = R \\ \theta = \frac{\pi}{2} - \omega_0 t \\ z = \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

Capitolul 8 - Cinematica solidului rigid

8.1 Relații matriciale de poziționare și orientare a rigidului

În Cinematica rigidului mișcarea se consideră cunoscută dacă se știe cum se mișcă fiecare punct al rigidului sau dacă se poate preciza poziția rigidului în orice moment de timp. Se cunoaște din statică că poziția rigidului depinde de șase parametri independenți fie coordonatele generalizate: *poziția unui punct* x_0, y_0, z_0 și *unghiurile lui Euler* ψ, φ, θ , fie: *poziția unui punct al rigidului* x_0, y_0, z_0 și *cele nouă unghiuri ale axelor sistemului mobil legat de rigid* $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ din care numai trei sunt independente. Când rigidul este în mișcare cei șase parametri independenți sunt variabili în timp.

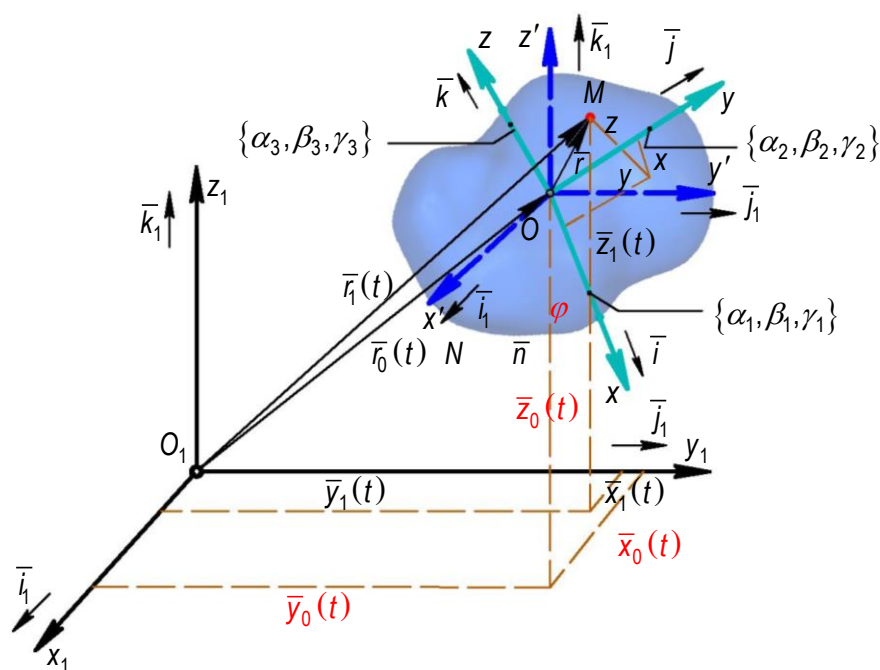


Figura 8.1

Figura 8.1 prezintă cel de-al doilea caz $x_0(t), y_0(t), z_0(t), \alpha_1(t), \dots, \gamma_3(t)$ în care sunt trei sisteme de referință: unul fix $O_1x_1y_1z_1$, unul mobil $Ox'y'z'$ care are axele paralele cu cel fix și unul mobil $Oxyz$ legat de rigid. Unghiurile axelor sistemului mobil $Oxyz$ în raport cu cel fix $O_1x_1y_1z_1$ sunt prezentate în **Tabelul 8.1**

Tabelul 8.1

	$\bar{i}(t)$	$\bar{j}(t)$	$\bar{k}(t)$
\bar{i}_1	$\alpha_1(t)$	$\alpha_2(t)$	$\alpha_3(t)$
\bar{j}_1	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$
\bar{k}_1	$\gamma_1(t)$	$\gamma_2(t)$	$\gamma_3(t)$

care permite exprimarea versorilor mobili în sistemul fix.

$$\begin{cases} \bar{i}(t) = c\alpha_1(t)\bar{i}_1 + c\beta_1(t)\bar{j}_1 + c\gamma_1(t)\bar{k}_1 \\ \bar{j}(t) = c\alpha_2(t)\bar{i}_1 + c\beta_2(t)\bar{j}_1 + c\gamma_2(t)\bar{k}_1 \\ \bar{k}(t) = c\alpha_3(t)\bar{i}_1 + c\beta_3(t)\bar{j}_1 + c\gamma_3(t)\bar{k}_1 \end{cases} \quad (8.1)$$

cu notațiile $\sin \alpha = s\alpha$ și $\cos \alpha = c\alpha$.

Vectorii de poziție se pot exprima:

$$\begin{cases} \bar{r}_1(t) = x_1(t)\bar{i}_1 + y_1(t)\bar{j}_1 + z_1(t)\bar{k}_1 \\ \bar{r}_0(t) = x_0(t)\bar{i}_1 + y_0(t)\bar{j}_1 + z_0(t)\bar{k}_1 \\ \bar{r}(t) = x\bar{i}(t) + y\bar{j}(t) + z\bar{k}(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

Între ei, ținând seama de Figura 8.1, este o relație vectorială evidentă:

$$\bar{r}_1(t) = \bar{r}_0(t) + \bar{r}(t) \quad (8.3)$$

în care se înlocuiesc vectorii și versorii variabili în timp după care se identifică coeficienții versorilor ficși între membrul stâng și membrul drept al relației vectoriale obținând coordonatele lui M ca funcții de timp (de fapt legile de mișcare ale unui punct oarecare M aparținând rigidului):

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0(t) + x \cdot c\alpha_1(t) + y \cdot c\alpha_2(t) + z \cdot c\alpha_3(t) \\ y_1(t) = y_0(t) + x \cdot c\beta_1(t) + y \cdot c\beta_2(t) + z \cdot c\beta_3(t) \\ z_1(t) = z_0(t) + x \cdot c\gamma_1(t) + y \cdot c\gamma_2(t) + z \cdot c\gamma_3(t) \end{cases} \quad (8.4)$$

Expresia (8.4) un sistem ce poate fi scris matricial sub forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\alpha_1(t) & c\alpha_2(t) & c\alpha_3(t) \\ c\beta_1(t) & c\beta_2(t) & c\beta_3(t) \\ c\gamma_1(t) & c\gamma_2(t) & c\gamma_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

sau mai compact

$$[r_1] = [r_0] + [R][r] \quad (8.6)$$

Matricile $[r_1]$, $[r_0]$ și $[r]$ (de fapt vectorii scriși matricial) sunt matrici coloană, au dimensiunile 3×1 pe când matricea pătratică $[R]$ are dimensiunile $[3 \times 3]$.

Matricea:
$$[R] = \begin{bmatrix} c\alpha_1(t) & c\alpha_2(t) & c\alpha_3(t) \\ c\beta_1(t) & c\beta_2(t) & c\beta_3(t) \\ c\gamma_1(t) & c\gamma_2(t) & c\gamma_3(t) \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

se numește **matrice de rotație** și arată **orientarea rigidului**.

Ea are următoarele proprietăți:

1. este ortogonală $[R]^t = [R]^{-1}$;
2. este unitară $[R]^t[R] = [I_3]$.

Matricea $[r_0]$ arată poziția rigidului.

Observații: -dacă rigidul nu-și schimbă poziția $[r_1] = [R][r]$ se rotește față de O ;

-dacă rigidul nu-și schimbă orientarea $[R] = [I_3]$ face o mișcare de translație.

Matrici de rotație

Fie un solid rigid (SR) care se poate roti în jurul originii O . Pentru simplificare O coincide cu O_1 . În cele ce urmează, se prezintă matricile de rotație în jurul axelor sistemului fix. Mai întâi rotația față de x_1 , prezentată în Figura 8.2.

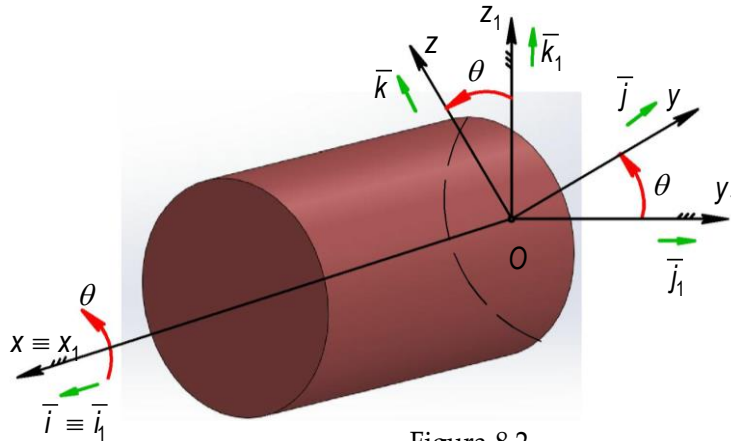


Figura 8.2

Pe baza Figurii 8.2, se poate completa **Tabelul 8.2** cu unghiurile dintre axe.

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_1	0	$\pi/2$	$\pi/2$
\bar{j}_1	$\pi/2$	θ	$\pi/2 + \theta$
\bar{k}_1	$\pi/2$	$\pi/2 - \theta$	θ

Matricea de rotație în jurul axei x_1 are drept componente cosinuzii unghiurilor din

Tabelul 8.2

$$[R]_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Rotația față de y_1 (Figura 8.3) se face în mod similar. Mai întâi unghiurile dintre axe se trec în **Tabelul 3**.

Tabelul 3			
	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_1	θ	$\pi/2$	$\pi/2 - \theta$
\bar{j}_1	$\pi/2$	0	$\pi/2$
\bar{k}_1	$\pi/2 + \theta$	$\pi/2$	θ

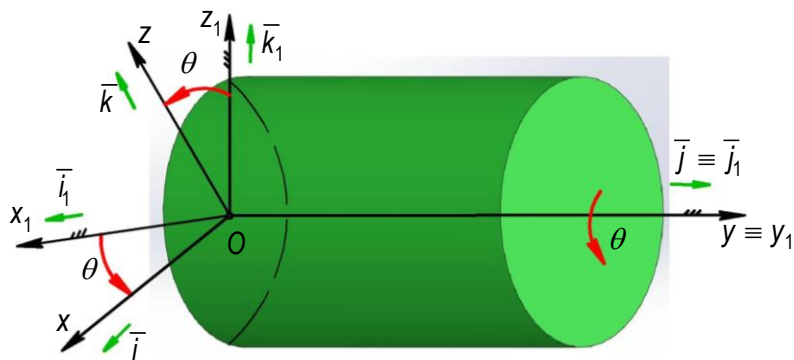


Figura 8.3

Matricea de rotație în jurul axei y_1 este

$$[R]_{y_1} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Rotația față de z_1 (Figura 8.4) se face după același algoritm. Unghiurile se găsesc în **Tabelul 4**.

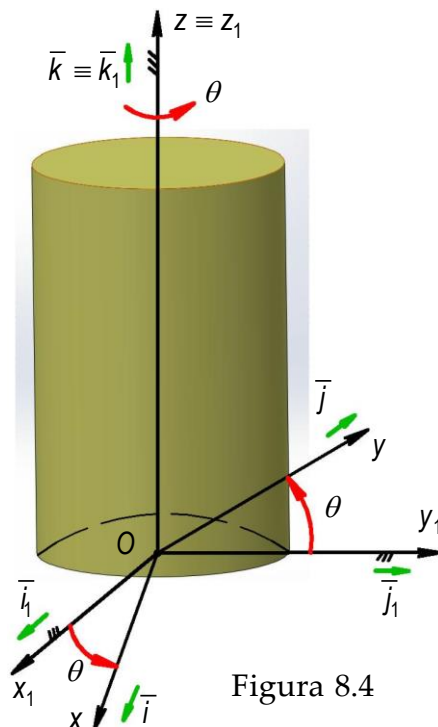


Figura 8.4

Tabelul 4			
	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_1	θ	$\pi/2 + \theta$	$\pi/2$
\bar{j}_1	$\pi/2 - \theta$	θ	$\pi/2$
\bar{k}_1	$\pi/2$	$\pi/2$	0

Matricea de rotație în jurul axei z_1 este:

$$[R]_{z_1} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Observație: În cazul în care rotațiile se fac în sens invers axelor se inversează semnele funcției sinus!

De exemplu rotația în sens invers axei z_1 este prezentată în Figura 8.5, iar unghiurile se găsesc în Tabelul 5.

Tabelul 5			
	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}_1	θ	$\pi/2 - \theta$	$\pi/2$
\bar{j}_1	$\pi/2 + \theta$	θ	$\pi/2$
\bar{k}_1	$\pi/2$	$\pi/2$	0

Matricea de rotație inversă în jurul axei z_1 fiind

$$[R]_{-z_1} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

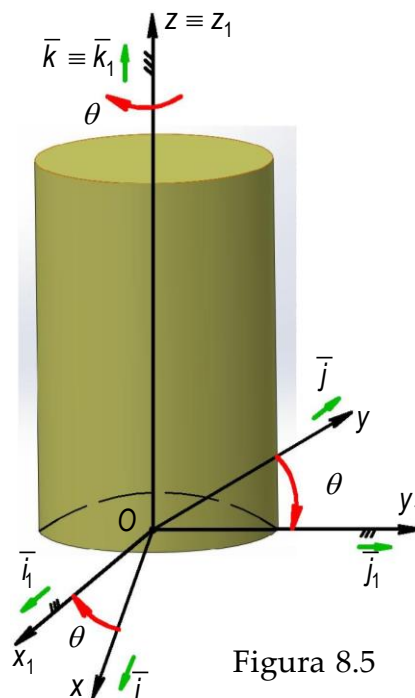


Figura 8.5

În mod similar se obțin matricea de rotație inversă în jurul axelor x_1 și y_1 .

8.2 Mișcarea generală a rigidului

8.2.1 Definiție, ecuații finite, traiectoria unui punct oarecare al rigidului

Cel mai simplu tip de mișcare este cel în care variază numai un singur parametru independent (ori lungime, ori unghi), ea se numește *mișcare simplă* și poate fi sau translație sau rotație. Dacă variază doi sau mai mulți parametri simultan rigidul face o mișcare complexă. Cel mai complicat tip de mișcare în care *variază simultan toți cei șase parametri independenți* se numește **mișcare generală**.

Conform cu Figura 8.6, se consideră ca parametri independenți coordonatele generalizate ale rigidului poziția unui punct x_0, y_0, z_0 și unghiurile lui Euler ψ, φ, θ (de precesie, de rotație proprie și de nutație).

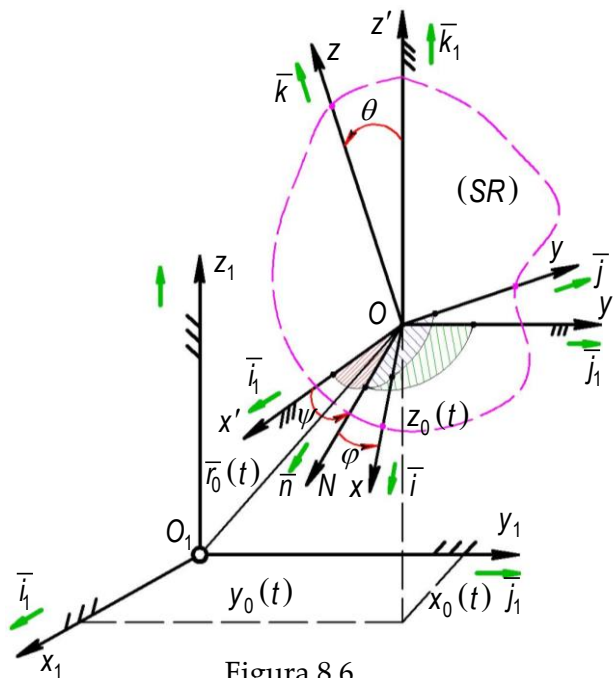


Figura 8.6

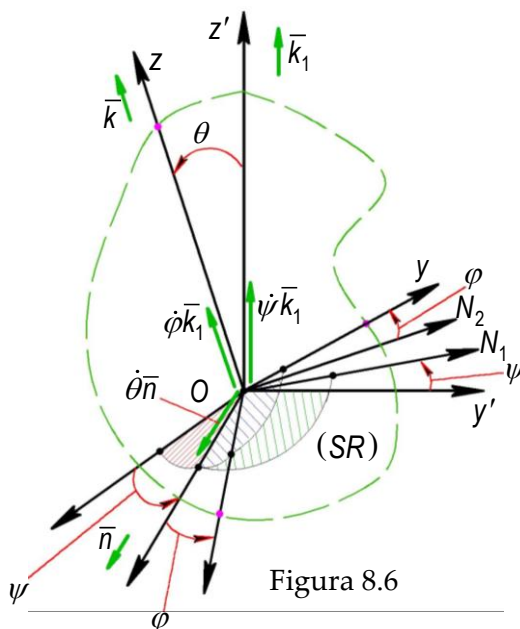
În timpul mișcării generale toți cei șase parametri sunt funcții de timp și poartă numele *de ecuațiile finite ale mișcării*:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t) \\ y_0 = y_0(t) \\ z_0 = z_0(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = \psi(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (8.12)$$

8.2.2 Viteza unghiulară, formulele lui Poisson, componentele ω pe axele sistemului mobil, componentele ω pe axele sistemului fix

Dacă în cazul mișcării circulare a punctului material s-a introdus viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$ perpendiculară pe planul traiectoriei, θ fiind unghiul ce poziționează punctul pe traiectorie (vezi 7.5 Mișcarea circulară), în cazul rigidului sunt **trei unghiuri ce variază simultan** (unghiurile lui Euler) ele exprimând rotații în jurul axei z_1 (ψ unghi de precesie), axei nodurilor N (θ unghi de nutație) și axei z (unghi de rotație proprie) lucru care permite să definirea **vitezei unghiulare** ca rezultantă a trei componente în jurul axelor menționate mai sus (vezi Figura 8.6)

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\phi}\bar{k} + \dot{\theta}\bar{n}. \quad (8.13)$$



Formulele lui Poisson

Permit determinarea derivatelor versorilor sistemului mobil legat de rigid $Oxyz$ variabili în timp când rigidul își schimbă orientarea. Se utilizează relațiile dintre versori:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1; \bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \bar{k} \cdot \bar{k} = 1; \bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \bar{j} \cdot \bar{k} = 0; \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \quad (8.14)$$

care se derivează în raport cu timpul ca produse:

$$\frac{d(\bar{i} \cdot \bar{i})}{dt} = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} + \bar{i} \cdot \dot{\bar{i}} = 2\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = 0 \quad \text{rezultând} \quad \dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = 0 \quad (8.15)$$

Se procedează la fel pentru produsele scalare în care apar aceeași versori și se obține:

$$\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j} = 0; \dot{\bar{k}} \cdot \bar{k} = 0. \quad (8.16)$$

Produsele în care apar versori diferiți conduc la:

$$\begin{aligned}\frac{d(\bar{i} \cdot \bar{j})}{dt} &= \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = 0 \\ \frac{d(\bar{j} \cdot \bar{k})}{dt} &= \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = 0 \\ \frac{d(\bar{k} \cdot \bar{i})}{dt} &= \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} + \bar{k} \cdot \dot{\bar{i}} = 0\end{aligned}\quad (8.17)$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = -\bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = \omega_z \\ \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = \omega_x \\ \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -\bar{k} \cdot \dot{\bar{i}} = \omega_y \end{cases}\quad (8.18)$$

Se exprimă apoi derivatele versorilor ca niște vectori de componente scrise cu produse scalare într-un sistem cartezian și se constată că:

$$\dot{\bar{i}} = (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad (8.19)$$

$$\dot{\bar{j}} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k})\bar{k} = -\omega_z \bar{i} + \omega_x \bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad (8.20)$$

$$\dot{\bar{k}} = (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_y \bar{i} - \omega_x \bar{j} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{k} \quad (8.21)$$

Expresiile determinate anterior, se numesc *formulele lui Poisson, adică*:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} \\ \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} \\ \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} \end{cases}\quad (8.22)$$

Componentele vitezei unghiulare ω

În continuare se prezintă două variante de determinare a proiecțiilor lui ω pe axele sistemului mobil $Oxyz$ legat de rigid și pe axele sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$. Vectorial viteza unghiulară se scrie în cele două sisteme de referință:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad ; \quad \bar{\omega} = \omega_{x1} \bar{i}_1 + \omega_{y1} \bar{j}_1 + \omega_{z1} \bar{k}_1. \quad (8.23)$$

Varianta 1 –cu ajutorul matricii de rotație $[R]$:

dacă se face notația:

$$[\hat{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

reprezentând *matricea antisimetrică asociată vectorului* $\bar{\omega}$, se obține:

$$[\hat{\omega}] = [R]^t [\dot{R}] . \quad (8.25)$$

Analog, ținând seama de (8.24), se introduce notația:

$$[\hat{\omega}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z1} & \omega_{y1} \\ \omega_{z1} & 0 & -\omega_{x1} \\ -\omega_{y1} & \omega_{x1} & 0 \end{bmatrix} . \quad (8.26)$$

și reprezintă *matricea antisimetrică asociată vectorului* $\bar{\omega}_1$ care poate fi determinată prin:

$$[\hat{\omega}_1] = [\dot{R}][R]^t . \quad (8.27)$$

Varianta 2 –prin multiplicarea relației vectoriale succesiv cu versorii explicitați prin trei rotații succesive realizate prin înmulțiri de matrici: se notează cu $R(\alpha)$ matricea de rotație în sensul pozitiv al axei și cu $R(-\alpha)$ matricea de rotație în sens negativ. Trecerea de la sistemul fix la cel mobil se face prin:

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} = [R(\psi)]_{z1} [R(\theta)]_{x1} [R(\varphi)]_{z1} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

care aduce sistemul fix peste cel mobil. Astfel:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.29)$$

permițând explicitarea versorilor sistemului fix în cel mobil:

$$\begin{cases} \bar{i}_1 = (c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi)\bar{i} + (-c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi)\bar{j} + s\psi s\theta\bar{k} \\ \bar{j}_1 = (s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi)\bar{i} + (-s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi)\bar{j} - c\psi s\theta\bar{k} \\ \bar{k}_1 = s\theta c\varphi\bar{i} + s\theta c\varphi\bar{j} + c\theta\bar{k} \end{cases} \quad (8.30)$$

Se exprimă vectorul viteză unghiulară astfel:

$$\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = \dot{\psi} \bar{k}_1 + \dot{\phi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n}. \quad (8.31)$$

Ținând cont de relațiile dintre versori:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1; \bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \bar{k} \cdot \bar{k} = 1; \bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \bar{j} \cdot \bar{k} = 0; \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \quad (8.32)$$

și înmulțind scalar succesiv cu \bar{i} cu \bar{j} și cu \bar{k} viteza unghiulară rezultă:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \bar{k}_1 \cdot \bar{i} + \dot{\theta} \bar{n} \cdot \bar{i} \\ \omega_y = \dot{\psi} \bar{k}_1 \cdot \bar{j} + \dot{\theta} \bar{n} \cdot \bar{j} \\ \omega_z = \dot{\psi} \bar{k}_1 \cdot \bar{k} + \dot{\phi} \end{cases} \quad (8.33)$$

după care cunoscând pe \bar{k}_1 explicitat în sistemul mobil și:

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \bar{i} = c\phi \\ \bar{n} \cdot \bar{j} = -s\phi \end{cases} \quad (8.34)$$

rezultă proiecțiile vitezei unghiulare pe sistemul mobil:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} s\phi s\theta + \dot{\theta} c\phi \\ \omega_y = \dot{\psi} c\phi s\theta - \dot{\theta} s\phi \\ \omega_z = \dot{\psi} c\theta + \dot{\phi} \end{cases} \quad (8.35)$$

Trecerea de la sistemul mobil la cel fix se face prin:

$$\begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = [R(-\phi)]_{z1} [R(-\theta)]_{x1} [R(-\psi)]_{z1} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix}. \quad (8.36)$$

care aduce sistemul mobil peste cel fix.

Așadar, ținând seama de (8.36), se scrie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & s\phi s\theta \\ -s\phi s\psi - c\phi c\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi c\theta c\psi & c\psi s\theta \\ s\theta s\psi & -s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.37)$$

permițând explicitarea versorilor sistemului mobil în cel fix:

$$\begin{cases} \bar{i} = (s\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi) \bar{i}_1 + (c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi) \bar{j}_1 + s\phi s\theta \bar{k}_1 \\ \bar{j} = (-s\phi s\psi - c\phi c\theta s\psi) \bar{i}_1 + (-s\phi c\psi + c\phi c\theta c\psi) \bar{j}_1 + c\psi s\theta \bar{k}_1 \\ \bar{k} = -s\theta c\psi \bar{i}_1 - s\theta s\psi \bar{j}_1 + c\theta \bar{k}_1 \end{cases} \quad (8.38)$$

Vectorul viteză unghiulară, se exprimăm astfel:

$$\omega_{x1}\bar{l}_1 + \omega_{y1}\bar{j}_1 + \omega_{z1}\bar{k}_1 = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\phi}\bar{k} + \dot{\theta}\bar{n} \quad (8.39)$$

Ținând cont de relațiile dintre versori:

$$\bar{l}_1\bar{l}_1 = 1, \bar{j}_1\bar{j}_1 = 1, \bar{k}_1\bar{k}_1 = 1, \bar{l}_1\bar{j}_1 = 0, \bar{j}_1\bar{k}_1 = 0, \bar{k}_1\bar{l}_1 = 0 \quad (8.40)$$

și înmulțind scalar succesiv cu \bar{l}_1 cu \bar{j}_1 și cu \bar{k}_1 viteza unghiulară rezulta:

$$\begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\phi}\bar{k} \cdot \bar{l}_1 + \dot{\theta}\bar{n} \cdot \bar{l}_1 \\ \omega_{y1} = \dot{\phi}\bar{k} \cdot \bar{j}_1 + \dot{\theta}\bar{n} \cdot \bar{j}_1 \\ \omega_{z1} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\bar{k} \cdot \bar{k}_1 \end{cases} \quad (8.41)$$

după care cunoscând pe \bar{k} explicitat în sistemul fix și:

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \bar{l}_1 = c\psi \\ \bar{n} \cdot \bar{j}_1 = -s\psi \end{cases} \quad (8.42)$$

se obțin proiecțiile vitezei unghiulare pe sistemul mobil:

$$\begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\phi}s\theta s\psi + \dot{\theta}c\psi \\ \omega_{y1} = -\dot{\psi}s\theta c\psi + \dot{\theta}s\psi \\ \omega_{z1} = \dot{\phi}c\theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (8.43)$$

8.2.3 Distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului

Prin distribuție/câmp de viteze se înțelege totalitatea vectorilor viteză instantanee a punctelor aparținând solidului rigid. Se consideră în Figura 8.7, un punct material M, aparținând unui solid rigid, aflat într-o deplasare.

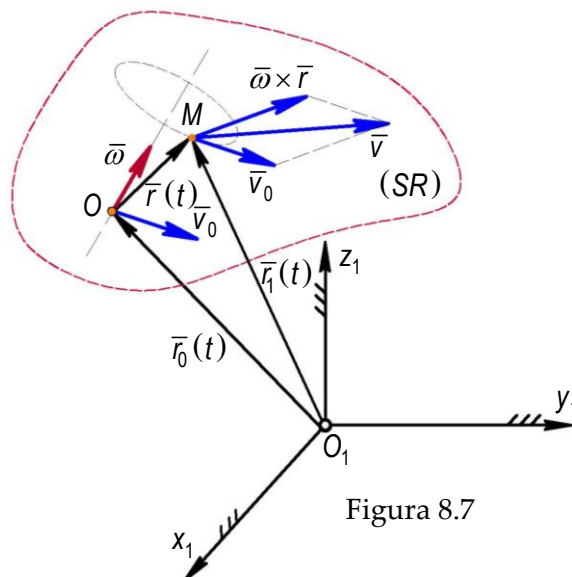


Figura 8.7

Ținând seama de Figura 8.7, este evidentă relația vectorială:

$$\bar{r}_1(t) = \bar{r}_0(t) + \bar{r}(t) \quad (8.44)$$

vectorii având expresiile:
$$\begin{cases} \bar{r}_1(t) = x_1(t)\bar{i}_1 + y_1(t)\bar{j}_1 + z_1(t)\bar{k}_1 \\ \bar{r}_0(t) = x_0(t)\bar{i}_1 + y_0(t)\bar{j}_1 + z_0(t)\bar{k}_1 \\ \bar{r}(t) = x\bar{i}(t) + y\bar{j}(t) + z\bar{k}(t) \end{cases} \quad (8.45)$$

Expresia (8.44) se derivează în raport cu timpul, rezultând:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}} \quad (8.46)$$

în care $\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}$ este viteza lui M, $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0$ viteza lui O.

Pe baza relațiilor lui Poisson (8.22) se scrie:

$$\dot{\bar{r}} = x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = x\bar{\omega} \times \bar{i} + y\bar{\omega} \times \bar{j} + z\bar{\omega} \times \bar{k} = \bar{\omega} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.47)$$

Așadar, legea de compunere a vitezelor, este:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (8.48)$$

Proprietăți:

1. \bar{v}_0 și $\bar{\omega}$ determină complet distribuția de viteze în mișcarea generală;
2. relația (8.48) se mai numește și relația lui Euler pentru viteze;
3. valoarea instantanee a vitezei unghiulare este un invariant (în sensul că la un moment dat ea este aceeași pentru toate punctele aparținând rigidului, dar la momentul următor valoarea ei s-a schimbat, însă din nou toate punctele rigidului au aceeași nouă valoare).

8.2.4 Distribuția de accelerații în mișcarea generală a rigidului

Distribuția/câmpul de accelerații este totalitatea vectorilor accelerație instantanee ai punctelor ce aparțin solidului rigid. Expresia de plecare este legea de distribuție a vitezelor (8.48) care se derivează în raport cu timpul, astfel se obține:

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}. \quad (8.49)$$

Se constată că:

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a} \text{ este accelerația lui M,}$$

$$\dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0 \text{ accelerația lui O,}$$

$$\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r},$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} \text{ se numește } \textit{accelerație unghiulară} \text{ și se măsoară în rad/s}^2.$$

În final ținând seama de considerentele anterioare, expresia (8.49) devine:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} . \quad (8.50)$$

și se numește *legea de distribuție a accelerațiilor în mișcarea generală a rigidului*.

Termenii doi și trei din (8.50) sunt:

$\bar{a}_{rot} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ și se numește *accelerație de rotație*,

$\bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}$ *accelerație axipetă* fiind orientată spre suportul lui $\bar{\omega}$ (vezi Figura 8.8).

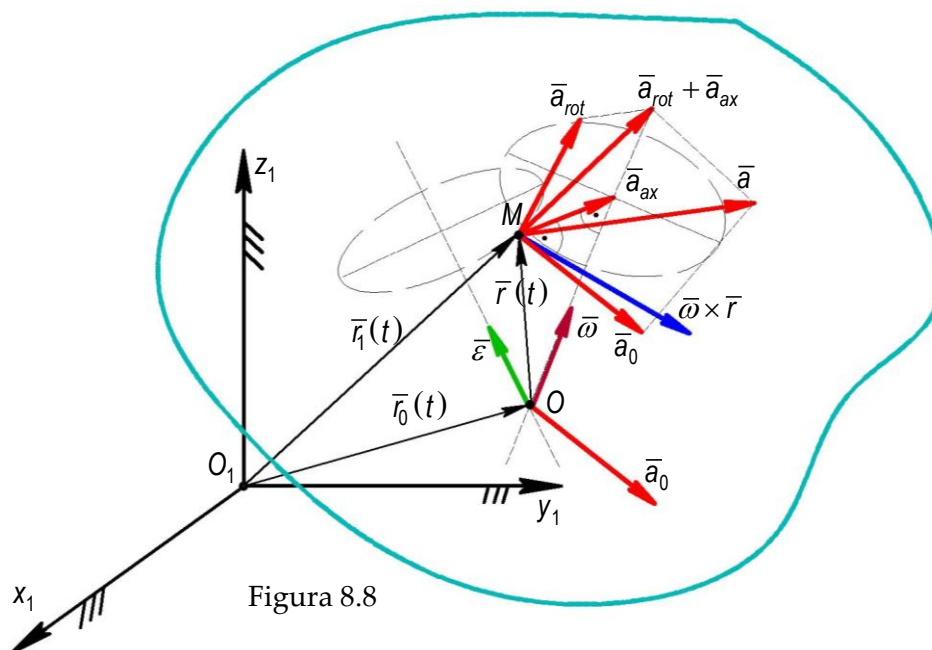


Figura 8.8

În concluzie:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} . \quad (8.51)$$

Proprietăți:

1. $\bar{a}_O, \bar{\varepsilon}$ și $\bar{\omega}$ determină complet distribuția de accelerații în mișcarea generală;
2. relația se mai numește și relația lui Euler pentru accelerații;
3. valoarea instantanee a accelerației unghiulare este un invariant (în sensul că la un moment dat ea este aceeași pentru toate punctele aparținând rigidului, dar la momentul următor valoarea ei s-a schimbat, însă din nou toate punctele rigidului au aceeași nouă valoare).

Observații:

- relația lui Euler pentru viteze (8.48) poate fi scrisă și sub formă matricială utilizând matricea antisimetrică asociată vectorului $\bar{\omega}$, definită cu (8.24), conform cu:

$$[v] = [v_0] + [\hat{\omega}][r] \quad (8.52)$$

- de asemenea și relația lui Euler pentru accelerații (8.51) poate fi scrisă matricial cu ajutorul și a unei alte matrici antisimetrice asociată vectorului $\bar{\varepsilon}$, de forma (8.24), conform cu:

$$[\hat{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$
$$[a] = [a_0] + [\hat{\varepsilon}][r] + [\hat{\omega}]^2[r]. \quad (8.53)$$

8.3 Studiul mișcărilor particulare ale rigidului

Dacă variază simultan mai puțin de șase parametri independenți, rigidul execută mișcări particulare dintre care cele mai simple sunt cele în care un singur parametru este variabil în timp. Se vor studia anumite mișcări simple în care se urmărește:

1. definiția mișcării,
2. ecuațiile finite,
3. traiectoria unui punct oarecare aparținând rigidului,
4. distribuția de viteze
5. distribuția de accelerații.

8.3.1 Mișcarea de translație

Mișcarea de translație este acea mișcare în care rigidul nu-și schimbă orientarea/un segment de dreaptă rămâne paralel cu el însuși pe tot timpul mișcării. Fie două puncte O și M aparținând rigidului (SR) conform Figurii 8.9.

Ele determină un segment de dreaptă OM care rămâne paralel cu el însuși în timp ce rigidul se mișcă. Sunt așadar două sisteme de referință unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și al doilea mobil legat de rigid $Oxyz$. Pe timpul mișcării cum rigidul nu-și schimbă orientarea, sistemul mobil rămâne cu axele paralele cu cele ale sistemul fix.

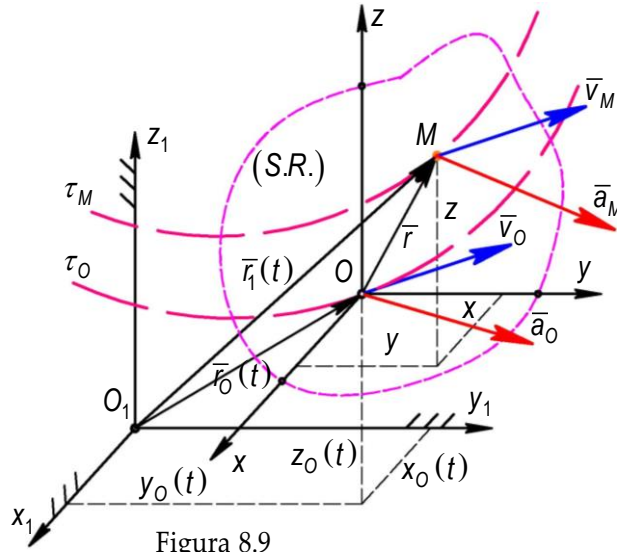


Figura 8.9

Prin urmare unghiurile ψ, φ, θ rămân constante și $\bar{\omega} = 0 \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\dot{\omega}} = 0$. Astfel, ecuațiile

finite ale mișcării sunt:

$$\begin{cases} x_o = x_o(t) \\ y_o = y_o(t) \\ z_o = z_o(t) \end{cases} \begin{cases} \psi = 0 \\ \varphi = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad (8.54)$$

care arată că rigidul are trei grade de libertate și $\bar{v}_o = \dot{\bar{r}}_o = x_o \bar{i} + y_o \bar{j} + z_o \bar{k}$.

Între vectorii de poziție ai punctelor O și M există o relație vectorială:

$$\bar{r}_1(t) = \bar{r}_o(t) + \bar{r} \quad (8.55)$$

care arată că vectorii de poziție $\bar{r}_1(t)$ și $\bar{r}_o(t)$ diferă între ei printr-o constantă vectorială \bar{r} , adică traiectoriile celor două puncte sunt curbe identice (Γ_o) și (Γ_M) decalate prin \bar{r} .

Același lucru se poate demonstra și matricial, astfel:

$$[r_1] = [r_o] + [R][r] \text{ unde } [R] = [I_3] \quad (8.56)$$

deci:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \\ z_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

Astfel se obține:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_o(t) + x \\ y_1(t) = y_o(t) + y \\ z_1(t) = z_o(t) + z \end{cases} \quad (8.58)$$

un sistem de ecuații în care coordonatele punctelor diferă între ele doar prin constante numerice.

În **concluzie** în mișcarea de **translație** **traiectoriile tuturor punctelor rigidului sunt curbe identice paralele între ele.**

Particularizând distribuția de viteze a mișcării generale și distribuția de accelerații găsim că $\bar{v} = \bar{v}_O$ și $\bar{a} = \bar{a}_O$. Rezultă că în mișcarea de translație toate punctele rigidului au aceeași viteză și accelerație.

8.3.2 Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe

Prin definiție mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe este mișcarea rigidului cu două puncte fixe. Cele două puncte determină o dreaptă fixă, numită *axa permanentă de rotație (APR)*. Fie O_1 și O_2 punctele fixe (vezi Figura 8.10). Se aleg sistemele de referință astfel încât axele z_1 și z să coincidă cu APR, iar originile lor să coincidă și ele. Prin urmare punctul O e fix și are viteza $\bar{v}_O = 0$.

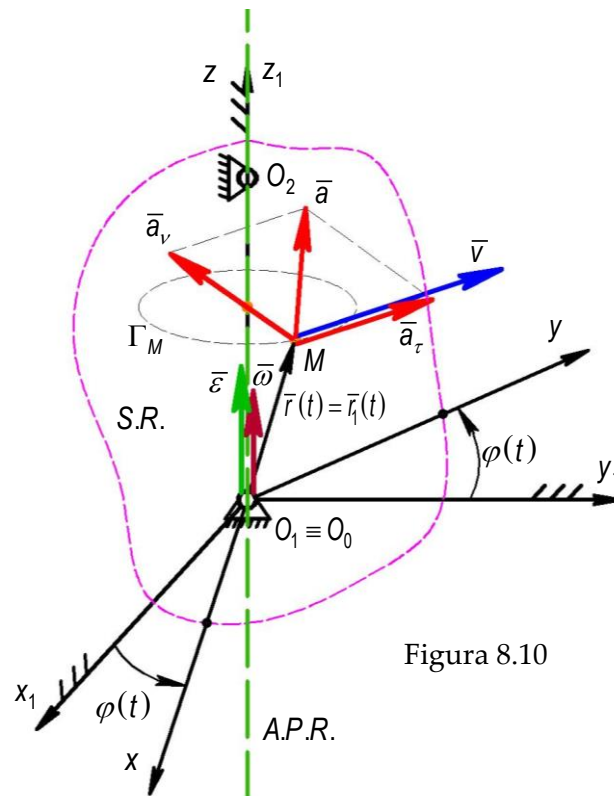


Figura 8.10

Rigidul nu poate decât să se rotească în jurul APR cu unghiul $\varphi = \varphi(t)$ ceea ce conduce la existența unui grad de libertate lucru vizibil în ecuațiile finite ale mișcării:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} \psi = 0 \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = 0 \end{cases} \quad (8.59)$$

Viteza unghiulară se obține în acest caz prin particularizarea ei de la mișcarea generală $\bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{k}$ și are *direcție fixă* chiar APR. Dacă viteza unghiulară are direcție fixă atunci și accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\phi}\bar{k}$ va avea și ea aceeași direcție fixă. Din coincidența originilor sistemelor de referință $\bar{r}_O(t) = 0$, ecuația vectorială generală $\bar{r}_1(t) = \bar{r}_O(t) + \bar{r}(t)$ devine $\bar{r}_1(t) = \bar{r}(t)$ sau matricial $[r_1(t)] = [R(t)]_{z1}[r]$ care ia forma scrisă explicita:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi(t) & -s\varphi(t) & 0 \\ s\varphi(t) & c\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

conducând la legile de mișcare ale lui M în sistemul fix care pot fi interpretate drept ecuațiile traiectoriei lui M :

$$\begin{cases} x_1(t) = xc\varphi(t) - ys\varphi(t) \\ y_1(t) = xs\varphi(t) + yc\varphi(t) \\ z_1(t) = z \end{cases}. \quad (8.61)$$

unde prin eliminarea parametrului timp (ridicând la pătrat primele două ecuații și adunându-le) se găsesc ecuațiile traiectoriei punctului:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = R_M^2 \\ z_1 = z \end{cases}. \quad (8.62)$$

Se poate observa că *traiectoria lui M* (Γ_M) *este un cerc* cu centrul O_M pe APR de rază $R_M = O_M M$ situat într-un plan paralel cu planul orizontal $O_1x_1y_1$ la distanța $z=cst.$ de acesta.

Distribuția de viteze rezultă prin particularizarea relației generale și anume:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.63)$$

care poate fi scrisă explicit: $v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ (8.64)

având componentele: $\begin{cases} v_x = -\omega y \\ v_y = \omega x \\ v_z = 0 \end{cases}$ (8.65)

și modulul: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R_M$ (8.66)

ea fiind situată în planul traiectoriei și proporțională cu raza acesteia.

Plecând de la particularitatea $\bar{v}_O = 0$ rezultă că $\bar{a}_O = \dot{\bar{v}}_O = 0$, conducând la **distribuția de accelerații**:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (8.67)$$

Dar ținând cont de relația vectorială:

$$\bar{r} = \overline{O_1 O_M} + \bar{R}_M \quad (8.68)$$

de faptul că:

$$\overline{O_1 O_M} = O_1 O_M \bar{k} \quad (8.69)$$

și de dezvoltarea dublului produs vectorial cu formula lui Gibbs, rezultă o altă exprimare:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{R}_M - \omega^2 \bar{R}_M = \bar{a}_\tau + \bar{a}_v. \quad (8.70)$$

Explicitând $\bar{R}_M = x\bar{i} + y\bar{j}$ rezultă:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & 0 \end{vmatrix} - \omega^2(x\bar{i} + y\bar{j}) \quad (8.71)$$

având componentele:

$$\begin{cases} a_x = -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y = \varepsilon x - \omega^2 y \\ a_z = 0 \end{cases} \quad (8.72)$$

și modulul:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = R_M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.73)$$

8.3.3 Mișcarea de rototranslație

Mișcarea de rototranslație este mișcarea în care două puncte ale rigidului se mișcă pe o dreaptă fixă. Știind că două puncte determină o dreaptă se poate afirma că o dreaptă aparținând rigidului se mișcă pe o dreaptă fixă. Dreapta fixă se numește axa mișcării de rototranslație/axa mișcării elicoidale (AMRT/AME). De data aceasta se consideră cele trei sisteme de referință cu axele z_1 , z' și z coincidând cu AMRT/AME conform Figurii 8.11. Vectorul de poziție a punctului O față de O_1 este $\bar{r}_O(t) = z_O(t)\bar{k}$ din care $\bar{v}_O = \dot{\bar{r}}_O = \dot{z}_O \bar{k}$, astfel că viteza lui O are direcție fixă chiar AME.

Cum rigidul se poate roti în jurul ei variază în timp numai unghiul φ . Ecuațiile finite ale mișcării iau forma:

$$\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ z_O = z_O(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = 0 \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = 0 \end{cases}. \quad (8.74)$$

rigidul având două grade de libertate. Viteza unghiulară are și ea aceeași direcție $\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}$ ca și \bar{v}_O .

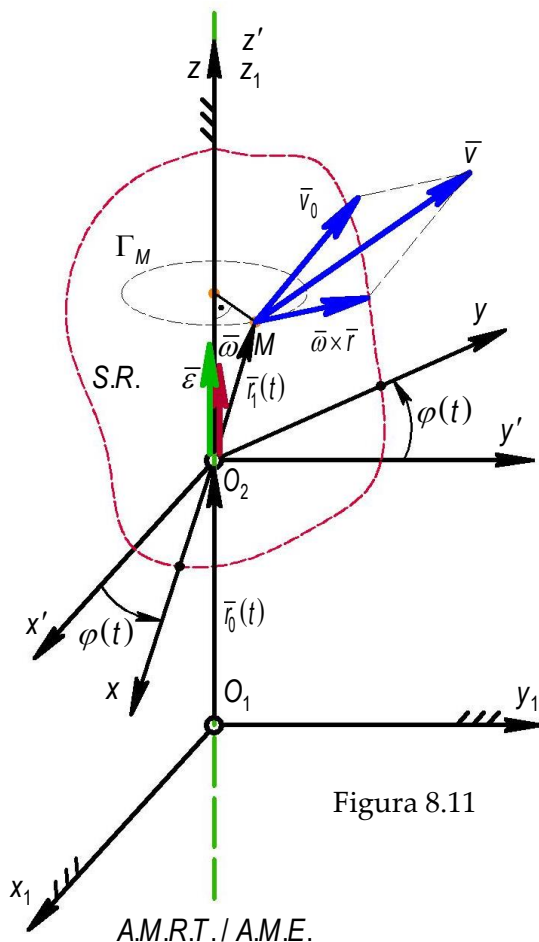


Figura 8.11

AM.R.T./AME.

În concluzie la mișcarea de rototranslație \bar{v}_O și $\bar{\omega}$ sunt paraleli și au ca direcție fixă AME. Pentru determinarea traiectoriei se pleacă tot de la ecuația vectorială $\bar{r}_1(t) = \bar{r}_O(t) + \bar{r}(t)$ pusă sub formă matricială:

$$[\bar{r}_1(t)] = [\bar{r}_O(t)] + [R(t)]_{z_1} [r] . \quad (8.75)$$

și explicitată:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O(t) \\ y_O(t) \\ z_O(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\varphi(t) & -s\varphi(t) & 0 \\ s\varphi(t) & c\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} . \quad (8.76)$$

obținând ecuațiile parametrice ale traiectoriei sau legile mișcării de rototranslație sau elicoidale:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_O(t) + xc\varphi(t) - ys\varphi(t) \\ y_1(t) = y_O(t) + xs\varphi(t) + yc\varphi(t) \\ z_1(t) = z_O(t) \end{cases} . \quad (8.77)$$

Eliminând timpul între primele două ecuații se determina traiectoria (Γ_M):

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = R_M^2 \\ z_1 = z_0(t) + z \end{cases} \quad (8.78)$$

descriind o elice înfășurată pe un cilindru de rază R_M (distanța de la M la axa AME).

Distribuția de viteze se obține utilizând relația de la mișcarea generală: $\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}$, dar cu particularitatea $\bar{v}_O \parallel \bar{\omega}$ cu direcție fixă. Se explicitează și rezultă:

$$v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} = v_O \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j} + v_O \bar{k} \quad (8.79)$$

rezultând componentele vitezei:

$$\begin{cases} v_x = -\omega y \\ v_y = \omega x \\ v_z = v_O \end{cases} \quad (8.80)$$

de modul:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\omega^2 + v_O^2} = \sqrt{R_M^2 \omega^2 + v_O^2} \quad (8.81)$$

Derivând vitezele rezultă accelerațiile:

$$\bar{a}_O = \dot{\bar{v}}_O = \dot{z}_O \bar{k} \quad \text{și} \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\varphi} \bar{k} \quad (8.82)$$

Se observă că și ele au ca direcție fixă tot AME și că $\bar{a}_O \parallel \bar{\varepsilon}$, (vezi Figura 8.12) deci relația generală de la distribuția de accelerații ia o formă asemănătoare $\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}$ din care ținând cont de $\bar{r} = \overline{O_1 O_M} + \bar{R}_M$ rezultă **legea de distribuție a accelerațiilor din mișcarea elicoidală/rototranslație**:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{R}_M - \omega^2 \bar{R}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_\tau + \bar{a}_v \quad (8.83)$$

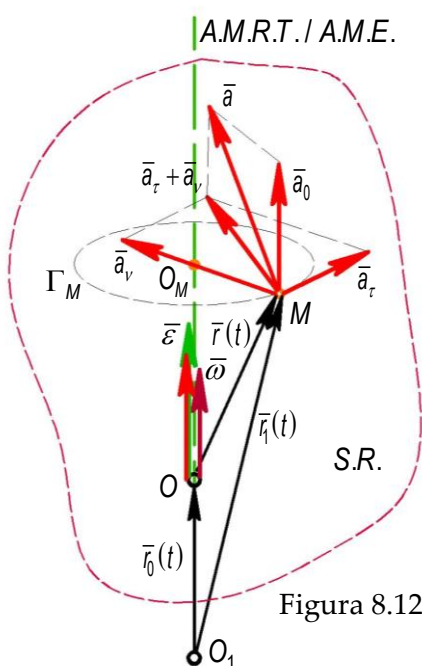


Figura 8.12

Componentele și modulul se determină explicitând relația (8.83) și având în vedere că $\bar{R}_M = x\bar{i} + y\bar{j}$. Așadar, rezultă:

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = a_0\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & 0 \end{vmatrix} - \omega^2(x\bar{i} + y\bar{j}). \quad (8.84)$$

având componentele și modulul:

$$\begin{cases} a_x = -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y = \varepsilon x - \omega^2 y \\ a_z = a_0 \end{cases} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)R_M^2 + a_0^2} \quad (8.85)$$

Observație: – în cazul particular al mișcării de șurub $z_0(t) = \lambda\varphi(t)$ cu pasul $p = \lambda 2\pi$ când $z_0(t) = \frac{p}{2\pi}\varphi(t)$ în care rigidul are un singur grad de libertate, iar $v_0 = \frac{p}{2\pi}\omega$ și $a_0 = \frac{p}{2\pi}\varepsilon$, viteza și accelerația sunt:

$$v = \omega\sqrt{\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 + R_M^2} \quad a = \sqrt{\varepsilon^2 \left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 + R_M^2\right] + \omega^4 R_M^2}. \quad (8.86)$$

8.3.4 Mișcarea plan-paralelă

Prin definiție este mișcarea în care trei puncte necoliniare aparținând rigidului se mișcă într-un plan fix. Cele trei puncte (fie O, M și N) determină o secțiune (σ) a rigidului, planul fix purtând denumirea de *plan director* al mișcării (P_d) vezi Figura 8.13. Așadar, o a doua definiție a mișcării plan-paralele, este: mișcarea în care o secțiune a rigidului se mișcă tot timpul în planul director.

Se aleg sistemele de referință astfel încât planul $O_1x_1y_1$ să coincidă cu planul director, iar secțiunea (σ) să conțină axele x', y' , x și y . Se duce prin M o dreaptă (Δ) perpendiculară pe planul director. În timp ce rigidul face mișcare plan-paralelă dreapta (Δ) face o mișcare de translație (rămâne tot timpul paralelă cu ea însăși, adică normală la (P_d)). Prin urmare toate punctele de pe (Δ) au traiectorii identice situate în plane paralele cu (P_d), și aceeași viteză și accelerație. De aici și numele mișcării "*plan-paralelă*". Se poate simplifica studiul mișcării întregului rigid la studiul mișcării secțiunii (σ) în planul director, astfel ca studiul nu se mai face în spațiu, ci în plan.

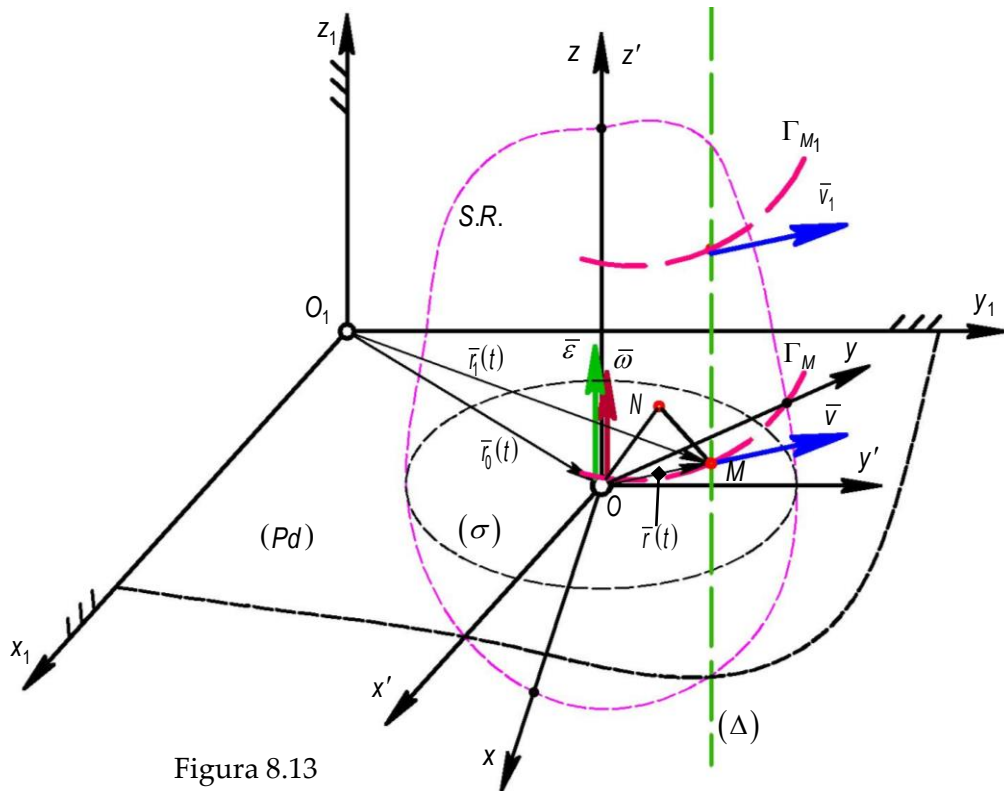


Figura 8.13

Mișcarea plană este mișcarea unei plăci (secțiuni) într-un plan fix (planul director) conform Figurii 8.14. *Ecuatiile finite* ale mișcării sunt:

$$\begin{cases} x_o = x_o(t) \\ y_o = y_o(t) \\ z_o = 0 \end{cases} \begin{cases} \psi = 0 \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = 0 \end{cases} \quad (8.87)$$

așadar atât în mișcarea plană cât și în cea plan-paralelă rigidul are numai trei grade de libertate.

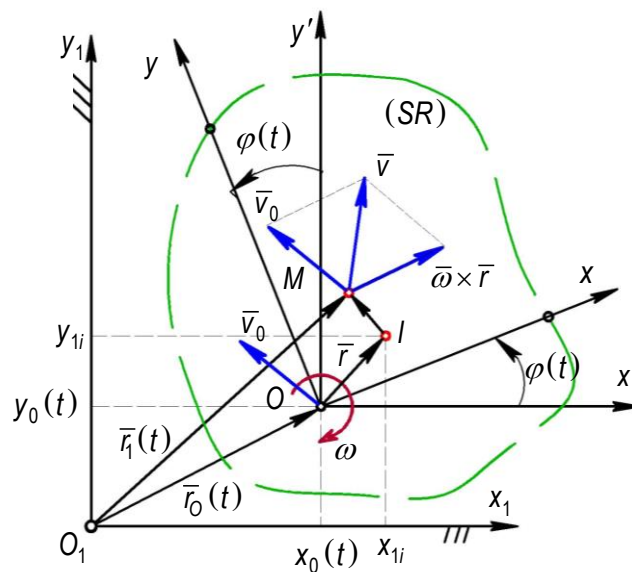


Figura 8.14

Vectorul de poziție al originii sistemului mobil se scrie:

$$\bar{r}_O(t) = x_O(t)\bar{l}_1 + y_O(t)\bar{j}_1. \quad (8.88)$$

și i se poate calcula viteza

$$\bar{v}_O = \dot{\bar{r}}_O = \dot{x}_O\bar{l}_1 + \dot{y}_O\bar{j}_1. \quad (8.89)$$

și accelerația:

$$\bar{a}_O = \dot{\bar{v}}_O = \dot{x}_O\bar{l}_1 + \dot{y}_O\bar{j}_1. \quad (8.90)$$

Viteza unghiulară rezultă din ecuațiile parametrice $\bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{k}$ permițând calculul accelerației $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\phi}\bar{k}$. În concluzie \bar{v}_O și \bar{a}_O aparțin planului director, $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ de direcție fixă sunt perpendiculare/normale pe acesta.

Distribuția de viteze are aceeași formă ca la mișcarea generală $\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}$ cu mențiunea că \bar{v} aparține planului director, iar $\bar{\omega}$ are direcție fixă normală pe planul director.

Proprietăți: 1. \bar{v}_O și $\bar{\omega}$ determină complet distribuția de viteze;

2. valoarea instantanee a vitezei unghiulare este un invariant;

3. relația dintre vitezele a două puncte A și B:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (8.91)$$

se numește **relația lui Euler pentru viteze** și stă la baza metodei grafice *planul vitezelor*;

4. există un singur punct de viteză instantanee nulă se notează cu I și se numește *polul vitezelor / centrul instantaneu de rotație (CIR)*.

Distribuția de viteze față de I se deduce ținând seama de particularitatea:

$$\bar{v}_I = 0 = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_I \quad (8.92)$$

care se scade din: $\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Astfel, rezultă: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{\omega} \times \bar{r}_I = \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_I) = \bar{\omega} \times \overline{IM}$ (8.93)

ca și când *placa s-ar roti în jurul lui I din punctul de vedere al vitezelor*.

Acest lucru permite determinarea grafică a lui I la intersecția perpendicularelor pe viteze (vezi Figura 8.15), iar vitezele impun sensul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$.

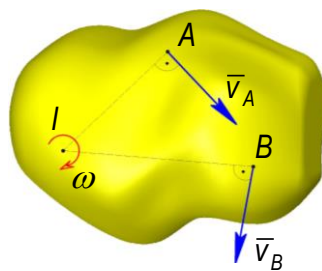


Figura 8.15

Metoda CI de determinare a vitezelor

1. se dau v_A și ω : se determină I la distanța $IA = \frac{v_A}{\omega}$ perpendicular pe v_A și apoi $v_B = \omega IB$ perpendicular pe IB în sensul lui ω .

2. Se dau v_A și I: se determină $\omega = \frac{v_A}{IA}$ cu sensul impus de v_A și apoi $v_B = \frac{v_A}{IA} IB$ perpendicular pe IB în sensul lui ω .

Observații: - dacă perpendicularele pe viteze se suprapun se poate găsi I la intersecția perpendicularei pe viteze cu segmentul ce unește vârfurile vitezelor Figura 8.16;

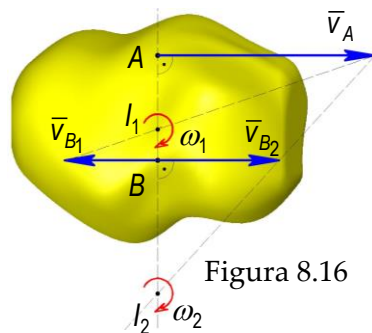


Figura 8.16

-dacă I este la ∞ atunci, $\omega = 0$ și $v_B = v_A$ placa având o mișcare de translație instantanee Figura 8.17.

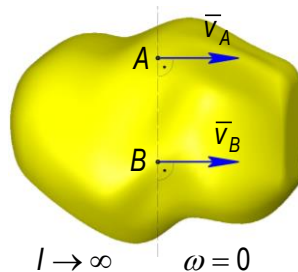


Figura 8.17

Centroidele mișcării

În mișcarea plană/plan-paralelă la un moment dat un singur punct are viteza nulă el fiind I. La momentul următor de timp alt punct are viteza nulă și așa mai departe. Se înregistrează pozițiile lui I separat în cele două sisteme de referință fix $\begin{cases} x_{1I} = x_{1I}(t) \\ y_{1I} = y_{1I}(t) \end{cases}$ și mobil $\begin{cases} x_I = x_I(t) \\ y_I = y_I(t) \end{cases}$. Locul geometric al pozițiilor succesive ale lui I se numește **centroidă fixă/curbă bază (C_f/B)** sau **centroidă mobilă/rostogolitoare (C_m/R)**. Ele se obțin eliminând parametrul între ecuațiile coordonatelor și găsind formele implicite ale celor două curbe:

$(C_f/B) f(x_{1I}, y_{1I}) = 0$ sau $(C_m/R) g(x_I, y_I) = 0$. Cele două curbe sunt tangente între ele chiar în I.

Observații: - în tipul mișcării centroida mobilă se rostogolește fără să alunece pe centroida fixă punctul lor de tangență fiind I;

- în spațiu lui I îi corespunde o dreaptă, numita axă instantanee de rotație (AIR), iar centroidelor niște suprafețe cilindrice riglate numite **axoidă fixă** (A_f) și **axoidă mobilă** (A_m);

- axoidele sunt tangente între ele după (AIR);

- în timpul mișcării axoida mobilă se rostogolește fără să alunece pe axoida fixă.

Distribuția de accelerații se obține din formula generală cu mențiunea că \bar{r}, \bar{v} și \bar{a}_O aparțin secțiunii (σ), iar $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ au direcție fixă perpendiculară pe (σ) astfel:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + (\bar{\omega}\bar{r})\bar{\omega} - (\bar{\omega}\bar{\omega})\bar{r} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2\bar{r}. \quad (8.94)$$

Cu notațiile: $\bar{a}^T = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ și $\bar{a}^V = -\omega^2\bar{r}$, substituite în (8.94), rezultă:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{a}^T + \bar{a}^V \quad (8.95)$$

Proprietăți: 1. $\bar{a}_O, \bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ determină complet distribuția de accelerații;

2. valoarea instantanee a accelerației unghiulare este un invariant;

3. relația dintre accelerațiile a două puncte A și B se numește relația lui Euler pentru accelerații: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2\overline{AB} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^T + \bar{a}_{BA}^V = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ (8.96)

și stă la baza metodei grafice numită **planul accelerațiilor**;

4. există un singur punct de accelerație instantanee nulă, se numește **polul accelerațiilor** și se notează cu J.

Distribuția de accelerații față de J se deduce ținând seama că $\bar{r} = \bar{r}_J + \overline{JM}$ și:

$$\bar{a}_J = 0 = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_J - \omega^2\bar{r}_J \quad (8.97)$$

Făcând diferența dintre (8.94) și (8.97), se obține:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times (\bar{r} - \bar{r}_J) - \omega^2(\bar{r} - \bar{r}_J) = \bar{\varepsilon} \times \overline{JM} - \omega^2\overline{JM} \quad (8.98)$$

ca și când placa s-ar roti în jurul lui J din punct de vedere al accelerațiilor. Acest lucru permite determinarea grafică a accelerației unui punct când se cunoaște accelerația altui punct.

Metoda polului accelerațiilor - vezi Figura 8.18

1. se dau J, ω și ε : se calculează: $\bar{a}_A^T = \bar{\varepsilon} \times \overline{JA}$ $\bar{a}_A^V = -\omega^2\overline{JA}$

apoi $a_A = JA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ și $\tan \theta = \frac{a_A^T}{a_A^V} = \varepsilon/\omega^2$ pe direcția JA se duce sub unghiul θ a_A .

2. se dau a_A , J , ω și ε : se calculează $a_B = JB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, iar sub unghiul θ față de JB se duce a_B .

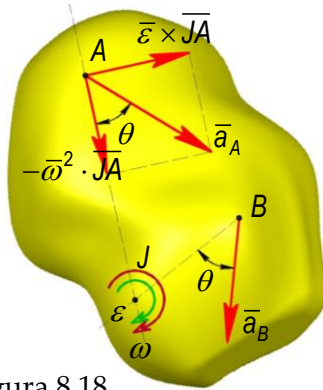


Figura 8.18

8.3.5 Mișcarea sferică

Mișcarea sferică apare atunci când *un punct aparținând rigidului rămâne fix pe tot timpul mișcării*. Se mai numește și mișcarea rigidului cu punct fix. Se alege punctul fix O ca origine a sistemelor de referință conform Figurii 8.19.

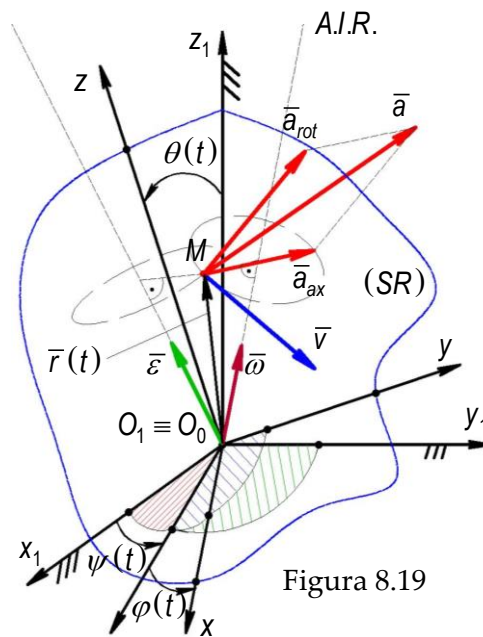


Figura 8.19

Prin urmare $\bar{r}_O = 0$ și $\bar{v}_O = \dot{\bar{r}}_O = 0$ ceea ce înseamnă că rigidul nu-și schimbă poziția ci numai orientarea.

Ecuțiile finite ale mișcării sunt:

$$\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ z_O = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = \psi(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (8.99)$$

Rezultă de aici că rigidul are trei grade de libertate și că $\bar{v}_O = 0$, iar:

$$\bar{\omega} = \psi \bar{k}_1 + \dot{\varphi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} \quad (8.100)$$

are o direcție oarecare. Prin urmare $\bar{a}_O = 0$, iar accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ va avea și ea o direcție oarecare. Vectorul $\bar{r}(t)$ are modulul constant numai direcția lui fiind variabilă. Acest lucru înseamnă că punctul M se deplasează pe o sferă de rază r adică *traectoria lui este o curbă înscrisă pe o sferă* de unde și denumirea de *mișcare sferică*.

Distribuția de viteze este $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ obținută prin particularizarea relației de la mișcarea generală și are expresia:

$$\begin{aligned} v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k} \end{aligned} \quad (8.101)$$

cu ajutorul căreia se identifică componentele vitezei pe sistemul mobil legat de rigid:

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x \end{cases} \quad (8.102)$$

Distribuția de accelerații în mișcarea sferică se găsește în mod asemănător din relația de la mișcarea generală ținând seama de particularitatea că $\bar{a}_O = 0$, rezultând:

$$\bar{a} = \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} \quad (8.103)$$

$$\text{în care:} \quad \bar{a}_{rot} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad \text{și} \quad \bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (8.104)$$

Componentele accelerației pe axele sistemului mobil Oxyz se determină explicitând vectorii, calculând produsele vectoriale și identificând coeficienții versorilor între membrii stâng și drept al relației.

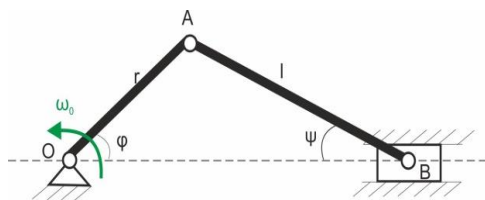
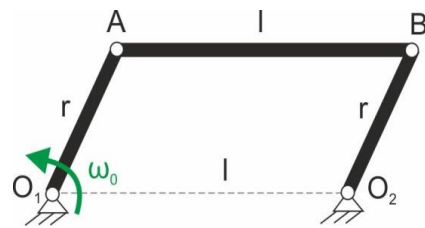
$$a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} \quad (8.105)$$

Prin efectuarea calculelor se obține:

$$\begin{cases} a_x = -(\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x \omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x \omega_z + \varepsilon_y)z \\ a_y = (\omega_y \omega_x + \varepsilon_z)x - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + (\omega_y \omega_z - \varepsilon_x)z \\ a_z = (\omega_z \omega_x - \varepsilon_y)x + (\omega_z \omega_y + \varepsilon_x)y - (\omega_y^2 + \omega_x^2)z \end{cases} \quad (8.106)$$

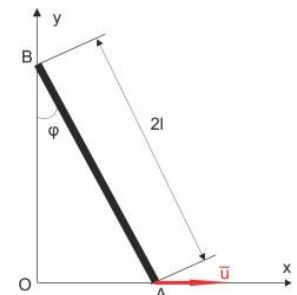
8.4 Aplicații

P8.1 Mecanismul paralelogram din figură este pus în mișcare de manivela motoare O_1A care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul articulației O_1 . Cunoscând dimensiunile geometrice ale mecanismului să se găsească traiectoria, viteza și accelerația punctelor A și B ale mecanismului.

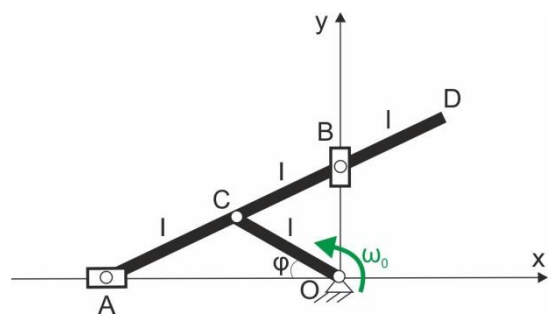


P8.2 Manivela motoare OA se rotește în jurul articulației O cu viteza unghiulară constantă ω_0 punând în mișcare mecanismul bielă-manivelă din figură. Să se determine viteza punctului B al mecanismului.

P8.3 Bara AB execută o mișcare cardanică și are viteza capătului A constantă u . Să se găsească viteza capătului B și centroidele mișcării barei.



P8.4 Bara AD este pusă în mișcare de manivela motoare OC care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul articulației O. Punctele A și B ale barei culisează pe axele x_1 respectiv y_1 . Să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului D precum și centroidele mișcării plane ale barei.



Indicații: 1. dacă nu este dat sistemul de referință atunci el se alege cu originea în articulația manivelei motoare;

2. se proiectează punctul pe sistem găsindu-se coordonatele acestuia;

3. se derivează coordonatele obținând componentele vitezei (după prima derivare) și ale accelerației (după a doua derivare);

4. dacă se cere traiectoria se elimină parametrul (fie timpul, fie unghiul) între coordonate;

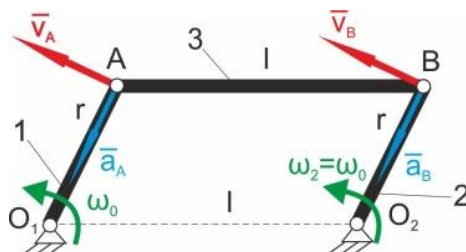
5. dacă se tratează problema ca la cinematica problemelor de solide, atunci se caută polul vitezelor (I și se aplică metoda CIR de determinare a vitezelor);

6. dacă se cer centrițele se caută coordonatele lui I față de un sistem fix și față de un sistem mobil, după care se elimină parametrul și se obțin centrițele;

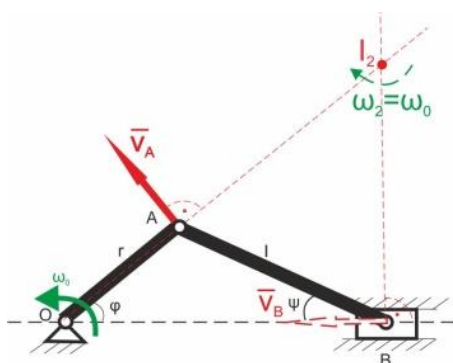
7. când accelerația unghiulară e nulă atunci accelerația punctului nu are decât componentă normală, ea având direcția spre centrul de rotație, din valoarea ei se poate găsi distanța până la polul accelerațiilor cu ajutorul căruia se pot calcula restul accelerațiilor.

Soluții:

P8.1 Mecanismul este compus din manivela motoare 1, biela 3 și manivela condusă 2. Biela AB face o mișcare de translație toate punctele ei având aceeași viteză și accelerație prin urmare e suficient să se determine: \vec{v}_A și \vec{a}_A .



Astfel, $v_A = O_1A \cdot \omega_0 = r\omega_0$ fiind $\perp O_1A$ cu sensul dat de ω_0 . Cum $\omega_0 = ct. \Rightarrow \varepsilon = \dot{\omega}_0 = 0$ deci $\vec{a}_A = \vec{a}_A^v$ $a_A = a_A^v = O_1A \cdot \omega_0^2 = r\omega_0^2$.



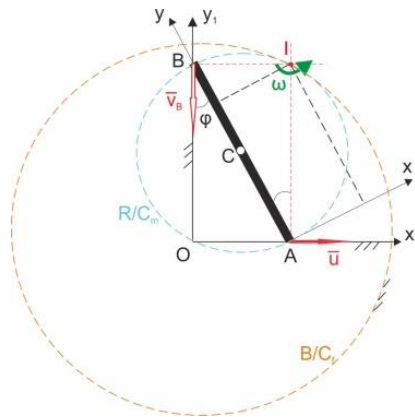
P8.2 Manivela motoare OA execută o mișcare de rotație față de articulația O, iar biela AB o mișcare plană. Viteza lui A este la fel ca în exemplul precedent. Punctul B execută o mișcare rectilinie având direcția vitezei de-a lungul OB.

Se duc perpendicularele pe viteze în A și în B, găsim la intersecția lor pe I_2 (polul vitezelor sau CIR al bielei). Cum $v_A = r\omega_0$, se exprimă față de I_2 , $v_A = I_2A \omega_2$ rezultând:

$$\omega_2 = \frac{r}{I_2A} \omega_0 \text{ și } v_B = I_2B \omega_2 = \frac{rI_2B}{I_2A} \omega_0$$

unde I_2B și I_2A sunt ușor de determinat geometric.

P8.3 În mișcarea cardanică capetele barei se mișcă pe axele x_1 și y_1 . Prin urmare viteza lui B are direcția axei y_1 .



Se trasează perpendicularele pe viteze și se determină I la intersecția lor.

Din: $v_A = u$ și $v_B = \omega IA$ rezultă ω și apoi $v_B = \frac{IB}{IA} u = \frac{2l \sin \varphi}{2l \cos \varphi} u = u \tan \varphi$.

Coordonatele lui I în sistemul fix Ox_1y_1 sunt: $\begin{cases} x_{1I} = IB = 2l \sin \varphi \\ y_{1I} = IA = 2l \cos \varphi \end{cases}$

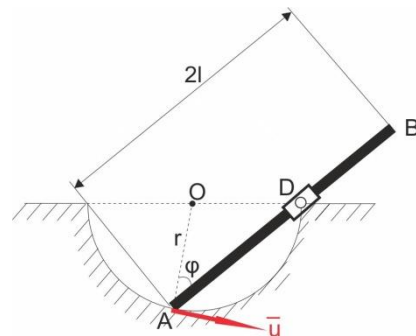
iar prin eliminarea lui φ se obține baza sau centroida fixă B/C_f un cerc cu centrul în O și raza $2l$: $x_{1I}^2 + y_{1I}^2 = (2l)^2$

Se consideră un sistem mobil legat de bară Axy în care coordonatele lui I vor fi:

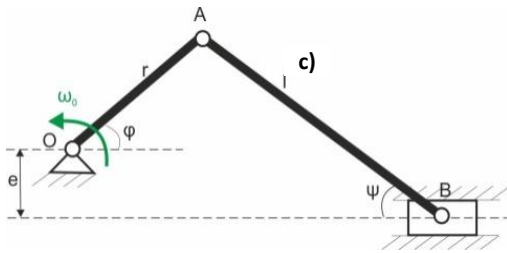
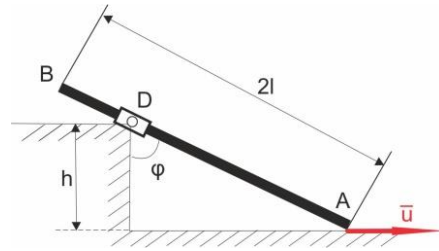
$$\begin{cases} x = IA \sin \varphi = 2l \cos \varphi \sin \varphi = l \sin 2\varphi \\ y = IA \cos \varphi = 2l \cos^2 \varphi = l(1 + \cos 2\varphi) \end{cases}$$

cu care se stabilește rostogolitoarea sau centroida mobilă R/C_m : $x_I^2 + (y_I - l)^2 = l^2$ tot un cerc de rază l și centru în $C(0, l)$ exact la mijlocul barei.

P8.4 Bara AB de lungime $2l$ execută o mișcare plană astfel încât capătul A se mișcă cu viteza constantă u pe o suprafață cilindrică de rază r , iar corpul barei trece în permanență prin culisa oscilantă din D vezi figura. Se cer viteza și accelerația punctului B precum și centroidele mișcării barei.

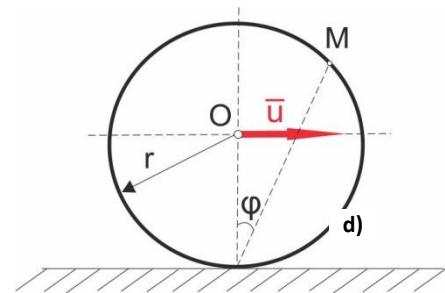


P8.5 Bara AB de lungime $2l$ execută o mișcare plană astfel încât capătul A se mișcă cu viteza constantă u pe o suprafață orizontală, iar corpul barei trece în permanență prin culisa oscilantă din D conform figurii. Se cere viteza punctului B precum și centroidele mișcării barei.



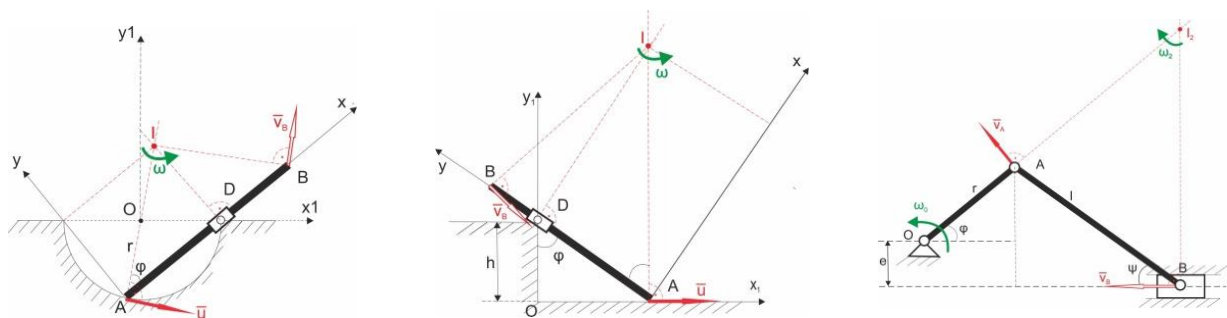
P8.6 Manivela motoare OA a mecanismului bielă–manivelă cu excentric din figură se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul articulației O. Să se determine viteza culisei din B utilizând metoda polului vitezelor sau metoda planului vitezelor.

P8.7 O roată de rază r se rostogolește fără alunecare pe o șină fixă orizontală. Știind viteza u , constantă, a centrului roții să se afle viteza și accelerația unui punct M aflat pe periferia ei. Să se determine de asemenea centroidele mișcării plane ale roții.

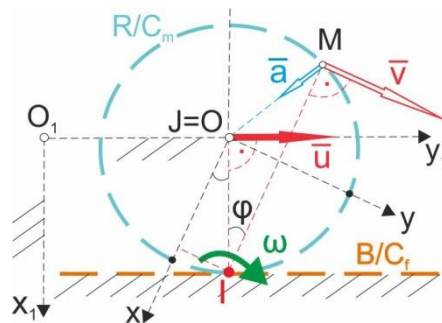


- Indicații**
1. Se pot utiliza noțiunile de la cinematica sistemelor de corpuri;
 2. CIR sau I se determină ușor la intersecția perpendicularelor pe viteze/pe direcția vitezelor;
 3. dacă se cere accelerația vreunui punct când $\varepsilon=0$ se aplică indicația 7 de la problema P8.4.

Schemele forțelor pentru P 8.4 – P 8.6



P8.7 Deoarece nu există alunecare între șină și roată, în punctul de contact se suprapun două puncte: unul aparține roții celălalt șinei, iar vitezele lor sunt egale. Cum șina e fixă viteza punctului de pe șină e zero, prin urmare și punctul de pe roată are viteza nulă el fiind chiar I. Din expresia vitezei lui O se poate determina viteza unghiulară $\omega = \frac{u}{IO} = \frac{u}{r}$ după care se găsește viteza lui M: $v = \omega IM = 2r\omega \cos \varphi$. Viteza lui O fiind constantă, iar traiectoria lui o dreaptă, el face o mișcare rectilinie și uniformă, accelerația sa fiind nulă prin urmare polul accelerațiilor $J \equiv O$.



Deoarece u și r sunt constante și ω e constant deci $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ iar accelerația lui M nu are decât componentă normală $\bar{a} = \bar{a}_v$, $a = \omega^2 JM = \omega^2 r$. Se aleg două sisteme de referință unul fix $O_1x_1y_1$ și celălalt mobil legat de roată Oxy . Se proiectează pe I în cele două sisteme:

$$\begin{cases} x_{1I} = IO = r = ct. \\ y_{1I} = ut \end{cases} \quad \begin{cases} x_I = IO \cos \varphi = r \cos \varphi \\ y_I = IO \sin \varphi = r \sin \varphi \end{cases}$$

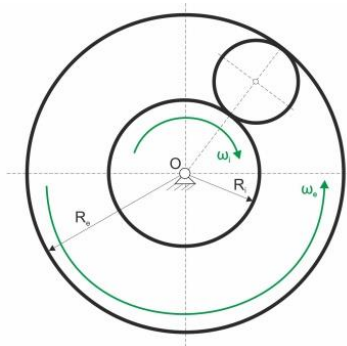
observând că în sistemul fix I descrie o dreaptă paralelă cu axa y de ecuație:

$$x_{1I} = r = ct. \text{ centroida fixă } B/C_f.$$

Se elimină parametrul timp între coordonatele lui I în sistemul mobil și rezultă:

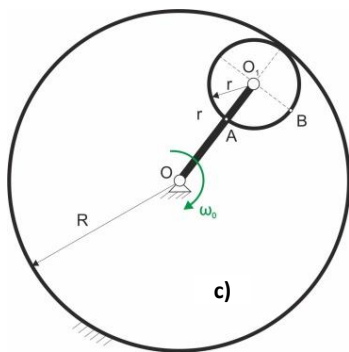
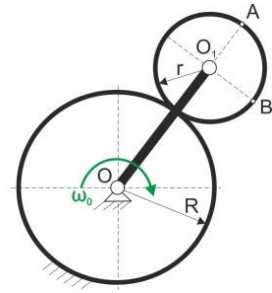
$$x_I^2 + y_I^2 = r^2$$

ecuația unui cerc ce coincide cu periferia roții centroida mobilă R/C_m .



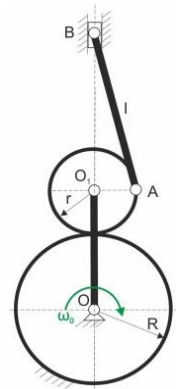
P8.8 Un rulment este compus dintr-un inel exterior, unul interior și bile așezate între inele. La rulmentul din figură, schematizat, ambele inele se rotesc cu viteze unghiulare constante, de sensuri opuse ($\omega_e > \omega_i$), iar bilele execută mișcare plană. Cunoscând razele R_i și R_e să se determine viteza unghiulară a bilei și viteza centrului ei.

P8.9 Manivela motoare OO_1 a mecanismului planetar din figură se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul articulației fixe O și pune în mișcare roata planetară de rază r ce se rostogolește fără să alunece pe roata fixă de rază R . Să se determine vitezele și accelerațiile punctelor A și B aparținând roții planetare.



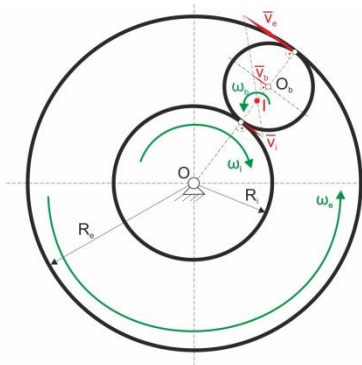
P8.10 Manivela motoare OO_1 de lungime $2r$ a mecanismului planetar din figură se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul articulației fixe O și pune în mișcare roata planetară de rază r ce se rostogolește fără să alunece pe interiorul roții fixe de rază $3r$. Să se determine vitezele și accelerațiile punctelor A și B aparținând roții planetare. Mai mult punctul A se suprapune cu manivela în momentul considerat.

P8.11 Se consideră un mecanism planetar având o bielă AB articulată de periferia roții planetare. În celălalt capăt B al bielei se află o culisă. Cunoscând dimensiunile geometrice și viteza unghiulară ω_0 constantă a manivelei să se determine pentru poziția mecanismului în care $O_1A \perp OB$ vitezele unghiulare ale roții planetare și bielei precum și vitezele punctelor A și B .



Soluții:

P8.8 Bila nu alunecă pe inelele rulmentului deci în punctele de contact dintre bilă și inele vitezele punctelor de pe bilă sunt egale cu vitezele punctelor inelelor. Dacă se duc perpendicularele pe viteze se constată că ele se suprapun și devine un caz particular în care se unesc vârfulurile vitezelor și se determină I.



Vitezele punctelor de contact sunt:

$$\begin{cases} v_i = \omega_i R_i = \omega_b (IO_b + R_b) \\ v_e = \omega_e R_e = \omega_b (R_b - IO_b) \end{cases}'$$

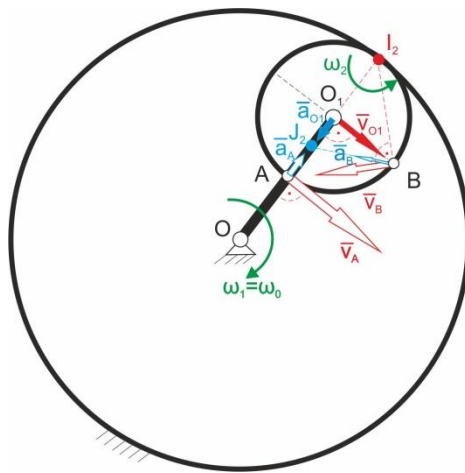
iar $R_b = \frac{R_e - R_i}{2}$. Se rezolvă sistemul de două ecuații cu două necunoscute ω_b, IO_b

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_b = \frac{v_e + v_i}{R_e - R_i} = \frac{\omega_e R_e + \omega_i R_i}{R_e - R_i} \\ I O_b = \frac{v_e - v_i}{v_e + v_i} \cdot \frac{R_e - R_i}{2} = \frac{\omega_e R_e + \omega_i R_i}{\omega_e R_e - \omega_i R_i} \cdot \frac{R_e - R_i}{2} \end{array} \right.$$

Iar apoi se calculează apoi viteza centrului bilei:

$$v_b = \omega_b R_b = \frac{v_e + v_i}{R_e - R_i} \cdot \frac{R_e - R_i}{2} = \frac{v_e + v_i}{2} = \frac{\omega_e R_e + \omega_i R_i}{2}.$$

P8.10 Se notează elementele mecanismului: 1 manivela motoare, 2 roata planetară și 3 roata fixă. Cum roata planetară nu alunecă pe roata fixă punctul lor de contact are viteza nulă și este chiar I_2 (I al elementului 2).



Se determină mai întâi viteza lui O_1 :

$$v_{O_1} = O O_1 \omega_1 = 2r \omega_0$$

având sensul impus de ω_0 .

Cu ajutorul lui v_{O_1} se poate calcula: $\omega_2 = \frac{v_{O_1}}{I_2 O_1} = \frac{2r \omega_0}{r} = 2\omega_0$

adică roata planetară are o viteză unghiulară de două ori mai mare ca viteza unghiulară a manivelei. Deoarece $\omega_2 = 2\omega_0$ care e constant rezultă că:

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_0 = 0 \quad \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 0 \quad \text{și} \quad \bar{a}_{O_1} = \bar{a}_{O_1}^v$$

atât față de O cât și față de J_2 și: $a_{O_1} = \omega_0^2 O O_1 = \omega_0^2 J_2 O_1$

de unde se deduce: $J_2 O_1 = \frac{a_{O_1}}{\omega_0^2} = \frac{r}{2}$, J_2 aflându-se la $r/2$ de O_1 . De remarcat că accelerațiile tuturor punctelor roții planetare merg direct spre J_2 . Accelerațiile punctelor A și B aparținând roții planetare vor fi:

$$a_A = \omega_2^2 J_2 A = 2\omega_0^2 r \quad \text{și} \quad a_B = \omega_2^2 J_2 B = 2r\sqrt{5}\omega_0^2.$$

Bibliografie

1. Popescu, P., ș.a., *Culegere de Probleme de Mecanică-Statica*, Centrul de multiplicare al Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1978.
2. Ripianu, A., ș.a., *Culegere de Probleme de Mecanică-Cinemática*, Centrul de multiplicare al Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1986.
3. Sarian, M., ș.a., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
4. Stoenescu, Al., Ripianu, A., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
5. Bălan, Șt., *Probleme de Mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
6. Ispas, V., ș.a., *Mecanica*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1998.
7. Ispas, V., Arghir, M., s.a. *Mecanică*, Ed. Dacia, ISBN 973-35-06-97-4, Cluj-Napoca, 1997.
8. Ripianu, A., *Mecanica solidului rigid*, Editura Tehnică, București, 1973.
9. Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B., *Mecanică tehnică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
10. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., *Mecanică teoretică*, Editura Tehnică, București, 1968.
11. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion, P., *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei, București, 1989.
12. Voinea, R., Voiculescu, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
13. Vâlcovici, V., Bălan, S., *Mecanică teoretică*, Ediția a 2-a. Editura Tehnică, București, 1963
14. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion, P., *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei, București, 1989.
15. Atanasiu, M., *Mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică București, 1973.
16. Negrean, I., **Schonstein, C.**, s.a. - *Mecanică. Teorie și aplicații*, Editura UT Press, 2013, ISBN 978-973-662-523-7, 544 pagini;
17. Negrean, I., **Schonstein, C.**, s.a., *Mechanics — Theory and Applications*, Editura UT Press, 2015, 433 pagini, ISBN 978-606-737-061-4

Cuprins

Prefața	3
Capitolul 1 - Reducerea sistemelor de forțe	5
1.1 Considerații teoretice	5
1.2 Reducerea unui sistem de forțe aplicate unui rigid	10
1.3 Calculul elementelor torsorului de reducere	11
1.4 Reducerea sistemelor de forțe coplanare	16
1.5 Reducerea sistemelor de forțe paralele. Centrul forțelor paralele	17
1.6 Aplicații	19
Capitolul 2 - Geometria maselor	29
2.1 Considerații asupra geometriei maselor	29
2.2 Centrul maselor pentru un sistem discret de puncte materiale	29
2.3 Noțiunea de densitate	30
2.4 Centrul maselor pentru un corp cu o formă geometrică oarecare	34
2.5 Centrul maselor pentru un sistem de corpuri	35
2.6 Momente masice	36
2.7 Aplicații	39
Capitolul 3 - Echilibrul punctului material	47
3.1 Poziționarea punctului material. Grade de libertate	47
3.2 Punct material liber. Punct material supus la legături	48
3.3 Generalități despre legături. Axioma legăturilor. Ecuații vectoriale de echilibru	50
3.4 Legături ideale ale punctului material	51
3.4.1 Legătura pe o suprafață lucie	51
3.4.2 Legătura pe o curbă lucie	53
3.4.3 Legătura prin bară sau fir	54
3.5 Legături cu frecare ale punctului material	56
3.5.1 Frecarea Coulombiană	56
3.5.2 Legătura pe o suprafață aspră	58
3.5.3 Legătura pe o curbă aspră	60
3.6 Aplicații	63
Capitolul 4 - Echilibrul solidului rigid	72
4.1 Poziționarea solidului rigid. Grade de libertate	72
4.2 Matricele de rotație simplă	77
4.3 Ecuațiile de echilibru ale solidului rigid liber	80
4.4 Echilibrul solidului rigid supus la legături fără frecare	82
4.5 Legăturile fără frecare ale rigidului	83
4.5.1. Reazemul simplu	83
4.5.2. Articulația sferică	86
4.5.3. Articulația cilindrică	88
4.5.4. Cupla cilindrică plană	90
4.5.5. Cupla de rotație	92
4.5.6. Cupla prismatică	94
4.5.7. Încadrarea spațială	97
4.5.8. Încadrarea plană	99

4.6. Legătura prin fir și prin bară dublu articulată	100
4.7 Studiul echilibrului rigidului supus la legături cu frecare	102
4.7.1. Generalități privind frecările. Condiții de echilibru	102
4.8 Aplicații	105
Capitolul 5 - Echilibrul sistemelor materiale	112
5.1 Echilibrul sistemelor de puncte materiale	112
5.2 Echilibrul sistemelor de solide rigide	113
5.3 Aplicații	116
Capitolul 6 - Statica firelor	124
6.1 Generalități și ipoteze simplificatoare	124
6.2 Fire suspendate	124
6.2.1 Ecuatiile vectoriale de echilibru	124
6.2.2 Ecuatiile carteziane de echilibru	126
6.3 Frecarea firelor	127
6.4 Echilibrul firului petrecut peste un scripete	129
Capitolul 7- Cinematica punctului material	132
7.1 Noțiuni generale de cinematică	132
7.2 Componentele carteziane ale vitezei și accelerației	137
7.3 Componentele cilindrice ale vitezei și accelerației	138
7.4 Componentele intrinseci ale vitezei și accelerației	140
7.5 Mișcarea circulară	141
7.6 Mișcarea rectilinie	142
7.7 Aplicații	143
Capitolul 8 - Cinematica solidului rigid	153
8.1 Relații matriciale de poziționare și orientare a rigidului	153
8.2 Mișcarea generală a rigidului	158
8.2.1 Definiție, ecuații finite, traiectoria unui punct oarecare al rigidului	158
8.2.2 Viteza unghiulară, formulele lui Poisson, componentele ω pe axele sistemului mobil, componentele ω pe axele sistemului fix	159
8.2.3 Distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului	163
8.2.4 Distribuția de accelerații în mișcarea generală a rigidului	164
8.3 Studiul mișcărilor particulare ale rigidului	166
8.3.1 Mișcarea de translație	166
8.3.2 Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe	168
8.3.3 Mișcarea de rototranslație	170
8.3.4 Mișcarea plan-paralelă	173
8.3.5 Mișcarea sferică	178
8.4 Aplicații	180
Bibliografie	188