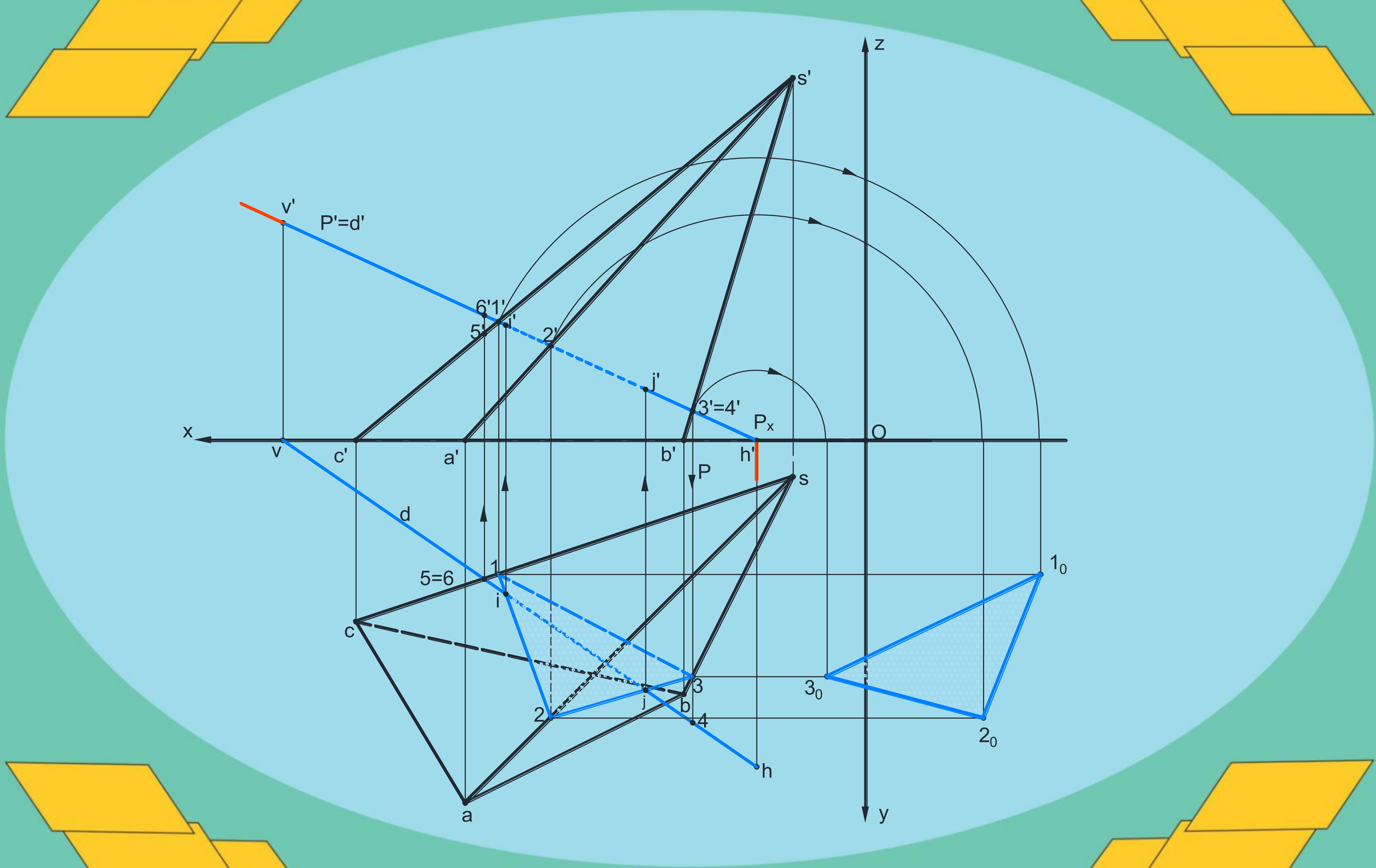
Prodan Vasile Călin

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Îndrumător de laborator

- Aplicații -



UTPRESS
Cluj-Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-618-0

Vasile Călin PRODAN

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Îndrumător de laborator

- Aplicații -

UTPRESS
Cluj - Napoca, 2022
ISBN 978-606-737-618-0

Editura UTPRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: ing. Dan Colțea

Recenzia: Șl.dr.ing. Monica Carmen Bălcău
Șl.dr.ing. Iacob Liviu Scurtu

Pregătire format electronic: Gabriela Groza

ISBN 978-606-737-618-0

Prefață

Lucrarea de față este un Îndrumător pentru lucrările de laborator și cuprinde aplicații necesare și utile studenților din domeniul tehnic și în special al ingineriei mecanice și al ingineriei industriale, contribuind totodată la o mai bună pregătire a lor în vederea susținerii examenelor la disciplina Geometrie Descriptivă, reprezentând totodată și un instrument de îmbogățire al cunoștințelor.

Lucrarea cuprinde peste 300 de aplicații structurate pe 7 capitole și conține probleme sau exemple rezolvate, și altele propuse pentru rezolvare, și urmărește pas cu pas, într-o notă crescătoare gradul de dificultate al aplicațiilor.

Geometria descriptivă este alfabetul Desenului tehnic.

Scopul Geometriei descriptive este, în principal, să formeze studenților un anumit raționament al relațiilor existente între elementele existente în cadrul diferitelor aplicații și să fie capabili să gândească logic și coerent modul prin care se poate rezolva o aplicație grafică (cu un anumit grad de dificultate).

Geometria descriptivă dezvoltă vederea în spațiu, și ajută la o mai bună întelegere privind reprezentările în plan și reprezentările în spațiu.

În acest Îndrumător sunt prezentate doar o parte privind tipurile de aplicații existente, însă acestea ajută studenții în studiul lor individual privind pregătirea viitorilor ingineri pentru probele pe care le vor avea de susținut.

Este adevărat că unele epure apar încărcate, dar aceasta se datorează faptului că s-a urmărit în special partea geometrică a aplicației, dar și o execuție cât mai clară și mai coerentă.

Îmi doresc ca acest îndrumător pentru lucrările de laborator (aplicații) să fie de un real ajutor și folos pentru studenți și să contribuie totodată la facilitarea și înțelegerea privind modul de reprezentare și de rezolvare grafică a aplicațiilor.

Astfel, în primul capitol intitulat *Reprezentarea punctului* sunt prezentate câteva aplicații referitoare la reprezentarea punctului în epură, determinarea punctelor conținute în planele de proiecție, puncte simetrice față de planele de proiecție, precum și puncte situate în planele bisectoare [B_{I-III}] și [B_{II-IV}].

În capitolul al doilea intitulat *Reprezentarea dreptei. Poziția relativă a două drepte*, sunt prezentate aplicații care au ca studiu reprezentarea dreptei în epură, reprezentarea urmelor unei drepte, drepte particulare față de planele de proiecție, intersecția unei drepte cu planele bisectoare [B_{I-III}] și [B_{II-IV}], precum și determinarea diedrelor străbătute de o dreaptă oarecare.

În continuare este prezentat capitolul al treilea intitulat *Planul. Urmele planului, puncte și drepte conținute în plan*, urmărește și aduce în viziunea studentului reprezentarea planelor de proiecție, reprezentarea unui plan dat prin urme, care sunt planele particulare față de planele de proiecție, și nu în ultimul rând aplicații referitoare la drepte conținute în plan.

Tot în acest capitol sunt prezentate și aplicații privind determinarea dreptei de intersecție dintre două plane, sau/și determinarea punctului de intersecție dintre o dreaptă și un plan.

Capitolul al patrulea intitulat *Metodele geometriei descriptive* prezintă aplicații privitoare la cele trei metode (schimbarea planelor de proiecție, rotația și rabaterea) și prezintă un număr semnificativ de aplicații în care se determină adevărata mărime a unei plăci triunghiulare, sau determinarea mărimii reale a unghiului format de două drepte concurente, folosind metoda rabaterii.

În capitolul cinci intitulat *Poliedre. Prisma și piramida* sunt rezolvate aplicații privind desfășuratele corpurilor prisma și pirmaida, determinarea punctelor de intersecție dintre o dreaptă oarecare și poliedre.

Capitolul șase *Suprafețe curbe (riglate). Cilindrul și conul* prezintă aplicații care vin în sprijinul studenților și oferă informații importante privind modul de reprezentarea a suprafețelor curbe, desfășurata conului și a cilindrului, cum se poate determina intersecția unei drepte oarecare cu o suprafață curbă și cum se poate determina poziția unui plan tangent la cilindru sau la un con.

Ultimul capitol, *Suprafețe neriglate. Sfera,* este capitolul în care sunt prezentate aplicații referitoare la studiul intersecției dintre o dreaptă și o sferă, cum se poate trasa planul tangent la sferă, sau care este secțiunea rezultată în urma intersecției dintre o sferă și un plan de capăt. Toate acestea contribuie la formarea unei gândiri armonioase, întrucât doar cu exercițiu și muncă se poate ajunge la rezultate desăvârșite.

Nu în ultimul rând doresc să-i mulțumesc lui Dumnezeu că mi-a dat puterea necesară să realizez acest îndrumător, familiei mele pentru sprijin și înțelegere, dar și colegilor mei pentru recenzia realizată.

Autorul

Cuprins

NOTAȚII ȘI SIMBOLURI

[H], [V], [L]	- plane de proiecție, orizontal, vertical, lateral;
$[B_{I-III}]$, $[B_{II-IV}]$	- plan bisector
$[B_I]$, $[B_{II}]$, $[B_{III}]$, $[B_{IV}]$	- semiplane bisectoare;
T_I, T_{II}…T_{VIII}	- triedre;
Ox, Oy, Oz	- axe de proiecție;
A, B, C, … M, …	- puncte în spațiu;
a, b, …., m, ...	- proiecția punctelor pe planul orizontal de proiecție;
a’, b’,…, m’,…	- proiecția punctelor pe planul vertical de proiecție;
a’’, b’’,….m’’, ….	- proiecția punctelor pe planul lateral de proiecție;
(D), (Δ), ...	- dreapta în spațiu;
d, δ,...	- proiecția dreptei pe planul orizontal de proiecție [H];
d’, δ’,…	- proiecția dreptei pe planul vertical de proiecție [V];
d’’, δ’’, …	- proiecția dreptei pe planul lateral de proiecție [L];
H(h, h’, h’’)	- urma orizontală a dreptei, cu cele trei proiecții;
V(v, v’, v’’)	- urma verticală a dreptei, cu cele trei proiecții;
W(w, w’, w’’)	- urma laterală a dreptei, cu cele trei proiecții;
[P], [Q], [R],…	- plane în spațiu;
$[V_s]$	- plan vertical superior;
$[H_a]$	- plan orizontal anterior;
$[H_p]$	- plan orizontal posterior;
P, Q, R, …	- urma orizontală a planului;
P’, Q’, R’, …	- urma verticală a planului;
P’’, Q’’, R’’, ...	- urma laterală a planului;
Z(z, z’, z’’), Ω(ω, ω’, ω’’)	- axe de rotație;
O_1x_1, O_2x_2	- linii de pământ la schimbarea planului de proiecție;
$\parallel$	- paralel;
$\perp$	- perpendicular;
$\in$	- aparține

CAPITOLUL I

REPREZENTAREA PUNCTULUI

1.1. Să se reprezinte în epură punctele A(22, 40, 35); B(64, -25, 40); C(85, -44, -38) și D(45, 25, -55).

Rezolvare aplicaţia 1.1:

Se consideră linia de pământ axa O_x, pe care se fixează originea absciselor din punctul O. Punctul A are toate coordonatele pozitive, iar aceste coordonate sunt: (abscisa) ax = 22, (depărtarea) ay = 40 și (cota) az = 35. Pentru a se construi epura punctului A, se măsoară pe linia de pământ Ox valoarea abscisei ax = 22 mm) de la origine spre stânga și se obține ax. Pe perpendiculara trasată la linia de pământ în punctul ax se măsoară de la linia de pământ valoarea depărtării y = 40 mm și se obține proiecția orizontală a. Măsurând pe aceeași perpendiculară sau linie de ordine valoarea cotei az = 35 mm de la linia de pământ se obține proiecția verticală a'. În același mod se determină proiecţiile punctelor B, C și D ținând seama de valorile coordonatelor. Spațiul geometric este alcătuit din cele patru diedre care se formează din intersecţia celor două plane rectangulare de proiecție orizontal și vertical. Semnele depărtărilor și ale cotelor punctelor situate în aceste patru diedre sunt prezentate în tabelul 1:

Tabelul 1. Semenele cotei şi a depărtării în cele patru diedre

Diedrul	I	II	III	IV
Depărtarea	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-

Dacă se introduce planul lateral de proiecție [L], perpendicular pe planul [H] și pe planul [V], rezultă opt triedre, a căror semne (abscisa x, depărtarea y și cota z) sunt prezentate în tabelul 2:

Tabelul 2. Semenele privind abscisa, cota și depărtarea în cele opt triedre

Triedrul	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Abscisa (x)	+	+	+	+	-	-	-	-
Depărtarea (y)	+	-	-	+	+	-	-	+
Cota (z)	+	+	-	-	+	+	-	-

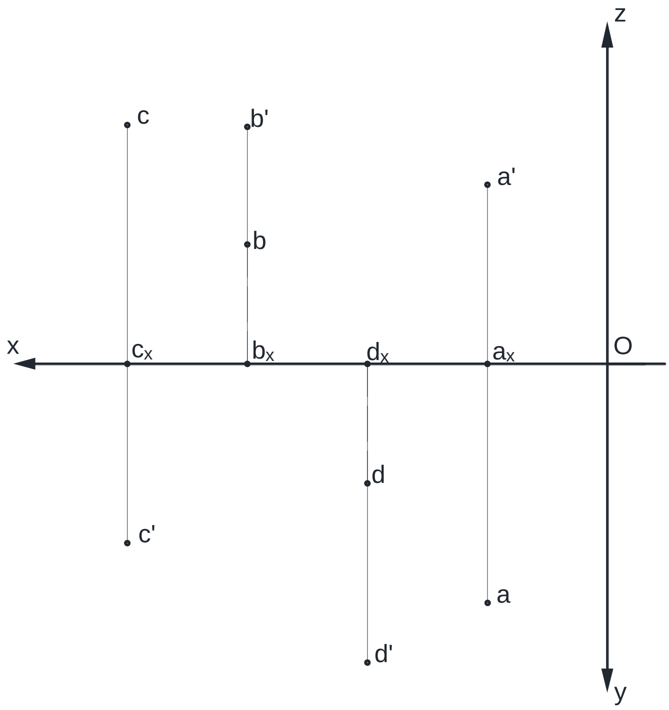


Fig. 1.1. Rezolvare aplicația 1.1

1.2. Să se reprezinte în epură următoarele puncte date prin coordonate numerice: A(0, 30, 50); B(22, -30, 40); C(42, -20, -50); D(-35, 20, 20) și E(-55, -10, 50).

Rezolvare aplicația 1.2:

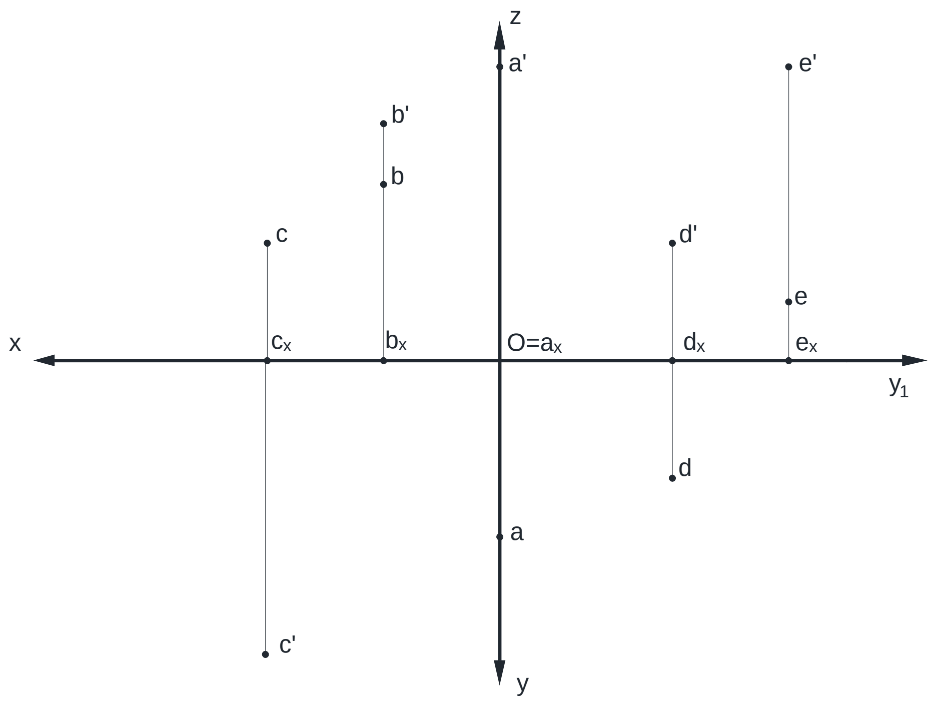


Fig. 1.2. Rezolvare aplicația 1.2

Pe linia de pământ Ox se fixează abscisele pozitive pentru punctele B și C și negative pentru punctele D și E.

Pe liniile de ordine trasate în punctele absciselor se măsoară depărtările și cotele punctelor respective. Punctele A și D au ambele depărtările și cotele pozitive, fiind astfel situate în primul diedru. Punctul C are atât depărtarea și cota negative. Acesta este situat în diedrul al treilea. Punctele E și F au depărtările negative și cotele pozitive. Ele sunt situate în diedrul al doilea.

Observație: Se poate menționa că punctul A϶[L] pentru că ax = 0.

1.3. Să se găsească distanța de la punctul A (22, 25, 35) la axele de proiecție Ox, Oy, Oz.

Rezolvare aplicația 1.3:

Distanța de la un punct la o dreaptă se măsoară prin segmentul perpendicular trasat din punct până la dreaptă. Se reprezintă punctul în epură, apoi distanța de la punctul A până la axa Ox este paralelă cu planul lateral de proiecție [L], proiectându-se pe acest plan în adevărată mărime, fiind egală cu segmentul Oa'' = l_x. Distanța punctului până la axa Oy se proiectează pe planul vertical de proiecție [V] în adevărată mărime și este egală cu segmentul Oa' = l_y. Distanța punctului până la axa Oz este egală cu segmentul Oa = l_z.

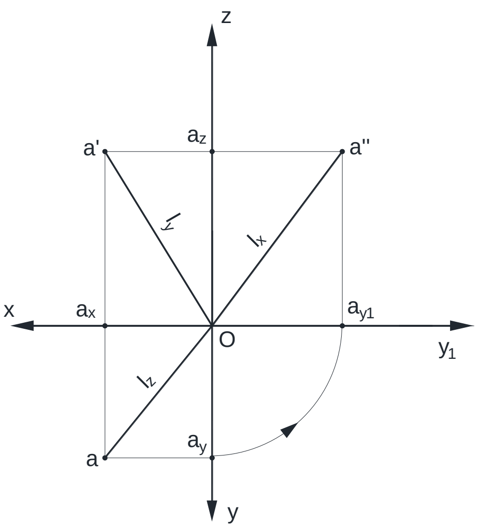


Fig. 1.3. Rezolvare aplicația 1.3

1.4. Să se construiască epura punctelor A, B, C și D situate pe planele bisectoare ale celor patru diedre. Se dau coordonatele punctelor A(65, 25, 25); B(50, -25, 25); C(35, -25, -25); D(15, 25, -25)

Rezolvare aplicația 1.4a și 1.4b:

Punctul A(a, a') este situat pe primul plan bisector dacă are depărtarea egală cu cota, deci proiecțiile a și a' sunt echidistante față de linia de pământ, ambele sunt pozitive (fig. 1.4a), dacă A∊D_I și A∊[B_I]

Punctul C(c, c') este situat în planul bisector trei dacă are depărtarea egală cu cota, adică dacă proiecțiile c și c' sunt echidistante față de linia de pământ, ambele fiind negative.

Punctul B(b, b') este situat pe cel de-al doilea plan bisector dacă are în valoare absolută depărtarea egală cu cota, depărtarea fiind negativă, iar cota pozitivă în [B_{II}]. Cele două proiecții b și b' coincid în epură deasupra liniei de pământ (fig. 1.4a).

Punctul D(d, d') este situat în planul bisector [B_{IV}] dacă are în valoare absolută depărtarea egală cu cota, depărtarea fiind pozitivă, iar cota negativă. Cele două proiecții d și d' coincid în epură sub linia de pământ.

Observație: Figura 1.4b este reprezentată în spațiu, iar figura 1.4a este reprezentată în epură.

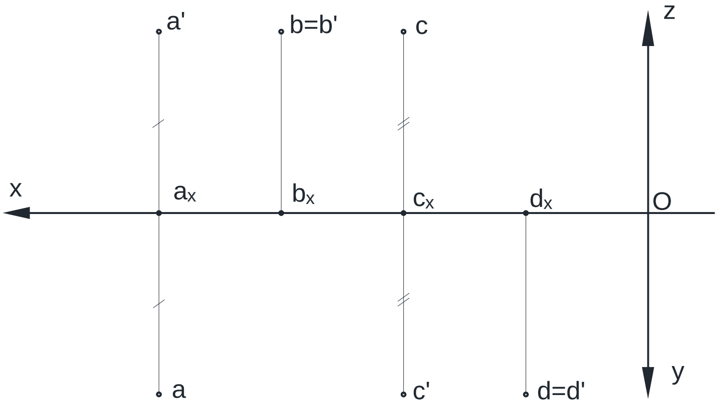


Fig. 1.4a Rezolvare aplicația 1.4a (în epură)

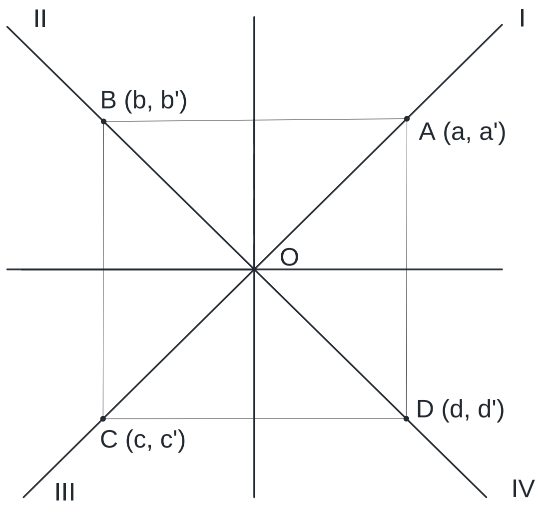


Fig. 1.4b Rezolvare aplicația 1.4b (în spațiu)

1.5. Să se determine pozițiile pe care le ocupă în spațiu, față de planele bisectoare, punctele: A(0, 45, 25), B(30, 30, 65), C(-20, -50, 25), D(55, -25, -55). Să se construiască epurele acestor puncte.

Rezolvare aplicația 1.5:

Punctul A este situat în diedrul I sub primul plan bisector. Punctul B este situat în diedrul I deasupra primului plan bisector. Punctul C este situat în diedrul II sub planul bisector. [B_{II}] Punctul D este situat în diedrul III sub planul bisector [B_{III}].

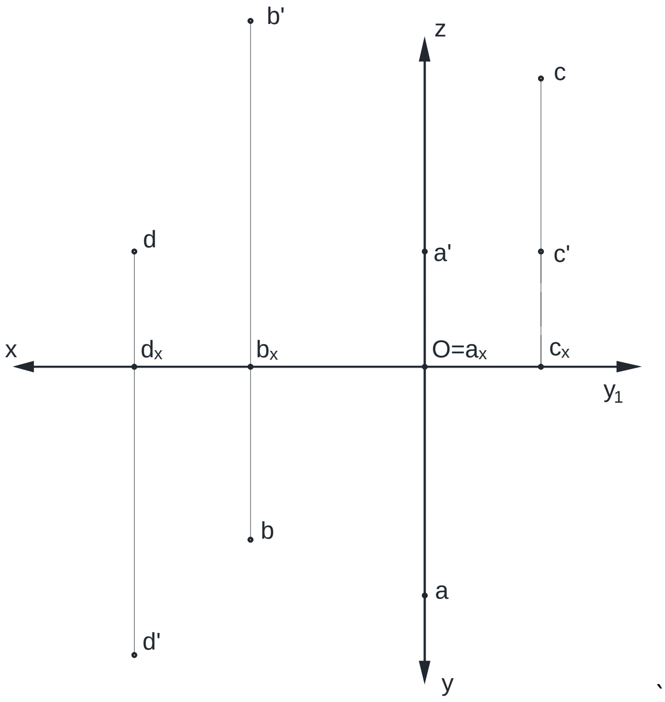


Fig. 1.5. Rezolvare aplicația 1.5

1.6. Să se citească din epura de mai jos (figura 1.6]n dublă proiecție ortogonală) pozițiile punctelor în spațiu față de planele de proiecție și față de planele bisectoare (alfabetul descriptiv al punctului).

Rezolvare aplicația 1.6:

- Punctul A(a, a') este situat pe linia de pământ (ambele proiecții coincid pe linia de pământ, cota și depărtarea fiind 0);

- Punctul B(b, b') este situat în planul orizontal (proiecția b' se găsește pe linia de pământ, deci cota este nulă, iar depărtarea este pozitivă);

- Punctul C(c, c') este situat în diedrul I sub primul plan bisector (depărtarea este mai mare decât cota, ambele fiind pozitive);

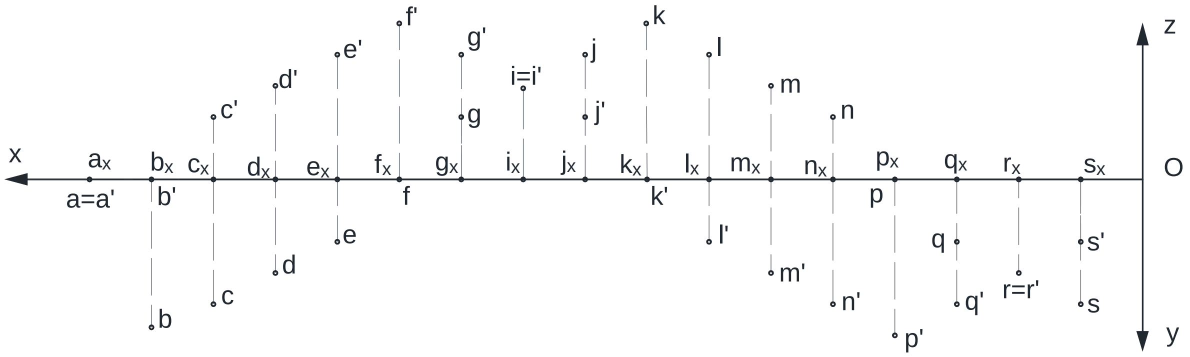


Fig. 1.6. Rezolvare aplicația 1.6

- Punctul D(d, d') este situat în diedrul I în [B_I] (depărtarea este pozitivă și este egală cu cota, care de asemenea este pozitivă);

- Punctul E(e,e') este situat în diedrul I deasupra primului plan bisector (depărtarea este mai mică decât cota, ambele fiind pozitive);

- Punctul F(f,f') este situat în planul vertical (proiecția orizontală f este pe linia de pământ, deci depărtarea este 0, iar cota este pozitivă);

- Punctul G(g,g') este situat în diedrul II deasupra planului [B_{II}] (cota este pozitivă și este mai mare în valoare absolută decât depărtarea, care este negativă);

- Punctul I(i,i') este situat în diedrul II, în planul [B_{II}] (ambele proiecții coincid și se află deasupra liniei de pământ);

- Punctul J(j,j') este situat în diedrul II, sub planul [B_{II}] (cota este pozitivă și este mai mică în valoare absolută decât depărtarea, care este negativă);

- Punctul K(k,k') este situat în planul orizontal (proiecția verticală k' este pe linia de pământ, deci cota este 0, iar depărtarea este negativă);
- Punctul L(l,l') este situat în diedrul III deasupra planului [B_{III}] (ambele proiecții sunt negative, iar depărtarea este mai mare în valoare absolută decât cota);

- Punctul M(m,m') este situat în diedrul III în planul în planul bisector trei (depărtarea este negativă și este egală cu cota, care de asemenea este negativă);

- Punctul N(n,n') este situat în diedrul III sub [B_{III}] (ambele proiecții sunt negative, iar depărtarea este mai mică în valoare absolută decât cota);

- Punctul P(p,p') este situat în planul vertical (proiecția orizontală p este pe linia de pământ, deci depărtarea este 0, iar cota este negativă);

- Punctul Q(q, q') este situat în diedrul IV sub planul [B_{IV}] (depărtarea este pozitivă și este mai mica în valoare absolută decât cota care este negativă);

- Punctul R(r,r') este situat în diedrul IV în planul [B_{IV}] (ambele proiecții coincid sub linia de pământ);

- Punctul S(s, s') este situat în diedrul IV deasupra planului [B_{IV}] (depărtarea este pozitivă și este mai mare în valoare absolută decât cota, care este negativă).

1.7. Să se reprezinte în epură (dublă proiecție ortogonală) următoarele puncte și să se specifice diedrele în care acestea se situează:
A(125, 50, 45); B(50, -20, 35); C(80, 15, -40); D(25, 0, 40); E(115, 0, 0)

Rezolvare aplicația 1.7

Diedrele în care se află punctele se stabilesc în funcție de semnul coordonatelor astfel:
Punctul A având semnul pozitiv pentru toate coordonatele acesta se află în diedrul I; punctul B are abscisa pozitivă și depărtarea negativă, acesta se află în diedrul II; punctul C are cota negativă și depărtarea pozitivă, acesta se află în diedrul IV; punctul D are depărtarea egală cu zero, punctul aparține planului vertical [V]; punctul E are depărtarea și cota egale cu zero, astfel acesta aparține axei Ox;

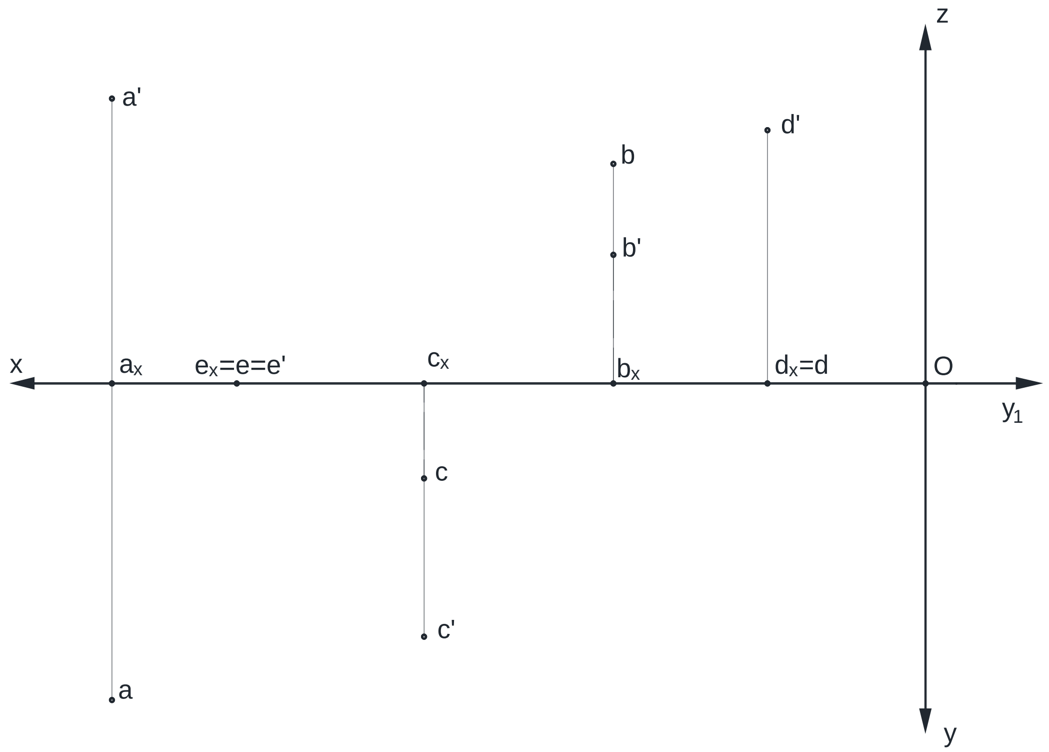


Fig. 1.7. Rezolvare aplicația 1.7

1.8. Să se reprezinte în epură (triplă proiecție ortogonală) următoarele puncte și să se specifice triedrele în care acestea de situează:
A(95, 55, 40); B(70, -20, -35); C(50, 25, 0); D(35, -10, 10)

Rezolvare aplicația 1.8.

- Punctul A are semnul coorodonatelor pozitive, acest punct se află în T_I;
- Punctul B are abscisa pozitivă, depărtarea și cota negativă, acest punct se află în T_{III};
- Punctul C are cota egală cu zero și depărtarea pozitivă, acest punct se află în planul orizontal [H];
- Punctul D are depărtarea și cota egale în modul dar de semn contrar, acest punct aparține planului bisector [B_{II}].

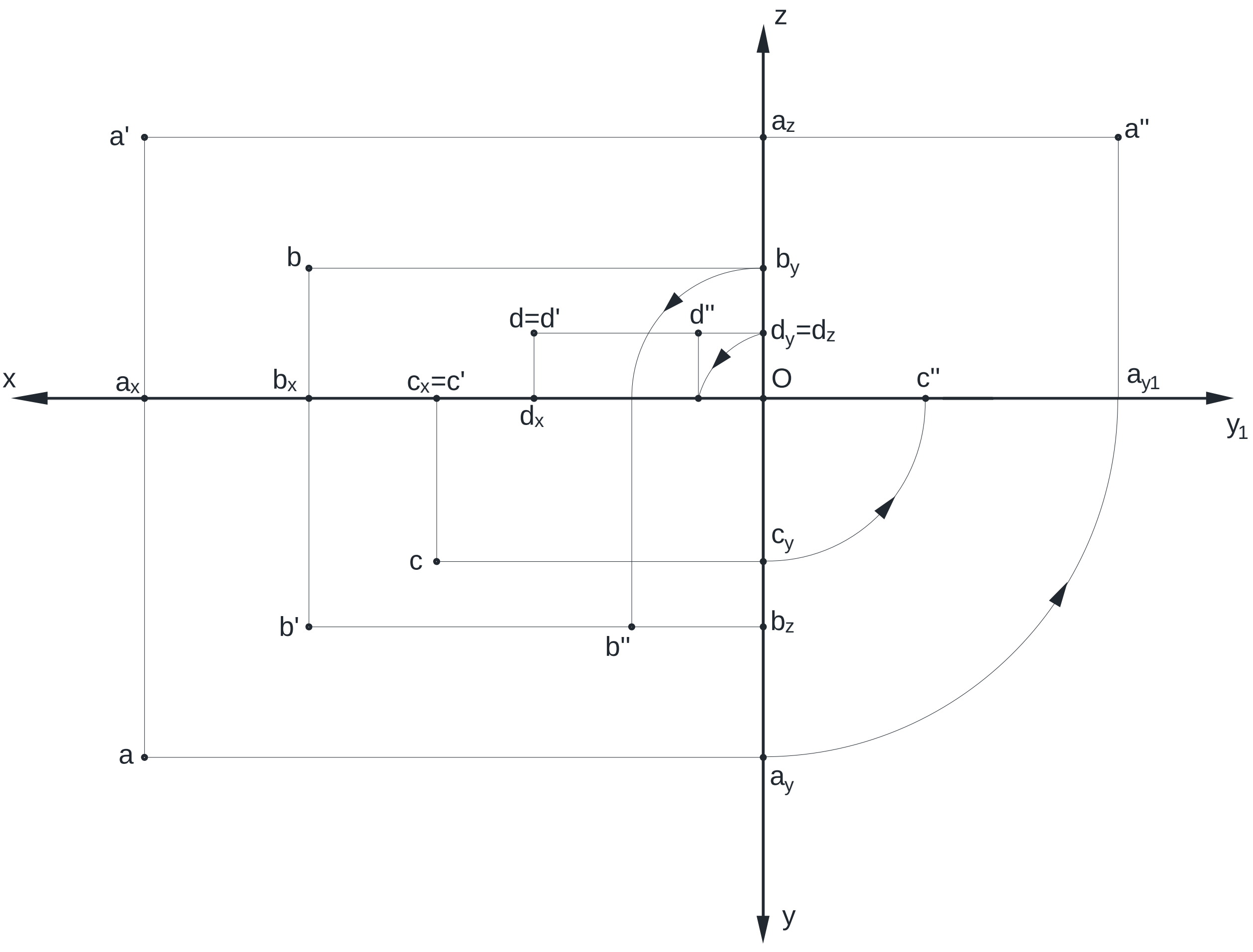


Fig. 1.8. Rezolvare aplicația 1.8

1.9. Să se reprezinte proiecțiile triunghiului [ABC], știind că vârful A se situează în diedrul II, vârful B se găsește în planul bisector [B_{II}] și vârful C aparține planului [H]. Precizați coordonatele alese pentru fiecare punct. Se va lucra în triplă proiecție ortogonală.

Rezolvare aplicația 1.9.

Se aleg coordonatele pentru cele trei puncte, A, B și C cu respectarea indicațiilor din datele problemei date de apartenența fiecărui punct.
A(70, -30, 40) є [D_{II}],

B(35, -15, 15) є [B_{II}],

C(50, 20, 0) є [H].

Unind proiecțiile de același nume ale acestor puncte se obțin proiecțiile abc, a'b'c' și a''b''c'' ale triunghiului ABC.

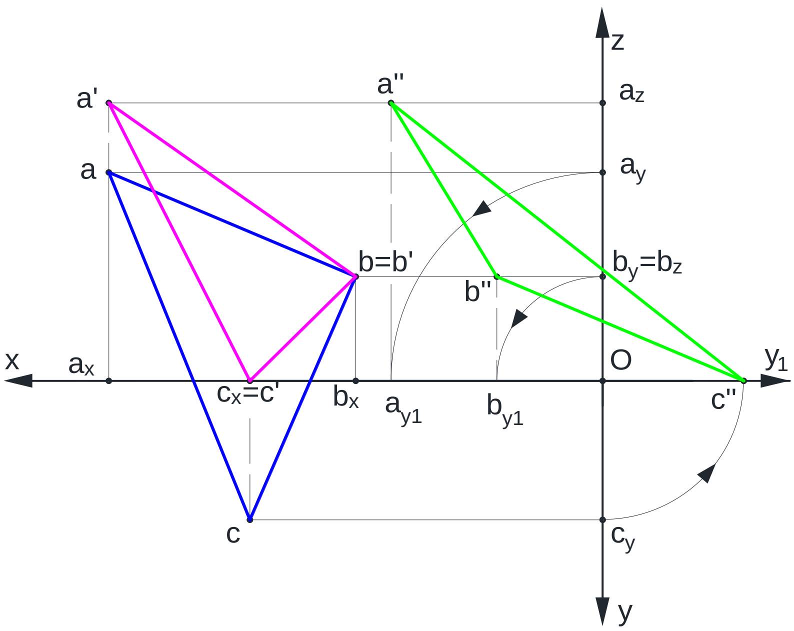


Fig. 1.9. Rezolvare aplicația 1.9

1.10. Să se construiască epura punctului M situat în primul plan bisector la o distanță de 25 mm față de linia de pământ și la 15 mm față de planul lateral de proiecție.

Rezolvare aplicația 1.10.

Din ultima condiție a enunțului rezultă că punctul M are abscisa m_x = 15 mm. Locul geometric al punctelor M de abscisă m_x, situate la distanța de 25 mm față de axa Ox este un cerc cu această rază, cerc situat într-un plan de profil.

Acest cerc se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral de proiecție. Intersecția dintre acest cerc și primul plan bisector este punctul M căutat. Se obține astfel prima dată proiecția laterală m'', apoi proiecțiile m și m'.

Observație: Cota este egală cu depărtarea, punctul M(15, 25, 25)

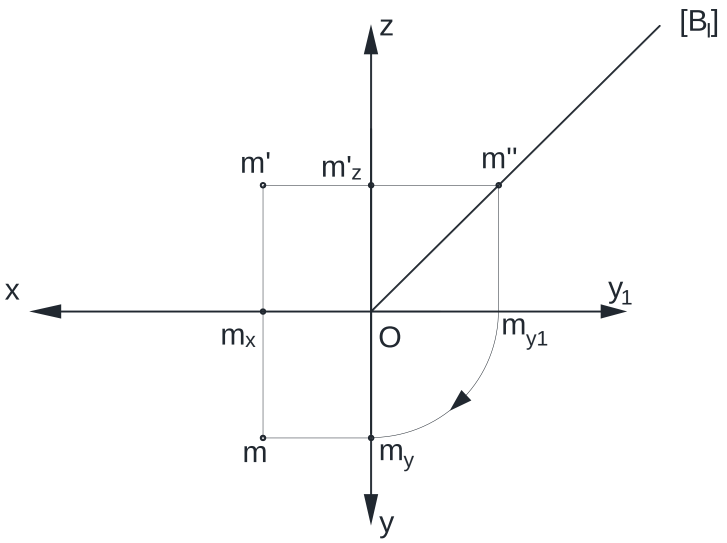


Fig. 1.10. Rezolvare aplicația 1.10

1.11. Se cunosc: proiecția verticală *m'* și proiecția laterală *m''*, ale unui punct M, dispuse ca în figura 1.11. Să se determine proiecția orizontală *m* a punctului M.

Rezolvare aplicația 1.11:

Punctul M este situat în triedrul opt. Din paralela trasată prin m' și m'' la Ox rezultă mz pe Oy, iar paralela dusă prin proiecția laterală m'' la Oy determină m_{y1}, pe O_{y1}.

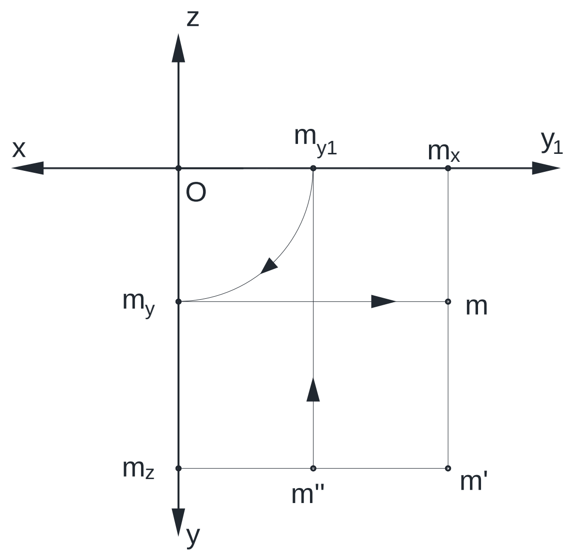


Fig. 1.11. Determinarea proiecției pentru un punct din triedrul opt

Se trasează m_{y1} în m_y și paralela trasată la xO_{y1} prin m_y rezultă proiecția orizontală m la intersecția cu linia de ordine a punctului M.

Astfel, se parcurge calea inversă care conduce la proiecția laterală a unui punct situat în triedrul opt.

1.12. Se dă punctul M(40, -20, 50). Se cere reprezentarea triplei proiecții ortogonale a punctului M precum și a următoarelor puncte:
A – simetricul lui M față de planul [H]
B – simetricul lui M față de planul [V]
C – simetricul lui M față de planul [L]

Rezolvare aplicația 1.12

Pentru a reprezenta punctele A, B şi C (care sunt simetricele punctului M faţă de cele trei plane de proiecţie) este necesar să se determine care sunt coordonatele celor trei puncte, iar apoi să se reprezinte în triplă proiecţie ortogonală, astfel: A(40, -20, -50), B(40, 20, 50), C(-40, -20, 50)

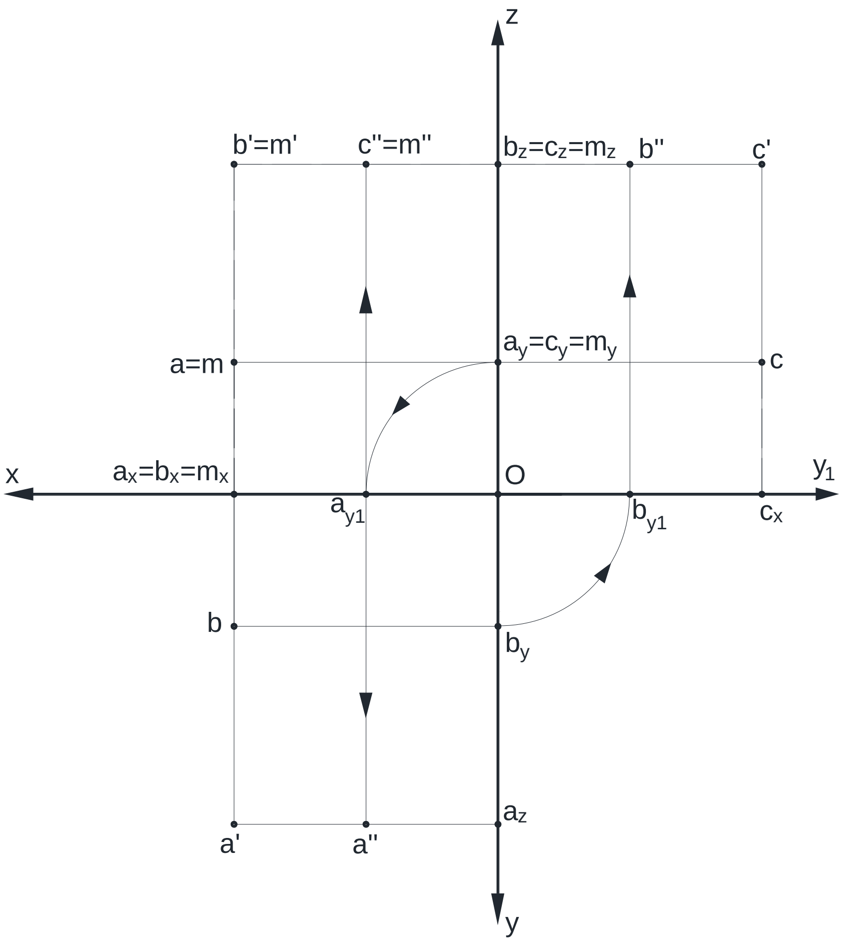
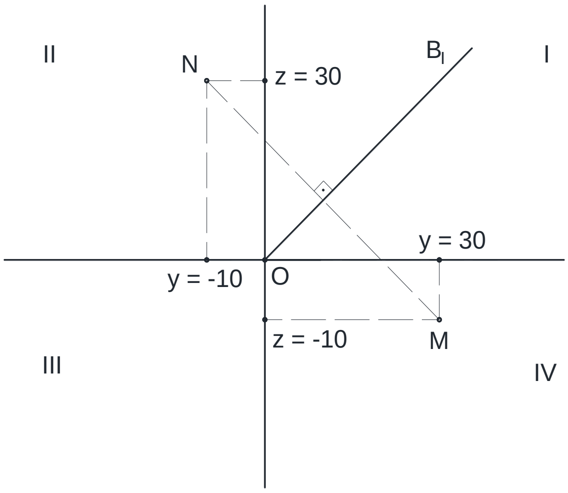


Fig. 1.12. Rezolvare aplicația 1.12

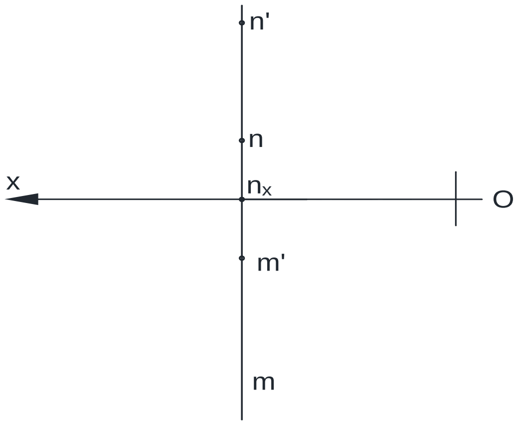
1.13. Să se determine proiecțiile punctului M(m, m'), simetric față de primul plan bisector cu punctul N(nx, -10, 30).

Rezolvare aplicația 1.13 a,b,c

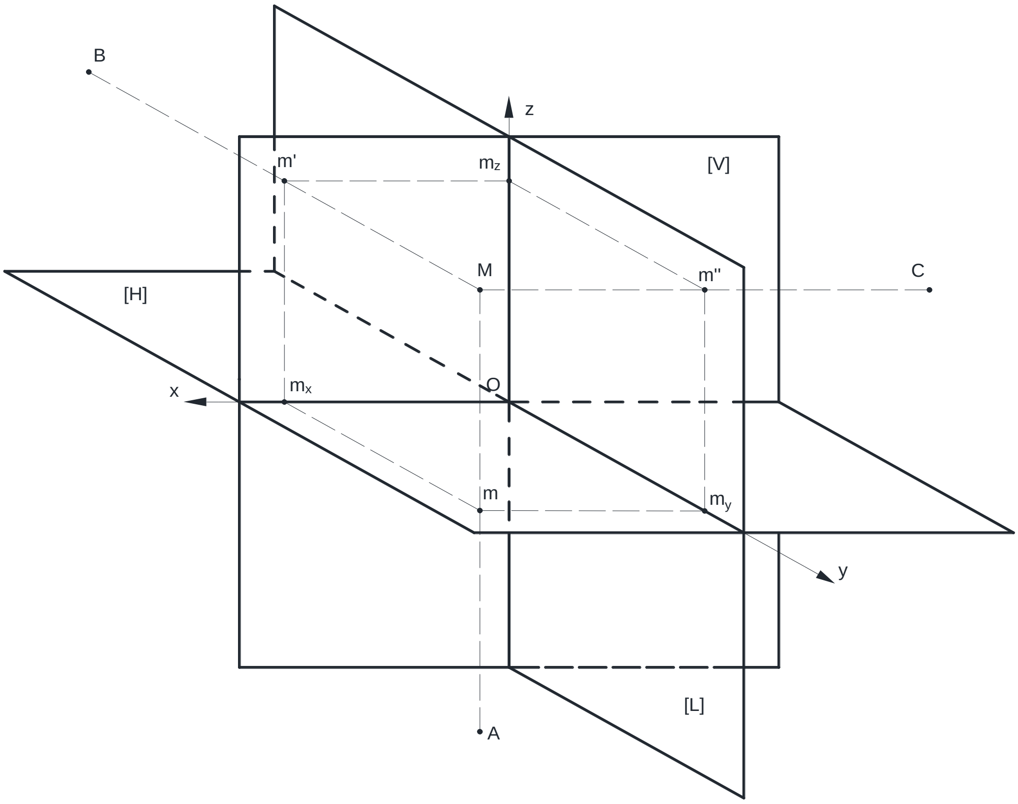
Se reprezintă proiecțiile punctului N(nx, -10, 30) și se contată că acest punct este situat în diedrul al doilea. Deoarece în simetria față de primul plan bisector depărtările se transformă în cote și reciproc, punctul M va avea coordonatele M(mx, 30, -10).



a)



b)



c)

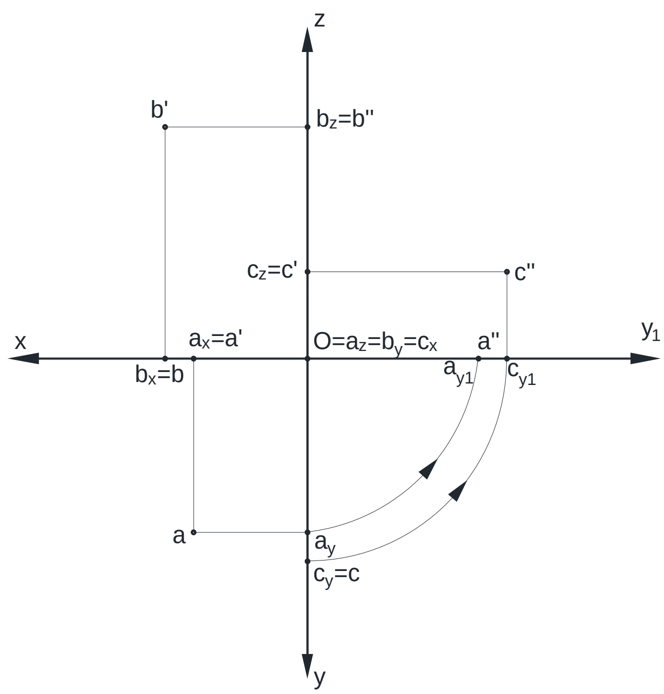
Fig. 1.13. Simetria punctului A față de planele de proiecție

Punctul M se află în diedrul al patrulea și se reprezintă în epură ca și în figura 1.13 a (în spațiu), iar în figura 1.13b s-a trasat epura punctului N și M. Pentru a înțelege mai bine noțiunea de simetrie a punctelor s-a reprezentat în figura 1.13 c (în spațiu) simetria unui punct M în spațiu față de planele de proiecție [H], [V] și [L].

1.14. Să se reprezinte în epură proiecțiile punctelor A, B si C, puncte care aparțin planelor de proiecție [H], [V], [L].

Rezolvare aplicația 1.14

Se dau coordonate pentru punctele A, B și C astfel: A∈[H] și are coordonatele A(20, 30, 0), B∈[V] și are coordonatele B(25, 0, 40), C∈[L] și are coordonatele C(0, 35, 15)



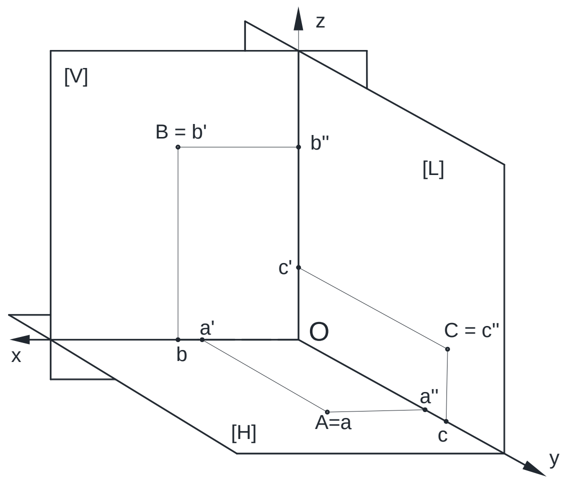


Fig. 1.14 Rezolvare aplicația 1.14

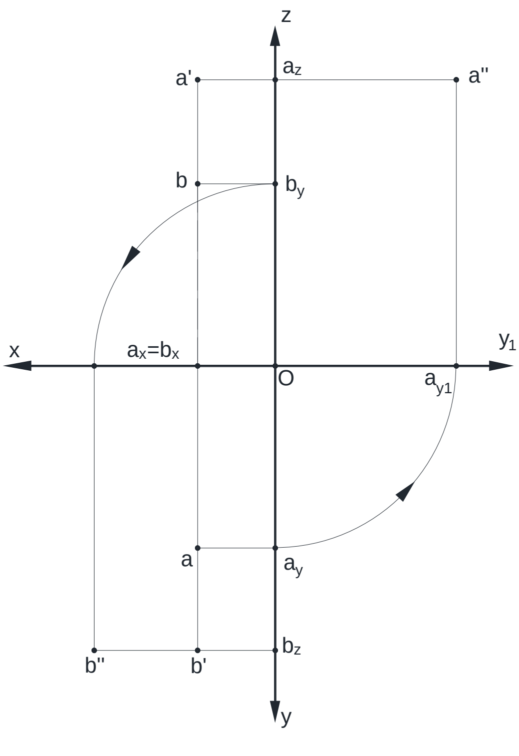
Punctele conținute în planele de proiecție [H], [V] și respectiv [L] au proiecția pe planul în care se află confundată cu punctul însuși, iar celelalte două proiecții, situate pe axele de proiecție. Astfel, pentru punctul A din planul orizontal [H], a = A, a' є Ox, a'' є Oy; punctul B situat în planul vertical [V], are b' = B, b є Ox, b'' є Oz, iar, punctul C aflat în planul lateral [L], are proiecțiile c'' = C, c є Oy, c' є Oz.

1.15. Să se reprezinte punctul A(15, 35, 55) în triplă proiecție ortogonală și să se precizeze în ce triedru se află acesta. Să se scrie coordonatele și să se reprezinte punctele B, C și D care sunt simetricele punctului A față de axele de proiecție. Să se precizeze în ce triedru se află punctele B, C și D.

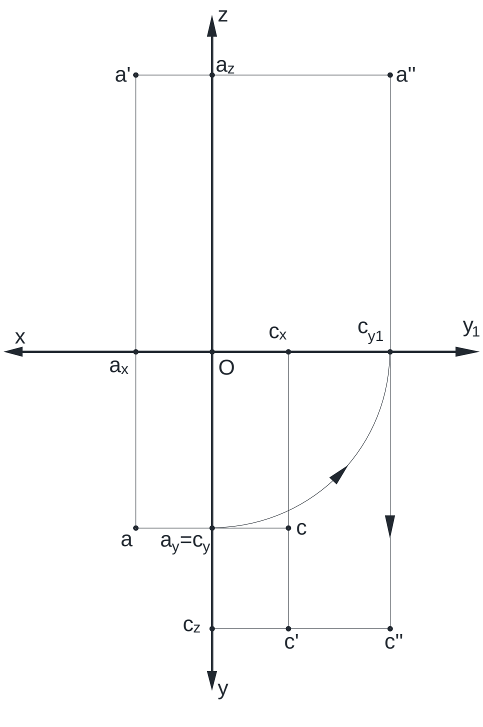
Rezolvare aplicația 1.15.

Dacă facem referire la simetricul unui punct față de planele de proiecție știm că se schimbă semnul unei singure coordonate (în funcție de planul față de care se dorește să fie simetric). Pentru simetricul unui punct față de axele de proiecție se schimbă semnul la două dintre coordonatele punctului (desigur în funcție de axa față de care se stabilește simetria). Dacă punctul va fi simetric față de origine atunci se schimbă semnul pentru toate cele trei coordonate.

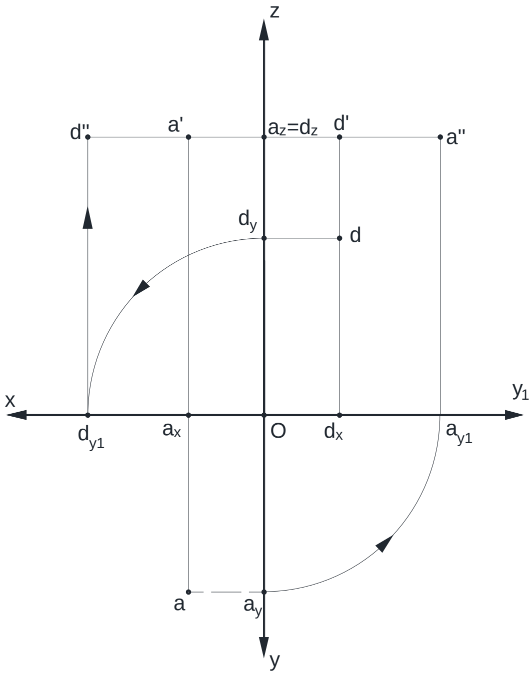
Coordonatele sunt următoarele: Punctul B simetric față de axa Ox are coordonatele B(15, -35, -55); punctul C simetric față de axa Oy are coordonatele C(-15, 35, -55); punctul D simetric față de axa Oz are coordonatele D(-15, -35, 55); punctul A є T_I, punctul B є T_{III}, punctul C є GT_{VIII}, punctul D є T_{VI}.



a)



b)



c)

Fig. 1.15 Rezolvare aplicația 1.15

1.16. Să se reprezinte pe cele trei plane de proiecţie [H], [V] şi [L], proiecţiile triunghiului [ABC] ale cărui vârfuri îndeplinesc următoarele condiţii: A∈[B$_I$], B∈[H] şi C∈[V].

Rezolvare aplicația 1.16

Coordonatele punctelor A, B şi C se aleg astfel încât să fie respectate condiţiile impuse în enunţul problemei. În cazul de faţă sunt propuse următoarele coordonate: A(6, 34, 34)∈[B$_I$], B(32, 22, 0)∈[H] şi C(16, 0, 12)∈[V].

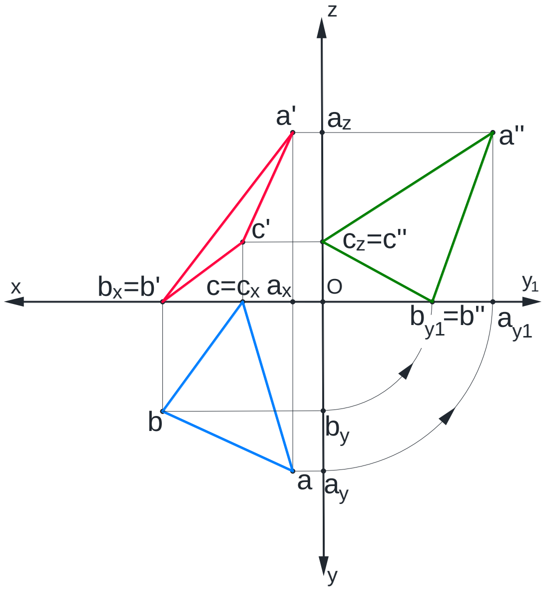


Fig. 1.16 Rezolvare aplicația 1.16

Probleme propuse

1.17. Să se construiască epura punctului de abscisă 30 mm situat la o distanță de 25 mm față de planele de proiecție vertical și orizontal.

1.18. Să se găsească proiecțiile unui punct situat în planul bisector [B_I] la o distanță de 32 mm față de axa Ox și la 20 mm față de planul lateral de proiecție.

1.19. Se dă punctul A(14, 19, 21). Să se construiască simetricul lui în raport cu planul orizontal de proiecție, în raport cu planul vertical de proiecție și în raport cu axa Ox.

1.20. Se dă punctul C(20, 25, 35). Să se găsească simetricul lui în raport cu planele bisectoare [B_I] și [B_{II}] și apoi să se scrie coordonatele punctelor găsite.

1.21. Se dă punctul A în diedrul II. Să se construiască simetricul acestuia față de planele bisectoare [B_I] și [B_{II}]. Scrieți coordonatele punctelor găsite.

1.22. Să se construiască epura punctelor M(18, 25, -14); N(0, -15, 40); P(10, 35, 45); R(35, 45, -10); S(-15, 0, -20) și să se precizeze care este poziția lor în spațiu.

1.23. Se dă punctul A(26, 30, 46). Să se arate care sunt coordonatele punctului A_1, care este proiecția punctului A pe planul bisector [B_{I-III}] și să se reprezinte în epură punctele A și A_1. Deasemenea să se reprezinte punctul A_2, care este proiecția punctului A pe al doilea plan bisector.

1.24. Cum sunt poziționate în spațiu punctele A și B, știind că în epură proiecțiile lor de nume contrar coincid (cota este egală cu depărtarea). Dați coordonate și reprezentați în epură punctele A și B.

1.25. Se dă punctul A(30, 20, 15) și proiecția verticală a punctului B(15, by, 5). În ce diedru se găsește punctul B, dacă distanța dintre proiecțiile orizontale *a* și *b* este de 30 mm.

1.26. Să se reprezinte în epură punctul A care se găsește în T_{III}, și punctul B care se găsește în T_{VII}. Să se scrie coordonatele punctelor A și B.

1.27. Să se reprezinte în epură punctele A, B și C în triplă proiecție ortogonală, știind că punctul A este situat în T_{III}, punctul B este situat în T_V și punctul C este situat în T_{VII}. Să se scrie coordonatele celor trei puncte.

1.28. Să se reprezinte în epură un punct A situat în T_{II}. Fiind date proiecțiile a și a', să se găsească proiecția pe planul lateral a''. Scrieți coordonatele punctului A.

1.29. Să se reprezinte în epură un punct D situat în T_{VII}, a cărui proiecție d și d'' se cunosc și să se găsească proiecția d'. Scrieți coordonatele punctului D.

1.30. Să se găsească proiecția orizontală a punctului A dat în figura 1.17 , prin proiecțiile a' și a'' confundate în epură.

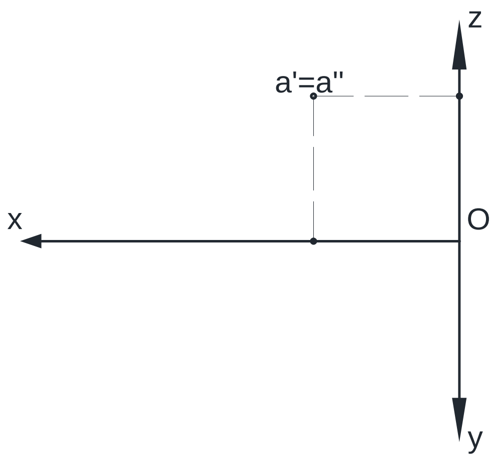


Fig. 1.17. Determinarea proiecțiilor punctului A pentru problema 1.17

1.31. Știind că cele trei proiecții ale punctului A se confundă în epură să se precizeze ce poziție ocupă punctul în raport cu planele de proiecție și cu planele bisectoare.

1.32. Se dă punctul A(-30, -10, -15). Să se reprezinte în epură punctele B_1, B_2 simetrice ale punctului A în raport cu planele de proiecție [H], [V] și [L].

1.33. Se dă punctul B(20, -35, -40). Să se reprezinte în epură punctele C, C_1, C_2, simetrice ale punctului B în raport cu axele de proiecție Ox, Oy, Oz.

1.34. Să se reprezinte în epură punctul a cărui distanță la axa Ox este l_x = 20 mm, la axa Oz este l_z = 30 mm și distanța la planul [H], este de 15 mm. Care este poziția punctului în spațiu?

1.35. Se dau punctele: A(60, 15, 30); B(45, -15, 35); C(30, 10, -25); D(20, 0, 20) şi E(5, 0, 0). Se cere să se reprezinte epura acestor puncte în triplă proiecție ortogonală.

1.36. Se dau punctele: A(40, 15, 20); B(25, -30, 25); C(20, -15, -30) şi D(50, 10, -25). Se cere să se reprezinte proiecţiile punctelor pe cele trei plane de proiecţie [H]**,** [V] şi [L]**.**

1.37. Se dau punctele: A(-40, 15, 0); B(-30, -20, 0); C(-20, -25, -30); E(-10, 0, -25). Se cere să se reprezinte proiecţiile punctelor pe cele trei plane de proiecţie [H]**,** [V] şi [L]**.**

1.38. Se dau punctele: A(15, 15, 0); B(20, 0, 20); C(0, 30 30). Se cere să se reprezinte proiecţiile punctelor pe cele trei plane de proiecţie [H]**,** [V] şi [L]**.**

1.39. Se dau punctele: E(15, -20, 0), F(-30, 0, -50) şi G(0, -35, -40). Se cere reprezentarea punctelor pe cele trei plane de proiecţie.

1.40. Se dau punctele: A(40, 0, 0); B(0, -20, 0) şi C(0, 0, -35). Se cere reprezentarea punctelor pe planele [H]**,** [V] şi [L]**.**

1.41. Se consideră punctele necoliniare: A(35, 35, 50), B(20, 5, 30), C(10, 25, 40), vârfuri ale unui triunghi situat în triedrul T_1. Se cere să se reprezinte proiecţiile triunghiului ABC pe cele trei plane de proiecţie.

1.42. Să se reprezinte pe cele trei plane de proiecţie [H]**,** [V] şi [L], proiecţiile triunghiului **ABC** ale cărui vârfuri îndeplinesc următoarele condiţii: A∈[B_{VI}], B∈[H] şi C∈[Oz].

1.43. Se dau punctele: A(10, 20, az); B(-10, -by, 15); C(30, -10, -cz) şi D(-30, dy, -25). Ştiind că punctele sunt conţinute în planele bisectoare se cere să se reprezinte proiecţiile punctelor A, B, C şi D pe planele de proiecţie [H], [V] şi [L].

1.44. Să se reprezinte a treia proiecție a triunghiului *ABC* dat în proiecție orizontală și verticală conform figurii 1.18.

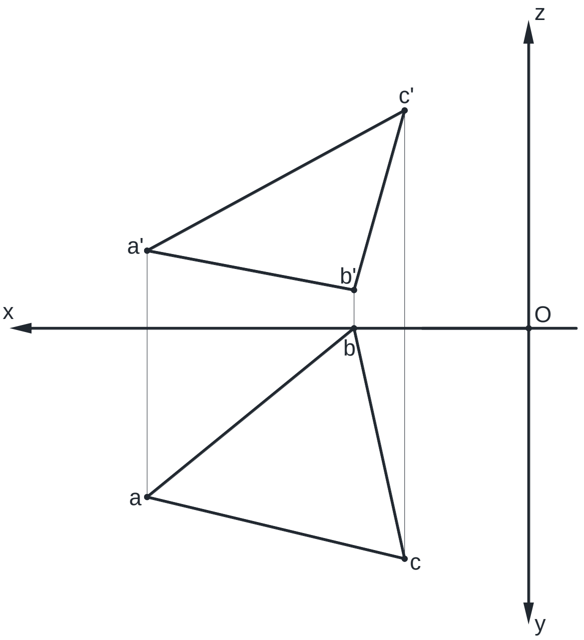


Fig. 1.18. Proiecțiile triunghiului ABC pe planele [H] și [V]

1.45. Să se atribuie coordonate și să se construiască epura în trei proiecții pentru:
- un punct A situat în triedrul V;
- un punct B situat în semiplanul orizontal posterior [H];
- un punct C situat în planul lateral, triedrul IV;
- un punct D situat în planul bisector [B_{III}].

1.46. Se dau punctele A(30, 20, az); B(20, by, -30); C(50, -cy, -20) situate în planele bisectoare. Să se determine valorile depărtărilor *y* și cotei *z* și să se construiască epura acestor puncte.

1.47. Să se construiască în triplă proiecție ortogonală triunghiul ABC (punctele A, B, C fiind situate în T_I) care are câte un vârf conținut în fiecare din cele trei plane de proiecție.

1.48. Să se construiască proiecțiile triunghiului ABC care are un vârf situat în planul orizontal anterior [H], T_I, iar celelalte două vârfuri în planul vertical, T_{VIII}. Precizați coordonatele acestor puncte.

1.49. Să se reprezinte în epură punctul A_1(a, a', a''), simetricul punctului A(15, 20, 30) față de planul vertical de proiecție, și punctul A_2(a_2, a_2', a_2''), simetricul punctului A față de planul orizontal de proiecție.

1.50. Să se reprezinte în epură, în triplă proiecție ortogonală punctele A(30, -20, 30); B(-20, 20, 25); C(-30, -15, -25); D(-20, 25, -35); E(8, 20, 35); F(16, 0, 20); G(45, 30, 0).

1.51. Se dă punctul M(45, 20, 55). Se cere reprezentarea triplei proiecţii ortogonale a punctului M precum şi a următoarelor puncte:
• M1, simetricul punctului M faţă de planul [H];
• M2, simetricul punctului M faţă de planul [V];
• M3, simetricul punctului M faţă de planul [L].

1.52. Se dă punctul S(30, 20, 53). Se cere să se reprezinte tripla proiecţie ortogonală a punctului S şi a următoarelor puncte:
• S_1, simetricul punctului S în raport cu planul bisector [B_{I-III}];
• S_2, simetricul punctului S în raport cu planul bisector [B_{II-IV}].

1.53. Se consideră punctul S(-35, -25, -12). Se cere să se reprezinte epura punctului P, precum şi a simetricelor: P_1, în raport cu planul [B_{I-II}] și P_2, în raport cu planul [B_{II-IV}].

1.54. Să se reprezinte în epură punctul A(15, 20, 15) și simetricele sale A_1 și A_2 față de planele de proiecție [H] și [V]. Să se specifice diedrele în care sunt conținute aceste puncte.

1.55. Să se reprezinte în epură punctul B(10, 20, 15) și simetricul său B_0 față de axa Ox. Să se specifice diedrele în care sunt conținute aceste puncte.

1.56. Să se reprezinte în epură punctul P(15, 30, 5) și punctele P_1 și P_2 care reprezintă proiecțiile sale pe planele bisectoare [B_I] și [B_{II}].

1.57. Să se reprezinte în epură, punctul M(30, -10, 30) și simetricele sale față de cele trei plane de proiecție.

1.58. Se dă punctul A(45, -30, 20). Să se reprezinte în epură proiecțiile A_1 și A_2 ale punctului A pe planele bisectoare, A_3 simetricul lui A_1 față de planul [H] și A_4 simetricul lui A_2 față de planul [V].

1.59. Se dă punctul B(30, -25, -70). Să se reprezinte:

a) Simetricele sale A_1, A_2, A_3 față de planele de proiecție;
b) Simetricele sale A_4, A_5 față de planele bisectoare;
c) Simetricul său A_6 față de originea O;

Să se specifice pentru toate punctele date din ce diedre fac parte.

1.60. Să se reprezinte în epură punctul N situat în T_{II}, punctul R situat în T_{VII}, punctul S situat în T_{III} și simetricele acestor puncte față de originea O. Să se scrie coordonatele punctelor găsite.

1.61. Se dau punctele A(50, 15, 35); B(45, -20, 30); C(35, 15, -30); D(20, 0, 0) și E(5, -5, 0). Să se reprezinte epura acestor puncte.

1.62. Se dau punctele: A(40, 0, 0); B(0, -30, 0) și C(0, 0, -35) situate pe axele de coordonate. Se cere reprezentarea punctelor pe planele de proiecție.

1.63. Se consideră punctele necoliniare A(35, 35, 20); B(30, 10, 15); C(20, 30, 45), vârfuri ale unui triunghi situat în triedrul T_I. Se cere să se reprezinte proiecțiile triunghiului ABC pe cele trei plane de proiecție.

1.64. Să se reprezinte pe cele trei plane de proiecție [H], [V] și [L], proiecțiile triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt situate astfel: A϶[H]; B϶Oz; C϶[B_{III}].

1.65. Se dă punctul D(20, 10, 35). Se cere să se reprezinte pe cele trei plane de proiecție a punctului D și a următoarelor puncte:

- D_1, simetricul punctului D în raport cu planul bisector [B_{I-III}];
- D_2, simetricul punctului D în raport cu planul bisector [B_{II-IV}].

1.66. Se consideră punctul R(-30, 30, -25). Se cere să se reprezinte epura punctului R precum și a simetricelor:

- R_1, în raport cu planul [H];
- R_2, în raport cu planul [V];
- R_3, în raport cu planul [L].

1.67. Se consideră punctul E(-50, -30, -40). Se cere să se reprezinte epura punctului E, precum și a simetricelor:

- E_1, în raport cu planul [B_{I-III}];
- E_2, în raport cu planul [B_{II-IV}].

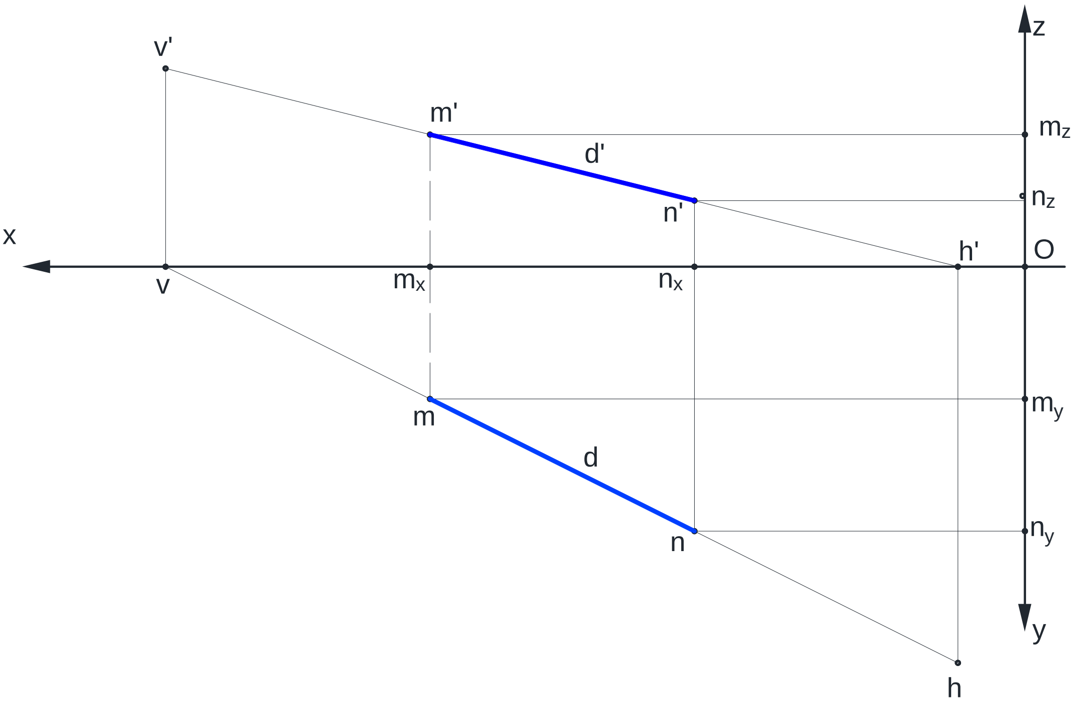
CAPITOLUL II

REPREZENTAREA DREAPTEI. POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ DREPTE

2.1. Să se construiască urmele verticale și orizontale ale dreptelor definite de punctele a) M(90, 20, 20) și N(50, 40, 10); b) S(40, 10, 20) și T(90, 30, -40)

Rezolvare aplicația 2.1.

Urmele unei drepte sunt punctele în care aceasta intersectează planele de proiecție. Urma orizontală h' reprezintă urma orizontală a proiecției verticale d' și este un punct de cotă zero.

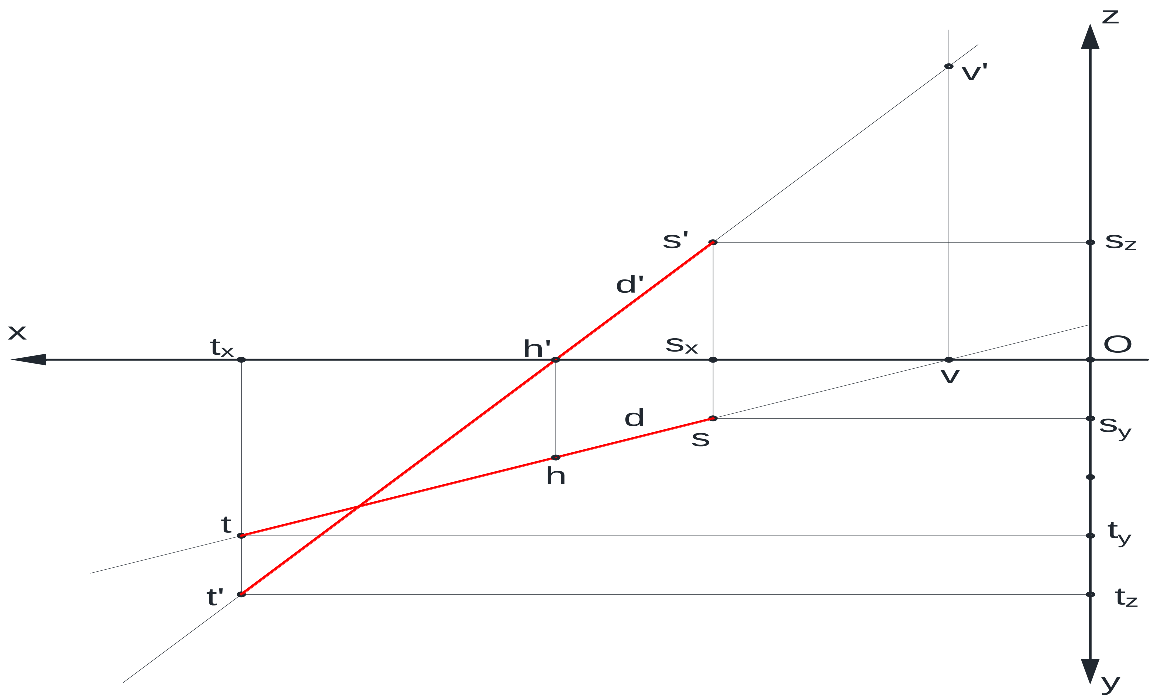


a)

Urma verticală v reprezintă punctul de intersecție a proiecției dreptei d cu linia de pământ. Acestă urmă v reprezintă urma verticală a proiecției orizontale d, punct de depărtare zero.

Pentru determinarea urmei orizontală H(h, h') a unei drepte, se prelungește proiecția verticală d' a dreptei până când intersectează linia de pământ. Se notează acest punct cu h' (punct de cotă zero).

Se notează proiecția orizontală a dreptei D(d, d') cu d în planul orizontal și cu d' se va nota proiecția verticală a dreptei în planul vertical. Perpendiculara sau linia de ordine dusă prin h' la linia de pământ se determină punctul h la intersecția cu proiecția orizontală d a dreptei.



b)

Fig. 2.1. Rezolvare aplicația 2.1

Punctul H(h, h') este urma orizontală a proiecției verticale a dreptei. Pentru a determina urma verticală V(v, v') a dreptei se prelungește proiecția orizontală d a dreptei până când întâlnește linia de pământ și se notează acest punct cu v. Linia de ordine dusă prin v intersectează proiecția verticală a dreptei d' în v', perpendicular pe Ox.

Urmele dreptei sunt punctele în care dreapta intersectează planele de proiecție.

Dreptele sunt infinite ca lungime, astfel ceea ce se reprezintă în epura problemei sunt doar segmente de dreaptă. Pentru intersecția acestor segmente cu planele de proiecție trebuie totdeauna ca acestea să fie prelungite pentru ca apoi să se noteze urmele h' și v.

2.2 Să se construiască urmele dreptei determinată de punctele A(90, 60, 5) și B(30, 10, 35). Să se specifice ce diedre străbate această dreaptă și să se găsească punctele de intersecție cu planele bisectoare [B_{I-III}] și [B_{II-IV}].

Rezolvare aplicația 2.2.

Urmele dreptei sunt urmele orizontale H(h, h',h''), verticale V(v, v', v'') și laterale L(l,l'. l''). Aceste urme rezultă din intersecția proiecției dreptei d și d' cu axele Ox, Oy și Oz.

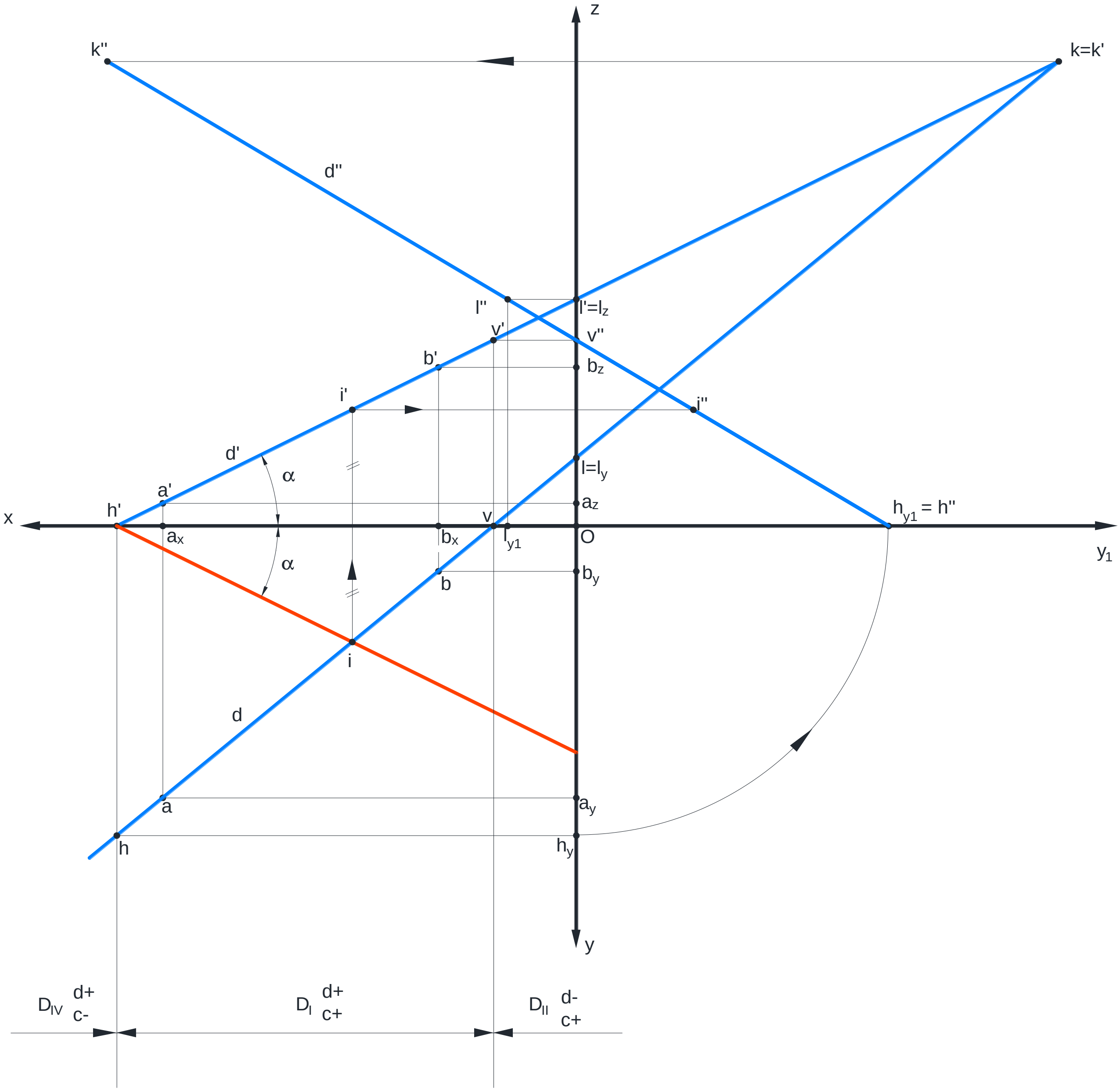


Fig. 2.2. Rezolvare aplicația 2.2

Urma orizontală h' se determină prelungind proiecția d' până la intersecția cu axa Ox. Cu ajutorul unei linii de ordine se va determina și urma orizontală h.

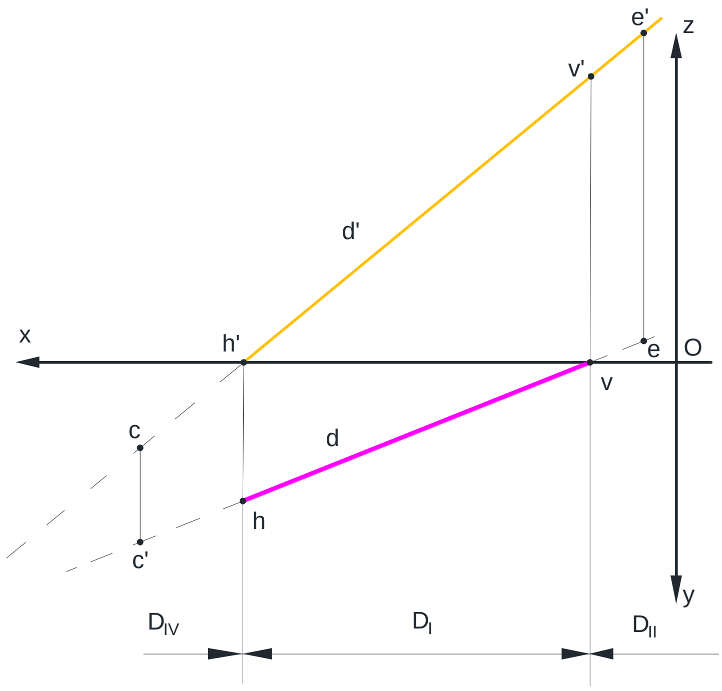
Urma verticală v (punct de depărtare 0) se va determina la intersecția proiecției d cu axa Ox (linia de pământ), iar cu ajutorul liniei de ordine se va determina și urma verticală v'. Proiecțiile l și l' se vor determina la intersecția proiecțiilor dreptei d și d' cu axa Oz.

Din urma orizontală a proiecției h' (punct de cotă 0) se trasează simetrica proiecției d' față de axa Ox. Punctul de intersecție a dreptei cu primul plan bisector este notat cu I(i, i', i''). Punctul de intersecție al dreptei cu planul bisector [B_{II}] se determină prelungind proiecțiile d și d' până cand acestea se intersectează, astfel rezultând punctul K(k',k'') cu k=k'. Prin h'' și v'' se trasează proiecția dreptei pe planul lateral d''. Diedrele pe care dreapta le străbate se determină astfel: se împarte dreapta în trei regiuni, astfel prima regiune este cuprinsă între urma orizontală și urma verticală. A doua regiune a dreptei se alege de la urma orizontală spre stînga, iar ultima regiune se alege de la urma verticală spre dreapta, sunt cazuri în care urma orizontală nu este în stânga și urma orizontală nu este în dreapta, există și varianta inversă, depinde de poziția proiecțiilor dreptei d și d'. Rezultă astfel trei segmente ale dreptei în proiecție oarecare care stăbate maxim trei diedre. Cu alte cuvinte prima regiune a dreptei se alege între urmele orizontală și verticală, iar celelalte două regiuni se aleg în exteriorul celor două urme (orizontală și verticală).

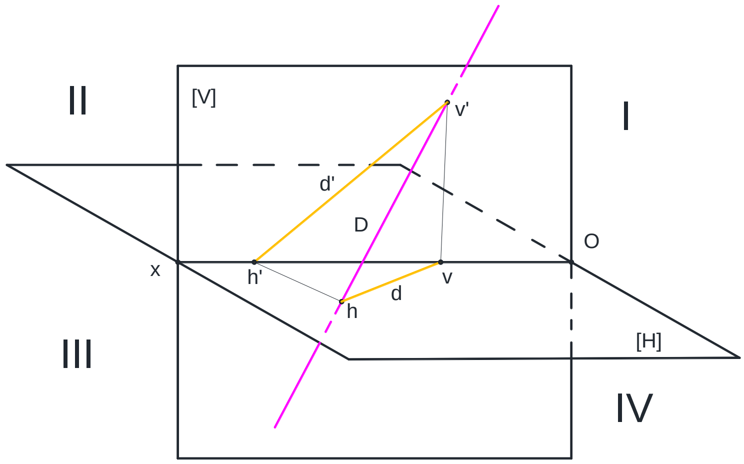
Pentru determinarea diedrelelor stăbătute de dreaptă se alege arbitrar câte un punct pe segmentul de dreaptă si se citește semnul depărtării și al cotei. Semnele celor două coordonate determină diedrul pe care dreapta îl străbate.

2.3 Să se construiască epura și reprezentarea în spațiu a unei drepte D(d, d') care are segmentul cuprins între urmele ei situat în primul diedru al planelor de proiecție.

Rezolvare aplicația 2.3 a) și b)



a) Rezolvare aplicația 2.3.în epură



b) Rezolvare aplicația 2.3. în spațiu

Fig. 2.3 Rezolvare aplicația 2.3

Se alege urma orizontală H(h, h') a dreptei pe planul orizontal anterior și urma verticală V(v, v') a dreptei pe planul vertical. Se constată ce dreapta D(d, d') străbate diedrele patru, unu și doi.

2.4 Să se construiască urmele dreptelor pe cele trei plane de proiecție (orizontal, vertical și lateral) drepte definite de punctele:

a) D(d, d', d''): M(60, 10, 40); N(30, 30, 10);

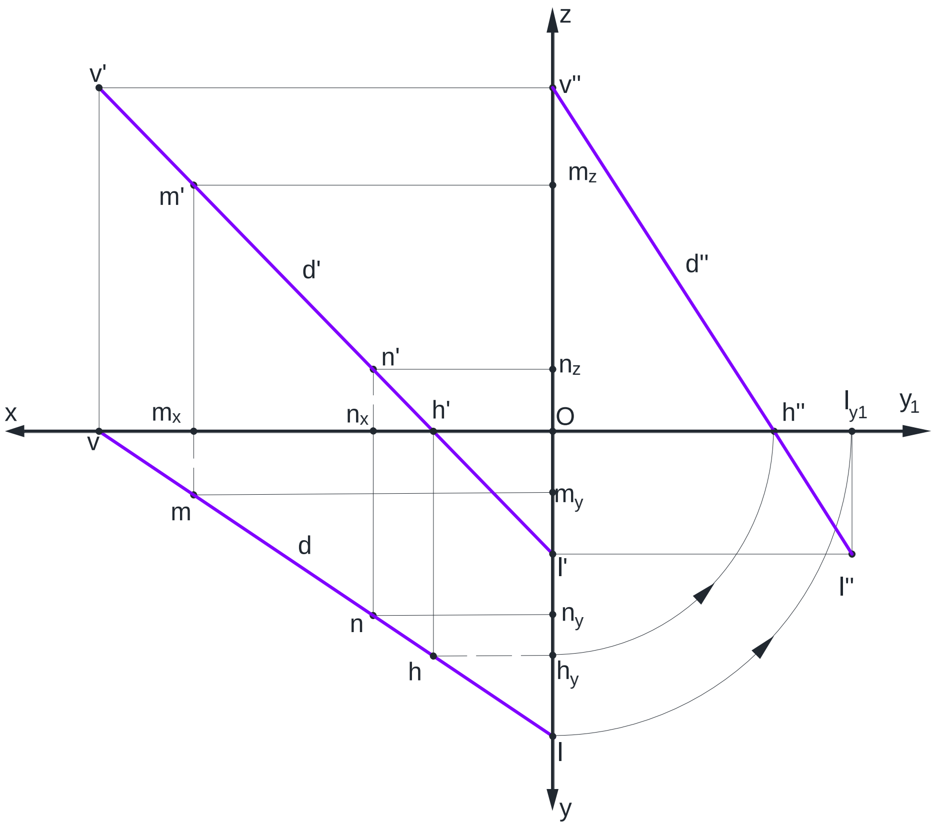
b) $D_1(d_1, d_1', d_1'')$: M(70, 30, 10); N(40, 10, 30);

c) $D_2(d_2, d_2', d_2'')$: M(90, 10, 50); N(110, 20, 70).

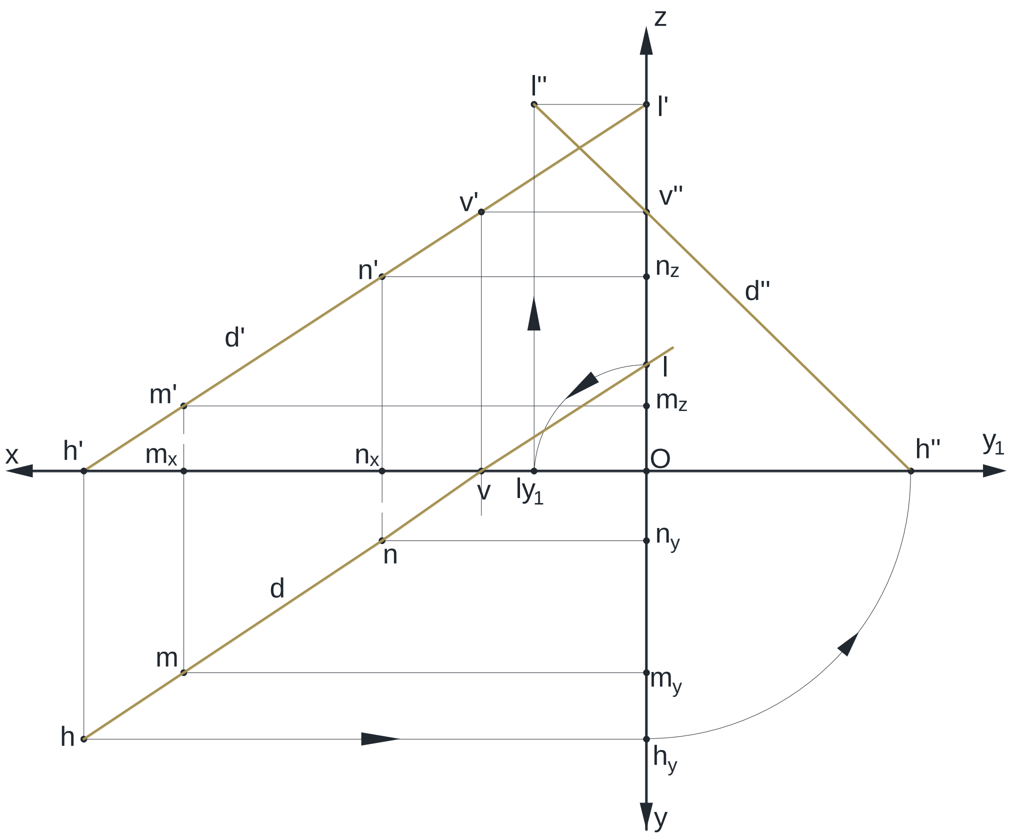
Rezolvare aplicația 2.4

Pentru construcția proiecțiilor urmelor H(h, h', h'') și V(v, v', v'') se procedează ca și la aplicațiile anterioare (intersecția proiecțiilor d și d' cu axele Ox, Oy și Oz). Pentru construcția urmelor laterale l'' ale dreptei, se determină urmele (l, l') în care aceste drepte intersectează planul lateral de proiecție. Se construiesc apoi proiecțiile l'' pe planul lateral de proiecție ale acestor puncte L(l, l', l''). Se construiesc, de asemenea, și proiecțiile laterale h''v'' ale dreptelor. Ca verificare, urmele l'' trebuie să fie conținute de proiecțiile laterale ale dreptelor respective.

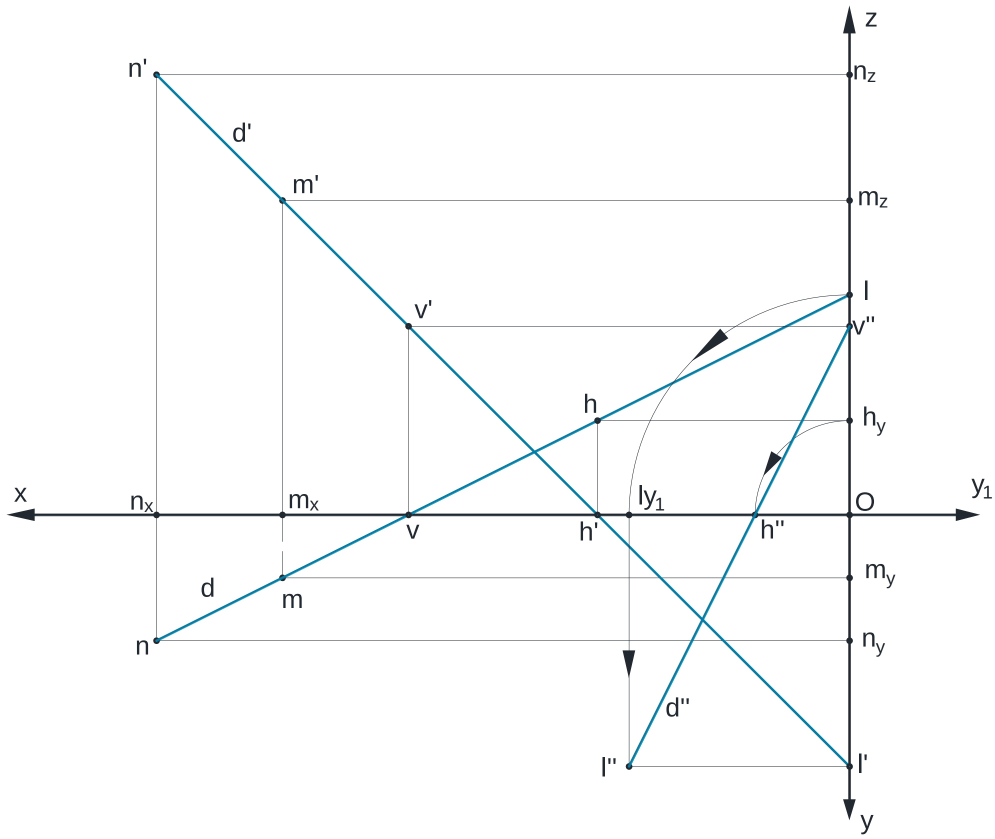
Astfel, proiecția orizontală d a dreptei întâlnește Oy în l, iar proiecția verticală d' a dreptei întâlnește Oz în l'. Punctul L(l, l', l'') are atât cota cât și depărtarea negativă. Proiecția sa l'' pe planul lateral de proiecție se obține intersectând paralela dusă prin l' la Ox cu paralela dusă prin l_1 la axa Oy. Proiecția laterală l'' este conținută de proiecția laterală h''v'' a dreptei MN considerate.


z
v'
v''
m'
mz
d'
d''
n'
nz
x
mx
nx
h'
O
h''
Iy1
y1
v
m
my
d
I'
I''
n
ny
h
hy
I
y

a)


z
I''
I'
v'
v''
n'
nz
d''
d'
I
m'
mz
x
h'
mx
nx
O
h''
y1
v
Iy1
ny
n
d
m
my
h
hy
y

b)



c)

Fig. 2.4 Rezolvare aplicația 2.4

2.5 Se consideră punctul M(m, m') și dreapta D(d, d'). Să se traseze prin punctul M următoarele drepte:
a) N(n,n') paralelă cu dreapta D;
b) N_1(n_1, n_1') concurrentă cu dreapta D;
c) N_2(n_2, n_2') disjunctă față de dreapta D

Rezolvare aplicația 2.5

a) *Prin proiecțiile m și m' ale punctului M se trasează paralelele n și n' la proiecțiile d și d' ale dreptei D. Dreptele D și N astfel determinate, având proiecțiile de același nume paralele, sunt desigur paralele.*
b) *Se alege un punct arbitrar A(a, a') pe dreapta D(d, d'). Unind a cu m și a' cu m' se obține o dreaptă* N_1(n_1, n_1')*) concurentă în punctul A cu dreapta D. Se cunoaște că două drepte sunt concurente dacă proiecțiile punctelor, rezultate din intersecțiile proiecțiilor dreptelor de același nume, se găsesc situate pe aceeași linie de ordine.*
c) *Se iau proiecțiile n_2, n_2', trecând prin m respectiv m'. Nici una din cele două condiții de mai sus (de paralelism și de concurență) nefiind verificată, dreapta N_2 este disjunctă cu dreapta D.*

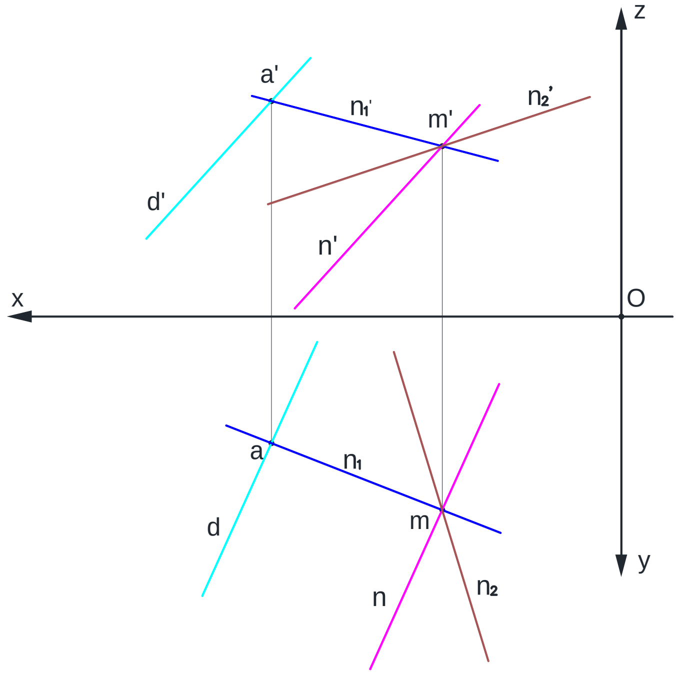


Fig. 2.5 Rezolvare aplicația 2.5

2.6 Să se traseze prin punctul A(70, 45, 35) o orizontală D(d, d') a cărei urmă verticală să fie situată la o distanță l = 30 mm dată față de un punct B(40, 0, 10) din planul vertical.

Rezolvare aplicația 2.6

Cu centrul în proiecția verticală b' se descrie un cerc de rază l, care este întâlnit de paralela trasată prin a' la linia de pământ în punctele v' și v_1'.

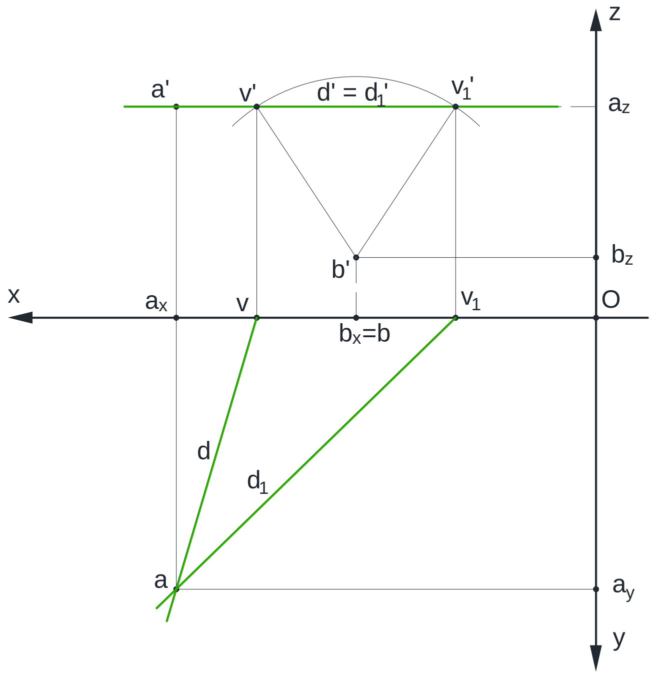


Fig. 2.6 Rezolvare aplicația 2.6

Punctul B(b, b') aparține planului vertical (depărtarea este zero). În acest caz, problema are două soluții, în orizontalele D(d, d') și $D_1(d_1, d_1')$. Dacă proiecțiile v' și v_1' coincide, există o singură soluție. Dacă proiecția d' nu întâlnește cercul nu există nici o soluție a problemei date.

2.7 Să se determine urmele dreptei de profil D(d, d') care face un unghi de 60° cu planul orizontal de proiecție și este situată la 25 mm distanță față de axa Ox și la 18 mm distanță față de planul lateral de proiecție.

Rezolvare aplicația 2.7

Dreapta fiind dreaptă de profil, proiecția ei pe planul lateral face cu Oy1 unghiul de 60° și este la distanța de 25 mm față de O. Se reprezintă în epură, proiecția dreptei pe planul lateral astfel: se ia Om'' = 25 mm în așa fel încât să formeze cu Oy1 un unghi de 30° (deoarece Om''⊥v''h'' și deci unghiul m''Oh'' este egal cu complementul unghiului Oh''m'', care trebuie să fie de 60°).

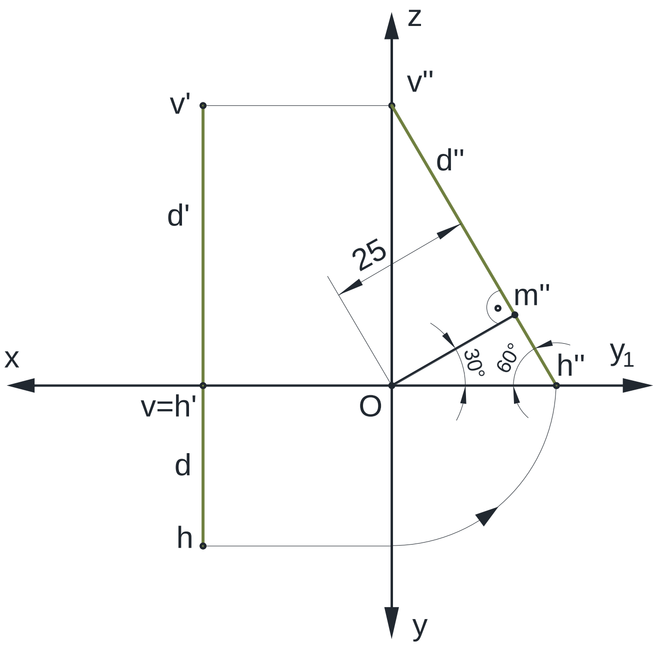


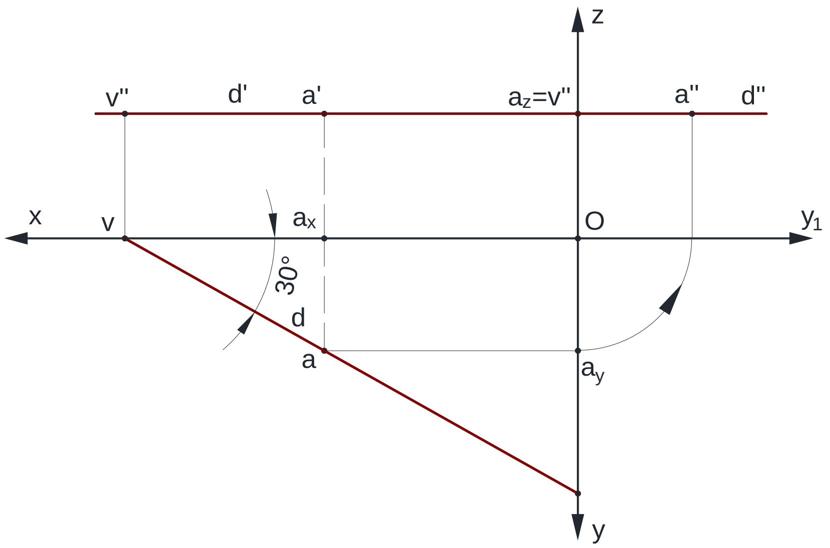
Fig. 2.7 Rezolvare aplicația 2.7

Se duce apoi perprendiculara în m'' pe Om'' și se obține d'' care se intersectează cu Oy1 și Oz dă respectiv proiecțiile h'' și v'' ale urmelor orizontală și verticală ale dreptei.

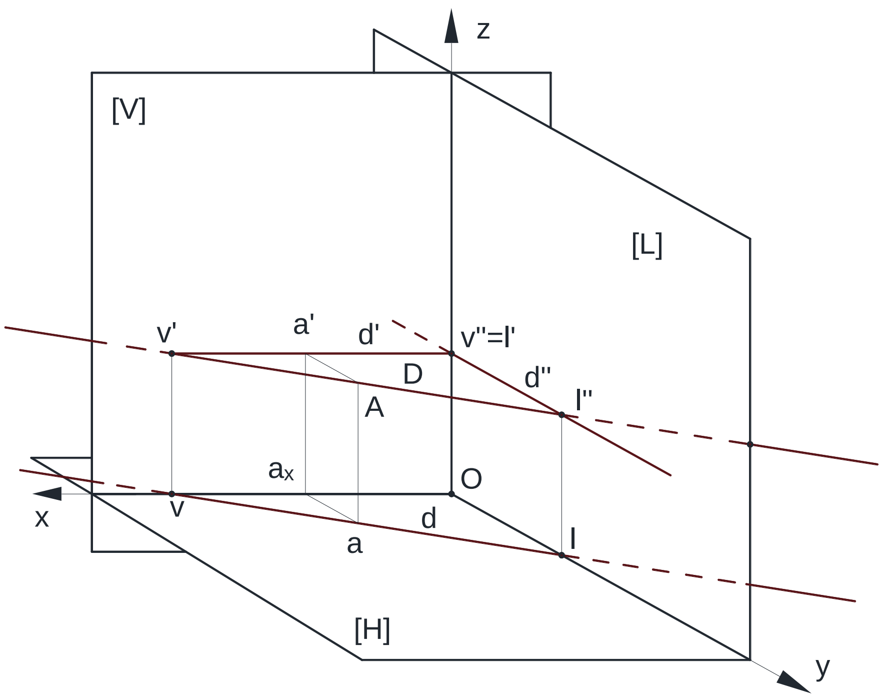
După datele problemei, abscisa dreptei este de 18 mm. Deci, din punctul de pe Ox de abscisă 18 mm se duce perpendiculara pe ea obținând astfel d și d'. Având proiecțiile dreptei, precum și proiecțiile laterale ale urmelor, se obțin urmele H(h, h', h'') și V(v, v', v''). Evident proiecțiile corepunzătoare h' și v se confundă pe Ox.

2.8. Prin punctul A(40, 18, 20) să se traseze:
1) în epură și în spațiu o dreaptă orizontală care face un unghi de 30° cu planul [V] de proiecție,
2) în epură și în spațiu o dreaptă frontală care face un unghi de 45° cu planul [H] de proiecție

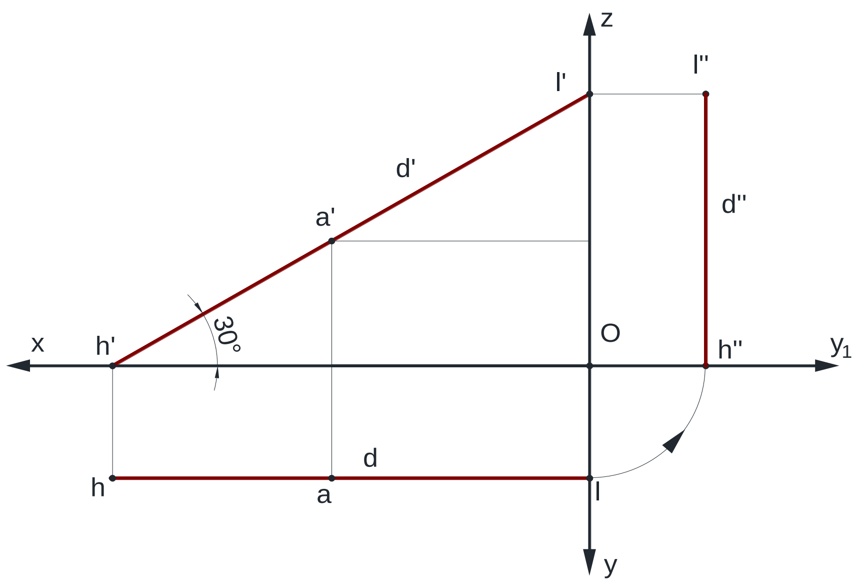
Rezolvare aplicația 2.8 a), b), c), d) în epură și în spațiu



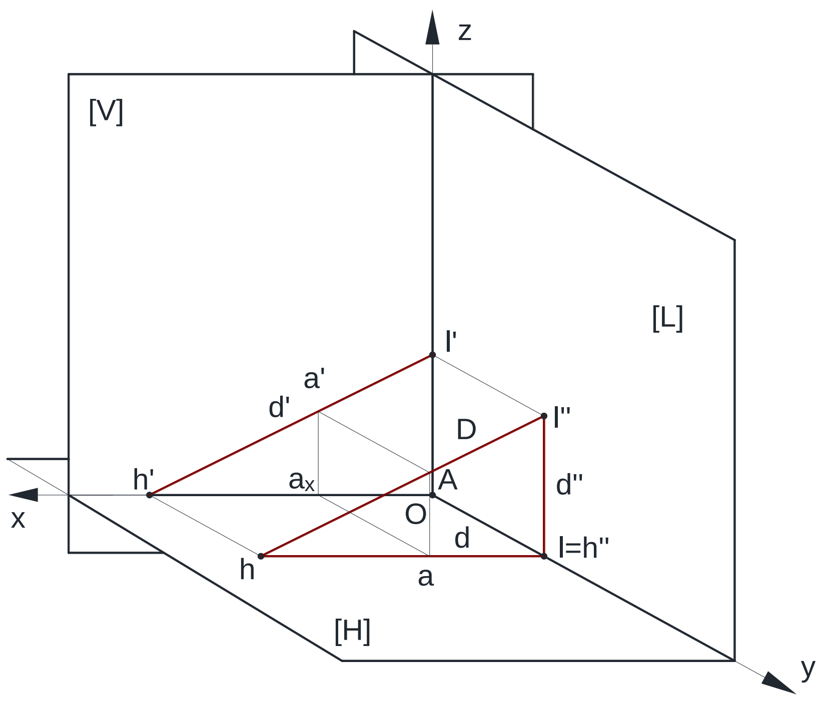
a)



b)



c)



d)

Fig. 2.8. a), b) Rezolvare aplicația 2.8

Obs. Rezolvarea acestor aplicații se rezolvă doar în epură. Rezolvarea aplicației în spațiu s-a realizat doar pentru a înțelege care este poziția proiecțiilor dreptelor față de planele de proiecție.

Probleme propuse

2.9. Să se determine urmele orizontale și verticale ale dreptelor definite de următoarele puncte:

a) A(45, 10, 20) și B(30, 35, 20);
b) C(40, 15, 20) și D(20, 15, 20);
c) E(15, 20 ,30) și F(15, 35, 20);
d) M(40, 15, 20) și N(50 ,30, -40);
e) J(70, -60, -30) și P(40, -20, 30).

2.10. Să se traseze urmele pe cele trei plane de proiecție ale dreptelor determinate de punctele:

a) A(60, 10, 40) și B(30, 30, 10);
b) C(70, 30 ,10) și E(40, 10, 30);
c) M(60, 10, 50) și N(80, 20, 70).

2.11. Să se stabilească diedrele pe care le străbate dreapta D(d, d') dată prin două din punctele sale:

a) A(75, 10, 25) și B(50, 5, 50);
b) C(110, -50, 5) și E(75, -15, -10);
c) F(100, 5, -23) și G(40, 20, 15);
d) M(90, 25, 5) și N(35, -20, 30).

2.12. Se dă segmentul de dreaptă de profil AB prin coordonatele punctelor A(20, 9,10) și B(20, 22, 30) și un punct M(35, 28, 14). Să se ducă prin punctul M:

a) o dreaptă paralelă la dreapta AB;
b) o dreaptă MC concurentă cu dreapta AB (C϶AB)

2.13. Să se determine punctele de intersecție dintre segmentul de dreaptă AB și planele bisectoare [B_{I-III}] și [B_{II-IV}], știind coordonatele punctelor: A(25, 8, 30) și B(50, 13, 7).

2.14. Prin punctul M de coordonate M(30, 25, 45) se cere să se traseze:

a) o dreaptă de nivel;
b) o dreaptă de front;
c) o dreaptă de profil;
e) o dreaptă oarecare.

2.15. Să se construiască epura în triplă proiecție ortogonală a segmentului de dreaptă AB situat în planul vertical de proiecție și care face un unghi de 45° cu planul orizontal de proiecție.

2.16. Se dă triunghiul ABC oarecare prin proiecțiile sale. Să se ducă prin vârful B o frontală, iar prin vârful C o dreaptă de profil în planul triunghiului.
Coordonatele sunt: A(35, 20, 10); B(40, 20, 30); C(15, 45, 20).

2.17. Să se reprezinte în epură segmentul de dreaptă AB cu A(30, 20, 30) și B(70, 40, 10) și să se precizeze diedrele pe care la străbate, precum și punctele în care dreapta intersectează planele bisectoare.

2.18. Se dau segmentele de drepte de profil D(d, d', d''): A(30, 10, 20) și B(30, 50, 40) și D_1(d_1, d_1', d_1''): C(50, 10, 30) și D(50, 0, 60). Să se precizeze poziția lor în spațiu.

2.19. Se dă segmentul de dreaptă AB prin coorodonatele extremităților A(30, -10, 30), B(80, 40, -10) și un punct M(100, 20, 10). Să se traseze prin punctul M o dreaptă frontală concurentă cu segmentul de dreaptă AB și o altă dreaptă care să întâlnească segmentul de dreaptă AB într-un punct în care cota să fie egală cu depărtarea.

2.20. Fiind dat punctul M(50, 40, 50), să se construiască prin acest punct o perpendiculară pe segmentul de dreaptă de nivel AB, dat prin coordonatele extremităților: A(20, 30, 20) și B(40, -10, 20).

2.21. Să se construiască dreapta orizontală (D_1) definită de punctele A_1(60, 0, 80) și B_1(100, 60, z_1) și dreapta orizontală (D_2) definită de punctele A_2(120, 20, -40) și B_2(80, 0, z_2). Să se stabilească diedrele străbătute de aceste drepte.

2.22. Să se reprezinte în epură pentagonul ABCDE, definit de A(50, 0, 0), B(50, 50, 50), C(100, 70, 70), D(150, 40, 70), E(150, 40, 0). Să se indice particularitățile fiecărei laturi raportate la axele de proiecție și la planele de proiecție.
Indicație: se va indica dreaptă orizontală, de profil care intersectează axa Ox.

2.23. Se dau punctele A(110, 120, 20), B(60, 20, 100), M(40, 100, 80). Să se construiască orizontala D(d, d', d'') și frontala F(f, f',f''), ambele trecând prin punctul M și fiind concurente cu segmentul de dreaptă AB. Să se construiască dreapta E(e, e', e''), care trece prin urma verticală a dreptei D(d, d', d'') și prin urma orizontală a dreptei F(f, f',f'').

2.24. Se dau punctele A(60, 100, 20), B(140, 40, 100) și C(120, 30, 40). Să se construiască dreapta orizontală D(d, d', d'') și frontala F(f, f',f'') care trec prin punctul C știind că proiecțiile lor fac un unghi de 90° cu segmentul de dreaptă AB.

2.25. Prin punctul A(40, 50, 60) să se traseze în epure separate:
- o dreaptă orizontală care face un unghi de 30° cu planul [V];
- o dreaptă frontală care face un unghi de 45° cu planul [H];
- o dreaptă de profil care face un unghi de 60° cu planul H;
- o perpendiculară pe planul [H];
- o perpendiculară pe planul [V] și o perpendiculară pe planul [L].

2.26. Precizați ce particularități prezintă segmentele definite de următoarele perechi de puncte:

a) A(0, 0, 0) și B(20, 25, 30);
b) C(35, -15, 30) și D(30, -15, 35);
c) E(10, -15, 45) și F(10, -25, 45);
d) M(60, 40, 15) și N(60, 40, 20);
e) S(5, -25, -20) și T(15, -15, -20).

2.27 Să se construiască epura și reprezentarea în spațiu a unei drepte D(d, d') care are segmentul cuprins între urmele ei situat în diedrul al doilea al planelor de proiecție.
Indicație:
Se fixează urma orizontală H(h, h') a dreptei pe planul orizontal posterior, iar urma verticală V(v, v') a dreptei se ia pe planul vertical superior. Dreapta străbate diedrele trei, doi și unu.

2.28 Să se construiască epura unei drepte D(d, d') care are segmentul cuprins între urmele ei situat în diedrul al patrulea al planelor de proiecție.
Indicație
Poziția urmelor dreptei se prezintă opus poziției lor din diedrul doi. Urma orizontală H(h, h') se alege pe planul orizontal, iar urma verticală V(v, v') a dreptei se alege pe planul vertical. Dreapta străbate diedrele trei, patru și unu.

2.29 Prin punctul A(30, 10, 15), exterior dreptei D(d, d', d''): B(25, 5, 5); C(10, 15, 20), să se construiască a) o dreaptă paralelă cu D; b) o dreaptă concurentă cu D; c) o dreaptă disjunctă față de D și să se studieze vizibilitatea.

2.30 Se cunosc coordonatele punctelor A(90, 20, 50), B(90, 60, 10), C(70, 70, 10), D(30, 40, 40), E(60, 10, 50) care reprezintă proiecțiile vârfurilor pentagonului ABCDE. Să se precizeze poziția în spațiu a laturilor și vârfurilor sale.

2.31 Să se construiască proiecţiile patrulaterului ABCD, știind că diagonala BD este o dreaptă paralelă cu planul orizontal de proiecţie. Se cunosc A(90, 10, 10), B(80, 30, 35), C(30, 20, 50), D(10, y, z).

2.32. Se dă dreapta D(d, d') definită de punctele A(92, 62, 5) și B(32, 12, 37). Se cere să se determine:
- urmele dreptei H(h, h', h''); V(v, v', v'') și L(l, l', l'');
- regiunile străbătute de dreaptă;
- intersecția cu planele bisectoare.

2.33. Se dă dreapta D(d, d', d'') definită de A(61, 21, 11) și B(21, 46, 51) și punctul M(41, 26, 41) exterior dreptei. Se cere să se construiască prin punctul M(41, 26, 41) o orizontală (G) și o frontală (F) concurente cu (D). Se va lucra în triplă proiecție ortogonală.

2.34. Se dă dreapta D(d, d'): A(81, 6, 11) și B(26, 51, 46) definită de punctele A și B și punctul M(m, m') exterior dreptei. Se cere să se construiască prin punctul M(46, 21, 21) o dreaptă $D_1(d_1, d_1', d_1'')$ paralelă cu (D) și o dreaptă $D_2(d_2, d_2', d_2'')$ disjunctă față de (D).

2.35. Să se construiască în epure separate, pentru fiecare tip de dreaptă particulară câte un segment cu lungimea de 35 mm. Dintr-un punct exterior M(m, m', m'') să se traseze câte o perpendiculară pe fiecare segment din dreptele particulare reprezentate. Se va lucra în triplă proiecţie ortogonală.

2.36. Să se determine urmele segmentului de dreaptă AB pe cele trei plane de proiecție și să se stabilească triedrele pe care le străbate. Construcțiile se vor desena separat pentru fiecare dreaptă. Se cunosc:
a) A(-20, 8, 23); B(15, 20, 10);
b) A(-55, 40, -8); B(40, -10, 38);
c) A(-15, -15, 32); B(38, 10, 9).

2.37. Să se determine urmele segmentului de dreaptă AB și să se stabilească diedrele pe care le străbate fiecare dreaptă. Se cunosc:
a) A(5, -8, 30); B(40, 26, 6);
b) A(10, 12, 30); B(45, -9, 37);
c) A(12, -32, 7); B(47, -6, -27);
d) A(10, 28, 10); B(50, 5, -25).

2.38. Se dau punctele M(25, 15, 25) și N(40, -25, 10) Să se determine urmele dreptei H(h, h', h'') și V(v, v', v''), intersecția cu planele bisectoare și diedrele străbătute de dreaptă.

2.39. Se dă dreapta D(d, d'), H(110, 25, 0) și V(65, 0, 40). Să se determine intersecția dreptei cu planele bisectoare și regiunile străbătute de dreaptă.

2.40. Se dă dreapta D(d, d') definită de punctele A(40, 25, 35), B(135, -45, -10) și punctul M(80, -40, -25).
Se cere să se traseze prin punctul M:
a) orizontala (G) concurentă în J cu (D);
b) frontala (F) concurentă în J_1 cu (D).

2.41. Să se traseze prin punctul M(40, 30, 25) următoarele drepte:
a) o orizontală care formează ci planul [V] un unghi de 30°;
b) o frontală care formează cu planul [L] un unghi de 45°;
c) o dreaptă de profil care formează cu planul [V] un unghi de 60°.

2.42. Să se reprezinte în epură triunghiul ABC dat prin vârfurile sale A(40, 60, 40), B(40, -60, 40), C(20, 0, -40). Specificați dacă sunt laturi ale triunghiului în poziții particulare față de planele de proiecție.

CAPITOLUL III

PLANUL

Urmele planului, puncte și drepte conținute în plan

3.1. Să se determine proiecțiile punctului de intersecție I(i, i') dintre dreapta D(d, d') definită de coordonate A(50, 15, 20), B(25, 5, 10) și planul [P] dat prin urmele $OP_x=100$, $\sphericalangle OP_yP_x = 30°$, iar $\sphericalangle OP_zP_x = 45°$.

Rezolvare aplicația 3.1

Se reprezintă în epură coordonatele punctelor A și B, apoi urmele planului P și P'.

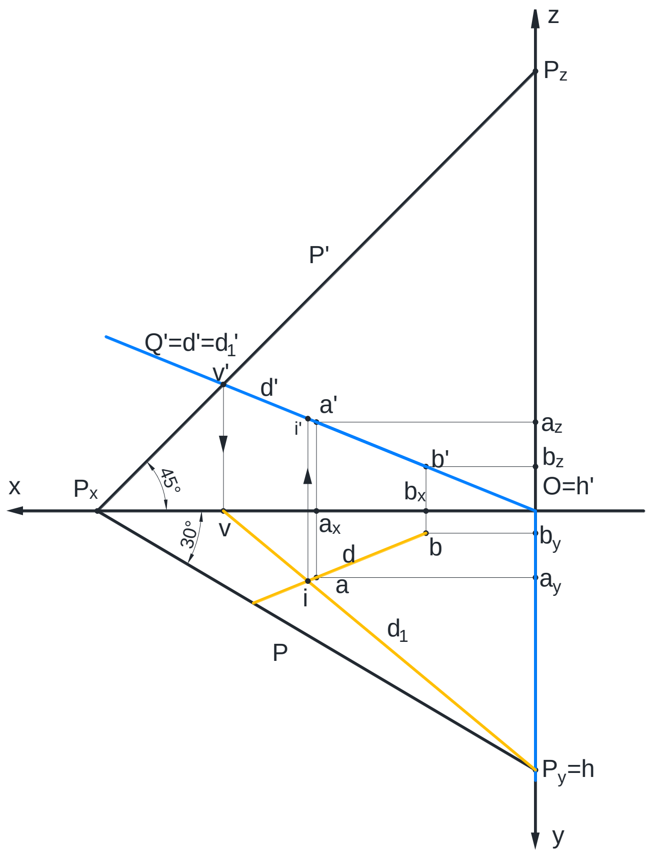


Fig. 3.1. Rezolvare aplicația 3.1

Prin proiecția dreptei d' se trasează suprapus un plan de capăt notat cu [Q]. Acest plan de capăt intersectează urmele planului [P] în proiecțiile v' și h'. Se unește h și v, se trasează dreapta d_1 care intersectează proiecția dreptei D(d, d') în punctul I(i, i'). Punctul acesta reprezintă punctul de intersecție dintre dreapta D(d, d') și planul [P].

3.2. Să se determine proiecțiile dreptei de intersecție dintre planele [P] și [N], date prin urmele: $OP_x = 90$, $OP_y = 70$, $OP_z = 45$, $ON_x = \infty$, $ON_y = \infty$, $ON_z = 25$.

Rezolvare aplicația 3.2

Se reprezintă planul oarecare [P] și planul de nivel [N]. Planul de nivel este construit la o cotă de 25 mm față de planul orizontal [H].

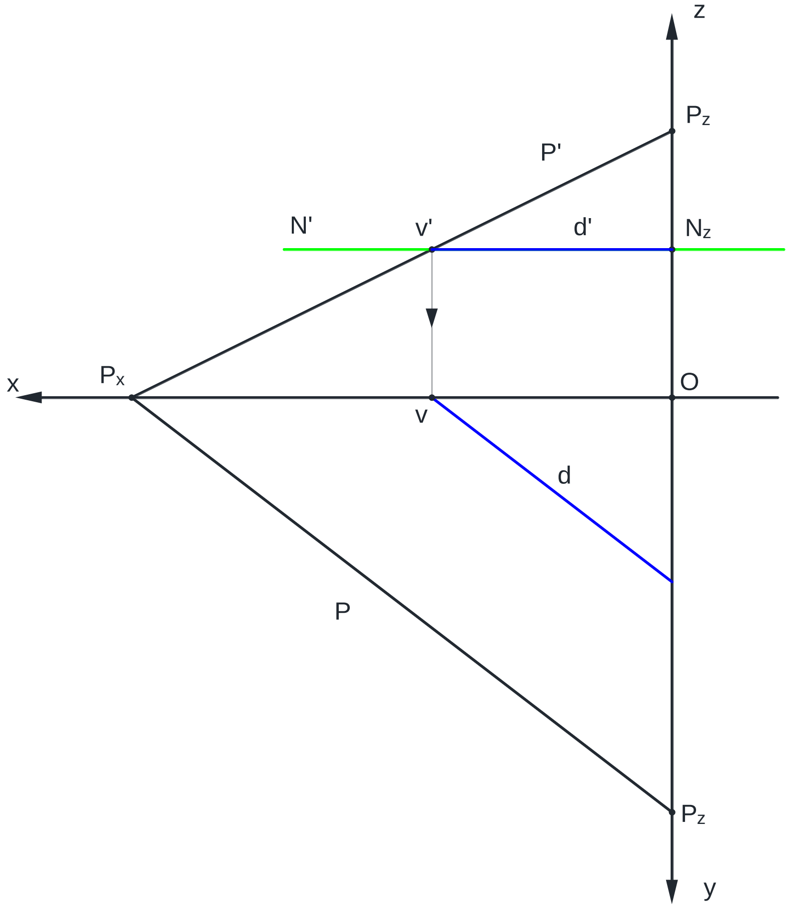


Fig. 3.2. Rezolvare aplicația 3.2

Pe planul de nivel se trasează o dreaptă D(d, d') care este suprapusă peste urma verticală a planului de nivel [N]. Urma verticală a planului [N] intersectează urma verticală a planului [P] în punctul v'. Se trasează linie de ordine din v' până pe linia de pământ. Se obține urma verticală v'. În planul orizontal [H] se construiește proiecția dreptei D(d, d') paralelă cu urma orizontală a planului [P].

Astfel se obțin ambele proiecții ale dreptei d și d' trasate pe cele două plane de proiecție [H] și [V]. Intersecția dintre un plan oarecare [P] și planul de nivel [N] este întotdeauna o dreaptă de nivel.

3.3. Prin punctul B(20, 10, 20) să se construiască o dreaptă paralelă cu fiecare din planele [R] și [T]. Se dau: $OR_x = 90$, $OR_y = 30$, $OR_z = 50$, și $OT_x = 60$, $OT_y = 50$, $OT_z = 70$.

Rezolvare aplicația 3.3

Pentru a putea construi o dreaptă paralelă cu un plan sau cu două plane se știe că o dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan.

Însă, o dreaptă este paralelă cu două plane dacă este paralelă cu dreapta lor de intersecție, (singura dreaptă comună ambelor plane).

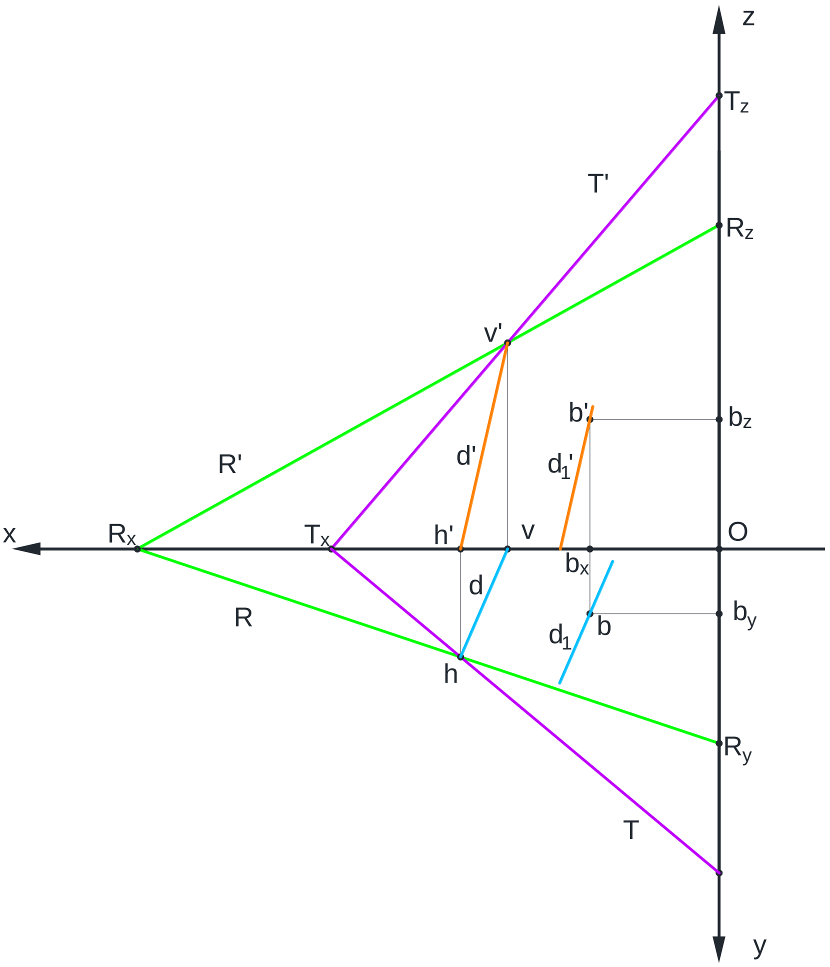


Fig. 3.3. Rezolvare aplicația 3.3

În planul vertical din intersecția urmelor verticale a planelor [R] și [T] determină urma v', trasând linia de ordine de la intersecția proiecției orizontale a dreptei D(d, d') cu axa Ox în planul orizontal se obține urma h, punct de depărtare 0.

În plan orizontal din intersecția celor două urme R și T rezultă proiecția h, trasând linia de ordine în planul vertical rezultă proiecția v'.

Se unesc urmele v'h' și se obține proiecția verticală d' a dreptei D(d, d'). Paralel cu această proiecție se trasează proiecția dreptei d_1', care se trasează prin proiecția b'. În planul orizontal se unesc urmele hv și se obține proiecția orizontală a dreptei D(d, d'). Paralel cu proiecția d se trasează proiecția d_1, care va trece desigur prin proiecția b.

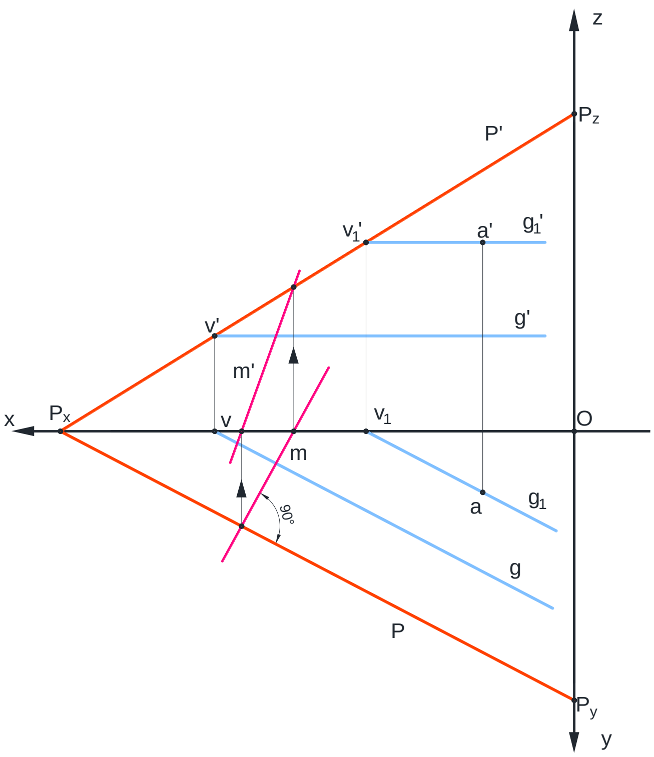
3.4. Să se determine urmele P și P' ale unui plan [P], cunoscând:
a) orizontala G(g, g') a planului și un punct A(a, a') situat pe această dreaptă;
b) frontala F(f, f') a planului și un punct A(a, a') situat pe această dreaptă;
Să se traseze liniile de cea mai mare pantă ale acestor plane.

Rezolvare aplicația 3.4

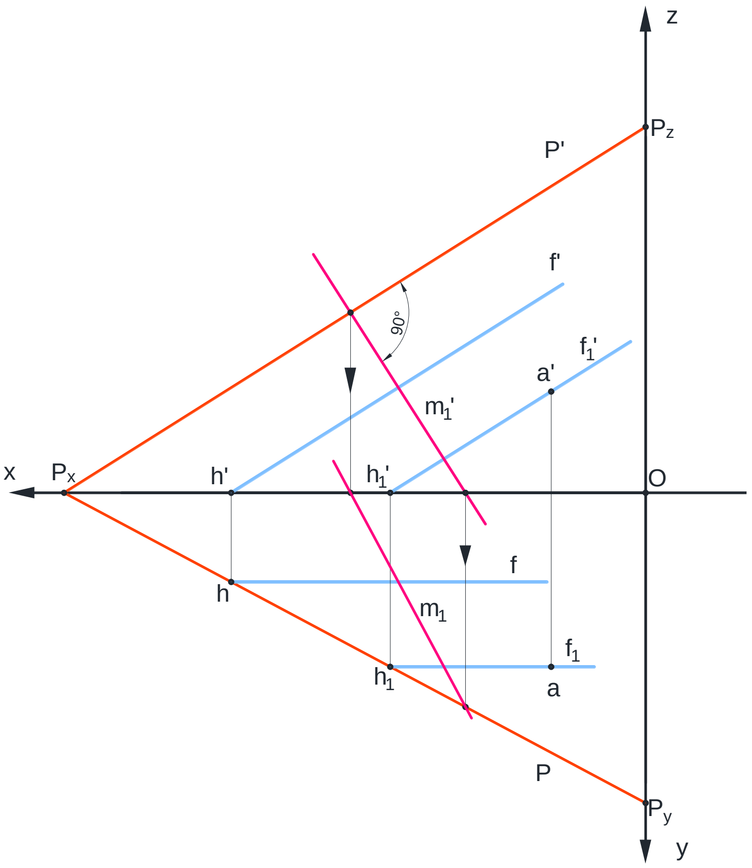
Se construiește orizontala $G_1(g_1, g_1')$ trasată prin punctul A, paralelă cu dreapta orizontală G.

Urmele v' și v_1' unite reprezintă urma verticală P' a planului, iar urma P trece prin P_x și este paralelă cu proiecțiile orizontale g și g_1. O linie de cea mai mare pantă (m, m') a planului față de planul orizontal de proiecție are proiecția orizontală m perpendiculară pe toate orizontalele planului, deci și pe urma P.

Proiecția sa verticală m' rezultă impunând condiția ca această dreaptă să fie conținută în planul [P]. În mod analog se procedează pentru cazul al doilea, în care s-a trasat linia de cea mai mare pantă $M_1(m_1, m_1')$ a planului [P] față de planul vertical de proiecție.



a) orizontala



b) frontala

Fig. 3.4. Rezolvare aplicația 3.4

3.5. Se dau dreptele oarecare D(d, d’) și D_1(d_1, d_1’) concurente în punctul M(m, m’). Să se construiască urmele planului determinat de cele două drepte.

Rezolvare aplicația 3.5

Se trasează urmele celor două drepte. Proiecția verticală d’ intersectează axa Ox în punctul h’ (punct de cotă zero), se trasează linie de ordine în planul orizontal până pe proiecția orizontală d și se determină astfel urma orizontală h. Similar se procedează și cu determinarea proiecțiilor urmei orizontale, h_1, h_1’, doar că aici se va lua în considerare proiecția verticală d_1’ a dreptei D_1(d_1,d_1’).

În planul orizontal se prelungește proiecția orizontală a dreptei D(d,d’) până la intersecția cu axa Ox și se determină proiecția pe axă a urmei verticale v (punct de depărtare zero). Se trasează linie de ordine în plan vertical până la intersecția cu proiecția verticală a dreptei d’ și se obține urma v’. Similar se procedează și pentru determinarea urmei verticale v_1, v_1’, la fel se ia în considerare proiecția dreptei d_1’ Unind urmele de același nume se obțin urmele planului determinat de cele două drepte concurente.

Problema este rezolvată corect numai dacă cele două urme P și P' ale planului se întâlnesc în punctul Px є Ox.

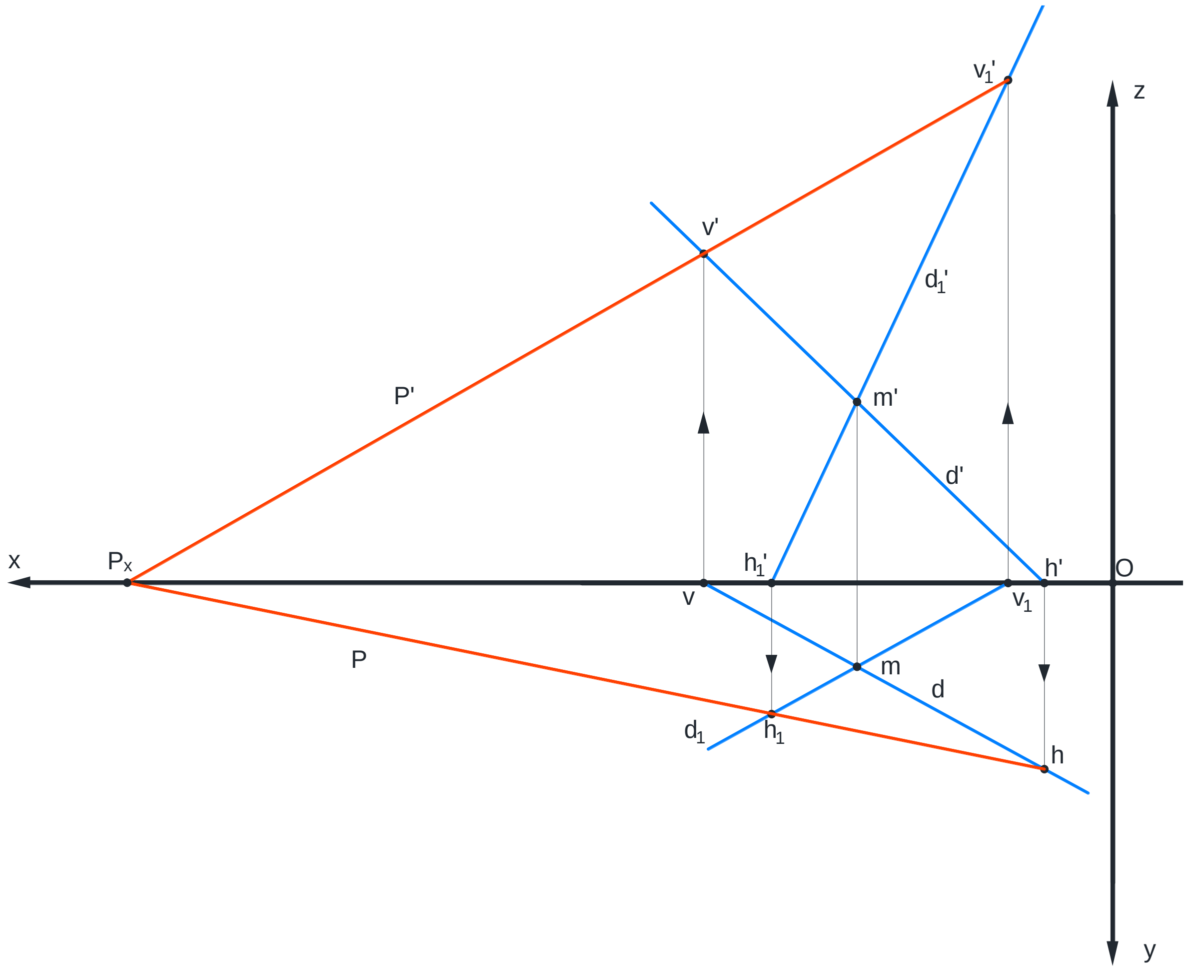
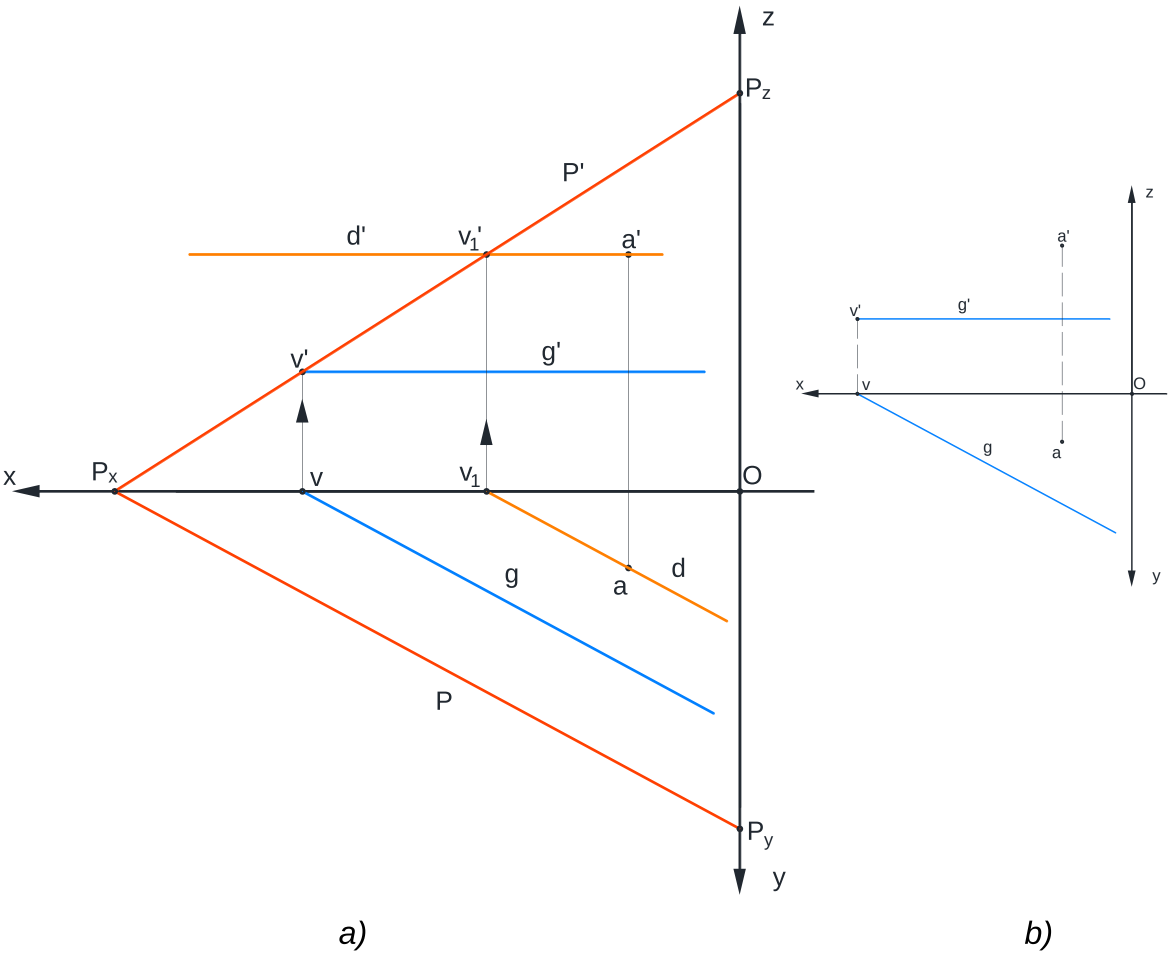


Fig. 3.5 Rezolvare aplicație 3.5

3.6. Se dă orizontala G(g, g') și punctul A(15, 10, 35) exterior dreptei. Să se construiască urmele planului oarecare determinat de dreaptă și punct.

Rezolvare aplicația 3.6.

Prin punctul A(a,a') (fig. 3.6.a) se construiește dreapta D(d,d') paralelă cu orizontala G(g, g'). Planul va fi determinat deci de cele două drepte paralele. Urma verticală a planului va trece prin urmele verticale ale celor două drepte. Urma verticală a planului întâlnește linia de pământ în punctul P_x. Din acest punct se trasează o paralelă la proiecția orizontală a dreptei G, dreaptă care este urma orizontală a planului căutat.



a) Reprezentarea dreptei orizontale; b) reprezentarea punctului A(a, a')

Fig. 3.6. Rezolvare aplicația 3.6.

3.7. Să se determine urmele P și P' ale planului [P] care conține dreapta D(d, d') și este perpendiculară pe planul [Q] dat prin urme.

Se cunosc urmele dreptei D(d, d'): H(65, 14, 0) și V(16, 0, 37). Urmele Q și Q' sunt simetrice față de axa Ox și se intersectează în xQx = 70.

Rezolvare aplicația 3.7

Se reprezintă punctul A(a, a') aparținând dreptei D(d, d'), iar prin proiecțiile lui se trasează perpendiculara $D_1(d_1, d_1')$ pe planul [Q]. Dreptele concurente $D_1(d_1, d_1')$ și D(d, d') determină planul căutat [P], ale cărui urme se găsesc unind urmele de același nume ale dreptelor D și D_1. Aplicația este rezolvată corect dacă urmele P și P' se intersectează în punctul Px, pe linia de pământ.

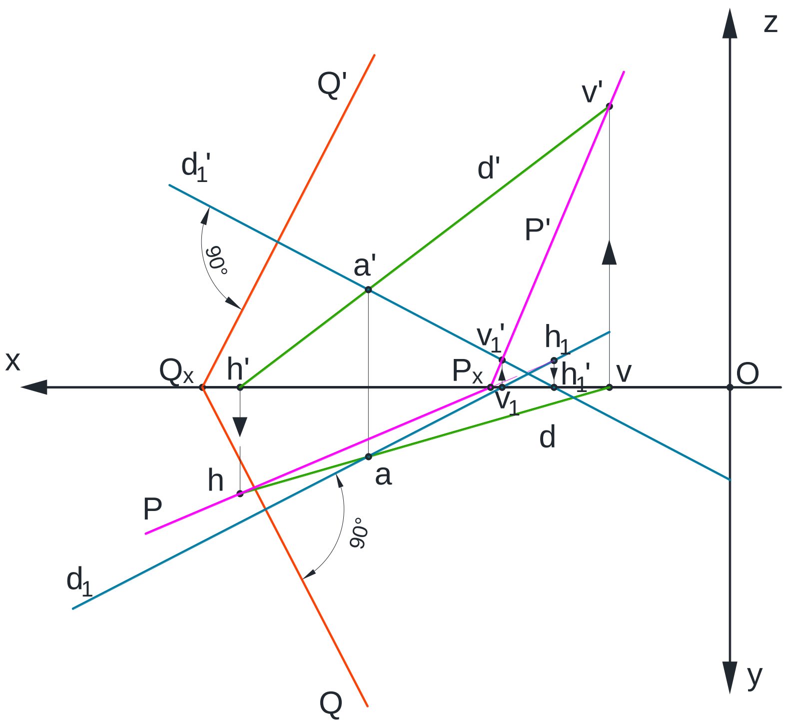


Fig. 3.7. Rezolvare aplicația 3.7

3.8. Se dă punctul A(62, 13, 20) și frontala F(f, f') la 32 mm faţă de planul vertical de proiecţie. Să se reprezinte prin punctul A linia de cea mai mare pantă a planului determinat de punctul A și frontala F(f, f') față de planul orizontal de proiecție.

Rezolvare aplicația 3.8 a şi b

Linia de cea mai mare pantă a planului față de planul orizontal de proiecție are proiecția orizontală perpendiculară pe urma orizontală a planului. Prin punctul A(a, a') se construieşte frontala $F_1(f_1, f_1')$ paralelă cu frontala F(f, f'). Se construiesc urmele orizontale ale celor două frontale. Urma orizontală a planului [P] determinat de frontala F şi punctul A trece prin punctele h şi h_1.

Urma verticală a planului trece prin punctul P_x şi este paralelă cu proiecţiile verticale ale celor două frontale.

Prin proiecția orizontală punctul a se construieşte d⊥P. Se construieşte apoi proiecţia verticală d' ştiind că urmele dreptei D trebuie să aparţină urmelor de acelaşi nume ale planului [P].

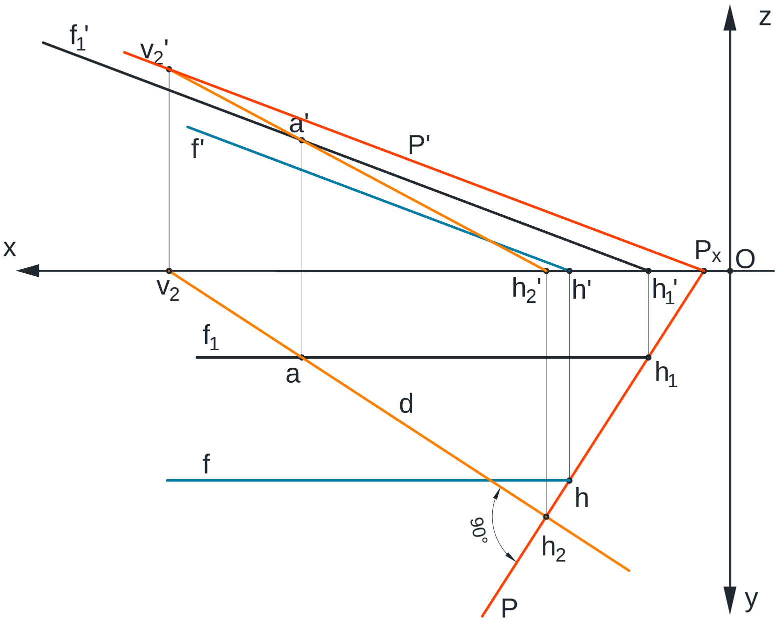


Fig. 3.8. Rezolvare aplicația 3.8

3.9. Se dă planul oarecare [Q] prin urme şi punctul A(35, 13, 25) exterior planului. Să se construiască planul [P] care conţine punctul A şi este paralel cu planul [Q].

Rezolvare aplicația 3.9

Planul [P] trebuie să aibă urmele paralele cu urmele de aceleaşi nume ale planului [Q] şi să conţină o dreaptă pe care se află punctul A(a, a'). Se construieşte prin A(a, a') orizontala D_1(d_1, d_1'), astfel încât d_1∥Q. Se determină urma verticală v și apoi v'. Prin v' se construieşte urma verticală P'∥Q'. Se determină punctul P_x şi prin acest punct se construieşte urma orizontală a planului, P∥Q.

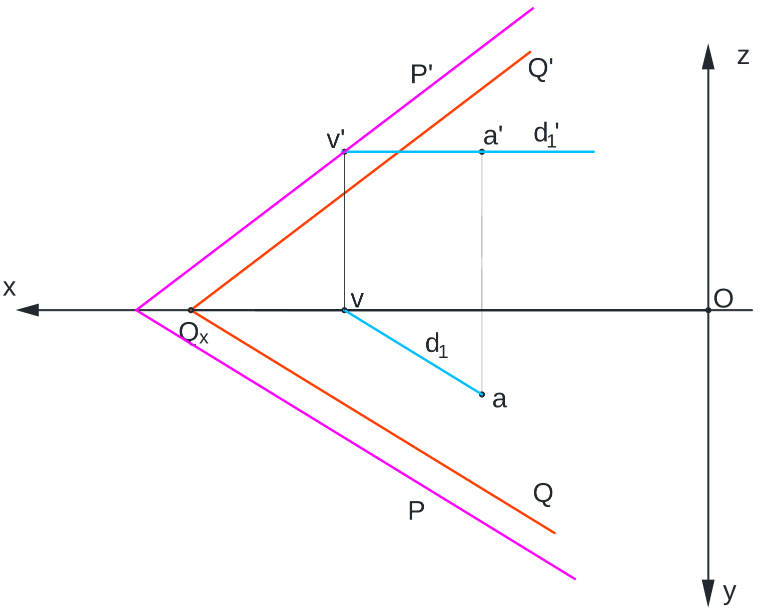


Fig. 3.9. Rezolvare aplicația 3.9

3.10. Să se construiască dreapta de intersecţie a două plane din care unul este dat prin urme, iar celălalt prin două drepte paralele: D(d, d') = [P]∩[D_1∥D_2].

Rezolvare aplicația 3.10

Se construiesc planele auxiliare [R] şi [Q], plane verticale. Dreptele D_2 є [R]⊥[H], D_1 є [Q]⊥[H]

Se determină intersecţia acestor plane cu planul [P]. [P]∩[R] = H_1v_1(h_1v_1, h_1',v_1'), [P]∩[Q] = Hv.

Dreptele D_2 şi D_1 intersectează planul [P] în punctele M şi N, puncte care aparţin dreptei D de intersecţie între planele date. D_2∩[P] = M(m, m'), D_1∩[P] = N(n, n'), deci MN = D = [P]∩[D_2∥D_1].

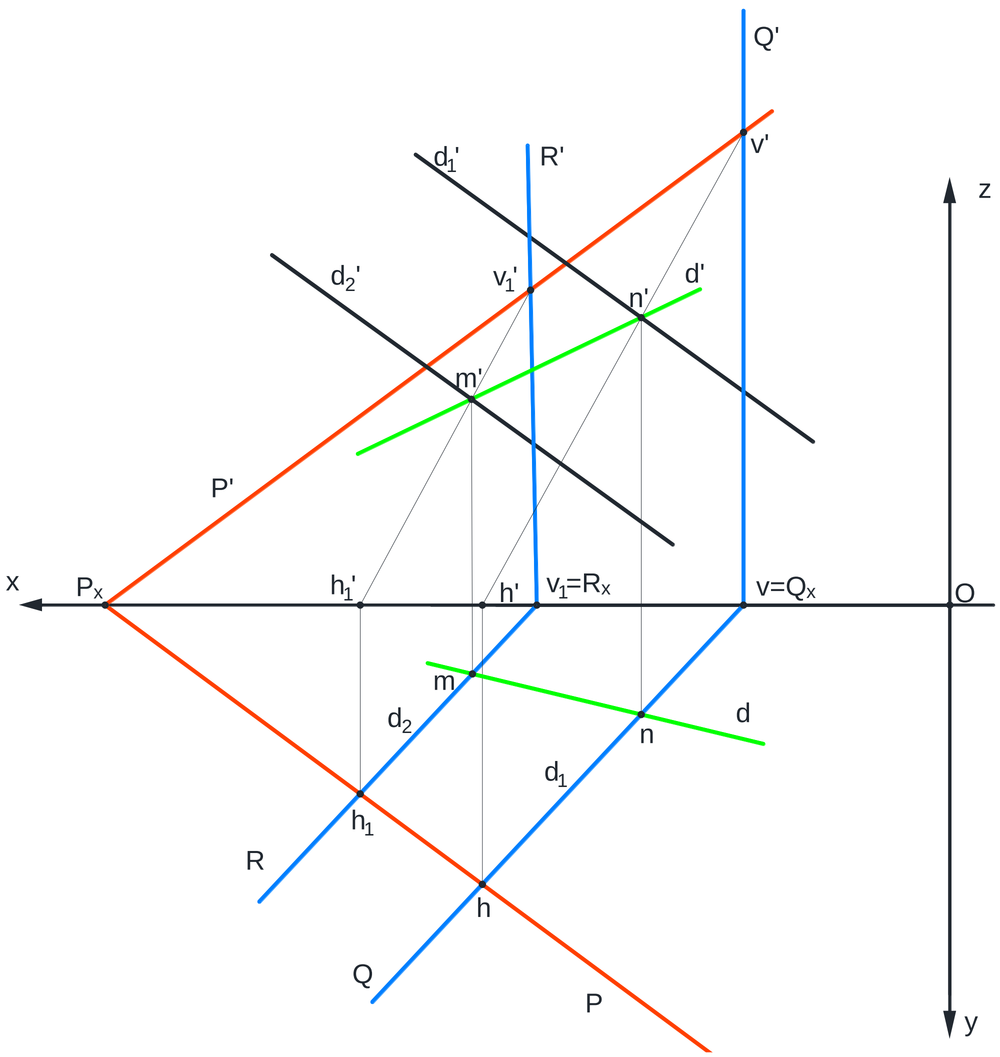


Fig. 3.10. Rezolvare aplicația 3.10

3.11. Să se determine punctul de intersecţie dintre dreapta D(d, d') şi placa triunghiulară [ABC]. Să se stabilească vizibilitatea dreptei, considerând placa opacă.

Rezolvare aplicația 3.11

Prin dreapta D(d, d') se construiește planul de capăt [Q]. Se determină segmentul de dreaptă de intersecţie 12 dintre planul [Q] şi planul triunghiului ABC. Latura AC intersectează planul de capăt în punctul 1(1, 1'), iar latura BC în punctul 2(2,2'). Punctul I(i, i') de intersecţie dintre dreptele 12 şi D(d,d') este punctul căutat, (intersecţia dreptei D(d, d') cu placa triunghiulară). Pentru a determina vizibilitatea dreptei se utilizează metoda cotelor şi depărtărilor: dintre două puncte aparent suprapuse situate pe aceeaşi verticală, în proiecţie orizontală se vede punctul cu cota mai mare; dintre două puncte aparent suprapuse situate pe o dreaptă de capăt, în proiecţie verticală se vede punctul cu depărtarea mai mare. Pentru a determina vizibilitatea dreptei în proiecţie orizontală se consideră punctul M(m, m') aparţinând dreptei D(d, d') şi punctul N(n, n') situat pe latura AC. Analizând cotele punctelor M şi N, situate pe aceeaşi verticală, se constată că punctul M are cota mai mare decât a punctului N, deci dreapta este vizibilă până la punctul I (respectiv m i). Pentru a determina vizibilitatea dreptei în proiecţie verticală, se consideră punctul de concurenţă aparentă dintre dreapta D(d, d') şi latura BC. Punctul 3 aparţinând dreptei are depărtarea mai mare decât punctul 2 care aparţine laturii BC, deci în proiecţie verticală dreapta va fi vizibilă pe porţiunea 3'i. Dacă ne referim la planul lateral, dintre două puncte care au aceeași proiecție laterală, va fi vizibil punctul care are abscisa cea mai mare.

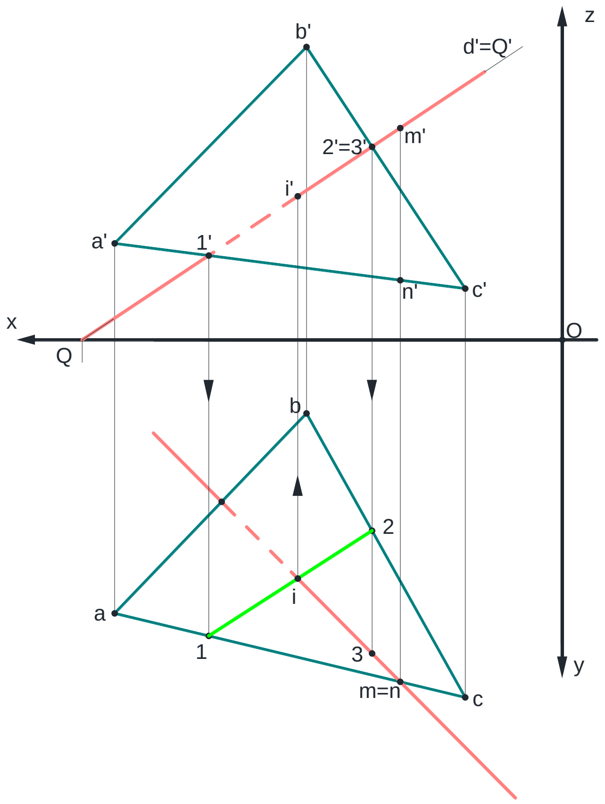


Fig. 3.11. Rezolvare aplicația 3.11

3.12. Să se determine urmele planului [P] determinat de trei puncte necoliniare. Se cunosc: A(47, 47, 8); B(66, 14, 19); C(26, 37, 19).

Rezolvare aplicația 3.12

Se reprezintă în epură cele trei puncte. Problema se poate rezolva în două moduri. Un prim caz este unirea proiecțiilor ab, obținându-se proiecția d, iar prin punctul C se trasează o dreaptă D paralelă cu D_1. Astfel problema devine: determinarea urmelor unui plan cunoscând poziția a două drepte paralele.

Un alt caz este cu ajutorul a două drepte concurente, astfel: se unesc proiecțiile ab și se obține proiecția d, iar prin punctul C se trasează dreapta D_1, care trece prin punctul A. Astfel punctul A devine punctul comun de intersecție dintre dreptele D și D_1. Acesta este cazul ales pentru rezolvarea acestei aplicații.

Se determină urmele dreptelor D și D_1, prin prelungirea acestora și intersectarea lor cu axa Ox. După determinarea urmelor orizontale și verticale se unesc în planul orizontal urmele h_1 și h_2 și se obține urma orizontală a planului P, iar în plan vertical se unesc urmele v_1' cu urma v_2' și se obține urma P' a planului. Cele două urme P și P' se intersectează în punctul P_x, punct situat pe linia de pământ.

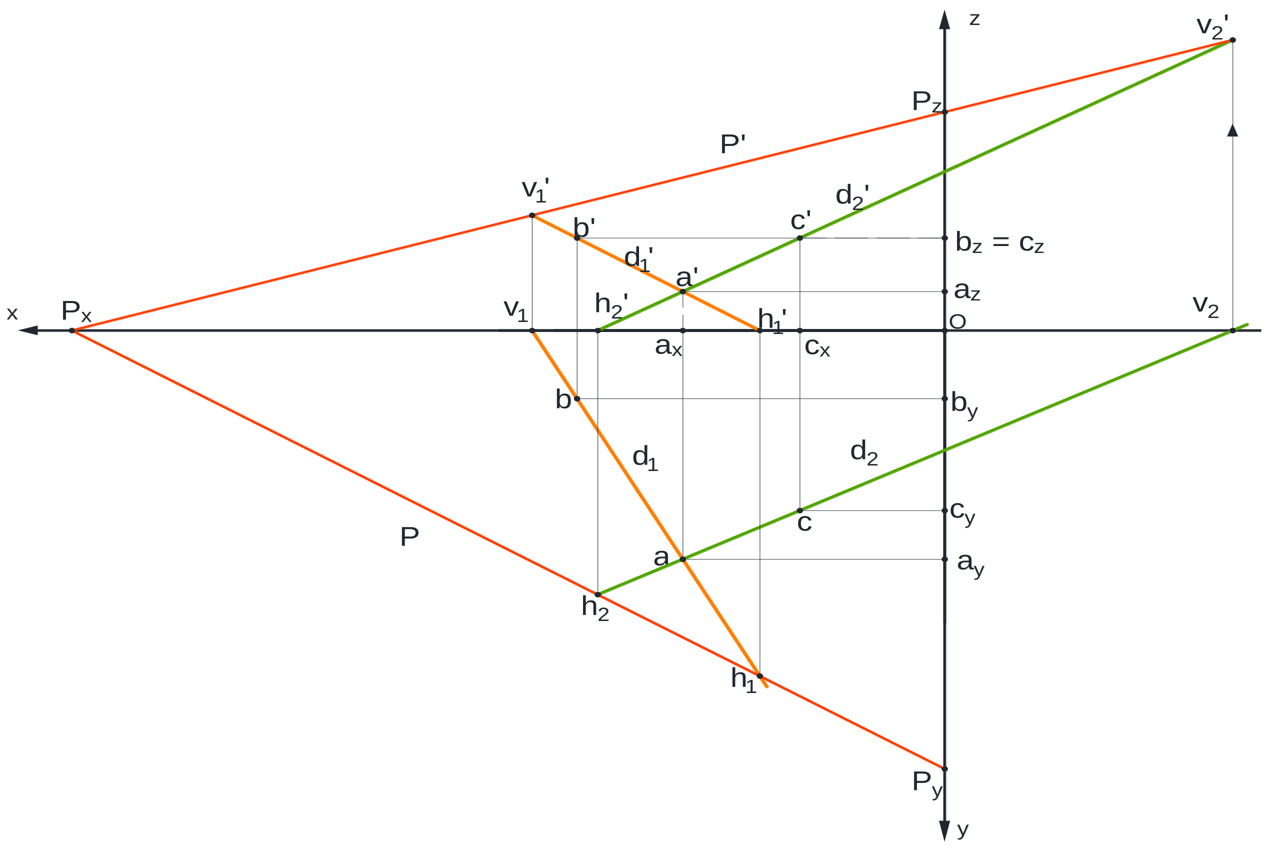


Fig. 3.12. Rezolvare aplicația 3.12

3.13. Să se determine punctul de intersecție I(i, i') dintre cele trei plane [P], [Q] și [R]. Se cunosc: OPx = 130, ∢OP$_x$P = 60°, ∢OP$_x$P' = 60°, ORx = 100, ∢OR$_x$R' = 45°, iar planul [Q] este un plan axial (paralel cu linia de pământ).

Rezolvare aplicația 3.13

Se reprezintă cele trei plane, iar apoi se intersectează două câte două plane [P] și [Q] și [R] cu [Q]. Se unesc urmele h_1 cu v_1 și se obține proiecția orizontală a dreptei D_1. Se unesc urmele h_2 cu v_2 și se obține proiecția orizontală a dreptei D_2. La intersecția celor două drepte se obține punctul I(i, i'), punctul de intersecție al planelor [P], [Q] și [R].

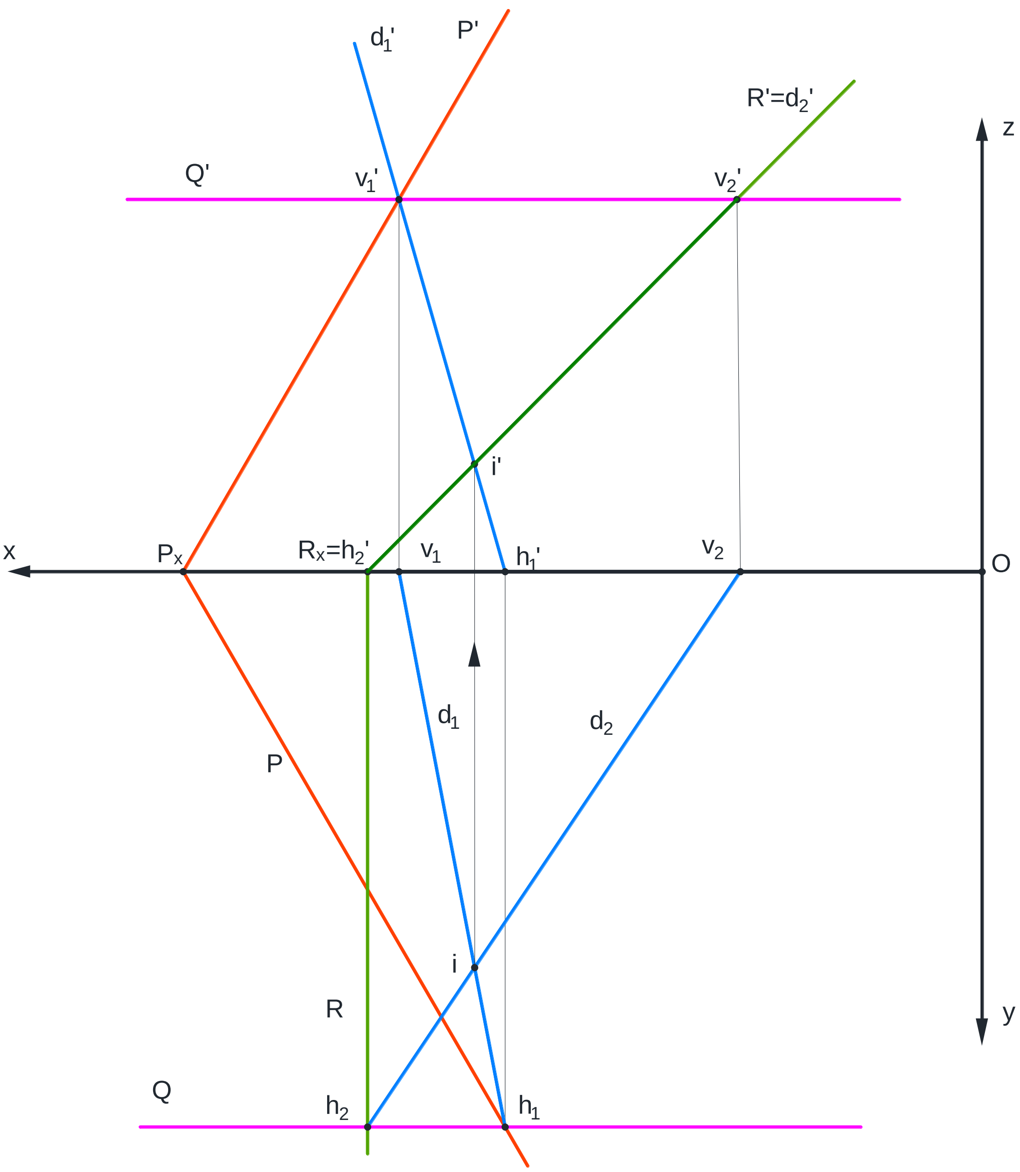


Fig. 3.13. Rezolvare aplicația 3.13

3.14. Să se determine punctul de intersecţie dintre dreapta (MN) şi placa triunghiulară [ABC]. Să se stabilească vizibilitatea dreptei, considerând placa opacă. Se cunosc: A(110, 40, 40); B(60, 10, 80); C(30, 70, 20), iar pentru segmentul de dreaptă (MN) se cunosc coordonatele punctelor M(100, 50, 80); N(25, 5, 10).

Rezolvare aplicația 3.14

Se reprezintă în epură proiecțiile punctelor care definesc placa triunghiulară pe ambele plane de proiecție. Se reprezintă proiecțiile punctelor M și N, trasându-se proiecțiile dreptei, d și d'. În planul vertical prin proiecția dreptei d' se duce un plan de capăt, plan care conține proiecția dreptei MN, astfel se obțin două puncte de intersecție 1' și 2'. Prin cele două puncte se trasează linii de ordine pe planul orizontal de proiecție până la intersecția muchiilor corespondente. Se obțin punctele 1 și 2. Se unesc cele două puncte 1 și 2 și se poate observa că acest segment intersectează segmentul de dreaptă MN în punctul I(i, i'). Acesta este punctul de intersecție dintre segmentul de dreaptă MN și placa triunghiulară. Se trasează linie de ordine în plan vertical și se determină astfel și proiecția verticală a punctului i'. Se studiază vizibilitatea, astfel din punctele de concurență aparentă se reprezintă în cele două plane de proiecție punctele unde aparent dreapta intersectează placa triunghiulară. Se stabilește de pe epură care punct are cota sau depărtarea mai mare, considerând placa opacă.

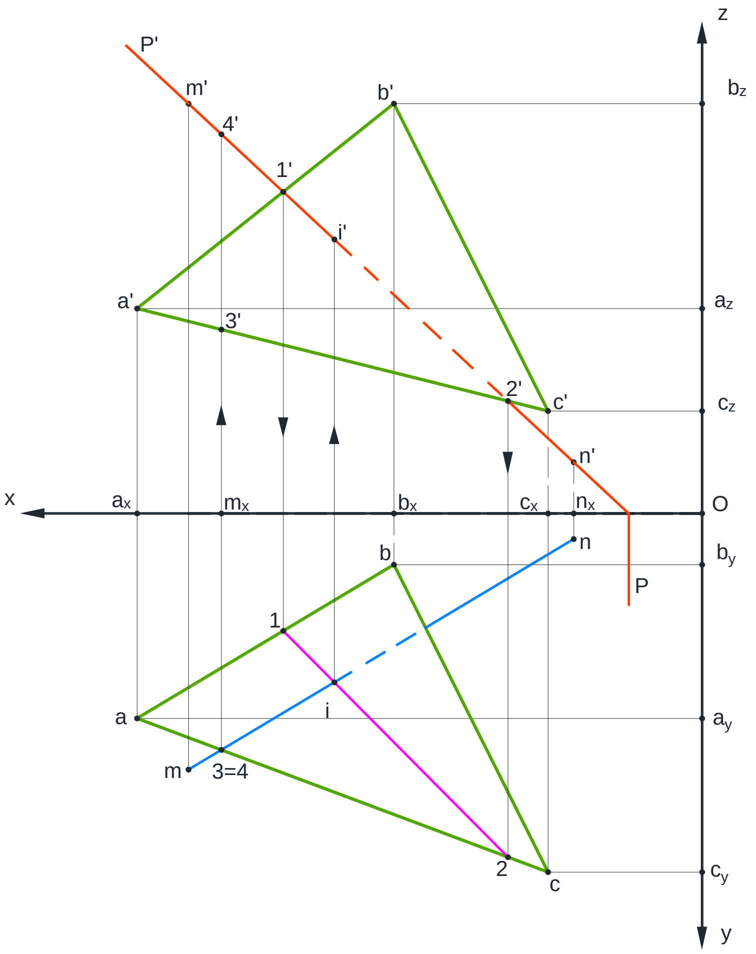


Fig. 3.14. Rezolvare aplicația 3.14

3.15. Să se determine dreapta de intersecţie dintre plăcile triunghiulare [ABC] și [MNP]. Să se studieze vizibilitatea celor două plăci în raport cu segmentul de intersecție, considerând plăcile opace.

Se cunosc [ABC]: A(100, 20, 50); B(50, 80, 50); C(10, 30, 50)

[MNP]: M(50, 5, 90); N(10, 70, 20); P(105, 65, 5).

Rezolvare aplicația 3.15

Se reprezintă în epură puncte care formează cele două plăci triunghiulare.

Se poate observa în planul vertical poziția proiecțiilor planului triunghiului a'b'c' care este situat într-un plan de nivel. Prin proiecția triunghiului a'b'c' se trasează un plan de nivel [N], (N'=g').

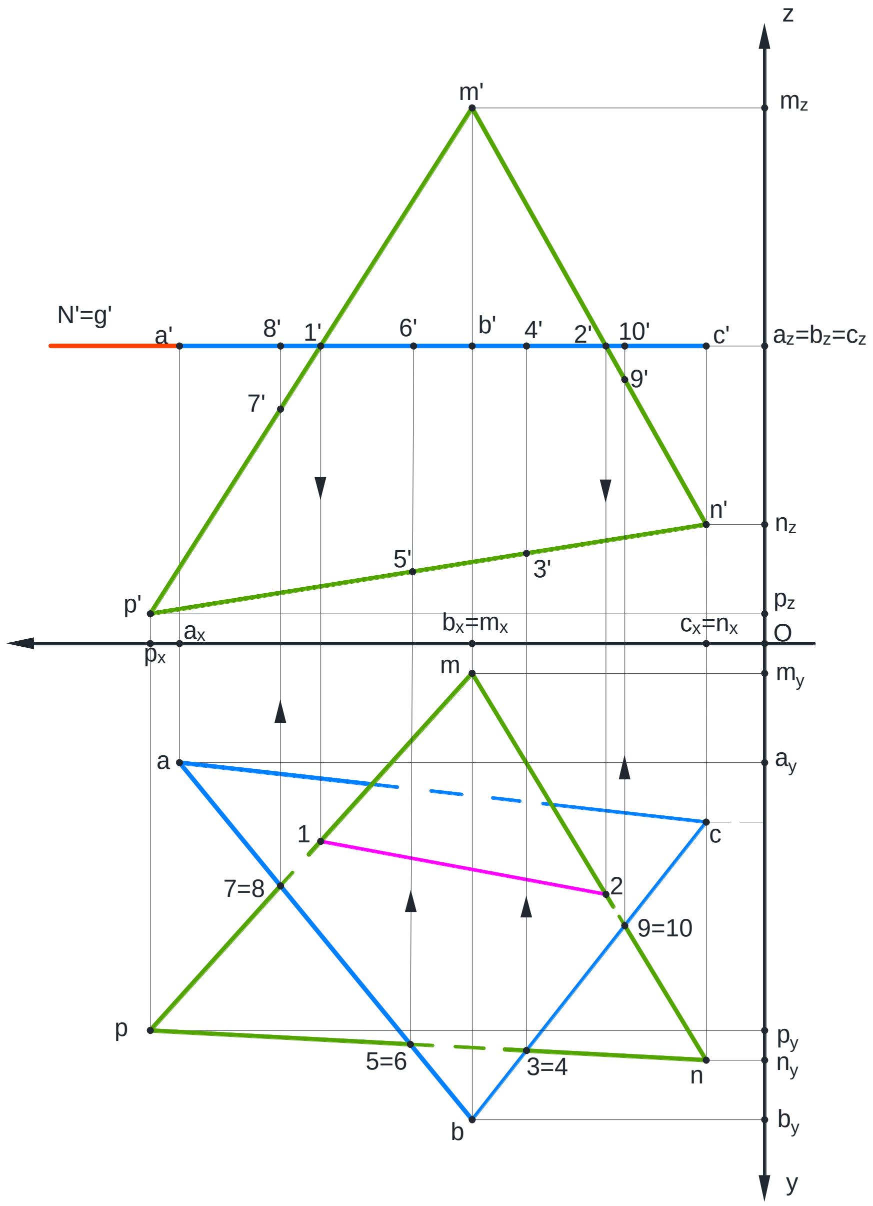


Fig. 3.15. Rezolvare aplicația 3.15

Acest plan de nivel va intersecta două din laturile triunghiului [MNP]. Astfel, notăm cu 1' respectiv 2' cele două puncte de intersecție. Se trasează linie de ordine din cele două puncte pe planul orizontal, pe planul triunghiului [MNP] și se obțin punctele 1 și 2. Se unesc cele două puncte cu un segment de dreaptă, acesta este segmentul de intersecție dintre cele două plăci triunghiulare. Pentru studiul vizibilității se poziționează în planul orizontal punctele de intersecție aparentă și se trasează linii de ordine în planul vertical. În funcție de valoarea cotelor și a depărtărilor se stabilește care laturi ale unui triunghi (sau segmente) se află deasupra laturilor celuilalt triunghi.

3.16. Să se determine dreapta de intersecţie dintre placa triunghiulară [MNP] şi placa patrulateră [ABCD]. Să se studieze vizibilitatea celor două plăci, considerând plăcile opace.

Se cunosc: M(150, 110, 20); N(100, 5, 100); P(40, 90, 25)
A(150, 70, 60); B(100, 20, 10); C(20, 60, 50); D(80, 110, z)

Rezolvare aplicația 3.16

Se reprezintă în epură punctele care determină vărfurile plăcii triunghiulare [MNP] și patrulatere [ABCD].

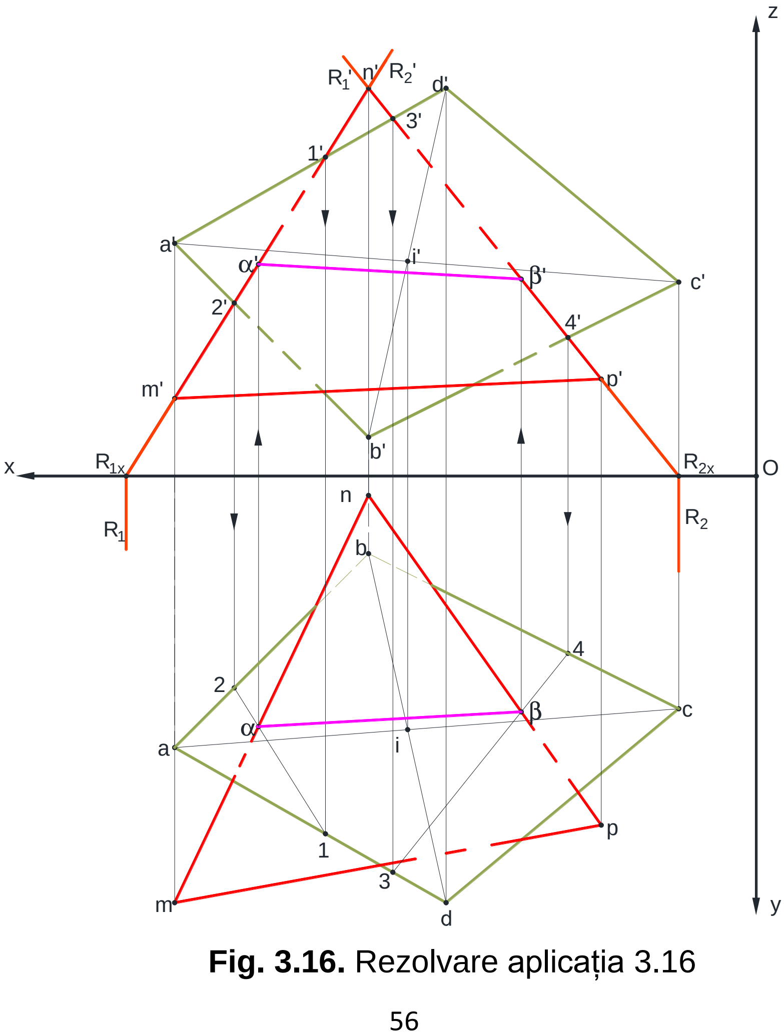


Fig. 3.16. Rezolvare aplicația 3.16

Prin două laturi ale plăcii triunghiulare [MNP] se trasează două plane auxiliare (plane de capăt [R_1] și [R_2]) care intersectează laturile plăcii patrulatere în punctele 1, 2, 3, 4, respectiv laturile AB, BC și AD.

Se unesc cu segmentul de dreaptă 1-2 și se obține punctul α, apoi 3-4 și se obține punctul β. Segmentul de dreaptă αβ este proiecția segmentului de intersecție dintre cele două plăci. Pentru studiul vizibilității se procedează la fel ca și la problemele anterioare, în funcție de mărimea cotei și a depărtării se stabilește vizibilitatea dreptelor. Muchiile care nu se văd fie se sterg în totalitate, fie se reprezintă cu linie întreruptă.

3.17. Să se determine proiecțiile punctului M(m, m') de intersecție dintre o dreaptă oarecare D(d, d') și un plan ce trece prin linia de pământ și punctul A(a, a').

Se cunosc: A(19, 21, 13), iar urmele dreptei D sunt H(55, 18, 0) și V(7, 0, 33).

Rezolvare aplicația 3.17

Planul de capăt [Q] dus prin dreapta D(d, d') intersectează planul dat după dreapta D_3(d_3, d_3'). Această dreaptă întâlnește dreapta D(d, d') în punctul M(m, m'). Pentru a obține dreapta D_3(d_3, d_3') de intersecție dintre cele două plane se utilizează planul auxiliar de nivel [G], dus la cota punctului A, care determină în planul Q dreapta de capăt D_1(d_1, d_1'), iar în planul [P] ce trece prin linia de pământ și punctul A, dreapta fronto-orizontală D_2(d_2, d_2').

Punctul B(b, b') împreună cu punctul Qx determină dreapta de intersecție D_3(d_3, d_3').

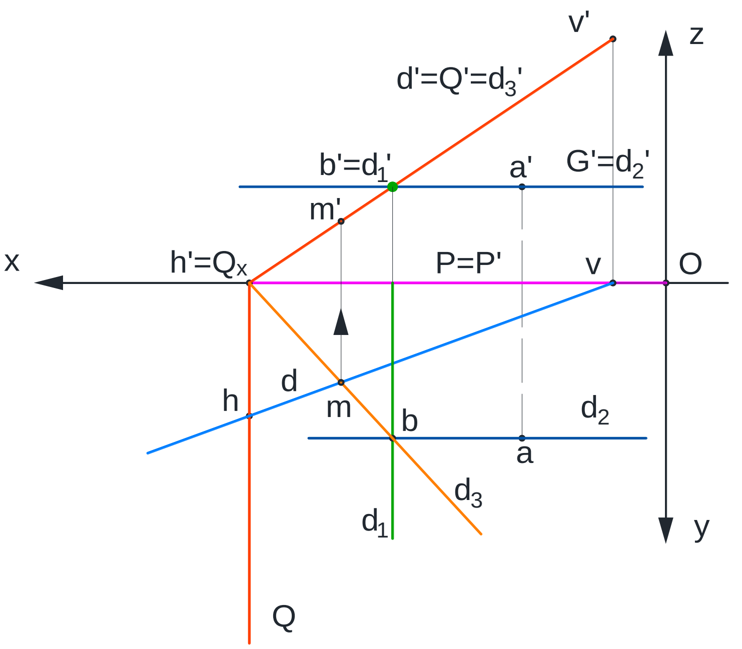


Fig. 3.17. Rezolvare aplicația 3.17

3.18. Prin punctul oarecare A(a, a') să se ducă o dreaptă $D_1(d_1, d_1')$ care să se sprijine pe linia de pământ și pe dreapta D(d, d') dată. Se cunosc: A(27, 7, 20), iar urmele dreptei D(d, d') sunt H(50, 9, 0) și V(32, 0, 21).

Rezolvare aplicația 3.18

Dreapta $D_1(d_1, d_1')$ este conținută în planul [P] determinat de punctul A şi de dreapta D(d, d'). Urmele acestui plan [P] pot fi determinate cu uşurinţă considerând paralela $D_2(d_2, d_2')$ dusă prin punctul A, la dreapta D(d, d'). Proiecţiile dreptei $D_1(d_1, d_1')$ sunt determinate de punctul A(a, a') şi de punctul P_x, în care linia de pământ întâlneşte planul [P].

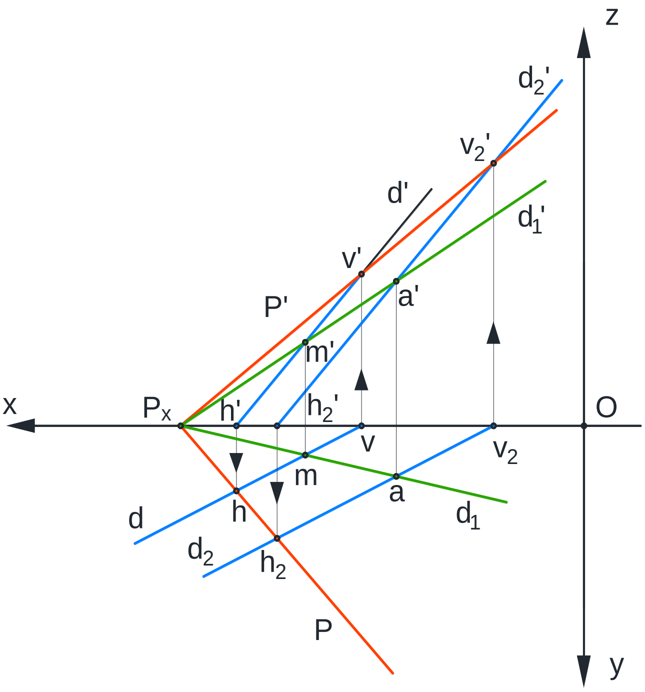


Fig. 3.18. Rezolvare aplicația 3.18

3.19. Să se găsească urmele P și P' ale planului [P] care trece prin punctul M(90, 40, 12) și dreapta de profil (AB), unde A(45, 75, 5) și B(45, 10, 35).

Rezolvare aplicația 3.19

Se determină urmele orizontale și verticale ale dreptelor AM(ma,m'a') și MB(mb, m'b') duse prin punctul M, concurente cu dreapta de profil dată. Unind h cu h_1 și v_1 cu v_1' obținem urmele P și P' ale planului [P] căutat.

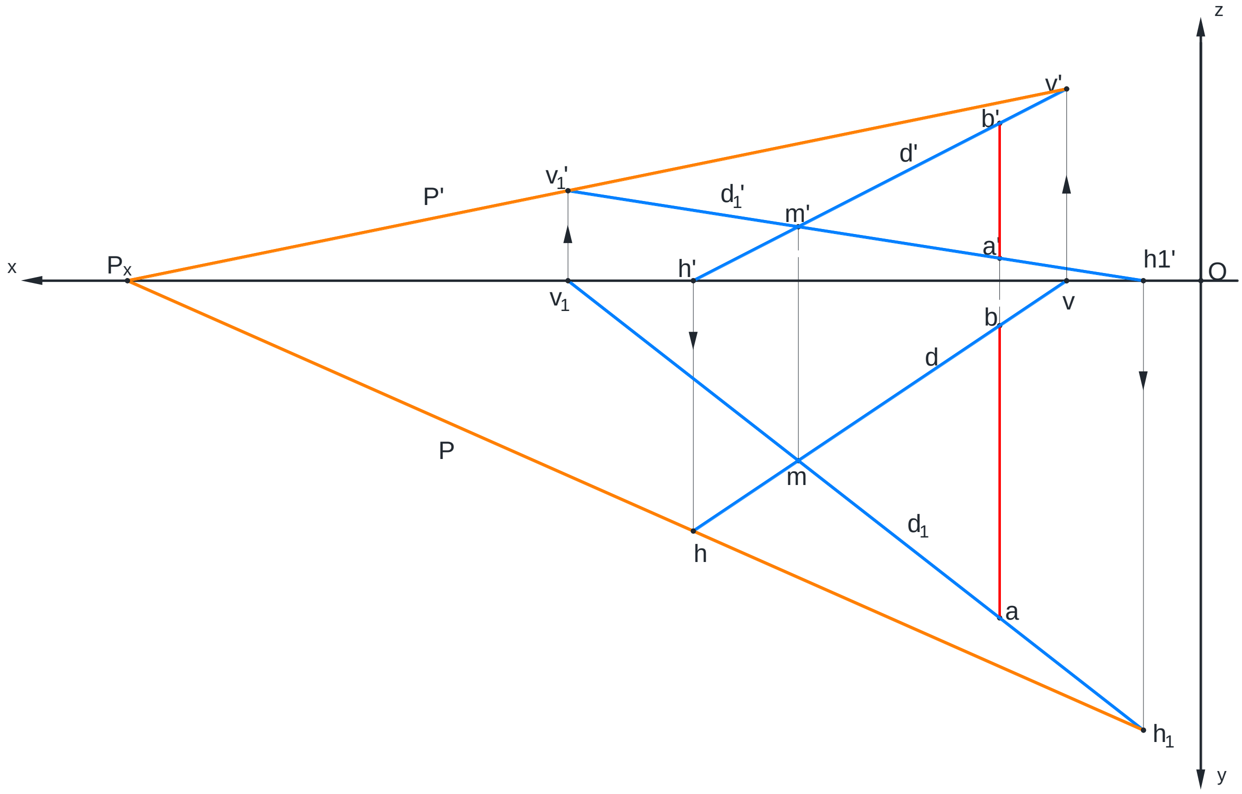


Fig. 3.19. Rezolvare aplicația 3.19

3.20. Să se determine urmele planului P, P' ale planului [P] trasat perpendicular pe primul plan bisector prin dreapta D(d,d'). Se cunosc urmele dreptei H(50, 10, 0) și V(15, 0, 28).

Rezolvare aplicația 3.20

Dreapta D(d,d') întâlnește primul plan bisector în punctul M(m,m'), care se determină luând simetrica proiecției verticale d' față de linia de pământ.

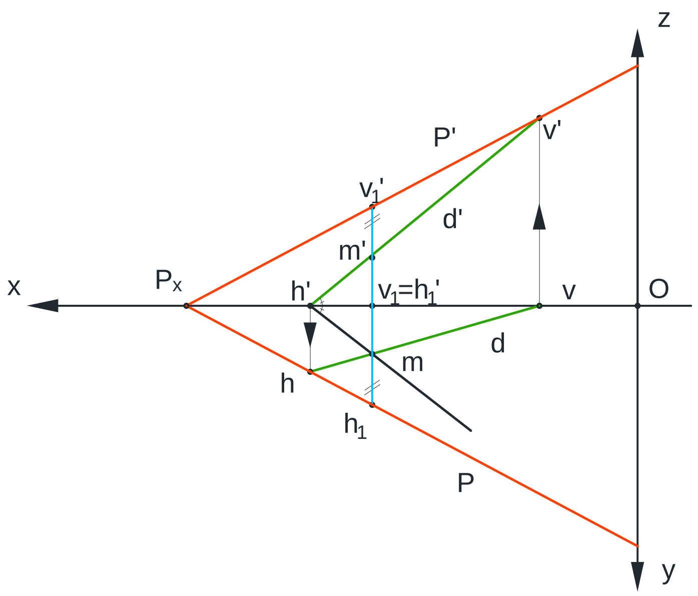


Fig. 3.20. Rezolvare aplicația 3.20

Se consideră dreapta de profil (h_1v_1, $h_1'v_1'$) care trece prin punctul M și ale cărei urme sunt echidistante față de linia de pământ. În acest caz, această dreaptă de profil este perpendiculară pe primul plan bisector. Ea, împreună cu dreapta D(d,d'), determină planul căutat [P].

Ca o verificare, urmele P și P' ale planului [P], obținute prin unirea lui h cu h_1 și respectiv v' cu v_1' trebuie să se întâlnească în același punct P_x de pe linia de pământ.

3.21. Să se determine piciorul perpendicularei coborâte din punctul M(45, 0, 35) pe planul triunghiului [ABC] cu vârfurile A(55, 20, 10), B(40, 45, 40), C(10, 10, 20).

Rezolvare aplicația 3.21

Știind că perpendiculara D(d, d') dusă din punctul M pe planul triunghiului [ABC] este perpendiculară pe orice orizontală, respectiv frontală a acestuia, se construiesc prin vârful C(c, c') – orizontala G(g, g'), iar prin vârful A(a, a') – frontala F(f, f'). Din M(m, m') se trasează d ⊥ g și d' ⊥ f'.

Planul vertical [Q] dus prin dreapta D(d, d') intersectează planul triunghiului [ABC] după dreapta 12(12, 1'2'). Punctul I(i, i') = 12 ∩ D este piciorul perpendicularei trasate din punctul M pe planul triunghiului [ABC].

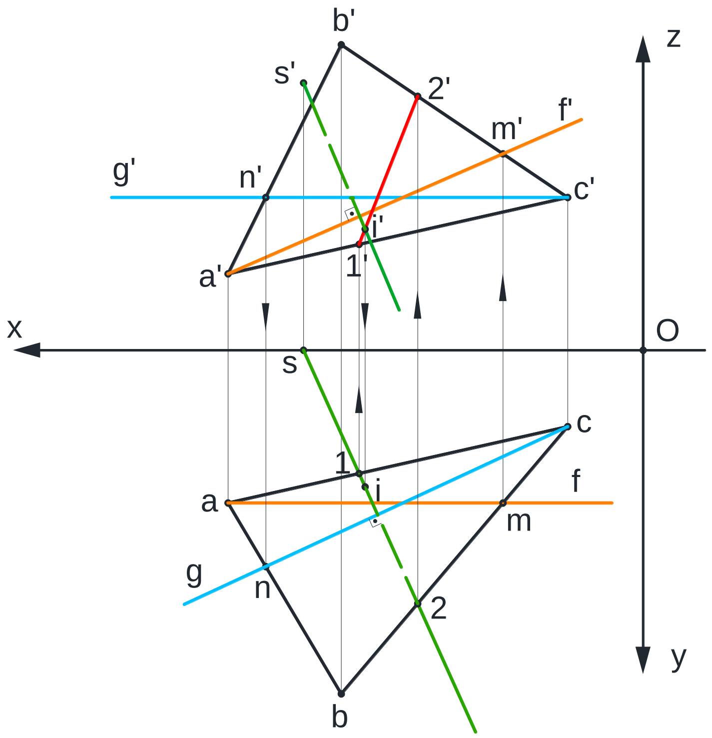


Fig. 3.21. Rezolvare aplicația 3.21

Probleme propuse

3.22. Să se determine urmele planului definit prin punctele A(30, 20, 15); B(50, 10, 35) și C(75, 6, 25).

3.23. Se dă planul [P] dat prin urme: OP_x = 50, OP_y = 40, OP_z = 25 și punctul A(25, 10, 20) exterior planului. Se cere să se construiască planul [Q] care conține punctul A și este paralel cu planul [P].

3.24. Prin segmentul de dreaptă AB, A(20, 15, 10) și B(55, -17, 30) să se ducă un plan paralel cu axa Ox și să se reprezinte linia sa de cea mai mare pantă față de planul [H], dusă prin punctul A.

3.25. Să se găsească urmele unui plan determinat de o dreaptă în poziție oarecare concurentă cu o dreaptă de profil.

3.26. Să se găsească urmele unui plan determinat de o dreaptă în poziție oarecare concurentă cu o dreaptă de capăt.

3.27. Să se găsească urmele unui plan determinat de două drepte orizontale și de două drepte frontale paralele.

3.28. Să se determine depărtarea punctului A(40, ay, 13) situat în planul determinat de punctele: B(11, 10, 14); C(33, 15, 28) și D(19, 16, 25).

3.29. Să se găsească intersecția dintre două plane: primul definit prin punctele A(26, 13, 3); B(42, 8, -20); C(15, 17, 15), iar al doilea prin axa Ox și punctul D(60, 30, 25).

3.30. Să se ducă prin punctul C(30, 12, 10) o paralelă la planul [B_I], care să fie concurentă cu dreapta ce trece prin punctele: A(6, 8, 10) și B(36, 20, 24).

3.31. În planul [P] definit prin urme OP_x =80, OP_y = 50, OP_z = 60, să se construiască o orizontală D(d, d') situată la 22 mm faţă de planul orizontal.

3.32. Se dau punctele A(50, 15, 25), B(10, -10, 60) , C(70, -50, 40) și M(35, 20, 25). Să se determine urmele planului [P] definit de punctele A, B și C și să se construiască prin punctul M(m, m'), planul [R], paralel cu planul [P].

3.33. Să se construiască un plan [P] care conține punctul M(30, 10, 20) și este paralel cu dreapta D(d, d') din spațiu, determinată de punctele A(60, 20, 10) și B(40, 10, 30).

3.34. Se dau punctele OP_x = 80, H_1(60, 15, 0), V_1(60, 0, 25) care definesc planul [P] și dreapta D_2(d_2, d_2’): H_2(20, 15, 0), V_2(35, 0, 25), ca linia de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție, în planul [Q]. Să se găsească proiecțiile dreptei de intersecție dintre planele [P] și [Q].

3.35. Să se găsească proiecțiile dreptei de intersecție dintre două plane, primul [S], fiind dat prin dreptele concurente AB și AC, iar al doilea plan [U], prin urmele sale U și U’. Se cunosc: A(60, 35, 35), B(100, 12, 10), C(40, 20, 28); OU_x = 15, OU_y = -5, OU_z = -10.

3.36. Se dă planul [P] definit prin urme: OP_x = 70, OP_y = 50, OP_z = 60 şi dreapta D(d, d’): A(51, 31, 46); B(16, 16, 6). Să se determine punctul de intersecţie I(i, i’) dintre dreapta D şi planul [P].

3.37. Să se afle dreapta de intersecție a două plane [P] și [Q] care sunt definite prin liniile lor de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție: HV definită de coordonatele H(20, 30, 0), V(50, 0, 40), și respectiv H_1V_1 determinată de coordonatele H_1(80, 30, 0), V_1(40, 0, 30).

3.38. Să se determine intersecția a trei plane care ocupă următoarele poziții în spațiu: [P] – plan de capăt cu OPx = 60, ce trece prin punctul A(40, 0, 20); [Q] – plan de nivel de cotă z = 30; [R] = [B_I].

3.39. Se dă segmentul de dreaptă (AB): A(50, 15, 20), B(25, 5, 10) și planul [P] definit de urmele OP_x = 100, unghiul dintre OP_x și OP_y este 30°, și unghiul dintre OP_x și OP_z este 45°. Să se afle punctul de intersecție dintre dreapta (AB) și planul [P].

3.40. Să se găsească punctul în care dreapta D(d, d’): V(80, 0, 20), B(30, 55, 20) intersectează planul de front situat la 30 mm față de planul vertical de proiecție.

3.41. Să se determine punctul în care segmentul de dreaptă (MN): M(80, 30, 60), N(20, 40, 10) intersectează placa triunghiulară opacă [ABC]: A(90, 50, 50), B(10, 30, 40), C(50, 10, 10) și să se studieze vizibilitatea dreptei.

3.42. Să se determine proiecțiile punctului în care dreapta D(d,d’): H(90, 60, 0), V(25, 0, 45) întâlnește planul triunghiului ABC: A(100, 20, 25), B(10, 5, 15), C(50, 60, 50). Să se studieze vizibilitatea dreptei.

3.43. Să se determine dreapta de intersecție dintre două plăci plane opace și să se studieze vizibilitatea laturilor:
[ABC] – A(100, 40, 25), B(20, 15, 55), C(5, 35, 15);
[MNP] – M(85, 20, 10), N(35, 50, 55), P(20, 10, 10).

3.44. Prin punctul A(30, 25, 15) să se construiască o dreaptă perpendiculară pe planul [P]: OP_x = 90, OP_y = 70, OP_z = 50 și să se determine proiecțiile punctului în care perpendiculara înțeapă planul.

3.45. Prin punctul A(10, 10, 25) să se ducă planul perpendicular pe dreapta (BC) dată prin coordonatele punctelor B(70, 15, 10) și C(35, 30, 28).

3.46. Să se construiască planul paralel cu [H] care conține punctul M(60, 40, 30), știind că orizontala care trece prin M face cu planul [V] un unghi de 30°. În planul astfel determinat, să se construiască dreapta de capăt ce trece prin punctul M.

3.47. Să se construiască planul paralel cu planul [V] care conține punctul M(60, 40, 40), știind că frontala care trece prin punctul M formează cu planul [H] un unghi de 45°. În planul determinat, să se ducă verticala care trece prin punctul M.

3.48. Prin punctul M(70, 40, 50), să se construiască urmele planului perpendicular pe [V] știind că frontala punctului M formează cu planul [H] un unghi de 45°. Să se ducă dreapta de capăt din plan care trece prin punctul M.

3.49. Să se reprezinte epura triunghiului [ABC]: A(30, 5, 25), B(10, 10, 15), C(20, 20, 5) și să se construiască urmele planului care conține triunghiul dat.

3.50. În planul [P] dat prin urme: OP_x = 30, OP_y = 50, OP_z = 70, să se construiscă linia de cea mai mare pantă față de planele [H] și [V], printr-un punct C din plan.

3.51. Se dau punctele OP_x = 70, H(10, 20, 0), V(45, 0, 35) și M(20, y, -10). Să se construiască urmele planului [P] definit de punctele P_x, H și V. Să se găsească proiecția orizontală a unui punct, situat pe o orizontală din plan.

3.52. Planul [P] fiind: a) plan vertical ce formează unghiul α = 45° cu planul [H]; b) plan de capăt înclinat cu 30° față de planul [H]; c) plan de profil înclinat cu 60° față de planul [H], să se ducă dreptele particulare posibile ale planului.

3.53. Se dau trei puncte necoliniare A(47, 47, 8); B(66, 14, 19); C(27, 37, 19). Se cere să se determine urmele P, P', P'' ale planului definit de cele trei puncte.

3.54. Să se determine punctul de intersecție dintre dreapta D(d, d') definită de punctele M și N și placa triunghiulară [ABC]. Să se studieze vizibilitatea dreptei după intersecție. Se cunosc: A(110, 40, 40); B(60, 10, 80); C(30, 70, 20); M(100, 50, 80); N(25, 5, 10).

3.55. Să se determine dreapta de intersecție dintre o placă triunghiulară [ABC], situată într-un plan de nivel de cotă 50 mm și o placă triunghiulară [MNP], situată într-o poziție oarecare. Să se studieze vizibilitatea. Se cunosc: A(100, 20, 50); B(50, 80, 50); C(10, 30, 50); M(50, 5, 90); N(10, 70, 20); P(105, 65, 5)

3.56. Să se determine dreapta de intersecție dintre plăcile [ABCD] și [PQR], utilizând plane proiectante. Să se studieze vizibilitatea. Se cunosc: A(150, 70, 60); B(100, 20, 10); C(20, 60, 50); D(80, 110, z), M(150, 110, 20); N(100, 5, 100); P(40, 90, 25).

3.57. Să se determine proiecțiile punctului de intersecție dintre trei plane [P], [Q], [R], date prin urme: [R] – plan de capăt, [P] – plan oarecare, [Q] – plan paralel cu Ox.
$OR_x = 100$; $\sphericalangle OR_xR' = 45°$;
$OP_x = 130$; $\sphericalangle OP_xP = 60°$; $\sphericalangle OP_xP' = 60°$;
$OQ_y = 100$mm; $OQ_z = 40$mm.

3.58. În planul [P] definit prin urme $OP_x = 85$, $OP_y = 40$, $OP_z = 50$ să se construiască o dreaptă ce trece prin punctul B(40, z, 15).

3.59. Să se determine urmele planului [Q], definit de punctul A(25, 22, 10) şi de dreapta de capăt D(d, d') dată de punctele B(45, 30, 25), C(45, 10, 25).

3.60. Se dau două plăci triunghiulare opace, [ABC]: A(60, 10, 7); B(30, 45, 45); C(16, 0, 4) şi [MNQ]: M(55, 5, 38); N(45, 45, 0); Q(10, 23, 28). Să se determine dreapta de intersecţie dintre cele două plăci.

3.61. Să se construiască urmele planului [P], determinat de punctele A, B și C, având următoarele coordonate:
a) A(10, 53, 33); B(30, 14, 54); C(60, 20, 17);
b) A(20, 10, 50); B(50, 10, 50); C(65, 40, 10);
c) A(20, 40, 35); B(20, 40, 15); C(60, 15, 25).

3.62. Să se determine dreapta de intersecție dintre plăcile triunghiulare [ABC] și [MNP]. Să se stabilească vizibilitatea laturilor, considerând plăcile opace. Vârfurile triunghiurilor au următoarele coordonate:
A(170, 70, 30); B(55, 110, 96); C(10, 15, 15);
M(160, 20, 15); N(20, 60, 10); P(135, 100, 100)

3.63. Să se determine dreapta de intersecție dintre plăcile triunghiulare [ABC] și [MNP]. Să se stabilească vizibilitatea laturilor, considerând plăcile opace. Vârfurile triunghiurilor au următoarele coordonate:
A(175, 65, 30); B(10, 115, 110); C(75, 20, 15);
M(170, 20, 60); N(100, 5, 100); P(20, 125, 15).

3.64. Se dau punctele: A(68, 28, 25); B(60, 28, 35); C(40, 8. 25); H(50, 28, 0) și V(60, 0, 59). Se cere:
- să se construiască urmele planului [P], definit de punctele A, B și V;
- să se construiască urmele planului [Q], definit de punctele A, C și H;
- să se verifice dacă dreapta de intersecție $D_1(d_1, d_1')$ a planelor [P] și [Q] trece prin punctul A;

- să se construiască urmele planului [R], care este paralel cu planul [P], știind că trece prin punctul M(155, 38, 42);
- să se determine adevărata mărime a unghiului pe care îl face planul [R] cu planul orizontal de proiecție [H].

3.65. Cunoscând punctele A(25, 5, 20); B(58, 29, 0); Q_x(111, 0, 0); H(50, 60, 0) și V(80, 0, 27), se cer următoarele:
- să se construiască urmele planului [P], având dreapta AB(ab, a'b') ca linie de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție;
- să se construiască urmele planului [Q], care trece prin punctele Q_x, H și V;
- să se verifice dacă dreapta de intersecție $D_1(d_1, d_1')$ dintre planele [P] și [Q];
- să se construiască punctul G(g, g') de intersecție dintre dreapta AB(ab, a'b') și planul [Q];
- să se construiască urmele planului [R] paralel cu planul [Q], știind că trece prin punctul M(150, 23, 20);

3.66. Se dau punctele A(80, 16, 15); B(40, 16, 47); C(34, 33, 31); H(5, 25, 0) și V(30, 0, 60). Se cere:
- să se construiască urmele planului [P], trecând prin punctele A, B, C;
- se construiască urmele planului [Q], paralel cu axa Ox și conținând dreapta HV(hv, h'v');
- să se determine intersecția $D_1(d_1, d_1')$ a planelor [P] și [Q];
- să se construiască urmele planului [R], care trece prin punctul M(150, 20, 45) și este paralel cu planul [P];

3.67. Cunoscând coordonatele punctelor A(70, 34, 8); B(88, 6, 53); C(110, 0, 62) și V(129, 0, 30), se cere: să se determine urmele planului [Q], definit de punctul C(c, c') și dreapta D(d, d'); să se determine urmele planului [T] perpendicular pe planul [R], știind că punctele N(185, 7, 17) și T_x(175, 0, 0) aparțin planului.

3.68. Se dau punctele: A(75, 38, 20); B(30, 7, z); C(80, 50, 0). Să se construiască urmele planului [P] definit de punctul C(c, c') și orizontala AB(ab, a'b').

3.69. Se dau punctele A(35, 65, 20); B(80, 15, 60); C(70, 65, 0); D(85, 32, 30); $P_x = 145$ și $Q_x = 15$. Se cere:
- să se construiască urmele planului [P], definit de punctele A, B și P_x; să se construiască urmele planului [Q], definit de punctele C, D și Q_x; să se determine urmele planului [R], paralel cu planul [P], știind că conține punctul M(200, 20, 30).

3.70. Se dau segmentele de dreaptă AB(ab, a'b'), având A(170, 70, 20); B(205, 18, 65), și dreapta verticală D(d, d'), având urma orizontală definită de punctul H(185, y, 0), concurentă cu segmentul de dreaptă AB(ab, a'b') în punctul E(185, y, z). Se cere:
- să se construiască urmele planului [P], definit de dreapta AB(ab, a'b') și verticala D(d, d')
- să se construiască urmele planului [R], perpendicular pe planul [P], știind că trece prin punctul E de concurență a dreptelor AB și verticala D(d, d'), precum și prin punctul R_x(95, 0, 0).

CAPITOLUL IV

METODELE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE

METODA SCHIMBĂRII PLANELOR DE PROIECȚIE

4.1. Se consideră triunghiul [ABC] ale cărui vârfuri sunt punctele date de coordonatele A(16, 44, 8); B(38, 7, 38); C(65, 32, 25). Printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, să se transforme planul acestui triunghi într-un plan de capăt, apoi prin a doua schimbare de plan să se determine adevărata mărime a triunghiului dat.

Rezolvare aplicația 4.1

Primul pas este construcția unei orizontale CM(cm, c'm') prin vârful C în planului triunghiului, apoi se efectuează schimbarea de plan vertical de proiecție.

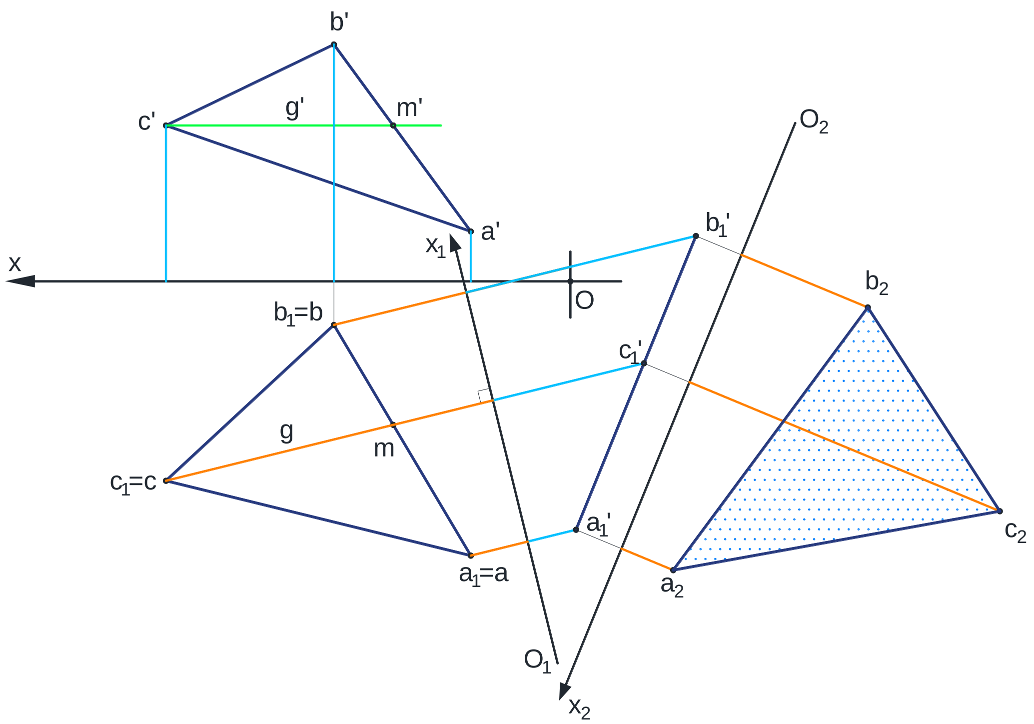


Fig. 4.1. Rezolvare aplicația 4.1

Se ia o nouă linie de de pământ notată cu O_1x_1 și se trasează o perpendiculară pe prelungirea orizontalei care pleacă din punctul C (unul din vârfurile triunghiului). Această nouă axa se va trasa la o distanță aleatorie față de planul triunghiului [ABC] și orientată în sens invers axei Ox.

Această nouă linie de pământ este perpendiculară pe cm și apoi se vor măsura cotele punctelor A, B și C și se poziționează de la axa O_1x_1 în continuare. Aceste cote se regăsesc în datele problemei.

Se obține noua proiecție verticală $a_1'b_1'c_1'$ a triunghiului după un plan de capăt. Cele trei vârfuri ale triunghiului obținut sunt coliniare. Pentru a determina adevărata mărime a triunghiului [ABC] se realizează a doua schimbare de plan, o schimbare de plan orizontal de proiecție și se obține proiecția triunghiului $a_2b_2c_2$. Se alege o nouă axă O_2x_2 care se trasează paralel cu planul triunghiului $a_1'b_1'c_1'$, se transformă planul plăcii în plan de nivel.

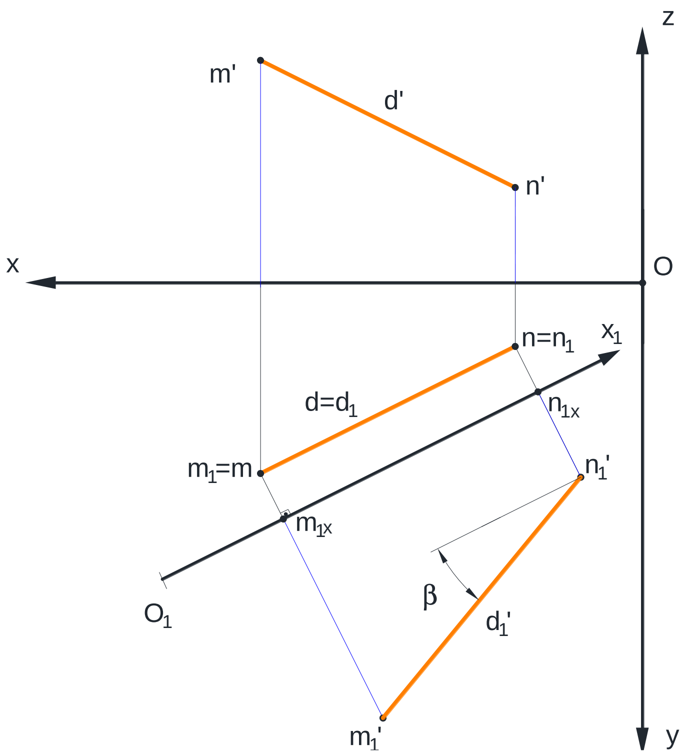
Se trasează perpendiculare din fiecare vârf al triunghiului pe linia de pământ O_2x_2, după care se măsoară depărtările (distanța de la vârfurile a, b, c până la axa O_1x_1), iar acele depărtări se vor reprezenta de la axa O_2x_2. Se obține astfel adevărata mărime a triunghiului [ABC] utilizând dubla schimbare a planelor de proiecție.

4.2. Să se determine lungimea reală a segmentului de dreaptă MN definit prin punctele sale: M(60, 30, 35) și N(20, 10, 15) precum și unghiurile pe care le formează cu planele de proiecție.

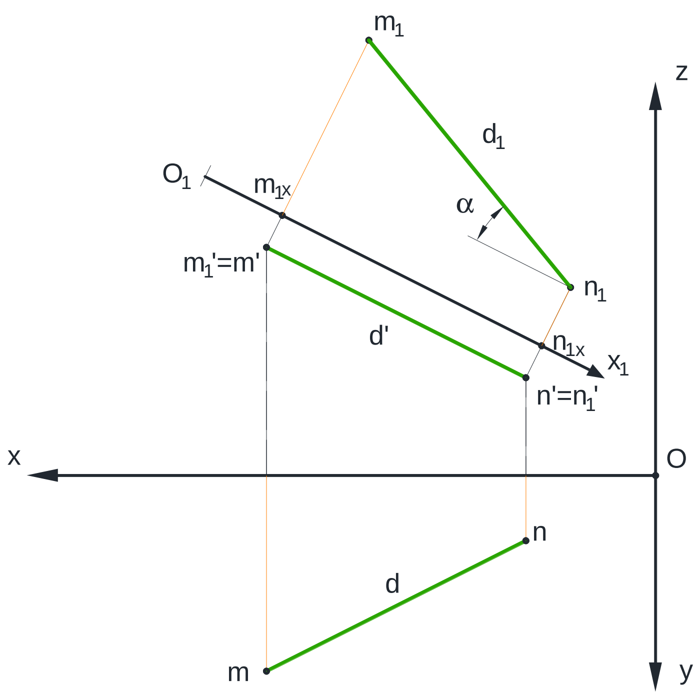
Rezolvare aplicația 4.2

Segmentul de dreaptă MN se proiectează în adevărată mărime pe un plan dacă este paralel cu acel plan. Prin urmare, dacă segmnetul de dreaptă MN se transformă, prin schimbarea planului vertical de proiecție, în poziție de frontală, M_1N_1, paralel cu planul vertical de proiecție nou ales [V], el se proiectează în adevărată mărime pe acel plan, MN = $m_1'n_1'$, iar unghiul β dintre proiecția verticală $m_1'n_1'$ și axa O_1x_1 este unghiul pe care segmentul dat îl formează cu planul orizontal [H], (fig. 4.2a). Proiecția d_1 fiind paralelă cu planul vertical de proiecție [V] înseamnă că s-a modificat poziția dreptei din dreaptă oarecare în dreaptă particulară, respectiv într-o frontală.

În continuare, pentru a determina adevărata mărime a segmentului de dreaptă MN, (reprezentat în figura b) se efectuează o nouă schimbare de plan orizontal de proiecție, care va conduce la determinarea lungimii reale a segmentului de dreaptă MN, proiectat pe noul plan orizontal de proiecție, MN = m_1n_1 precum și a unghiului α dintre segmentul MN și planul vertical [V] de proiecție. Proiecția d' este paralelă cu planul orizontal de proiecție [H], ceea ce înseamnă că această proiecție este o dreaptă orizontală.



a)



b)

Fig. 4.2. Rezolvare aplicația 4.2

4.3. Să se determine adevărata mărime a distanțelor cuprinsă între dreptele paralele D(d, d’) și D_1’(d_1, d_1’), utilizând metoda schimbării planelor de proiecție. Se dau coordonatele punctelor care definesc dreptele: A(90, 30, 10); B(55, 5, 40); C(75, 35, 10); E(45, 14, 36)

Rezolvare aplicația 4.3

Se reprezintă în epură proiecțiile care definesc cele două drepte. Pentru aceasta se aleg segmentele AB și CE respectiv pe cele două drepte D și D_1 și se efectuează o schimbare de plan vertical de proiecție, urmată de o schimbare de plan orizontal de proiecție, transformând dreptele în frontale, iar apoi în verticale. Axa O_1x_1 se trasează paralel cu proiecțiile d și d_1. Se duc perpendiculare pe noua axă, iar apoi se măsoară cotele punctelor de la axa O_1x_1 în continuarea perpendicularelor și obținându-se proiecțiile dreptelor din planul vertical [V]. Pentru a doua schimbare de plan se trasează la o distanță aleatorie axa O_2x_2 perpendiculară pe proiecțiile dreptelor, se măsoară depărtările punctelor a, b, c, e până la axa O_1x_1. Se reprezintă de la axa O_2x_2 în continuarea celor două perpendiculare duse din proiecțiile punctelor a_1’b_1’c_1’e_1’ și se obțin proiecțiile punctelor a_2b_2 suprapuse, la fel și proiecțiile c_2e_2, dreptele transformându-se din drepte frontale la prima schimbare de plan în drepte verticale la a doua schimbare de plan. Dreptele verticale sunt drepte perpendiculare pe planul [H] de proiecție. Adevărata mărime a distanței ℓ se măsoară între proiecțiile orizontale ale celor două verticale.

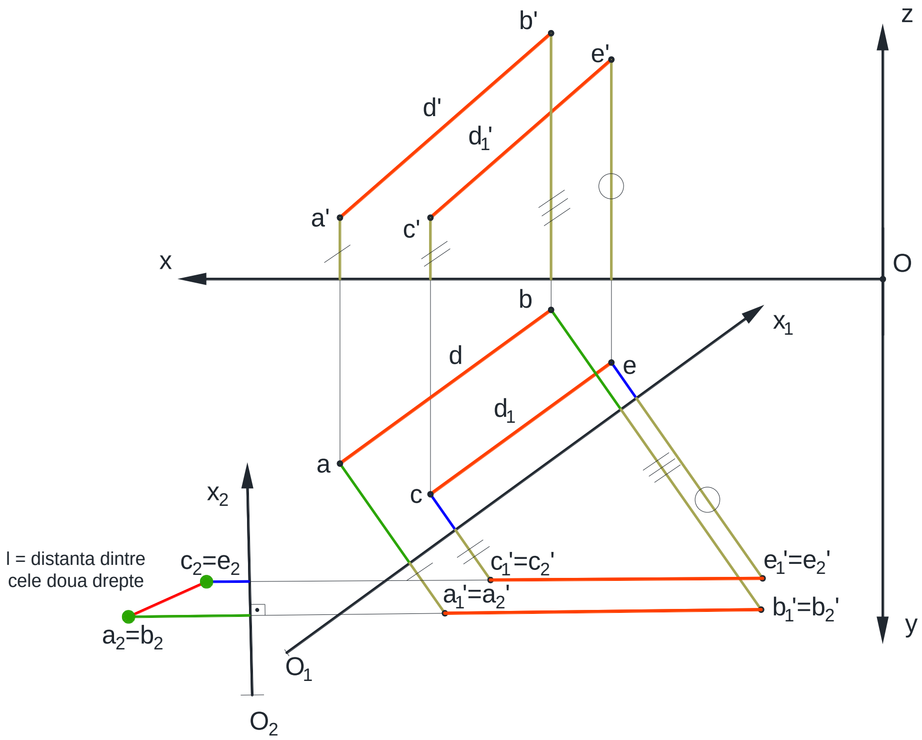


Fig. 4.3. Rezolvare aplicația 4.3

4.4. Să se determine, printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, distanța dintre punctul A(a, a') și planul [P] dat prin urme $OP_x = 100$, $OP_y = 65$, $OP_z = 85$, iar punctul A are coordonatele A(35, 65, 75).

Rezolvare aplicația 4.4

Se transformă planul [P] în plan de capăt, luând linia de pământ axa O_1x_1 perpendiculară pe urma orizontală P a planului. Noua proiecție verticală a punctului A este a_1', iar perpendiculara a_1's_1' pe noua urmă verticală P_1' a planului de capăt măsoară distanța de la punctul A la planul dat.

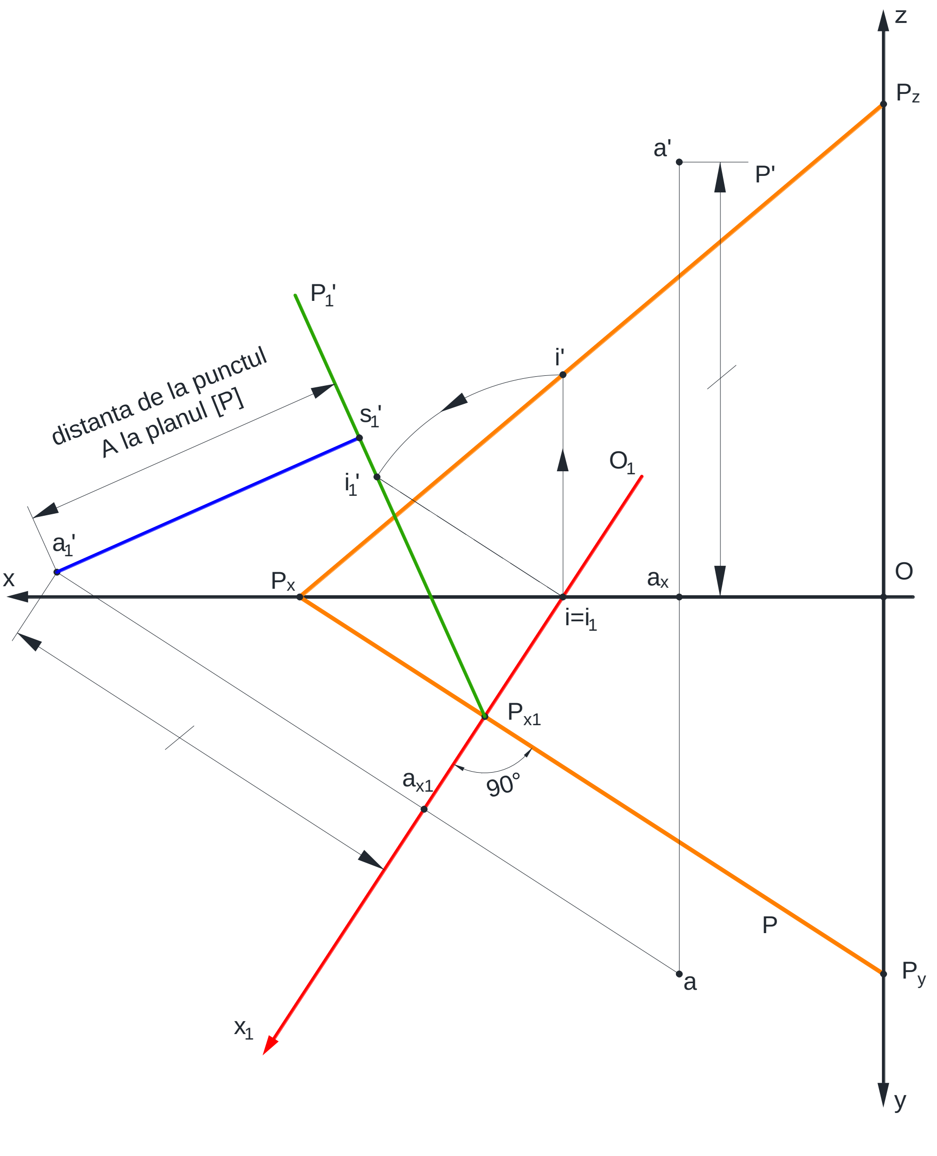


Fig. 4.4. Rezolvare aplicația 4.4

4.5. Să se găsească adevărata mărime a triunghiului ABC prin metoda schimbării planelor de proiecție. Se cunosc: A(100, 10, 65); B(75, 75, 10); C(5, 50, 35).

Rezolvare aplicația 4.5

Se reprezintă punctele în epură, apoi se reprezintă orizontala planului trasată printr-un vârf al triunghiului. Perpendicular pe această orizontală se va trasa axa O_1x_1. Se duc perpendiculare pe noua linie de pământ din vârfurile triunghiului. De la această nouă axă se vor măsura cotele celor trei puncte. Unind punctele obținute se obține planul triunghiului $a_1'c_1'b_1'$, proiecțiile fiind coliniare. S-a transformat planul plăcii în plan de capăt. Orizontala g fiind dreaptă perpendiculară pe planul vertical [V] de proiecție aceasta devine dreaptă de capăt.

La prima schimbare de plan, planul triunghiului [ABC] devine plan de capăt, la a doua schimbare de plan, planul triunghiului devine paralel cu planul [H] (plan de nivel). Astfel, se va trasa a doua axă O_2x_2 care va fi paralelă cu planul triunghiului $[A_1'B_1'C_1']$ la o anumită distanță de acesta. Se trasează apoi perpendiculare din vârfurile triunghiului pe noua axă, iar proiecțiile $a_2b_2c_2$ vor rezulta astfel: se măsoară depărtările punctelor a,b,c din planul orizontal [H] față de axa O_1x_1 și se vor poziționa de la axa O_2x_2 în continuare. Unind proiecțiile $a_2b_2c_2$ rezultă mărimea reală a suprafeței triunghiului $A_2B_2C_2$.

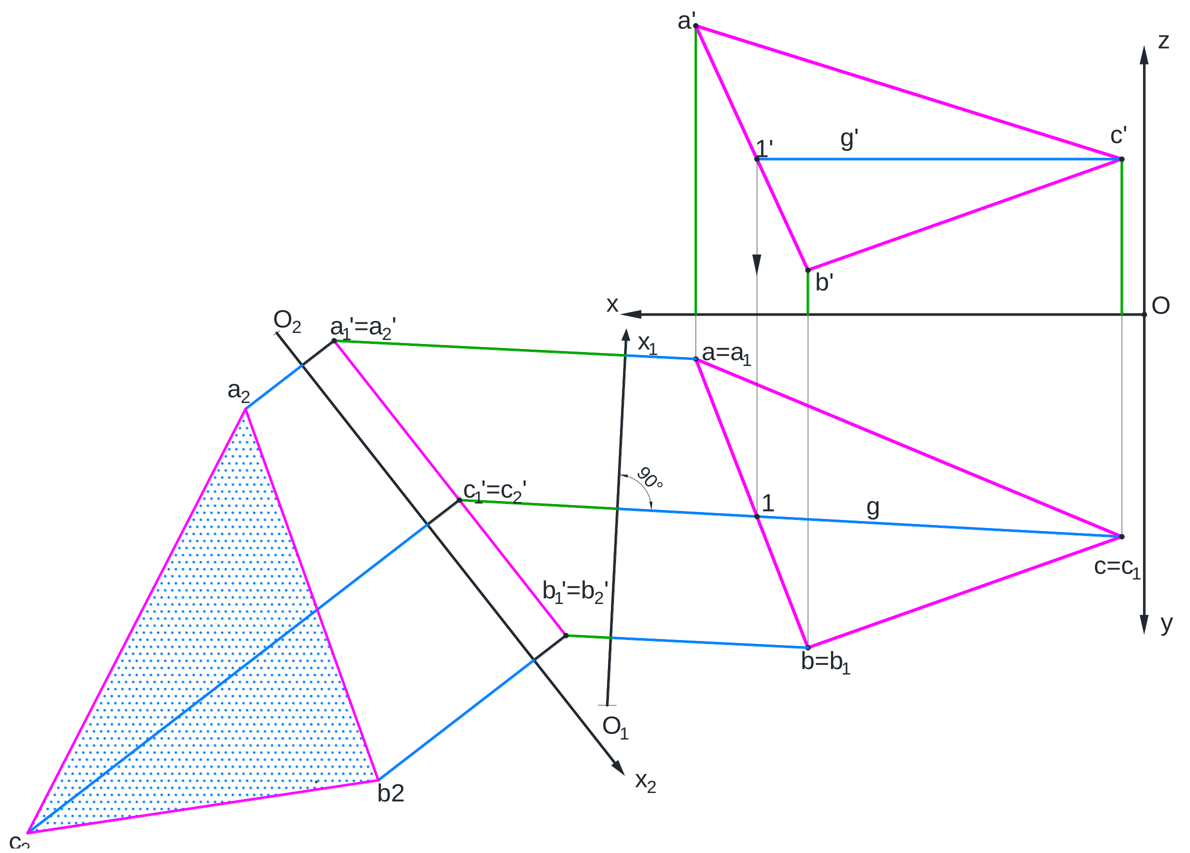


Fig. 4.5. Rezolvare aplicația 4.5

4.6. Se consideră planele [P] și [Q]. Se cunosc ∢Q'O_xO = 45°, ∢QO_xO = 60°, iar OQ_x = 10 mm. Pentru planul [P] se cunosc: ∢P'P_xO =45°, ∢PP_xO = 30°, iar OP_x = 90 mm. Să se efectueze o schimbare de plan vertical de proiecție, astfel încât noile urme verticale ale celor două plane date să devină paralele.

Rezolvare aplicația 4.6

Se determină proiecțiile HV(hv, h'v') ale dreptei de intersecție dintre cele două plane P și Q. De asemenea se știe că dreapta de intersecție dintre două plane cu urmele verticale paralele este o frontală. De aceea se va efectua o schimbare de plan vertical de proiecție, astfel încât dreapta (hv, h'v') să devină frontală. Pentru aceasta se ia axa O_1x_1 paralelă cu proiecția orizontală hv și cu ajutorul proiecțiilor i' și k' se obțin noile urme verticale paralele P_1' și Q_1'.

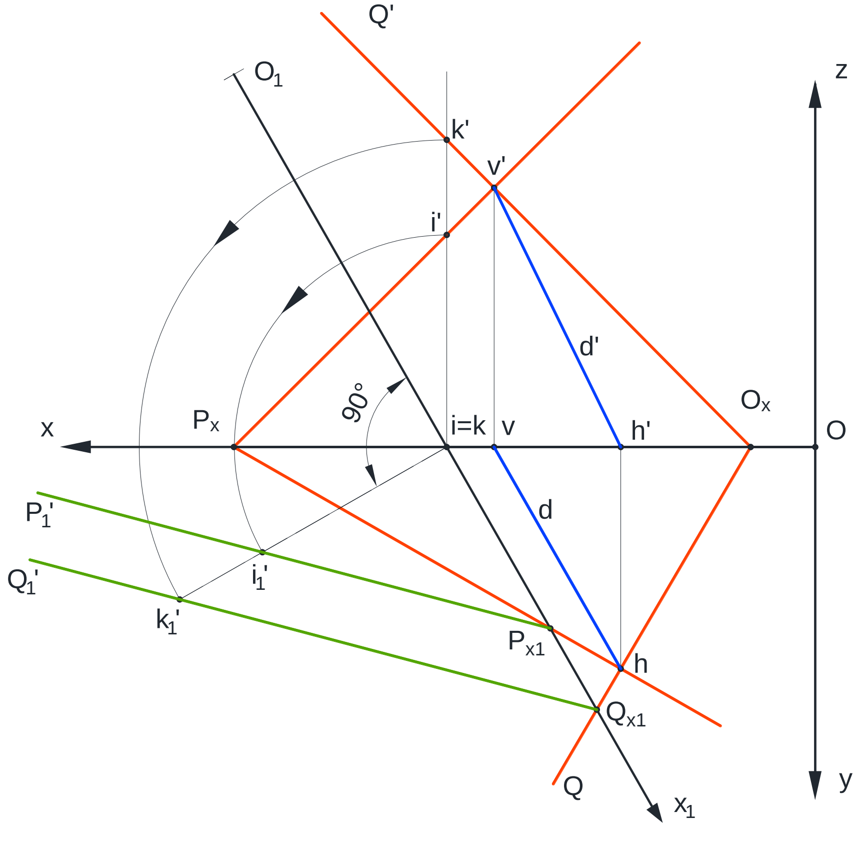


Fig. 4.6. Rezolvare aplicația 4.6

4.7. Să se determine distanța de la punctul M(50, 35, 30) la planul [P]: OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70, utilizând o schimbare de planelor de proiecție.

Rezolvare aplicația 4.7

Se va transforma planul [P] în plan de capăt [P] ⊥[V]. Se trasează noua linie de pământ O_1x_1 perpendiculară pe urma orizontală P a planului.

Din punctul M(m, m') se trasează perpendiculară pe axa O_1x_1 și se trasează în continuare cota punctului M, obținându-se proiecția m_1'. Axa $O_1x_1 \cap O_x$ în proiecția i, cu linie de ordine se determină proiecția i' pe urma P' a planului. Cu vârful compasului în punctul i se rotește proiecția i' până la intersecția cu urma P_1'. Din proiecția i_1' se trasează o perpepndiculară pe axa O_1x_1. Urma P_1' se trasează prin proiecția i_1'. Schimbarea planului de proiec'ie pentru M se va trasa o perpendiculară din m_1 pe axa O_1x_1 și se măsoară în continuare cota punctului M obținându-se proiecția m_1'. Din această proiecție m_1' se trasează o perpendiculară pe urma P_1' și aceasta reprezintă distanța de la punctul M(m, m') la planul [P], adică m_1'n_1'.

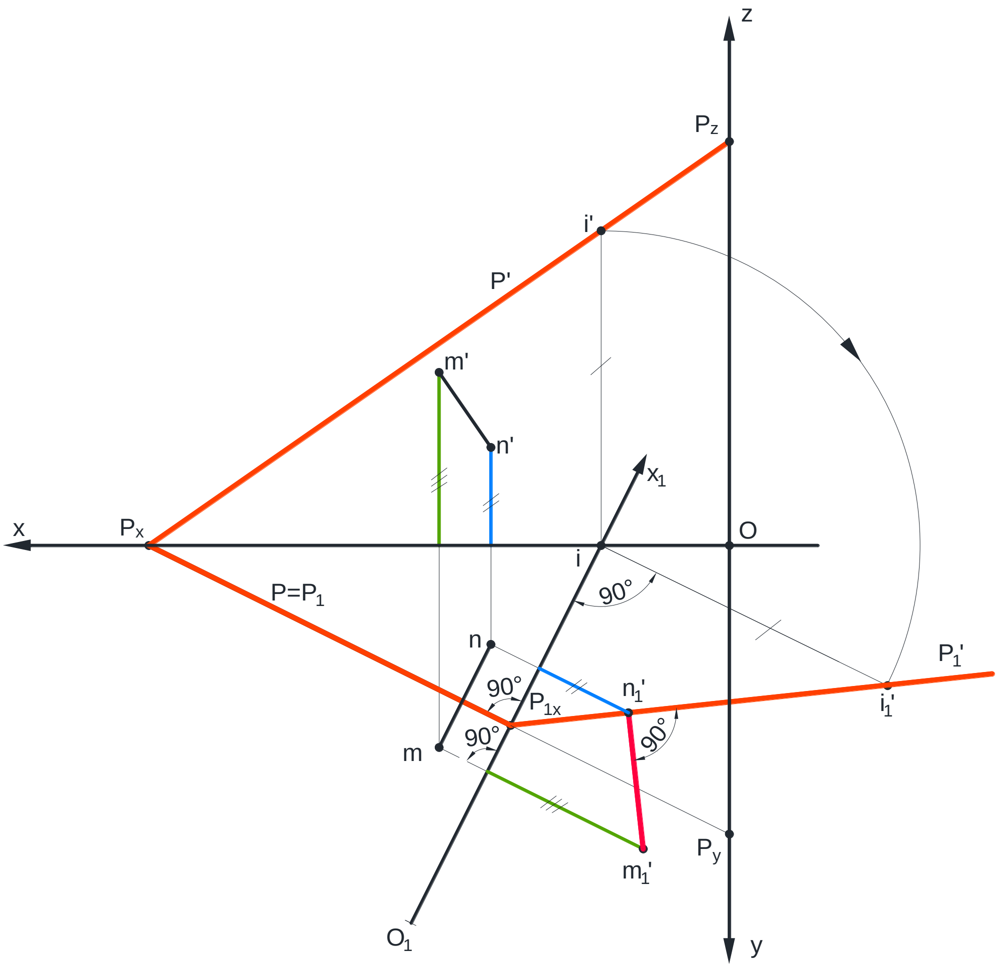


Fig. 4.7. Rezolvare aplicația 4.7

4.8. Să se determine adevărata mărime a distanței ℓ cuprinsă între planele paralele [P]: OP_x = 100, OP_y = 40, OP_z = 60 și [Q]: OQ_x = 60

Rezolvare aplicația 4.8

Se transformă planele paralele oarecare în plane de capăt [P_1]⊥[V] și [Q_1]⊥[V].

Problema se rezolvă prin transformarea planelor oarecare în plane proiectante față de unul din planele de proiecție, astfel distanța ℓ dintre ele să se măsoare între urmele de pe planul de proiecție față de care planele sunt proiectante.

Planele [P] și [Q] se transformă în planele de capăt [P_1] și [Q_1] printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, luând noua axa O_1x_1 perpendiculară pe urmele orizontale și folosind punctele i și j din planele [P] și [Q]. Distanța ℓ se măsoară între noile urme verticale P_1' și Q_1'. Proiecțiile i=j sunt proiecțiile care se obțin la intersecția liniei de pământ cu axa O_1x_1. Se ridică linie de ordine și pe urmele P' și Q' se obțin proiecțiile i'și j'.

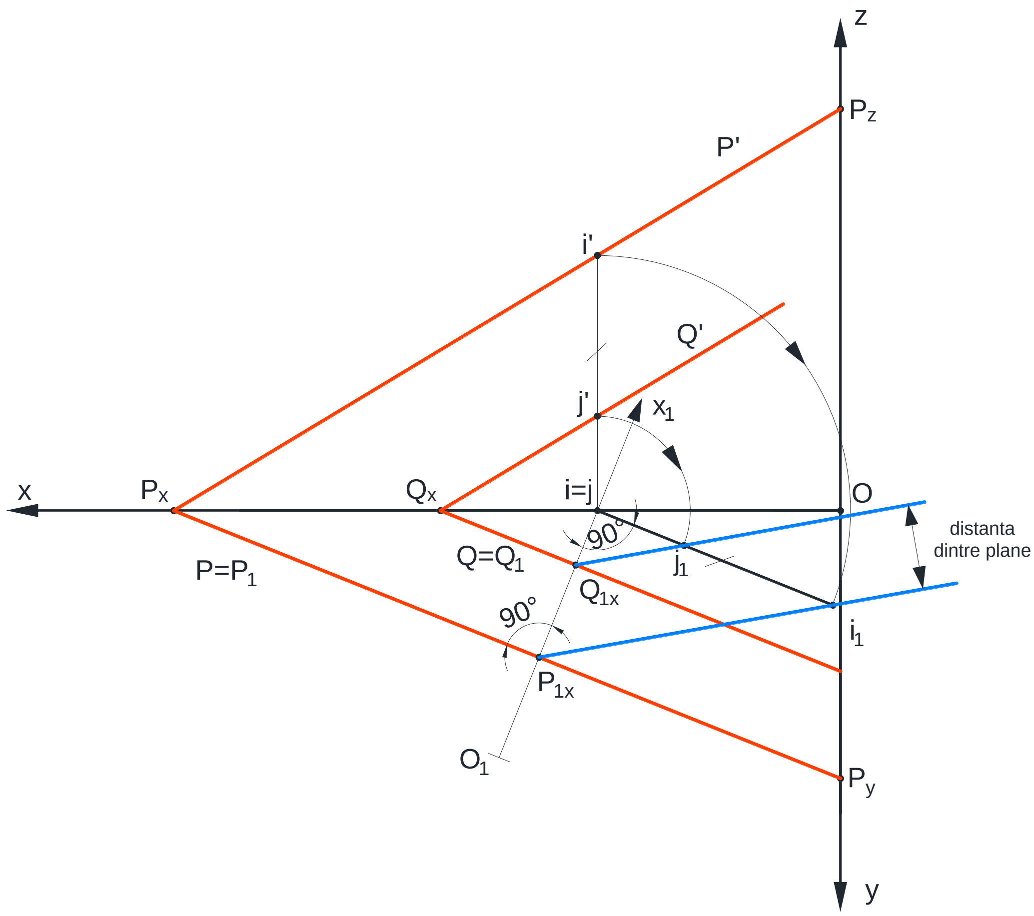


Fig. 4.8. Rezolvare aplicația 4.8

4.9. Se dă o dreaptă, definită de punctele A și B de poziție oarecare și un punct exterior M. Se cere să se realizeze construcția în epură a piciorului perpendicularei dusă din punctul M pe dreapta dată și adevărata mărime a distanței de la punctul M la dreaptă. Se dau coordonatele punctelor: A(70, 30, 15); B(35, 5, 30); M(60, 10, 35).

Rezolvare aplicația 4.9

Printr-o schimbare de plan vertical de proiecție a punctelor A și B, dreapta dată devine frontală.

Prin aceeași schimbare de plan se determină noua proiecție verticală a punctului M(m_1'). Din N_1(n_1, n_1') se trasează o perpendiculară pe noua proiecție verticală a dreptei, obținându-se punctul N(n_1').

Se obțin proiecțiile corespunzătoare ale punctului N pe vechile proiecții ale dreptei D, ca picior al perpendicularei dusă pe dreapta respectivă.

Adevărata mărime a distanței dintre punctele M și N se află în urma unei schimbări de plan orizontal de proiecție. Cea de-a doua axă corespunzătoare schimbării de plan, axa O_2x_2, se trasează perpendiculară pe direcția proiecției verticale a_1', b_1'. În această situație, cele două proiecții orizontale a_1 și b_1 păstrând aceeași depărtare, sunt confundate. Prin determinarea ultimei proiecții a punctului M_1(m_1, m_1') s-a rezolvat problema. Distanța de la proiecția m_2 la proiecția a_2=b_2=n_2 reprezintă adevărata mărime a distanței de la punctul M la dreaptă.

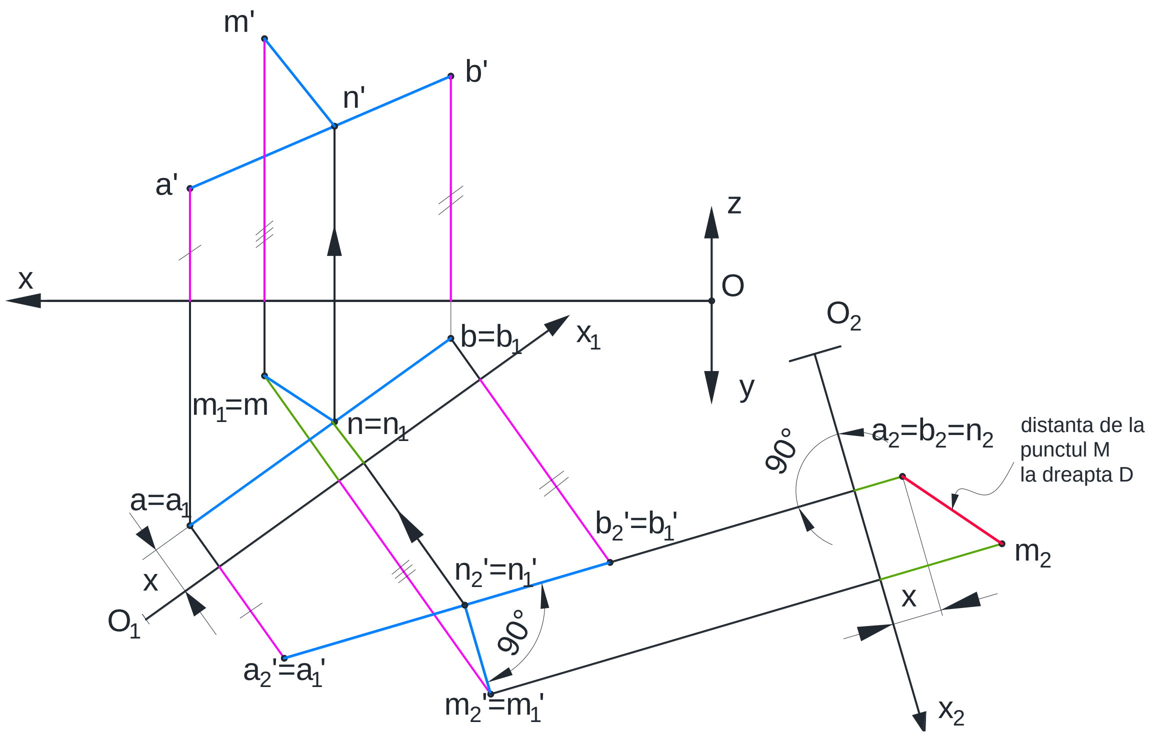


Fig. 4.9. Rezolvare aplicația 4.9

4.10. Să se determine adevărata mărime a plăcii triunghiulare [ABC] prin metoda schimbării planelor de proiecţie. Se cunosc: A(85, 23, 20); B(35, 12, 53); C(17, 50, 6).

Rezolvare aplicația 4.10

Se reprezintă în epură proiecțiile punctelor care formează placa triunghiulară. Pentru determinarea adevăratei mărimi a plăcii triunghiulare avem nevoie de două schimbări succesive de plan.

Se trasează o frontală (frontala este dreapta paralelă cu planul vertical de proiecție) din proiecția ***a*** a triunghiului din proiecția orizontală care va intersecta latura ***bc*** în punctul 1. Se duce linie de ordine în planul vertical până pe latura b'c' și astfel se determină proiecția punctului 1'.

Perpendicular pe această frontală din planul vertical se trasează axa O_1x_1, dar de sens contrar axei Ox, astfel se realizează prima schimbare de plan. Din proiecțiile a'b'c' se duc perpendiculare pe noua axă. De la axa O_1x_1 se trasează în continuarea perpendicularelor depărtările punctelor abc. Punctele $a_1b_1c_1$ sunt coliniare.

Pentru a doua schimbare de plan de proiecție, pentru a determina adevărata mărime a triunghiului ABC avem nevoie de o nouă axă notată cu O_2x_2 care se va trasa paralelă cu planul triunghiului $[A_1B_1C_1]$. Din proiecțiile a_1,b_1,c_1 se duc perpendiculare pe noua axă O_2x_2. În prelungirea acestor perpendiculare se măsoară depărtările punctelor a_1', b_1', c_1' până la axa O_1x_1. Unind proiecțiile nou obținute a_2',b_2',c_2' se obține adevărata mărime a plăcii triunghiulare.

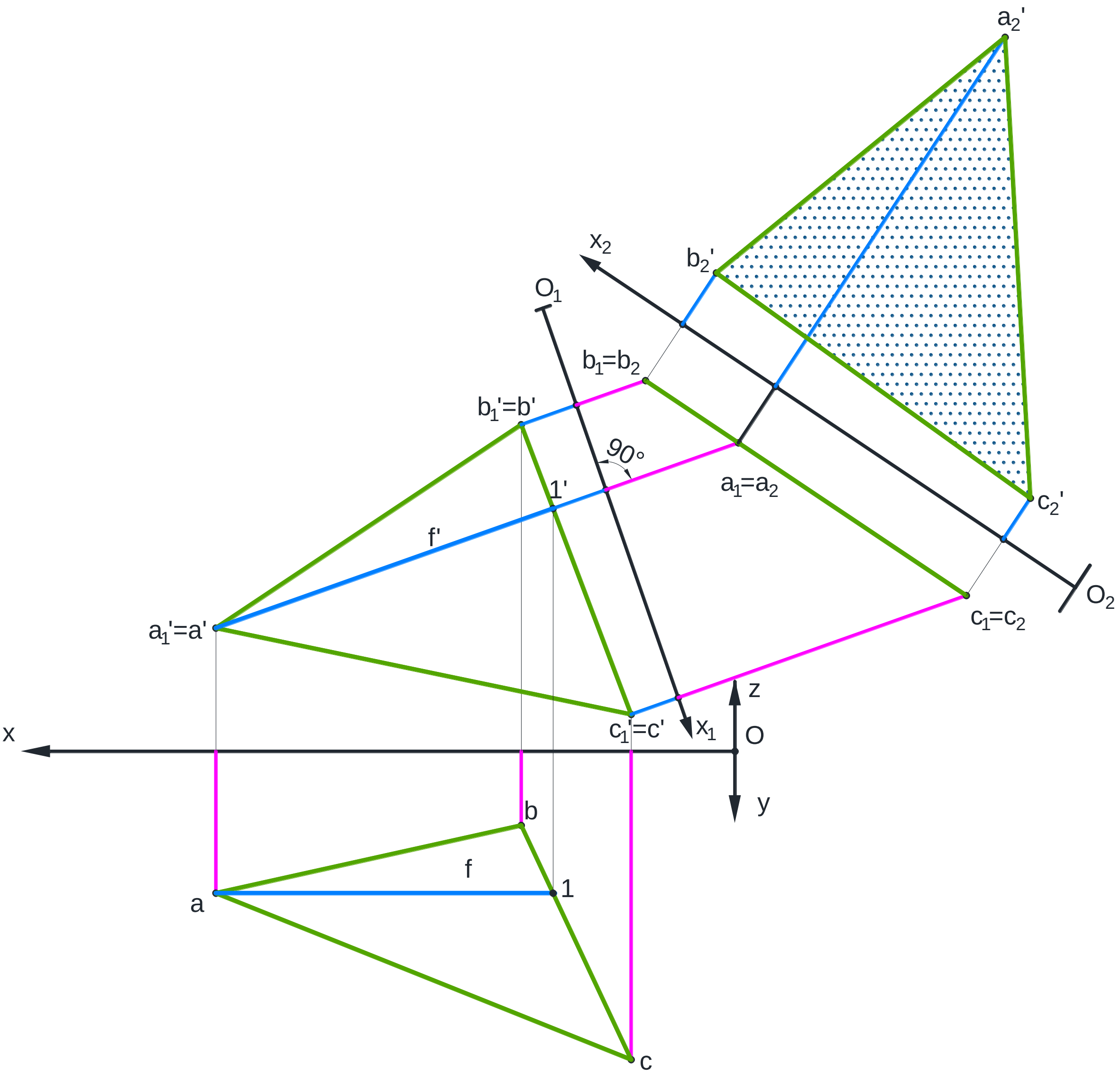


Fig. 4.10. Rezolvare aplicația 4.10

Metoda rotației

4.11. Să se rotească punctul A(a, a’) astfel încât să aparțină planului bisector al primului diedru. Punctul are coordonatele: A(35, 24, 13).

Rezolvare aplicația 4.11

Se efectuează o rotație de nivel a punctului A(a, a’) în jurul axei verticale Ω(ω, ω’), până când punctul A va avea în poziție rotită cota sa egală cu depărtarea. Se consideră paralela d dusă la Ox, la o depărtare egală cu cota punctului A.

Se alege proiecția ω (piciorul axei de rotație) pe această paralelă d și cu raza ***ωa*** *se descrie arcul de cerc care taie în a_1 și a_2 dreapta d.*

Proiecția verticală a’ descrie în rotația de nivel a punctului A o paralelă la Ox și întâlnește liniile de ordine ale proiecțiilor orizontale rotite a_1 și a_2 în a_1’, respectiv a_2’. Proiecțiile A_1 (a_1, a_1’) și A_2 (a_2, a_2’) reprezintă cele două soluții ale problemei.

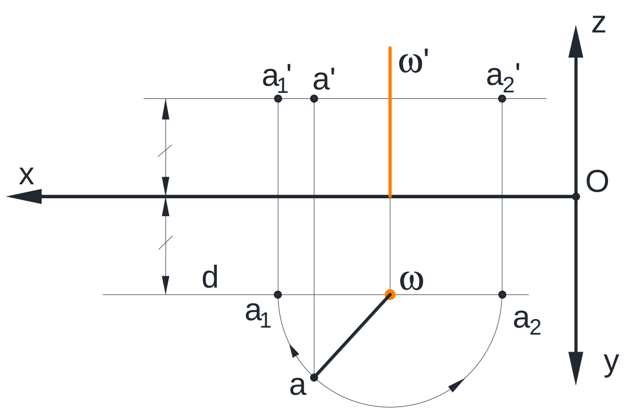


Fig. 4.11. Rezolvare aplicația 4.11

4.12. Să se rotească dreapta D(d, d’) astfel încât să devină paralelă cu linia de pământ. Se cunosc A(45, 20, 25), B(18, 35, 40).

Rezolvare aplicația 4.12

Rotația de nivel a dreptei D(d, d’) în jurul axei verticale (ω, ω’) aduce dreapta D(d, d’) în poziție de dreaptă frontală D_1(d_1, d_1’).

Apoi, rotația de front a dreptei frontale $D_1(d_1, d_1')$ în jurul axei de rotație (ω_1, ω_1') aduce dreapta D_1 în poziția de dreaptă fronto-orizontală $D_2(d_2, d_2')$. În general problema dată admite patru soluții, deoarece există două poziții ale proiecției orizontale d_1 și două poziții ale proiecției verticale d_2'.

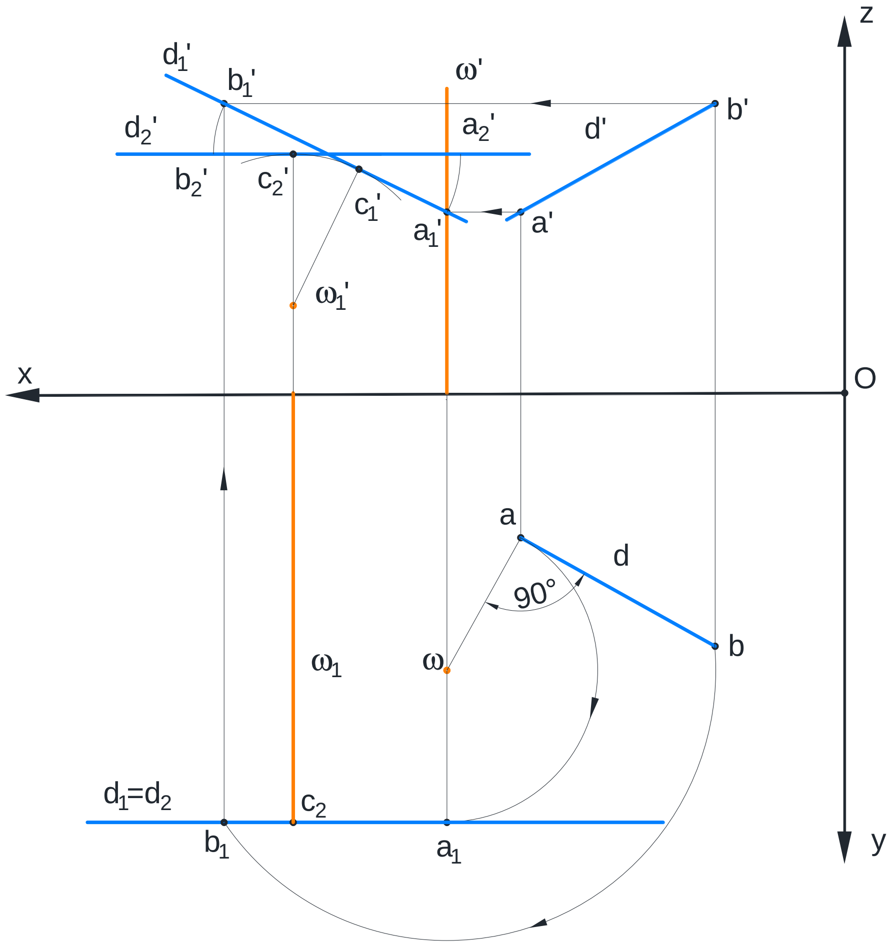


Fig. 4.12. Rezolvare aplicația 4.12

4.13. Să se rotească dreapta D(d, d') determinată de punctele A(48, 33, 13) și B(40, 36, 6), astfel încât să se situeze într-un plan [P] dat prin urme.

Rezolvare aplicația 4.13

Se determină proiecțiile N(n, n') ale punctului N de intersecție dintre dreapta D(d, d') și planul [P], utilizând planul proiectant [Q], dus prin dreapta D. Punctul N(n, n') este comun dreptei D și planului P și rămâne propriul său rotit dacă se alege axa verticală de rotație Ω(ω, ω') să treacă prin proiecția punctului.

Este necesar să se determine un al doilea punct comun între dreapta D și planul [P]. Pentru aceasta se rotește urma orizontală h a dreptei D până când se așează în h_1 pe urma orizontală a planului P.

Segmentul h_1i determină proiecția orizontală rotită d_1 a dreptei D. Proiecția verticală rotită d_1' a dreptei D este determinată de $h_1'\omega'$.

Ca verificare, urma verticală v_1' a dreptei rotite $D_1(d_1, d_1')$ trebuie să se găsească pe urma verticală P' a planului dat.

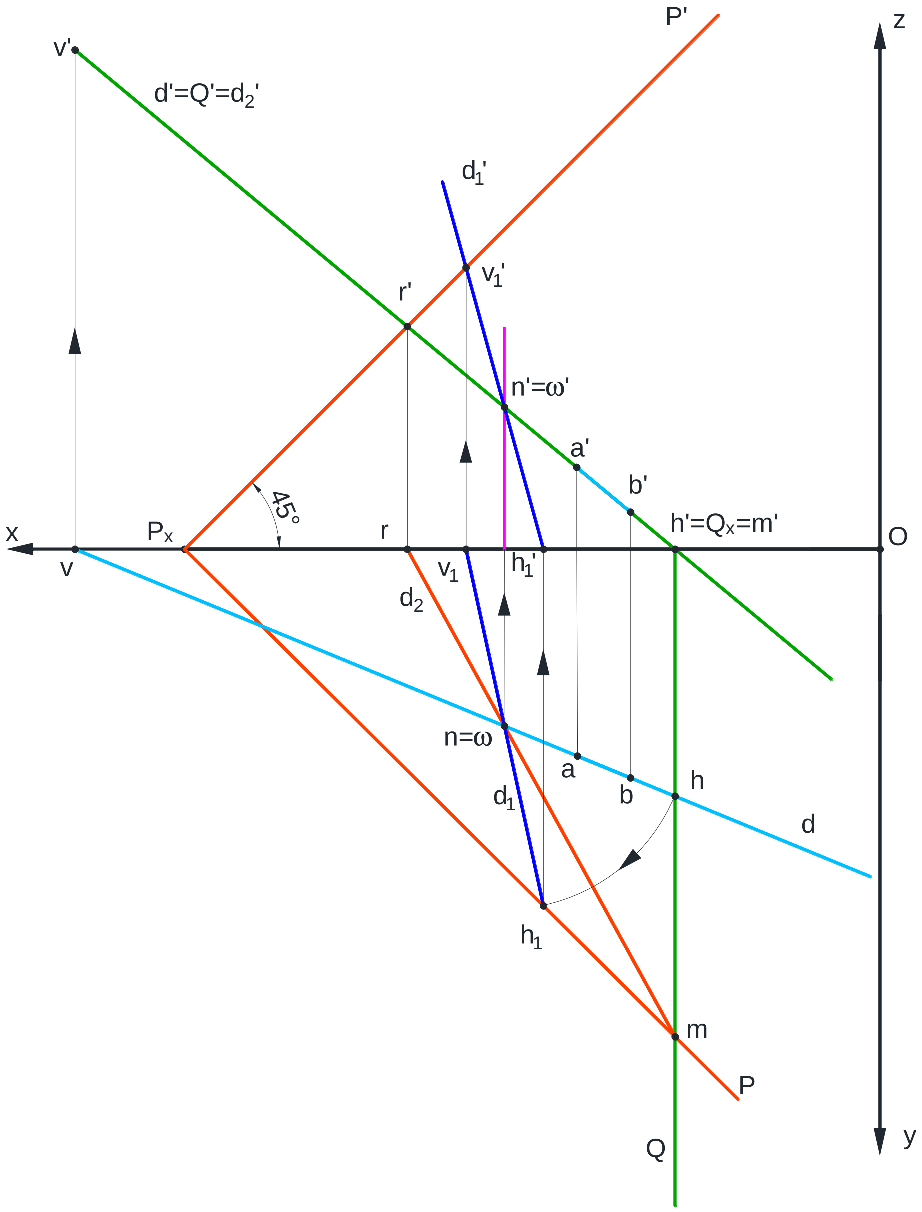


Fig. 4.13. Rezolvare aplicația 4.13

4.14. Se consideră planele [P] și [Q] date prin urme. Să se rotească planul [Q] astfel încât să devină paralel cu planul [P]. Se dau $OP_x = 105$, $\sphericalangle OP_xP' = 60°$, $\sphericalangle OP_xP = 60°$, $OQ_x = 12$, $\sphericalangle OQ_xQ = \sphericalangle OQ_xQ' = 45°$.

Rezolvare aplicația 4.14

În prima etapă se rotește planul [Q] în jurul axei verticale $\Omega(\omega, \omega')$ (din planul vertical de proiecție), astfel încât urma Q să devină Q_1 paralelă cu urma P.

Rezultă poziția rotită Q_1' a urmei verticale Q prin unirea punctului Q_{1x} cu n'. Planele [P] și [Q_1], având urmele verticale paralele, se intersectează după o dreaptă care este o orizontală G(g, g').

Se alege ca a doua axă de rotație o dreaptă $D_1(d_1, d_1')$, paralelă cu orizontala de intersecție a planelor P și Q_1. Dreapta (axa) $D_1(d_1, d_1')$, de asemenea o orizontală, este situată în planul [Q_1] și are urma verticală în (v, v'). Se rotește planul [Q_1] în jurul orizontalei $D_1(d_1, d_1')$, până când devine paralel cu planul PP'. Astfel, urma Q_1' se rotește, pivotând în jurul lui v', până ce devine paralelă cu P' și ocupă poziția Q_2'. Urma Q_1 se deplasează paralel cu ea însăși și ocupă poziția Q_2. Planul Q_2Q_2' este paralel cu planul [P] și reprezintă poziția rotită a planului [Q].

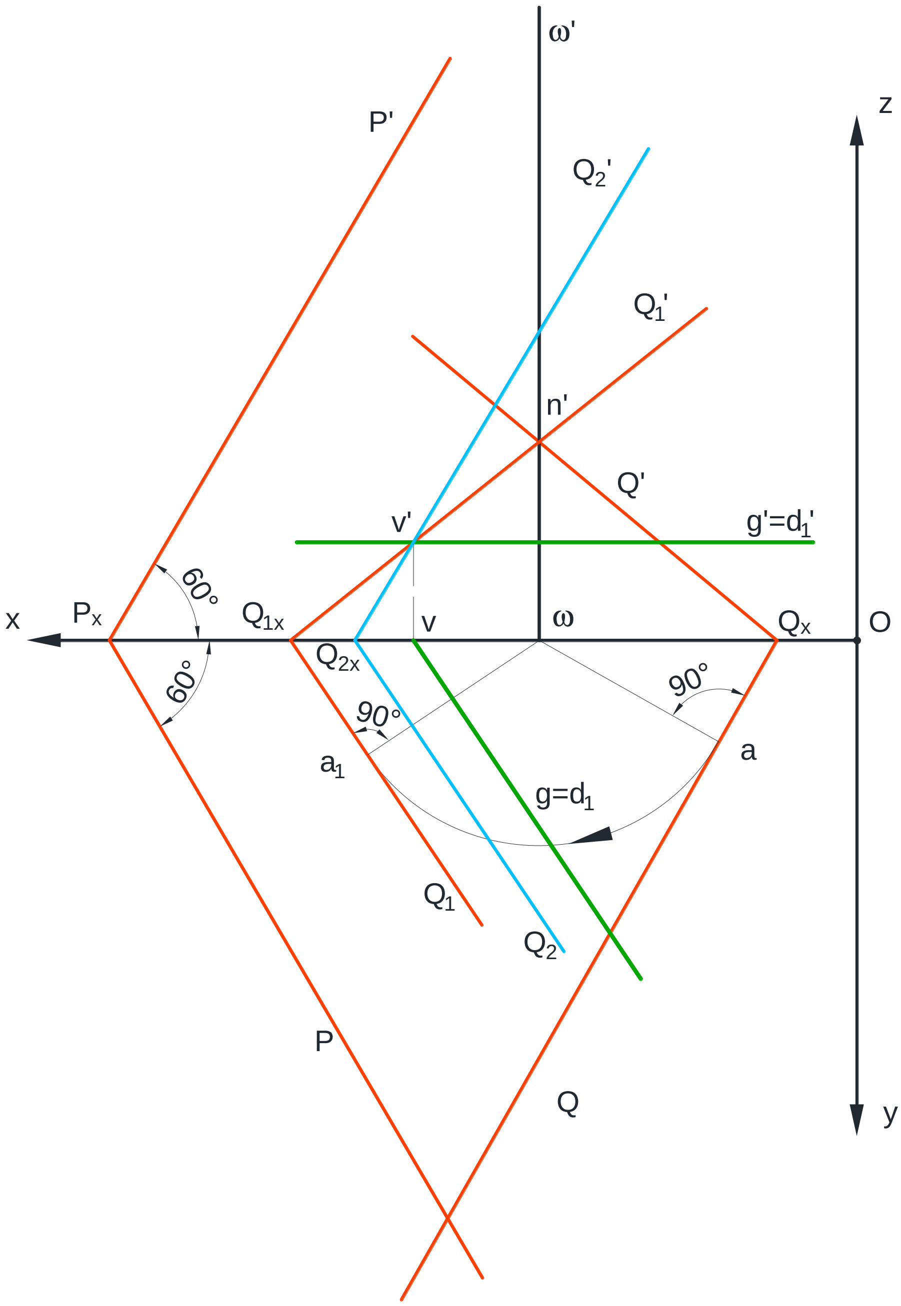


Fig. 4.14. Rezolvare aplicația 4.14

4.15. Se consideră vârfurile triunghiului [ABC] punctele A(150, 10, 25), B(120, 40, 50), C(100, 25, 10). Să se determine adevărata mărime a plăcii triunghiulare prin dublă rotație.

Rezolvare aplicația 4.15

Se reprezintă în epură punctele din datele problemei, și se formează apoi planul plăcii triunghiului oarecare. Astfel, prin două rotații succesive, planul triunghiului se aduce în poziția în care va fi paralel cu unul din planele de proiecție pe care se va proiecta, în adevărată mărime. Primul pas este realizarea unei rotații de nivel, în jurul axei Ω(ω, ω'), această axă va fi dusă prin vârful C(c, c') al triunghiului. Tot prin punctul c se va trasa și o dreaptă perpendiculară pe orizontala dusă din punctul a. Piciorul perpendicularei se va nota cu n, apoi se va roti și piciorul perpendicularei până se obține poziția punctului n_1. Prin rotație, orizontala $A_1(a_1, a'_1)$ a triunghiului devine dreaptă de capăt. Punctele A(a, a') și B(b, b') se rotesc în pozițiile $A_1(a_1, a_1')$ și $B(b_1, b_1')$, proiecțiile lor verticale a_1' și b_1' fiind coliniare cu c_1'. Planul triunghiului a devenit astfel, plan de capăt (plan perpendicular pe planul vertical de proiecție). Printr-o rotație de front, în jurul axei de capăt $i_1(i_1, i_1')$, dusă tot prin C(c, c'), planul triunghiului devine plan de nivel, cu proiecția verticală $a_2'b_2'c_2'$. Adevărata mărime a triunghiului este $a_2b_2c_2$.

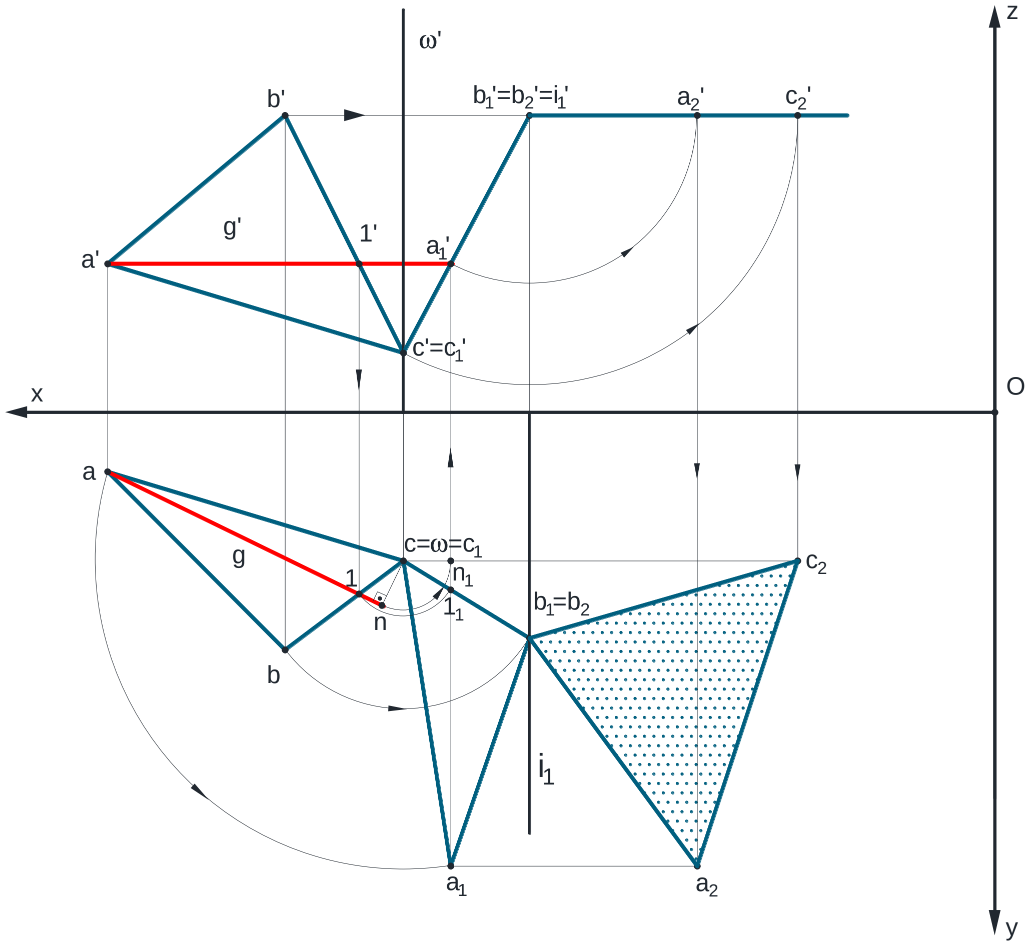


Fig. 4.15. Rezolvare aplicația 4.15

4.16. Să se rotească planul [P], dat prin urme, astfel încât să devină perpendicular pe planul [Q], dat de asemenea prin urme.

Rezolvare aplicația 4.16

Se alege o axă verticală de rotaţie Ω(ω, ω') care intersectează planul [P], în punctul S(s,s'). Se duce prin punctul S, care rămâne propriul său rotit, normala N(n, n') la planul QQ', iar din urma orizontală h a acestei normale se duc tangentele ht_1, şi ht_2 la cercul de rază ***ωt*** *descris cu centrul în ω. Proiecția ht_1 reprezintă urma orizontală rotită P_1 a planului P. O dată cu urma orizontală a planului [P] se roteşte şi orizontala D a punctului de intersecţie ω dintre axă şi plan, care ocupă poziţia $D_1(d_1, d_1')$. Rezultă astfel urma verticală k_1', care împreună cu P_{1x} determină P_1', urma verticală rotită a planului [P]. Ca o verificare, această urmă rotită P_1' trebuie să treacă prin urma verticală v' a normalei N(n, n').*

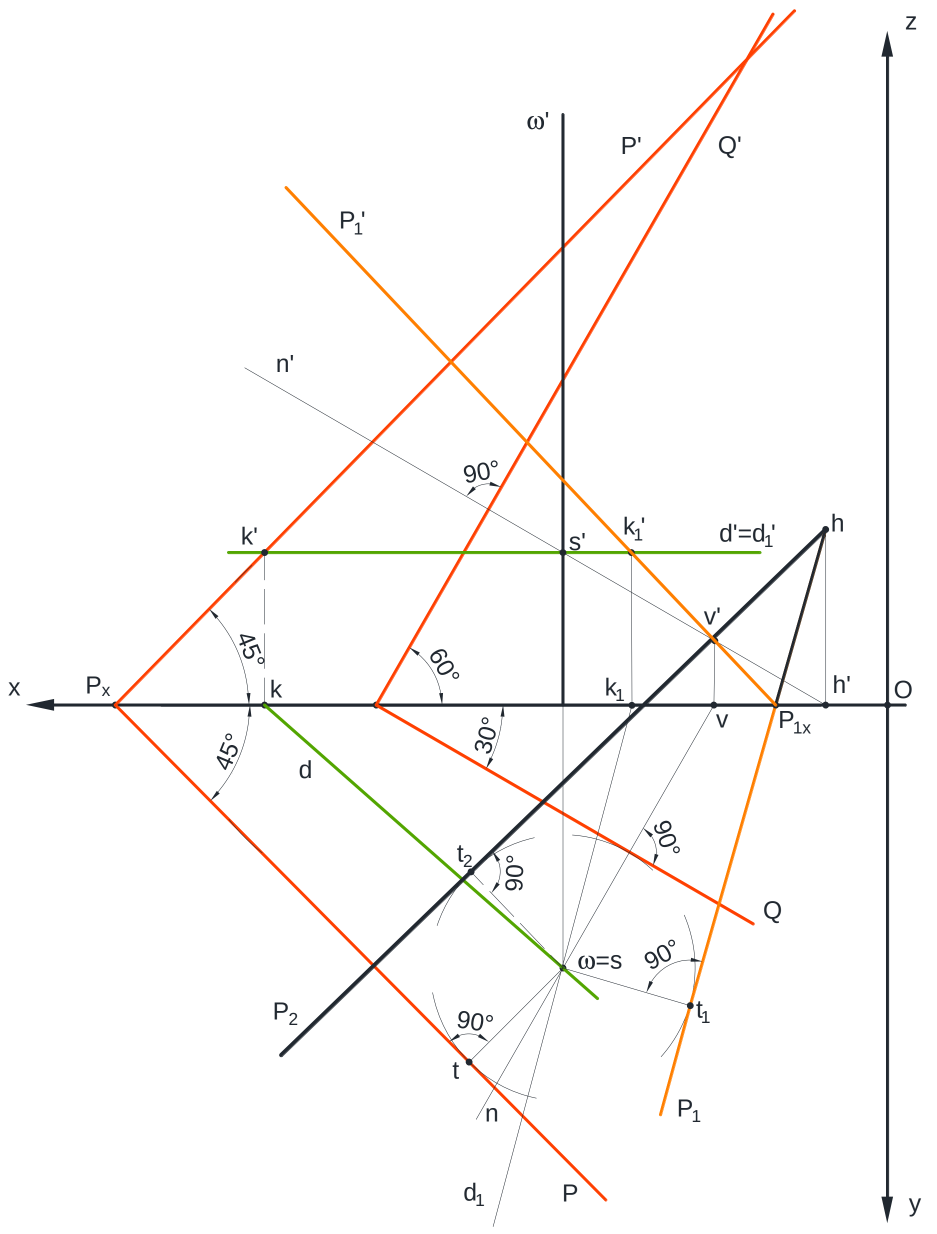


Fig. 4.16. Rezolvare aplicația 4.16

Metoda rabaterii

4.17. Să se găsească proiecţiile perpendicularei, dusă din punctul M(40, 50, 25) pe dreapta D(d, d'), definită de punctele A(85, 20, 25), B(55, 10, 50)

Rezolvare figura 4.17

Se rabate planul determinat de punctul M şi de dreapta D pe un plan de nivel N', construit prin M și A. Punctul A(a,a'), împreună cu punctul M(m, m') determină orizontala de intersecţie D_1(d_1, d_1') dintre cele două plane, orizontală care se ia ca axă de rabatere. Se rabate punctul oarecare B(b, b'). Construind în b triunghiul de rabatere $bb_1\omega$ al punctului B, se obţine proiecția b_0 a punctului B, pe planul de nivel N'. Se trasează o perpendiculară pe axa de rabatere ε și o paralelă la ε. Se măsoară cota bb_1, cota punctului B până la planul de nivel. Ω(ω, ω') este centru de rabatere și se rotește ωb_1 pânăcând întâlnește perpendiculara din b pe axa de rabatere, rezultând b_0. Se trasează în rabatere, din punctul m=m_0, perpendiculara pe D_0 şi se obţine n_0, care se întoarce din rabatere în n şi apoi în n'. Perpendiculara căutată este MN(mn, m'n').

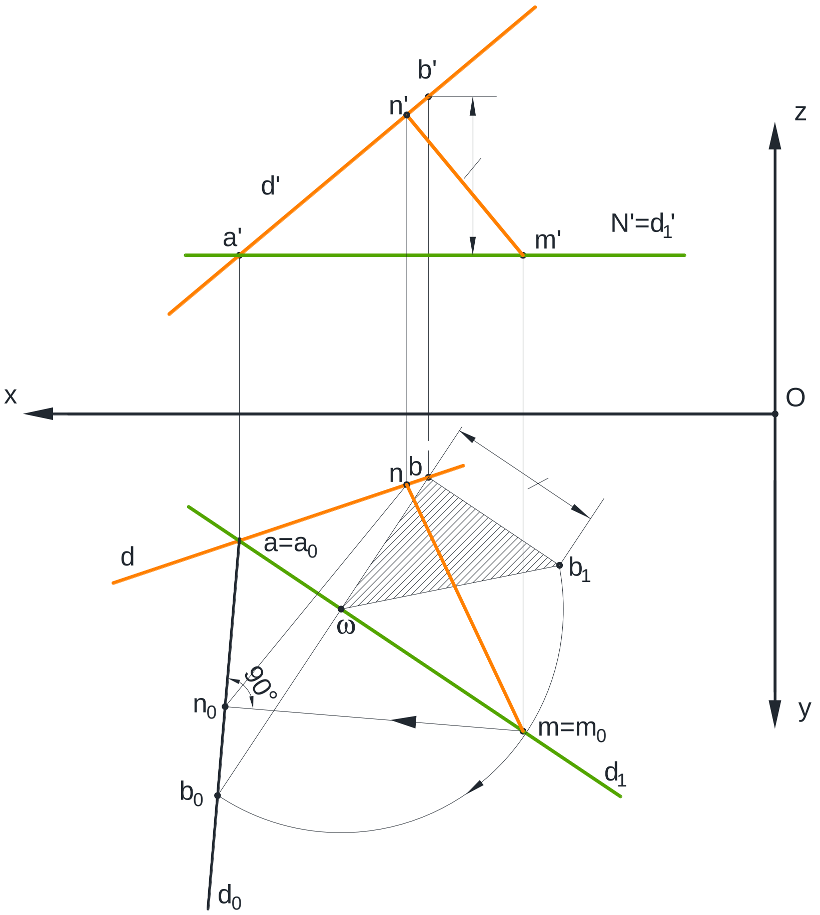


Fig. 4.17. Rezolvare aplicația 4.17

4.18. Să se găsească în adevărata mărime distanţa l cuprinsă între două drepte paralele D(d, d') şi $D_1(d_1, d_1')$ date prin proiecţiile lor. Se dau:
A(81, 32, 41); B(52, 51, 41); M(91, 34, 35), iar cota planului de nivel [N] = 41.

Rezolvare aplicația 4.18

Se rabate planul celor două drepte paralele pe un plan de nivel [N]. Se alege ca axă de rabatere orizontala G(g,g') care rezultă din intersecţia planului de nivel [N] cu planul celor două drepte paralele. Punctele A şi B, de pe dreptele (D) şi (D_1), rămân propriile lor puncte rabătute, fiind pe axa de rabatere (pe care de altfel o şi determină).

Rabatem punctul oarecare M(m, m') de pe dreapta D_1, astfel se construieşte o paralelă şi o perpendiculară pe axa de rabatere. mm_1 este egal cu cota punctului M până la planul de nivel.

Se construieşte triunghiul de rabatere $mm_1\omega$ al punctului M şi se obţine punctul rabatat m_0 pe planul de nivel N'. Se aşează vîrful compasului în punctul ω şi se duce arcul de cerc cu raza im până întâlneşte prelungirea mi. Distanţa d cuprinsă între cele două drepte paralele D şi D_1 se măsoară, în adevărată mărime, între dreptele rabătute D_0 şi D_{10}.

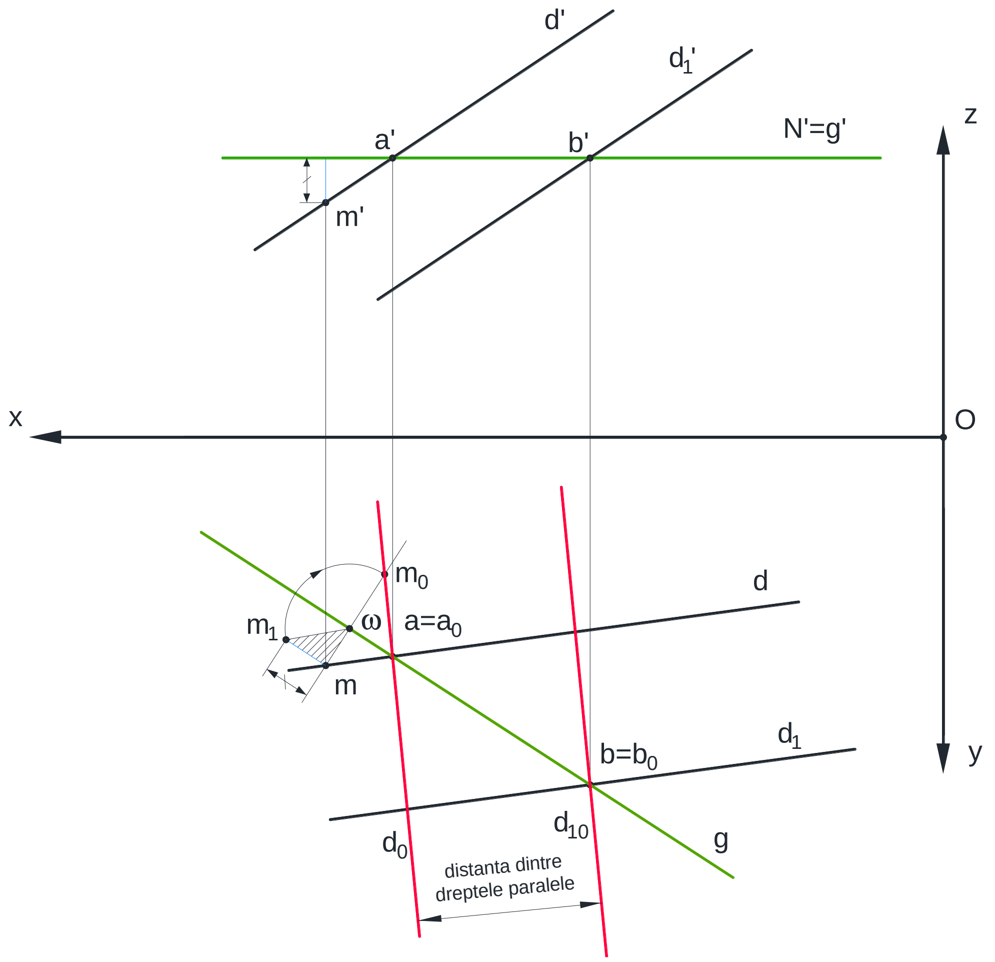


Fig. 4.18. Rezolvare aplicația 4.18

4.19. a) Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre două drepte concurente D(d, d’) şi $D_1(d_1, d_1')$.
Se cunosc: $V_1(60, 0, 30)$; $V_2(20, 0, 40)$; N(40, 10, 15).
b) Să se determine adevărata mărime a plăcii triunghiulare ABC prin rabatere pe un plan de front.
Se cunosc: A(45, 10, 40); B(20, 30, 10); C(70, 40, 15);

Rezolvare aplicația 4.19 a) şi b)

a) Primul pas este reprezentarea în epură a punctelor V_1, V_2 şi N. Punctul N(n, n’) este punctul de intersecţie dintre cele două drepte. În planul vertical se intersectează proiecţiile v_1' şi v_2' şi se obţine axa de rabatere. Din proiecţia n’ de va trasa o paralelă şi o perpendiculară pe axa de rabatere. Piciorul perpendicularei va fi notat cu ω’, iar mm_1 este depărtarea punctului N. Cu vârful compasului în ω’ se descrie un arc de cerc până când va intersecta prelungirea perpendicularei dusă din n’. Astfel sa obţine proiecţia n_0. Din acest punct se vor trasa proiecțiile d_{10} şi d_{20} până în proiecţiile v_1' şi v_2'. Unghiul se măsoară între noile proiecții rabătute d_{10} şi d_{20}.

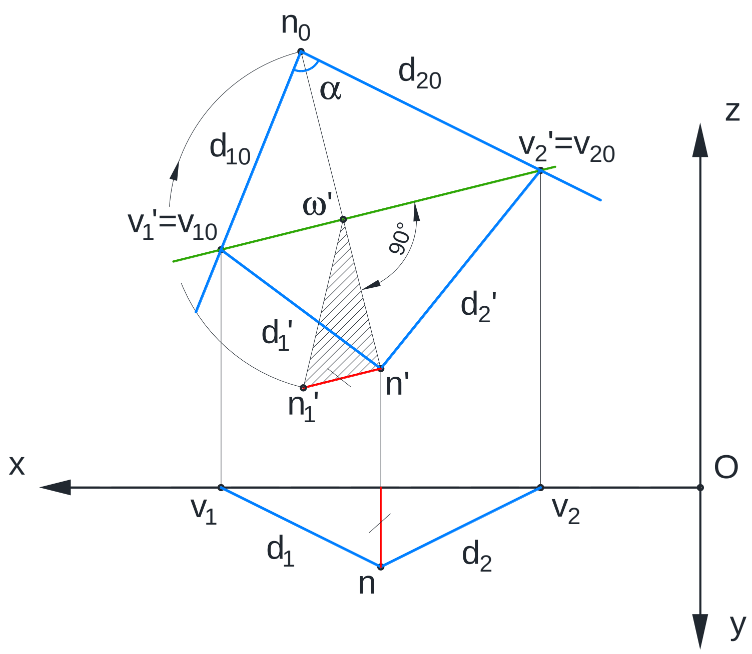


Fig. 4.19 a) Rezolvare aplicația 4.19

b) Pentru a determina adevărata mărime a plăcii triunghiulare se vor reprezenta în epură cele trei puncte A, B şi C si se trasează planul de front [F]. Prin acest plan de front se trasează frontala care va fi şi axa de rabatere, și se trasează prin punctul B(b, b’). Axa de rabatere va intersecta latura AC a triunghiului în punctul M(m, m’). În planul vertical axa de rabatere trece prin punctul b’ care va fi propriul lui punct rabătut, deci va fi egal cu b_0.

Urmează determinarea celorlalte două puncte ale triunghiului astfel: pentru proiecţia punctului c' se va trasa o perpendiculară şi o paralelă la axa de rabatere. Paralela va avea dimensiunea măsurată în planul orizontal de la punctul c până la planul de front.

Se descrie un arc de cerc cu vârful compasului în punctul ω' şi se determină proiecţia. Pentru determinarea proiecţiei se procedează astfel: din proiecţia a' se trasează o perpendiculară pe axa de rabatere, iar din proiecția c_0' se va trasa o dreaptă care va trece prin proiecția m'. La intersecţia celor două drepte rezultă proiecţia vîrfului triunghiului a_0. Adevărata mărime a triunghiului este $a_0b_0c_0$.

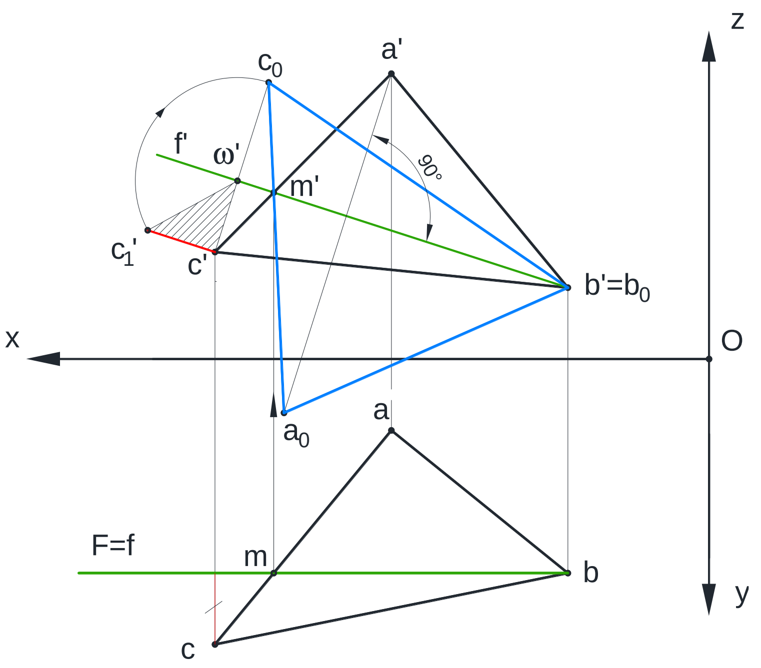


Fig. 4.19 b) Rezolvare aplicația 4.19

4.20. Să se determine adevărata mărime a plăcii triunghiulare ABC prin rabatere pe un plan de nivel. Se cunosc: A(30, 20, 40); B(50, 30, 50); C(70, 10, 30)

Rezolvare aplicația 4.20

Se reprezintă punctele în epură și se unesc astfel încât rezultă proiecțiile triunghiului ABC pe cele două plane de proiecție. Se construiește planul de nivel [N], iar intersecția acestui plan cu placa ABC este orizontala G(g,g'). Această orizontală intersectează latura c'b' a triunghiului în punctul m'. Se coboară linie de ordine și se determină în plan orizontal proiecția m pe latura cb. Din proiecția a se trasează proiecția g, care este axa de rabatere. Punctul a coincide cu a_0 fiind propriul lui punct rabătut.

Urmează apoi determinarea celorlalte două proiecții b_0 și c_0. Astfel, pentru determinarea proiecției c_0 se trasează o perpendiculară și o paralelă pe axa de rabatere. Lungimea paralelei este egală cu distanța măsurată în plan vertical de la proiecției c' până la planul de nivel. Se formează triunghiul de rabatere și se determină proiecția c_1.

Se rotește proiecția c_1, cu vârful compasului în punctul ω până când va întâlni prelungirea perpendicularei trasată din c și se obține proiecția c_0, celălalt vârf al triunghiului. Pentru determinarea proiecției b_0 se trasează o perpendiculară din b pe axa de rabatere g.

Din proiecția c_0 se trasează o dreaptă care trece prin m, iar la intersecția cu perpendiculara din b se obține proiecția b_0, al treilea vârf al triunghiului. Adevărata mărime a triunghiului este proiecția $a_0b_0c_0$.

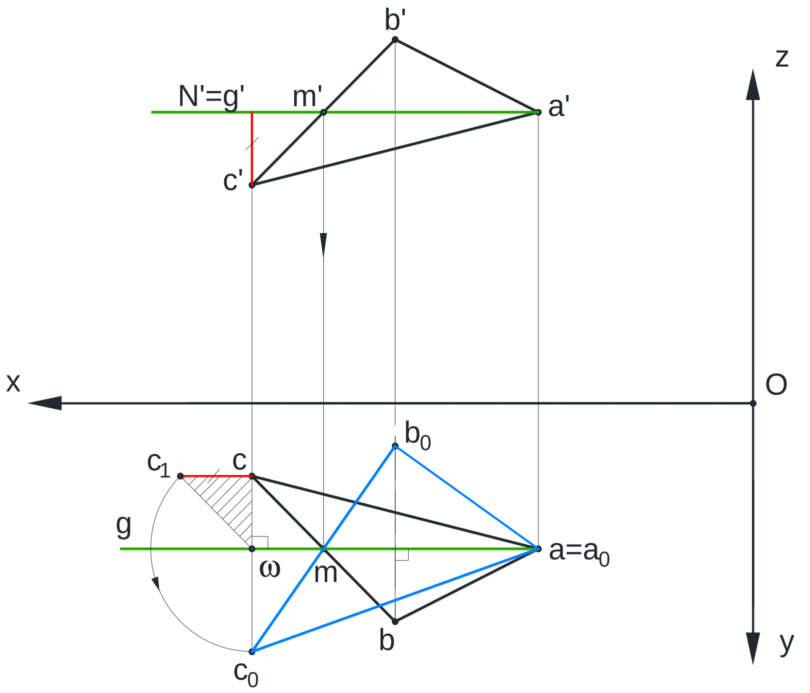


Fig. 4.20. Rezolvare aplicația 4.20

4.21. Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre două drepte concurente D(d, d'), și D_1(d_1, d_1'), se dau coordonatele punctului M(48, 20, 28).

Rezolvare aplicația 4.21

Fie M(m, m') punctul de concurență al celor două drepte.

Se construiește urma orizontală P a planului format de cele două drepte concurente și care este axă de rabatere.

Se formează în m triunghiul de rabatere al punctului M, ducând din m paralela și perpendiculara la axa de rabatere. Pe paralelă se ia cota $m'm_x$ a punctului M față de planul pe care se face rabaterea (față de planul orizontal) și rezultă m_1.

Perpendiculara din m întâlnește axa de rabatere în ω, centrul de rabatere. Cu raza ωm, se descrie arcul de cerc care întâlnește perpendiculara mω în m_0, rabaterea punctului M. Urmele $h_1=h_0$ și $h=h_0$ ale dreptelor D_1 și D fiind pe axa P de rabatere, rămânând propriile lor poziții ale punctelor rabătute. Unind m_0 cu aceste puncte se obțin dreptele rabătute d_0 și d_{10}, pe planul orizontal de proiecție, ale dreptelor concurente date.

Între proiecțiile rabătute d_0 și d_{10} se măsoară în adevărată mărime unghiul format de cele două drepte concurente D și D_1.

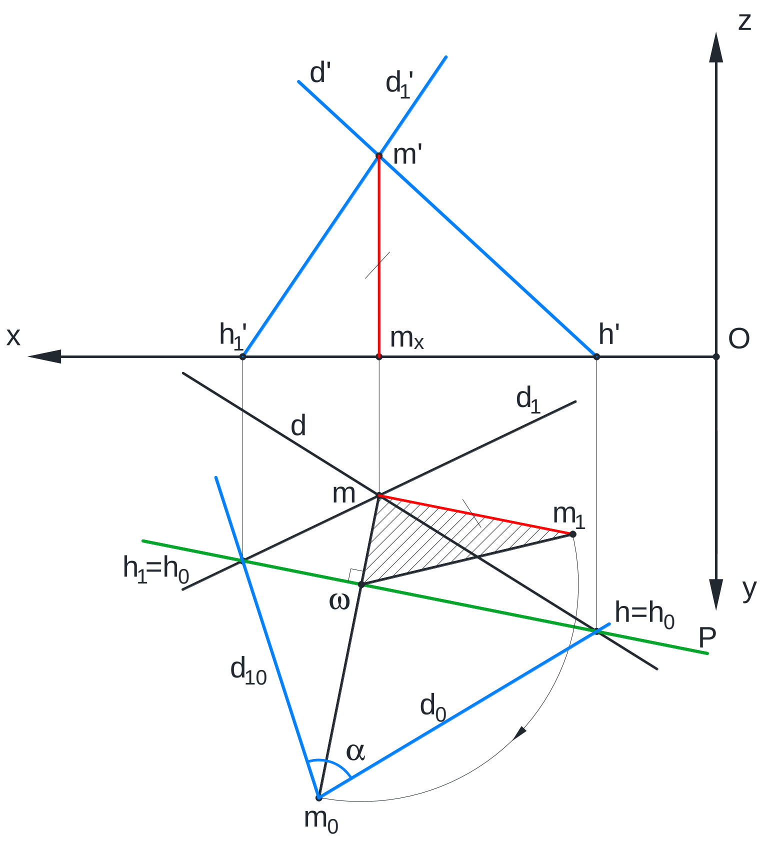


Fig. 4.21. Rezolvare aplicația 4.21

4.22. Să se găsească în adevărată mărime unghiul pe care îl face dreapta D(d, d') cu planul [P], ∢OP$_x$P = 30°, ∢OP$_x$P' = 30°, A(58, 51, 38); B(40, 44, 38); M(67, 66, 53)

Rezolvare aplicația 4.22

Fie D(d, d') dreapta dată și [P] planul dat prin urme. Dintr-un punct oarecare M(m, m') de pe dreapta D(d, d') se duce o perpendiculară pe planul dat. Prin rabaterea punctului M(m, m') pe un plan de nivel [N] se determină, în adevărată mărime, unghiul cuprins între perpendiculara dusă și dreapta D(d, d').

Unghiul complementar este, în adevărată mărime, unghiul căutat.

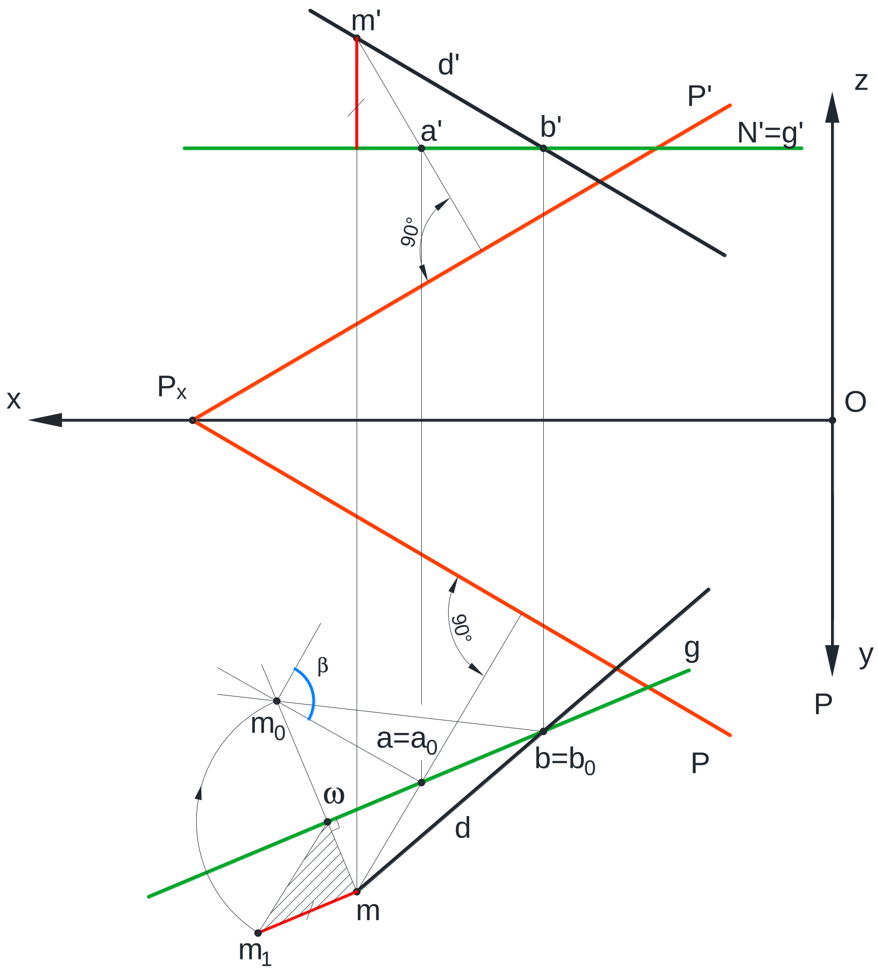


Fig. 4.22. Rezolvare aplicația 4.22

4.23. Să se găsească în adevărată mărime unghiul diedru cuprins între două plane [P] și [Q] ale căror urme orizontale sunt paralele.
Se dau urmele planului ∢OP_xP' =30°, ∢OP_xP = 45°, P∥Q, A(30, 17, 14), OR_x= 12, OR_xRz = ∞.

Rezolvare aplicația 4.23

Dreapta de intersecție dintre aceste două plane este o orizontală G(g,g'). Se consideră punctul A(a, a') oarecare de pe această dreaptă și se duce prin acest punct planul [R] perpendicular pe dreapta G(g, g') de intersecție dintre cele două plane.

Planul [R] intersectează planele [P] și [Q] după două drepte de intersecție, ale căror proiecții orizontale ah și ah_1 se suprapun pe urma orizontală R a planului vertical RR'. Prin rabaterea acestui plan vertical pe planul orizontal de proiecție se obține, în adevărată mărime, unghiul căutat, fiind cuprins între rabaterile a_0h și a_0h_1 ale dreptelor de intersecție determinate anterior.

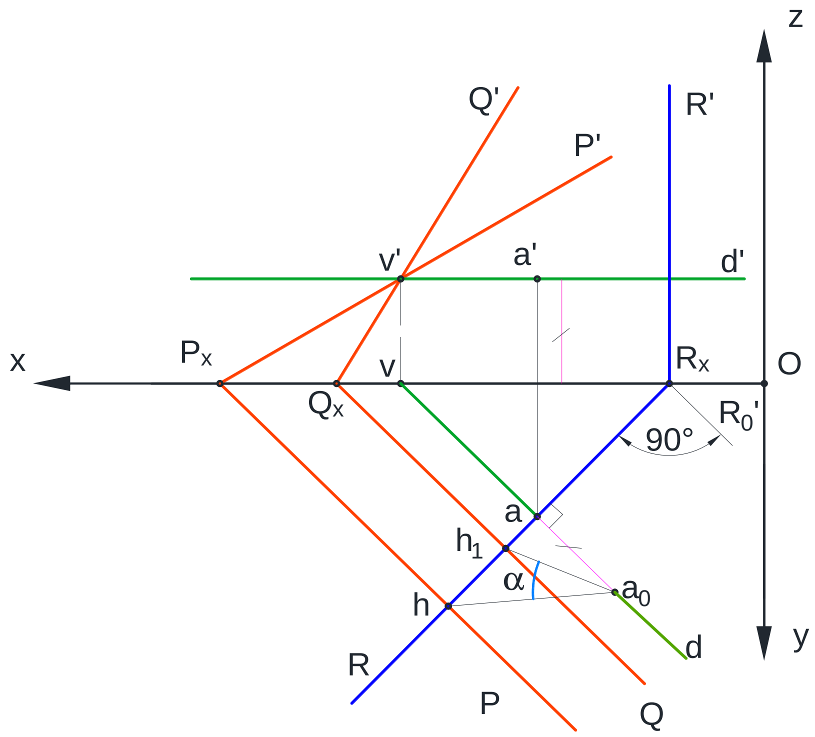


Fig. 4.23. Rezolvare aplicația 4.23

4.24. Să se găsească urmele planului [P], cunoscând proiecțiile punctului M(m, m') din plan și proiecția m_0 rabătută a acestui punct pe planul orizontal de proiecție.
Se dă: M(35, 20, 25).

Rezolvare aplicația 4.24

Fie m și m' proiecțiile punctului M și m_0 proiecția rabătută a acestui punct pe planul orizontal de proiecție.

Unind m_0 cu m și ducând o perpendiculară în m pe m_0m, se obține proiecția orizontală g a orizontalei G(g, g') care trece prin punctul M. Proiecția verticală g' și urma verticală V(v, v') ale acestei drepte rezultă ducând prin m' o paralelă la linia de pământ. Pe proiecția g se măsoară mm_1 egal cu cota punctului M. În triunghiul de rabatere al punctului M se găsește ω, centrul de rabatere. Pentru aceasta, im_1 trebuie să fie egal cu ωm_0.

Deci, ω se determină pe mediatoarea ridicată pe mijlocul a al segmentului m_0m_1 și pe dreapta m_0m. Paralela dusă la g prin ω este urma orizontală P a planului (axă de rabatere). Rezultă P_x, care unit cu v' determină urma verticală P' a planului căutat.

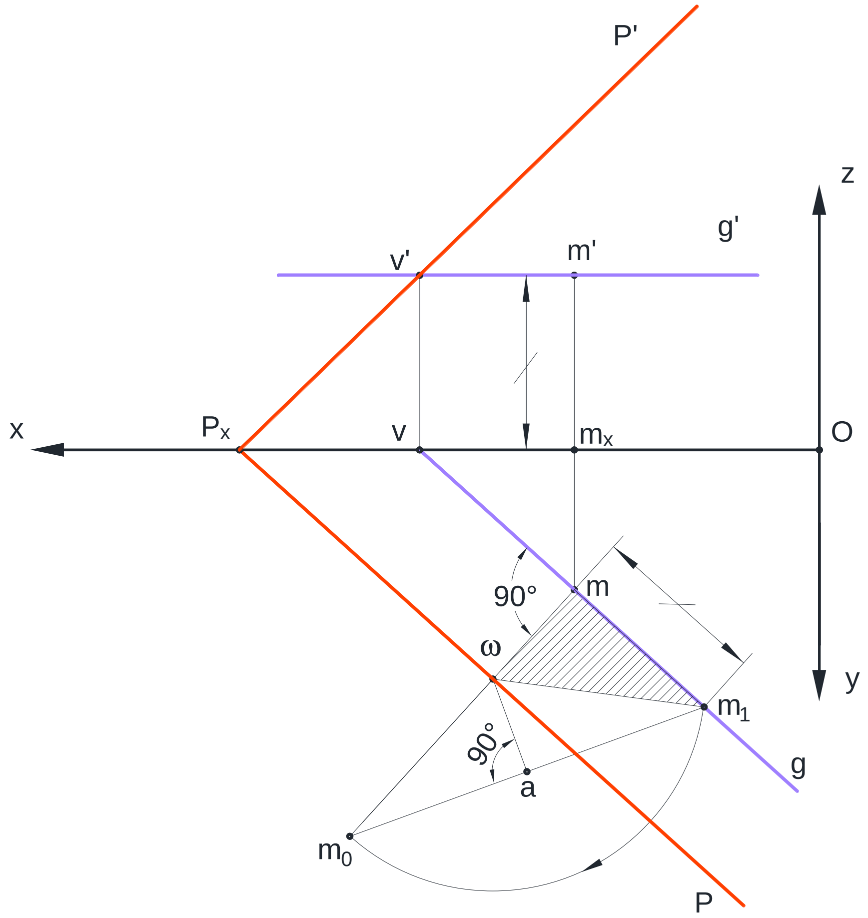


Fig. 4.24. Rezolvare aplicația 4.24

4.25. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare [ABC] prin rabatere pe un plan de nivel [N].
Se cunosc: A(110, 20, 60); B(25, 10, 75); C(70, 0, 10)

Rezolvare aplicația 4.25

Se trasează planul de nivel [N], plan pe care coincide cu orizontala G(g,g'). Orizontala se trasează din proiecția a' și intersectează latura opusă în m'. Se coboară apoi linie de ordine în planul orizontal și se obține proiecția m pe latura cb a triunghiului. Se trasează orizontala g din proiecția a și aceasta este de altfel și axa de rabatere. Axa trece prin a, rezultă a=a_0 e propriul lui punct rabătut. Pentru a determina proiecția b_0 se trasează din punctul b o perpendiculară și o paralelă la axa de rabatere. Piciorul perpendicularei este punctul ω.

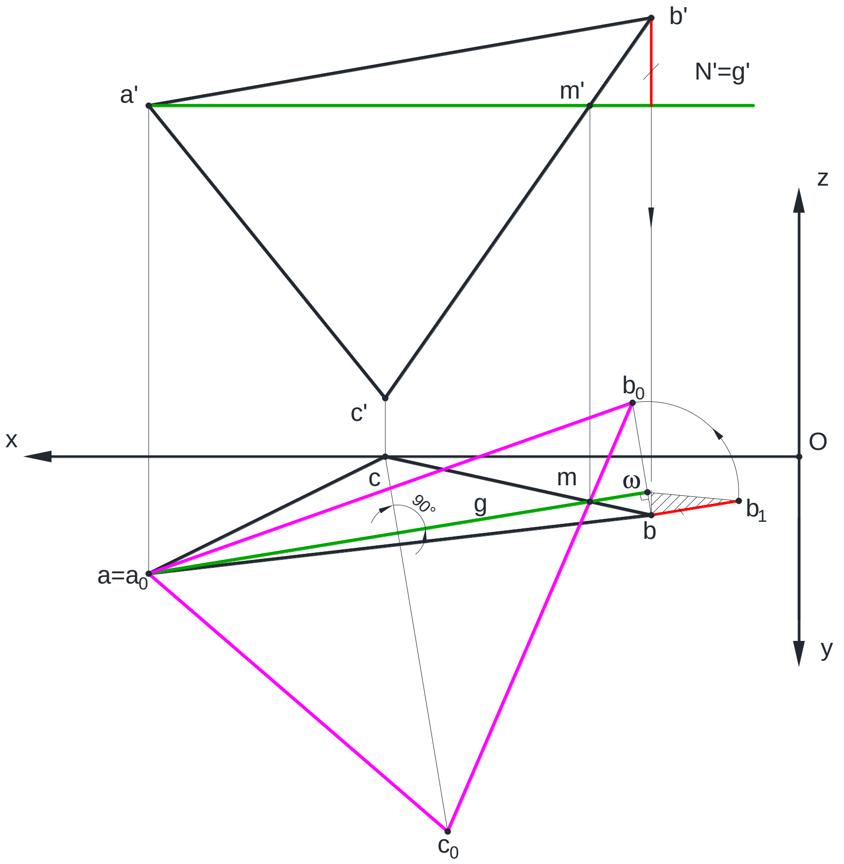


Fig. 4.25. Rezolvare aplicația 4.25

Astfel, bb_1 este egală cu cota proiecției b' până la planul de nivel [N]. Se formează triunghiul de rabatere și cu un arc de cerc din ω, cu raza ωb_1 se obține proiecția b_0. Se intersectează arcul de cerc cu prelungirea perpendicularei bω, și rezultă b_0. Pentru a determina si proiecția c_0 se procedează astfel: se trasează o perpendiculară din proiecția c pe axa de rabatere, iar din proiecția b_0 se trasează o dreaptă care va trece și prin proiecția orizontală a punctului m. La intersecția celor două drepte se obține proiecția c_0, al treilea vârf al triunghiului. Astfel, cele trei proiecții $a_0b_0c_0$ determină adevărata mărime a triunghiului căutat.

4.26. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare [ABC] situate într-un plan vertical, prin rabatere pe ambele plane de proiecție.
Se cunosc: A(80, 7, 20); B(50, y, 50) și C(30, 20, 5).

Rezolvare aplicația 4.26

După reprezentarea în epură a punctelor și formarea celor două proiecții ale triunghiului pe planul orizontal și vertical se trasează prin proiecția abc din planul [H] urma orizontală a planului [P] ce conține placa ABC. Urma orizontală P se va suprapune peste proiecția triunghiului ABC și va deveni axa de rabatere, iar urma verticală P' este la ∞. Astfel, se așează vârful compasului în P_x și se rotesc proiecțiile abc până la linia de pământ, după care se treasează linie de ordine în planul vertical.

Pentru a determina proiecțiile care formează adevărata mărime a triunghiului $a_0b_0c_0$ în planul vertical se trasează linii de ordine paralele cu linia de pământ. La intersecția celor două linii de ordine se determină vârfurile triunghiului $a_0b_0c_0$ în adevărată mărime.

Pentru determinarea adevăratei mărimi a triunghiului [ABC] prin rabatere pe planul orizontal de proiecție se procedează astfel: axa de rabatere coincide cu urma P. Se trasează cotele celor trei puncte perpendiculare pe axa de rabatere, apoi se unesc punctele $a_0b_0c_0$, și astfel se determină adevărata mărime a triunghiului ABC.

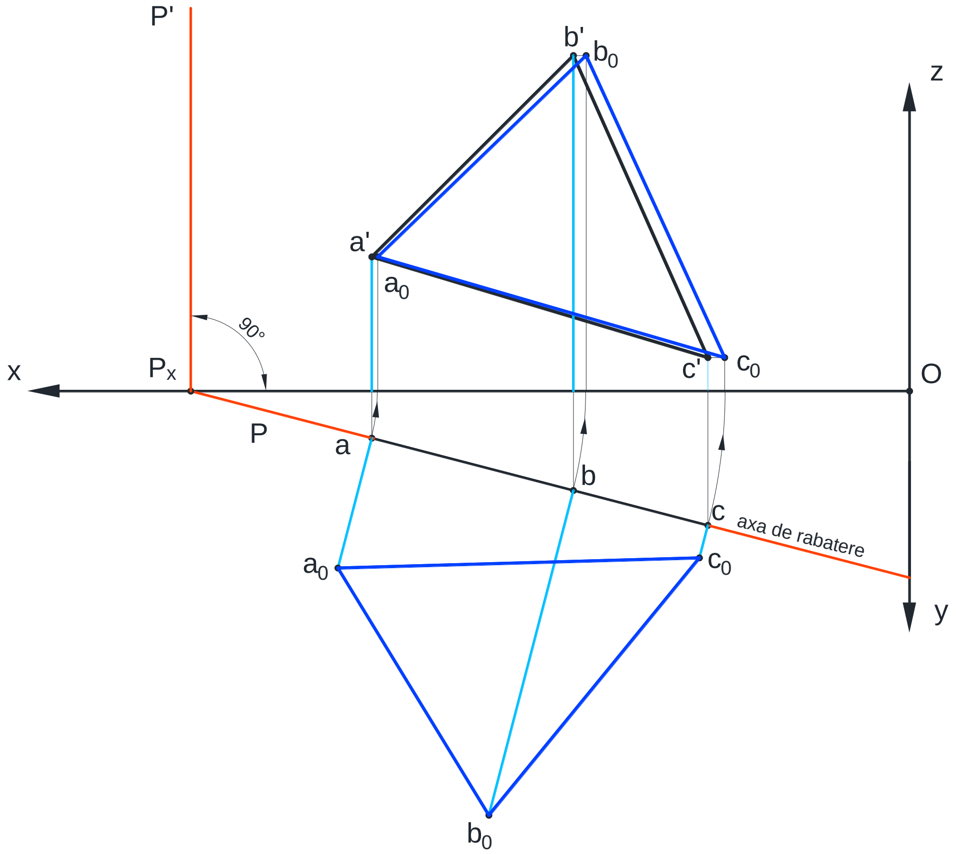


Fig. 4.26. Rezolvare aplicația 4.26

4.27. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare [ABC] situate într-un plan de capăt, prin rabatere pe ambele plane de proiecție.
Se cunosc: A(35, 42, 10); B(46, 5, z); C(80, 15, 40).

Rezolvare aplicația 4.27

Planul triunghiului fiind suprapus peste urma verticală a planului [P] cele trei proiecții a'b'c' sunt coliniare. Astfel, această urmă verticală a planului reprezintă și axa de rabatere. Perpendicular pe această axă de rabatere de reprezintă depărtările punctelor abc din planul orizontal.

Unind proiecțiile se obține adevărata mărime a triunghiului ABC, adică $a_0b_0c_0$. Din P_x se duc arce de cerc până pe axa Ox, apoi se coboară linii de ordine în planul orizontal și se determină adevărata mărime a triunghiului ABC, adică $a_0b_0c_0$..

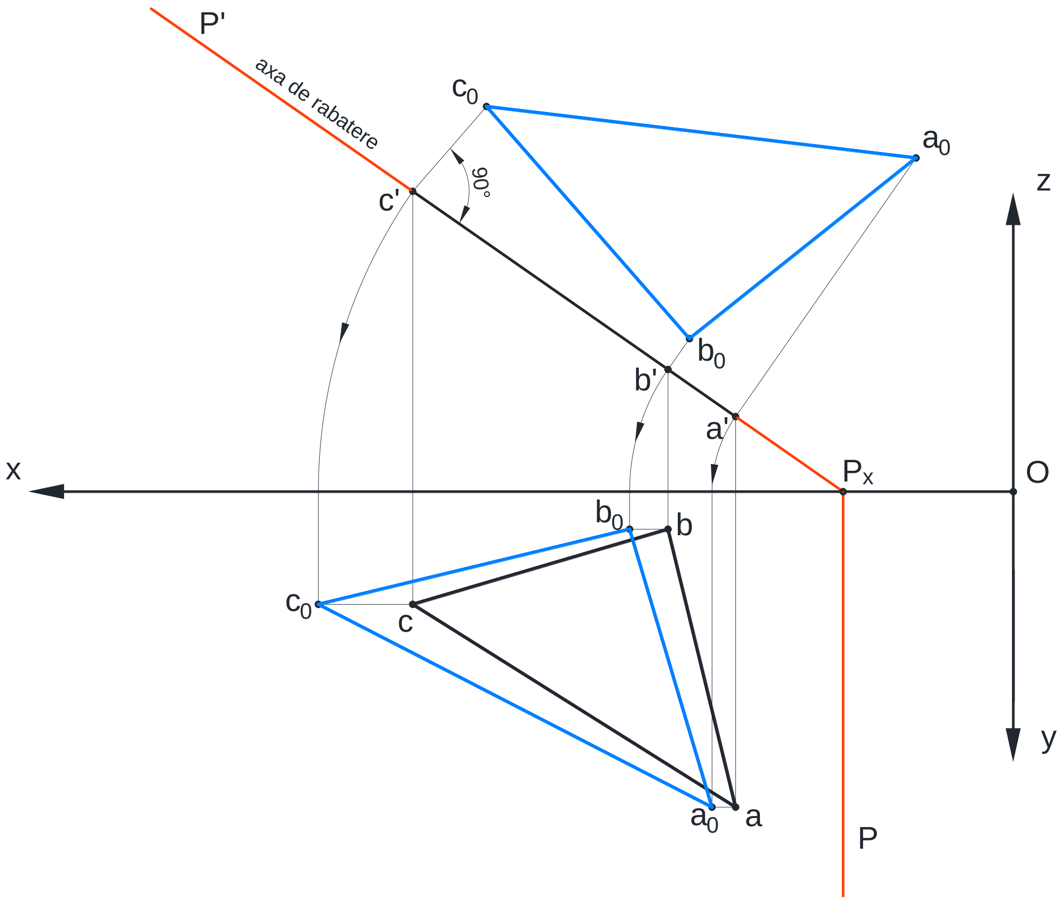


Fig. 4.27. Rezolvare aplicația 4.27

Probleme propuse

4.28. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare ABC prin dublă schimbare de plan. Se cunosc: A(80, 35, 20); B(43, 15, 50); C(23, 50, 5).

4.29. Fie dreapta D(d, d') date de punctele A(70, 20, 30) și B(30, 40, 55). Prin schimbarea planelor de proiecție și apoi prin rotație să se transforme dreapta D(d, d') astfel încât să devină paralelă cu planul [H], iar apoi cu planul [V]. Să se precizeze care este lungimea reală a segmentului AB și apoi unghiul pe care segmentul de dreaptă AB îl face cu planul [H], iar apoi cu planul [V].

4.30. Să se determine adevărata mărime a segmentului de dreaptă AB și unghiul pe care acesta îl face cu planul orizontal de proiecție. Se cunosc: A(10, 10, 7); B(30, 5, 20) *(Indicație: se transformă segmentul de dreaptă în dreaptă de front, AB∥[V]).*

4.31. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare ABC prin dublă schimbare de plan. Se cunosc: A(35, 30, 35); B(90, 5, 20); C(15, 5, 10).

4.32. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare ABC prin dublă schimbare de plan și apoi prin rotație.
Se cunosc: A(55, 40, 43); B(35, 25, 10); C(90, 15, 20).

4.33. Să se determine adevărata mărime a unei plăci triunghiulare folosind metoda rotației. Se cunosc: A(50, 10, 15); B(90, 25, 25); C(70, 45, 40).

4.34. Fie planele [P]: $OP_x = 70$, $OP_y = 80$, $OP_z = 65$, și planul [Q]: $OQ_x = 140$, $OQ_y = 40$, $OQ_z = 50$. Să se determine unghiul α dintre cele două plane folosind metoda rabaterii.

4.35. Să se determine unghiul β dintre planul [P]: $OP_x = 140$, $\sphericalangle OP_yP = 60°$, $OP_z = 80$ și planul [Q]: $OQ_x = 30$, $OQ_y = -80$, $OQ_z = -30$, folosind metoda rabaterii.

4.36. Să se determine unghiul α dintre dreptele concurente D(d, d') și $D_1(d_1, d_1')$ prin rabatere pe planul orizontal. Se cunosc: A(80, 10, 50); E(20, 5, 60) pentru dreapta (D) și punctul F(40, 20, 35) este punctul de interescție al celor drepte. Dreapta $D_1(d_1, d_1')$ se alege constructiv și trebuie să treacă prin punctul F.

4.37. Să se determine unghiul α dintre dreptele concurente $D_1(d_1, d_1')$ și $D_2(d_2, d_2')$ prin rabatere pe planul orizontal. Se cunosc: A(50, 15, 40); B(10, 70, 5) și N(90, 30, 20). Punctul N(n, n') este punctul de interescție al celor drepte. Dreapta $D_2(d_2, d_2')$ se alege constructiv și trebuie să treacă prin punctul N.

4.38. Să se determine adevărata mărime a triunghiului [ABC] prin rabatere pe un plan de nivel [N]. Se cunosc: A(50, 20, 50); B(90, 70, 10); C(10, 30, 30).

4.39. Să se determine adevărata mărime a dreptei (AB) utilizând metoda rotației de nivel și rotația de front. Comparați cele două rezultate obținute.
Se cunosc: A(90, 20, 20); B(20, 50, 35).

4.40. Să se găsească adevărata mărime a distanței de la punctul M(80, 40, 10) la dreapta D(d, d'): A(60, 15, 35); B(10, 25, 20) folosind metoda rotației. (Indicație: axa de rotație se ia prin punct).

4.41. Să se determine adevărata mărime a triunghiului [DEF] prin rabatere pe un plan de nivel [N]. Se cunosc: D(160, 40, 50); E(20, 10, 30); F(80, 70, 90).

4.42. Prin schimbarea planelor de proiecție și apoi prin rotație să se transforme dreapta D(d, d') astfel încât să devină paralelă cu planul orizontal de proiecție.
a) Să se precizeze care este lungimea reală a segmentului de dreaptă AB și unghiul pe care aceasts îl face cu planul vertical de proiecție.
b) Să se afle care este distanța de la un punct M(25, 30, 5) din spațiu la dreapta D(d, d') determinată de punctele A și B.
Se dau coordonatele: A(40, 10, 15); B(10, 25, 20).

4.43. Prin schimbarea planelor de proiecție și apoi prin rotație să se transforme dreapta D(d, d') determinată de punctele A și B, astfel încât să devină paralelă cu planul vertical de proiecție.
a) Să se precizeze care este lungimea reală a segmentului de dreaptă AB și unghiul pe care îl face cu planul orizontal de poiecție.
b) Să se afle care este distanța dintre dreapta D(d, d') ∥ $D_1(d_1, d_1')$, care trece prin punctul M(20, 10, 10).
Se dau coordonatele: A(45, 35, 5); B(15, 15, 20).

4.44. Să se determine distanța de la punctul M(50, 35, 30) la planul [P]: OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70, utilizând o schimbare de plan de proiecție. *(Indicație: se tranformă planul [P] în plan de capăt, [P]⊥[V]).*

4.45. Să se determine adevărata mărime a distanței ℓ cuprinsă între planele paralele [P] și [Q]. Se dau: OP_x = 100, OP_y = 40, OP_z = 60, și [Q]: OQ_x = 60.

4.46. Se cunosc coordonatele: A(45, 10, 35); B(20, 30, 10); C(70, 40, 15);
[P]: OP_x = 80, OP_y = 60, OP_z = 70. Se cere să se determine:

a) Distanța dintre dreptele AB∥D; D trece prin punctul C, prin rabatere pe planul [H];
b) Adevărata mărime a plăcii triunghiulare ABC prin rabatere pe un plan de front [F];

4.47. Se dă o dreaptă oarecare. Se cere ca printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, dreapta să devină frontală. Coordonatele punctelor care determină dreptele sunt A(60, 5, 20); și B(20, 15, 35).

4.48. Se dau punctele A și B situate pe o dreaptă de poziție oarecare. Se cere ca dreapta ce conține aceste puncte să devină, prin rotații succesive, o dreaptă verticală. Coordonatele punctelor care determină dreptele sunt: A(80, 40, 25) și B(50, 10, 5).

4.49. Să se construiască perpendiculara din punctul M(80, 20, 40) la dreapta D(d, d'), determinată de punctele A(65, 24, 16); și B(55, 10, 21); să se afle adevărata mărime acestei perpendiculare. (Indicație: printr-o schimbare de plan se aduce dreapta D(d, d') în poziție frontală, apoi se construiește perpendiculara MG; printr-o nouă schimbare de plan se găsește mărimea segementului MG), *vezi figura 4.28.*

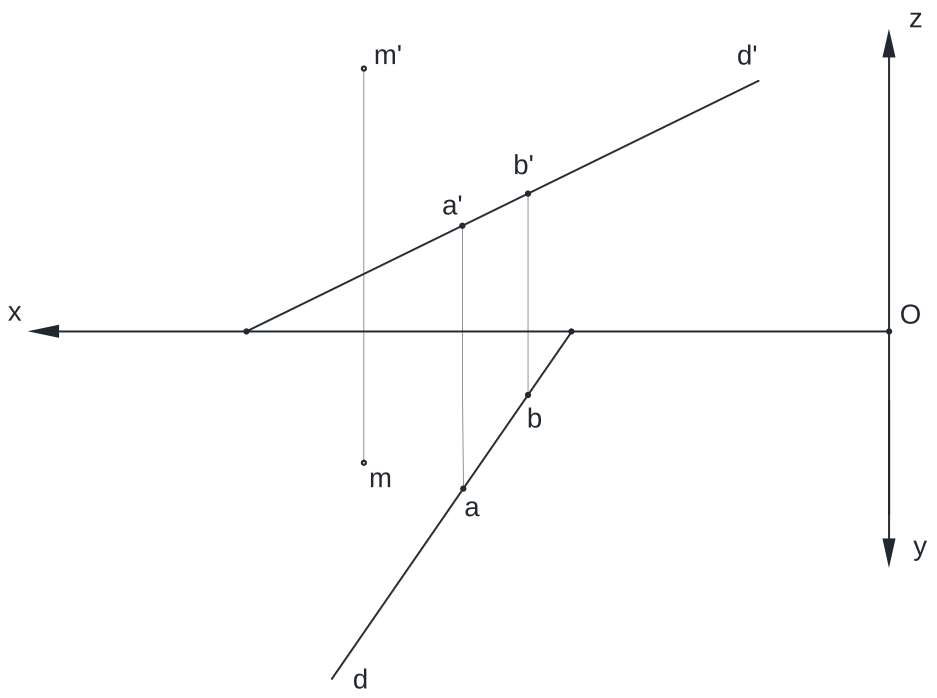


Fig. 4.28 Figura pentru problema 4.49

4.50. Urma orizontală a planului [P] este definită de punctele P_x(130, 0, 0) și H(60, 60, 0). Să se determine urma verticală a planului [P], știind că distanța de la punctul A(60, 20, 30) la planul [P] este de 20 mm.
Indicație: Se rotește planul [P] în jurul unei axe verticale, trecând prin punctul A, până devine plan de capăt. Fie $P_{x1}P_{h1}$ urma orizontală rotită. Urma verticală rotită este tangeta dusă din P_{x1} la cercul de centru a' și rază r = 20 mm.

4.51. Dreapta D(d, d') trece prin punctele A(90, 30, 25) și H(60, 75, 0). Să se rotească dreapta D(d, d') în jurul axei verticale (ω) care conține punctul A(a, a'), astfel încât după rotație dreapta să facă un unghi de 30° cu planul vertical de proiecție.
(Indicație: Se consideră segmentul AH, a cărui mărime se determină folosind rotația în jurul axei (U). Se construiește triunghiul dreptunghic care are ipotenuza AH și un unghi ascuțit de 30°; cateta alăturată unghiului de 30° reprezintă mărimea proiecției verticale a segmentului AH rotit până când face unghiul de 30° cu planul vertical).

4.52. Folosind metoda schimbării planelor de proiecție și apoi rotația, să se determine adevărata mărime a segmentului de dreaptă AB și a unghiurilor α și β, pe care le face acest segment cu planele de proiecție [H] și [V]. Rezolvarea se va face în epure diferite. Se cunosc: A(95, 20, 15); B(45, 50, 40).

4.53. Se dă planul [P] prin urme: OP_x = 70, $\sphericalangle OP_xP$ = 30°, $\sphericalangle OP_xP'$ = 60°. Se cere să se determine, utilizând metoda schimbării planelor de proiecție, adevărata mărime a unghiurilor α și β formate de planul [P] cu planele de proiecție [H], respectiv [V].

4.54. Folosind metoda rotației, să se determine adevărata mărime a distanței de la punctul M la segmentul de dreaptă (AB). Se cunosc: A(50, 20, 30); B(25, 10, 15); M(40, 30, 40).

4.55. Folosind metoda schimbării planelor de proiecție și apoi rotația, să se determine adevărata mărime a distanței de la punctul M la planul [P]. Rezolvarea se va face în epure diferite. Se dau coordonatele: M(115, 40, 35); $OP_x = 10$; $\sphericalangle OP_xP = 135°$; $\sphericalangle OP_xP' = 140°$.

4.56. Folosind metoda schimbării planelor de proiecție și rotația, să se determine distanța dintre două drepte paralele D(d, d'), $D_1(d_1, d_1')$. Rezolvarea se va face în epure diferite. Se cunosc pentru dreapta D: A(80, 15, 20) și B(30, 35, 55) și dreapta D_1 paralelă cu dreapta D care conține punctul C(50, 15, 20).

4.57. Să se determine, folosind metoda rotației, adevărata mărime a distanței dintre planele paralele [P] și [Q], date prin urme:
Se dau: $OP_x = 75$; $\sphericalangle OP_xP = 45°$; $\sphericalangle OP_xP' = 30°$; $OQ_x = 40$.

4.58. Folosind metoda rabaterii pe un plan de front, să se determine adevărata mărime a triunghiului [ABC]. Se cunosc: A(80, 25, 55); B(55, 55, 75); C(15, 5, 15).

4.59. Se dă dreapta D(d, d'), definită de punctele A și B și un punct exterior dreptei. Se cere să se determine distanța de la punctul M la dreapta (AB). Se cunosc: A(40, 20, 30); B(100, 60, 80); M(25, 55, 50).

4.60. Să se reprezinte un pătrat cu latura de 30 mm conținut într-un plan de capăt [R] știind că are două laturi în poziție de capăt.
Se dau: $OR_x = 70$; $\sphericalangle OR_xR = 90°$, $\sphericalangle OR_xR' = 45°$.

4.61. Utilizând metoda rabaterii să se determine adevărata mărime a triunghiului [ABC] conținut în planul oarecare [P].
Se dau A(80, 10, z_A); B(55, 0, z_B); C(45, y_C, 0); $OP_x = 120$; $\sphericalangle OP_xP = 45°$, $\sphericalangle OP_xP' = 30°$.

CAPITOLUL V
POLIEDRE
PRISMA ȘI PIRAMIDA

5.1. Se dă prisma dreaptă cu baza conținută în planul orizontal [H], cu baza un pentagon regulat înscris într-un cerc de rază 30 mm și înălțimea 80 mm și originea în punctul Ω(70, 45, 80).

Să se determine punctele de intersecție cu o dreaptă D(d, d'), definită de punctele M(30, 25, 20) și N(115, 60, 45). Să se construiască desfășurata prismei și să se reprezinte punctele de intersecție cu dreapta.

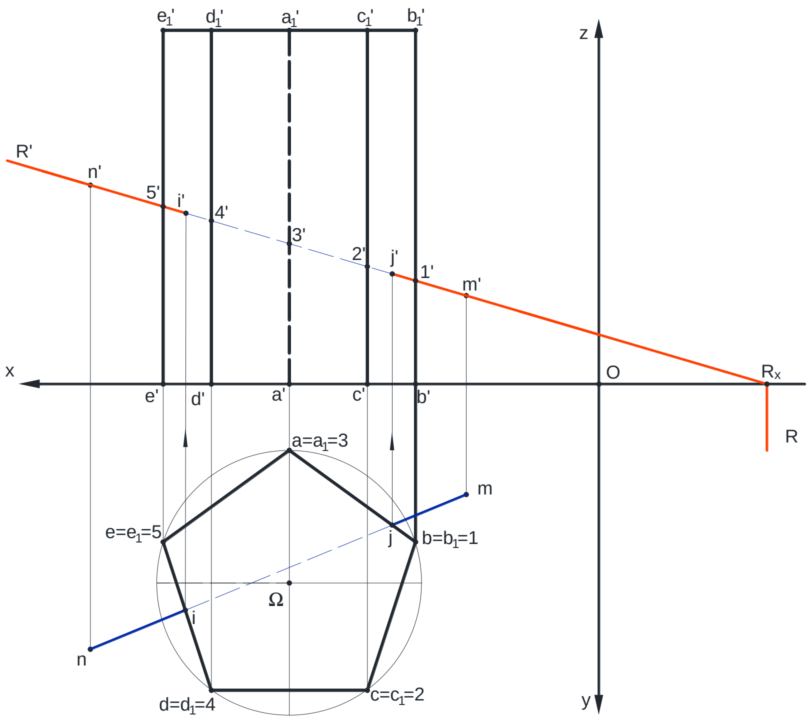
Rezolvare aplicația 5.1

Se reprezintă în epură punctele care definesc dreapta D(d, d') și punctele care definesc prisma pentagonală (figura 5.1). Baza prismei fiind situată în planul orizontal de proiecție acest lucru ne arată că baza este reprezentată în adevărată mărime. Pentru a determina punctele de intersecție dintre dreaptă și prismă se folosește un plan de capăt, care se trasează prin proiecția dreptei d' în planul vertical (urma planului R'). Această urmă intersectează linia de pământ în punctul R_x. Urma planului R în planul orizontal se trasează perpendiculară pe linia de pământ și merge la ∞.

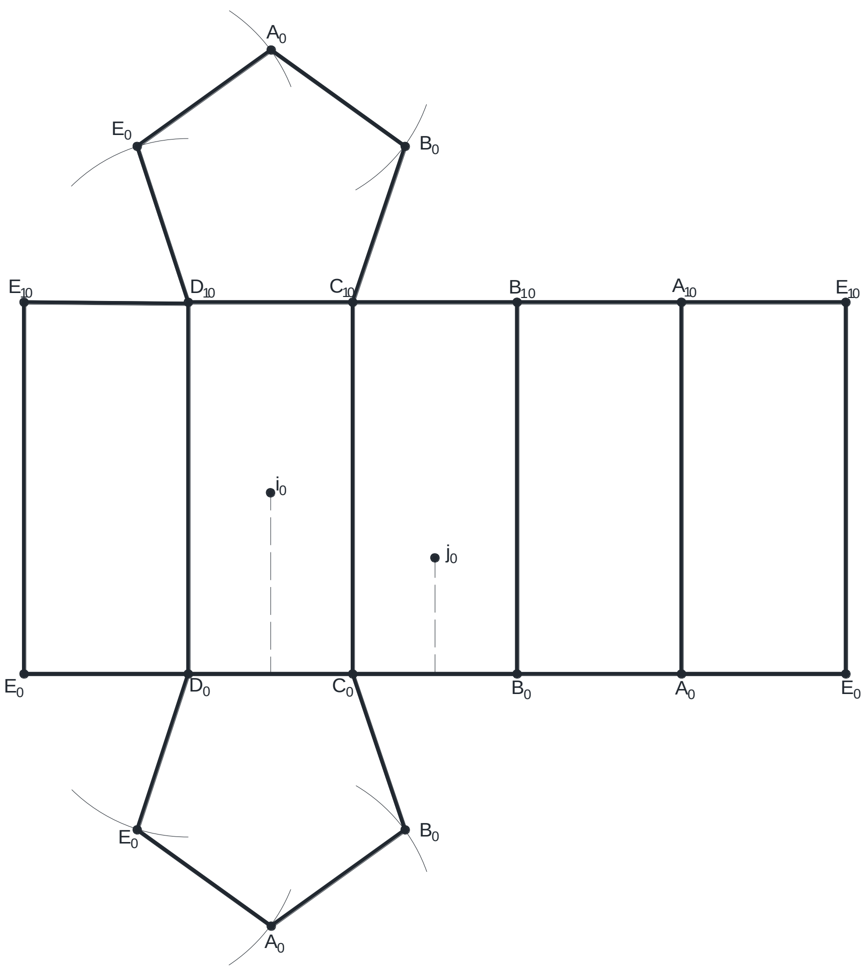
Se determină în planul orizontal proiecțiile ij, puncte unde dreapta intersectează prisma. Se duc linii de ordine în planul vertical și se obțin pe muchiile corespondente cele două proiecții i'j'.

Pentru desfășurata prismei este necesară de mărimea reală a muchiilor care formează fețele laterale și de muchiile celor două baze ale prismei.

Astfel, se reprezintă muchiile care formează cele cinci fețe laterale prin reprezentarea dreptunghiurilor de bază 35 și înălțime 80 mm, apoi cu arce de cerc de raza egală cu latura bazei se reprezintă și cele două baze ale prismei.



a)



b)

Fig. 5.1. Rezolvare aplicația 5.1 a), b) desfășurata prismei pentagonale

5.2. Se dă piramida dreaptă cu baza conținută în planul vertical [V] de proiecție, cu baza pentagon regulat înscris într-un cerc de rază 30 mm și vârful S(60, 80, 40).
Să se determine punctele de intersecție dintre un plan de capăt [Q] definit de OQ_x = 15; ∢OQ_xQ=150° și piramidă. Să se construiască secțiunea care rezultă în urma intersecției dintre planul [Q] și piramidă.

Rezolvare aplicația 5.2

Se reprezintă în epură punctele din datele problemei și se determină piramida, după care reprezentăm planul [Q] care este un plan perpendicular pe planul orizontal de proiecție (plan vertical). Urma Q va intersecta în planul orizontal muchiile piramidei în punctele 1, 2, 3, 4 și 5. Din aceste puncte se trasează linii de ordine și se determină în planul vertical proiecțiile 1', 2', 3', 4', 5'. Unind cu linie aceste proiecții rezultă secțiunea dată de planul [Q]. Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii se vor rabate punctele din planul orizontal pe planul vertical de proiecție, urma Q' este axa de rabatere, asezând vârful compasului în originea planului Q_x=Q_{0x} până pe urma planului Q_0. Din planul vertical se trasează linii de ordine și la intersecția cu liniile de ordine trasate din prelungirea arcelor de cerc se determină punctele 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_0, puncte care formează adeavărata mărime a secținii dată de planul secant [Q] (plan vertical).

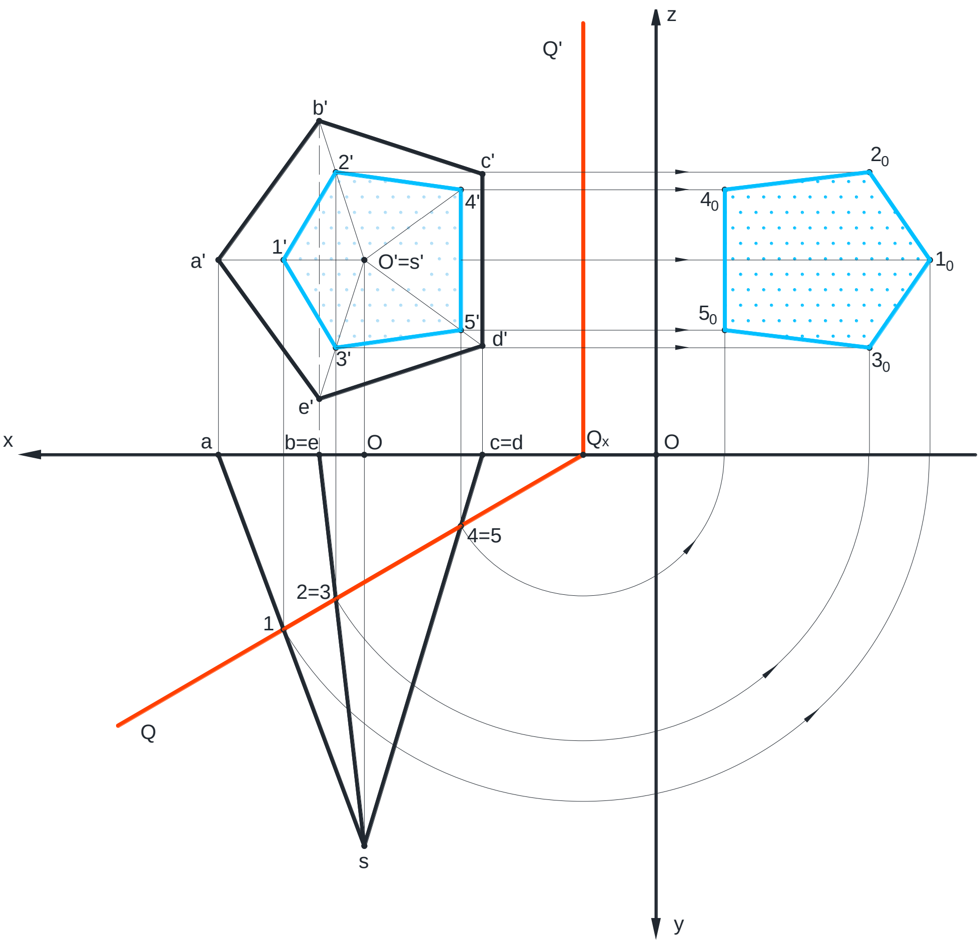


Fig. 5.2. Rezolvare aplicația 5.2

5.3. Se dă piramida patrulateră oblică cu vârful situat în punctul S(30, 35, 50). Se dau coordonatele A(130, 45, 0); B(100, 15, 0); C(80, 45, 0); D(110, 75, 0), și planul [P] oarecare, OP_x = 40, ∢OP_xP = 120°, ∢OP_xP' = 135°. Să se determine secțiunea făcută de planul [P] în piramidă, precum și adevărata mărime a acesteia.

Rezolvare aplicația 5.3

Se reprezintă în epură punctele A,B,C și S care este vârful piramidei, iar apoi planul [P], un plan oarecare.

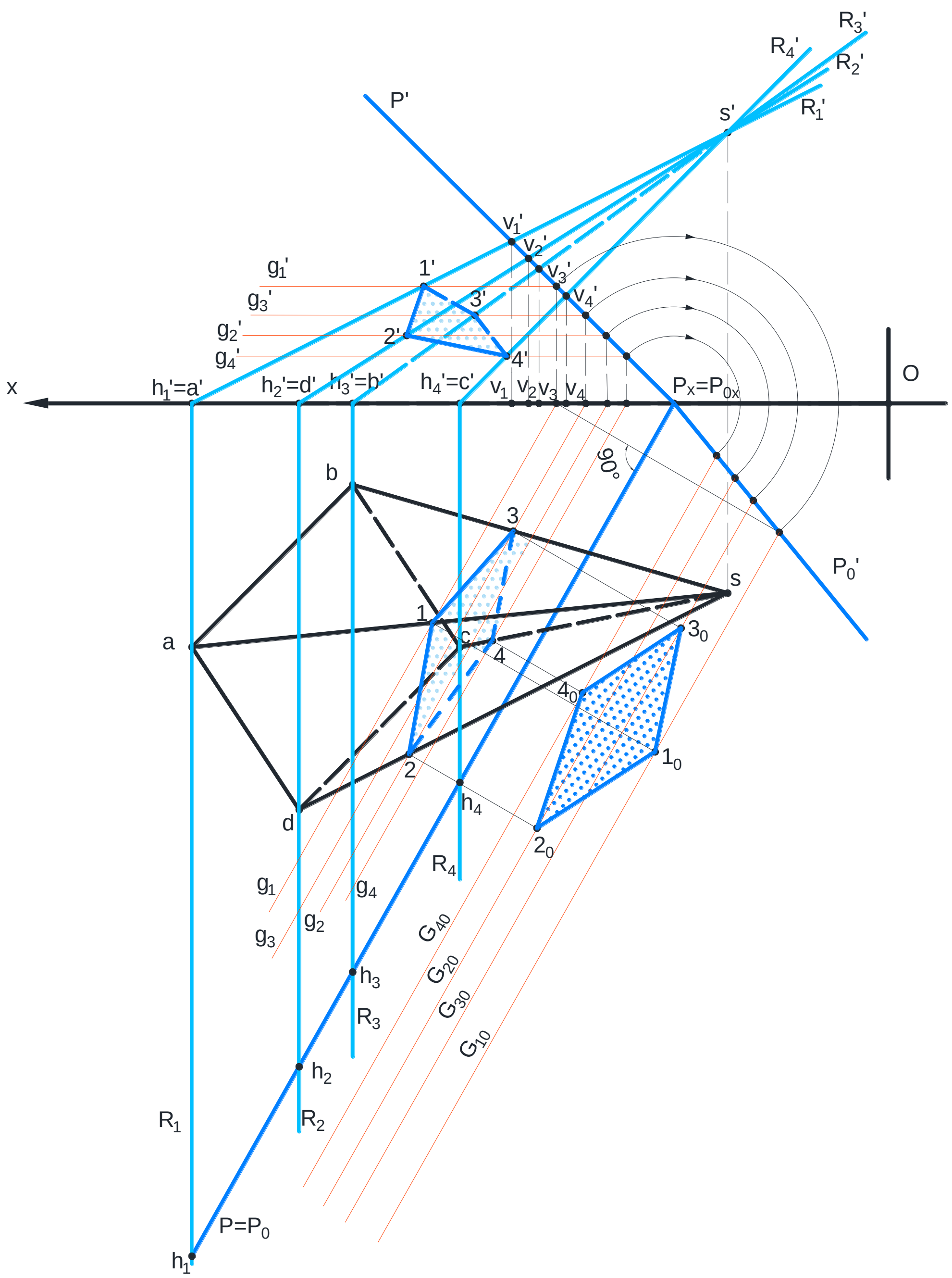


Fig. 5.3. Rezolvare aplicația 5.3

Se trasează în planul vertical orizontalele g_1' până la g_4'. Aceste orizontale vor intersecta urma verticală P' a planului rezultând proiecțiile v_1', v_2', v_3' și v_4'. Aceste orizontale taie muchiile piramidei în punctele 1', 2', 3', 4', puncte care determină secțiunea căutată.

Din proiecțiile v_1' până la v_4' se trasează linii de ordine în planul orizontal până pe linia de pământ și se obțin proiecțiile v_1, v_2, v_3, v_4. Din aceste proiecții obținute pe linia de pământ se trasează orizontalele g_1, g_2, g_3, g_4. Aceste proiecții intersectează muchiile piramidei în planul orizontal și se obține secțiunea 1234. Aceste puncte se vor rabate după urma orizontală P, care este și axa de rabatere, P_x=P_0. Pentru a determina urma P_0 se trasează arce de cerc, cu vârful compasului în P_x. Din v_1 se trasează perpendicular pe urma P a planului până intersectează arcul de cerc trasat din v_1' și astfel se obține primul punct de pe urma căutată P_0'.

În mod asemănător se va proceda și pentru determinarea celorlalte puncte care vor fi coliniare și vor forma urma P_0'. Din aceste puncte de pe urma P_0' se trasează orizontalele G_{10}, G_{20}, G_{30}, G_{40}. Din punctele1,2,3,4 se duc perpendiculare pe aceste orizontale și se obțin punctele 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, puncte care formează adevărata mărime a secțiunii.

5.4. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul [R] în prisma triunghiulară. Se cunosc coordonatele punctelor care formează prisma triunghiulară, precum și urmele planului: A(120, 10, 0); B(150, 30, 0); C(105, 50, 0); E(40, 25, 70); OR_x = 30, ∢OR_xR'= 135°, ∢OR_xR= 90°.

Rezolvare aplicația 5.4

Se reprezintă în epură punctele și urmele planului [R]. În planul orizontal se unesc proiecțiile a,b,c, iar din proiecția a se trasează o dreaptă până în proiecția e. Paralel cu proiecția a se va trasa din b și c alte două drepte. În planul vertical a'b'c' sunt pe axa O_x deoarece depărtările acestor puncte sunt egale cu zero. Se unește proiecția a' cu e' și apoi paralel cu muchia a'e' se trasează celelalte două muchii care formează prisma. Din proiecțiile f',e',g' din planul vertical se trasează linii de ordine până la intersecția cu muchiile din planul orizontal și rezultă apoi proiecția prismei.

Pentru determinarea secțiunii se utilizează planul de capăt [R], plan perpendicular pe planul vertical [V] de proiecție. Observăm în planul vertical că urma planului R' intersectează cele trei muchii ale prismei în punctele 1', 2' și 3'. Se coboară linii de ordine în planul orizontal și se determină secținea 123.
Pentru a găsi adevărata mărime a secțiunii de rabat punctele 1'2'3' în jurul axei de rabatere R, iar din punctele 123 se trasează perpendiculare pe urma R a planului (R=R_0).
La intersecția arcelor de cerc cu perpendicularele din 123 rezultă adevărata mărime $1_02_03_0$.

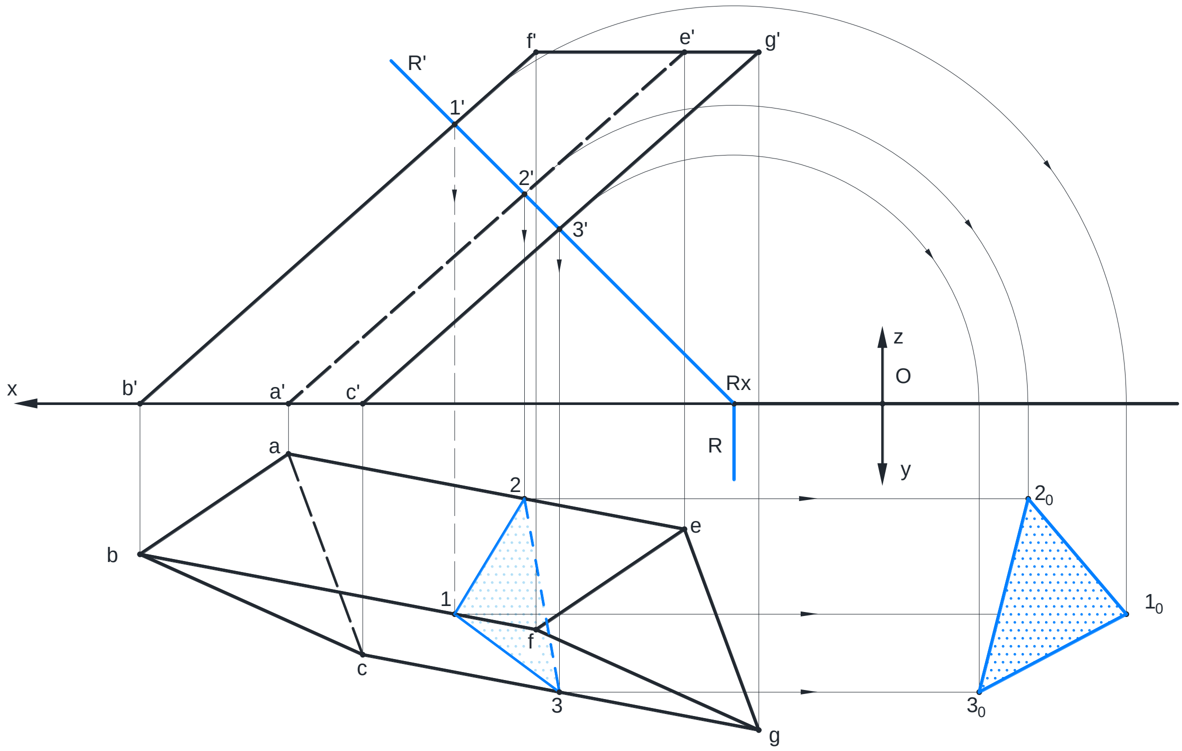


Fig. 5.4. Rezolvare aplicația 5.4

5.5. Se dă prisma hexagonală dreaptă având originea în punctul Ω(100, 50, 80), înscrisă într-un cerc de rază R = 30 mm, cu baza situată în planul orizontal de proiecție.
Se dă planul oarecare [P]: OP_x = 10, ∢OP_xP = 120°, ∢OP_xP' = 150°. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare în prismă.

Rezolvare aplicația 5.5

Se reprezintă în epură punctele și urmele planului oarecare [P]. Baza fiind situată în planul orizontal de proiecție rezultă că aceasta este reprezentată în adevărată mărime. Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare în prismă se trasează frontale prin fiecare vîrf al prismei. Aceste frontale intersectează urma orizontală P a planului. Astfel rezultă punctele h_1 până la h_6. Din aceste puncte se ridică linii de ordine până la linia de pământ și se obțin punctele $h_1'=h_4'$, $h_2'=h_5'$ și $h_3'=h_6'$. Din aceste puncte se trasează frontalele în planul vertical, aceste frontale se trasează paralele cu urma P' a planului, notate cu f_1' până la f_6'.

Frontale intersectează muchiile prismei hexagonale în punctele 1' pînă la 6' și rezultă secțiunea făcută de planul [P]. Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii se rabat aceste puncte în planul axei de rabatere P_0 = P'. Se trasează perpendiculare pe urma verticală P', peste care vom suprapune urma planului. Pentru a găsi urma P_0 se procedează astfel: se trasează arce de cerc din urmele h_1 – h_6, vârful compasului fiind așezat în punctul P_x=P_{0x}.

De pe linia de pământ se trasează linii de ordine din puctele h_1'=h_4', h_2'=h_5' și h_3'=h_6' până la intersecția cu arcele de cerc, astfel se determină poziția urmei P_0.

În punctele obținute anterior pe urma P_0 se trasează frontalele F_{30}=F_{60}, F_{20}=F_{50} și F_{10}=F_{40}. Din punctele 1' până la 6' se trasează perpendiculare pe aceste frontale și astfel se determină punctele 1_0 până la 6_0. Unind aceste șase puncte se obține adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare în prisma hexagonală.

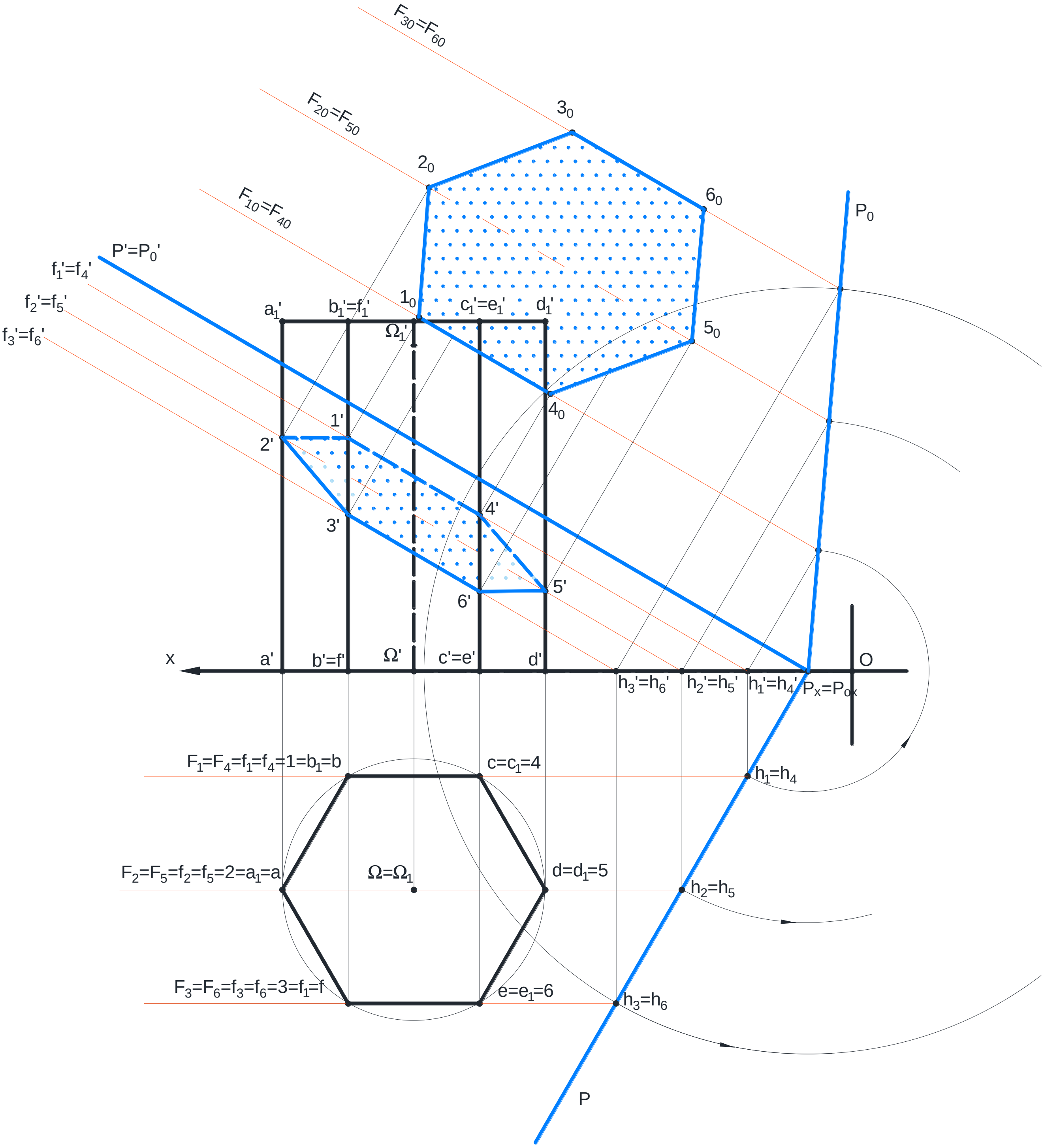


Fig. 5.5. Rezolvare aplicația 5.5

5.6. Fie o prismă triunghiulară oblică cu baza în planul orizontal de proiecție. Se cunosc: A(130, 50, 0); B(85, 35, 0); C(110, 15, 0); A₁(50, 80, 60). Se cere să se desfășoare prisma și să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și prismă știind că dreapta este determinată de punctele M(95, 50, 30) și N(60, 20, 10).

Rezolvare aplicația 5.6

După reprezentarea punctelor în epură se construiește prisma în planul orizontal unind proiecțiile punctelor abc.

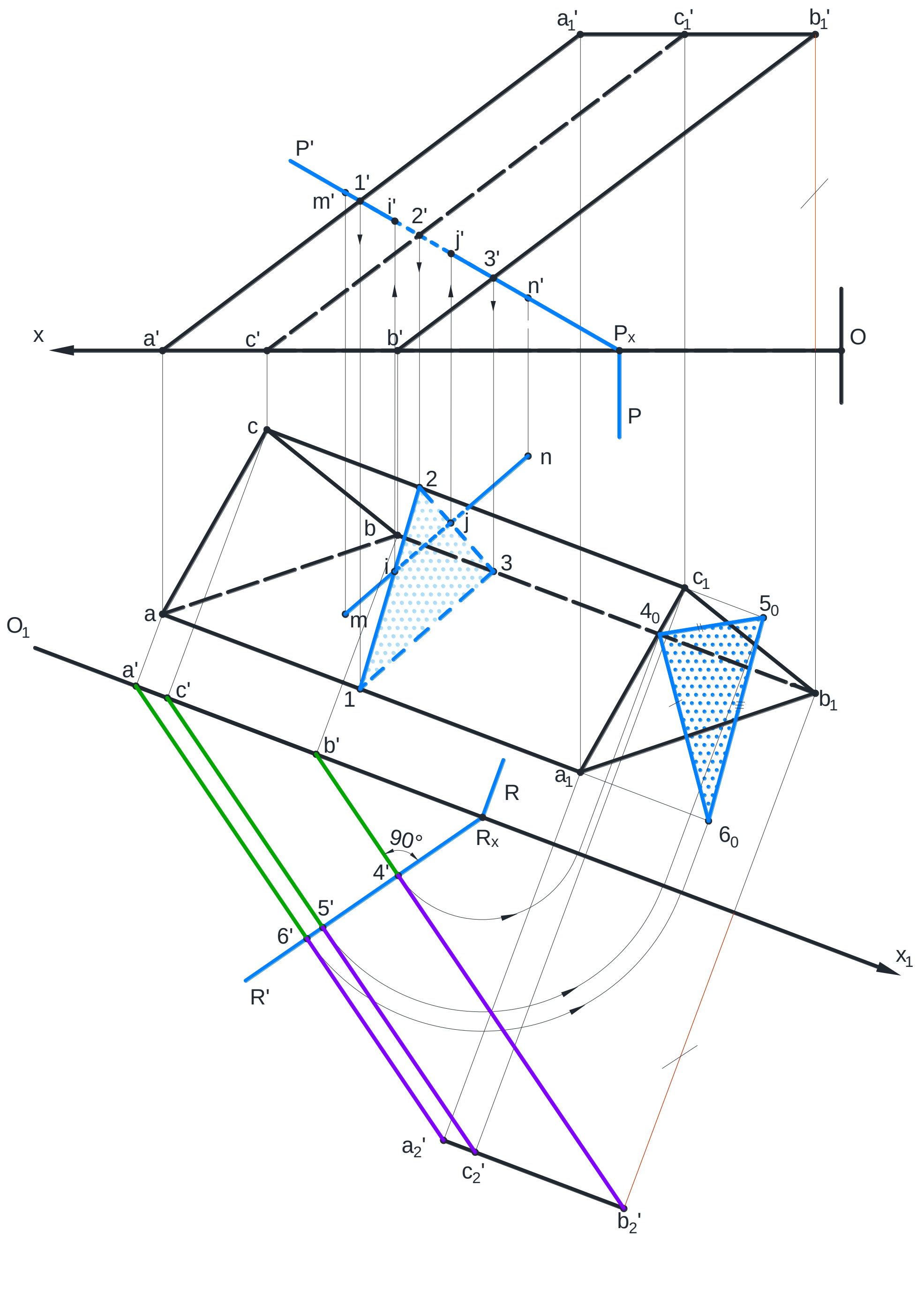


Fig. 5.6. a) Rezolvare aplicația 5.6

Din proiecția a se trasează o muchie până în punctul a_1, iar paralel cu această muchie se trasează din b și c și celelalte două muchii formând fețele laterale ale prismei triunghiulare. În planul vertical proiecțiile a', b' și c' sunt confundate cu linia de pământ deoarece cota acestor puncte este zero. Din proiecția a' se trasează o dreptă care ajunge în punctul a_1', iar paralel cu această muchie se trasează din b' și c' alte două muchii. Se determină proiecția prismei în planul vertical. Din proiecțiile b_1' și c_1' se trasează linii de ordine în planul orizontal și se găsesc proiecțiile b_1 c_1 care se unesc cu a_1. Se poate observa că în planul orizontal de proiecţie muchiile prismei sunt drepte oarecare, iar pentru a desfăşura suprafaţa prismatică dată este necesar să se cunoască adevărata mărime a muchiilor şi adevărata mărime a secţiunii în prismă. Pentru a determina adevărata mărime a muchiilor prismei se poate aplica una dintre metodele Geometriei descriptive, în acest caz se aplică metoda schimbării planelor de proiecţie.

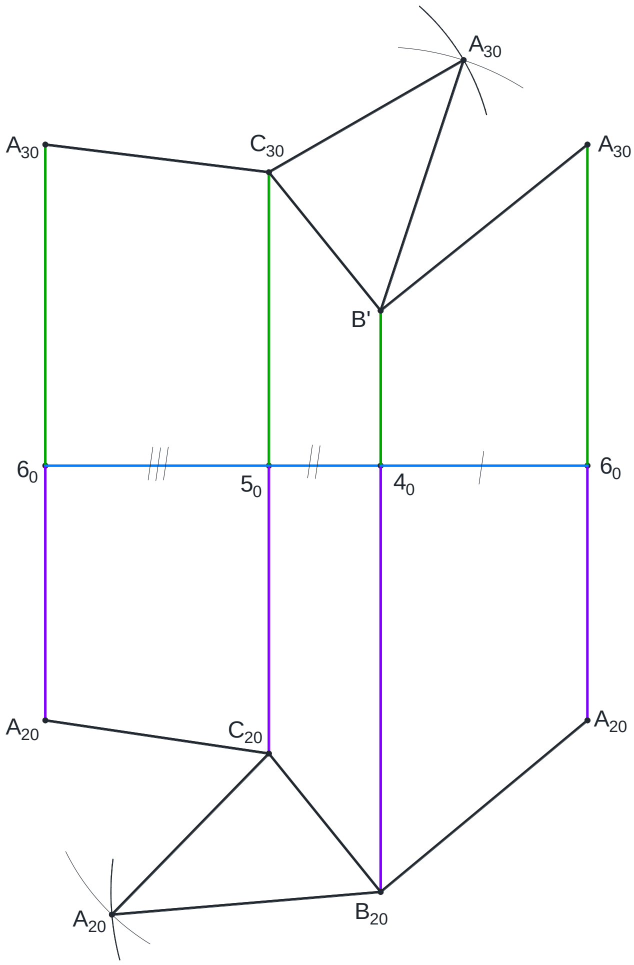


Fig. 5.6. b) Desfășurata prismei triunghiulare

Astfel, se alege la o distanță oarecare un nou plan vertical de proiecţie [V] care va fi paralel cu muchiile prismei, muchiile prismei vor deveni drepte frontale. În epură se trasează linia de pământ O_1x_1 care se ia paralelă cu muchiile prismei şi de sens contrar liniei de pământ Ox. Astfel $O_1x_1 \parallel aa_1 \parallel bb_1 \parallel cc_1$.

Baza inferioară rămâne în planul orizontal de proiecţie, noua bază superioară va fi în planul de nivel de cotă z. În noul sistem de proiecţie muchiile prismei sunt în adevărată mărime.

Al doilea pas în desfăşurarea prismei este determinarea secţiunii normale în prismă. Pentru a determina adevărata mărime a secţiunii în prismă se duce un plan normal pe muchii [R], plan perpendicular pe muchiile $a_3'a_2'$, $c_3'c_2'$, $b_3'b_2'$. Acest plan intersectează muchiile în punctele 4', 5', 6'. Se aşează compasul în punctul R_x şi se rotesc aceste puncte până pe linia de pământ. Se duc linii de ordine până la interescţia cu prelungirea laturilor dacă este cazul şi se determină punctele 4_0,5_0,6_0, puncte care determină adevărata mărime a secţiunii.

În figura 5.6b este reprezentată desfășurata prismei triunghiulare și se determină astfel: pe o linie dreaptă se măsoară lungimea laturilor triunghiului de secţiune şi se obţin punctele 4_0,5_0,6_0,4_0. Având în vedere că muchiile sunt normale pe secţiune, acestea vor fi normale şi în desfăşurată. În aceste puncte se măsoară lungimile muchiilor şi se reprezintă perpendiculare pe linia desfăşurată a secţiunii normale.

Pentru construcţia bazelor prismei se procedează astfel: din punctul C_2' se trasează un arc de cerc cu raza C_2'A_2'. Din punctul B_2' se trasează un arc de cerc cu raza B_2'A_2'. La intersecţia celor două arce de cerc se obţine punctul A_2'. Unind A_2' cu B_2' şi cu C_2' se obţine baza inferioară a prismei triunghiulare.

În mod asemănător se procedează şi pentru determinarea bazei superioare a prismei.

5.7. Se consideră piramida patrulateră oblică, având baza ABCE situată în planul orizontal de proiecţie: A(20, 35, 0); B(10, 10, 0); C(30, 5, 0); E(45, 15, 0) şi vârful S(70, 65, 60). Să se determine desfăşurata piramidei şi să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d, d'): M(60, 30, 15); N(10, 50, 40) şi piramida SABCE.

Rezolvare aplicația 5.7

Se reprezintă în epură punctele care formează piramida patrulateră. Se reprezintă apoi punctele MN care formează dreapta D(d, d'). Pentru a determina desfășurata piramidei avem nevoie de adevărata mărime a muchiilor piramidei, iar baza fiind situată în planul orizontal de proiecție rezultă că baza se află în adevărată mărime.

Pentru a determina adevărata mărime a muchiilor se folosește una dintre metodele Geometriei descriptive. Dacă la prismă alegem metoda schimbării planelor de proiecție, pentru piramidă alegem metoda rotației. Astfel, prin vârful SS' al piramidei se trasează o axă de rotație Ω(ω, ω') și se aplică o rotație de nivel, pentru toate muchiile piramidei. Această axă de rotație este perpendiculară pe planul orizontal de proiecție. Muchiile se transformă în drepte frontale și se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție.

Se așează apoi compasul în proiecția s și se rotesc punctele bazei a, b, c, e cu arce de cerc până la linia de ordine paralelă cu linia de pământ, linie de ordine care este trasată din vârful s al piramidei.

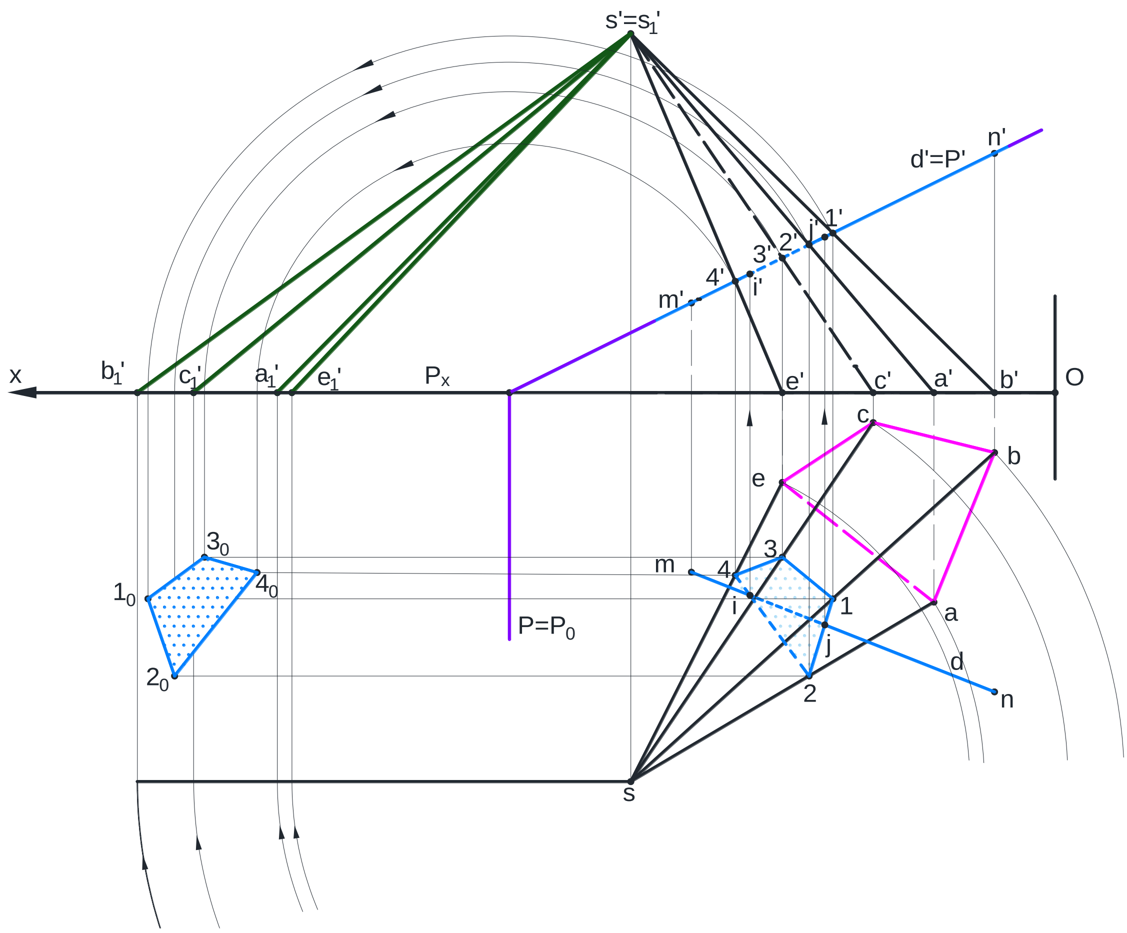


Fig. 5.7. a) Rezolvare aplicația 5.7

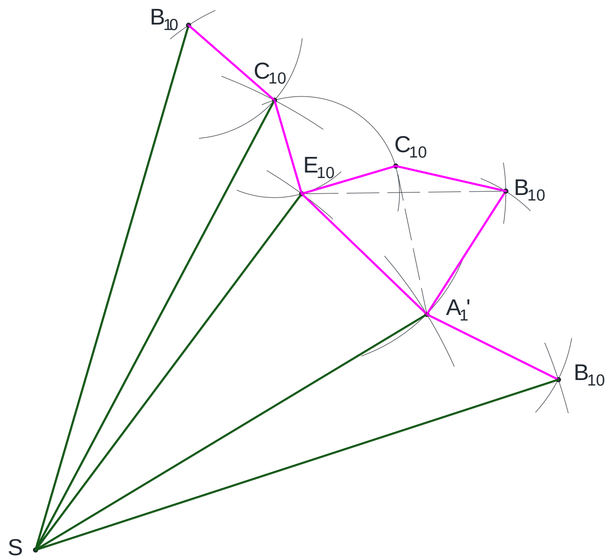


Fig. 5.7.b) Desfășurata piramidei patrulatere la aplicația 5.7

Se vor trasa linii de ordine în planul vertical până când se intersectează linia de pământ. Se notează punctele bazei piramidei a_1',b_1',c_1',e_1', și se unesc aceste proiecții de pe linia de pământ cu vârful s', și astfel s-a determinat adevărata mărime a muchiilor piramidei.

Pentru a realiza desfășurata piramidei se poate trasa în afara epurei un punct care reprezintă vârful piramidei. Se măsoară un segment de dreaptă egal cu una din muchii și se construiește fața piramidei care conține muchia respectivă. Se măsoară și segmentul bazei care este în adevărată mărime și se alătură construcției, rezultând una dintre fețele piramidei. Având în vedere ca este o piramidă patrulateră va trebui să construim patru astfel de fețe. Pentru construcția bazei se folosec arce de cerc așa cum se poate observa în figura 5.7. Celelalte fețe se construiesc similar primei fețe.

Pentru a determina punctele de intersecție dintre dreaptă și piramidă, se trasează prin proiecția dreptei d' un plan de capăt care va intersecta muchiile piramidei în punctele 1' până la 4'. Din aceste puncte se duc linii de ordine în planul orizontal de proiecție pe muchiile corespondente și se obțin proiecțiile punctelor 1,2,3,4. Unim aceste proiecții și se obține secținea făcută de planul [P] în piramidă. Astfel, proiecția dreptei d intersectează secțiunea în punctele i și j. Acestea sunt punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și piramidă. Cu linii de ordine se obțin în plan vertical proiecțiile i'j'. Între aceste două proiecții linia este reprezentată cu linie întreruptă (nu e vizibilă).

5.8. Să se desfășoare piramida tringhiulară SABC și a trunchiului de piramidă cuprins între planul [H] și planul de capăt ce conține dreapta MN.

Să se găsească punctele în care dreapta MN intersectează piramida și studiați vizibilitatea. Se dau: S(10, 5, 60); A(100, 45, 0); B(75, 15, 0); C(50, 55, 0), iar pentru dreaptă se dau coordonatele punctelor M(85, 5, 15) și N(30, 45, 25).

Rezolvare aplicația 5.8

După reprezentarea punctelor în epură, se construiește piramida triunghiulară, planul [P] care conține dreapta MN. Pentru a determina desfășurata piramidei avem nevoie de adevărata mărime a muchiilor și de adevărata mărime a bazei. Baza fiind situată pe planul orizontal de proiecție ea se află în adevărată mărime. Pentru a afla adevărata mărime a muchiilor se trasează prin vîrful piramidei o axă de rotație și se execută o rotație de nivel, muchiile piramidei devin drepte frontale și se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție.

Pentru a afla punctele de intersecție dintre dreaptă și piramidă se trasează prin dreapta MN un plan de capăt. Astfel acest plan de capăt [P] va intersecta muchiile piramidei în punctele 1',2',3'. Se coboară linii de ordine din aceste puncte pe planul orizontal de proiecție și rezultă punctele 1,2,3. Unind aceste proiecții se obține o secțiune făcută de planul de capăt în piramidă. Punctele de intersecție ij sunt punctele căutate.

Pentru poziționarea pe desfășurată a punctelor de intersecție se translatează punctele din planul vertical pe noua proiecție în adevărată mărime $S_{10}A_{10}B_{10}C_{10}$, pe muchiile corespunzătoare.

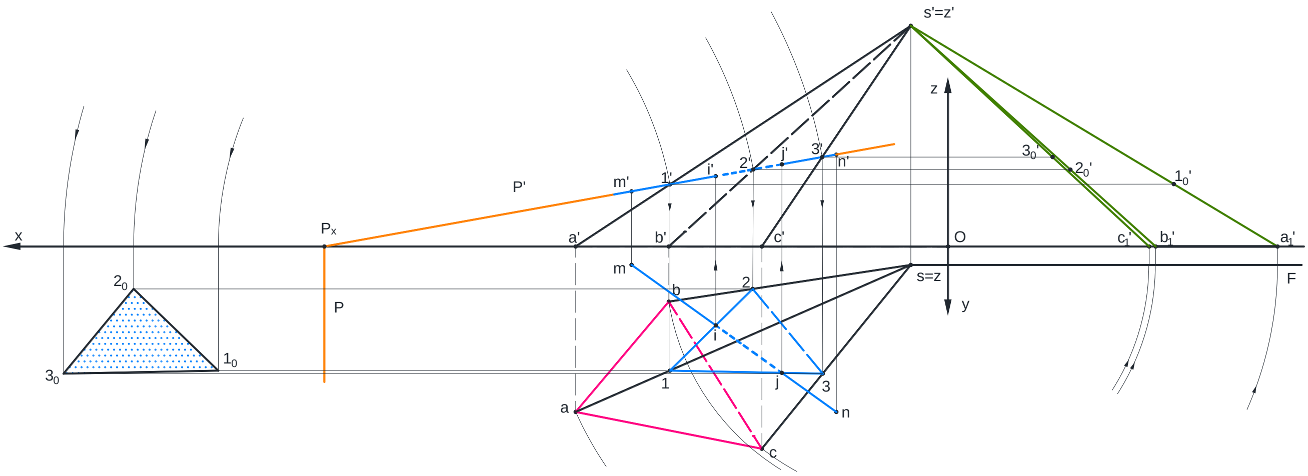


Fig. 5.8.a) Rezolvare aplicația 5.8

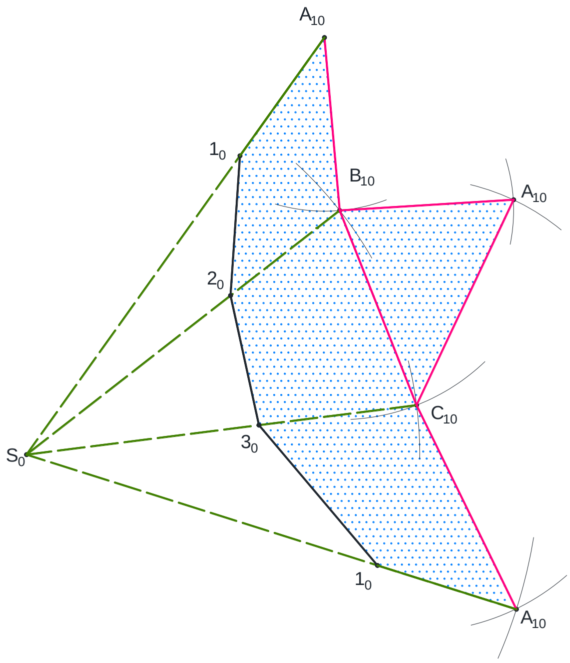


Fig. 5.8.b) Desfășurata piramidei patrulatere la aplicația 5.8

5.9. Să se desfăşoare prisma frontală $ABCA_1B_1C_1$, cu baza un triunghi ABC situat în planul orizontal de proiecţie : A(90,50,0), B(65,20,0) şi muchia AA_1, A_1(25,50,50).

Rezolvare aplicația 5.9

Se reprezintă în epură prisma frontală cu baza situată în planul orizontal de proiecție. Muchiile prismei fiind frontale (drepte paralele cu planul vertical de proiecție) sunt reprezenzentate în adevărată mărime în planul vertical de proiecție, acest lucru înseamnă că nu mai este nevoie de aplicarea unei metode de obținere a mărimii reale ale muchiilor prismei (schimbare de plan de proiecție).

Însă pentru desfășurata prismei frontale avem nevoie de aflarea adevăratei mărimi a secțiunii, astfel se trasează un plan normal pe planul vertical de proiecție, plan de capăt, care va intersecta muchiile prismei în punctele 1',2',3'. Se coboară linii de ordine în planul orizontal din cele trei puncte și se obține secțiunea 1,2,3. Se trasează urma P_0 pe care se rotesc punctele 1',2',3' ducând arce de cerc din P_x pe Ox. Se determină apoi cu linii de ordine punctele de intersecție 1_0,2_0,3_0 și această secțiune obținută este secțiunea normală a prismei. Se trasează o dreaptă orizontală pe care se măsoară laturile triunghiului care este în adevărată mărime 1_0,2_0,3_0, după care se măsoară muchiile din planul vertical de la urma planului secant 1'a_1', 2'b_1', 3'c_1' și se poziționează deasupra liniei orizontale trasate anterior.

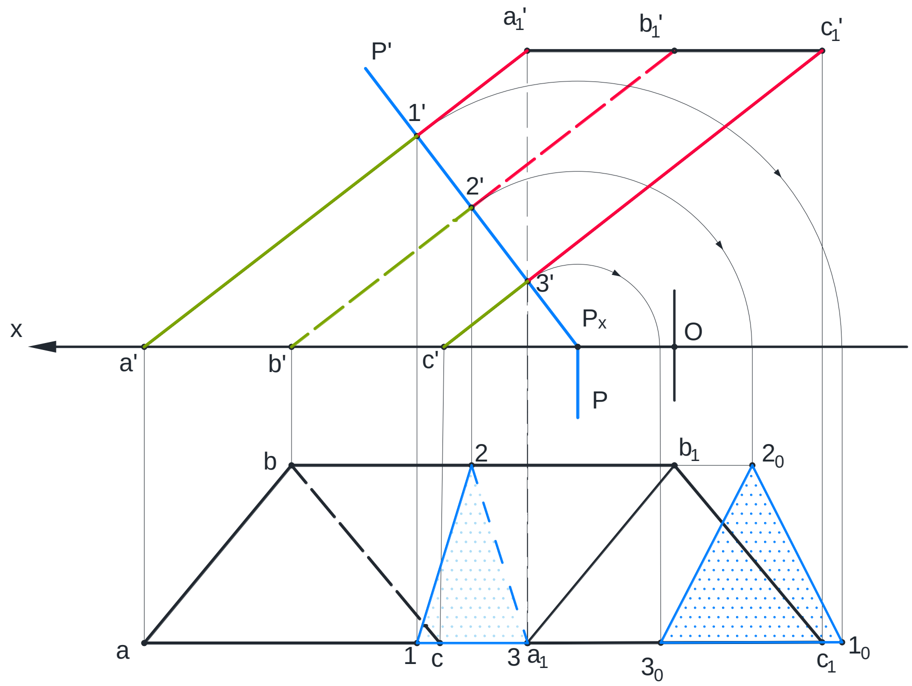


Fig. 5.9.a) Rezolvare aplicația 5.9

Sub această linie orizontală se măsoară din planul vertical muchiile de sub planul secant a'1', b'2', c'3'.

Aceste muchii măsurate se reprezintă sub linia orizontală si se unesc punctele de pe laturile respective. Se completează apoi desfășurata cu bazele care sunt triunghiuri, ducând arce de cerc din B cu raza A_0B_0, iar apoi se trasează alt arc de cerc cu compasul în C_0 și raza C_0A_0 din dreapta. La intersecția celor două arce de cerc se obține punctul A_0.

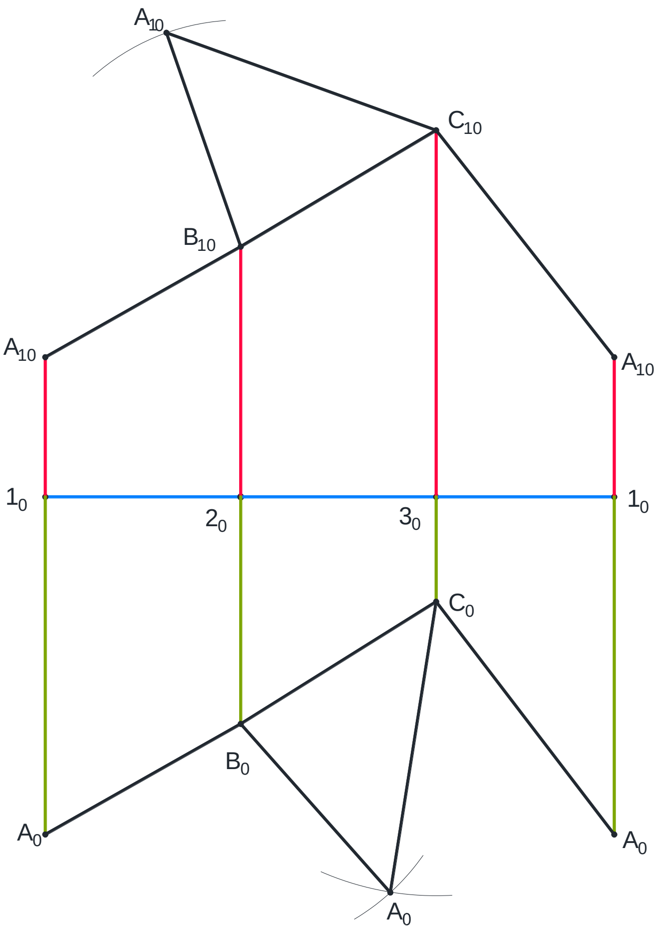


Fig. 5.9.b) Desfășurata prismei triunghiulare frontale la aplicația 5.9

Similar se obține baza prismei și pentru baza superioară, aceasta fiind tot un triunghi. Pe desfășurată se notează punctele cu literă mare, iar în epură cu literă mică.

5.10. Să se desfăşoare piramida oblică VABCD, cu baza un pătrat ABCD situat în planul orizontal de proiecţie ; A(120,40,0), B(90,15,0) şi vârful V(10,10,80).

Rezolvare aplicația 5.10

După reprezentarea punctelor în epură se trece la construcția piramidei oblice. Baza este un pătrat și este proiectată în adevărată mărime în planul orizontal de proiecție. Punctele bazei ABCD se unesc cu vârful V și astfel se obține piramida oblică proiectată pe cele două plane de proiecție.

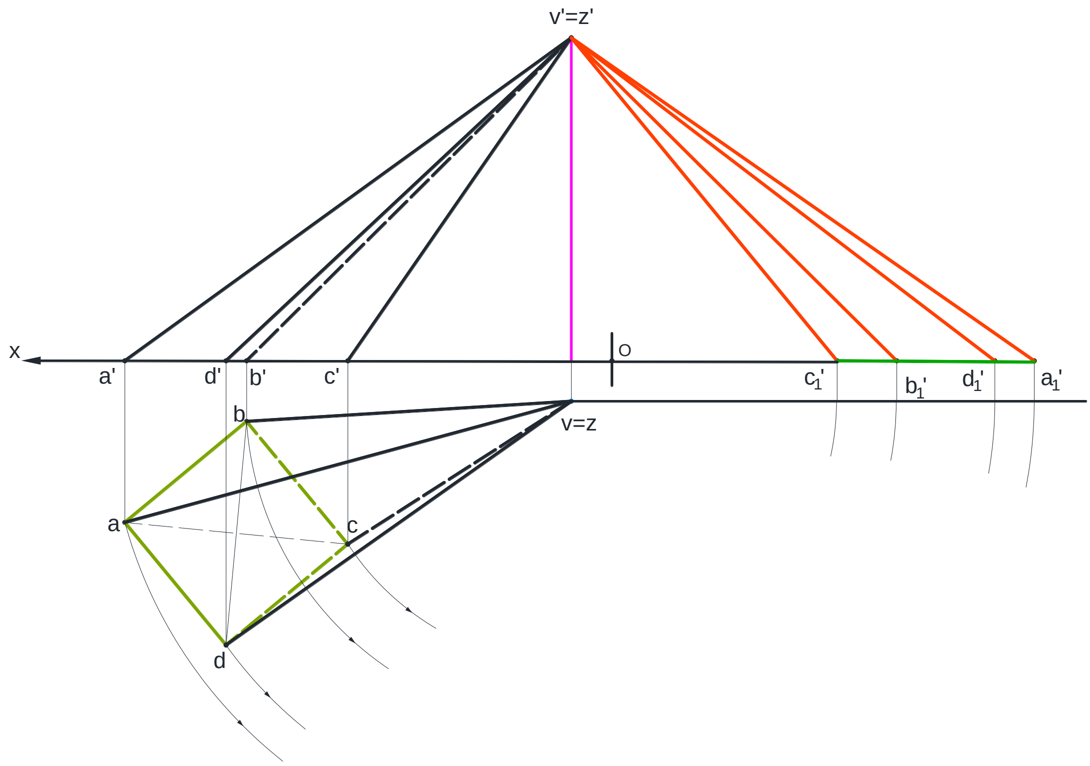


Fig. 5.10.a) Rezolvare problema 5.10

Având în vedere că baza este pătrat înseamnă că toate muchiile care formează baza au aceeași valoare numerică. Se construiește apoi baza folosind diagonalele bazei din planul orizontal de proiecție al piramidei.

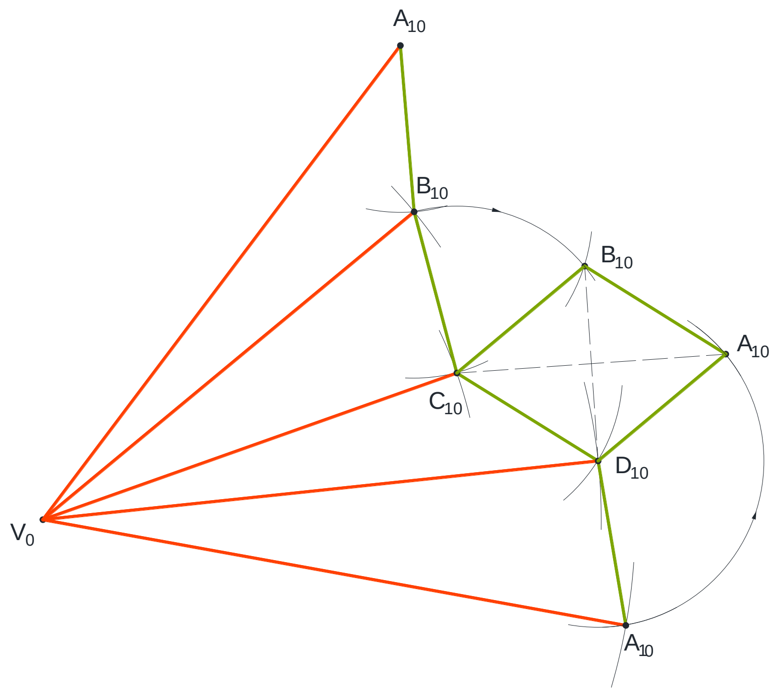


Fig. 5.10.b) Desfășurata piramidei patrulatere la aplicația 5.10

Pentru desfășurata piramidei avem nevoie de adevărata mărime a muchiilor piramidei care se determină astfel: prin vârful piramidei se trasează o axă de rotație. Se realizează o rotație de nivel în jurul axei zz', iar muchiile piramidei devin drepte frontale. Având adevărata mărime a muchiilor se poate reprezenta desfășurata. Se alege un punct V care reprezintă vârful piramidei.

Se măsoară muchiile determinate în adevărată mărime și se reprezintă muchia V_0A_{10}. Se măsoară apoi muchia bazei ab și se trasează arc de cerc. La intersecția cu arcul de cerc de rază V_0A_{10} cu arcul de rază ab măsurată în planul orizontal se determină punctul B_{10}. La fel se procedează cu toate muchiile determinând pe rând punctele C_{10}, D_{10} și A_{10}. Se unesc cu linie continuă și se determină cele patru fețe ale piramidei patrulatere.

5.11. Se consideră prisma patrulateră oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$, având baza ABCE situată în planul orizontal de proiecţie, A(10,28,0), B(5,17,0), C(17,7,0), E(28,7,0), A1(48,41,42) şi planul [P]: OPx = 50, $\sphericalangle O_xP'$ = 45°, $\sphericalangle O_xP$ = 60°. Să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul [P] în prismă.

Rezolvare aplicația 5.11

Se reprezintă în epură punctele care formează prisma patrulateră oblică.

Prisma patrulateră are baza în planul orizontal de proiecție. Astfel, în planul vertical se trasează prin muchiile prismei plane auxiliare proiectante de capăt.

Planul de capăt [R] dus prin muchia BB_1 intersectează planul [P] după dreapta VH($v_1'h_1'$, v_1h_1), care la rândul ei, va intersecta muchia BB_1 în proiecția v_1'. La fel se procedează și pentru celelalte muchii, obținându-se succesiv celelalte proiecții, respectiv, v_2', v_3' și v_4'.

În continuare se trasează în planul vertical orizontalele g_1' până la g_4'. Aceste orizontale intersectează urma verticală P' a planului. Se trasează și în planul [H] aceste orizontale, care sunt trasate paralele cu urma orizontală P a planului [P].

Aceste orizontale vor intersecta muchiile prismei patrulatere obținându-se punctele 1',2',4',3' a secțiunii în planul vertical, iar cu ajutorul liniilor de ordine se obține secțiunea în prismă 1,2,4,3.

Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii făcută de planul P în prismă se procedează astfel: se determină poziția urmei P_0 cu ajutorul arcelor de cerc care pleacă din P_x și din punctele în care orizontalele intersectează urma verticală P' a planului.

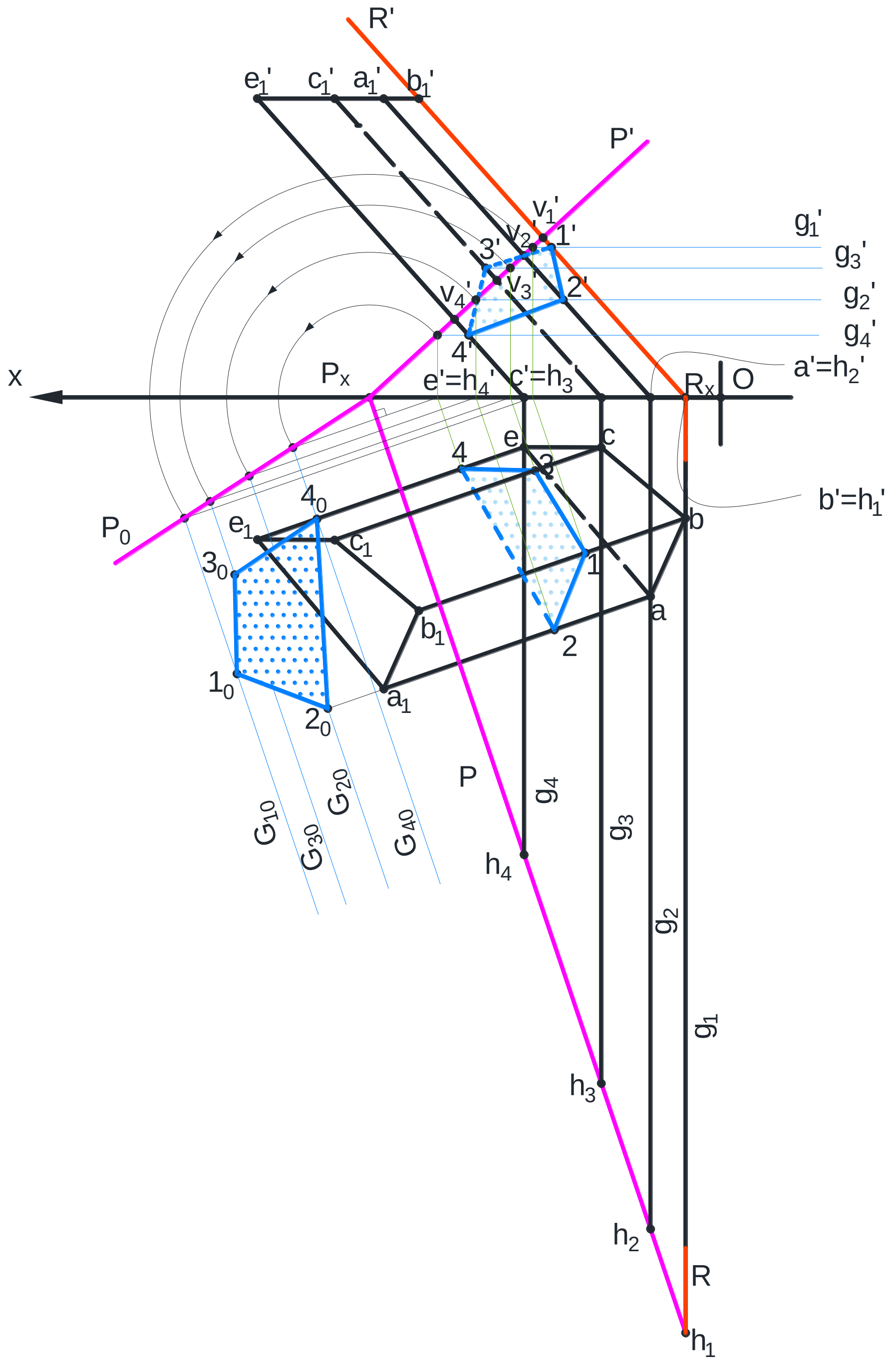


Fig. 5.11. Rezolvare aplicația 5.11

Din punctele în care orizontalele intersectează linia de pământ se treasează perpendiculare pe urma P a planului.

Astfel, la intersecția acestor perpendiculare cu arcele de cerc se determină punctele coliniare care formează urma P_0. Din punctele de pe urma P_0 se duc orizontalele G_{10} până la G_{40}, orizontale care se trasează paralele cu urma P a planului. Din punctele secțiunii 1,2,4,3 se duc linii de ordine perpendiculare pe aceste orizontale și rezultă punctele 1_0,2_0,4_0,3_0 care reprezintă adevărata mărime a secțiunii făcută de planul [P] în prisma patrulateră.

5.12. Să se desfăşoare piramida oblică SABC, cu baza un triunghi echilateral ABC situat în planul orizontal de proiecţie : A(120,70,0), B(90,20,0) şi vârful S(20,10,70). Să se vizualizeze pe desfăşurată punctul M(60,30,z_M), de pe faţa SAB.

Rezolvare aplicația 5.12

Laturile bazei piramidale sunt în adevărată mărime în proiecția orizontală, și pentru a putea determina desfășurata piramidei oblice avem nevoie de determinarea adevăratei mărimi a muchiilor. Triunghiul de bază este un triunghi echilateral, are toate muchiile egale și unghiul dintre laturi este de 60°. În acest caz se utilizează metoda rotației, astfel se aplică o rotație de nivel tuturor muchiilor piramidei, în jurul unei axe de rotație Ω(ω,ω’), axă care trece prin vârful S(s,s’) al pirmaidei triunghiulare. Muchiile piramidei se transformă în drepte frontale și se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție $s_1'a_1'$ = S_0A_0, la fel și celelalte muchii $s_1'b_1'$ = S_0B_0 şi $s_1'c_1'$ = S_0C_0.

Pentru a realiza desfăşurata piramidei se trasează o dreaptă pe care să se măsoare un segment egal cu una dintre muchii, și astfel se începe construirea unei fețe care conține acea muchie, de exemplu s-a început construcția desfășuratei cu muchia S_0A_0 pentru fața SAB și s-a trasat segmentul S_0A_0 = $s_1'a_1'$.

Pentru a determina punctul B_0 s-au trasat două arce de cerc și anume un arc de cerc cu centrul în S_0 de rază $s_1'b_1'$ = S_0B_0 şi altul cu centrul în A_0, de rază ab = A_0B_0. La intersecţia celor două arce de cerc s-a determinat vârful B_0 şi astfel, faţa $S_0A_0B_0$ a desfăşuratei piramidei. Celelalte feţe se construiesc similar şi alăturate primei feţe.

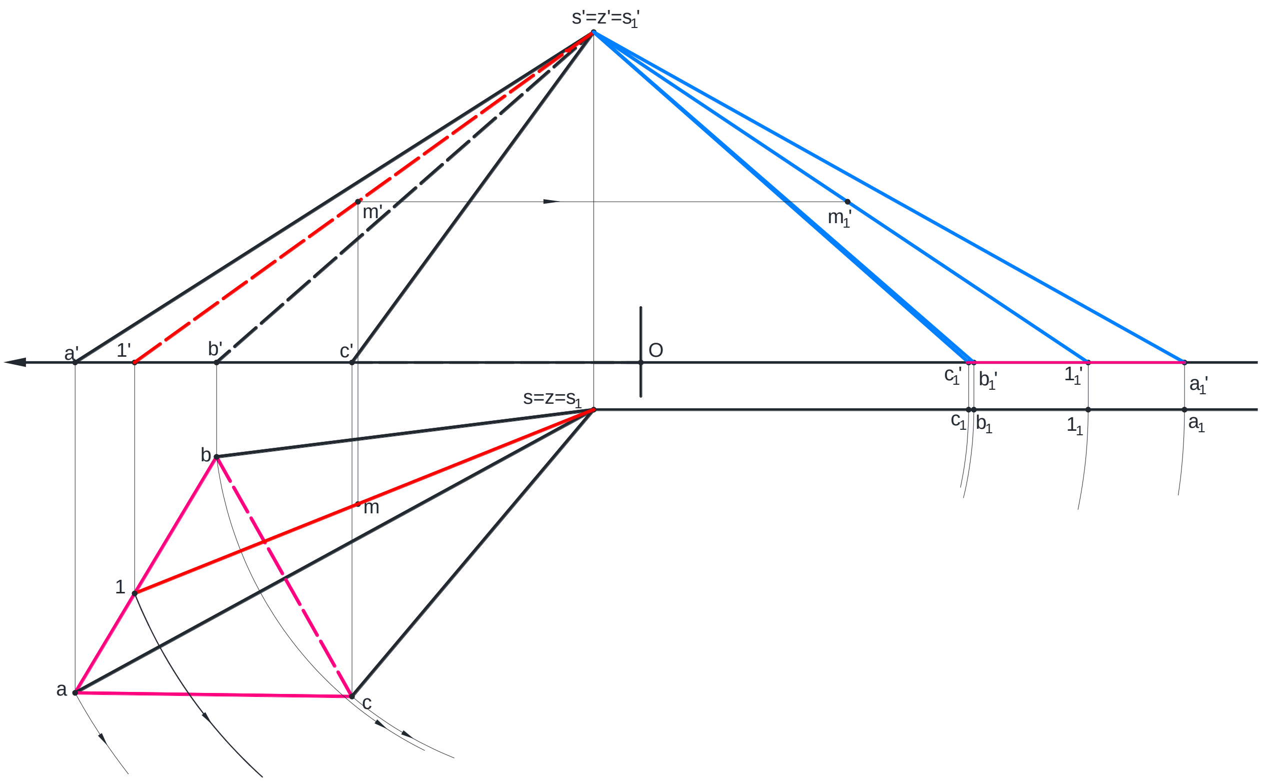


Fig. 5.12. a) Rezolvare aplicația 5.12

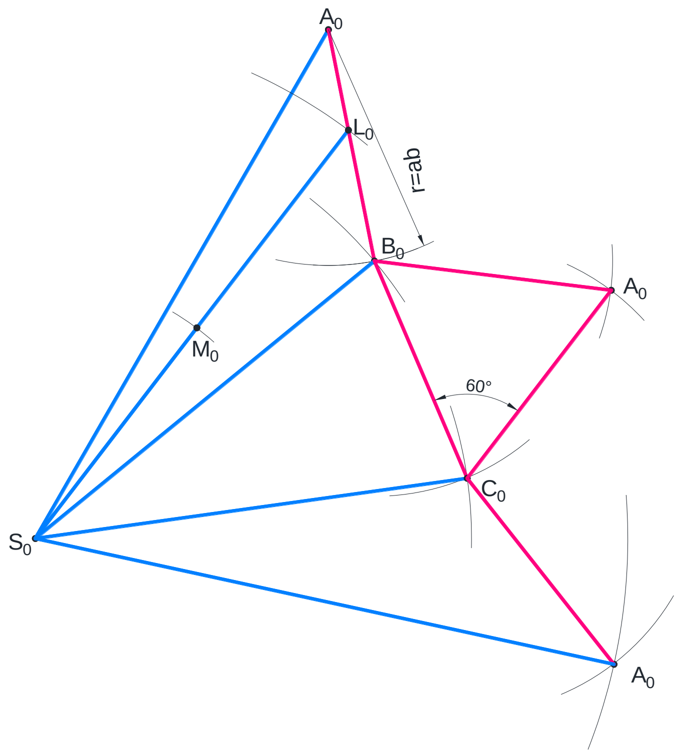


Fig. 5.12. b) Desfășurata piramidei oblice cu baza triunghi echilateral la aplicația 5.12

Desfăşurata suprafeţei laterale se complectează prin construcţia triunghiului de bază, alăturat laturii B_0C_0, cu ajutorul a două arce de cerc. Primul arc de cerc se trasează din A_0 și vârful compasului în B_0, iar al doilea arc de cerc se va trasa din A_0 din partea opusă, iar vârful compasului va fi așezat în C_0.

Punctul M_0 se determină astfel: se determină o generatoare a piramidei în planul orizontal care se trasează din vârful piramidei, trece prin proiecția m și ajunge pe latura bazei AB. În datele problemei se specifică faptul că punctul M să fie așezat pe fața SAB. Exact cum s-a procedat cu muchiile piramidei se va proceda și cu generatoarea punctului M(m, m'), astfel se efectuează o rotație de nivel pentru această dreaptă, se determină în plan vertical proiecția m'. Se găsește poziția generatoarei $S_1'1_1'$, iar proiecția m' se translatează pe generatoarea rotită, astfel se găsește proiecția m_1'.

Pe desfășurată se poate poziționa M_0 pe generatoarea S_0L_0. S-a notat cu L_0 piciorul generatoarei pe latura A_0B_0. Se măsoară în planul vertical pe generatoarea în adevărată mărime și se marchează apoi pe dsfășurată S_0M_0.

5.13. Se dă prisma dreaptă $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cu înălțimea de 80 mm, și punctele A(105, 25, 0); B(140, 70, 0); C(90, 90, 0); D(65, 50, 0).
Planul [P]: $OP_x = 10$, $\sphericalangle OP_xP = 120°$, $\sphericalangle OP_xP' = 150°$. Să se determine desfășurata prismei, precum și adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare în prismă.

Rezolvare aplicația 5.13

Se reprezintă în epură punctele care definesc forma prismei și urmele planului [P].

Rezolvarea acestei probleme este asemănătoare cu rezolvarea problemei 5.5. Se dă o prismă patrulateră și un plan oarecare. În planul orizontal se trasează frontalele f_1 până la f_4 prin vârfurile prismei. Aceste frontale vor intersecta urma orizontală a planului [P] în punctele h_1, h_2, h_3, h_4. Din aceste puncte se trasează linii de ordine pe linia de pământ și se obțin punctele h_1', h_2', h_3', h_4'.

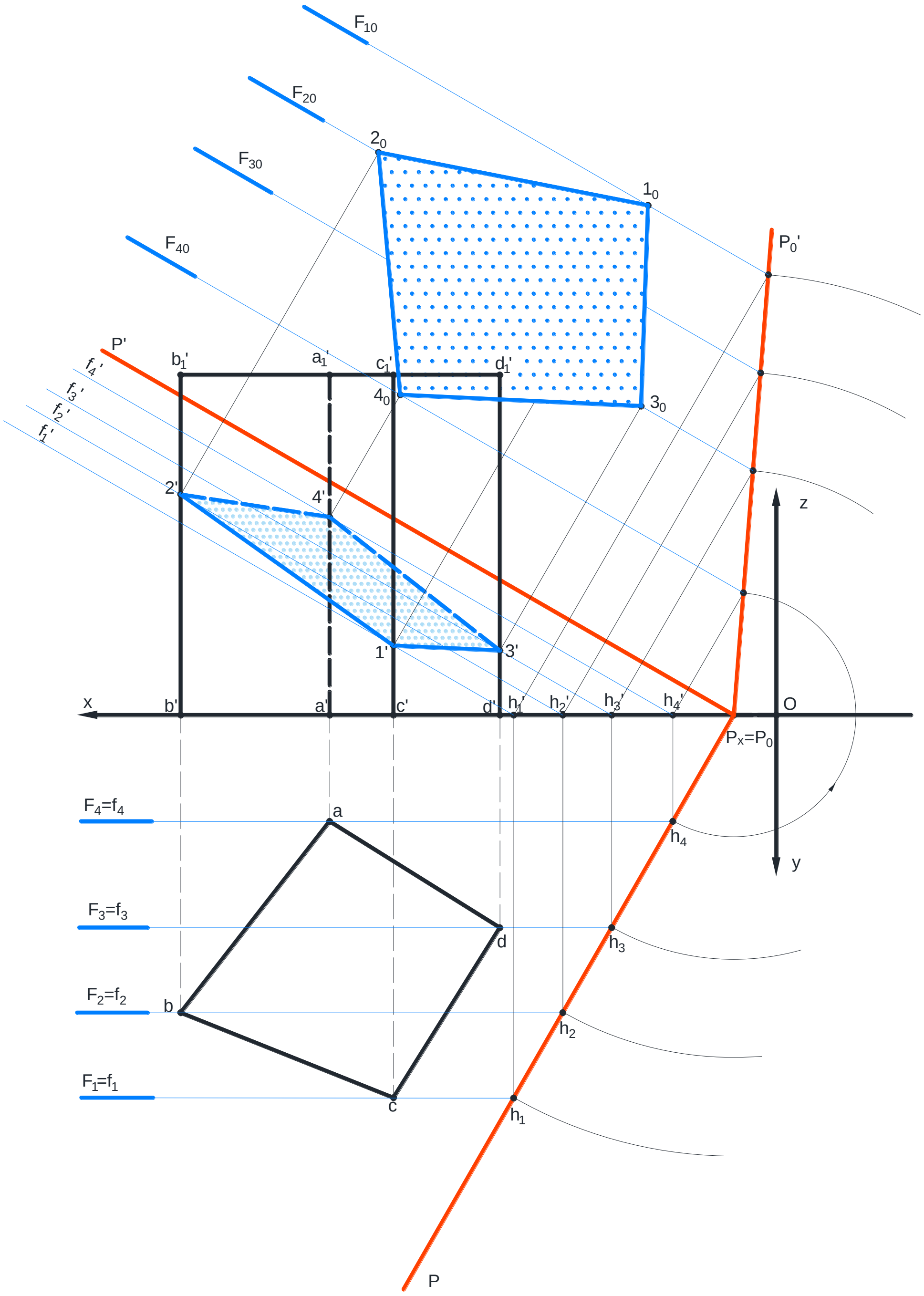


Fig. 5.13.a) Rezolvare aplicația 5.13

Din aceste urme orizontale se trasează frontalele paralele cu urma P' și se obțin frontalele f_1' până la f_4'. Aceste frontale vor intersecta muchiile prismei și se obține secțiunea 1'2'3'4'. Din punctele h_1', h_2', h_3' și h_4' se trasează perpendiculare pe urma P'.

Din punctul P_x se trasează arce de cerc până când se vor intersecta cu perpendicularele duse din punctele h_1', h_2',h_3' și h_4'.

Punctele care se obțin sunt coliniare și împreună determină urma P_0'. Din punctele obținute pe P_0' se duc frontalele F_{10}, F_{20}, F_{30}, F_{40} care se trasează paralele cu urma P', după care din punctele 1,2,3,4 a secțiunii se trasează perpendiculare pe aceste frontale și se obțin astfel punctele 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, puncte care determină adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare [P] în prisma patrulateră.

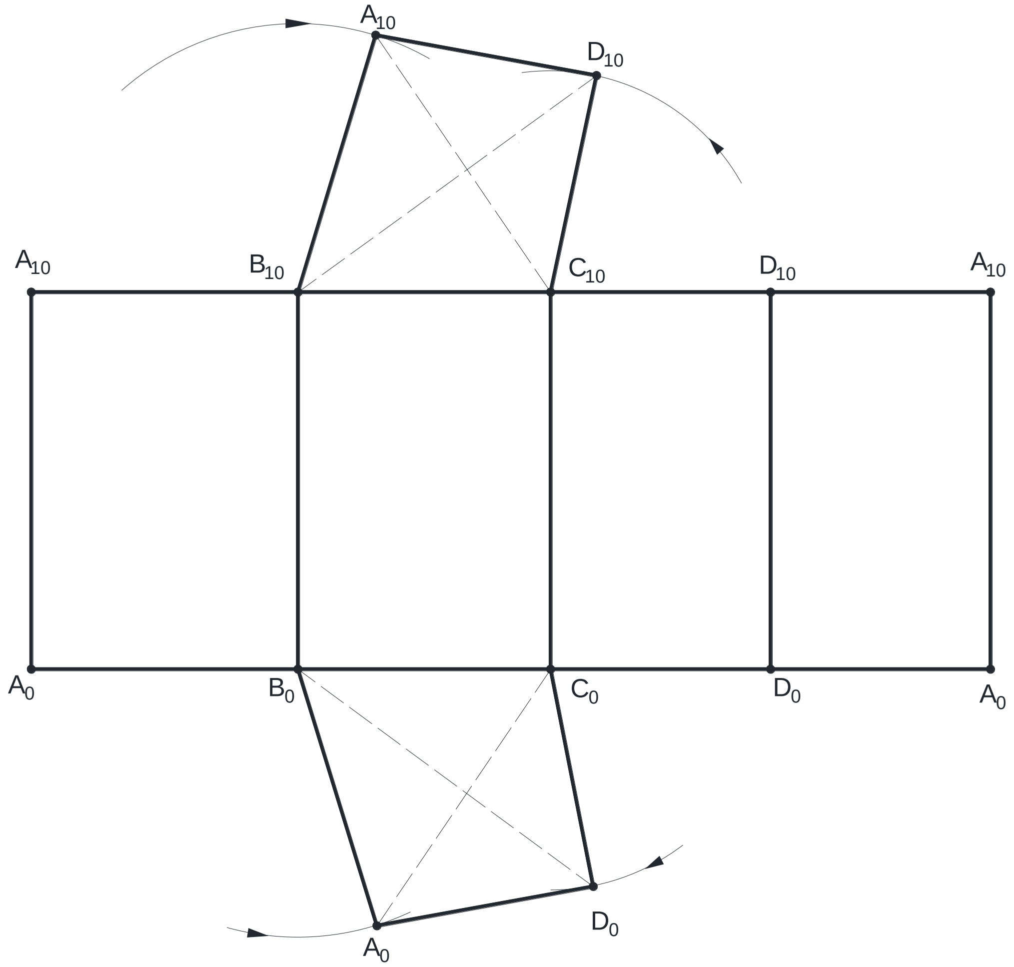


Fig. 5.13.b) Desfășurata prismei drepte la aplicația 5.13

Pentru a reprezenta desfășurata se trasează cele patru fețe ale prismei de înălțimea 80 mm, iar distanta dintre A_0, B_0 este egală cu latura AB a prismei măsurată în planul orizontal de proiecție.

Baza este situată în planul orizontal de proiecție, rezultă astfel că muchiile care formează baza prismei se află în adevărată mărime. Baza se construiește cu ajutorul diagonalelor CA și BD.

5.14. Să se determine adevărata mărime a secţiunii plane făcută de planul [P]: OPx = 20, OPy = -45, OPz = -24, în prisma triunghiulară oblică, definită de baza ABC: A(135, 45, 0), B(75, 20, 0), C(120, 15, 0) şi muchia AA_1 : A_1(30, 90, 90).

Rezolvare aplicația 5.14

Pentru determinarea adevăratei mărimi a secțiunii făcută de planul oarecare în prisma triunghiulară este necesar aplicarea unei metode ale Geometriei descriptive, în cazul de față se utilizează dubla schimbare de plan de proiecție. În prima etapă s-au trasat prin muchiile prismei din planul vertical plane de capăt [Q]. Aceste plane de capăt intersectează urma P' a planului pe muchiile prismei în punctele v_1', v_2', v_3'.

Din proiecțiile verticale se trasează linii de ordine în planul orizontal până pe linia de pământ, obținând punctele v_1, v_2, v_3. Din aceste puncte se duc linii de ordine pe urma orizontală P până în urmele orizontale h_1, h_2, h_3. Aceste linii de ordine intersectează muchiile prismei în punctele 1,2,3, formând secțiunea dată de planul oarecare [P].

Pentru a obține adevărata mărime a secțiunii se procedează astfel: vom realiza o dublă schimbare de plan de proiecție, în planul vertical în secțiunea triunghiulară 1'2'3' se trasează o orizontală din vârful triunghiului 2'. Această orizontală va intersecta latura 1'3' în punctul s'.

Din acest punct se duce linie de ordine în planul orizontal până pe latura 13 a secțiunii triunghiulare. La o distanță oarecare se trasează o nouă linie de pământ notată cu O_1x_1. Această axă se trasează în sens invers față de axa Ox. Perpendicular pe axa O_1x_1 se duc linii de ordine din fiecare vârf al triunghiului 123.

Se măsoară cotele (liniile cu verde în această problemă) punctelor 1',2',3' și se reprezintă în prelungire la axa O_1x_1 astfel încât se obține planul triunghiului $1_1'2_1'3_1'$ cele trei puncte sunt coliniare.

La o distanță oarecare față de planul triunghiului se trasează o nouă axă, pentru a doua schimbare de plan de proiecție, axă notată cu O_2x_2, în sens invers axei O_1x_1. Din vârfurile triunghiului $1_1'$ $2_1'$ $3_1'$ se duc perpendiculare pe noua axă. Se măsoară apoi depărtările de la vârfurile triunghiului 123 până la axa O_1x_1. Aceste depărtări se poziționează de la axa O_2x_2 în prelungire (liniile cu roșu în această problemă) și se obțin punctele 1_{10}, 2_{10}, 3_{10}. Aceste trei puncte determină adevărata mărime a secțiunii făcută de planul [P] în prisma triunghiulară.

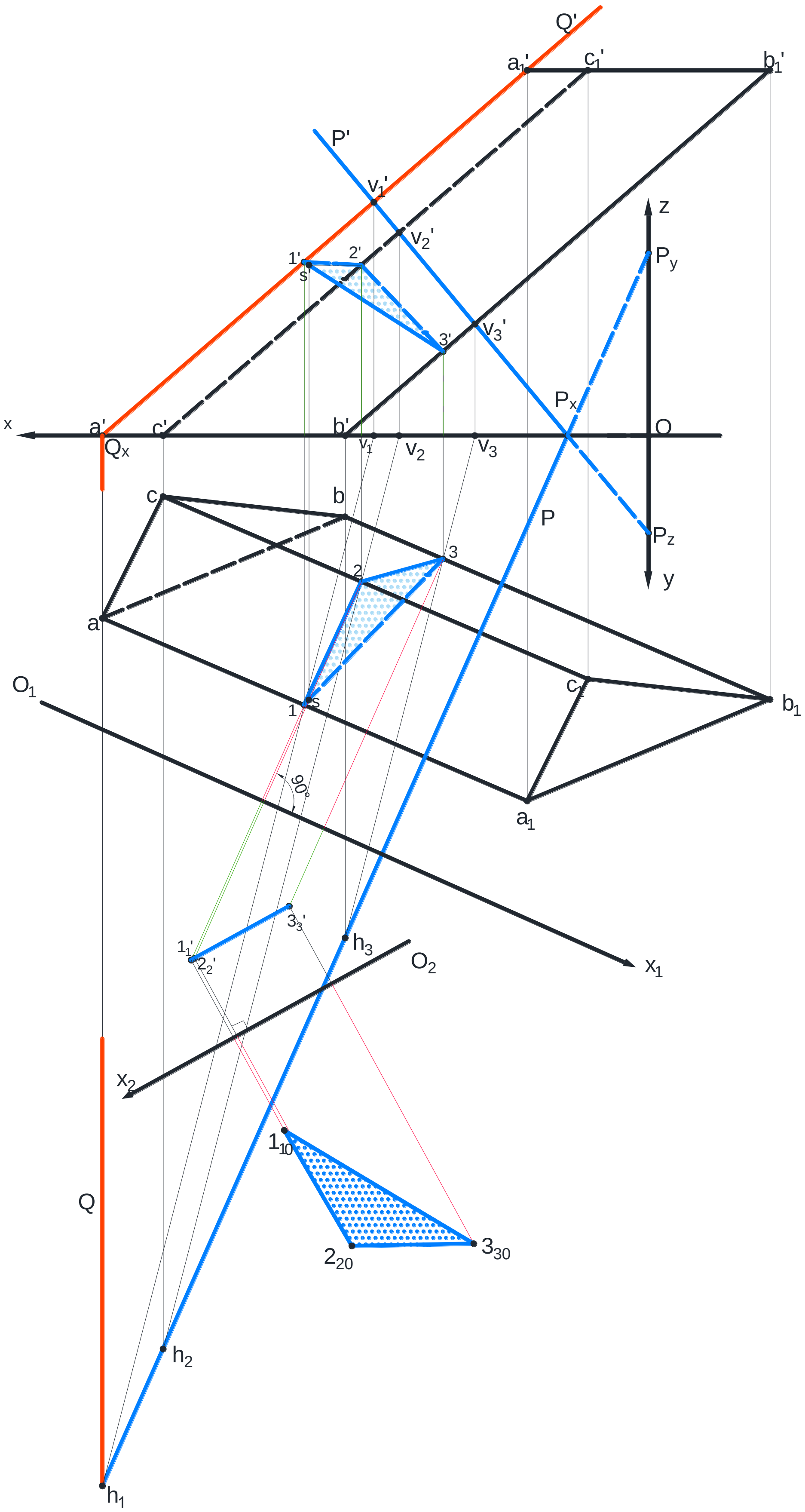


Fig. 5.14. Rezolvare aplicația 5.14

5.15. Să se determine punctele de intersecție dintre piramida triunghiulară SABC: S(20, 10, 100), A(110, 100, 0), B(50, 70, 0), C(140, 50, 0) şi dreapta D(d,d’): H(30, 90, 0), V(160, 0, 60) care intersectează piramida.

Rezolvare aplicația 5.15

În planul vertical prin proiecția d’ a dreptei se trasează planul de capăt [P] care este suprapus peste proiecția verticală: P’=d’. Se găseşte proiecţia verticală a secţiunii, 1’2’3’, determinată de punctele în care urma P’ intersectează muchiile piramidei triunghiulare. Ducând liniile de ordine corespunzătoare se determină proiecţia orizontală a secţiunii 123, care este intersectată de proiecţia orizontală d a dreptei în punctele i și j. Se ridică linii de ordine până pe proiecţia verticală d’ a dreptei şi se determină şi proiecţiile verticale i’ şi j’, ale punctelor de intersecţie.

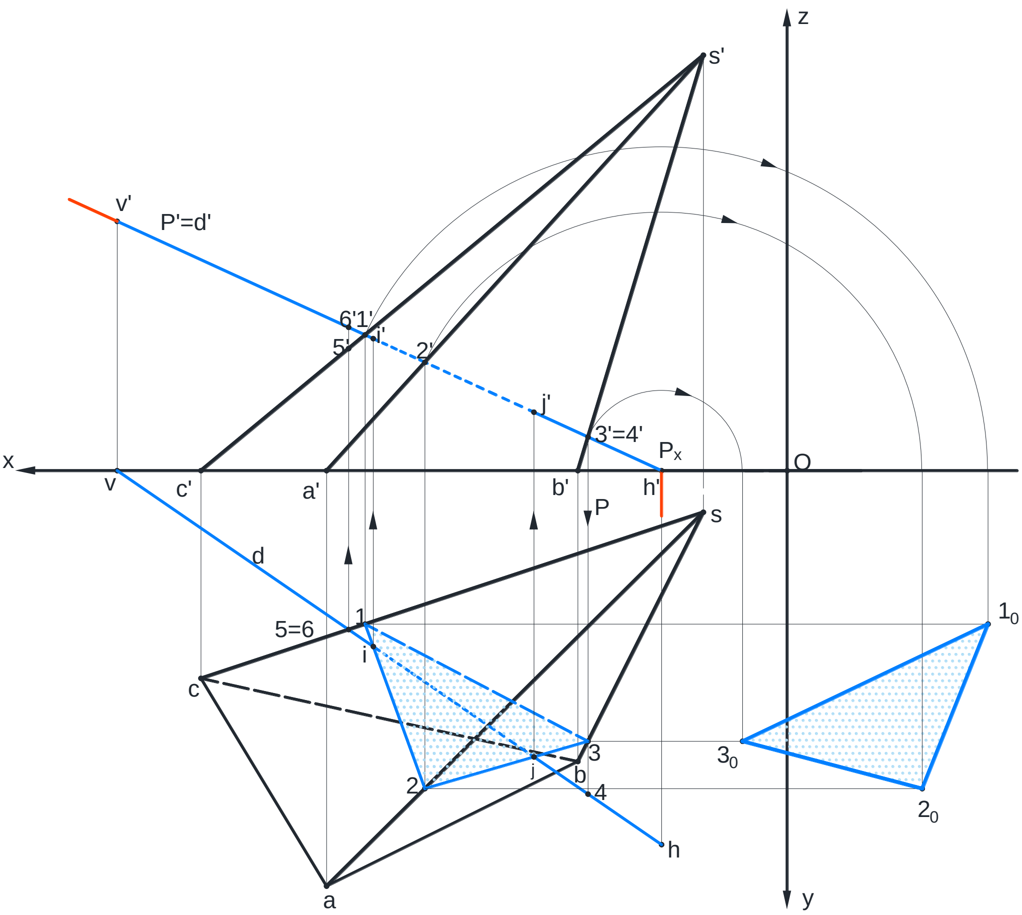


Fig. 5.15. Rezolvare aplicația 5.15

Pentru studiul vizibilității se alege de exemplu un punct în planul vertical 4’=3’. Se coboară linie de ordine în plan orizontal și se poate observa că punctul 3 este pe muchia SB a piramidei, iar 4 va coborî pe proiecția dreptei d.

Proiecția 4 având depărtarea mai mare va rezulta că proiecția d' va fi vizibilă în planul vertical de proiecție.

Similar se studiază vizibilitatea și în planul orizontal de proiecție în punctele de intersecție aparentă 5=6 și se observă în planul vertical că proiecția 6' fiind pe proiecția dreptei d', are cota mai mare decât proiecția 5' care este pe muchia c's', deci proiecția dreptei d va fi vizibilă în planul orizontal de proiecție până în punctul i de intersecție dintre proiecția dreptei d și proiecția feței acs a piramidei.

Probleme propuse

5.16. Să se desfășoare o piramidă triunghiulară oblică SABC, având baza situată în planul orizontal de proiecție și una din muchii să fie în poziție frontală.

5.17. Se dau coordonatele vârfurilor patrulaterului de bază al unei prisme oblice: A(110, 20, 0); B(85, 5, 0); C(70, 30, 0); D(95, 45, 0) și punctul A_1(92, 23, 23). Să se determine punctele în care dreapta D(d, d') intersectează prisma. Dreapta D(d, d') este dată prin două puncte: M(92, 60, 60); N(43, 28, 23).

5.18. Să se desfăşoare piramida oblică SABCD, cu baza un pătrat ABCD situat în planul orizontal de proiecţie ; A(115,35,0), B(80,15,0) şi vârful S(9,10,80).

5.19. Să se construiască secţiunea plană determinată de planul [P] : OPx = 28, OPy = ∞, OPz = -18, în piramida SABCE: S(20,6,80), A(100,10,0), B(75,45,0), C(110,55,0), E(120,35,0) şi să se desfăşoare trunchiul de piramidă obţinut în urma secţionării cu planul [P].

5.20. Să se secționeze cu un plan de nivel o piramidă dreaptă având baza un pătrat ABCD de latură l = 30 mm, situat în planul orizontal de proiecție și cu înălțimea de 50 mm. Să se desfășoare piramida și determinați care este adevărata mărime a secțiunii făcută de planul de nivel în piramidă.

5.21. Să se afle adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare într-o prismă hexagonală înscrisă într-un cerc de rază R = 30 mm și centrul în punctul O(110, 60, 0). $\sphericalangle OP_x = 120°$, $\sphericalangle OP_xP' = 150°$. Să se reprezinte desfășurata prismei hexagonale.

5.22. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul oarecare [P] în prisma patrulateră oblică cu baza conținută în planul orizontal de proiecție.
Se cunosc: A(32, 12, 0); B(52, 37, 0); C(22, 52, 0); D(7, 22, 0) și A_1(122, 52, 72).
Planul are coordonatele $OP_x = 137$, $\sphericalangle OP_xP' = 45°$, și $\sphericalangle OP_xP = 45°$.

5.23. Se dă prisma dreaptă cu baza conținută în planul [H], de formă pentagon regulat înscris într-un cerc de rază 40 mm și înălțimea 80 mm. Să se determine punctele de intersecție cu o dreaptă D(d, d'), definită de punctele M(32, 23, 22) și N(115, 63, 45). Să se construiască desfășurata prismei și să se reprezinte pe desfășurată punctele de intersecție cu dreapta.

5.24. Să se reprezinte în epură prisma dreaptă care are baza un triunghi echilateral situată în planul [P] determinat de punctele: OP_x = 60; M(0, 58. 0); N(0, 0, 57). Centrul bazei prismei este situat pe orizontala de cotă 18 mm a planului și are abscisa 30 mm. Raza cercului circumscris bazei prismei este de 18 mm, iar înălțimea 60 mm.

5.25. În planul [P] având OP_x = 115 și $OP_xP_v = OP_xP_h = 45°$ sunt situate punctele A(75, 32, z) și B(20, 73, z). Se cere să se reprezinte prisma dreaptă care are ca bază triunghiul echilateral de latură AB situat în planul [P] și să se găsească proiecțiile secțiunii făcută în prismă cu planul [Q] care are OQ_x = 130; $\sphericalangle OQ_xQ_v = 75°$ și $\sphericalangle OQ_xQ_h = 60°$.

5.26. Se dă piramida triunghiulară dreaptă SABC cu baza în planul orizontal și dreapta oarecare D(d, d') dată prin urme. Se cere să se construiască epura intersecției dreptei cu piramida.
Se cunosc: S(90, 60, 90); A(150, 20, 0); B(110, 90, 0); C(40, 50, 0); H(10, 90, 0); V(230, 0, 100).

5.27. Să se construiască desfășurata pentru prisma triunghiulară oblică dată prin punctele Se cunosc: A(150, 40, 0); B(120, 10, 0); C(60, 50, 0); A_1(130, 110, 80).

5.28. Se dă o piramidă triunghiulară oblică cu baza în planul orizontal de proiecție, dată prin punctele: A(110, 40, 0); B(50, 10, 0); C(60, 60, 0) și S(20, 100, 90). Să se desfășoare piramida și să se găsească și punctele de intersecție dintre planul de capăt [P]: OP_x = 125; $\sphericalangle OP_xP' = 45°$; $\sphericalangle OPxP = 90°$ și piramidă.

5.29. Se dă prisma triunghiulară oblică ABC prin punctele A(80, 5, 20); B(65, 25, 0); C(55, 5, 15) și C_1(10, 35, 40) şi dreapta oarecare D(d, d') cu urmele H(5, 25, 0) şi V(100, 0, 30). Să se găsească punctele de intersecție dintre dreaptă şi prismă.

5.30. Se dă prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$ şi dreapta MN. Se cere să se desfăşoare prisma şi să se determine proiecţiile punctelor în care dreapta MN intersectează prisma. Studiaţi vizibilitatea. Se cunosc: A(120, 30, 0); B(95, 15, 0); C(80, 45, 0); A_1(65, 20, 50); M(100, 35, 35); N(50, 25, 15).

5.31. Se consideră prisma patrulateră oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$ cu baza situată în planul orizontal de proiecţie şi dreapta D(d, d'). Să se desfăşoare prisma şi să se determine punctele de intersecţie dintre dreapta D(d, d') şi prismă. Dreapta (D) este definită de punctele H și V. Se cunosc: A(40, 46,0); B(23, 50, 0); C(17, 36, 0); E(30, 23, 0); A_1(78, 24, 35); H(75, 60, 0); V(29, 0, 26).

5.32. Se dă piramida triunghiulară oblică SABC, având baza ABC situată în planul orizontal de proiecţie, A(70, 55, 0); B(33, 38, 0); C(83, 26, 0) şi vârful S(7, 5, 50).
Se cere să se determine desfăşurata piramidei şi punctele de intersecţie dintre dreapta D(d, d') definită de H(15, 50, 0); V(62, 0, 38) şi piramidă.

5.33. Se dă prisma oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$, cu baza pătrat ABCE, situată în planul orizontal de proiecţie, A(60, 20, 0); B(40, 10, 0); A_1(10, 30, 40).
Să se desfăşoare prisma patrulateră şi să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d, d'): M(35, 5, 30); N(15, 50, 5) şi prismă.

5.34. Se consideră piramida triunghiulară oblică SABC, având baza situată în planul orizontal de proiecţie, A(120, 75, 0); B(75, 55, 0); C(135, 30, 0); S(45, 15, 90) şi planul [P] definit de urmele: $OP_x = 8$; $OP_y = -8$; $OP_z = -5$.
Să se desfăşoare piramida şi să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul [P] în piramidă.

5.35. Se consideră prisma triunghiulară oblică $ABCA_1B_1C_1$ cu baza în planul orizontal de proiecție. Se cunosc A(90, 20, 0); B(78, 45, 0); C(62, 24, 0); A_1(33, 50, 60). Să se desfășoare prisma și să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și prisma. Dreapta (D) este definită de punctele H(100, 67, 0) și V(5, 0, 38).

5.36. Se dă piramida patrulateră oblică SABCD, cu baza ABCD conținută în planul [H]: A(110, 30, 0); B(80, 60, 0); C(42, 20, 0); D(90, 10, 0); S(10, 70, 60).
Să se determine punctele intersecție cu dreapta D(d, d'), definită de punctele E(75, 80, 27) și K(25, 15, 11).
Să se studieze vizibilitatea dreptei și să se construiască desfășurata piramidei.

5.37. Se dă prisma dreaptă cu baza conținută în planul [H], de forma unui pentagon regulat înscris într-un cerc de rază R = 30 mm și înălțimea 75 mm.
Să se determine punctele de intersecție cu o dreaptă D(d, d'), definită de punctele M(31, 22, 21) și N(114, 61, 51).
Să se construiască desfășurata prismei si să se reprezinte pe desfășurată punctele de intersecție cu dreapta.

5.38. Se dă prisma oblică frontală $ABCA_1B_1C_1$, cu baza situată în planul orizontal [H]. Se cere secțiunea plană în prismă cu un plan de capăt [P] normal pe muchii, adevărata mărime a secțiunii, desfășurata prismei, respectiv a trunchiului de prismă cuprins între planul de secțiune și bază.
Se cunosc: A(140, 38, 0); B(107, 24, 0); C(119, 7, 0); A_1(60, 38, 75); $OP_x = 15$.

5.39. Se dă piramida dreaptă SABCD, cu baza patrulater, conținută în planul [H]. Să se determine secțiunea cu planul oarecare [P], adevărata mărime a secțiunii și să se desfășoare trunchiul de piramidă cuprins între planul de secțiune și bază.
Se cunosc: A(160, 38, 0); B(93, 53, 0); C(62, 18, 0); D(131, 5, 0); S(117, 30, 96);
$OP_x = 10$; $\sphericalangle OP_xP = 135°$; $\sphericalangle OP_xP' = 160°$.

5.40. Se dă prisma dreaptă $ABCA_1B_1C_1$, cu baza triunghi, situată în planul [V]. Se cere secțiunea plană în prismă cu un plan vertical [P], adevărata mărime a secțiunii, desfășurata prismei, cuprinsă între planul secant și planul [V].
Se cunosc: A(60, 0, 45); B(30, 0, 28); C(85, 0, 15); A_1(60, 60, 45);
$OP_x = 15$; $\sphericalangle OP_xP = 150°$.

5.41. Se dă piramida oblică SABCD, cu baza ABCD conținută în planul [H]. Să se determine secțiunea cu planul de capăt [P], adevărata mărime a secțiunii și să se desfășoare trunchiul de piramidă cuprins între planul [P] și planul [H].
Se cunosc: A(116, 27, 0); B(82, 60, 0); C(65, 12, 0); D(100, 8, 0); S(17, 43, 70);
$OP_x = 10$; $\sphericalangle OP_xP' = 160°$.

5.42. Se consideră piramida triunghiulară oblică SABC cu baza situată în planul orizontal de proiecţie.
Se cunosc: A(95, 25, 0); B(60, 50, 0); C(105, 60, 0) şi vârful S(25, 10, 60). Să se desfăşoare piramida.

5.43. Se consideră piramida triunghiulară oblică SABC cu baza situată în planul orizontal de proiecţie.
Se cunosc: A(50, 15, 0); B(40, 55, 0); C(10, 35, 0) şi vârful S(105, 20, 50). Să se desfăşoare piramida.

5.44. Să se determine punctele în care dreapta AB(ab, a'b') intersectează prisma oblică frontală $MNPM_1N_1P_1$, cunoscând coordonatele:
Se cunosc: M(120, 10, 0); N(145, 65, 0); P(45, 40, 88); P_1(45, 40, 88); A(105, 55, 70) și B(50, 23, 23)

CAPITOLUL VI
SUPRAFEȚE CURBE (RIGLATE)
CILINDRUL ȘI CONUL

6.1. Se consideră un con drept având baza un cerc de rază R = 35 mm, situat în planul [H], vârful în punctul V(90, 40, 80) și înălțimea egală cu 80 mm. Se cere ca utilizând un plan de capăt [P] să se determine în con o secțiune de tip parabolic, adevărata mărime a secțiunii și desfășurata trunchiului de con situată între planul [P] și [H].

Rezolvare aplicația 6.1

Se reprezintă în epură conul și planul de capăt [P]. Este necesar de un plan de nivel [N] care va intersecta planul de capăt în punctele 4',5'. Se coboară linie de ordine în planul orizontal și se obțin punctele 4,5 care determină secțiunea făcută de planul de nivel în con, puncte care aparțin secțiunii de tip parabolic în con. În planul vertical urma verticală P' a planului de capăt intersectează generatoarele conului în punctele 1',2',3',4',5',6',7'. Din aceste puncte se coboară linii de ordine în planul orizontal de proiecție și se determină secțiunea 1234567. Cu vârful compasului în punctul P_x se rotesc punctele din planul vertical până la linia de pământ, după care se duc linii de ordine care vor intersecta liniile de ordine duse din proiecțiile 1,2,3,4,5,6,7 rezultând secțiunea parabolică, notată cu $1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0$.

Pentru construcția desfășuratei conului se procedează astfel: se alege un punct notat cu V care reprezintă vârful conului. Se măsoară generatoarele conului din planul vertical de proiecție și se aproximează cu arce de cerc distanța dintre punctele de pe bază (ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, ha). Astfel se obține desfășurata conului și pe desfășurată se poziționează punctele de intersecție dintre planul de capăt și suprafața conului. Se măsoară în planul vertical distanțele de la vârful conului v' până la fiecare punct în parte și se reprezintă pe desfășurată.

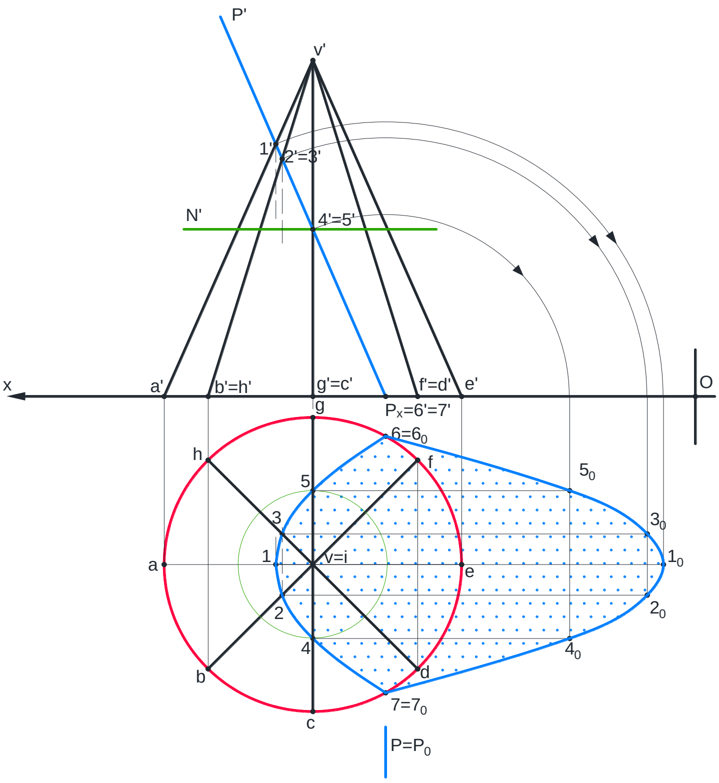


Fig. 6.1 a) Secțiune parabolică în con

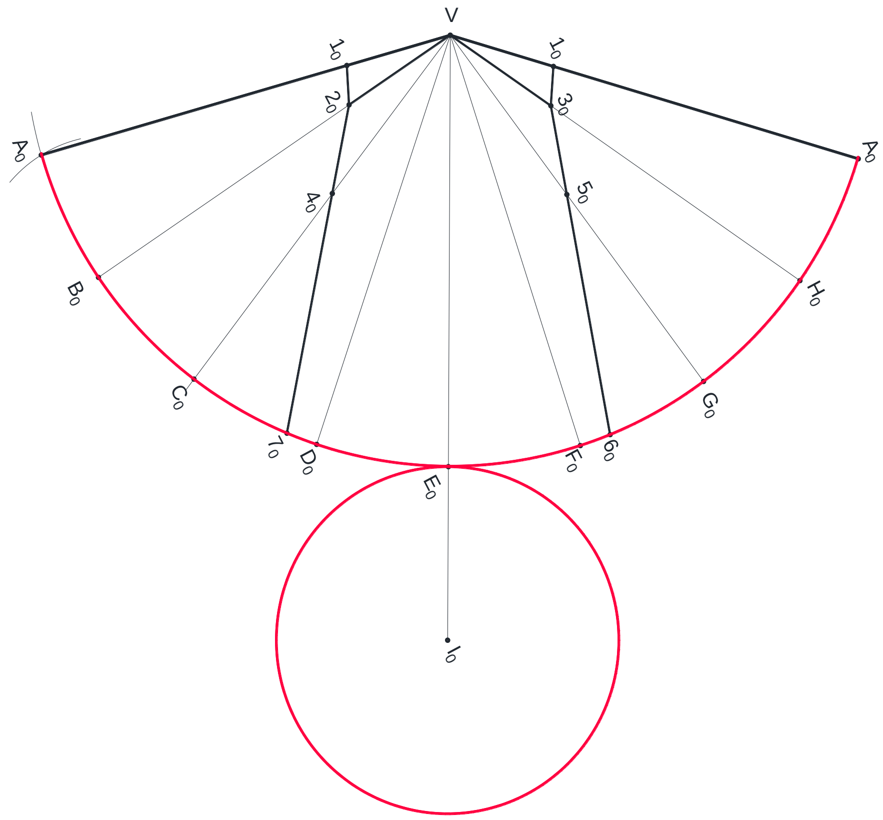


Fig. 6.1 b) Desfășurata conului drept

6.2. Se consideră un con de revoluție având baza un cerc de rază R = 35 mm, situată în planul [V], cu vârful în punctul S(90, 70, 55) și înălțimea egală cu 70 mm (în poziție de dreaptă de capăt).
Se cere ca utilizând un plan vertical [Q] să se determine în con o secțiune de tip eliptic, adevărata mărime a secțiunii și desfășurata porțiunii (trunchiului) de con situată între planul de secțiune și bază.

Rezolvare aplicația 6.2

Se reprezintă în epură conul cu baza un cerc de rază 35 mm în planul vertical de proiecție. Se împarte baza conului în 8 părți egale și se notează punctele a' până la h'. Se duc linii de ordine în planul orizontal de proiecție și se determină punctele pe linia de pământ, așa cum se poate observa în figura 6.2.

Se reprezintă vârful conului S(s,s'), se duc generatoarele conului de pe linia de pământ și se intersectează cu punctul s. Urmează apoi construcția planului vertical [Q] și se reprezintă urmele Q și Q'.

Această secţiune eliptică se obţine prin secţionarea unui con circular drept, având baza în planul vertical de proiecţie, cu un plan vertical. În acest caz, elipsa de secţiune este dată în proiecţia orizontală de segmentul 110 (axa mare a elipsei), suprapus peste urma orizontală Q a planului vertical, punctele 1 şi 10 fiind punctele de intersecţie dintre generatoarele SA şi SE cu acest plan. În proiecţia verticală, secţiunea este elipsa cu axele 1'10' şi 6'7'. Axa mică a elipsei 6'7' se obţine cu ajutorul planului auxiliar de front [F_1] dus la jumătatea segmentului 110, adică prin centrul elipsei din proiecţia orizontală şi reprezintă punctele de intersecţie dintre planul [Q], suprafaţa conică şi planul de front. Se procedează astfel: se intersectează planul de front [F] cu suprafaţa conică şi se obţine cercul de rază r (de culoare verde), cu centrul în centrul bazei (se proiectează pe planul vertical de proiecție în adevărată mărime).

Alte puncte ale secţiunii eliptice se determină ducând alte plane de front. Cu ajutorul planului [F_1] se determină punctele 6'7' de pe conturul elipsei, conform metodologiei explicate mai sus. Adevărata mărime a secţiunii se poate determina prin rabaterea planului vertical [Q], împreună cu secţiunea, pe planul vertical de proiecţie. Aceasta este elipsa cu axele $1_0 10_0$ axa mare a elipsei şi $6_0 7_0$ axa mică a elipsei.

Planele de front s-au reprezentat cu linie de culoare verde, iar planul vertical s-a reprezentat cu linie albastră. Desfășurata trunchiului de con se determină astfel: se poziționează vârful S, iar apoi se ia în compas raza egală cu generatoarea conului și se trasează un arc de cerc. De pe baza conului din planul vertical se aproximează cu arc de cerc distanța dintre punctele a și b și se reprezintă pe desfășurată. Se repetă acest proces până când se completează întreaga desfășurată. Pentru a poziționa punctele $1_0 \ldots 10_0$ se măsoară din vârful conului s din planul orizontal distanțele până la aceste puncta și se punctează pe desfășurată, obținând astfel trunchiul de con cerut în datele problemei.

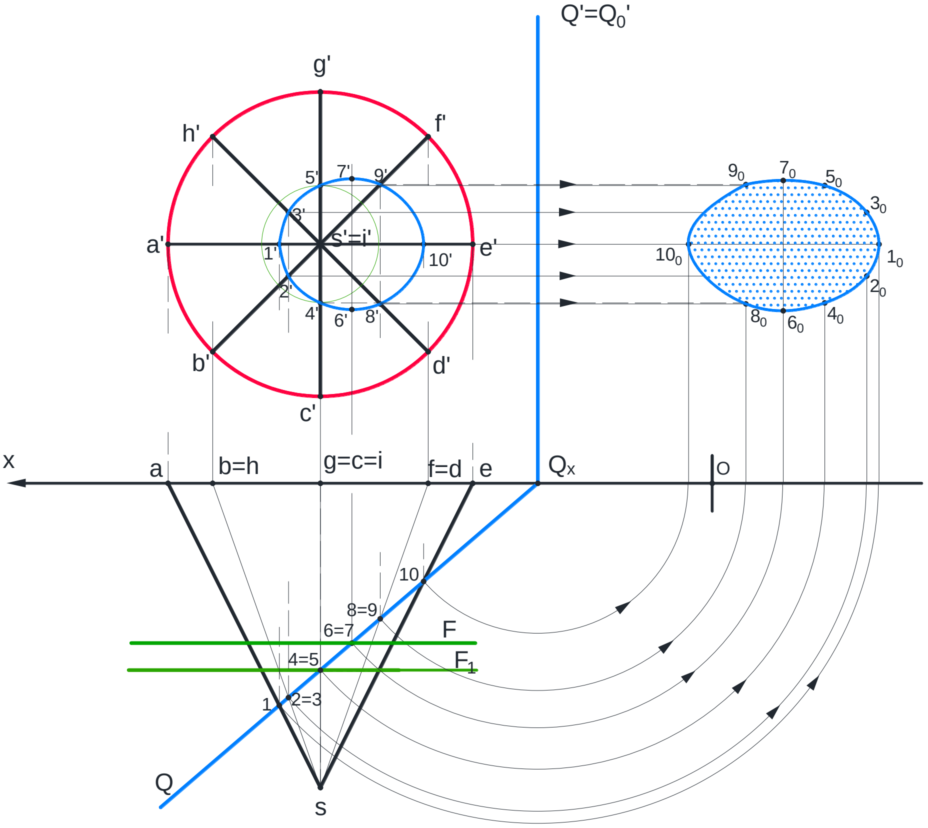


Fig. 6.2 a) Rezolvare aplicație

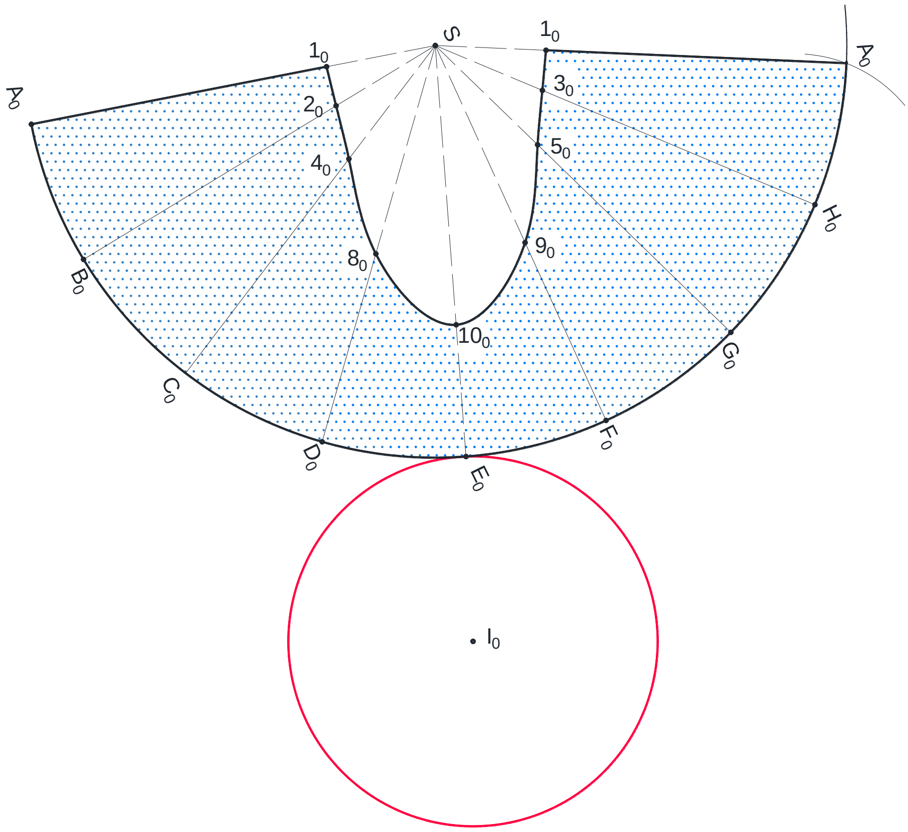


Fig. 6.2 b) Desfășurata conului

6.3. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul O_1(95, 70, 0), de rază R = 25 mm, vârful în punctul S(20, 10, 55) și punctul M(55, 30, 25). Să se traseze planul tangent la con prin punctul M(m, m'), punct de pe suprafața conului.

Rezolvare aplicația 6.3

Se reprezintă în epură conul și se poziționează punctul M(m, m'). Pentru determinarea planului tangent la con dus printr-un punct de pe suprafața conului se procedează astfel: prin proiecția verticală m' se trasează generatoarea care conține punctul M. Această generatoare intersectează linia de pământ în punctul h' (urma orizontală a proiecției verticale), se coboară linie de ordine în planul orizontal pe cercul de bază și se determină urma h. Prin urma h si proiecția m se trasează generatoarea conului care conține proiecția m în planul orizontal de proiecție.

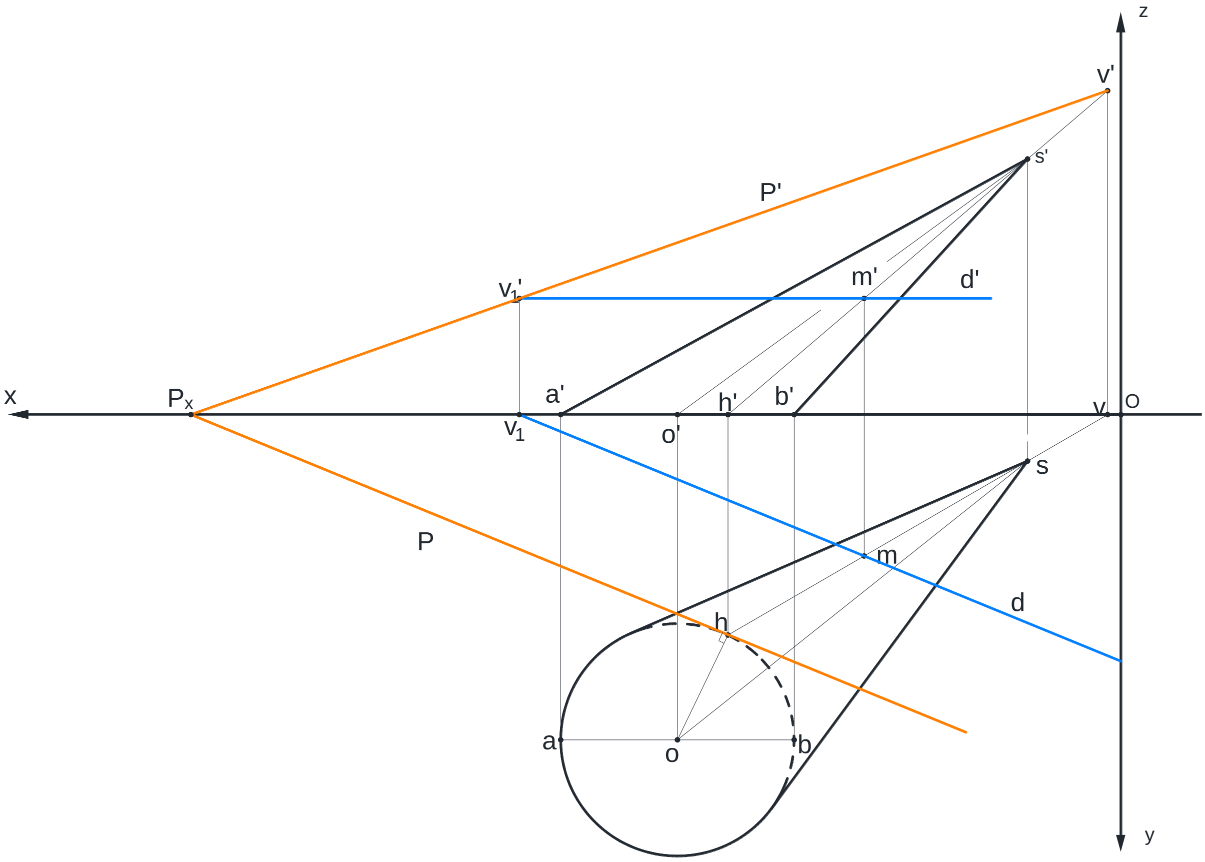


Fig. 6.3 Rezolvare aplicația 6.3

Planul tangent la con dus prin punctul M(m, m') de pe suprafața conului are urma sa orizontală P perpendiculară pe raza cercului de bază oh. Paralel cu urma orizontală a planului P se trasează prin proiecția m proiecția orizontală d care intersectează linia de pământ în punctul v_1.

Se trasează linie de ordine în plan vertical și se determină proiecția verticală v_1'. Această proiecție verticală v_1' se găsește pe proiecția orizontalei d' care este trasată prin proiecția m'. Astfel se poate determina și în planul vertical urma P' a planului, care unește proiecțiile v_1', v' și se întâlnește pe linia de pământ cu urma orizontală în P_x.

Proiecția v se găsește la intersecția generatoarei care trece prin m cu linia de pământ, este un punct de depărtare 0, iar apoi trasând linie de ordine în planul vertical se determină proiecția v', la prelungirea generatoarei cere trece prin proiecția m'.

6.4. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul O_1(95, 70, 0), de rază R = 25 mm, vârful în punctul S(20, 10, 55). Să se desfășoare conul.

Rezolvare aplicația 6.4

Pentru a desfăşura conul avem nevoie de adevărata mărime a generatoarelor şi de mărimea reală a bazei. Însă baza fiind situată în planul orizontal de proiecţie aceasta este reprezentată în adevărată mărime.

Pentru a determina adevărata mărime a generatoarelor se foloseşte una dintre metodele Geometrie descriptive, şi anume metoda rotaţiei. Astfel, se trasează axa de rotaţie prin vârful conului în planul orizontal şi se realizează o rotaţie de nivel în jurul acestei axe, generatoarele devenind frontale. În planul orizontal se trasează frontala din vârful conului şi se rotesc punctele de pe baza conului până ajung pe frontală. Se duc linii de ordine pe linia de pământ şi se unesc apoi cu vârful s', obţinând astfel adevărata mărime a generatoarelor conului.

Pentru a reprezenta desfăşurata conului de alege un punct S care reprezintă vârful conului şi se măsoară generatoarele obţinute după rotire. Se ia raza în compas s'a_1' şi din vârful S_0 se trasează un arc de cerc, obținând punctul A_{10}, primul punct de pe desfăşurată şi se notează cu literă mare.

Din planul orizontal de proiecţie se aproximează distanţa dintre punctele ag şi cu ajutorul compasului se trasează un arc de cerc din punctul A_{10}. Din S_0 se duce arcul de cerc de rază s'g_1', iar la intersecţia cu arcul de rază ag se obţine punctul G_{10}, al doilea punct al desfăşuratei. Se continuă cu celelalte puncta până când toate punctele au fost reprezentate şi astfel se obţine desfăşurata. Pentru bază se construieşte un cerc cu raza 25 mm din punctul de inflexiune F_{10}.

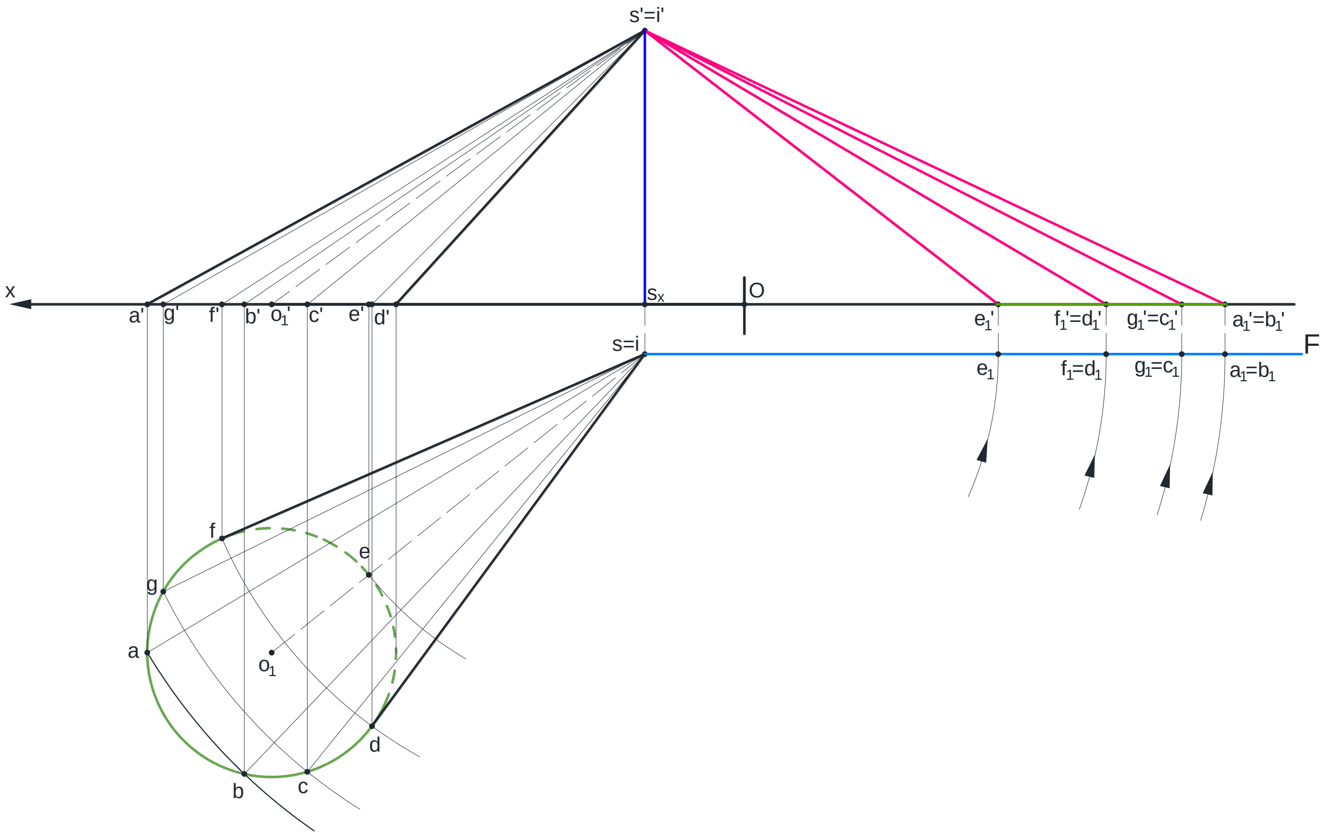


Fig. 6.4 a) Rezolvare aplicație

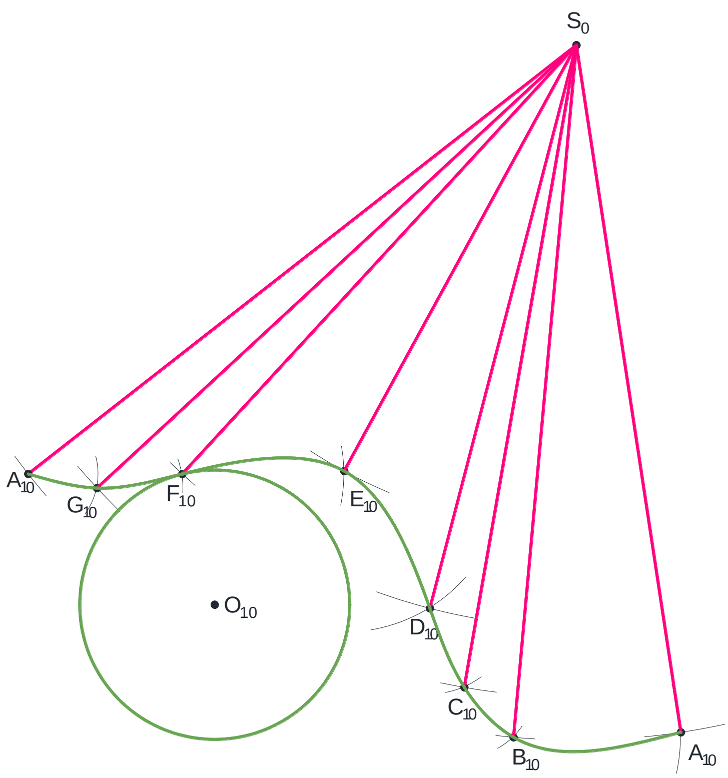


Fig. 6.4 b) Desfășurata conului oblic

6.5. Se consideră conul oblic cu baza cerc situat în planul orizontal, cu centrul în punctul O_1(40, 60, 0) de rază R = 30 mm, vârful în punctul S(110, 10, 70) şi dreapta D(d,d'): A(90, 10, 20), B(30, 70, 60). Să se determine punctele de intersecţie dintre con şi dreapta D.

Rezolvare aplicația 6.5

Pentru a putea determina intersecţia dintre un con şi o dreaptă, se folosește metoda secţiunilor longitudinale.

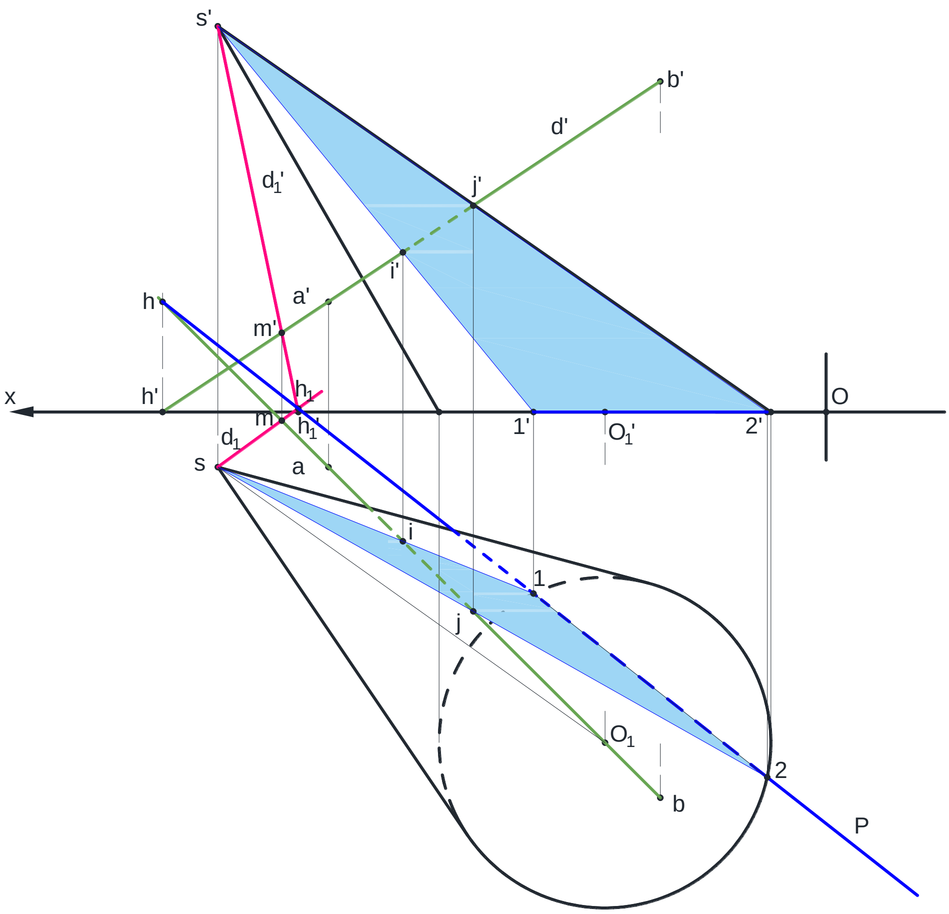


Fig. 6.5. Rezolvare aplicație 6.5

Punctele în care dreapta D(d,d') intersectează conul circular oblic, cu baza în planul orizontal de proiecţie, din figura 6.5, se determină ducând un plan auxiliar prin dreaptă şi prin vârful S(s,s') al conului. Planul secant [P] este un plan determinat de două drepte concurente în punctul M(m,m'), iar punctul M $\in$ D: dreapta dată D şi o dreaptă $D_1(d_1,d_1')$, definită de punctul M şi de vârful conului, $d_1 = m \cup s$, $d_1' = m' \cup s'$.

Se determină urmele orizontale ale celor două drepte şi se trasează urma orizontală P a planului, P = h1 $\cup$ h.

Această urmă a planului intersectează cercul de bază al conului în punctele 1 şi 2, iar planul [P] intersectează suprafaţa conului după generatoarele S1 şi S2, şi rezultă o secţiune longitudinală triunghiulară în con, [1S2], (reprezentată cu albastru).

Punctele I(i,i') şi J(j,j') în care dreapta D(d,d') intersectează triunghiul de secţiune (1s2,1's'2') sunt punctele în care dreapta intersectează conul. Atât în proiecţia orizontală, cât şi în proiecţia verticală vizibilitatea dreptei este dată de cele două generatoare pe care le intersectează. Astfel cele două proiecţii sunt invizibile de la punctul I(i,i') până la punctul J(j,j') şi mai departe până la generatoarea de contur aparent, deoarece punctul J(j,j') este situat pe suprafaţa invizibilă a conului.

6.6. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul O_1(5, 40, 0), de rază R = 30 mm şi vârful în punctul S(80, 80, 65) şi punctul M(20, y_M, 20) aparţinând conului.

a) Să se determine urmele planului [T] tangent la con în punctul M

b) Să se traseze desfăşurata trunchiului de con, cuprins între planul orizontal şi planul de nivel [N] situat la cota 30 mm.

Rezolvare aplicația 6.6 a), b)

Pentru determinarea planului tangent la con s-a procedat la fel ca și la problema anterioară (problema 6.3). Pentru a determina proiecția m pe planul orizontal s-a dus prin m' generatoarea conului care intersectează baza conului în punctul 1', coborâm linie de ordine în planul orizontal și se determină proiecția 1, care este de asemenea pe baza conului. Se unește proiecția 1 cu vârful s al conului și se găsește generatoarea pe care este proiecția m. Ne folosim de orizontala g'g care trece prin punctul M(m, m') și găsim urma verticală v, punct de depărtare zero. În plan orizontal se duce raza O_1 care este perpendiculară pe urma T a planului tangent, iar în planul vertical urma T' trece prin v'. Cele două urme ale planului tangent se intersectează pe linia de pământ în punctul T_x.

Pentru a determina desfășurata trunchiului de con cuprinsă între planul orizontal [H] și planul de nivel [N] se aplică metoda rotației (o rotație de nivel în jurul axei verticale ce trece prin punctul s, vârful conului) determinându-se adevărata mărime a generatoarelor conului. Planul de nivel se află la o cotă de 30 mm față de planul orizontal. Se traslatează punctele de intersecție dintre planul de nivel și generatoare pe generatoarele aflate în adevărată mărime (rezultate în urma aplicării rotației de nivel) și se obțin punctele 1_0' – 7_0'.

Se alege un punct S_0 care este vârful conului și se duc arce de cerc cu razele s'7_0' – s'1_0' pe desfășurată și se obține trenuchiul de con cuprins între cele două plane (colorat cu albastru).

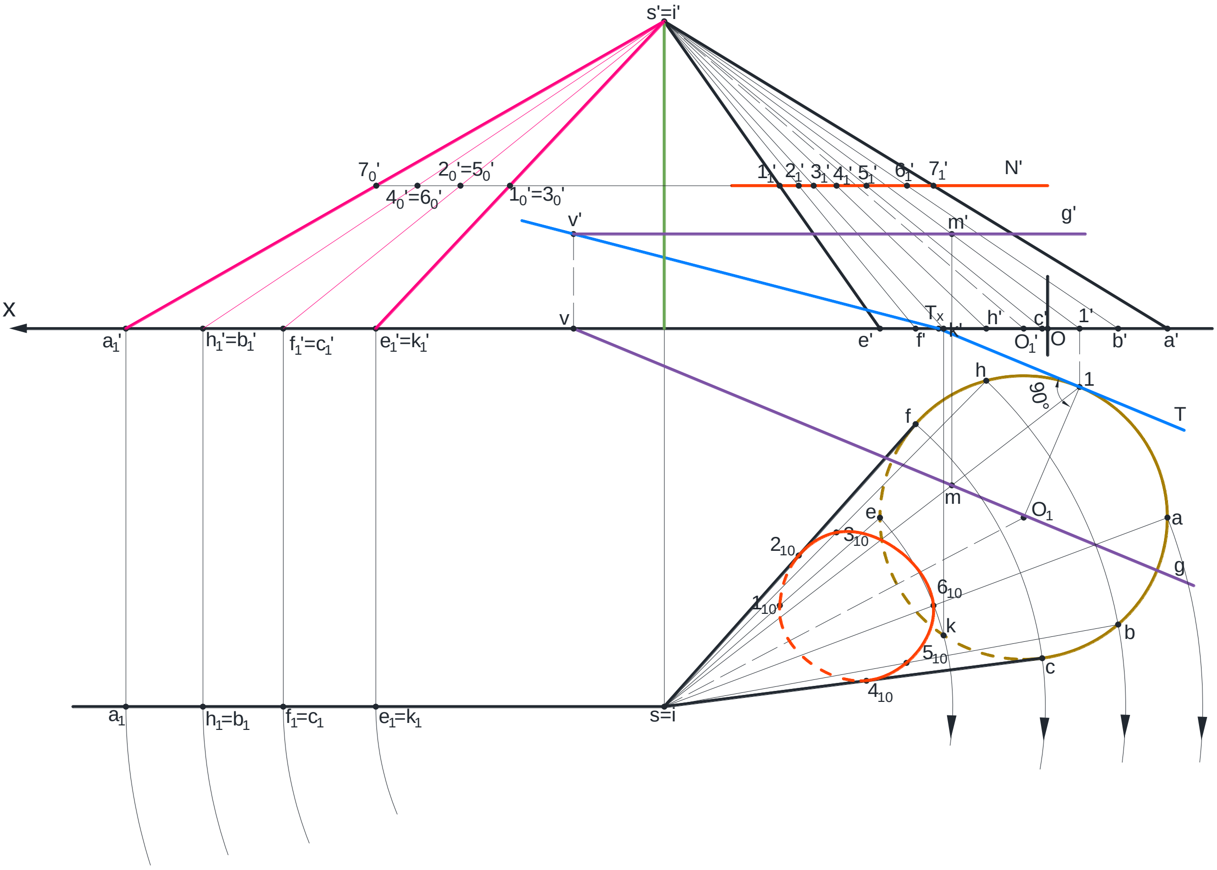


Fig. 6.6 a) Rezolvare aplicație

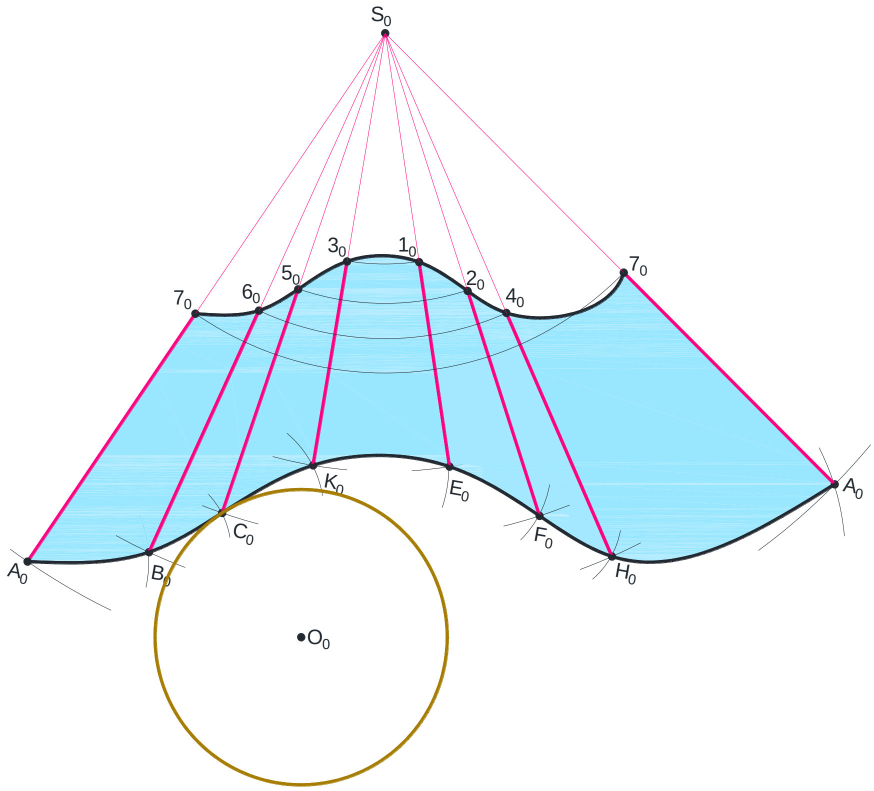


Fig. 6.6 b) Desfășurata conului oblic

6.7. Fie conul oblic cu baza un cerc din planul orizontal, cu centrul în punctul O_1(77, 34, 0), de rază R = 25 mm, vârful în punctul S(11, 0, 70) şi punctul M(40, 40, 5) exterior conului.

a) Să se traseze prin punctul M un plan tangent la con;

b) Să se desfăşoare conul.

Rezolvare aplicația 6.7

Planul tangent conului dus prin punctul M trece prin vârful S(s,s') şi este tangent la cercul de bază. Se trasează dreapta D(d,d') prin punctul M şi prin vârful conului şi se determină urma orizontală H(h,h') a acestei drepte. Din punctul M se pot duce două plane tangente la con, a căror urme orizontale, T_1 şi T_2, trec prin urma orizontală h şi sunt tangente la bază în punctele 1 şi 2. Pentru trasarea urmei verticale T_1' se utilizează urma verticală V(v,v') a orizontalei G(g,g') a planului [T_1], trasată prin punctul M, $T_1' = T_{1x} \cup v'$. Analog, se procedează şi pentru urma T2'. Pentru desfășurata conului se procedează ca și la problema precedentă, se ia un punct S_0 (la desfășurate se folosește literă mare) și se trasează cu compasul arcele de cerc aferente generatoarelor determinate în adevărată mărime, cele obținute în urma rotației, iar de pe bază se aproximează distanța dintre puncte. Se unesc punctele, iar baza (cercul) se trasează tangent la puctele de tangență ale bazei (D_0 sau F_0 sunt punctele unde generatoarele conturului aparent SD și SF sunt tangente la baza conului).

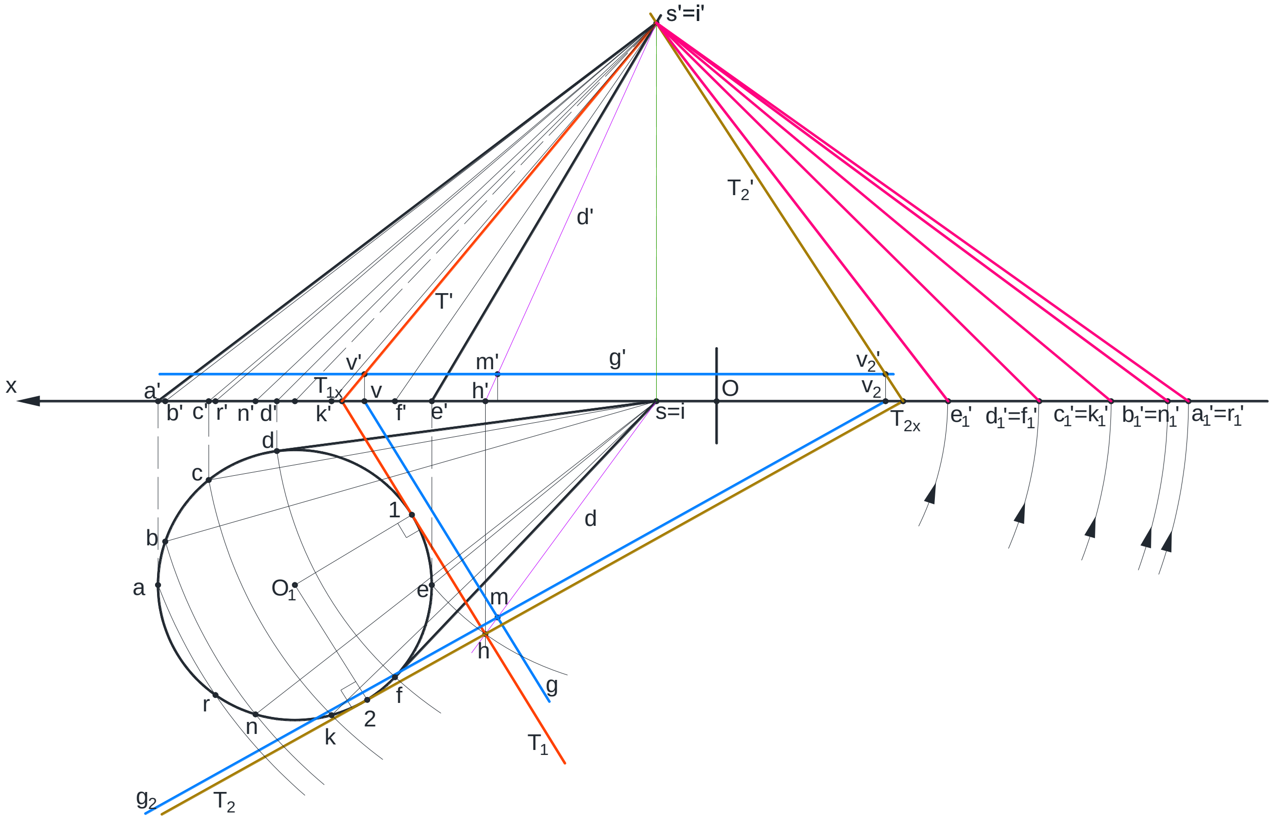


Fig. 6.7 a) Rezolvare aplicație

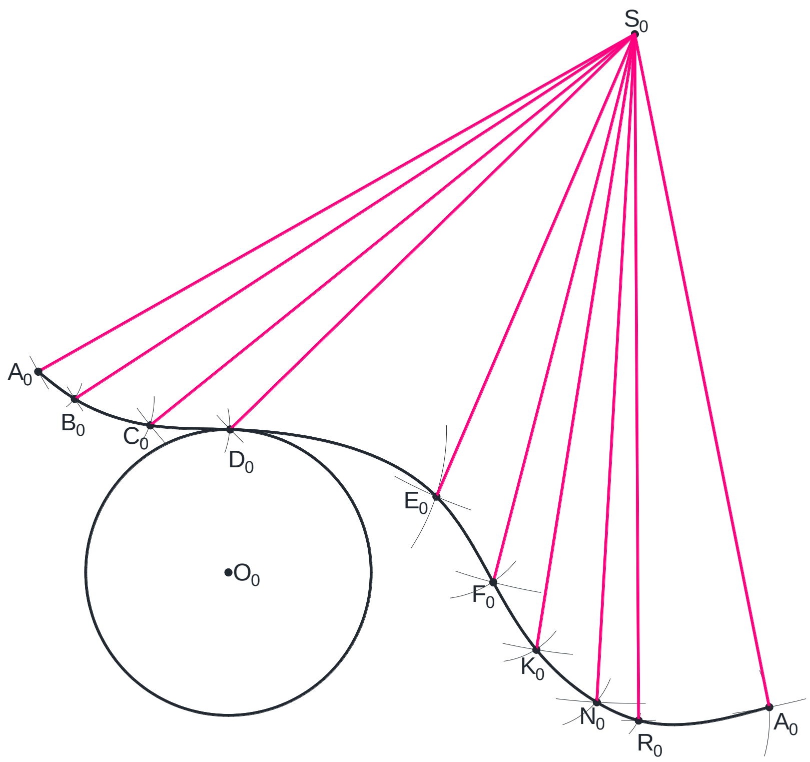


Fig. 6.7 b) Desfășurata conului oblic

6.8. **Fie cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele O_1(100, 35, 0) şi O_2(20, 65, 70), de rază R = 30 mm şi dreapta D(d,d'): A(110, 70, 50) şi B(30, 20, 10).**
a) Să se determine punctele de intersecţie dintre dreapta D şi cilindru;
b) Să se desfăşoare cilindrul.

Rezolvare aplicația 6.8

Se reprezintă în epură cilindrul oblic şi dreapta D(d,d'), coordonatele fiind date în cadrul problemei (figura 6.8a,b).

Pentru a trasa desfăşurata cilindrului oblic din (figura 6.8b), se procedează astfel. Prima dată se determină adevărata mărime a generatoarelor cilindrului, acest lucru se realizează printr-o schimbare de plan vertical de proiecţie, generatoarele devenind drepte frontale.

Se alege o nouă linie de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecţiile orizontale ale generatoarelor. Apoi se înscrie în cilindru o prismă cu opt feţe, care împarte baza cilindrului în opt părți egale. După care se determină o secţiune normală în cilindru, prin intersectarea cilindrului cu un plan de capăt [Q], Q$\perp$ a_1'1', urma Q' fiind perpendiculară pe generatoarele cilindrului.

Se obține o secțiune (12345678), care este o elipsă, și care se proiectează pe planul vertical [V_1] după segmentul 1'5'.

Urmează apoi determinarea mărimii reale a elipsei de secţiune, prin rabaterea planului [Q], împreună cu secţiunea, pe planul orizontal de proiecţie;

Pentru reprezentarea desfășuratei se ia dreapta pe care se trasează desfăşurata secţiunii normale, aproximând lungimile arcelor de elipsă cu coardele corespunzătoare: 12 = $1_0 2_0$, 23 = $2_0 3_0$,…81 = $8_0 1_0$. În punctele care determină desfăşurata secţiunii normale se trasează direcţiile generatoarelor, perpendiculare pe aceasta şi se măsoară pe ele lungimile reale ale generatoarelor corespunzătoare, din noua proiecţie verticală, de o parte şi de alta a urmei Q, de exemplu: $1_0 A_0 = a_1'1'$, $5_0 E_0 = e_1'5'$;

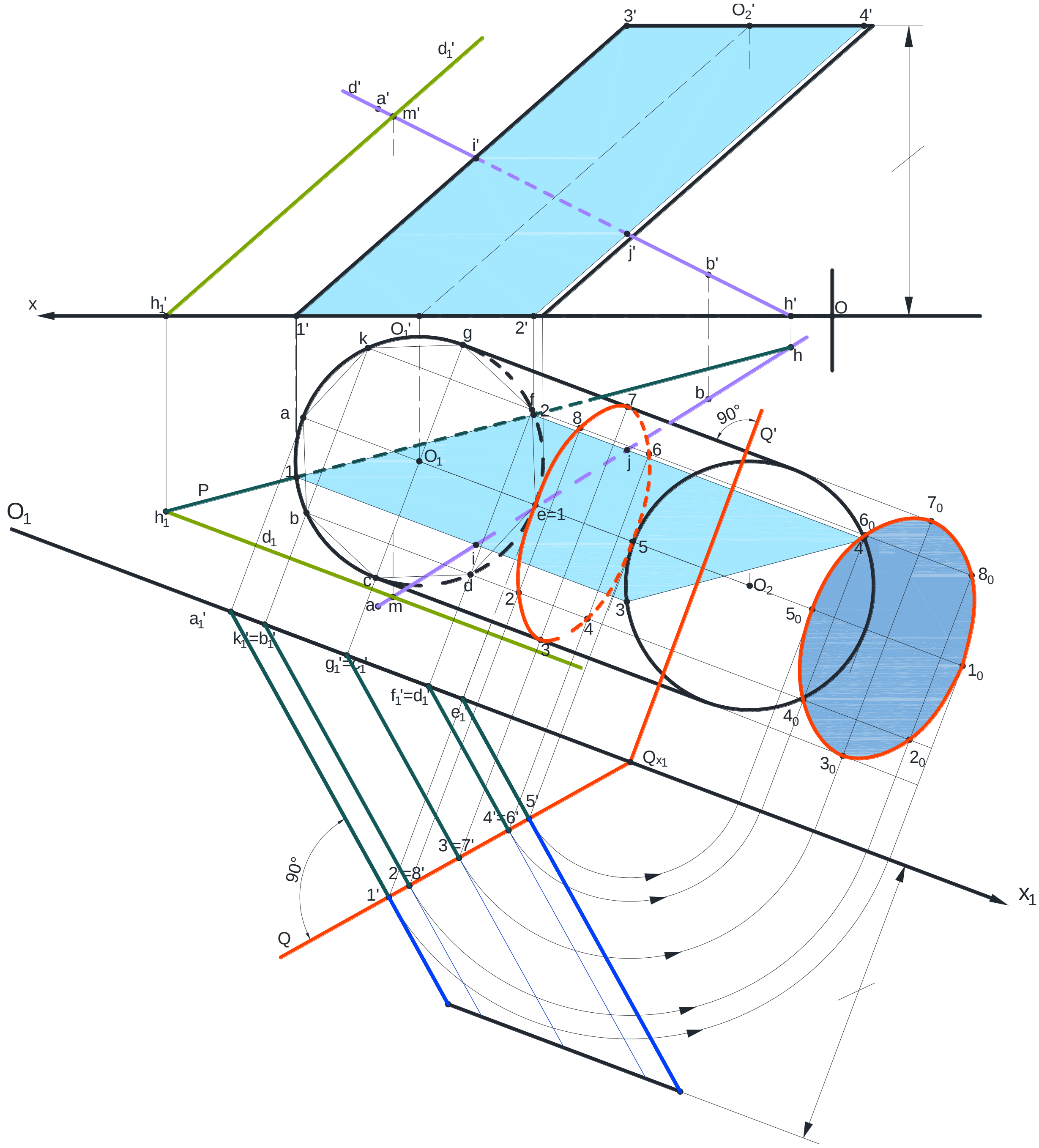


Fig. 6.8 *a) Rezolvarea aplicației 6.8*

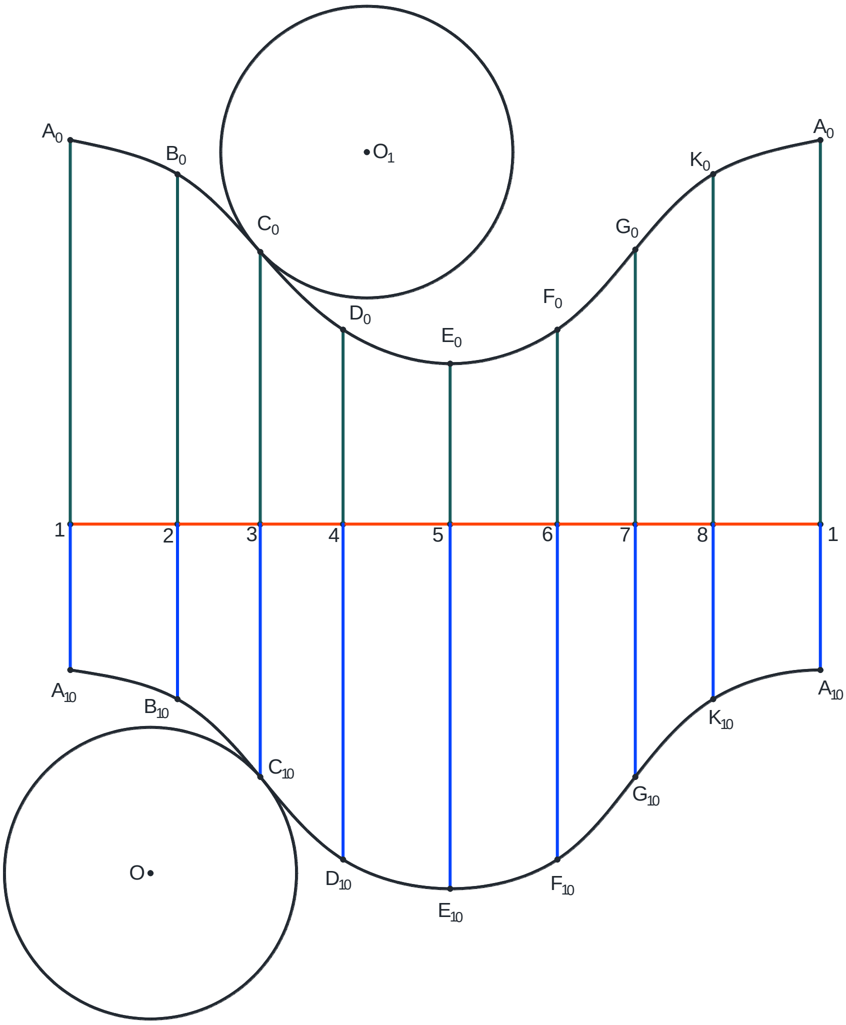


Fig. 6.8 *b) Desfăşurata cilindrului oblic*

După ce se trasează generatoarele, se unesc extremităţile generatoarelor, ţinând seama că punctele de inflexiune C_0 şi G_0 în trasarea transformatelor cercurilor bazelor. Se completează apoi desfășurata cu cercurile bazelor.

Pentru determinarea punctelor în care dreapta intersectează cilindrul, se poate aplica una din cele două metode studiate la intersecţia poliedrelor cu drepte (având în vedere că cilindrul este o prismă cu un număr infinit de muchii și de feţe).

Dacă se foloseşte metoda secţiunilor transversale, secţiunea determinată în cilindru de planul auxiliar este o elipsă, iar exactitatea determinării punctelor de intersecţie este influenţată de precizia de construire a elipsei de secţiune. Astfel, se preferă metoda secţiunilor longitudinale.

Se duce un plan auxiliar prin dreapta D(d,d'), acest plan este paralel cu generatoarele cilindrului, și este de asemenea determinat de două drepte concurente în punctul M(m,m'), M $\in$ D, dreapta D şi o dreaptă $D_1(d_1,d_1')$, paralelă cu generatoarele cilindrului. Urma orizontală P, P = h $\cup$ h1, a planului secant intersectează cercul bazei cilindrului după segmentul 12, iar suprafaţa laterală a cilindrului după generatoarele (13,1'3') şi (24,2'4').

Dreapta D intersectează cilindrul în punctele I(i,i') şi J(j,j'), care rezultă ca puncte de intersecţie dintre proiecţiile dreptei şi paralelogramul de secţiune. Vizibilitatea dreptei în cele două proiecţii este dată de vizibilitatea generatoarelor (1i,1'i') şi (2j,2'j').

***6.9.* Fie cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele O(30, 30, 0) şi O_1(80, 60, 60), de raze R = 20 mm şi un punct M(20, y_M, 8) aparţinând cilindrului.**

Să se ducă prin punctul M un plan [T] tangent la cilindru;

Rezolvare aplicația 6.9

Se reprezintă în epură punctele care formează bazele cilindrului și se construiește proiecțiile cilindrului pe cele două plane de proiecție. Pentru determinarea urmelor planului tangent (urma orizontală T și urma verticală T') în punctul M la suprafaţa cilindrică se trasează generatoarea notată cu (12,1'2'), generatoare care trece prin M şi de asemenea va fi conţinută de planul tangent [T].

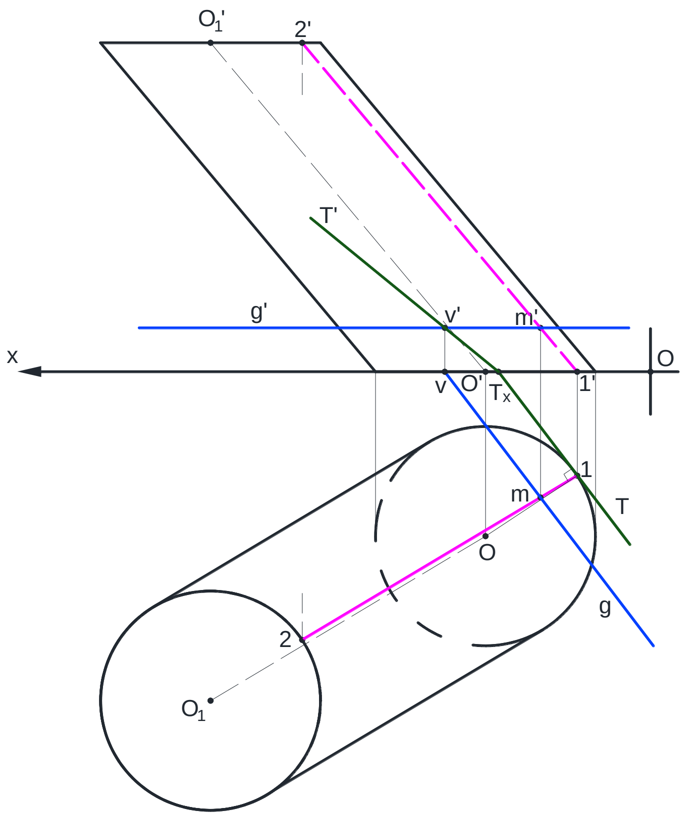


Fig. 6.9 *Rezolvare aplicația 6.9*

Urma orizontală T a planului tangent este tangentă bazei cilindrului în punctul (1,1'), urma orizontală a generatoarei 12.

Intersecţia urmei orizontale T cu axa Ox determină punctul T_x, un punct al urmei verticale T' a planului tangent. Pentru a afla încă un punct al acestei urme, se determină urma verticală a generatoarei 12 sau urma verticală V(v,v') a orizontalei G(g,g') a planului [T], ce trece prin punctul M, $T' = T_x \cup v'$.

6.10. **Se dă cilindrul oblic, cu centrele bazelor în punctele: O_1(100, 25, 0) şi O_2(50, 40, 50), de raze R = 20 mm. Să se determine urmele planului tangent cilindrului trasat prin punctul M (50, 8, 20), exterior lui.**

Rezolvare aplicația 6.10

Dacă se cere construirea unui plan tangent la cilindru prin punctul M, problema are două soluţii. Pentru rezolvare, se duce prin M(m,m') dreapta D(d,d') paralelă cu generatoarele cilindrului şi se determină urma ei orizontală H(h,h').

Planul tangent la cilindru conţine această dreaptă, deci urmele orizontale T_1 şi T_2 trec prin urma h şi sunt tangente la baza cilindrului din planul orizontal de proiecţie, în punctele 1 şi 2. Pentru determinarea urmei verticale T_1' a planului tangent [T_1], se foloseşte urma verticală a dreptei D sau urma verticală $V_1(v_1,v_1')$ a orizontalei G(g,g') a planului tangent, trasată prin punctul M, $T_1' = T_1x \cup v_1'$.

Analog, se construieşte şi urma T_2'.

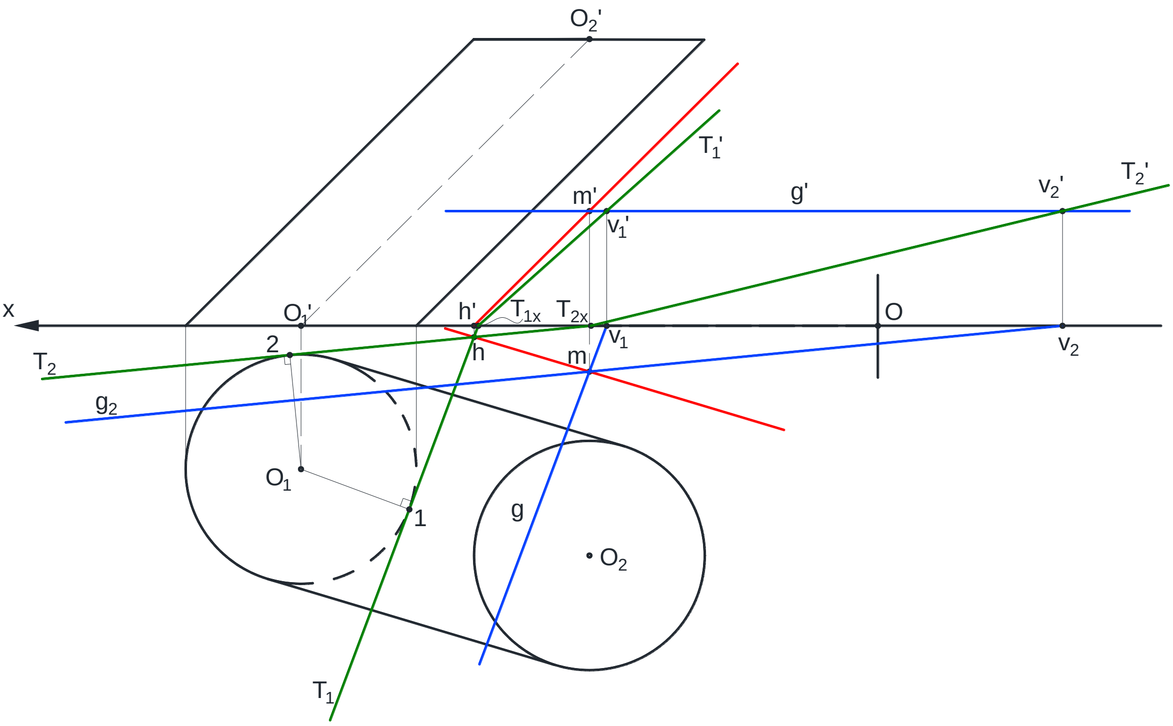


Fig. 6.10 *Rezolvare aplicația 6.10*

6.11. Fie cilindrul frontal cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele O_1(82, 35, 0) şi O_2(25, 35, 75), de raze R = 25 mm şi dreapta D(d,d'): H(45, 5, 0), M(80, 55, 90).
a) Să se construiască desfăşurata cilindrului;
b) Să se determine punctele de intersecţie dintre dreapta D şi cilindru.

Rezolvare aplicația 6.11

Se reprezintă punctele în epură și se construiește cilindrul frontal cu generatoarele paralele cu linia de pământ, (generatoarele sunt frontale). Se reprezintă proiecția cilindrului și în planul vertical de proiecție. Având în vedere că generatoarele sunt frontale, nu este nevoie de aplicarea metodei geometriei descriptive pentru a determina adevărata mărime a generatoarelor cilindrului. Baza cilindrului fiind situată în planul orizontal de proiecție rezultă ca această bază este reprezentată în adevărată mărime.

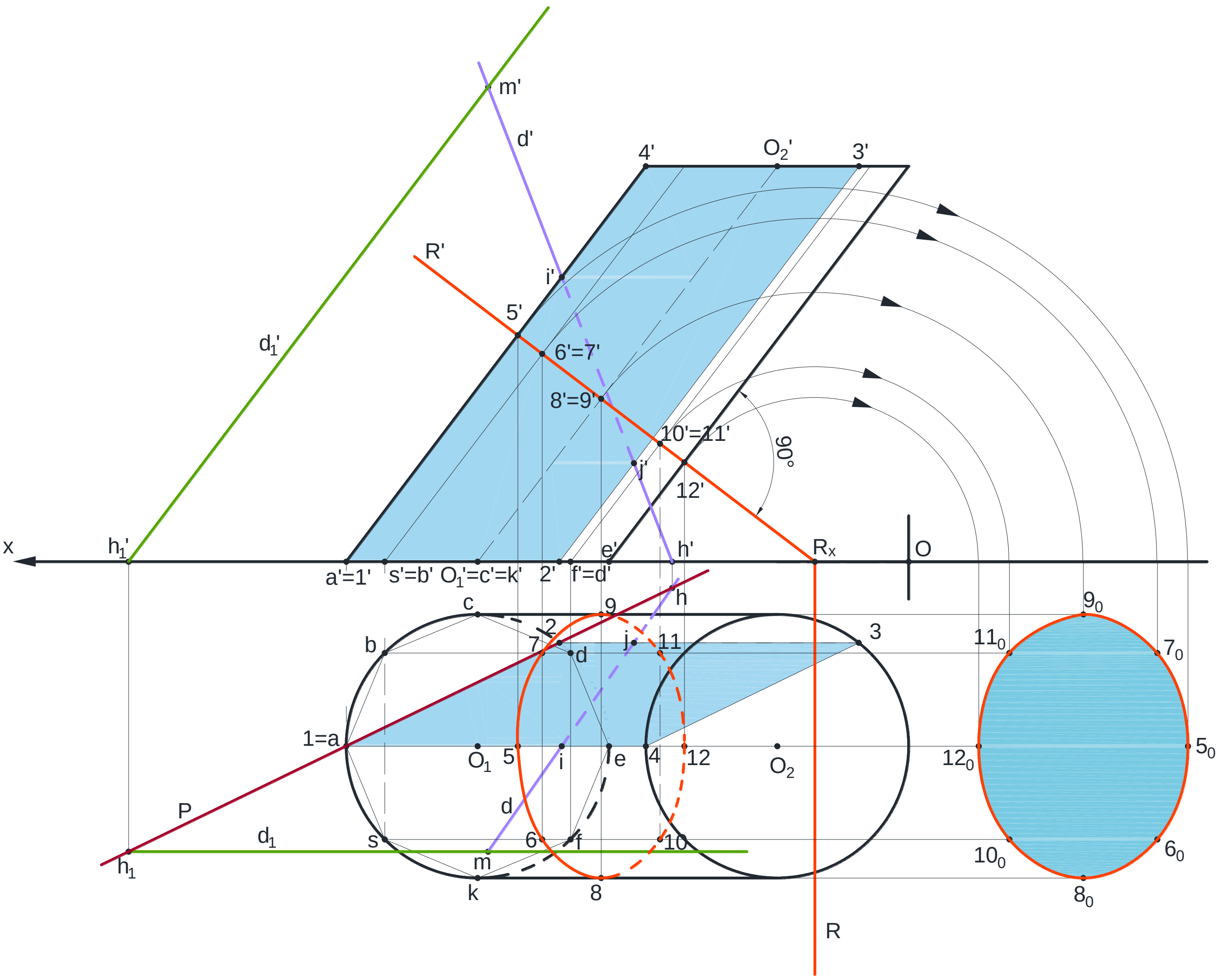


Fig. 6.11a) Intersecția dintre o dreaptă oarecare și cilindrul frontal

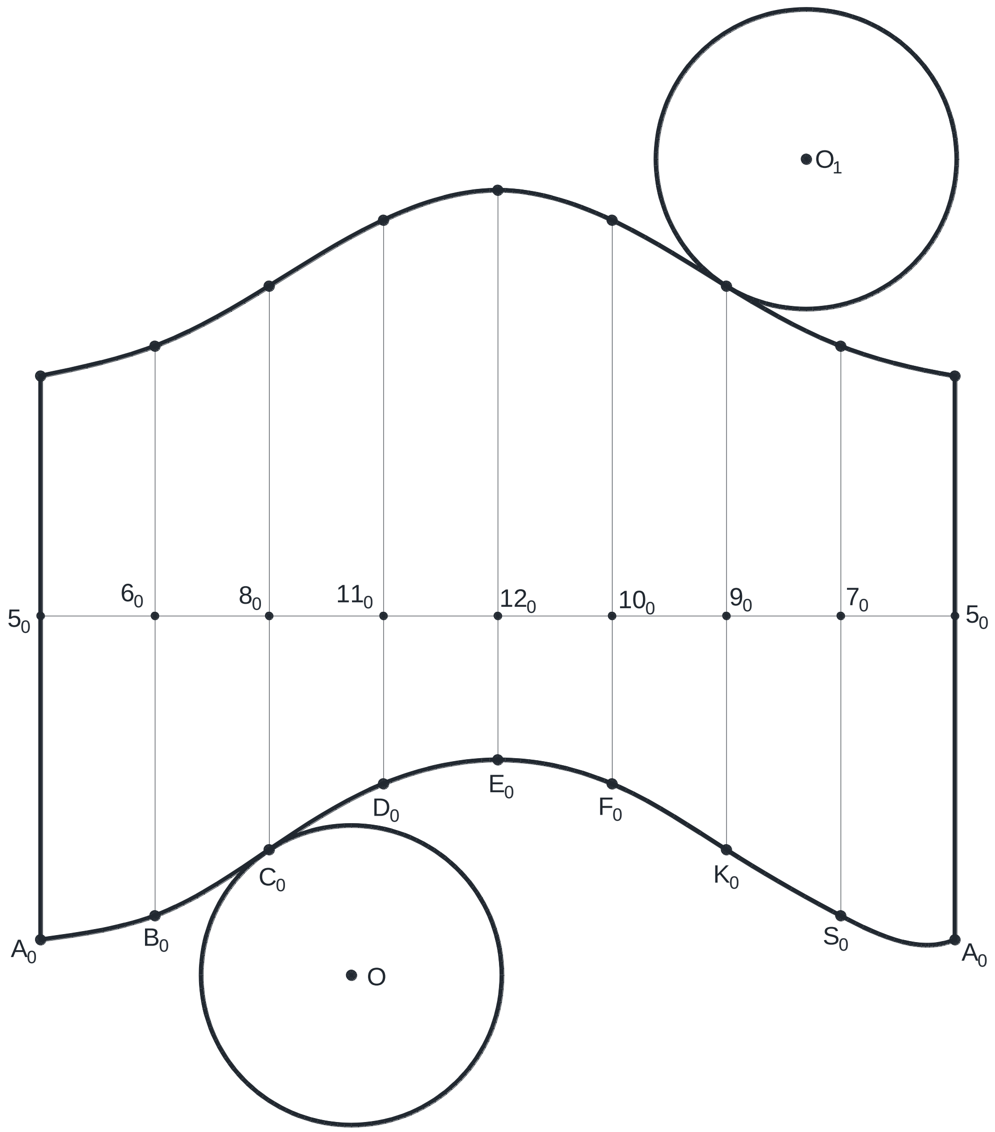


Fig. 6.11b) Desfășurata cilindrului frontal

Astfel, se împarte baza inferioară a cilindrului în opt părți egale. Pe o dreaptă orizontală se aproximează cu arce de cerc distanțele dintre două puncte consecutive și se poziționează pe aceasta. Această dreaptă orizontală are lungimea egală cu lungimea cercului bazei. Se trasează un plan de capăt [R] care este perpendicular pe generatoare. Se reprezintă pe desfășurată deasupra liniei orizontale mărimea generatoarelor care se află deasupra urmei R', iar sub linia orizontală pe desfășurată se reprezintă mărimea generatoarelor care se află sub urma verticală a planului de de capăt R'. Se unesc proiecțiile $A_0B_0C_0D_0E_0F_0K_0S_0A_0$ și se obține desfășurata cilindrului frontal.

Pentru rezolvarea punctului b) privind intersecția cilindrului frontal cu dreapta D(d,d') se duce un plan auxiliar prin dreapta D(d,d'), acest plan este paralel cu generatoarele cilindrului, și este de asemenea determinat de două drepte concurente în punctul M(m,m'), M $\in$ D, dreapta D şi o dreaptă $D_1(d_1,d_1')$, paralelă cu generatoarele cilindrului.

Urma orizontală P, P = h ∪ h1, a planului secant intersectează cercul bazei cilindrului după segmentul 12, iar suprafaţa laterală a cilindrului după generatoarele (14,1'4') şi (23,2'3'). Dreapta D intersectează cilindrul în punctele I(i,i') şi J(j,j'), care rezultă ca puncte de intersecţie dintre proiecţiile dreptei şi paralelogramul de secţiune. Vizibilitatea dreptei în cele două proiecţii este dată de vizibilitatea generatoarelor 1I(1i,1'i') şi 2J(2j,2'j').

6.12. Se dă cilindrul drept cu bazele cercuri cu centrele în punctele O_1(90, 30, 0) și O_2(90, 30, 105), de raze R = 25 mm, și planul de capăt [Q]: OQ_x = 34, Q_xQ = ∞, ∢OQ_xQ' = 145°.

a) Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul [Q] în cilindrul drept;

b) Să se determine desfășurata cilindrului drept cuprinsă între planul secant și linia de pământ.

Rezolvare aplicația 6.12

Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii făcută de planul de capăt în cilindrul drept se duc linii de ordine din punctele de pe bază, iar din planul vertical, cu vârful compasului în punctul Q_x se duc arce de cerc din punctele de intersecție dintre urma verticală a planului de capăt Q' și generatoarele cilindrului drept (din punctele 1', 2'=8', 3'=7', 4'=6', 5').

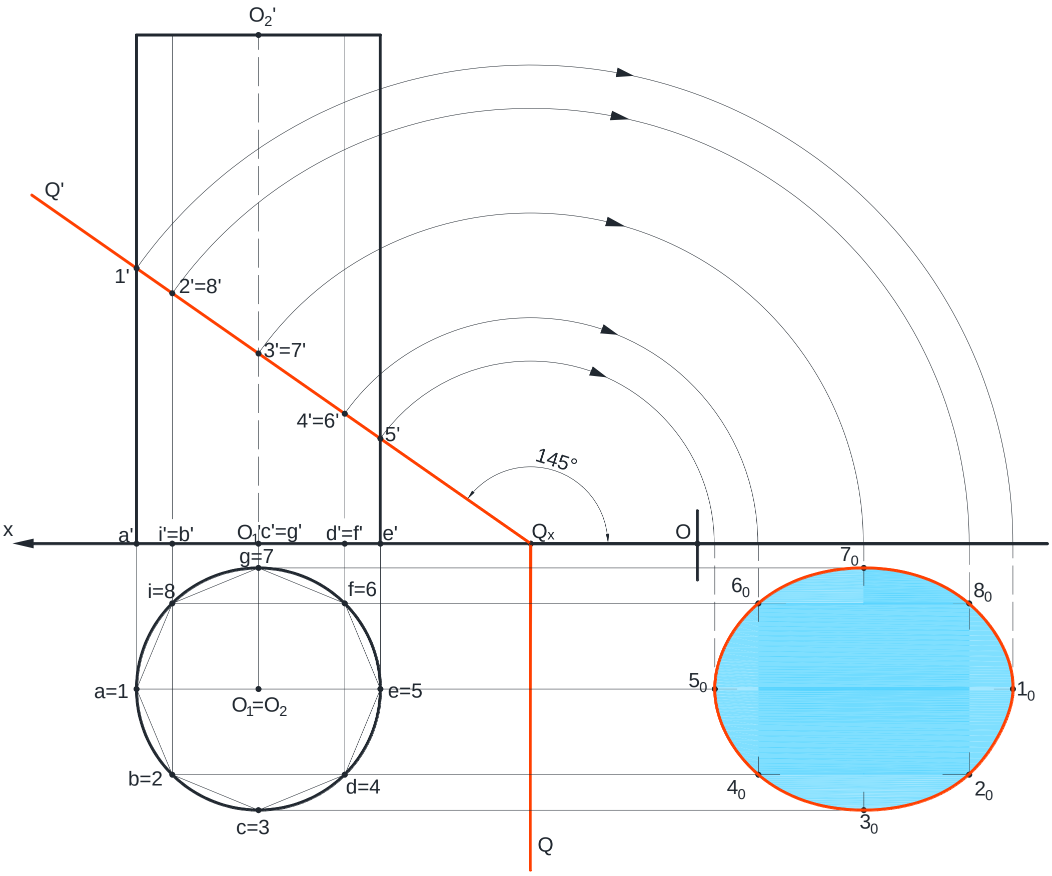


Fig. 6.12 a) Adevărata mărime a secțiunii în cilindrul drept

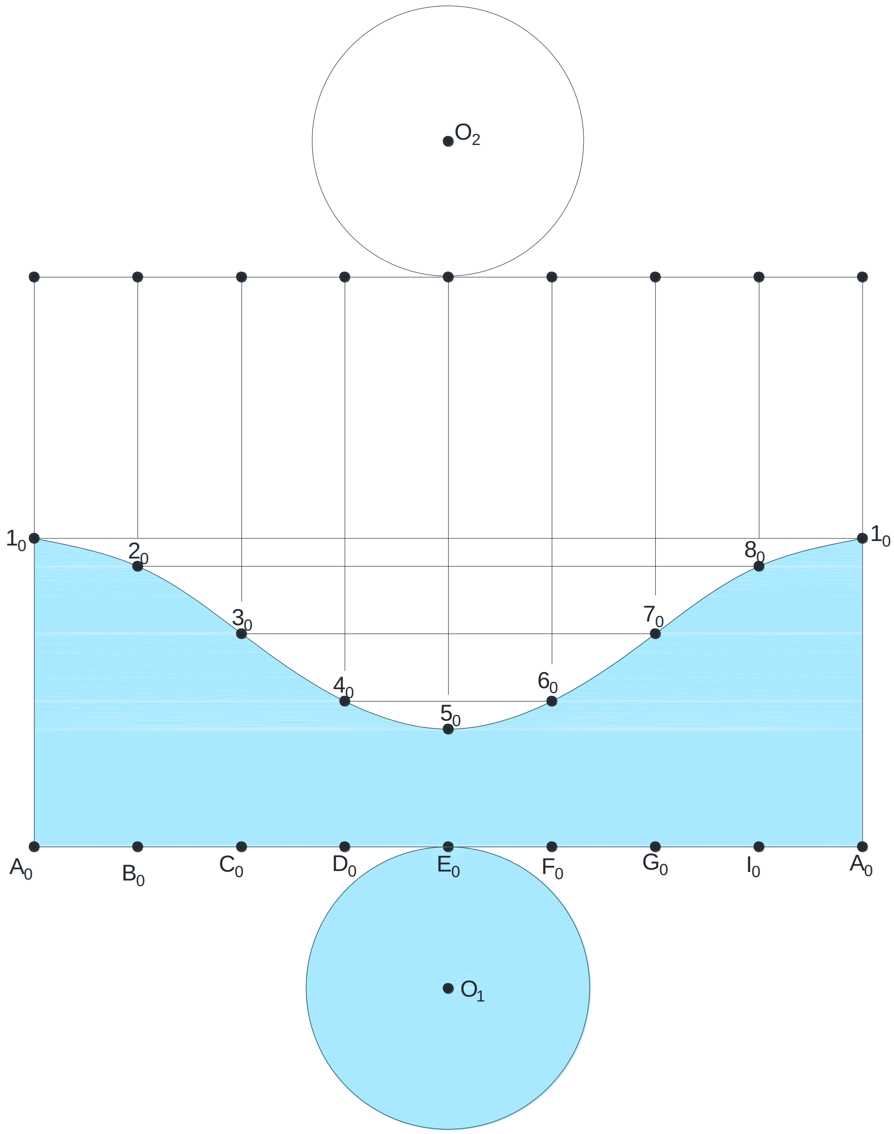


Fig. 6.12 b) Desfășurata cilindrului drept

La intersecția arcelor de cerc cu liniile de ordine rezultă punctele 1_0...8_0. Se unesc aceste puncte și se obține elipsa care reprezintă adevărata mărime a secțiunii făcută de planul secant în cilindrul drept.

Pentru a determina desfășurata cilindrului drept vom proceda astfel: în primul rând desfășurata unui ciilindru drept este un dreptunghi cu lungimea egală cu lungimea cercului bazei, iar lăţimea este înălţimea generatoarelor (în adevărată mărime în proiecţia verticală, având în vedere că acestea sunt drepte verticale).

Pentru trasarea grafică a desfăşuratei cilindrului drept, se înscrie în cilindru o prismă cu opt feţe, așa cum se poate observa în figura 6.12b. Secţiunea normală necesară pentru desfăşurare este cercul bazei, care se desfăşoară pe o linie dreaptă A_0A_0, măsurând segmentele A_0B_0 = ab, B_0C_0 = bc,….I_0A_0 = ia, din proiecţia orizontală, așa cum se poate observa în figura 6.12b. Prin punctele A_0, B_0,….A_0 se ridică segmente egale cu lungimea generatoarelor.

Transformata secţiunii eliptice se obţine prin măsurarea pe generatoarele de pe desfăşurată a segmentelor A_01_0 = a'1', B_02_0 = b'2', C_03_0 = c'3', …i_08_0 = i'8' şi unirea punctelor 1_0, 2_0, 3_0,…8_0,1_0. Pe desfășurată se trec punctele cu litere mari (A_0,…I_0, A_0).

6.13. Se dă cilindrul drept definit de curbele directoare, cercuri cu centrele în punctele O_1(100, 40, 0) și O_2(100, 40, 90), de raze R = 30 mm și planul oarecare [P]: OP_x = 30, OP_y = -60, OP_z = -25.
a) Să se găsească adevărata mărime a secțiunii determinată de planul [P] în cilindru;
b) Să se desfășoare porțiunea de cilindru cuprinsă între planul orizontal și planul [P].

Rezolvare aplicația 6.13

Se reprezintă în epură cilindrul drept și planul oarecare [P]. Se înscrie în baza cilindrului o prismă cu opt fețe.

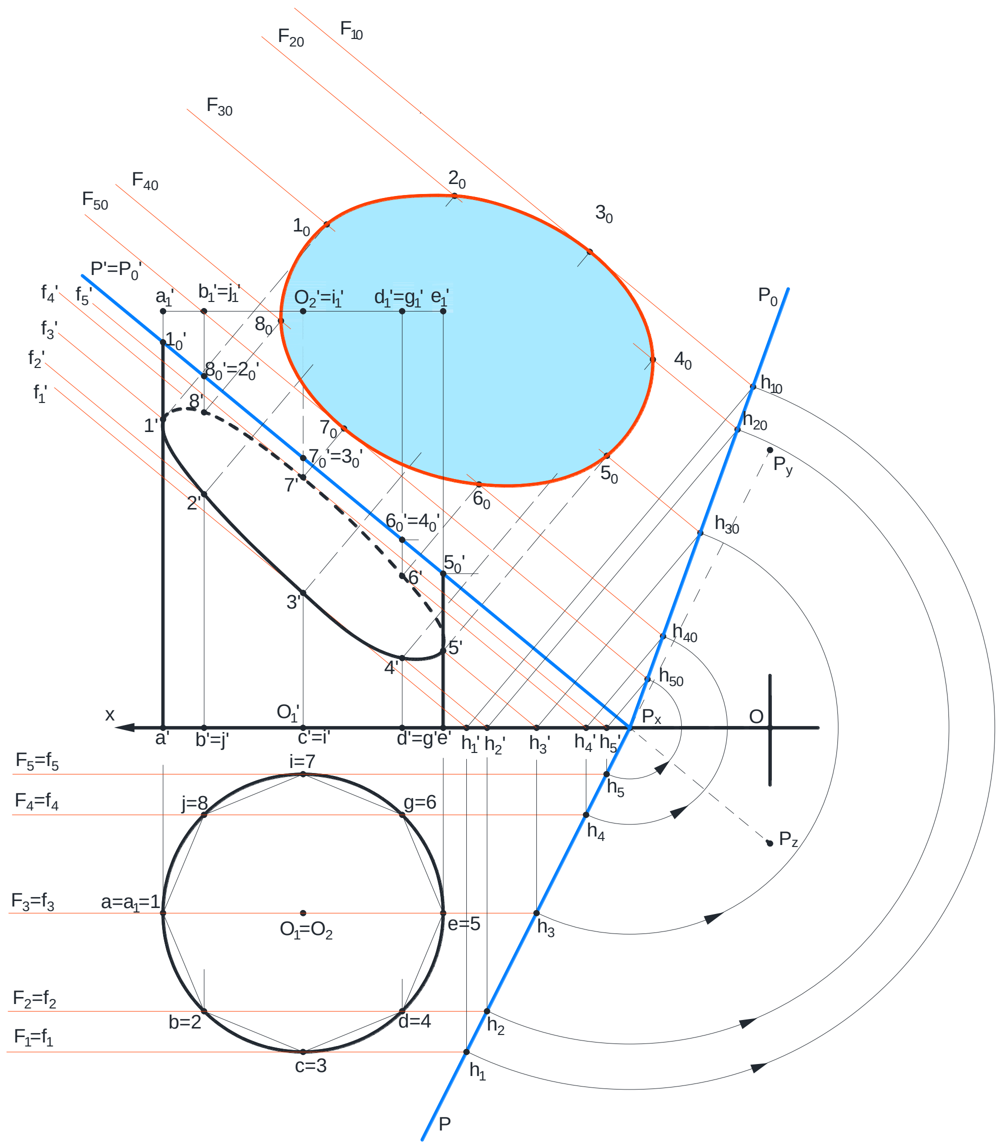


Fig. 6.13 a) Adevărata mărime a secțiunii în cilindrul drept

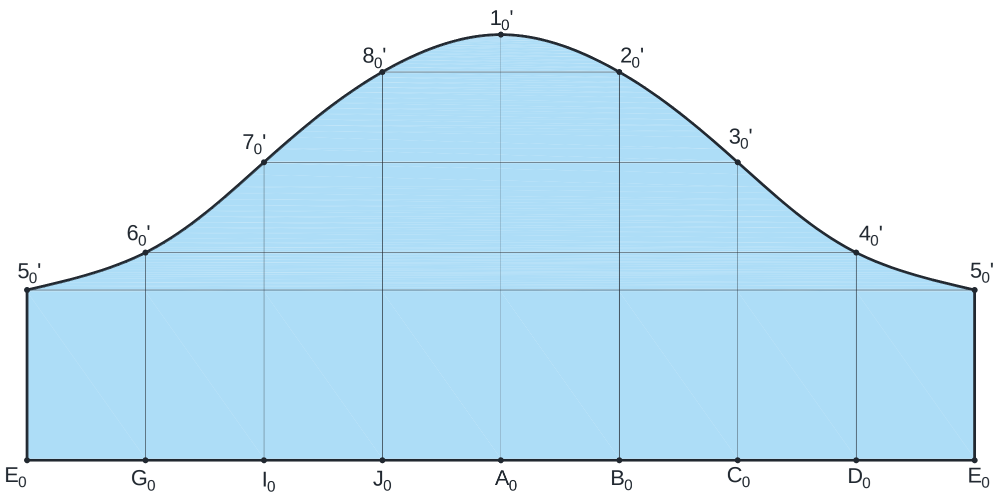


Fig. 6.13 b) Desfășurata porțiunii de cilindru drept

Pentru rezolvarea punctului a) se folosesc frontale [F_1]...[F_5], frontale care intersectează urma P a planului în punctele h_1...h_5. Se duc linii de ordine pe linia de pământ și se determină urmele h_1'…h_5'. Din aceste urme se duc frontalele f_1'…f_5' paralele cu urma P' a planului. Aceste frontale intersectează generatoarele aparente ale cilindrului în punctele 1'…8' și se obține secțiunea în cilindru.

Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii în cilindru se rabate urma planului P astfel: se trasează arce de cerc din punctul P_x, iar din punctele h_1'…h_5' se trasează linii de ordine perpendiculare pe urma P'. La intersecția cu arcele de cerc se obține urma P_0. Din punctele h_{10}...h_{50} se trasează frontalele F_{10}...F_{50}. Din punctele de pe secțiune 1'…8' se trasează perpendiculare pe urma P_0', iar la intersecția cu frontalele F_{10}...F_{50} se obțin punctele 1_0...8_0. Se unesc aceste puncte și se obține adevărata mărime a secțiunii în cilindru.

Pentru rezolvarea punctului b) se desfășoară baza cilindrului măsurând segementele care formează prisma înscrisă în cercul bazei cilindrului. Având în vedere că în planul vertical generatoarele cilindrului sunt drepte verticale (se află în adevărată mărime) se reprezintă pe desfășurată în adevărată mărime măsurând aceste genratoare de la linia de pământ până la urma planului secant. Se unesc aceste puncte și se obține desfășurata cilindrului drept.

6.14. Să se determine adevărata mărime a secțiunii și să se desfășoare porțiunea de cilindru cuprins între planul orizontal și planul secant în cilindrul drept. Se dau coordonatele centrele bazelor O(110, 30, 0) şi O1(110, 30, 60), de raze R = 25 mm precum și planul de capăt [P]: $OP_x = 65$, $OP_y = \infty$, $\sphericalangle OP_xP' = 145°$.

Rezolvare aplicația 6.14

Se reprezintă punctele în epură și se construiește cilindrul drept și planul de capăt [P].

Se înscrie în baza cilindrului o prismă patrulateră și se obțin punctele a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8. Se duc linii de ordine în planul vertical de proiecție și se obțin punctele 2', 1'=3', 4'=8', 5'=7', 6'. Se rabate urma orizontală P a planului în planul vertical de proiecție până când devine perpendiculară pe urma verticală P' a planului și se obține P_0. Se trasează arce de cerc din P_x până pe urma P_0.

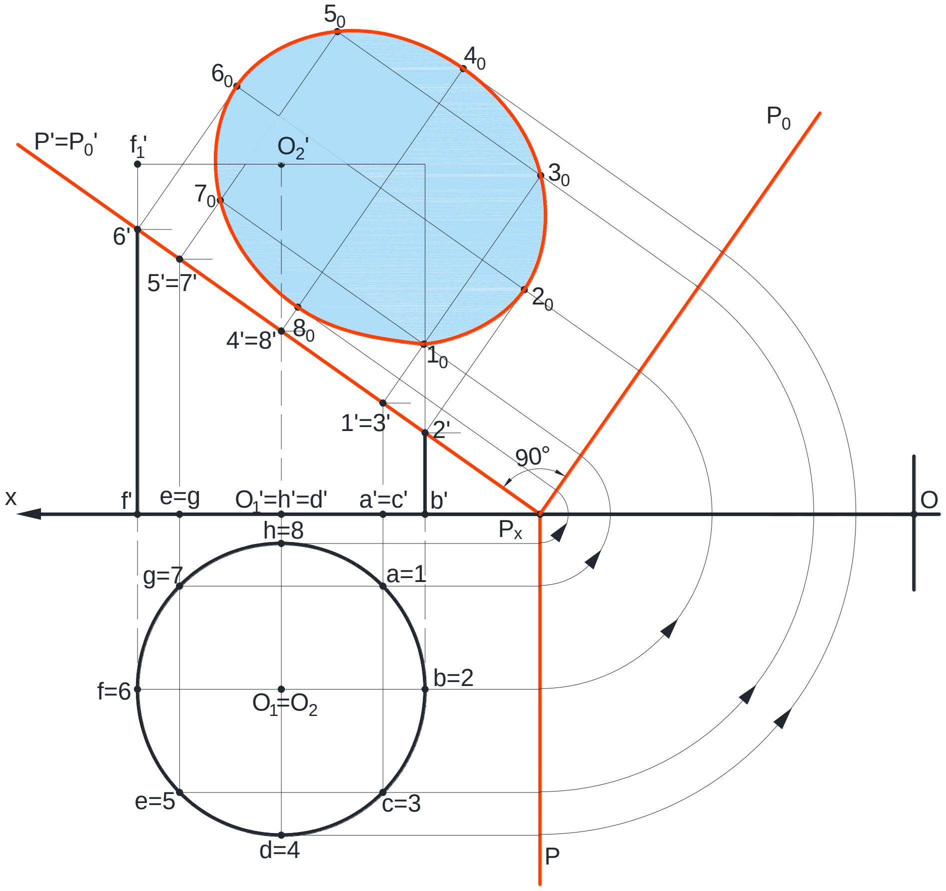


Fig. 6.14. a) Adevărata mărime a secțiunii în cilindrul drept

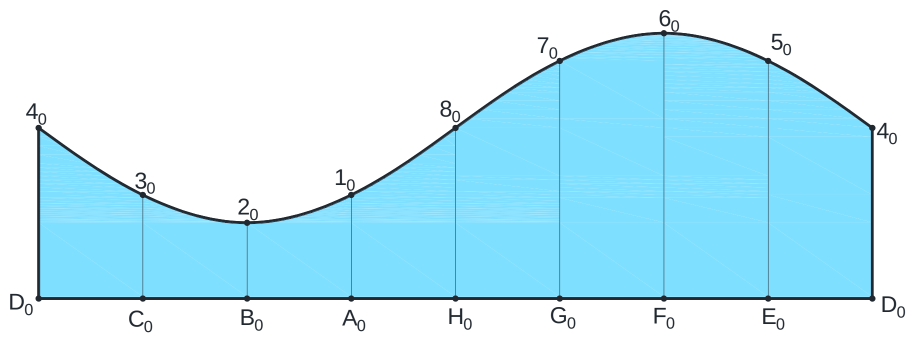


Fig. 6.14. b) Desfășurata cilindrului drept

Din punctele 1'…8' de pe P' se duc perpendiculare până când întâlnesc liniile de ordine duse în prelungirea arcelor de cerc trasate anterior. Se unesc punctele 1_0...8_0 și se obține secțiunea care este o elipsă (teorema lui Dandelin) a cărei proiecție verticală este segmentul 6'2' pe urma verticală a planului [P]. Elipsa obținută este în adevărată mărime, având 6_02_0 = 6'2' axa mare și 8_04_0 = 8'4' axa mică.

Pentru determinarea desfășuratei se trasează o dreaptă pe care se măsoară D_0C_0 = dc, C_0B_0 = cb... E_0D_0 = ed. Fiecărei diviziuni îi corepunde câte o generatoare a căror mărime se măsoară în proiecția verticală a cilindrului (generatoarele sunt drepte verticale, sunt proiectate în adevărată mărime). Unind între ele punctele 4_0, 3_0, 2_0, 1_0, 8_0, 7_0, 6_0, 5_0, 4_0 ale fiecărei generatoare cu planul secant se obține transformata secțiunii, curba 4_0, 3_0, ...4_0.

6.15. Să se determine secțiunea în cilindrul oblic, determinată de un plan oarecare, când se cunosc: O_1(120, 30, 0); O_2(15, 75, 80); R = 25 mm; OP_x = 5, ∢OP_xP = 135°, ∢OP_xP' = 145°.

Rezolvare aplicația 6.15

Se împarte baza inferioară a cilindrului în 8 sau 12 părți egale, după care se reprezintă generatoarele cilindrului în cele două plane de proiecție. Se aplică apoi exact ca și în cazul poliedrelor, metoda planelor proiectante, cu plane de capăt duse prin generatoarele cilindrului. Planele de capăt trasate vor intersecta urma orizontală și verticală a planului oarecare [P] și se obțin urmele orizontale h_1...h_7, iar apoi urmele verticale v_1',...v_7'. Se unesc cu linie subțire urmele orizontale și verticale (fig. 6.15), care intersectează generatoarele cilindrului oblic în planul orizontal și se obține secțiunea 1,2,...,12. Se duc linii de ordine în planul vertical, iar la intersecția cu generatoarele corespondente se obține secțiunea în planul vertical notată cu 1', 2',…12'.

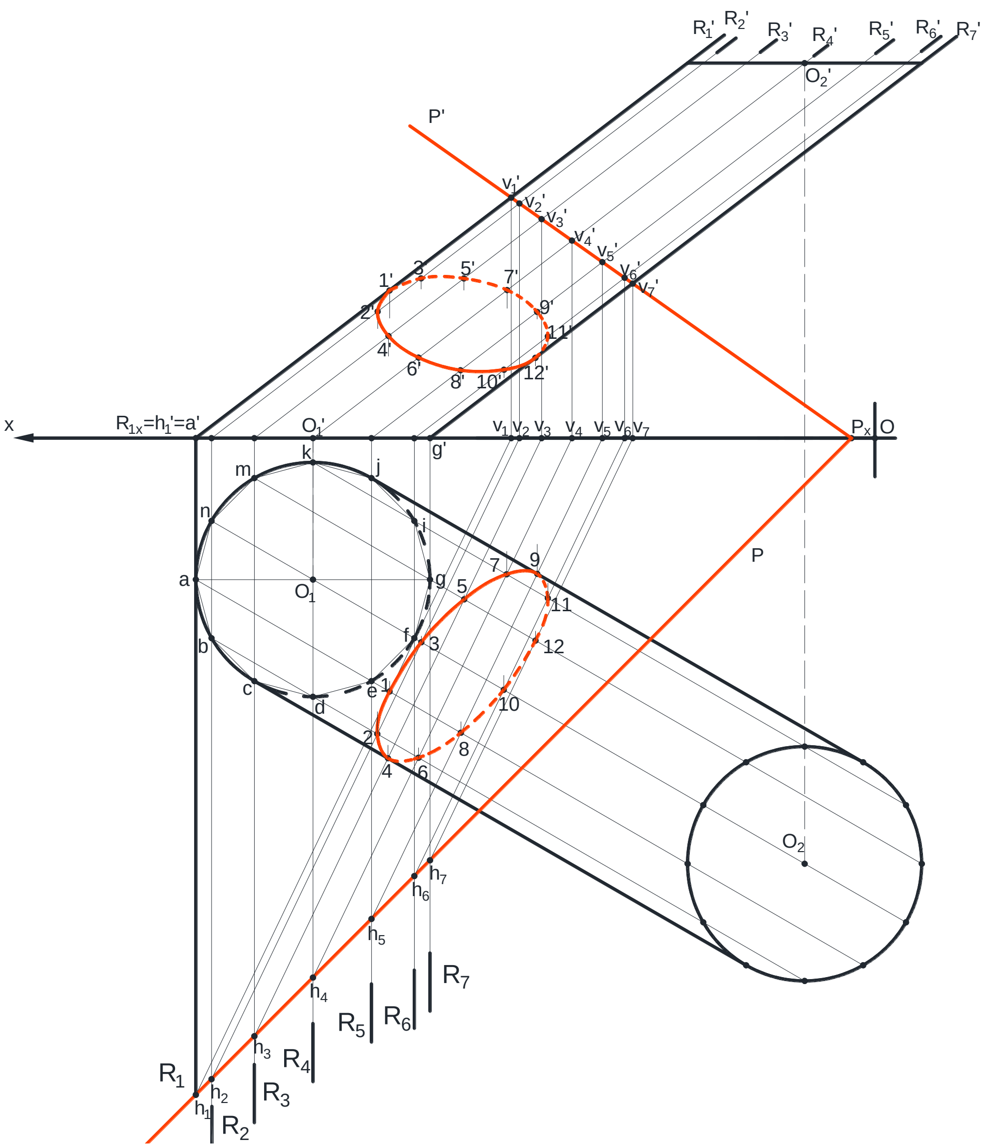


Fig. 6.15. Secțiunea cu un plan oarecare a cilindrului oblic

6.16. Să se determine intersecţia dintre un cilindru oblic și dreapta D(d, d') când se cunosc: O_1(40, 30, 0); O_2(95, 40, 65); R = 20 mm; iar pentru dreaptă se cunosc coordonatele punctelor M(65, 70, 15) și N(40, 5, 10).

Rezolvare aplicația 6.16

Se reprezintă în epură dreapta D(d,d') și cilindrul oblic, după care se trasează prin punctul M(m, m') dreapta D_1(d_1, d_1') care este concurentă cu dreapta D(d, d'). Dreapta D_1(d_1, d_1') este paralelă cu generatoarele cilindrului oblic. Urma orizontală P, P = $h \cup h_1$ intersectează cercul bazei cilindrului după segemnetul 12, iar suprafața laterală a cilindrului după generatoarele (13, 1'3') și (24, 2'4').

Dreapta D(d,d') intersectează cilindrul în punctele I(i, i') și J(j, j'), care rezultă ca punctele de intersecție dintre proiecțiile dreptei și paralelogramul de secțiune, colorat cu albastru (vezi fig. 6.16).

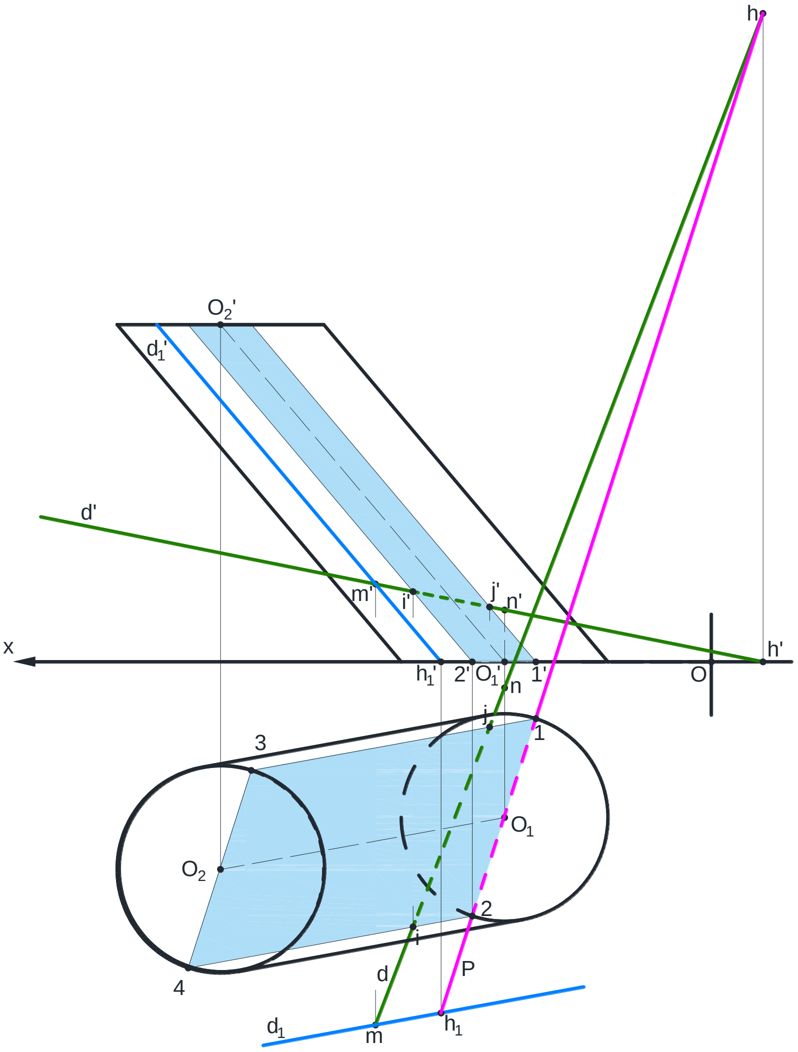


Figura 6.16. Intersecția dreptei D(d, d') cu cilindrul oblic

6.17 Se consideră cilindrul circular drept cu baza un cerc situat în planul orizontal de proiecție, cu centrul în O(85, 40, 0), raza R = 30 mm și înălțimea egală cu 75 mm. Se cere să se determine secțiunea cu un plan oarecare [P], adevărata mărime a secțiunii și desfășurata porțiunii de cilindru situată între planul secant și baza inferioară.

Se cunosc coordonatele planului [P]: OP_x = 15; ∢OP_xP = 120°, ∢OP_xP' = 150°.

Rezolvare aplicația 6.17

Pentru rezolvarea problemei se folosesc frontalele [F_1]...[F_5], frontale care intersectează cilindrul drept în opt puncte. Totodată aceste frontale vor intersecta urma P a planului în punctele h_1...h_5. Din aceste urme se duc linii de ordine în plan vertical până pe linia de pământ și se obțin urmele h_1'... h_5'.

Din aceste urme se trasează perpendiculare pe urma P' a planului, iar la intersecția cu arcele de cerc duse din P_x se obțin punctele h_{10}...h_{50}.

Din punctele determinate anterior (h_{10}... h_{50}) se trasează frontalele f_1',...,f_5', frontale care sunt paralele cu urma P' și cu frontalele f_1',...,f_5'. Din planul orizontal se duc linii de ordine în planul vertical și la intersecția cu frontalele f_1,'...,f_5' se obțin punctele 1',...,8'.

Pentru a determina adevărata mărime a secțiunii se trasează perpendiculare din punctele 1',...,8' pe frontalele F_{10}...F_{50} și se obțin punctele 1_0,...,8_0. Unim cu linie continuă punctele și obținem adevărata mărime a secțiunii în cilindrul drept.

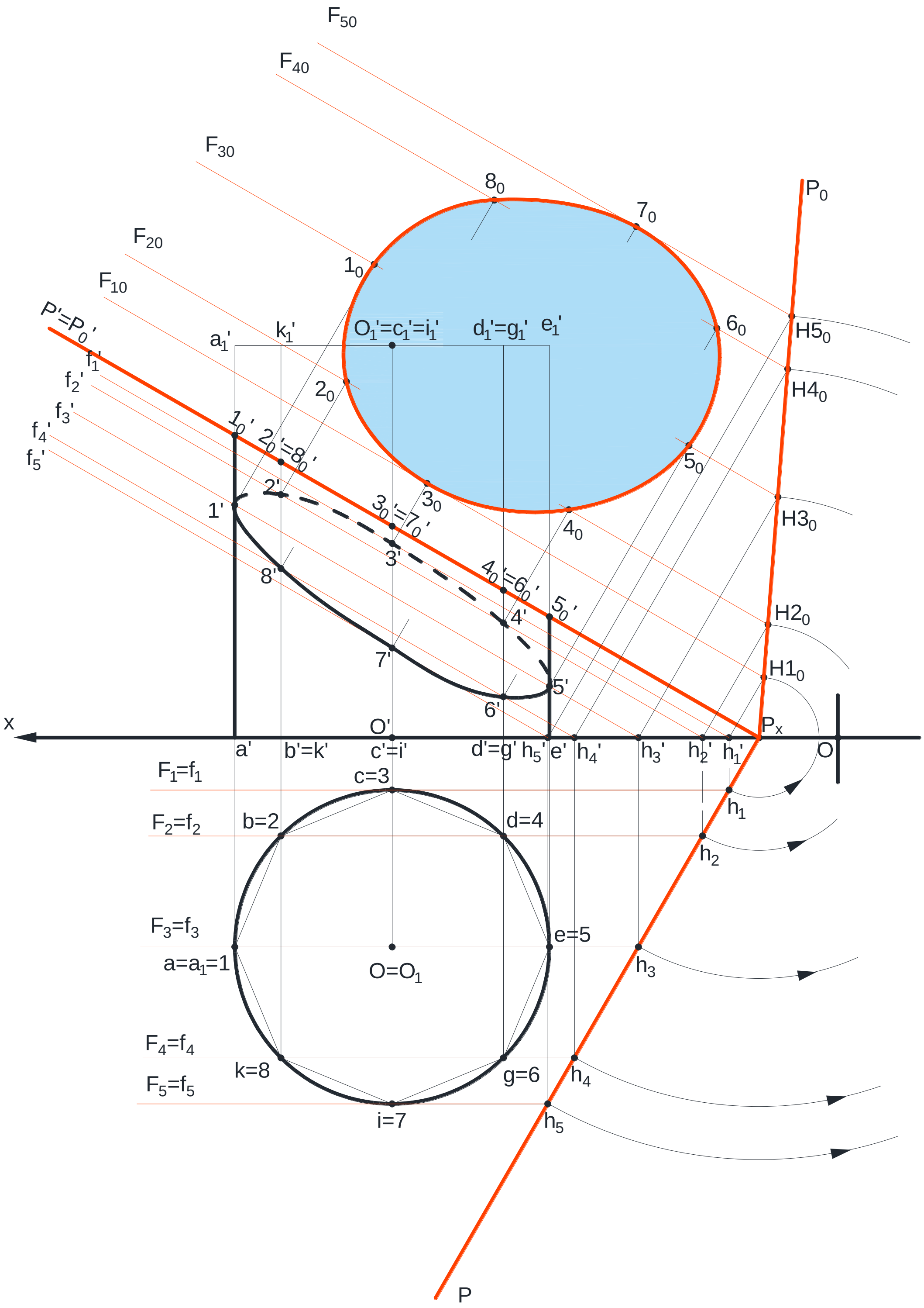


Fig. 6.17. a) Secțiunea cilindrului drept cu un plan oarecare

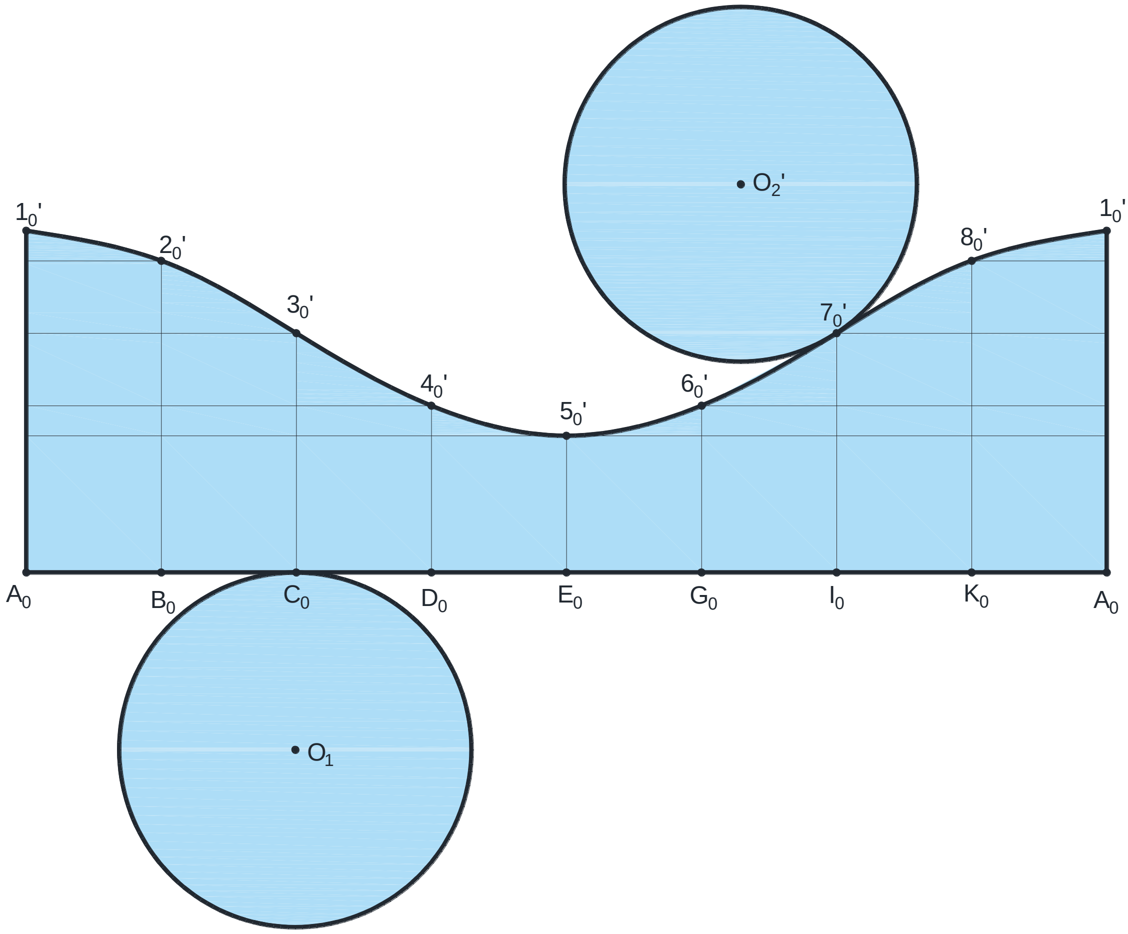


Fig. 6.17. b) Desfășurata cilindrului drept

Pentru realizarea desfășuratei avem nevoie de lungimea cercului bazei, astfel pe o linie orizontală se desfășoară baza inferioară a cilindrului care a fost împărțită în opt părți egale. Din planul vertical se măsoară generatoarele cilindrului de la baza inferioară până la punctul de intersecție cu urma P' a planului oarecare (fiind drepte verticale, ele sunt reprezentate în adevărată mărime) și apoi se translatează pe desfășurată.

6.18. Să se determine curba de intersecție a doi cilindri de diametru ø45, cu unghiul dintre axele de simetrie de 45° și apoi să se determine desfășurata acestora. Se mai cunosc: înălțimea cilindrului C_2 este 90 mm, distanta de la punctul de intersecție ale axelor de simetrie până la baza cilindrilor este 20 mm.

Rezolvare aplicația 6.18

Se reprezintă cei doi cilindri cu axele de simetrie concurente. Pentru a determina curba de intersecție dintre cei doi cilindrii se procedează astfel: se trasează prima dată sfera minimă notată cu S_1, sferă care este tangentă la ambii cilindrii, iar centrul sferei va fi punctul de intersecție dintre axele de simetrie ale celor doi cilindrii. Concentric cu prima sferă se trasează sfrera S_2 care va avea un diametru mai mare decât sfera S_1. Aceasta va intersecta generatoarele celor doi cilindrii în două puncte.

Se obține astfel punctul de intersecție dintre cele două drepte și de altfel și al doilea punct care va fi pe curba de intersecție. Se repetă pasul anterior și se mai trasează sfera S_3 de diametru mai mare decât sfera S_2. Această sferă va intersecta la rândul ei generatoarele celor doi cilindrii ducând linii paralele cu bazele atât pentru cilindrul C_1, cât și pentru cilindrul C_2 și se obține al treilea punct de intersecție care va fi pe curba de intersecție. Tot pe curba de intersecție vor fi și punctele în care se intersectează generatoarele celor doi cilindrii, astfel va rezulta curba de intersecție, care va fi o linie frântă.

Pentru desfășuratele celor doi cilindrii se procedează astfel: se împart bazele superioare ale celor doi cilindrii în 6 părți egale. Se trasează generatoarele cilindrilor din punctele 1...7, atât pentru cilindrul C_1, cât și pentru cilindrul C_2. Aceste generatoare vor intersecta curba de intersecție în punctele rezultate în construcție (vezi rezolvarea grafică). Pentru desfășurata cilindrilor se aproximează cu compasul distanța dintre punctele de pe bază de la 1 la 7. Din punctele unde generatoarele de la 1 la 7 intersectează curba de intersecție se vor trasa paralele la bazele cilindrului și se reprezintă pe desfășurată punctele 1_0,...,7_0.

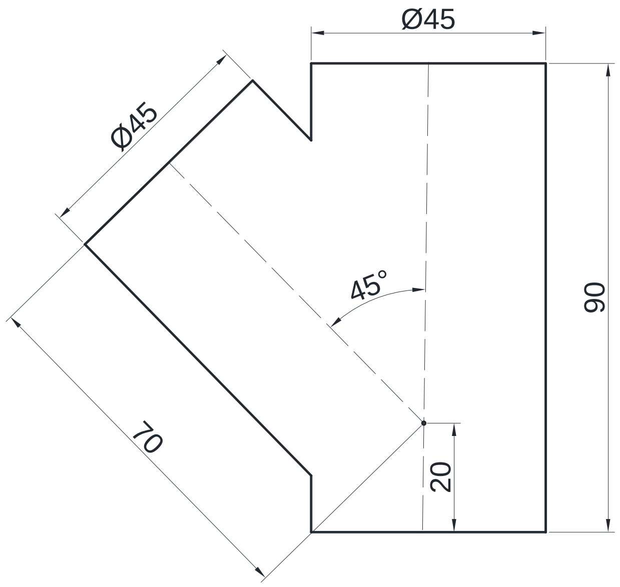


Fig. 6.18. a) Intersecția a doi cilindrii cu diametre egale

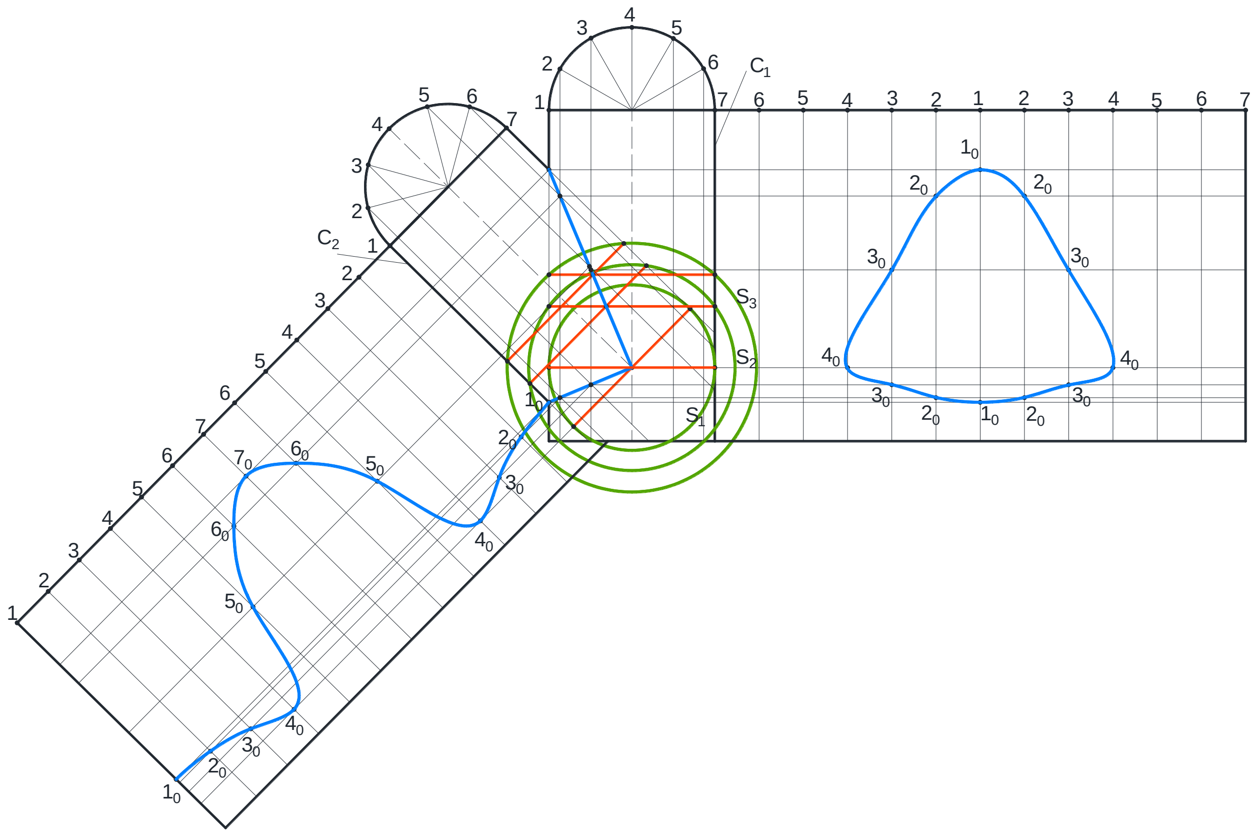


Fig. 6.18.b) Rezovarea aplicației 6.18

Probleme propuse

6.19. Se consideră un con de revoluție având baza un cerc de rază R = 35 mm, situată în planul [V], cu vârful în S(s, s') și înălțimea egală cu 70 mm (în poziție de dreaptă de capăt). Se cere ca utilizând un plan vertical [Q] să se determine în con o secțiune de tip eliptic, adevărata mărime a secțiunii și desfășurata trunchiului de con situată între planul [Q] și bază.

6.20. Se consideră un con având baza un cerc de rază R = 35 mm, situată în planul [H], cu vârful în V(v, v') și înălțimea egală cu 70 mm. Se cere ca utilizând un plan de capăt [P] să se determine în con o secțiune de tip parabolic, adevărata mărime a secțiunii și desfășurata trunchiului de con situată între planul de secțiune și bază.

6.21. Să se determine adevărata mărime a secțiunii cu un plan de capăt [P] care este reprezentat la un unghi de 30° față planul [H], într-un cilindru având baza un cerc de rază R = 35 mm, situată în planul [H] și înălțimea de 75 mm. Să se desfășoare porțiunea de cilindru situată sub planul de secțiune.

6.22. Se consideră conul oblic cu baza un cerc de rază R = 25 mm, situată în planul [H], cu centrul în O_1(50, 70, 0) și vârful în punctul S(10, 10, 60). Se cere să se determine punctele de intersecție dintre con și o orizontală de cotă 20 mm. Să se studieze vizibilitatea dreptei.

6.23. Se consideră conul drept, cu baza un cerc de rază R = 30 mm, situat în planul [H], cu centrul în O_1(80, 50, 0) și vârful în punctul S(80, 50, 60). Se cere să se determine punctele de intersecție dintre con și dreapta oarecare D(d, d'). Să se studieze vizibilitatea dreptei. D(d, d'): M(40, 105, 15); N(100, 10, 50).

6.24. Se dă cilindrul oblic cu baza situată în planul orizontal de proiecție, un cerc de rază R = 15 mm, cu centrul în punctul O_1(24, 17, 0) și baza superioară cu centrul în punctul O_1(53, 33, 30). Se cere să se desfășoare cilindrul oblic.

6.25. Se dă cilindru drept cu centrul bazei în punctul O_1(85, 45, 0), R = 30 mm, iar înălțimea cilindrului este 70 mm. Se cere să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de un plan oarecare [P]: OP_x = 10; $\sphericalangle OP_xP = 120°$, $\sphericalangle OP_xP' = 150°$ în cilindru.

6.26. Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție, cu centrul bazei în punctul O_1(70, 50, 0), R = 30 mm, iar vârful conului are coordonatele S(70, 50, 60). Se cere ca utilizând un plan de capăt [Q] să se determine în con o secțiune de tip parabolic, adevărata mărime a secțiunii și desfășurata trunchiului de con situat între planul de secțiune și bază.

6.27. Se consideră cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele O_1(50, 40, 0) și O_2(110, 50, 70), de raze R = 25 mm și un punct M(60, 30, z_M) aparținând cilindrului. Se cere:
a) să se desfășoare cilindrul;
b) să se ducă prin punctul M(m, m') un plan tangent [T] la cilindru.

6.28. Să se determine secțiunea făcută de planul de nivel [N] cu un con circular cu baza situată în planul vertical de proiecție. Se cunosc: O_1(110, 0, 40); R = 30 mm; S(30, 40, 90); N_z = 55mm. Să se construiască desfășurata trunchiului de con cuprinsă între planul de nivel și planul orizontal de proiecție.

6.29. Se consideră un con circular de rază R = 30 mm, centrul cercului de bază în punctul O_1(80, 65, 0) și vârful S(5, 80, 65). Se dă planul de capăt [P]: OP_x = 20, OP_y = ∞, OP_z = -20 și dreapta D(d, d'): A(50, 40, 30); B(110, 30, 10). Se cere să se construiască desfășurata trunchiului de con cuprins între planul orizontal și planul de capăt [P], iar apoi să se determine punctele de intersecție dintre dreapta (D) și con.

6.30. Se dă cilindrul fronto-orizontal cu centrele în O_1(30, 35, 0); O_2(30, 35, 90) și raza cercului de bază R = 25 mm. Să se construiască secțiunea plană obținută la intersecția acestuia cu un plan de capăt.

6.31. Se dă conul circular cu baza un cerc cu centrul în punctul O_1(50, 40, 0), de rază R = 25 mm și vârful S(10, 40, 70). Să se determine punctele de intersecție dintre con și o dreaptă frontală $D_1(d_1, d_1')$ cu urma orizontală H(110, 20, 0) și a cărei proiecție verticală face cu linia de pământ un unghi de 60°.

6.32. Se consideră conul oblic cu baza un cerc situat în planul orizontal de proiecție, cu centrul în punctul O_1(35, 30, 0), raza cercului de bază R = 20 mm, iar vârful conului este situat în punctul S(5, 10, 40). Se cere să se desfășoare conul oblic.

6.33. Să se determine punctele în care dreapta D(d, d'), determinată de punctele M(20, 45, 35) și N(53, 23, 12), intersectează cilindrul circular oblic cu cercul de bază în planul orizontal de proiecție, având raza R = 20 mm și centrul O_1(30, 20, 0), și O_2(60, 55, 55).

Capitolul VII
SUPRAFEȚE NERIGLATE
SFERA

7.1. Fie sfera de rază R = 30 mm, cu centrul în punctul O_1(50, 40, 50) şi dreapta D(d,d'): A(100, 10, 80), B(10, 30, 10).
a) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D şi sferă şi să se studieze vizibilitatea dreptei;
b) Prin punctul M(35, y_M, 60) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;
c) Să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 5, OQy = ∞, OQz = -7 în sferă.

Rezolvare aplicația 7.1

Pentru rezolvarea acestor tipuri de probleme se folosesc metodele geometriei descriptive (rabaterea sau schimbarea planelor de proiecție). O dreaptă intersectează o sferă în două puncte, astfel putem avea două cazuri diferite, un caz în care dreapta nu trece prin centrul sferei, și al doilea caz în care dreapta trece prin centrul sferei. În continuare vom analiza soluția pentru rezolvarea problemei de mai sus, caz în care dreapta oarecare nu trece prin centrul sferei.

Pentru rezolvarea punctului a) se rabate dreapta D pe planul de nivel [N] care trece prin centrul sferei. Axa de rabatere este orizontala g. Punctul a rămâne propriul punct rabătut, deoarece axa de rabatere trece exact prin el, iar pentru determinarea punctului b_0 avem nevoie de triunghiul de rabatere, astfel din proiecția b se trasează o paralelă și o perpendiculară pe axa de rabatere. Lungimea paralelei este dată de cota punctului până la planul de nivel [N]. Piciorul perpendicularei se notează cu ω. Din punctul b_1 se duce un arc de cerc, cu centrul în ω până intersectează perpendiculara dusă din b, iar la intersecția celor două rezultă proiecția b_0. Astfel d_0 = a_0ub_0, planul de nivel taie sfera după cercul ecuator și dreapta rabătută d_0 și intresectează sfera în punctele 1_0 și 2_0. Ridicăm din rabatere aceste puncte ducând perpendiculare pe axa de rabatere și se prelungesc până pe proiecția d, obținând astfel punctele 1 și 2. Din cele două puncte se duc linii de ordine în planul vertical și se determină astfel punctele 1' și 2' pe proiecția verticală d'. Aceste puncte sunt de altfel și punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și sferă.

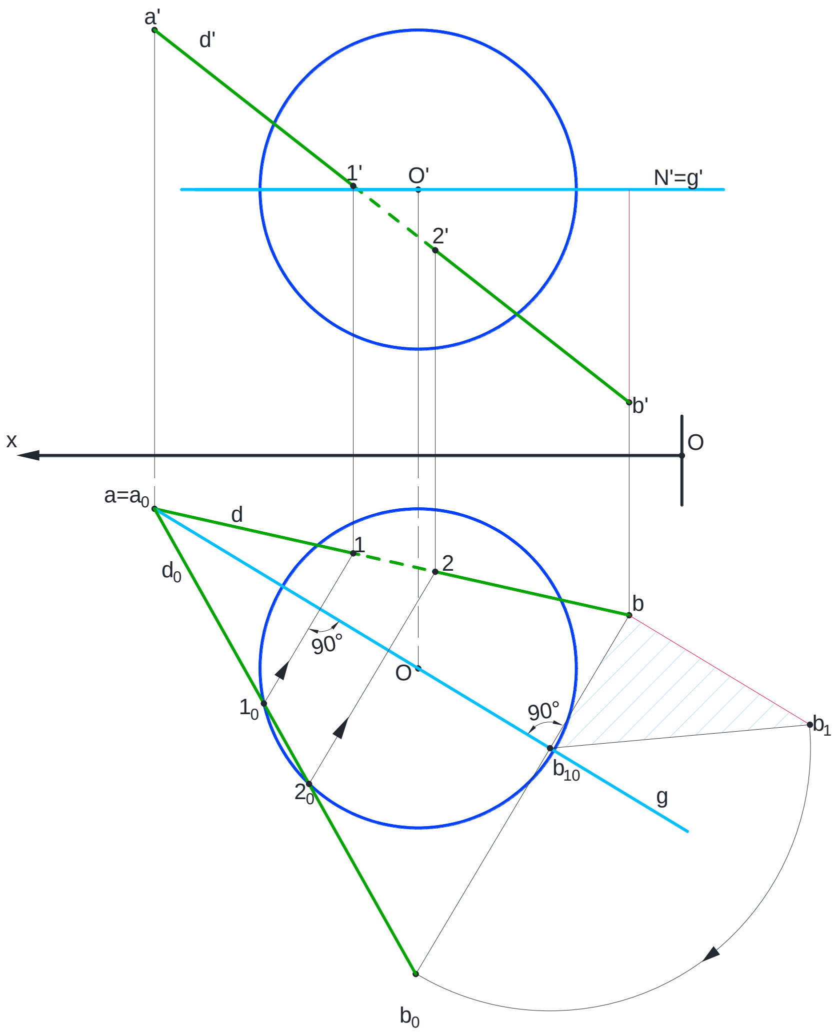


Fig. 7.1 a) Intersecția sferei cu o dreaptă oarecare care nu trece prin centrul sferei

Pentru rezolvarea punctului b) planul tangent la o suprafață sferică are un punct comun cu sfera și totodată planul tangent este perpendicular pe raza care trece prin punctul de tangență. Planul tangent care se duce la o sferă se poate trasa printr-un punct care aparține sferei, sau un alt caz în care planul tangent se duce la sferă printr-un punct exterior (care nu aparține sferei) sferei.

Pentru a putea trasa cele două urme ale planului tangent [T] la sferă, plan dus prin punctul M(m, m') situat pe suprafața sferei, se folosește o dreaptă orizontală D(d, d') a acestui plan. Planul tangent este perpendicular pe raza sferei, proiecția orizontală notată cu d a orizontalei se va trasa prin punctul M(m, m'), perpendiculară pe raza om. Intersecția orizontalei cu axa Ox determină urma v. Se va determina apoi urma verticală V(v, v') a dreptei orizontale și prin această proiecție verticală v' se va trasa urma verticală T' a planului tangent. Această urmă verticală a planului tangent T' este perpendiculară pe raza o'm' în planul vertical de proiecție. Urma orizontală a planului tangent T va trece prin T_x și va fi paralelă cu proiecția orizontală d a dreptei orizontale.

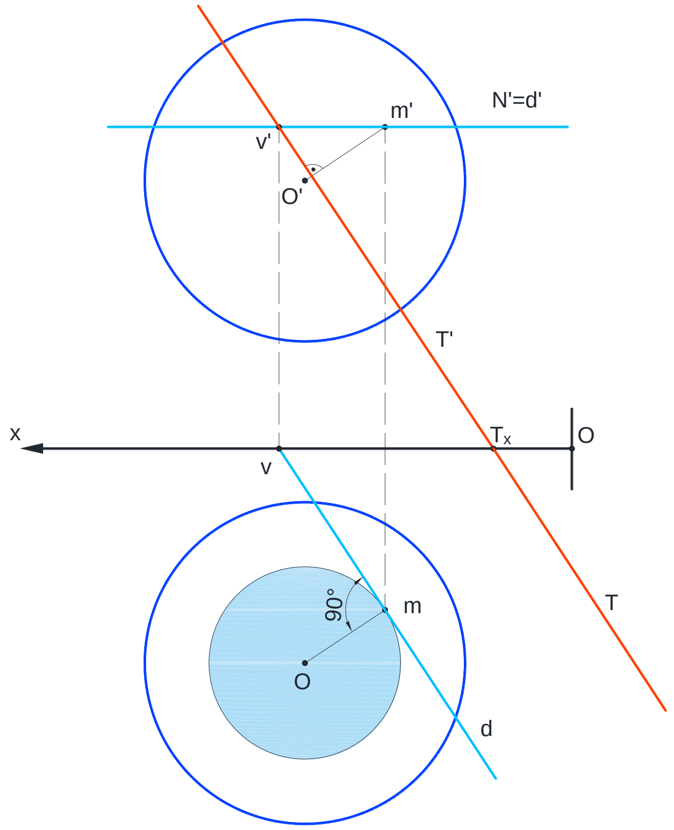


Fig. 7.1 b) Plan tangent printr-un punct M(m, m'), pe suprafața sferei

Pentru rezolvarea punctului c), caz în care sfera este secționată cu un plan de capăt [Q], cercul de secțiune se va determina în proiecția verticală după segmentul 1'2', care este suprapus peste urma verticală Q', dat de punctele în care planul intersectează cercul meridian. Acesta este de altfel diametrul cercului de secțiune, este reprezentat în adevărată mărime și este paralel cu planul vertical [V] de proiecție. Axa 12 reprezintă axa mică a elipsei, iar axa mare a elipsei, 34, este situată pe dreapta de capăt $D_1(d_1, d_1')$, care trece prin centrul $O_1(o_1, o_1')$. Pentru determinarea ei se va folosi planul de nivel $[N_1]$, dus prin punctul O_1', $o_1' \epsilon N_1'$, care secționează sfera după cercul c, $d_1 \cap c=3$, $d_1 \cap c=4$.

Pentru a trasa elipsa și în proiecția orizontală, trebuie trasate și punctele de pe conturul cercului ecuator, unde curba de secțiune își va schimba vizibilitatea. Se va trasa în continuare planul de nivel [N] dus prin centrul sferei, O'ϵN' și se determină punctele 5 și 6 proiecția orizontală a conturului aparent al sferei, prin intersecția acestuia cu dreapta de capăt d. Această dreaptă de capăt rezultă din intersecția planului de capăt [Q] cu planul de nivel [N].

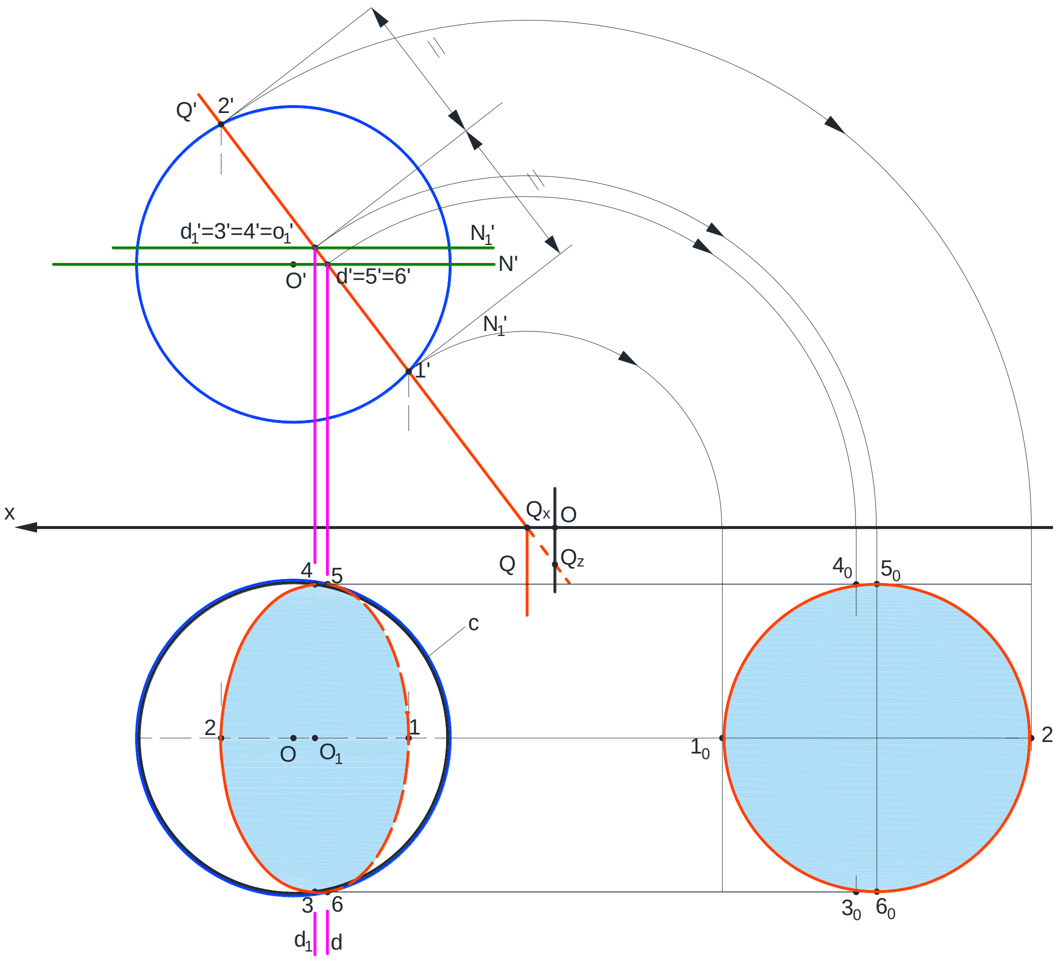


Fig. 7.1 c) Intersecția sferei cu un plan de capăt [Q]

7.2. Se consideră sfera de rază R = 30 mm, cu centrul în punctul O(50, 40, 50).

a) Prin punctul M(65, y_M, 60) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d,d'), care trece prin centrul sferei şi prin punctul A(90, 80, 10), exterior sferei şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secţiunea făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 70, OQy = ∞, OQz = 80 în sferă şi să se determine adevărata mărime a acesteia.

Rezolvare aplicația 7.2

Pentru rezolvarea punctului a) se procedează astfel: punctul M fiind situat pe suprafața sferei se folosește o orizontală G(g, g'), orizontală dusă prin proiecția m'. Orizontala g' este suprapusă peste urma planului N' în planul vertical. Se măsoară raza o'm' și cu această rază se trasează în planul orizontal un cerc de rază om. Tangent la aceast cerc și perpendicular pe raza om se trasează prin proiecția m orizontala g. Această orizontală va intersecta linia de pământ în punctul v (care reprezintă urma verticală a orizontalei g, punct de depărtare zero).

Trasăm linie de ordine în planul vertical până pe planul de nivel N' și se obține urma verticală v'. Prin v' se va trasa urma verticală a planului tangent T', urmă care este și perpendiculară pe raza o'm'.

Pe linia de pământ se determină punctul T_x, iar urma orizontală T a planului tangent se va trasa din T_x și va fi paralelă cu orizontala g.

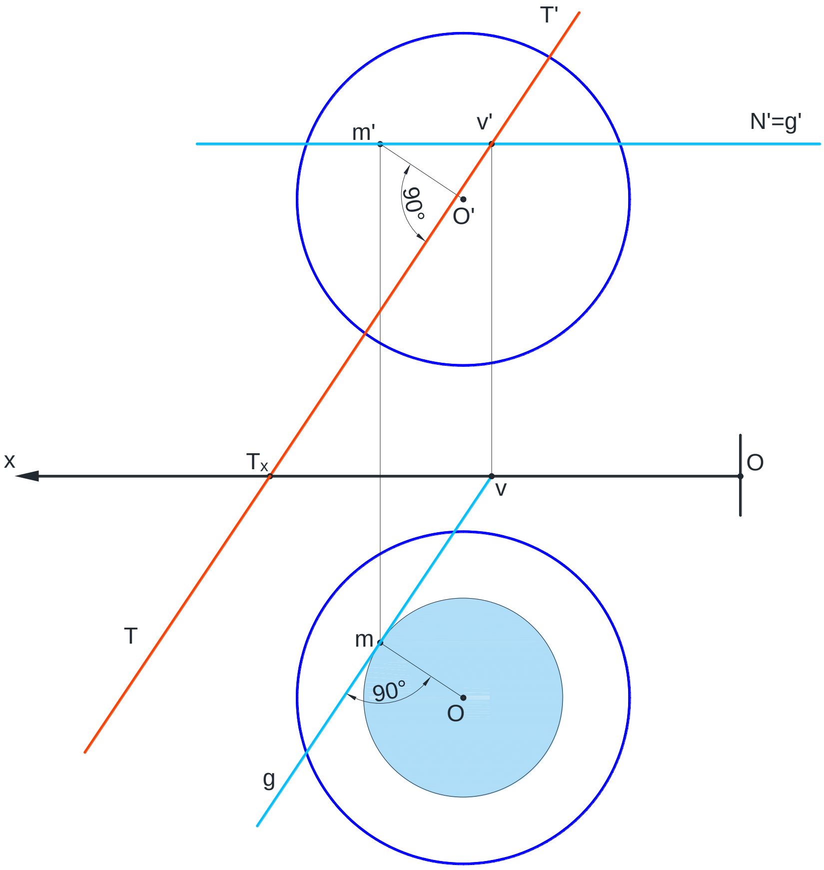


Fig. 7.2 a) Plan tangent printr-un punct M(m, m'), pe suprafața sferei

Pentru rezolvarea punctului b) se folosește un plan de front [F] care trece prin centrul sferei. Proiecția sferei în planul vertical de proiecție este cercul meridian obținut prin secționarea sferei cu planul de front. Printr-o rotație de nivel, luând axa de rotație Z(z, z') prin centrul sferei, se transformă dreapta D în frontala $D_1(d_1, d_1')$, conținută în planul [F], cu ajutorul punctului A(a, a'). Cercul meridian și dreapta D_1 sunt coplanare și se intersectează în punctele $1_1'$ și $2_1'$.

Dacă revenim din rotație, în proiecție verticală se vor obține proiecțiile 1' și 2' pe proiecția d', iar apoi cu linii de ordine se vor determina și proiecțiile orizontale 1 și 2 pe proiecția orizontală d.

Punctele (1, 1') și (2, 2') sunt punctele în care dreapta D(d, d') intersectează sfera.

În proiecția orizontală, dreapta va fi invizibilă de la conturul aparent până în punctul 2, iar în proiecția verticală, dreapta va fi invizibilă între punctele 1' și 2'.

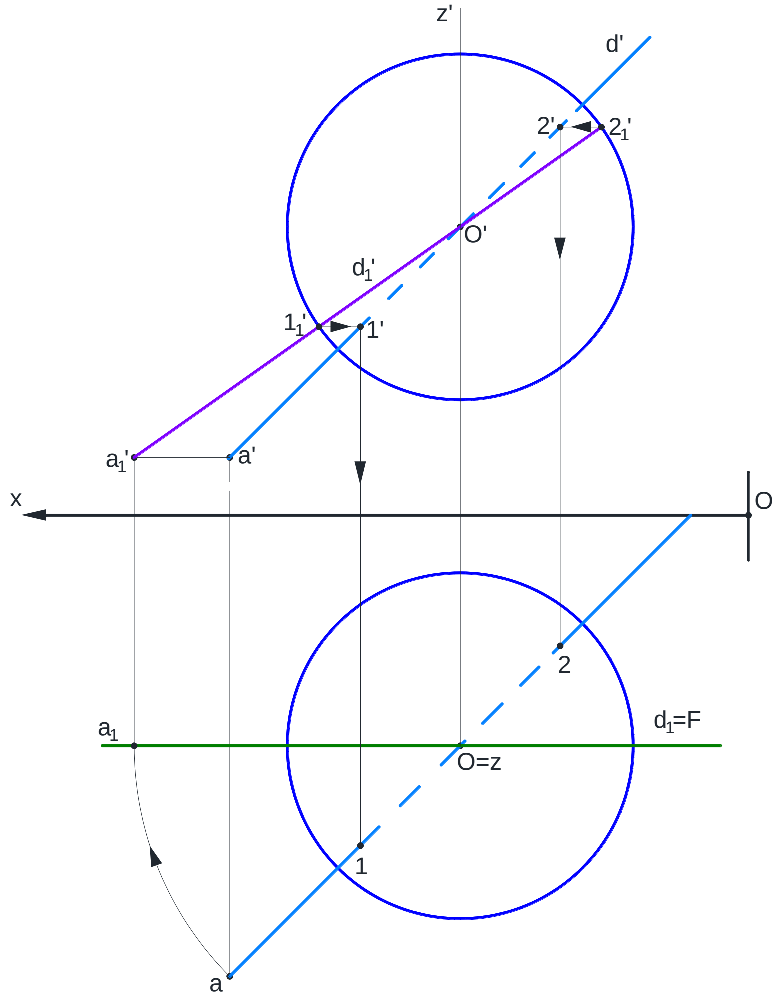


Fig. 7.2 b) Intersecția sferei cu o dreaptă care trece prin centrul sferei

Pentru rezolvarea punctului c) și anume determinarea adevăratei mărimi a secțiunii făcută de un plan de capăt [Q] în sferă, cercul de secțiune se va determina în proiecția verticală prin segmentul 1'2', care este suprapus peste urma verticală Q', dat de cele două puncte în care planul de capăt intersectează cercul meridian. Acesta este diametrul cercului de secțiune și este în adevărată mărime.

În proiecția orizontală 12 reprezintă axa mică a elipsei după care se proiectează cercul de secțiune. Axa mare a elipsei, punctele 56, este situată pe dreapta de capăt $D_1(d_1, d_1')$, care trece prin centrul $O_1(o_1, o_1')$ al secțiunii ($1'o_1' = o_1'2'$), iar pentru determinarea ei în proiecția orizontală, se va utiliza planul de nivel $[N_1]$, dus prin centrul sferei O_1', $o_1' \epsilon N_1'$, care secționează sfera după cercul $d_1 \cap c = 5$, $d_1 \cap c = 6$.

Se va trasa și planul de nivel [N] dus prin centrul sferei și se va determina punctele 3' și 4'. Se duc linii de ordine în planul orizontal și se vor determina proiecțiile punctelor 3 și 4 pe conturul aparent al sferei.

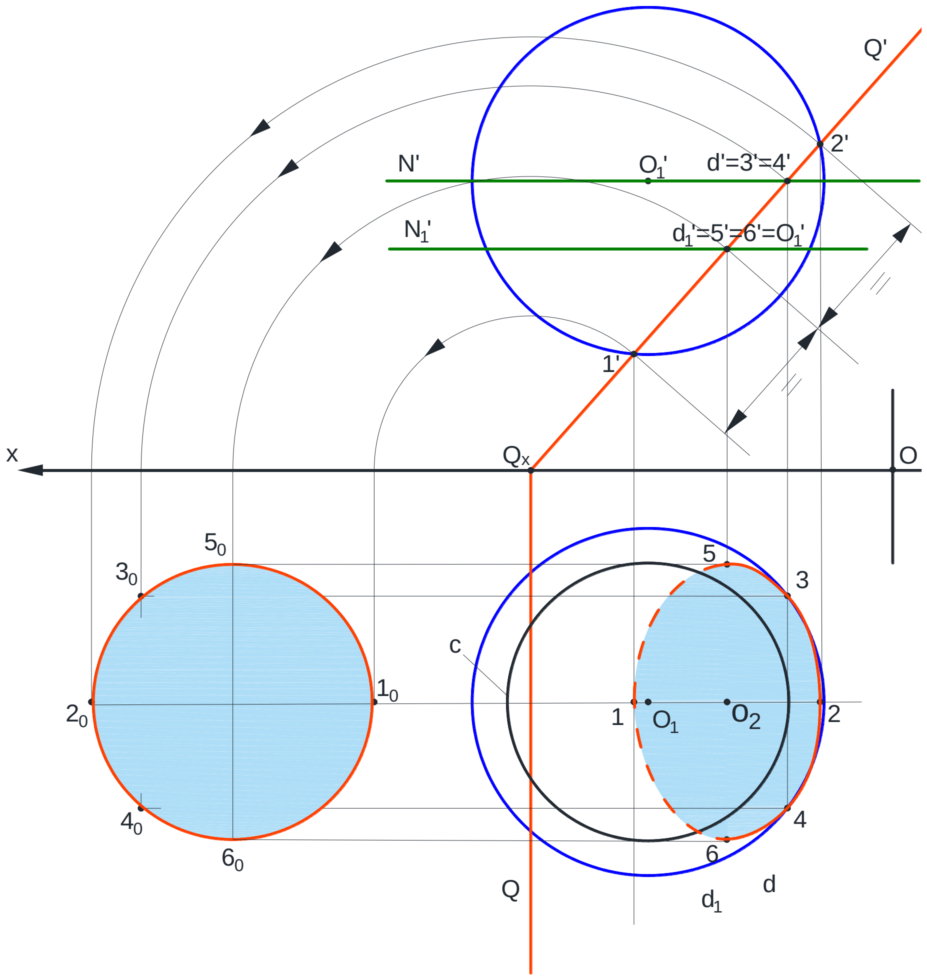


Fig. 7.2 c) Intersecția sferei cu un plan de capăt [Q]

7.3. Fie sfera de rază R = 35 mm, cu centrul în punctul O_1(60, 40, 50) şi dreapta D(d,d'): A(20, 20, 10), B(110, 30, 50).
a) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D şi sferă şi să se studieze vizibilitatea dreptei;
b) Prin punctul M(80, y_M, 70) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;
c) Să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 90, OQy = ∞, OQz = 110 în sferă.

Rezolvare aplicația 7.3a), b), c)

Se reprezintă în epură punctele A(a, a'), B(b, b') care determină dreapta D(d, d'), iar apoi se reprezintă punctul O, punct care reprezintă centrul sferei. Pentru a găsi punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și sferă se folosește metoda rabaterii pe un plan de nivel, astfel se trasează un plan de nivel prin centrul sferei, iar suprapus peste planul de nivel avem și dreapta orizontală g'.

Planul de nivel intersectează proiecția dreptei d' în punctul b'. În plan orizontal se va trasa din proiecția b orizontala g care trece prin centrul sferei.

Această orizontală g este axa de rabatere.

Astfel, din punctul a se trasează pe axa de rabatere g o perpendiculară și o paralelă. Piciorul perpendicularei îl notăm cu ω, iar lungimea dreptei paralele aa_1 este cota punctului A până la planul de nivel N. Se formează triunghiul de rabatere $a\omega a_1$. Se trasează cu vârful compasului în ω un arc de cerc din a_1 până la întâlnirea cu perpendiculara aω și se obține punctul a_0. Punctul b_0 coincide cu b deoarece punctul b este propriul lui punct rabătut. Se unește b_0 și a_0 și se obține dreapta rabătută. Această nouă dreaptă obținută intersectează sfera în punctele 1_0 și 2_0. Din cele două puncte se duc perpendiculare pe axa de rabatere g până la intersecția cu dreapta d, astfel se determină punctele 1 și 2.

Aceste puncte sunt punctele de intersecție dintre dreapta D(d, d') și sferă. Se duc linii de ordine în planul vertical de proiecție si se găsesc proiecțiile 1' și 2'.

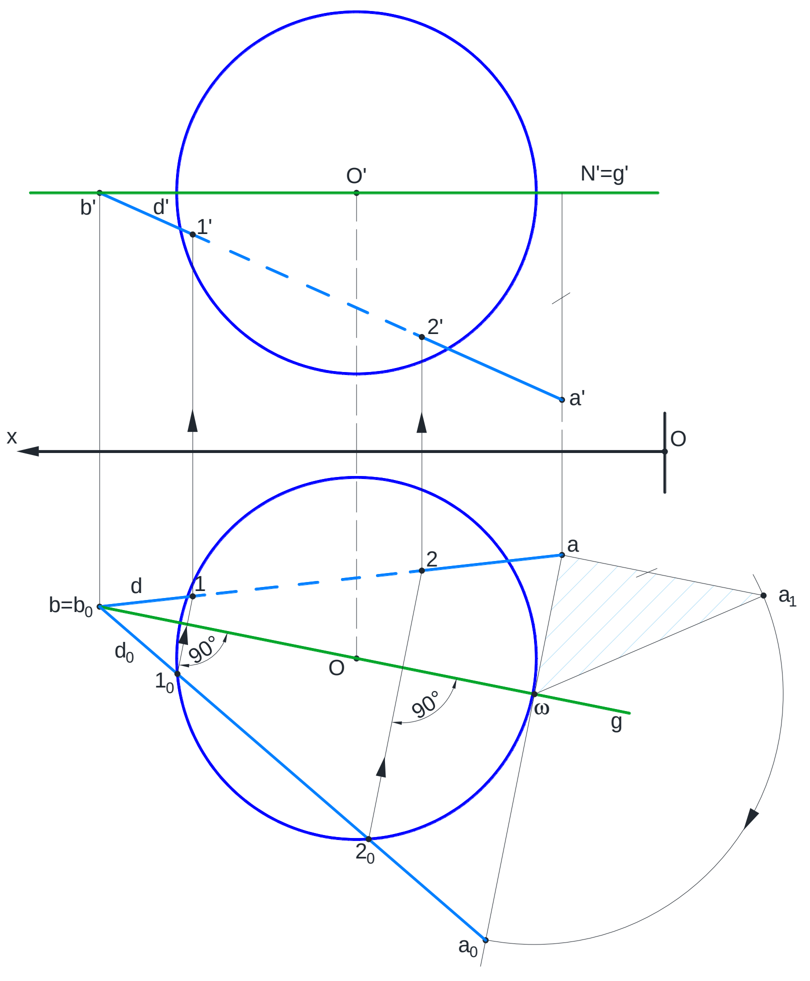


Fig. 7.3 a) Intersecția sferei cu o dreaptă oarecare care nu trece prin centrul sferei

Pentru rezolvarea punctului b), problema este asemănătoare cu problema 7.2. Determinăm din datele problemei proiecția m' pe suprafața sferei și măsurăm raza o'm'.

Se reprezintă cu această rază un cerc în planul orizontal, cerc care va fi concentric cu conturul sferei. Se trasează linie de ordine din proiecția m' și se determină și proiecția m în planul orizontal, prin care se va trasa orizontala g. Această orizontală g este perpendiculară pe raza om. Se determină apoi urma verticală v, punct de depărtare zero. Se trasează apoi linie de ordine în planul vertical și de determină v' pe orizontala g'.

Prin v' se trasează urma verticală T' a planului tangent, urmă care este perpendiculară pe raza o'm'. Urma T' intersectează linia de pământ în punctul T_x. În planul orizontal se trasează urma orizontală T a planului tangent paralelă cu orizontala g.

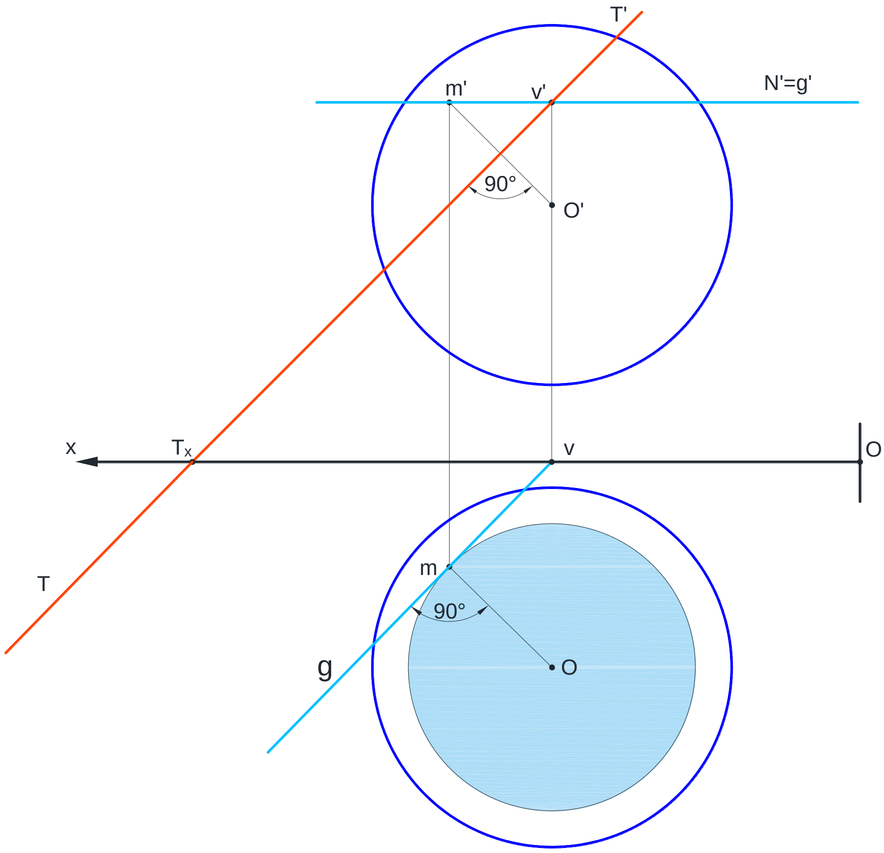


Fig. 7.3 b) Plan tangent printr-un punct M(m, m'), pe suprafața sferei

Pentru punctul c) se va proceda astfel: se trasează planul de capăt [Q] după datele din problemă. Secțiunea apare deformată după o elipsă. Astfel, în secțiunea verticală planul de capăt [Q] intersectează sfera după un cerc deformat după segmentul 1'2' care coincide cu urma Q'

În proiecția orizontală 12 reprezintă axa mică a elipsei după care se proiectează secțiunea.

Axa mare a elipsei, punctele 56, este situată pe dreapta de capăt $D_1(d_1, d_1')$, care trece prin centrul $O_1(o_1, o_1')$ al secțiunii $(1'o_1' = o_1'2')$, iar pentru determinarea ei în proiecția orizontală, se va utiliza planul de nivel $[N_1]$, dus prin centrul sferei O_1', $o_1' \epsilon N_1'$, care secționează sfera după cercul $d_1 \cap c = 5$, $d_1 \cap c = 6$.

Se va trasa și planul de nivel [N] dus prin centrul sferei și se va determina punctele 3' și 4'. Se duc linii de ordine în planul orizontal și se vor determina proiecțiile punctelor 3 și 4 pe conturul aparent al sferei, prin intersecția acestuia cu dreapta d, care rezultă din intersecția planului de capăt [Q] cu planul de nivel [N].

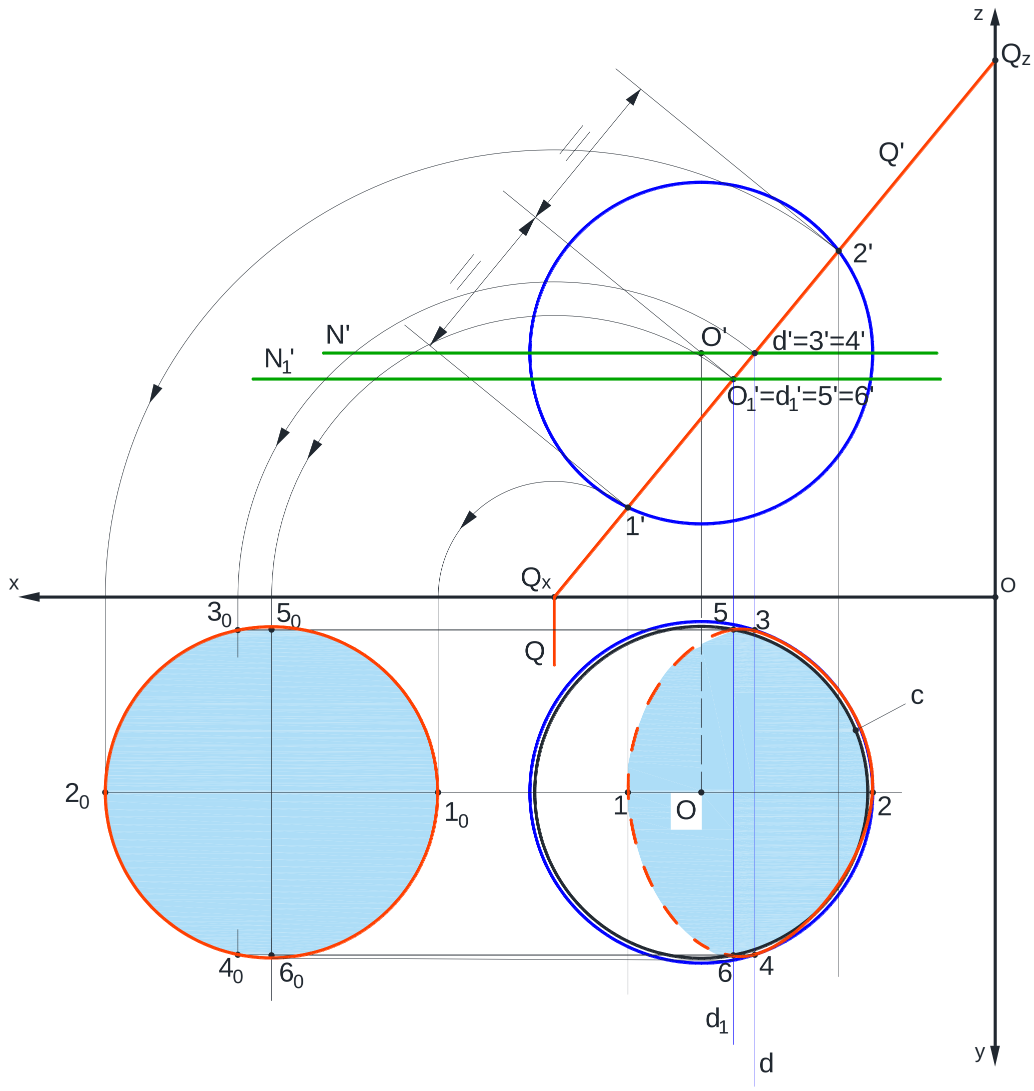


Fig. 7.3 c) Intersecția sferei cu un plan de capăt [Q]

7.4. Fie sfera de rază R = 35 mm, cu centrul în punctul O(80, 40, 50) şi dreapta D(d,d'): A(120, 20, 10), B(30, 30, 50).

a) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D şi sferă şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

b) Prin punctul M(60, y_M, 70) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

c) Să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 50, OQy = ∞, OQz = -60 în sferă.

Rezolvare aplicația 7.4

Pentru determinarea punctelor în care dreapta D(d,d') intersectează sfera (punctul a) cu centrul în punctul O(o,o'), se face utilizând metoda schimbării planului de proiecţie vertical. Astfel, dreapta D(d,d') se transformă în dreapta $D_1(d_1,d_1')$, care este o frontală, luând noua linie de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecţia d.

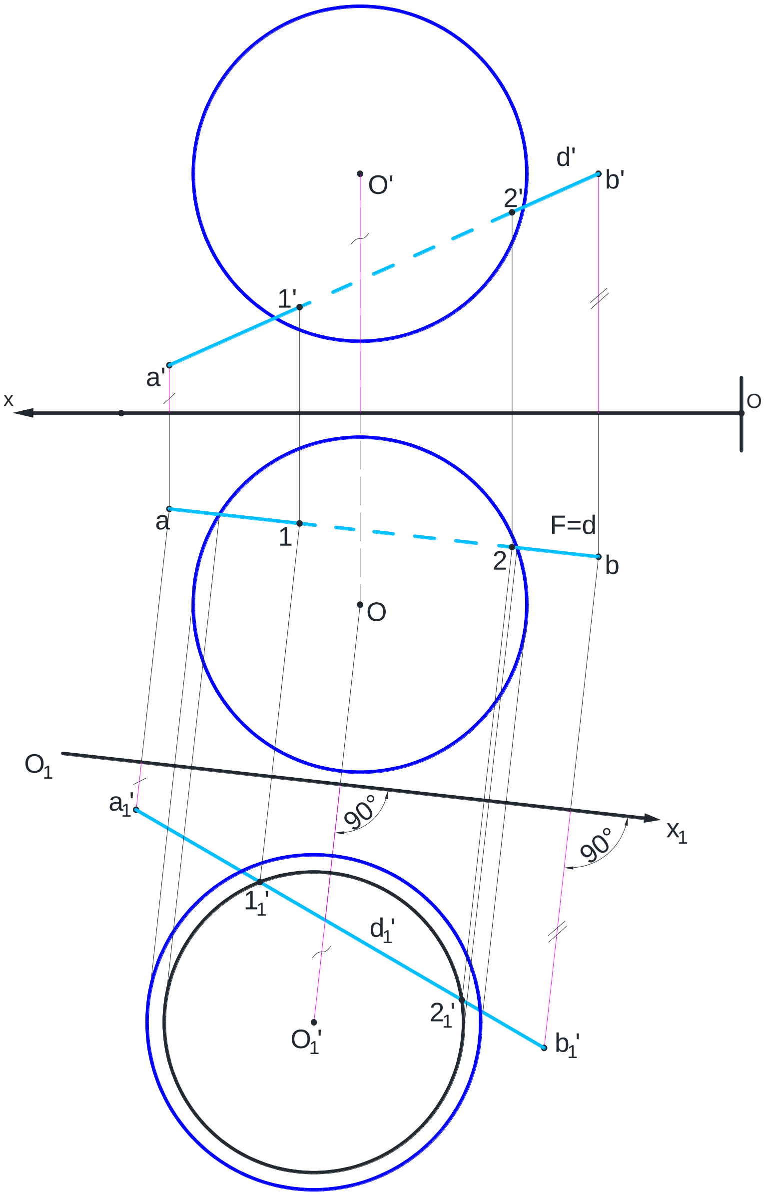


Fig. 7.4 a) Intersecția sferei cu o dreaptă oarecare care nu trece prin centrul sferei

Se secţionează sfera cu un plan de front [F], ce conţine proiecţia d. Cercul de secţiune obţinut se proiectează pe noul plan vertical de proiecţie în adevărată mărime, concentric cu proiecţia sferei în O_1'. Proiecţia verticală d_1' intersectează cercul de secţiune în punctele $1_1'$ şi $2_1'$. Revenind din schimbarea de plan, în sistemul iniţial de proiecţie, se obţin punctele (1,1') şi (2,2'), puncte în care dreapta D(d,d') intersectează sfera.

Vizibilitatea dreptei D(d,d'), în ambele proiecţii, rezultă analizând poziţia punctelor de intersecţie pe sferă.

Pentru a determina urmele planului tangent la sferă (punctul b) se reprezintă proiecția punctului M(m, m'), iar prin proiecția m' se trasează planul de nivel [N]. În planul de nicel [N] se construiește dreapta care trece prin punctul M. Din proiecția m' se coboară linie de ordine în planul orizontal de proiecție și se determină proiecția m pe conturul sferei dată de raza om (în planul vertical o'm').

Perpendicular pe raza om se trasează proiecția orizontala d, care va intersecta linia de pământ în proiecția v (urma verticală a dreptei, punct de depărtare zero). Se determină proiecția v' în planul vertical. Prin urma verticală a dreptei se trasează urma verticală a planului tangent T', urma verticală care este perpendiculară pe raza o'm'. Se obține intersecția cu linia de pământ, proiecția T_x, iar în planul orizontal se va trasa urma orizontală a planului tangent, care va fi paralelă cu dreapta d.

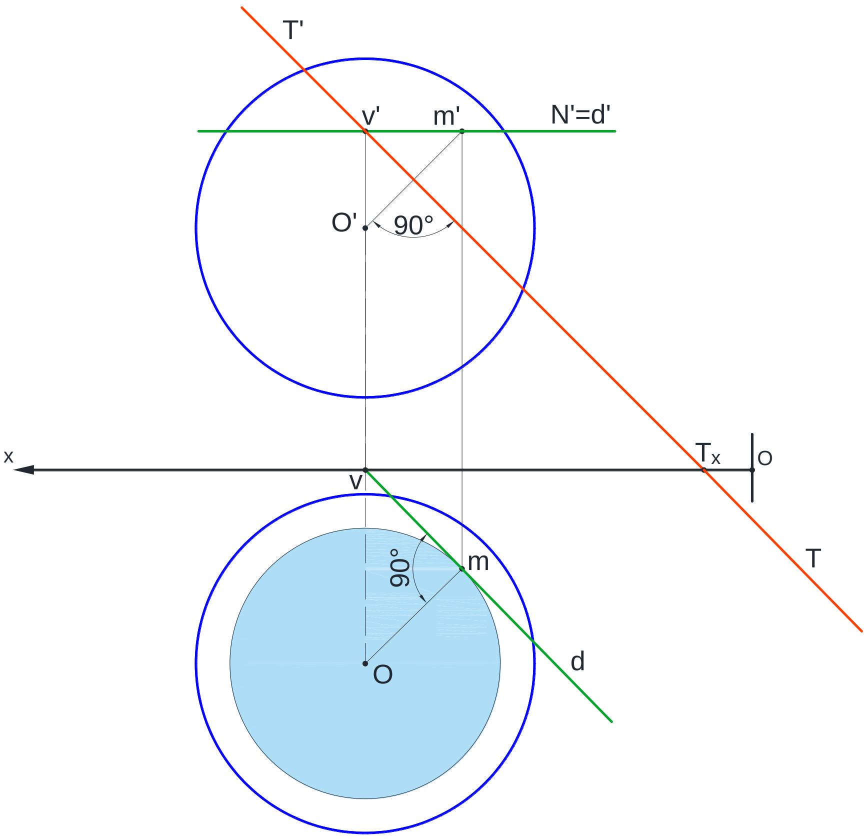


Fig. 7.4 b) Plan tangent printr-un punct M(m, m'), pe suprafața sferei

Pentru rezolvarea punctului c) intersecția sferei cu un plan de capăt se reprezintă sfera și planul de capăt după datele din problemă. Se reprezintă cele două plane de nivel [N] și [N_1], plane care intersectează urma planul [Q] în punctele 3'4' (planul de nivel [N] care trece prin centrul sferei) și punctele 5'6'.

În planul orizontal se trasează cercul c de rază 1'o_1', iar pe acest cerc se vor amplasa proiecțiile 56.

Se obțin dreptele d și d_1 care vor determina în planul orizontal punctele de pe sferă 34 și respectiv 56. De altfel, punctele 56 sunt punctele de pe axa mare a elipsei, iar punctele 12 formează axa mică a elipsei.

Se rabat punctele din planul vertical 1',2',3',4',5',6' și se obține adevărata mărime a secțiiunii făcută de planul [Q] în sferă $1_0,2_0,3_0,4_0,5_0,6_0$.

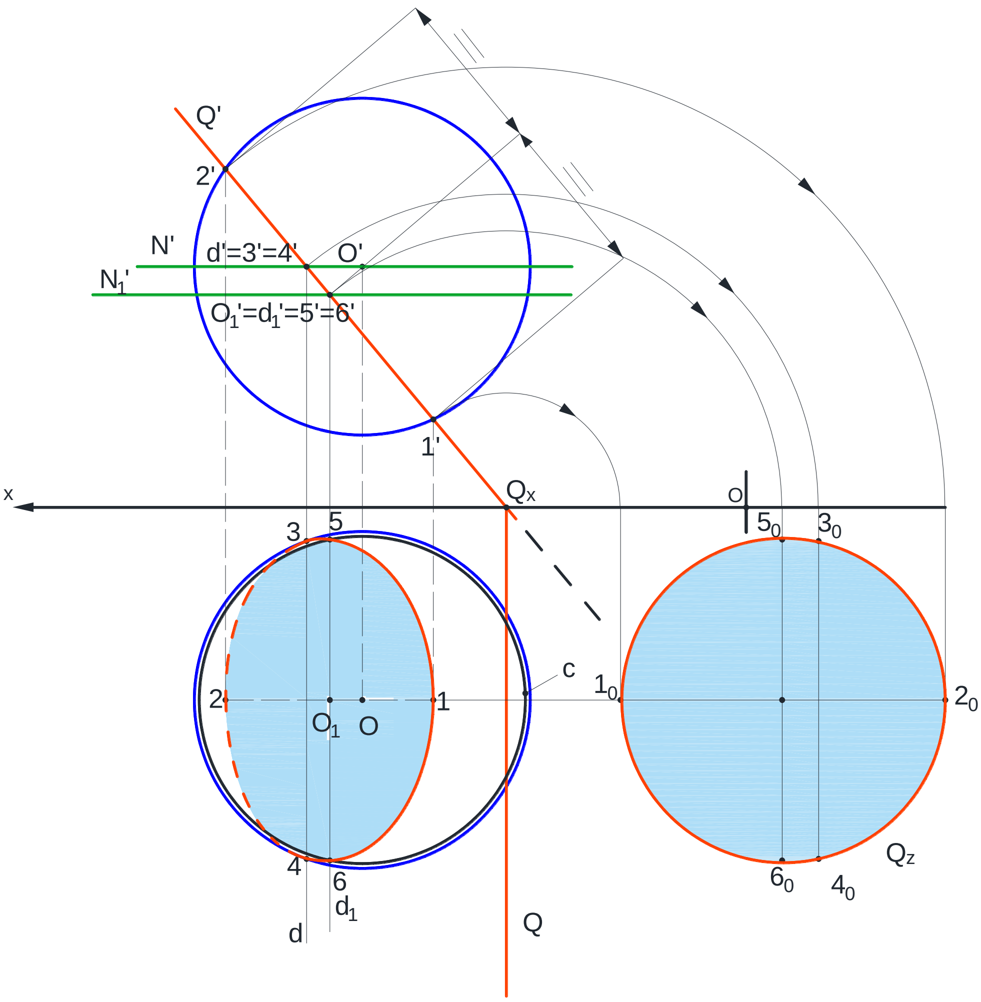


Fig. 7.4 c) Intersecția sferei cu un plan de capăt [Q]

Probleme propuse

7.5. Se consideră sfera de rază R = 35 mm, cu centrul în punctul O(70, 50, 30).

a) Prin punctul M(60, 25, z_M) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d,d'), care trece prin centrul sferei şi prin punctul A(120, 10, 70), exterior sferei şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secţiunea făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 110, OQy = ∞, OQz = 45 în sferă şi să se determine adevărata mărime a acesteia.

7.6. Se consideră sfera de rază R = 35 mm, cu centrul în punctul O(90, 70, 50).

a) Prin punctul M(100, 45, z_M) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d,d'), care trece prin centrul sferei şi prin punctul A(40, 20, 90), exterior sferei şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secţiunea făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 50, OQy = ∞, OQz = -30 în sferă şi să se determine adevărata mărime a acesteia.

7.7. Fie sfera de rază R = 30 mm, cu centrul în punctul O(70, 50, 60) şi dreapta D(d,d'): A(20, 20, 90), B(110, 40, 20).

a) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D şi sferă şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

b) Prin punctul M(50, y_M, 70) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

c) Să se determine adevărata mărime a secţiunii făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 110, OQy = ∞, OQz = 75 în sferă.

7.8. Se consideră sfera de rază R = 30 mm, cu centrul în punctul O(80, 50, 60).

a) Prin punctul M(65, y_M, 70) de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecţie dintre dreapta D(d,d'), care trece prin centrul sferei şi prin punctul A(40, 90, 20), exterior sferei şi să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secţiunea făcută de planul de capăt [Q]: OQx = 60, OQy = ∞, OQz = -65 în sferă şi să se determine adevărata mărime a acesteia.

BIBLIOGRAFIE

1. Bodea, S., Crişan, N.-I., Enache, I., (2003), Geometrie descriptivă, Editura RISOPRINT, ISBN 973- 656-353-7, Cluj-Napoca
2. Bodea, S, (2006), Geometrie descriptivă, Editura Risoprint, ISBN973-656-353-7, Cluj-Napoca
3. Bodea, S., Scurtu, L. I. (2016), Geometrie Descriptivă și Desen tehnic, Editura Risoprint, ISBN: 978-973-53-1902-1, Cluj-Napoca
4. Bodnărescu, H. (1956), Culegere de probleme de geometrie descriptivă I, Editura Tehnică, București
5. Botez, M. Ș. (1965), Geometrie Descriptivă, Editura Didactică și Pedagogică București
6. Crişan, N.-I., Stănescu, G., Bodea, S., Sava, R., Enache, I., (2004), Bazele geometriei descriptive, Editura Universitaria Craiova, ISBN 973-8043-584-4, Craiova
7. Drăgan, D., (2016), Geometrie descriptivă și desen tehnic de construcții, Ediția a 2-a, Editura U.T.Press, Cluj-Napoca
8. Drăgan, D., Bărbînță D. (2018), Geometrie descriptivă, Ediția a 5-a rev. Și completată, Editura U.T.Press, Cluj-Napoca
9. Drăgan, D., Nerișanu, R. (2022), Geometrie Descriptivă, Teorie și aplicații, ISBN 978-606-737-589-3, Editura UTPRESS, Cluj-Napoca
10. Mirescu, N., Nicoară, Gh., (1961), Geometrie descriptivă, Editura de Stat Didactică și Pedagogică, București
11. Moga, G. (1985), Geometrie Descriptivă, probleme
12. Moncea, J. Săucan, Al., (1970), Geometrie descriptivă și desen tehnic, Editura Didactică și Pedagogică, București
13. Moncea, J. (1982), Geometrie descriptivă și desen tehnic, Editura Didactică și Pedagogică București
14. Orban, M. (2004), Geometrie Descriptivă, Sinteze și aplicații, Editura UTPRESS, ISBN 973-662-020-4, Cluj-Napoca
15. Orban, M. (2008), Proiecții și metode de transformare a proiecțiilor, Editura Casa Cărții de Știință, ISBN 978-973-133-393-9, Cluj-Napoca
16. Precupețu, P., Dale, C. (1987), Probleme de geometrie descriptivă cu aplicații în tehnică, Editura Tehnică, București
17. Tănăsescu, A. (1967), Geometrie Descriptivă Probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București