# Elemente de Algebră Liniară

LÁSZLÓ SZILÁRD CSABA

PETER IOAN RADU

TIMBOŞ LIANA

VIOREL ADRIAN

**UTPRESS**
**Cluj-Napoca, 2023**
**ISBN 978-606-737-642-5**

Csaba Szilárd LÁSZLÓ
Radu Ioan PETER
Liana TIMBOȘ
Adrian VIOREL

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

UTPRESS
Cluj - Napoca, 2023
ISBN 978-606-737-642-5

Editura UTPRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Director: Ing. Dan Colțea

Recenzia: Prof.dr. Dorian Popa
Prof.dr. Ioan Rașa

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza


Tiparul executat la Tipografia UTCN.

ISBN 978-606-737-642-5
Bun de tipar: 31.05.2023

# Cuprins

# Prefaţă

Scopul acestei cărţi este să ofere o introducere în Algebra Liniară, şi în acelaşi timp să furnizeze o perspectivă asupra conceptelor care sunt utile în diverse aplicaţii.

Deoarece cititorul vizat este considerat a fi cel mai probabil la nivel de licenţă, sau chiar fără experienţă în algebra abstractă, încercăm să construim o abordare care este autonomă şi directă. Vom realiza acest lucru prin includerea demonstraţiilor simple dar detaliate ale aproape tuturor rezultatelor. În plus, rezolvarea completă a unor probleme şi exemplele ce însoţesc prezentarea noilor concepte şi rezultate, împreună cu o secţiune care conţine probleme propuse la sfârşitul fiecărui capitol vor face lectura mai accesibilă.

Cartea este structurată în 8 capitole care încep prin reamintirea noţiunilor fundamentale ale matricelor (Capitolul 1), înainte de a intra în nucleul cărţii (Capitolele 3,4 şi 5) care acoperă vectori, aplicaţii liniare între spaţii vectoriale şi probleme de valori proprii. Următoarele două capitole se ocupă cu cazul spaţiilor vectoriale care sunt înzestrate cu produs scalar (Capitoul 5) şi operatori pe spaţii cu produs scalar (Capitolul 6). Capitolul 7 ne oferă o informare asupra geometriei analitice a curbelor şi suprafeţelor. Ultimul capitol prezintă o serie de aplicaţii şi probleme rezolvate referitoare la conţinutul teoretic al cărţii.

În ultimul rând, dar nu cel din urmă, autorii doresc să mulţumească cu recunoştinţă pentru sprijinul acordat domnilor Prof. Ioan Raşa şi Prof. Dorian Popa care au citit cu atenţie manuscrisul la diferite etape şi care au sugerat îmbunătăţiri valoroase.

# 1

# Matrice

## 1.1 Definiţii, operaţii şi proprietăţi.

**Definiţia 1.1.** *O matrice de dimensiune $m \times n$ cu elemente într-un corp $\mathbb{F}$, (unde de obicei $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, sau $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), este o funcţie $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}$,*

$$A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{F}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},\ j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

De obicei o matrice $m \times n$ este reprezentată ca şi o tabelă cu $m$ linii şi $n$ coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, elementele matricii $A$ sunt notate prin $a_{ij}$, unde $a_{ij}$ arată elementul care se află pe linia $i$ şi pe coloana $j$ a lui $A$ (acesta fiind denumit ca intrarea $(i, j)$ a matricii $A$) iar matricea este notată ca $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Vom nota $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ mulţimea tuturor matricelor $m \times n$ cu valori în $\mathbb{F}$ respectiv, dacă $m = n$ prin $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Merită să menţionăm că elementele mulţimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ sunt numite matrici pătratice. În cele ce urmează, vom da câteva exemple.

**Exemplul 1.2.** Considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } B = \begin{pmatrix} i & 2+i & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & -1+3i \end{pmatrix},$$

unde $i$ este unitatea imaginară.

Atunci $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, sau cu alte cuvinte, $A$ este o matrice pătratică cu valori reale, în timp ce $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, sau cu alte cuvinte, $B$ este o matrice cu două linii şi trei coloane cu elemente numere complexe.

În cele ce urmează vom prezenta câteva matrici speciale.

**Exemplul 1.3.** Considerăm matricea $I_n = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), a_{ij} = 1,$ dacă $i = j$ şi $a_{ij} = 0$ altfel. Aici $1 \in \mathbb{F}$, respectiv $0 \in \mathbb{F}$, sunt elementul neutru al înmulţirii respectiv elementul zero al corpului $\mathbb{F}$.

Atunci

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

şi se numeşte *matricea identitate* (sau *matricea unitate*) de ordin $n$.

**Observaţia 1.4.** Câteodată notăm matricea unitate simplificat prin $I$.

**Exemplul 1.5.** Considerăm matricea $O = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ având toate intrările elementul zero al corpului $\mathbb{F}$. Atunci

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

şi se numeşte *matricea nulă* de ordin $m \times n$.

**Exemplul 1.6.** Considerăm matricele $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ date prin $a_{ij} = 0$ când $i > j$, respectiv $a_{ij} = 0$ pentru $i < j$. Atunci

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ respectiv } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sunt numite matrice *superior triunghiulară*, respectiv matrice *inferior triunghiulară.*

Dacă toate intrările cu excepţia diagonalei principale sunt zero, $A$ este numită o matrice *diagonală.* În acest caz avem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Adunarea matricelor.**

Dacă $A$ şi $B$ sunt matrici de tip $m \times n$, *suma* matricelor $A$ şi $B$ este definită ca fiind matricea $A + B$ de tip $m \times n$ obţinută prin adunarea intrărilor corespunzătoare. Prin urmare, operaţia de adunare este funcţia

$$+ : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}),$$

$$(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} + (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \forall\, (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}).$$

Cu alte cuvinte, pentru $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ suma lor se defineşte prin

$$C = A + B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$$

unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Proprietăţi ale Adunării Matricelor.**

Fie $O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ matricea nulă de ordin $m \times n$. Pentru o matrice dată $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ notăm prin $-X$ *inversa sa aditivă* (*opusa sa*), care este $-X = (-x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Pentru fiecare $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ următoarele proprietăţi au loc:

1. $A + B$ este şi ea o matrice de tip $m \times n$ (proprietatea de închidere).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietatea de asociativitate).
3. $A + B = B + A$ (proprietatea de comutativitate).
4. $A + O = O + A = A$ (identitatea aditivă).
5. $A + (-A) = (-A) + A = O$ (inversa aditivă).

Astfel, $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}), +)$ este un grup Abelian.

**Înmulţirea cu scalari.**

Pentru $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ şi $\alpha \in \mathbb{F}$ definim $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$. Aşadar, operaţia de *înmulţire cu scalari* este funcţia

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}),$$

$$\alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \forall\, \alpha \in \mathbb{F}, (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}).$$

**Proprietăţi ale Înmulţirii cu Scalari.**

Evident, pentru fiecare $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:

1. $\alpha A$ este o matrice de tip $m \times n$ (proprietatea de închidere).
2. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (proprietatea de asociativitate).
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (proprietatea de distributivitate a scalarilor faţă de adunarea matricelor).
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (proprietatea de distributivitat).
5. $1A = A$, unde 1 este identitatea multiplicativă a lui $\mathbb{F}$.

Bineînţeles că am prezentat doar înmulţirea pe partea stângă a matricelor cu scalari. Prin definiţie $\alpha A = A\alpha$, şi astfel se obţine înmulţirea pe partea deaptă a matricelor cu scalari.

**Exemplul 1.7.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $2A - B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ şi $2A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**Transpusa.**

*Transpusa* matricii $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ este definită ca matricea $A^\top \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor din $A$. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, atunci $A^\top = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}}$.

Este evident că $(A^\top)^\top = A$. O matrice, care are mai multe coloane, dar doar o linie, poartă denumirea de *matrice linie*. Prin urmare, o matrice linie $A$ cu $n$ coloane este o matrice de tip $1 \times n$, adică,

$$A = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; \dots \;\; a_n).$$

O matrice, care are mai multe linii, dar numai o coloană, se numeşte *matrice coloană*. Astfel, o matrice coloană $A$ cu $m$ linii este o matrice de tip $m \times 1$, adică,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Evident, transpunsa unei matrice linie este o matrice coloană şi viceversa, prin urmare, o matrice coloană $A$ se poate scrie într-o linie de text astfel:

$$A = (a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_m)^\top.$$

**Conjugata transpusă.**

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se defineşte *conjugata transpusă* a matricii $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ prin $A^\star = (\overline{a}_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul complex al numărului $z \in \mathbb{C}$. Astfel avem că $(A^\star)^\star = A$ şi $A^\top = A^\star$ când $A$ conţine doar numere reale ca intrări.

**Proprietăţi ale Transpusei.**

Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ şi $\alpha \in K$ au loc:

1. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.
2. $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$.
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$ şi $(\alpha A)^\star = \overline{\alpha} A^\star$.

**Simetrice.**

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ o matrice pătratică. Reamintim că

- $A$ se numeşte *matrice simetrică* dacă $A = A^\top$ ($a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$).
- $A$ se numeşte *matrice anti-simetrică* dacă $A = -A^\top$ ($a_{ij} = -a_{ji}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$).
- $A$ se numeşte *matrice hermitiană* dacă $A = A^\star$ ($a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$).
- $A$ se numeşte *matrice anti-hermitiană* dacă $A = -A^\star$ ($a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$).

Este uşor de observat că orice matrice reală simetrică este hermitiană, respectiv, orice matrice reală anti-simetrică este anti-hermitiană.

**Exemplul 1.8.** Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ este o matrice simetrică, în timp ce matricea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ este o matrice anti-simetrică.

Matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 3 & 3-2i \\ -i & 3+2i & 2 \end{pmatrix}$ este o matrice hermitiană, în timp ce matricea $D = \begin{pmatrix} -i & 2-i & -3i \\ -2-i & i & 2+3i \\ -3i & -2+3i & 0 \end{pmatrix}$ este o matrice anti-hermitiană.

**Înmulţirea matricelor.**

Pentru o matrice $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ notăm prin $X_{i*}$ a $i$-a linie, adică matricea linie

$$X_{i\star} = (x_{i1} \;\; x_{i2} \;\; \ldots \;\; x_{in}).$$

Similar, a $j$-a coloană a matricii $X$ este matricea coloană

$$X_{\star j} = (x_{1j} \;\; x_{2j} \;\; \ldots \;\; x_{mj})^\top.$$

Este evident că

$$(X^\top)_{i\star} = (X_{\star i})^\top,$$

respectiv

$$(X^\top)_{\star j} = (X_{j\star})^\top.$$

Spunem că matricele $A$ şi $B$ sunt *conforme* pentru înmulţire în ordinea $AB$, dacă $A$ are tot atâtea coloane câte linii are $B$, adică $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{F})$ şi $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{F})$.

Pentru matricele conforme $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,p}}}$ şi $B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,p} \\ k=\overline{1,n}}}$, *matricea produs* $AB$

este definită ca fiind o matrice de tip $m \times n$, $C = (c_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,n}}}$ cu

$$c_{ik} = A_{i\star}B_{\star k} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

În cazul în care $A$ şi $B$ nu sunt conforme, produsul $AB$ nu se defineşte.

**Observaţia 1.9.** Atenţie, produsul nu este comutativ, ceea ce înseamnă, în general, $AB \neq BA$ chiar dacă ambele produse există şi au aceeaşi formă.

**Exemplul 1.10.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Linii şi coloane ale unui produs.**

Presupunem că $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{F})$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{F})$.

Există mai multe variante pentru a exprima linii şi coloane individuale ale matricii produs. De exemplu a $i$-a linie a matricii $AB$ este

$$\begin{aligned} C_{i\star} &= [AB]_{i\star} = [A_{i\star}B_{\star 1} \;\; A_{i\star}B_{\star 2} \;\; \ldots \;\; A_{i\star}B_{\star n}] = A_{i\star}B \\ &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1\star} \\ B_{2\star} \\ \vdots \\ B_{p\star} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Există câteva reprezentări similare pentru coloane individuale, adică a $j$-a coloană este

$$\begin{aligned} C_{\star j} &= [AB]_{\star j} = [A_{1\star}B_{\star j} \;\; A_{2\star}B_{\star j} \;\; \ldots \;\; A_{m\star}B_{\star j}]^\top = AB_{\star j} \\ &= \begin{pmatrix} A_{\star 1} & A_{\star 2} & \ldots & A_{\star p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prin urmare avem:

1. $[AB]_{i\star} = A_{i\star}B$ (a $i$-a linie a matricii $AB$).
2. $[AB]_{\star j} = AB_{\star j}$ (a $j$-a coloană a matricii $AB$).
3. $[AB]_{i\star} = a_{i1}B_{1\star} + a_{i2}B_{2\star} + \cdots + a_ipB_{p\star} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}B_{k\star}$.
4. $[AB]_{\star j} = A_{\star 1}b_{1j} + A_{\star 2}b_{2j} + \cdots + A_{\star p}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} A_{\star k}b_{kj}$.

Ultimele două ecuaţii au o importanţă atât teoretică cât şi practică. Ele arată că liniile matricii $AB$ sunt combinaţii de linii ale matricii $B$, în timp ce coloanele matricii $AB$ sunt combinaţii de coloane ale matricii $A$. Aşa că este pierdere de timp să calculăm intrările matricii produs când avem nevoie doar de o linie sau o coloană.

### Proprietăţi ale înmulţirii matricelor.

*Legi de distributivitate şi asociativitate.*

Pentru matrici conforme avem:

1. $A(B + C) = AB + AC$ (legea de distributivitate la stânga).
2. $(B + C)A = BA + CA$ (legea de distributivitate la dreapta).

3. $A(BC) = (AB)C$ (legea de asociativitate).

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, avem

$$AI_n = A \quad \text{şi} \quad I_n A = A \ ,$$

unde $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ este matricea identitate de ordin $n$.

**Propoziţia 1.11.** *Pentru matricele conforme $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{F})$ şi $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{F})$, avem*

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \ .$$

*Cazul transpunerii conjugate este similar*

$$(AB)^\star = B^\star A^\star \ .$$

*Demonstraţie.* Fie $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} = (AB)^\top$. Atunci pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ avem $c_{ij} = [AB]_{ji} = A_{j\star}B_{\star i}$. Să considerăm acum intrarea $(i, j)$ a matricii $B^\top A^\top$.

$$\begin{aligned}
[B^\top A^\top]_{ij} &= (B^\top)_{i\star}(A^\top)_{\star j} = (B_{\star i})^\top (A_{j\star})^\top = \sum_{k=1}^{p} [B^\top]_{ik}[A^\top]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} \\
&= A_{j\star}B_{\star i}
\end{aligned}$$

□

**Exerciţiu.** Arătaţi că pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ matricele $AA^\top$ şi $A^\top A$ sunt matrici simetrice.

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, se poate introduce a $m$-a putere prin

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^m = A^{m-1}A.$$

**Exemplul 1.12.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ atunci $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Deci $A^m = A^{m(\mod)4}$.

**Urma unui produs.**

Fie $A$ o matrice pătratică de ordin $n$. Urma matricii $A$ este suma elementelor de pe diagonala principală, adică

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

**Propoziţia 1.13.** *Pentru* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *şi* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ *rezultă* $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

*Demonstraţie.* Avem

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{m} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{m} (A)_{i\star}(B)_{\star i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [BA]_{kk} = \operatorname{tr} BA.$$

□

**Înmulţirea Matricelor Bloc.**

Presupunem că $A$ şi $B$ sunt partiţionate în submatrice - menţionate ca blocuri - aşa cum se indică mai jos:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sr} \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rt} \end{pmatrix}$$

Spunem că matricele partiţionate sunt conform partiţionate dacă perechile de matrice $(A_{ik}, B_{kj})$ sunt conforme, pentru fiecare indice $i, j, k$. În acest caz produsul $AB$ este format prin combinarea blocurilor în acelaşi mod în care scalarii sunt combinaţi în înmulţirea obişnuită a matricelor. Adică, blocul $(i, j)$ în matricea produs $AB$ este

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots A_{ir}B_{rj}\ .$$

**Inversa unei matrice.**

Pentru o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ care satisface

$$AB = I_n \text{ şi } BA = I_n$$

(dacă există) se numeşte *inversa* matricii $A$ şi este notată cu $B = A^{-1}$. Nu toate matricele pătratice admit o inversă (sunt inversabile). O matrice pătratică inversabilă se numeşte *nesingulară* şi o matrice pătratică care nu are inversă se numeşte *matrice singulară*.

Deşi nu toate matricele sunt inversabile, *când inversa există, aceasta este unică.* Într-adevăr, să presupunem că $X_1$ şi $X_2$ sunt amândouă inversele matricii nesingulare $A$. Atunci

$$X_1 = X_1I_n = X_1(AX_2) = (X_1A)X_2 = I_nX_2 = X_2$$

ceea ce implică faptul că există doar o matrice inversă.

**Proprietăţi ale Inversei unei Matrice.**

Pentru matricele nesingulare $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, următoarele afirmaţii sunt adevărate.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. Produsul $AB$ este o matrice nesingulară.

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ şi $(A^{-1})^\star = (A^\star)^{-1}$.

Se pot demonstra uşor următoarele afirmaţii:

- Produsul unor matrice nesingulare este nesingular.

- Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ este nesingulară, atunci există o soluţie unică $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$ pentru ecuaţia
$$AX = B, \text{ unde } B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F}),$$
şi soluţia este $X = A^{-1}B$.

- Un sistem de $n$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute poate fi scris sub forma $Ax = b$, cu $X, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F})$, aşa că, dacă $A$ este nesingulară, atunci sistemul are o soluţie unică $x = A^{-1}b$.

## 1.2 Determinanţi şi sisteme de ecuaţii liniare

**Determinanţi.**

Pentru orice matrice pătratică $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se poate atribui un scalar notat cu $det(A)$ numit determinantul matricii $A$. În formă extinsă se scrie

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pentru a defini determinantul unei matrice pătratice, avem nevoie de următoarele notaţii şi noţiuni. Reamintim că printr-o permutare a întregilor $\{1, 2, ..., n\}$ se înţelege un aranjament al acestor întregi într-o ordine definită. Cu alte cuvinte, o permutare este o bijecţie $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Se poate observa uşor că numărul permutărilor întregilor $\{1, 2, ..., n\}$ este egal cu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Vom nota cu $S_n$ mulţimea tuturor permutărilor întregilor $\{1, 2, ..., n\}$. O pereche $(i, j)$ se numeşte o inversiune a permutării $\sigma \in S_n$ dacă $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$. O permutare $\sigma \in S_n$ se numeşte pară sau impară dacă numărul inversiunilor permutării $\sigma$ este par sau respectiv, impar. Semnul unei permutări $\sigma \in S_n$, notat cu sgn $(\sigma)$, este $+1$ dacă permutarea este pară şi $-1$ dacă permutarea este impară.

**Definiţia 1.14.** *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Determinantul matricii $A$ este scalarul definit de ecuaţia*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Acesta poate fi uşor calculat, adică pentru $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2} \\ j=\overline{1,2}}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, avem

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Similar, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,3} \\ j=\overline{1,3}}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$, atunci determinantul său poate fi calculat prin regula

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

**Exemplul 1.15.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ atunci $\det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 0$.

**Teorema lui Laplace.**

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ şi fie $k$ un întreg, $1 \leq k \leq n$. Considerăm liniile $i_1 \ldots i_k$ şi coloanele $j_1 \ldots j_k$ ale matricii $A$. Prin ştergerea celorlalte linii şi coloane se obţine o submatrice a lui $A$ de ordin $k$, a cărui determinant este numit un **minor** al lui $A$ şi este notat prin $M_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}$. Să ştergem acum liniile $i_1 \ldots i_k$ şi coloanele $j_1 \ldots j_k$ ale matricii $A$. Vom obţine o submatrice a lui $A$ de ordin $n-k$. Determinantul său este numit minorul complementar al minorului $M_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}$ şi este notat prin $\widetilde{M}_{i_1,\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}$. În cele din urmă, să notăm (aşa numitul cofactor) prin:

$$A_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k} = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \widetilde{M}_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k} .$$

Adjuncta matricii $A$ este matricea $\operatorname{adj}(A) = \left( (A_i^j)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \right)^{\top}$, care este

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$$

Următorul rezultat ne oferă o metodă de a calcula inversa unei matrice nesingulară.

**Teorema 1.16.** *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. În acest caz, inversa sa poate fi obţinută prin formula*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

**Corolarul 1.17.** *Un sistem $Ax = 0$ cu $n$ ecuaţii liniare şi $n$ necunoscute are o soluţie netrivială dacă şi numai dacă $\det(A) = 0$.*

Expunem, fără demonstraţie, teorema lui Laplace:

**Teorema 1.18.**

$$\det(A) = \sum M_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k} A_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k} \text{ , } \textit{unde}$$

- *Indicii $i_1 \ldots i_k$ sunt fixaţi*

- *Indicii $j_1 \dots j_k$ iau toate valorile posibile astfel încât $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$.*

Ca şi consecinţă imediată se obţine următoarea metodă de calcul a determinanţilor, numită dezvoltarea după elementele unei linii sau dezvoltarea după elementele unei coloane.

**Corolarul 1.19.** *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Atunci*

*(i)* $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_i^k$, *(dezvoltarea după linia i)*

*(ii)* $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_k^j$, *(dezvoltarea după coloana j).*

**Proprietăţi ale determinanţilor.**

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ şi fie $a \in \mathbb{F}$. Atunci

(1) $\det(A^\top) = \det(A)$.

(2) O permutarea a linilor (respectiv coloanelor) matricii A, multiplică determinantul cu semnul permutării.

(3) Un determinant cu două linii egale (sau două coloane egale) este zero.

(4) Determinantul matricii $A$ nu se modifică dacă se înmulţeşte o linie (sau coloană) care se adună la altă linie (sau coloană).

(5) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

(6) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(7) $\det(aA) = a^n \det(A)$.

(8) Dacă $A$ este o matrice triunghiulară, adică $a_{ij} = 0$ pentru orice $i > j$ ($a_{ij} = 0$ pentru orice $i < j$), atunci determinantul este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală, adică $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

**Rangul. Transformări elementare.**

Un număr natural $r$ este numit rangul matricii $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ dacă

1. Există o submatrice pătratică $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{F})$ a matricii $A$ care este nesingulară (adică $\det(M) \neq 0$).

2. dacă $p > r$, pentru orice submatrice $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{F})$ a lui $A$ avem $\det(N) = 0$.

Notăm $\operatorname{rang}(A) = r$.

**Definiţia 1.20.** *Următoarele operaţii se numesc transformări elementare asupra liniilor matricii $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$:*

*1. Interschimbarea a două linii.*

*2. Înmulţirea unei linii cu un număr diferit de zero.*

*3. Adunarea unei linii la o alta.*

Similar se definesc transformările elementare asupra coloanelor unei matrice.

**Observaţia 1.21.** *Rangul unei matrice nu se schimbă dacă se fac transformări elementare asupra unei matrice.*

Vom utiliza transformări elementare pentru calcularea rangului unei matrice. Fiind dată matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ o vom transforma prin transformări elementare succesive convenabile într-o matrice $B$ astfel încât:

- elementele de pe diagonala principală ale lui $B$ să fie 0 sau 1, toate elementele de 1 să preceadă 0-urile.

- toate celelalte elemente ale lui $B$ sunt 0.

Deoarece rangul este invariant la transformări elementare, avem $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$, iar rangul matricii $B$ este egal cu numărul elementelor de 1 de pe diagonală.

Următoarea teoremă ne oferă o procedură de a calcula inversa unei matrice:

**Teorema 1.22.** *Dacă o matrice pătratică este redusă la matricea unitate printr-o succesiune de transformări elementare asupra liniilor, aceeaşi secvenţă de transformări elementare asupra liniilor matricii identitate va genera inversa matricii date.*

**Exemplul 1.23.** Determinaţi inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ utilizând transformări elementare asupra liniilor.

Scriem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \overset{(-\frac{1}{3}A_{3\star}+A_{2\star})}{\simeq}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \overset{(-A_{2\star}+A_{1\star})}{\simeq}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \overset{(\frac{1}{2}A_{2\star},\frac{1}{3}A_{3\star})}{\simeq}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right. .$$

Deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Amintim că o matrice este în fromă eşalon linie dacă

(1) Toate liniile care nu sunt zero sunt deasupra liniilor care au toate elementele zero.

(2) Primul element diferit de zero (elementul pivot) al unei linii care nu este zero este strict la dreapta primului element diferit de zero al liniei de deasupra ei.

Dacă în plus condiţia:

(3) Fiecare element pivot este 1 şi sunt doar elemente nenule pe coloana sa.

este de asemenea verificată, spunem că matricea este reductibilă la forma eşalon linie.

O matrice arbitrară poate fi redusă la formă eşalon linie aplicând o succesiune finită de transformări elementare asupra liniilor. Această procedură se numeşte metoda eliminării *Gauss-Jordan*.

**Existenţa unei inverse.** Pentru o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ următoarele afirmaţii sunt echivalente.

1. $A^{-1}$ există ($A$ este nesingulară).
2. $\operatorname{rang}(A) = n$.
3. $A$ este transformată prin metoda Gauss-Jordan în $I_n$.
4. $Ax = 0$ implică $x = 0$.

**Sisteme de ecuaţii liniare.**

Reamintim că un sistem de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute se poate scrie ca:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Aici $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt necunoscutele, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sunt coeficienţii sistemului, şi $b_1, b_2, \dots, b_m$ sunt termenii liberi. Se observă că un sistem de ecuaţii liniare poate fi scris ca $Ax = b$, unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F})$ şi $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{F})$. Matricea $A$ este denumită matricea coeficienţilor (matricea sistemului), în timp ce matricea $[A|b] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{F})$,

$$[A|b]_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \text{ dacă } j \neq n+1 \\ b_i \text{ dacă } j = n+1 \end{cases}$$

este numită matricea extinsă a sistemului.

Spunem că $x_1, x_2, ..., x_n$ este o soluţie a sistemului liniar dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ satisfac fiecare ecuaţie a sistemului. Un sistem liniar este compatibil dacă are soluţie, şi incompatibil altfel. Conform Teoremei Rouché-Capelli, un sistem de ecuaţii liniare este incompatibil dacă rangul matricii extinse este mai mare decât rangul matricii sistemului. Dacă, pe de altă parte, rangul acestor matrici este egal, sistemul trebuie să aibă cel puţin o soluţie. Soluţia este unică dacă şi numai dacă rangul este egal cu numărul necunoscutelor. Altfel, soluţia generală are $k$ paramatri liberi unde $k$ este diferenţa dintre numărul de necunoscute şi rang. Două sisteme liniare sunt echivalente dacă şi numai dacă ele au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

În eliminarea pe linii, sistemul liniar se reprezintă ca matricea extinsă $[A|b]$. Această matrice se modifică apoi folosind transformări elementare asupra liniilor până când ajunge la o formă eşalon linie. Deoarece aceste operaţii sunt reversibile, matricea extinsă rezultată va reprezenta întotdeauna un sistem liniar echivalent cu cel original. În acest fel se pot citi cu uşurinţă soluţiile sistemului.

**Exemplul 1.24.** Utilizând metoda de eliminare Gauss-Jordan, rezolvaţi următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

Avem $[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(-2A_{1\star}+A_{2\star},-A_{1\star}+A_{3\star})}{\simeq}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(A_{2\star}\leftrightarrow A_{4\star})}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 8 \end{array}\right) \overset{(A_{2\star}+A_{1\star},-3A_{2\star}+A_{4\star})}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 11 \end{array}\right) \overset{(\frac{1}{2}A_{3\star}+A_{1\star},\frac{1}{2}A_{3\star}+A_{.21\star},-2A_{3\star}+A_{4\star})}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \overset{(\frac{1}{2}A_{4\star}+A_{1\star}, \frac{1}{10}A_{4\star}+A_{2\star}, -\frac{1}{5}A_{4\star}+A_{3\star})}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \overset{(-\frac{1}{2}A_{3\star}, -\frac{1}{5}A_{4\star})}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Se poate citi cu uşurinţă soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

Reamintim că un sistem de ecuaţii liniare este numit omogen dacă $b = (0\,0\,\cdots 0)^\top$ adică

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Un sistem omogen este echivalent cu o ecuaţie matriceală de forma

$$Ax = O.$$

Evident, un sistem omogen este compatibil, având soluţia $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Se poate vedea că un sistem omogen de ecuaţii liniare are soluţie netrivială dacă şi numai dacă numărul elementelor pivot în forma eşalon este mai mic decât numărul necunoscutelor, cu alte cuvinte, matricea sistemului este singulară.

## 1.3 Probleme

**Problema 1.3.1.** Utilizând teorema Laplace calculaţi următorii determinanţi:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**Problema 1.3.2.** Calculaţi următorii determinanţi:

a) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$, unde $\omega \in \mathbb{C}$ astfel încât relaţia $\omega^2+\omega+1=0$ să aibă loc.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$, unde $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

**Problema 1.3.3.** Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi să notăm $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătaţi că:

a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

b) Dacă $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ atunci $\det(A) \in \mathbb{R}$.

**Problema 1.3.4.** Fie $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{C}$. Calculaţi următorii determinanţi:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.

**Problema 1.3.5.** Determinaţi $A^n$, $n \geq 1$ pentru următoarele matrici:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**Problema 1.3.6.** Calculaţi rangul matricelor următoare folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & -5 \\ 6 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 9 & 11 & -7 & 16 \\ 2 & 4 & 9 & 12 & 10 & 26 \end{pmatrix}.$$

**Problema 1.3.7.** Determinaţi inversele următoarelor matrici folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i \neq j \\ 0 \text{ altfel.} \end{cases}$

**Problema 1.3.8.** Arătaţi că dacă $A$ şi $B$ sunt matrici pătratice de aceeaşi dimensiune, ambele inversabile, atunci:

a) $A(I + A)^{-1} = (I + A^{-1})^{-1}$,

b) $(A + BB^\top)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^\top A^{-1}B)^{-1}$,

c) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$,

d) $A - A(A + B)^{-1}A = B - B(A + B)^{-1}B$,

e) $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$,

f) $(I + AB)^{-1} = I - A(I + BA)^{-1}B$,

g) $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$.

**Problema 1.3.9.** Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ arătaţi că produsele $A^\star A$ şi $AA^\star$ sunt matrici hermetiene.

**Problema 1.3.10.** Pentru o matrice pătratică $A$ de ordin $n$ explicaţi de ce ecuaţia

$$AX - XA = I_n$$

nu are soluţie.

**Problema 1.3.11.** Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare utilizând metoda de eliminare Gauss-Jordan.

a)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -12 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -12. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_6 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 2. \end{cases}$$

**Problema 1.3.12.** Determinaţi $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele sisteme să fie compatibile, şi apoi rezolvaţi sistemele.

a)

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y + mz = 0 \\ nx + y + z = 0 \\ x + py + 6z = 0 \\ 2e^x = y + z + 2. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ mx - y + 2z = 0 \\ x + ny - 2z = 0 \\ 3x + y + pz = 0 \\ x^2 + y^2 + x^2 = 3. \end{cases}$$

# 2

# Spaţii Vectoriale

## 2.1 Definiţie şi proprietăţi ale unui Spaţiu Vectorial

**Definiţia 2.1.** *Un spaţiu vectorial $V$ peste corpul $\mathbb{F}$ (sau $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial) este o mulţime $V$ împreună cu o operaţie aditivă $+$ (lege de compoziţie internă) astfel încât grupul abelian $(V,+)$ şi înmulţirea cu scalari $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, (\alpha, v) \to \alpha \cdot v = \alpha v$, satisfac următoarele proprietăţi:*

1. $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v, w \in V$
2. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V$
4. $1 \cdot v = v, \forall v \in V$

Elementele din $V$ se numesc vectori şi elementele din $\mathbb{F}$ se numesc scalari.

Înmulţirea cu un scalar depinde de $\mathbb{F}$. Din acest motiv când dorim să fim exacţi vom spune că $V$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$, în loc de a spune doar că $V$ este un spaţiu vectorial. De obicei un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ este numit spaţiu vectorial real iar un spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$ este numit spaţiu vectorial complex.

**Remarcă.** Din definiţia spaţiului vecotrial $V$ peste $\mathbb{F}$ se deduc următoarele reguli de calcul:

- $\alpha \cdot 0_V = 0_V$
- $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$
- $\alpha \cdot v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{F}}$ sau $v = 0_V$.

**Exemple.** Vom enumera câteva exemple simple, care apar frecvent în practică.

- $V = \mathbb{C}^n$ are o structura de $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial, dar are de asemenea o structură de $\mathbb{C}$ spaţiu vectorial.
- $V = \mathbb{F}[X]$, mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi în $\mathbb{F}$ cu adunarea obişnuită şi cu înmulţirea obişnuită este un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial.
- $M_{m,n}(\mathbb{F})$ împreună cu adunarea obişnuită şi cu înmulţirea cu scalari este un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial.
- $C_{[a,b]}$, mulţimea tuturor funcţiilor reale continue definite pe intervalul $[a, b]$, împreună cu adunarea obişnuită şi înmulţirea cu scalari este un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial.

## 2.2 Subspaţii ale unui Spaţiu Vectorial

Este natural să ne întrebăm asupra submulţimilor unui spaţiu vectorial $V$ care sunt închise în raport cu operaţia definită în spaţiul vectorial dat. Pentru acest motiv vom da următoarea:

**Definiţia 2.2.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$. O submulţime $U \subset V$ se numeşte un subspaţiu al lui $V$ peste $\mathbb{F}$ dacă este parte stabilă în raport cu legea de compoziţie, adică, $v + u \in U, \forall v, u \in U$, şi $\alpha v \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in U$, şi operaţia indusă verifică proprietăţile din definiţia unui spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$.*

Este uşor să demonstrăm următoarea:

**Propoziţia 2.3.** *Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial şi $U \subset V$ o submulţime nevidă. $U$ este subspaţiu vectorial al lui $V$ peste $\mathbb{F}$ dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

- $v - u \in U, \forall v, u \in U$
- $\alpha v \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v \in U$

*Demonstraţie.* Evident, proprietăţile de înmulţire cu scalari, respectiv asociativitatea şi comutativitatea operaţiei aditive sunt moştenite din spaţiul $V$. Prin urmare, rămâne de demonstrat că $0 \in U$ şi pentru orice $u \in U$ avem că $-u \in U$. Deoarece $\alpha u \in U$ pentru orice $u \in U$ şi $\alpha \in \mathbb{F}$ rezultă că $0u = 0 \in U$ şi $0 - u = -u \in U$. □

**Propoziţia 2.4.** *Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial şi $U \subset V$ o mulţime nevidă. $U$ este subspaţiu vectorial al lui $V$ peste $\mathbb{F}$ dacă*

$$\alpha v + \beta u \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v, u \in V.$$

*Demonstraţie.* Fie $u, v \in U$. Pentru $\alpha = 1$, $\beta = -1$ avem că $v - u \in U$. Pentru $\beta = 0$ şi $\alpha \in \mathbb{F}$ obţinem că $\alpha v \in U$. Atunci concluzia reiese din propoziţia anterioară. □

**Exemplul 2.5.** Fie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Arătaţi că $S$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$.

Ca să vedem că $S$ este un subspaţiu, verificăm că pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi fiecare $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \in S.$$

Într-adevăr, deoarece $v_1, v_2 \in S$ avem

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 &= 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 0, \end{aligned}$$

şi prin înmulţirea ecuaţiei cu $\alpha$ şi $\beta$, respectiv, adunând ecuaţiile rezultate obţinem

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0.$$

Dar aceasta nu este altceva decât faptul că

$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

satisfac ecuaţiile ce definesc $S$.

Următoarea propoziţie arată cum se poate opera cu subspaţii vectoriale (pentru a obţine un spaţiu vectorial nou) şi cum se poate obţine un subspaţiu dintr-o familie de vectori.

**Propoziţia 2.6.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $U, W \subset V$ două subspaţii vectoriale. Mulţimile*

$$U \cap W \text{ şi } U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$$

*sunt subspaţii ale lui $V$.*

*Demonstraţie.* Demonstrăm afirmaţia utilizând Propoziţia 2.4. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ şi fie $u, v \in U \cap W$. Atunci $u, v \in U$ şi $u, v \in W$. Deoarece $U$ şi $W$ sunt spaţii vectoriale rezultă că $\alpha v + \beta u \in U$, respectiv $\alpha v + \beta u \in W$. Deci, $\alpha v + \beta u \in U \cap W$.

Considerăm acum $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ şi fie $x, y \in U + W$. Atunci $x = u_1 + w_1$, $y = u_2 + w_2$ pentru vectorii $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$. Dar atunci

$$\alpha x + \beta y = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \in U + W.$$

□

Subspaţiul $U \cap W$ se numeşte subspaţiul vectorial intersecţie, în timp ce subspaţiul $U + W$ se numeşte subspaţiul vectorial sumă. Bineînţeles că aceste definiţii pot fi date pentru intersecţii finite (respectiv pentru sume finite) de subspaţii.

**Propoziţia 2.7.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ şi $S \subset V$ submulţime nevidă. Mulţimea $\langle S\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \ \alpha_i \in \mathbb{F} \ \text{ şi } \ v_i \in S, \ \text{pentru orice } i = \overline{1,n}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$ este un subspaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ al lui $V$.*

*Demonstraţie.* Demonstraţia este imediată în virtutea Propoziţiei 2.4. □

Următorul spaţiu vectorial este numit spaţiu vectorial generat de $S$, sau înfăşurătoarea liniară a mulţimii $S$ şi este deseori notat ca span$(S)$. Este cel mai mic subspaţiu al lui $V$ care conţine $S$, în sensul că pentru orice $U$ subspaţiu al lui $V$ cu $S \subset U$ avem $\langle S\rangle \subset U$.

Acum vom defini noţiunea de sumă de subspaţii, ca sumă directă de subspaţii.

**Definiţia 2.8.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $U_i \subset V$ subspaţii, $i = \overline{1,n}$. Suma $U_1 + \cdots + U_n$ se numeşte suma directă dacă pentru orice $v \in U_1 + \cdots + U_n$, din $v = u_1 + \cdots + u_n = w_1 + \cdots + w_n$ cu $u_i, w_i \in U_i, i = \overline{1,n}$ rezultă că $u_i = w_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$.*

Suma directă a subspaţiilor $U_i, i = \overline{1,n}$ va fi notată prin $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Definiţia de mai sus poate fi reformulată în felul următor. Fiecare $u \in U_1 + \cdots + U_n$ poate fi scris în mod unic ca $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ unde $u_i \in U_i$, $i = \overline{1,n}$.

Următoarea propoziţie dă o caracterizare pentru suma directă a două subspaţii.

**Propoziţia 2.9.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $U, W \subset V$ două subspaţii. Suma $U + W$ este sumă directă dacă $U \cap W = \{0_V\}$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $U + W$ este sumă directă şi că există $s \in U \cap W$, $s \neq 0_V$. Dar atunci fiecare $x \in U + W$, $x = u + w$ poate fi scris ca $x = (u - s) + (w + s) \in$

$U+W$. Din definiţia sumei directe avem că $u = u-s$, $w = w+s$ prin urmare $s = 0_V$, ceea ce este o contradicţie.

Invers, presupunem că $U \cap W = \{0_V\}$ şi $U+W$ nu este o sumă directă. Atunci, există $x \in U+W$ astfel încât $x = u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \in U+W$ şi $u_1 \neq u_2$ sau $w_1 \neq w_2$. Dar atunci $u_1 - u_2 = w_1 - w_2$, prin urmare $u_1 - u_2, w_1 - w_2 \in U \cap W$. Rezultă că $u_1 = u_2$ şi $w_1 = w_2$, ceea ce este o contradicţie. $\square$

Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ şi $U$ un subspaţiu. Pe $V$ se poate defini următoarea relaţie binară $\mathfrak{R}_U$: fie $u, v \in V$, $u \, \mathfrak{R}_U \, v$ dacă $u - v \in U$.

Se poate verifica uşor că realţia $\mathfrak{R}_U$ este o relaţie de echivalenţă, adică:

(r) $v \, \mathfrak{R}_U \, v$, pentru orice $v \in V$. (reflexivitate)

(t) $u \, \mathfrak{R}_U \, v$ şi $v \, \mathfrak{R}_U \, w \Longrightarrow u \, \mathfrak{R}_U \, w$, pentru orice $u, v, w \in V$. (tranzitivitate)

(s) $u \, \mathfrak{R}_U \, v \Longrightarrow v \, \mathfrak{R}_U \, u$, pentru orice $u, v \in V$. (simetrie)

Clasa de echivalenţă a vectorului $v \in V$ este definită ca

$$\mathfrak{R}_U[v] = \{u \in V : v \, \mathfrak{R}_U \, u\} = v + U.$$

Mulţimea cât (sau mulţimea factor) $V/\mathfrak{R}_U$ este notată cu $V/U$ şi constă din mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, adică

$$V/U = \{\mathfrak{R}_U[v] : v \in V\}.$$

**Teorema 2.10.** *Mulţimea cât $V/U$ este o structură naturală de spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$.*

*Demonstraţie.* Într-adevăr, să definim suma a două clase de echivalenţă $\mathfrak{R}_U[v]$ şi $\mathfrak{R}_U[w]$ prin

$$\mathfrak{R}_U[v] + \mathfrak{R}_U[w] = \mathfrak{R}_U[v+w]$$

şi înmulţirea cu scalari prin

$$\alpha\mathfrak{R}_U[v] = \mathfrak{R}_U[\alpha v].$$

Atunci, se verifică uşor că având aceste operaţii, $V/U$ devine un $\mathbb{F}$ spaţiu. $\square$

Spaţiul vectorial din teorema anterioară se numeşte spaţiul vectorial cât.

## 2.3 Bază. Dimensiune.

Până acum am încercat să explicăm "în mare" câteva proprietăţi ale spaţiilor vectoriale. Şi anume, am vorbit despre spaţii vectoriale, subspaţii, sumă directă, spaţiu factor.

Propoziţia 2.7 ridică în mod natural câteva întrebări legate de structura spaţiului vectorial $V$. Există o mulţime $S$ care să genereze $V$ (adică $\langle S\rangle = V$)? Dacă răspunsul este afirmativ, cât de mare este? Cu alte cuvinte cât de mare este cel mai mic (mic în sensul numărului de elemente - cardinalul mulţimii)? Există o muţime finită care să genereze $V$? Vom aduce lumină asupra acestor întrebări în următoarea parte a acestui capitol.

De ce răspunsurile la aceste întrebări sunt atât de importante? Răspunsul este destul de simplu. Dacă putem controla - într-un anumit sens - un sistem minimal de generatori, putem controla tot spaţiul.

**Definiţia 2.11.** *Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial. O mulţime nevidă $S \subset V$ se numeşte sistem de generatori pentru $V$ dacă pentru orice $v \in V$ există o submulţime finită $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ şi scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ (putem spune de asemenea că $V$ este o combinaţie liniară de $v_1, \ldots, v_n$ cu scalari în $\mathbb{F}$). $V$ se numeşte finit dimensionat, sau finit generat, dacă are un sistem finit de generatori.*

*O mulţime nevidă $L \subset V$ se numeşte sistem liniar independent de vectori dacă pentru fiecare submulţime finită $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset L$ a sa, $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0$ implică $a_i = 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.*

*O mulţime nevidă de vectori care nu sunt liniar independenţi se numeşte liniar dependentă.*

*O submulţime $\mathfrak{B} \subset V$ se numeşte bază a lui $V$ dacă este un sistem de generatori şi liniar independenţi. În acest caz fiecare vector $v \in V$ poate fi scris în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathfrak{B}$.*

**Exemplul 2.12.** Verificaţi dacă vectorii $(0,1,2)$, $(1,2,0)$, $(2,0,1)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar independenţi.

Prin definiţie, cei trei vectori sunt liniar independenţi dacă implicaţia

$$\alpha_1\,(0,1,2) + \alpha_2\,(1,2,0) + \alpha_3\,(2,0,1) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

are loc.

Verificarea implicaţiei de mai sus de fapt înseamnă (după ce se lucrează în membrul drept) a investiga dacă sistemul liniar

$$\begin{cases} & & \alpha_2 & + & 2\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 0 \\ 2\alpha_1 & & & + & \alpha_2 & = & 0 \end{cases}$$

are **doar** soluţia banală $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$ sau nu. Dar putem calcula uşor rangul matricii, care este 3 deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

ca să observăm că, într-adevăr, sistemul are doar soluţia banală, şi deci cei trei vectori sunt liniar independenţi.

Avem următoarea teoremă.

**Teorema 2.13.** *(Existenţa bazei) Orice spaţiu vectorial $V \neq 0$ are o bază.*

Nu vom demonstra această teoremă generală aici, în schimb ne vom referi în continuare la spaţii vectoriale finit dimensionale.

**Teorema 2.14.** *Fie $V \neq \{0\}$ un spaţiu vectorial finit generat peste $\mathbb{F}$. Din orice sistem finit de generatori se poate extrage o bază pentru $V$.*

*Demonstraţie.* Fie $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un sistem finit de generatori. Este evident că există vectori diferiţi de zero în $S$ (altfel $V = \{0\}$). Fie $0 \neq v_1 \in S$. Mulţimea $\{v_1\}$ este liniar independentă (deoarece $\alpha v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ din $v_1 \neq 0$). Aceasta înseamnă că $S$ conţine doar submulţimi liniar independente. Acum, $P(S)$ este finită ($S$ fiind finită), şi într-un finit număr de paşi putem extrage un sistem maximal liniar independent, să spunem $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $1 \leq n \leq r$ în felul următor:

$$v_2 \in S \setminus \langle v_1 \rangle,$$

$$v_3 \in S \setminus \langle \{v_1, v_2\} \rangle$$

$$\vdots$$

$$v_n \in S \setminus \langle \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \rangle.$$

Vom demonstra că $\mathfrak{B}$ este o bază pentru $V$. Este suficient să arătăm că $\mathfrak{B}$ generează $V$, deoarece $\mathfrak{B}$ este liniar independent din alegerea lui. Fie $v \in V$. $S$ fiind un sistem de generatori, rezultă că este suficient să arătăm că orice $v_k \in S$, $n \leq k \leq r$ este o combinaţie liniară de vectori din $\mathfrak{B}$. Să presupunem, prin absurd, că $v_k$ nu este o combinaţie liniară de vectori din $\mathfrak{B}$. Rezultă că mulţimea $\mathfrak{B} \cup \{v_k\}$ este liniar independentă, ceea ce este în contradicţie cu maximalitatea mulţimii $\mathfrak{B}$. $\square$

**Corolarul 2.15.** *Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial şi $S$ un sistem de generatori pentru $V$. Orice mulţime liniar independentă $L \subset S$ poate fi completată astfel încât să devină o bază pentru $V$.*

*Demonstraţie.* Fie $L \subset S$ o mulţime liniar independentă din $S$. Dacă $L$ este maximală, din teorema anterioară rezultă că $L$ este o bază. Dacă $L$ nu este maximală, atunci există o mulţime liniar independentă $L_1$ cu $L \subset L_1 \subset S$. Dacă $L_1$ este maximală rezultă că $L_1$ este o bază. Dacă nu este maximală, vom repeta pasul anterior. Deoarece $S$ este o mulţime finită, după un număr finit de paşi vom obţine un sistem de vectori liniar independenţi $\mathfrak{B}$ care este maximal, $L \subset \mathfrak{B} \subset S$, aşadar $\mathfrak{B}$ este o bază pentru $V$, din nou folosind teorema anterioară. $\square$

**Teorema 2.16.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial finit generat peste $\mathbb{F}$. Orice sistem de vectori liniar independenţi $L$ poate fi completat la o bază din $V$.*

*Demonstraţie.* Fie $S$ un sistem finit de generatori. Intersecţia $L \cap S$ este din nou un sistem de generatori şi $L \subset L \cap S$. Vom aplica corolarul de mai sus şi vom obţine că $L$ poate fi completată la o bază din $V$. $\square$

**Teorema 2.17.** *(Cardinalul unei baze). Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial finit generat. Orice bază din $V$ este finită şi are acelaşi număr de elemente.*

*Demonstraţie.* Fie $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots .e_n\}$ o bază a lui $V$, şi fie $\mathfrak{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ un sistem de vectori cu $m > n$. Vom arăta că $\mathfrak{B}'$ nu poate fi o bază pentru $V$.

Deoarece $\mathfrak{B}$ este o bază, vectorii $e'_i$ pot fi scrişi în mod unic ca $e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, $1 \leq i \leq m$. Dacă $\mathfrak{B}'$ este liniar independentă, atunci rezultă că $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e'_i = 0$ implică $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, sau, cu alte cuvinte, sistemul $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i = 0$, $j = \overline{1,n}$ are doar soluţia banală, ceea ce este imposibil. $\square$

**Definiţia 2.18.** *Fie $V \neq \{0\}$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial finit generat. Numărul elementelor unei baze din $V$ se numeşte dimensiunea lui $V$ (nu depinde de alegerea* *bazei, şi se notează cu* $dim_{\mathbb{F}}V$*). Spunem că spaţiul vectorial* $V$ *are dimensiune finită. Pentru* $V = \{0\}$ , $dim_{\mathbb{F}}V = 0$.

**Observaţia 2.19.** *Conform demonstraţiei Teoremei 2.17, dacă* $dim_{\mathbb{F}}V = n$ *atunci orice mulţime cu* $m > n$ *vectori este liniar dependentă.*

**Corolarul 2.20.** *Fie* $V$ *un spaţiu vectorial peste* $\mathbb{F}$ *de dimensiune finită,* $dim_{\mathbb{F}}V = n$.

1. *Orice sistem liniar independent de* $n$ *vectori este o bază. Orice sistem de* $m$ *vectori,* $m > n$ *este liniar dependent.*

2. *Orice sistem de generatori din* $V$ *care este alcătuit din* $n$ *vectori este o bază. Orice sistem de* $m$ *vectori,* $m < n$ *nu este un sistem de generatori.*

*Demonstraţie.* a) Considerăm $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistem liniar independent de $n$ vectori. Din Teorema 2.16 rezultă că $L$ poate fi completată la o bază din $V$. Rezultă din teorema cardinalului unei baze, Teorema 2.17, că nu este nevoie să completăm $L$, deci $L$ este o bază.

Fie $L'$ un sistem de $m$ vectori, $m > n$. Dacă $L'$ este liniar independent rezultă că $L'$ poate fi completat la o bază (Teorema 2.16), deci $\dim_{\mathbb{F}} V \geq m > n$, contradicţie.

b) Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistem de generatori format din $n$ vectori. Din Teorema 2.14 rezultă că o bază poate fi formată din $n$ vectori. Din nou, utilizând Teorema 2.17 rezultă că nu e nevoie să eliminăm nici un vector, deci $S$ este o bază.

Fie $S'$ un sistem de generatori format din $m$ vectori, $m < n$. Din Teorema 2.14 rezultă că din $S'$ putem extrage o bază, deci, $\dim_{\mathbb{F}} V \leq m < n$, contradicţie. □

**Observaţia 2.21.** Dimensiunea unui spaţiu vectorial finit dimensional este egală cu oricare din:

- Numărul de vectori din care este alcătuită o bază.

- Numărul minim de vectori dintr-un sistem de generatori.
- Numărul maxim de vectori dintr-un sistem de vectori liniari independenţi.

**Exemplul 2.22.** Fie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Daţi un exemplu de bază a lui $S$.

În exemplul 2.5 am arătat că $S$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$. Se poate observa că, din punct de vedere geometric, $S$ este un plan care trece prin origine, deci $\dim S = 2$. Aceasta rezultă de asemenea din rescrierea lui $S$ în felul următor:

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\right\} \\ &= \{(x, y, -x - y) \,| x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, -1) \,| x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= span\,\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\,. \end{aligned}$$

Vectorii $(1, 0, -1)$ şi $(0, 1, -1)$ sunt liniar independenţi, deci ei formează o bază a lui $S$.

**Teorema 2.23.** *Orice listă de vectori liniar independenţi dintr-un spaţiu vectorial finit dimensional poate fi extinsă la o bază a spaţiului vectorial.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $V$ este finit dimensional şi mulţimea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ este liniar independentă. Vrem să extindem această mulţime la o bază a lui $V$. $V$ fiind finit dimensional, există o mulţime finită $\{w_1, \ldots, w_n\}$, o listă de vectori care generează $V$.

- Dacă $w_1$ este în sistemul de generatori $\{v_1, \ldots, v_m\}$, fie $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Dacă nu, fie $B = \{v_1, \ldots, v_m, w_1\}$.
- Dacă $w_j$ este în sistemul de generatori al lui $B$, fie $B$ neschimbat. Dacă $w_j$ nu este în sistemul de generatori ai lui $B$, extindem $B$ adăugând $w_j$ la aceasta.

După fiecare pas $B$ este tot liniar independentă. După cel mult $n$ paşi, sistemul de generatori ai lui $B$ include toate $w$-urile. Prin urmare $B$ de asemenea generează pe $V$, şi fiind liniar independentă, rezultă că este o bază. $\square$

Ca aplicaţie vom arăta că orice subspaţiu al unui spaţiu vectorial finit dimensional poate fi asociat cu un alt subspaţiu pentru a forma suma directă care este tot spaţiul.

**Teorema 2.24.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial finit dimensional şi $U$ un subspaţiu al lui $V$. Există un subspaţiu $W$ al lui $V$ astfel încât $V = U \oplus W$.*

*Demonstraţie.* Deoarece $V$ este finit dimensional, la fel este şi $U$. Alegem $\{u_1, \dots, u_m\}$ o bază a lui $U$. Această bază a lui $U$ este o listă de vectori liniar independenţi, deci poate fi extinsă la o bază $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ a lui $V$. Fie $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Arătăm că $V = U \oplus W$. Pentru aceasta vom arăta că

$$V = U + W, \text{ şi } U \cap W = \{0\}$$

Fie $v \in V$, deci există $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ astfel încât

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1w_1 + \cdots + b_nw_m,$$

deoarece $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ generează $V$. Notând $a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = u \in U$ şi $b_1w_1 + \cdots + b_nw_m = w \in W$ tocmai am demonstrat că $V = U + W$.
Presupunem acum că $U \cap W \neq \{0\}$, deci fie $0 \neq v \in U \cap W$. Atunci există scalarii $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ şi $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ nu toţi zero, cu

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = b_1w_1 + \cdots + b_nw_m,$$

deci

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m - b_1w_1 - \cdots - b_nw_m = 0.$$

Dar aceasta este în contradicţie cu faptul că $\{u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n\}$ este o bază a lui $V$, aşa că $U \cap W = \{0\}$. $\square$

Următoara teoremă face legătura dintre dimensiunea sumei şi intersecţiei a două subspaţii, cu dimensiunea unui subspaţiu dat:

**Teorema 2.25.** *Dacă $U$ şi $W$ sunt două subspaţii ale unui spaţiu vectorial finit dimensional $V$, atunci*

$$dim\,(U + W) = dim\,U + dim\,W - dim\,(U \cap W)\ .$$

*Demonstraţie.* Fie $\{u_1, \ldots, u_m\}$ o bază din $U \cap W$, deci $\dim U \cap W = m$. Aceasta este o mulţime lininară independentă de vectori din $U$ şi respectiv $W$, deci poate fi extinsă la o bază $\{u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots v_i\}$ a lui $U$ şi o bază $\{u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots w_j\}$ a lui $W$, deci $\dim U = m + i$ şi $\dim W = m + j$. Mai rămâne de demonstrat că $\{u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots, v_i, w_1, \ldots, w_j\}$ este o bază pentru $U + W$, deoarece în acest caz

$$\begin{aligned}
\dim\,(U + W) &= m + i + j \\
&= (m + i) + (m + j) - m \\
&= \dim U + \dim W - dim(U \cap W)
\end{aligned}$$

Mulţimea $\mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots, v_i, w_1, \ldots, w_j\}$ conţine $U$ şi $W$, deci conţine $U + W$. Aceasta înseamnă că pentru a demonstra că aceasta este o bază pentru $U + W$ este nevoie doar de a demonstra liniar independenţa ei. Presupunem că

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + \cdots + b_iv_i + c_1w_1 + \cdots + c_jw_j = 0\ .$$

Avem

$$c_1w_1 + \cdots + c_jw_j = -a_1u_1 - \cdots - a_mu_m - b_1v_1 - \cdots - b_iv_i$$

ceea ce ne arată că $w = c_1w_1 + \cdots + c_jw_j \in U$ . Dar acesta este de asemenea în $W$, deci acesta se află şi în $U \cap W$. Deoarece $u_1, \ldots, u_m$ este o bază în $U \cap W$ rezultă că există scalarii $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{F}$, nu toţi zero, astfel încât

$$c_1w_1 + \cdots + c_jw_j = -(d_1u_1 + \cdots + d_mu_m) \ .$$

Dar $\{u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_j\}$ este o bază în $W$, deci este liniar independentă, ceea ce înseamnă că toţi $c_i$ sunt zero.

Relaţiile ce implică $a$-urile, $b$-urile şi $c$-urile devin

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + \cdots + b_iv_i = 0 \ ,$$

deci $a$-urile şi $b$-urile sunt zero deoarece vectorii $\{u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots, v_i\}$ formează o bază în $U$. Deci toate $a$-urile, $b$-urile şi $c$-urile sunt zero, ceea ce înseamnă că $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_i, w_1, \ldots, w_j\}$ sunt liniar independenţi, şi pentru că generează $U + W$, ei formează o bază pentru $U + W$. □

Teorema anterioară ne arată că dimensiunea se potriveşte cu suma directă a spaţiilor. Adică, dacă $U \cap W = \{0\}$, suma este suma directă şi avem

$$\dim{(U \oplus W)} = \dim U + \dim W \ .$$

Aceasta este adevărat pentru suma directă a unui număr finit de spaţii cum se arată în următoarea teoremă:

**Teorema 2.26.** *Fie $V$ un spaţiu finit dimensional, $U_i$ subspaţii de $V$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$V = U_1 + \cdots + U_n \ ,$$

*şi*

$$dim V = dim U_1 + \cdots + dim U_n \ .$$

*Atunci*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \ .$$

*Demonstraţie.* Putem să alegem o bază pentru fiecare $U_i$. Punând toate aceste baze într-o listă, vom obţine o listă de vectori care generează pe $V$ (din prima proprietate a teoremei), ce este de asemenea o bază, datorită celei de-a doua proprietăţi, numărul de vectori din această listă este $\dim V$.

Să presupunem că avem $u_i \in U_i, \quad i = \overline{1,n}$, astfel încât

$$0 = u_1 + \cdots + u_n \ .$$

Fiecare $u_i$ este reprezentat ca sumă de vectori din baza $U_i$, şi toate aceste baze formează o bază a lui $V$, rezultă deci că avem o combinaţie liniară de vectori a unei baze a lui $V$ care este zero. Deci toţi scalarii sunt zero, ceea ce înseamnă că toţi $u_i$ sunt zero, deci suma este directă. □

Vom încheia acestă secţiune cu două observaţii importante. Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ (nu neapărat finit dimensional). Considerăm o bază $\mathfrak{B} = (e_i)_{i \in I}$ a lui $V$.

Avem prima teoremă:

**Teorema 2.27.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ (nu neapărat finit dimensional). Să considerăm o bază $\mathfrak{B} = (e_i)_{i \in I}$. Pentru orice $v \in V, v \neq 0$ există o submulţime unică $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ şi scalarii nenuli $a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \in \mathbb{F}^*$, astfel încât*

$$v = \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} e_{i_j} = a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_k} e_{i_k}.$$

*Demonstraţie.* Evident, din definiţia bazei, $v$ este o combinaţie liniară finită de elemente din bază. Trebuie să arătăm unicitatea. Presupunem contrariul, adică

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j_i} e_{j_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} e_{k_i},\ \alpha_{j_i} \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ \alpha_{k_i} \neq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Presupunem ca există $e_{k_s} \notin \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}$. Atunci, deoarece $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{j_i} e_{j_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} e_{k_i} = 0$, obţinem că $\alpha_{k_s} = 0$, contradicţie. Similar, $e_{j_s} \in \{e_{k_1}, \ldots, e_m\}$, pentru orice $s = \overline{1, n}$. Prin urmare, $m = n$ şi se poate presupune că

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j_i} e_{j_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} e_{k_i},\ \alpha_{j_i} \neq 0,\ i = \overline{1, n},\ \alpha_{k_i} \neq 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Folosind relaţia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{j_i} e_{j_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} e_{k_i} = 0$ vom obţine din nou că $\alpha_{j_i} = \alpha_{k_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, contradicţie. □

**Exemplul 2.28.** Arătaţi că $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^2$, şi găsiţi reprezentarea vectorului $v = (3, -1)$ în raport cu $\mathcal{B}$.

Scopul nostru este să găsim reprezentarea vectorului $v = (3, -1)$ în baza $B$, adică, să gasim doi scalari $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v = x\,(1, 1) + y\,(1, -1)\,.$$

Exprimînd egalitatea de mai sus vom obţine un sistem cu două necunoscute, $x$ şi $y$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Soluţia unică a sistemului, şi răspunsul problemei noastre, este $x = 1, y = 2$.

## 2.4 Schimbări de baze

În această secţiune vom avea de a face cu transformări prin calcul ale spaţiilor vectoriale finit dimensionale.

Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial finit dimensional, cu o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Orice vector $v \in V$ poate fi reprezentat în mod unic ca

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Scalarii $(a_1, \ldots, a_n)$ se numesc coordonatele vectorului $v$ în baza $\mathfrak{B}$. Este evident că dacă avem o altă bază $\mathfrak{B}'$, coordonatele aceluiaşi vector în noua bază sunt diferite. Cum se poate gestiona această schimbare? Să începem cu o situaţie mai generală.

**Teorema 2.29.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial finit dimensional peste $\mathbb{F}$ cu o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Considerăm vectorii $S = \{e_1^{'}, \ldots, e_m^{'}\} \subseteq V$:*

$$\begin{aligned} e_1^{'} &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ &\ldots \\ e_m^{'} &= a_{m1}e_1 + \cdots + a_{mn}e_n \end{aligned}$$

*Notăm prin $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ matricea formată din coeficienţii ecuaţiilor de mai sus. Dimensiunea subspaţiului $\langle S \rangle$ este egală cu rangul matricii $A$, adică $\dim\langle S \rangle = \operatorname{rang} A$.*

*Demonstraţie.* Să notăm prin $X_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{F}^n$, $i = \overline{1, m}$ coordonatele $e_i^{'}$, $i = \overline{1, m}$ în $\mathfrak{B}$. Atunci, combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i^{'}$ are coordonatele sale $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i$ în $\mathfrak{B}$. Prin urmare, mulţimea tuturor coordonatelor vectorilor din $\langle S \rangle$ este egală cu subspaţiul $\mathbb{F}^n$ generat de $\{X_1, ..., X_m\}$. În plus, $e_1^{'}, \ldots, e_m^{'}$ vor fi liniar independenţi dacă şi numai dacă $X_1, \ldots, X_m$ sunt liniar independenţi. Evident, dimensiunea subspaţiului $\langle X_1, ..., X_m \rangle$ a lui $\mathbb{F}^n$ este egală cu rangul matricii

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = A.$$

$\square$

Vom considera acum cazul când $m = n$ în abordarea de mai sus. Mulţimea

$S = \{e_1^{'}, \ldots, e_n^{'}\}$ este o bază dacă rang$A = n$. Avem acum

$$\begin{aligned} e_1^{'} &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ e_2^{'} &= a_{21}e_1 + \cdots + a_{2n}e_n \\ &\ldots \\ e_n^{'} &= a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{aligned}$$

reprezentând relaţiile care schimbă din baza $\mathfrak{B}$ la noua bază $\mathfrak{B}' = S$. Matricea $A^\top$ este notată prin

$$P^{(e,e^{'})} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Coloanele matricii sunt date de coordonatele vectorilor noii baze $e^{'}$ în raport cu vechea bază $e$!**

**Observaţii**

- În notaţie matricială avem
$$\begin{pmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ \ldots \\ e_n^{'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} \text{sau} \quad (e^{'})_{1,n} = (P^{(e,e^{'})})^\top (e)_{1,n}$$

- Considerăm schimbarea de bază de la $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ cu matricea $P^{(e,e^{'})}$ şi schimbarea bazei din $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}''$ cu matricea $P^{(e^{'},e^{''})}$. Ne putem gândi la "compunerea" acestor două transformări, adică schimbarea bazei din $\mathfrak{B}$ în $\mathfrak{B}''$ cu matricea $P^{(e,e^{''})}$. Este uşor să observăm că avem
$$P^{(e,e^{'})}P^{(e^{'},e^{''})} = P^{(e,e^{''})}.$$

- Dacă în cele discutate mai devreme considerăm $\mathfrak{B}^{''} = \mathfrak{B}$, vom avea

$$P^{(e,e^{'})}P^{(e^{'},e)} = I_n \ ,$$

ceea ce înseamnă

$$(P^{(e^{'},e)})^{-1} = P^{(e,e^{'})}.$$

La acest pas vom încerca să răspundem la următoarea întrebare, care este importantă în aplicaţii. Dacă avem două baze, un vector poate fi reprezentat în ambele. Care este relaţia dintre coordonatele vectorului în cele două baze?

În primul rând să fixăm un cadru. Considerăm spaţiul vectorial $V$, cu două baze $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ şi $\mathfrak{B}^{'} = \{e_1^{'}, \dots, e_n^{'}\}$ şi $P^{(e,e^{'})}$ matricea de schimbare a bazei.

Fie $v \in V$. Avem

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = b_1 e_1^{'} + \dots + b_n e_n^{'},$$

unde $(a_1, \dots a_n)$ şi $(b_1, \dots b_n)$ sunt coordonatele aceluiaşi vector în cele două baze. Putem scrie:

$$(v) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ \dots \\ e_n^{'} \end{pmatrix}.$$

Notăm cu

$$(v)_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

şi

$$(v)_{e'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

matricile coordonatelor vectorului $v$ în cele două baze.

Notăm mai departe cu

$$(e)_{1n} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

matricea coloană a bazei $\mathfrak{B}$ şi cu

$$(e^{'})_{1n} = \begin{pmatrix} e^{'}_1 \\ e^{'}_2 \\ \dots \\ e^{'}_n \end{pmatrix}$$

matricea coloană a bazei $\mathfrak{B}^{'}$, şi avem

$$v = (v)_e^{\top}(e)_{1n} = (v)_{e'}^{\top}(e^{'})_{1n} = (v)_{e'}^{\top}(P^{(e,e^{'})})^{\top}(e)_{1n}$$

Deoarece $v$ este reprezentat în mod unic într-o bază rezultă că

$$(v)_{e'}^{\top}(P^{(e,e^{'})})^{\top} = (v)_e^{\top} \ ,$$

sau

$$(v)_{e'} = (P^{(e,e^{'})})^{-1}(v)_e = P^{(e^{'},e)}(v)_e \ .$$

Prin urmare,

$$(v)_e = (P^{(e,e^{'})})(v)_{e'} \ .$$

## 2.5 Probleme

**Problema 2.5.1.** Arătaţi că pentru $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$ avem $\operatorname{span}(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n) = V$.

**Problema 2.5.2.** Găsiţi o bază a subspaţiului generat de următorii vectori daţi în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Problema 2.5.3.** Fie $V$ un spaţiu vectorial finit dimensional, $\dim V = n$. Arătaţi că există subspaţiile $U_1, \ldots, U_n$ de dimensiune unu, astfel încât

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

**Problema 2.5.4.** Găsiţi trei subspaţii diferite $U, V, W$ a spaţiului $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus V = V \oplus W = W \oplus U.$$

**Problema 2.5.5.** Fie $U, W$ două subspaţii din $\mathbb{R}^8$, cu $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ şi $\dim U + W = 8$. Arătaţi că $U \cap W = \{0\}$.

**Problema 2.5.6.** Fie $U, W$ subspaţii în $\mathbb{R}^9$ cu $\dim U = \dim W = 5$. Arătaţi că $U \cap W \neq \{0\}$.

**Problema 2.5.7.** Fie $U$ şi $W$ subspaţii ale spaţiului vectorial $V$ şi presupunem că fiecare vector $v \in V$ are o o unică exprimare de forma $v = u + w$ unde $u$ este din $U$ şi $w$ este din $W$. Arătaţi că

$$V = U \oplus W.$$

**Problema 2.5.8.** În $C[a, b]$ determinaţi dimensiunea subspaţiilor generate de următoarele seturi de vectori:

a) $\{1, \cos 2x, \cos^2 x\}$,

b) $\{e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}\}$, unde $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$

**Problema 2.5.9.** Determinaţi dimensiunea şi o bază a intersecţiei şi sumei următoarelor subspaţii:

- $U = \text{span}\{(2, 3, -1), (1, 2, 2, ), (1, 1, -3)\}$,
  $V = \text{span}\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3)\}$.
- $U = \text{span}\{(1, 1, 2, -1), (0, -1, -1, 2), (-1, 2, 1, -3\}$,
  $V = \text{span}\{(2, 1, 0, 1), (-2, -1, -1, -1), (3, 0, 2, 3)\}$.

**Problema 2.5.10.** Fie $U, V, W$ subspaţii ale aceluiaţi spaţiu vectorial şi presupunem că $U \subseteq W$. Arătaţi că

$$(U + V) \cap W = U + (V \cap W).$$

**Problema 2.5.11.** În $\mathbb{R}^4$ considerăm următoarul subspaţiu

$$V = \text{span}\{(2, 1, 0, 1), (-2, -1, -1, -1), (3, 0, 2, 3)\}.$$

Determinaţi un subspaţiu $W$ din $\mathbb{R}^4$ astfel încât $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

**Problema 2.5.12.** Fie $V, W$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{F}$. Aflaţi dimensiunea şi o bază pentru $V \times W$.

**Problema 2.5.13.** Aflaţi o bază a spaţiului matricelor simetrice, respectiv antisimetrice de dimensiune $n$.

**Problema 2.5.14.** Fie $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |, x_1+x_2+\ldots+x_n = 0,\ x_1+x_n = 0\}$. Găsiţi o bază în $V$.

**Problema 2.5.15.** Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o mulţime de matrici pătratice cu elemente numere reale de ordin $n$, şi $\mathcal{A}_n$, respectiv $\mathcal{S}_n$ mulţimea matricelor simetrice, respectiv antisimetrice de ordin $n$. Arătaţi că $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

**Problema 2.5.16.** Să notăm prin $\mathbb{R}_n[X]$ mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali având gradul cel mult $n$. Evident $\mathbb{R}_n[X]$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}[X]$ cu operaţiile induse. Găsiţi dimensiunea spaţiului cât $\mathbb{R}_n[X]/U$ unde $U$ este subspaţiul tuturor polinoamelor constante cu coeficienţi reali.

**Problema 2.5.17.** Fie $V$ un spaţiu vectorial finit dimensional şi fie $U$ şi $W$ două subspaţii ale lui $V$. Arătaţi că

$$\dim\left((U+W)/W\right) = \dim\left(U/(U\cap W)\right).$$

**Problema 2.5.18.** Să considerăm matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 11 & -7 & 16 \\ 4 & 9 & 12 & 10 & 26 \end{pmatrix}.$$

Fie $U$ şi $W$ două subspaţii ale lui $\mathbb{R}^5$ generate de liniile 1, 2 şi 5 ale lui $M$, respectiv de liniile 3 şi 4 ale lui $M$. Aflaţi dimensiunea lui $U+W$ şi $U\cap W$.

**Problema 2.5.19.** Găsiţi bazele sumei şi intersecţiei subspaţiilor $U$ şi $W$ ale lui $\mathbb{R}_4[X]$ generate de mulţimile de polinoame $\{1+2x+x^3, 1-x-x^2\}$ şi $\{x+x^2-3x^3, 2+2x-2x^3\}$.

# 3

# Aplicaţii liniare între spaţii vectoriale

Până acum ne-am ocupat de spaţii vectoriale. Este natural să ne întrebăm despre funcţii între ele, care să fie compatibile cu structura unui spaţiu vectorial. Acestea poartă denumirea de aplicaţii liniare, funcţii speciale care au o structură liniară. Sunt de asemenea numite şi morfisme de spaţii vectoriale sau transformări liniare.

**Definiţia 3.1.** *Fie $V$ şi $W$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{F}$. O aplicaţie liniară de la $V$ la $W$ este o funcţie $f : V \to W$ care are proprietatea $f(\alpha v + \beta u) = \alpha f(v) + \beta f(u)$ pentru orice $v, u \in V$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

Clasa aplicaţiilor liniare între $V$ şi $W$ va fi notată prin $L_{\mathbb{F}}(V, W)$ sau $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Din definiţie rezultă că $f(0_V) = 0_W$ şi

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i),\ \forall\ \alpha_i \in \mathbb{F},\ \forall v_i \in V, i = \overline{1,n}.$$

Trebuie să definim acum două noţiuni importante referitoare la o aplicaţie liniară: nucleul şi imaginea.

Considerăm mulţimile:

$$\ker f = f^{-1}(0_W) = \{v \in V | f(v) = 0_w\},\ \text{şi}$$

$$\text{im}f = f(V) = \{w \in W | \exists\ v \in V, f(v) = w\}.$$

**Definiţia 3.2.** *Mulţimile* $\ker f$ *şi* $f(V)$ *sunt numite nucleul (sau spaţiul nul), respectiv imaginea funcţiei* $f$.

Un exerciţiu simplu poate demonstra următoarea propoziţie.

**Propoziţia 3.3.** *Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare* $f : V \to W$ *sunt subspaţii ale lui* $V$ *şi respectiv* $W$.

**Exemplul 3.4.** Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dat de $(x, y) \mapsto (x + y, x + y)$. Determinaţi $\ker T$ şi $T(\mathbb{R}^2)$.

Din definiţie

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | T(x, y) = (0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + y, x + y) = (0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\right\}. \end{aligned}$$

Din punct de vedere geometric, aceasta este dreapta de ecuaţie $y = -x$. Evident $\ker T = \text{span}\{(1, -1)\}$ şi $\dim \ker T = 1$.

Din felul în care este definit $T$ putem observa că toţi vectorii din imaginea $T(\mathbb{R}^2)$ a lui $T$, au ambele componente egale între ele, deci

$$\begin{aligned} T\left(\mathbb{R}^2\right) &= \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\{(1, 1)\}. \end{aligned}$$

Pentru cazul finit dimensional dimensiunea lui ker şi im a unei aplicaţii liniare între spaţii vectoriale sunt legate prin următoarea teoremă.

**Teorema 3.5.** *Fie* $f : V \to W$ *o aplicaţie liniară între spaţiile vectoriale* $V$ *şi* $W$ *peste corpul* $\mathbb{F}$, $V$ *fiind finit dimensional. Atunci:*

$$dim\, V = dim \ker f + dim\, \text{im} f.$$

*Demonstraţie.* Fie $n$ şi $m$ dimensiunile lui $V$ şi $\ker f$, $m \leq n$. Considerăm o bază $\{e_1, \ldots, e_m\}$ pentru $\ker f$. Sistemul independent de vectori $e_1, \ldots, e_m$ poate fi completat la o bază $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ a lui $V$.

Scopul este de a dovedi că vectorii $f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)$ formează a bază pentru $f(V)$. Este suficient să arătăm că elementele $f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)$ sunt liniar independente deoarece ele generează $f(V)$.

Presupunem contrariul, că $f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)$ nu sunt liniar independente. Există $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ astfel încât

$$\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k f(e_k) = 0_W,$$

şi din liniaritatea lui $f$,

$$f(\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k) = 0_W.$$

Deoarece

$$v' = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k \in \ker f$$

şi $v'$ pot fi scrişi în funcţie de $e_1, \ldots, e_m$. Aceasta este compatibil numai cu faptul că $e_1, \ldots, e_n$ formează o bază a lui $V$ dacă $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, ceea ce implică liniar independenţa vectorilor $f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)$. $\square$

**Teorema 3.6.** *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între spaţiile vectoriale $V$ şi $W$, şi $dim V = dim W < \infty$. Atunci, $f(V) = W$ dacă $\ker f = \{0_V\}$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $\ker f = \{0_V\}$. Deoarece $f(V)$ este un subspaţiu al lui $W$ rezultă că $\dim V = \dim f(V) \leq \dim W$, care forţează ca $\dim f(V) = \dim W$, şi aceasta implică $f(V) = W$.

Faptul că $f(V) = W$ implică $\ker f = \{0_V\}$ rezultă din inversarea argumentelor.

$\square$

**Propoziţia 3.7.** *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între spaţiile vectoriale $V, W$ peste $\mathbb{F}$. Dacă $f$ este bijectivă, rezultă că inversa sa $f^{-1} : W \to V$ este o aplicaţie liniară.*

*Demonstraţie.* Deoarece $f$ este bijectivă $\forall w_1, w_2 \in W$, $\exists!\ v_1, v_2 \in V$, astfel încât $f(v_i) = w_i, i = 1, 2$. Deoarece $f$ este liniară, rezultă că

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2).$$

Urmează că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = f^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)$, deci

$$f^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 f^{-1}(w_1 +) + \alpha_2 f^{-1}(w_2).$$

$\square$

**Definiţia 3.8.** *O aplicaţie liniară bijectivă $f : V \to W$ între spaţiile vectoriale $V, W$ peste $\mathbb{F}$ poartă denumirea de izomorfism al spaţiului vectorial $V$ peste $W$, sau izomorfism între spaţiile vectoriale $V$ şi $W$.*

*Un spaţiu vectorial $V$ este denumit izomorf cu un spaţiu vectorial $W$ dacă există un izomorfism $f : V \to W$. Faptul că spaţiile vectoriale $V$ şi $W$ sunt izomorfe va fi notat cu $V \simeq W$.*

**Exemplul 3.9.** Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu vectorial şi $V_1, V_2$ două spaţii suplementare, adică $V = V_1 \oplus V_2$. Rezultă că $\forall v \in V$ avem o descompunere unică $v = v_1 + v_2$, cu $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$. Aplicaţia

$$p : V \to V_1,\ p(v) = v_1,\ \forall v \in V$$

se numeşte proiecţia lui $V$ pe $V_1$, paralelă cu $V_2$.

Aplicaţia $s : V \to V,\ s(v) = v_1 - v_2,\ \forall v \in V$ se numeşte simetria lui $V$ în raport cu $V_1$, paralelă cu $V_2$.

Este uşor de observat că $v \in V_1$, $v_2 = 0$, deci $p(v) = v$ şi $s(v) = v$, şi pentru $v \in V_2$, $v_1 = 0$, deci $p(v) = 0$ şi $s(v) = -v$.

## 3.1 Proprietăţi ale $L(V, W)$

În această secţiune vom demonstra câteva proprietăţi ale aplicaţiilor liniare, $L(V, W)$.

**Propoziţia 3.10.** *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între spaţiile liniare $V, W$ peste $\mathbb{F}$.*

1. *Dacă $V_1 \subseteq V$ este un subspaţiu al lui $V$, atunci $f(V_1)$ este un subspaţiu al lui $W$.*

2. *Dacă $W_1 \subseteq W$ este un subspaţiu al lui $W$, atunci $f^{-1}(W_1)$ este un subspaţiu al lui $V$.*

*Demonstraţie.* 1. Fie $w_1, w_2$ din $f(V_1)$. Rezultă că există $v_1, v_2 \in V_1$ astfel încât $f(v_i) = w_i, i = 1, 2$. Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ avem

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in f(V_1).$$

2. Pentru $v_1, v_2 \in f^{-1}(W_1)$ avem că $f(v_1), f(v_2) \in W_1$, deci $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \in W_1$. Deoarece $f$ este liniară avem că $\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{-1}(W_1)$.

□

Următoarea propoziţie arată că nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare caracterizează proprietăţile de injectivitate şi surjectivitate ale aplicaţiei.

**Propoziţia 3.11.** *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între spaţiile liniare $V, W$.*

1. *$f$ este injectivă $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$.*

2. *$f$ este surjectivă $\Longleftrightarrow$ $f(V) = W$.*

3. *$f$ este bijectivă $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$ şi $f(V) = W$.*

*Demonstraţie.* 1. Presupunem că $f$ este injectivă. Deoarece $f(0_V) = 0_W$ rezultă că $\ker f = \{0_V\} \subset V$. Pentru a demonstra în sens invers, presupunem că $\ker f = \{0_V\}$. Fie $v_1, v_2 \in V$ cu $f(v_1) = f(v_2)$. Rezultă că $f(v_1 - v_2) = 0$ şi deoarece $\ker f = \{0\}$ avem că $v_1 = v_2$. Afirmaţiile 2. şi 3. pot fi demonstrate în mod similar. $\square$

În cele ce urmează vom studia modul în care câteva aplicaţii particulare acţionează asupra unor sisteme particulare de vectori.

**Propoziţia 3.12.** *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între spaţiile liniare $V, W$ şi $S = \{v_i | i \in I\}$ un sistem de vectori din $V$.*

1. *Dacă $f$ este injectivă şi mulţimea $S$ este liniar independentă, atunci $f(S)$ este liniar independentă.*

2. *Dacă $f$ este surjectivă şi $S$ este un sistem de generatori, atunci $f(S)$ este un sistem de generatori.*

3. *Dacă $f$ este bijectivă şi $S$ este o bază pentru $V$, atunci $f(S)$ este o bază pentru $W$.*

*Demonstraţie.* 1. Fie $\{w_1, \dots, w_n\}$ un subsistem finit din $f(S)$, şi $\alpha_i \in \mathbb{F}$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = 0$. Există vectorii $v_i \in V$ astfel încât $f(v_i) = w_i$, pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$. Atunci $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = 0$, deci $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i =$

0. Deoarece $S$ este liniar independentă rezultă că $\alpha_i = 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, deci $f(S)$ este liniar independentă.

2. Fie $w \in W$. Există $v \in V$ cu $f(v) = w$. Deoarece $S$ este un sistem de generatori, există o familie finită de vectori din $S$, $v_i$, şi scalarii $\alpha_i \in \mathbb{F}, i = \overline{1, n}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v$. Rezultă că

$$w = f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i).$$

3. deoarece $f$ este bijectivă şi $S$ este o bază pentru $V$, rezultă că ambele afirmaţii 1. şi 2. au loc, adică, $f(S)$ este o bază pentru $W$. □

**Definiţia 3.13.** *Fie $f, g : V \to W$ aplicaţii liniare între spaţiile liniare $V$ şi $W$ peste $\mathbb{F}$ şi $\alpha \in \mathbb{F}$. Definim*

1. *$f + g : V \to W$ prin $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$, $\forall\ v \in V$, suma aplicaţiilor liniare, şi*

2. *$\alpha f : V \to W$ prin $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, $\forall\ v \in V, \forall\ \alpha \in \mathbb{F}$, înmulţirea cu scalari a aplicaţiei liniare.*

**Propoziţia 3.14.** *Cu operaţiile definite mai sus $L(V, W)$ devine un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$.*

Demonstrarea acestei propoziţii este o simplă verificare.

În următoarea parte vor particulariza studiul aplicaţiilor liniare, adică vom considera cazul când $V = W$.

**Definiţia 3.15.** *Mulţimea endomorfismelor unui spaţiu liniar $V$ este:*

$$\mathit{End}(L) = \{f : V \to V |\ f \text{ liniară }\}.$$

Din rezultatele secţiunii anterioare, $End(V)$ este un $\mathbb{F}$ spaţiu liniar.

Fie $W, U$ două spaţii liniare peste acelaşi corp $\mathbb{F}$, $f \in L(V, W)$ şi $g \in L(W, U)$. Vom defini produsul (compunerea) lui $f$ şi $g$ prin $h = g \circ f : V \to U$,

$$h(v) = g(f(v)),\ \forall\ v \in V.$$

**Propoziţia 3.16.** *Produsul a două aplicaţii liniare este o aplicaţie liniară.*

*Mai mult, dacă $f$ şi $g$ sunt izomorfisme, atunci produsul $h = g \circ f$ este un izomorfism.*

*Demonstraţie.* Se verifică faptul că pentru orice $v_1, v_2 \in V$ şi toţi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} h(\alpha v_1 + \beta v_2) &= g(f(\alpha v_1 + \beta v_2)) \\ &= g(\alpha f(v_1) + \beta f(v_2)) \\ &= g(\alpha f(v_1)) + g(\beta f(v_2)) \\ &= \alpha h(v_1) + \beta h(v_2). \end{aligned}$$

Ultima afirmaţie rezultă din faptul că $h$ este o bijecţie liniară. □

Se poate arăta că compunerea este distributivă în raport cu suma aplicaţiilor liniare, deci $End(V)$ devine un inel unitate.

Se poate verifica uşor că:

**Propoziţia 3.17.** *Izomorfismul între două spaţii liniare este o relaţie de echivalenţă.*

**Definiţia 3.18.** *Fie $V$ un $\mathbb{F}$ spaţiu liniar. Mulţimea*

$$Aut(V) = \{f \in End(V) |\ f \text{ izomorfism }\}$$

*este numită mulţimea automorfismelor spaţiului vectorial $V$.*

**Propoziţia 3.19.** *$Aut(V)$ este un grup în raport cu compunerea aplicaţiilor liniare.*

*Demonstraţie.* Este doar nevoie de a enumera proprietăţile.

1. aplicaţia identică $I_V$ este elementul neutru.

2. $g \circ f$ este un automorfism pentru $f$ şi $g$ automorfism.

3. inversul unui automorfism este un automorfism.

□

Grupul automorfismelor unui spaţiu liniar poartă denumirea de grupul liniar general şi este notat prin $GL(V)$.

**Exemplul 3.20.** • **Endomorfisme de proiecţie**

Un endomorfism $p : V \to V$ este numit proiecţia spaţiului liniar $V$ dacă

$$p^2 = p,$$

unde $p^2 = p \circ p$. Dacă $p$ este proiecţie, atunci:

1. $\ker p \oplus p(V) = V$
2. endomorfismul $q = I_V - p$ este o proiecţie.

Notăm $v_1 = p(v)$ şi $v_2 = v - v_1$, rezultă că $p(v_2) = p(v) - p(v_1) = p(v) - p^2(v) = 0_V$, deci $v_2 \in \ker f$. Prin urmare

$$v = v_1 + v_2, \ \forall \ v \in V,$$

unde $v_1, v_2 \in f(V)$ şi, mai mult, descompunerea este unică, deci avem descompunerea sumei directe $\ker p \oplus p(V) = V$. Pentru ultima afirmaţie vom face calculele $q^2 = (I_V - p) \circ (I_V - p) = I_V - p - p + p^2 = I_V - p = q$, deoarece $p$ este o proiecţie. Se poate observa că $q(V) = \ker p$ şi $\ker q = q(V)$. Notăm prin $V_1 = p(V)$ şi $V_2 = \ker p$. Rezultă că $p$ este proiecţia lui $V$ pe $V_1$, paralelă cu $V_2$, şi $q$ este proiecţia lui $V$ pe $V_2$ paralelă cu $V_1$.

- **Automorfism involutiv.** Un operator $s : V \to V$ este numit involutiv dacă $s^2 = I_V$. Din definiţie şi din exemplul anterior avem:

  1. un operator involutiv este un automorfism
  2. pentru orice automorfism involutiv, operatorii liniari:
  $$\begin{aligned} p_s &: V \to V, p_s(v) = \frac{1}{2}(v + s(v)) \\ q_s &: V \to V, q_s(v) = \frac{1}{2}(v - s(v)) \end{aligned}$$
  sunt proiecţii şi satisfac relaţia $p_s + q_s = 1_V$.
  3. reciproc, pentru proiecţia $p : V \to V$, operatorul $s_p : V \to V$, dat de $s_p(v) = 2p(v) - v$ este un automorfism involutiv.

Din cele de mai sus rezultă că $p_s \circ s = s \circ p_s = p, s_p \circ p = p \circ s_p = p$. Un automorfism involutiv $s$ este simetrie a lui $V$ în raport cu subspaţiul $p_s(V)$, paralel cu subspaţiul $\ker p_s$.

**Exemplul 3.21.** Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $f : V \to V$ o aplicaţie liniară astfel încât $\ker f = \mathrm{im} f$. Determinaţi mulţimea $\mathrm{im} f^2$, unde $f^2$ înseamnă compunerea lui $f$ cu el însuşi, $f^2 = f \circ f$.

Începem prin a scrie explicit

$$\begin{aligned} \mathrm{im} f^2 &= \mathrm{im} f \circ f \\ &= f \circ f\,(V) \\ &= f\,(f\,(V))\,. \end{aligned}$$

Dar, $f\,(V) = \mathrm{im} f = \ker f$ este mulţimea tuturor vectorilor care sunt transformaţi prin $f$ la zero, deci

$$\begin{aligned} \mathrm{im} f^2 &= f(\ker f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 3.2 Matricea unei aplicaţii liniare

Fie $V$ şi $W$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{F}$, $\dim V = m$, $\dim W = n$, şi $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ şi $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ baze în $V$ şi respectiv $W$. O aplicaţie liniară $T \in L(V, W)$ este determinată în mod unic de valorile din baza $e$.

Avem

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11} f_1 + \cdots + a_{1n} f_n, \\ T(e_2) &= a_{21} f_1 + \cdots + a_{2n} f_n, \\ &\vdots \\ T(e_m) &= a_{m1} f_1 + \cdots + a_{mn} f_n, \end{aligned}$$

sau, în notaţie matricială

$$\begin{pmatrix} T(e_1) \\ T(e_2) \\ \vdots \\ T(e_m) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ unde } A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Transpusa matricii $A$ este notată cu $M_T^{(f,e)}$ şi este numită matricea aplicaţiei liniare $T$ asociată bazei $e$ şi $f$.

Din definiţia matricii aplicaţiei liniare rezultă următoarea:

**Teorema 3.22.**
- *Pentru $T_1, T_2 \in L(V, W)$ şi $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$*

$$M_{a_1 T_1 + a_2 T_2} = a_1 M_{T_1} + a_2 M_{T_2}$$

- *Spaţiul vectorial $L(V, W)$ este izomorf cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ prin aplicaţia*

  *$T \in L(V, W) \mapsto M_T(\mathbb{F}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.*

- *În particular $End(V)$ este izomorf cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.*

Acum vrem să vedem cum poate fi exprimată imaginea unui vector prin aplicaţia liniară.

Fie $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{m} v_i e_i$, sau în notaţie matricială $(v)_e^\top (e)_{1m}$, unde, ca de obicei

$$(v)_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

şi

$$(e)_{1m} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}.$$

Acum să notăm $T(v) = w = \sum_{j=1}^{n} w_j e_j \in W$, avem

$$T(v) = (w)_f^\top (f)_{1n}.$$

$T$ fiind liniar, avem $T(v) = \sum_{i=1}^{m} v_i T(e_i)$, sau, din nou, în notaţie matriceală:

$$T(v) = (v)_e^\top (T(e))_{1m}.$$

Din definiţia lui $M_T^{(f,e)}$ rezultă că

$$(T(e))_{1m} = (M_T^{(f,e)})^\top (f)_{1n}.$$

Deci, în final avem

$$(w)_f^\top (f)_{1n} = (v)_e^\top (M_T^{(f,e)})^\top (f)_{1n}.$$

Din unicitatea coordonatelor vectorului într-o bază rezultă că

$$(w)_f^\top = (v)_e^\top (M_T^{(f,e)})^\top.$$

Luând transpusa relaţiei de mai sus obţinem

$$(w)_f = (M_T^{(f,e)})(v)_e.$$

**Exemplul 3.23.** Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Găsiţi o bază în $\ker T$ şi găsiţi dimensiunea $T\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Observăm că nucleul lui $T$,

$$\ker T = \left\{ (x, y, z) \in |T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

este mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 0, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

matricea sistemului fiind exact $T$. Pentru a rezolva acest sistem avem nevoie să calculăm rangul matricii $T$. Obţinem că

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

şi că $\operatorname{rang} A = 2$. Pentru a rezolva sistemul alegem $x = \alpha$ ca parametru şi exprimăm $y$ şi $z$ în funcţie de $x$ din primele două ecuaţii şi obţinem

$$x = \alpha, \quad y = -x, \quad z = \frac{3}{2}x.$$

Mulţimea soluţiilor este

$$\left\{\left(\alpha, -\alpha, \frac{3}{2}\alpha\right) | \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\left(1, -1, \frac{3}{2}\right)\right\}$$

şi deoarece, o bază în $\ker T$ este formată doar din $\left(1, -1, \frac{3}{2}\right)$, $\dim \ker T = 1$.

Din formula dimensiunii

$$\dim \ker T + \dim T\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim \mathbb{R}^3$$

deducem că $\dim T\left(\mathbb{R}^3\right) = 2$.

**Propoziţia 3.24.** *Fie $V, W, U$ spaţii vectoriale peste $\mathbb{F}$, de dimensiuni $m, n, p$, şi $T \in L(V, W)$, $S \in L(W, U)$, cu matricele $M_T$ şi $M_S$, într-o bază. Considerăm aplicaţia compusă $S \circ T : V \to U$ cu matricea $M_{S\circ T}$. Atunci*

$$M_{S\circ T} = M_s M_T.$$

*Demonstraţie.* Într-adevăr, se poate observa uşor că pentru $v \in V$ avem $(T(v)) = M_T(v)$ unde $(T(v))$, respectiv $(v)$ sunt coordonatele lui $T(v)$, respectiv $v$ în baza corespunzătoare. Similar, pentru $w \in W$ avem $(S(w)) = M_S(w)$.

Deci, $(S \circ T(v)) = (S(T(v))) = M_S(T(v)) = M_S M_T(v)$, sau, echivalent

$$M_{S\circ T} = M_S M_T.$$

□

Fie $V$ şi $W$ spaţii vectoriale şi $T \in L(V, W)$ o aplicaţie liniară. În $V$ şi $W$ considerăm bazele $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ şi $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$, în raport cu aceste baze aplicaţia liniară are matricea $M_T^{(f,e)}$. Dacă considerăm alte două baze $e' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ şi $f' = \{f'_1, \ldots, f'_n\}$ matricea lui $T$ în raport cu aceste baze va fi $M_T^{(f',e')}$. Ce relaţie vom avea între matricile aceleaşi aplicaţii liniare în aceste două baze?

**Teorema 3.25.** *În condiţiile de mai sus* $M_T^{(f',e')} = P^{(f',f)} M_T^{(f,e)} P^{(e,e')}$.

*Demonstraţie.* Să considerăm $v \in V$ şi fie $w = T(v)$. Avem

$$(w)_{f'} = M_T^{(f',e')}(v)_{e'} = M_T^{(f',e')} P^{(e',e)}(v)_e.$$

Pe de altă parte

$$(w)_{f'} = P^{(f',f)}(w)_f = P^{(f',f)}(T(v))_f = P^{(f',f)} M_T^{(f,e)}(v)_e.$$

Luând în considerare $(P^{(e',e)})^{-1} = P^{(e,e')}$ obţinem

$$M_T^{(f',e')} = P^{(f',f)} M_T^{(f,e)} (P^{(e',e)})^{-1} = P^{(f',f)} M_T^{(f,e)} P^{(e,e')}.$$

$\square$

**Corolarul 3.26.** *Fie $e$ şi $e'$ două baze ale spaţiului vectorial finit dimensional $V$ şi fie $T : V \to V$ o aplicaţie liniară. Dacă $T$ este reprezentată de matricile $A = M_T^{(e,e)}$ şi $A' = M_T^{(e',e')}$ în raport cu $e$ şi $e'$ respectiv, atunci $A' = PAP^{-1}$ unde $P$ este matricea de trecere din baza $e$ în baza $e'$.*

## 3.3 Probleme

**Problema 3.3.1.** Considerăm următoarele aplicaţii $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Verificaţi care dintre acestea sunt aplicaţii liniare.

a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3^2)$.

b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1, x_2, x_3)$.

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

e) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 0, 0)$.

f) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$.

**Problema 3.3.2.** Fie $T \in End(V)$ şi fie $\{e_i : i = \overline{1,n}\}$ o bază în $V$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. Matricea lui $T$, în raport cu baza $\{e_i : i = \overline{1,n}\}$ este superior triunghiulară.

2. $T(e_k) \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ pentru orice $k = \overline{1,n}$.

3. $T(\text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}) = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ pentru orice $k = \overline{1,n}$.

**Problema 3.3.3.** Fie $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ având matricile

$$M_{T_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$M_{T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

a) Găsiţi imaginea vectorului $(0, 1, -1)$ prin $T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}$.

b) Găsiţi imaginea vectorului $(1, 3, -2)$ prin $T_1 + T_2, (T_1 + T_2)^{-1}$.

c) Găsiţi imaginea vectorului $(1, 2, 0)$ prin $T_1 \circ T_2, T_2 \circ T_1$.

**Problema 3.3.4.** Fie $V$ un spaţiu vectorial complex şi fie $T \in End(V)$. Arătaţi că există o bază în $V$ astfel încât matricea lui $T$ relativ cu această bază este superior triunghiulară.

**Problema 3.3.5.** Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Găsiţi o bază în $\ker T, \operatorname{im} T$ şi dimensiunea spaţiilor $V, W, \ker T$ şi $\operatorname{im} T$.

**Problema 3.3.6.** Arătaţi că o aplicaţie liniară $T : V \to W$ este injectivă dacă şi numai dacă are proprietatea de a transforma submulţimile liniar independente ale lui $V$ în submulţimile liniar independente ale lui $W$.

**Problema 3.3.7.** Arătaţi că o aplicaţie liniară $T : V \to W$ este surjectivă dacă şi numai dacă are proprietatea de a transforma orice mulţime de generatori a lui $V$ într-o mulţime de generatori din $W$.

**Problema 3.3.8.** Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Determinaţi $\dim V, \dim W$ şi găsiţi o bază în $\operatorname{im} T$ şi $\ker T$.

**Problema 3.3.9.** Găsiţi toate aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\operatorname{im} T = \ker T$.

Găsiţi toţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât să existe o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea $\operatorname{im} T = \ker T$.

**Problema 3.3.10.** Fie $V$, respectiv $V_i$, $i = \overline{1,n}$ spaţii vectoriale peste $\mathbb{C}$. Arătaţi că dacă $T : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V$ este o aplicaţie liniară atunci există şi sunt unice aplicaţiile liniare $T_i : V_i \to V$, $i = \overline{1,n}$ astfel încât

$$T(v_1, \ldots, v_n) = T_1(v_1) + T_2(v_2) + \cdots + T_n(v_n).$$

**Problema 3.3.11.** (Prima teoremă de izomorfism). Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară între spaţii vectoriale $V$ şi $W$, atunci

$$V/\ker T \simeq \operatorname{im} T.$$

[Indicaţie: arătaţi că aplicaţia $S : V/\ker T \to \operatorname{im} T$, $S(v + \ker T) = T(v)$ este o aplicaţie liniară bijectivă.]

**Problema 3.3.12.** (A doua teoremă de izomorfism). Dacă $U$ şi $W$ sunt subspaţii ale spaţiului vectorial $V$, atunci

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

[Indicaţie: se defineşte aplicaţia $T : U \to (U+W)/W$ prin regula $T(u) = u+W$, şi se arată că $T$ este o aplicaţie liniară, se foloseşte problema anterioară.]

**Problema 3.3.13.** (A treia teoremă de izomorfism). Fie $U$ şi $W$ subspaţii ale spaţiului vectorial $V$ astfel încât $W \subseteq U$. Arătaţi că $U/W$ este un subspaţiu al lui $V/W$ şi că $(V/W)/(U/W) \simeq V/U$.

[Indicaţie: se defineşte aplicaţia $T : V/W \to V/U$ prin regula $T(v+W) = v+U$, se arată că $T$ este o operator liniar şi se foloseşte prima teoremă de izomorfism.]

**Problema 3.3.14.** Arătaţi că orice subspaţiu $U$ al unui spaţiu vectorial finit dimensional $V$ este nucleul şi imaginea unor operatori liniari adecvaţi din $V$.

**Problema 3.3.15.** Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ având matricea

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

în bază canonică $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ of $\mathbb{R}^4$.

Găsiţi matricea lui $T$ în raport cu bazele următoare:

a) $\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$.

b) $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

c) $\{e_4 - e_1, e_3 + e_4, e_2 - e_4, e_4\}$.

**Problema 3.3.16.** O aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ este definită de $T(x_,x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$. Fie $e = \{(2, 0, 0), (-1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$ şi $f = \{(0, -1), (1, 2)\}$ baze în $\mathbb{R}^3$ şi respectiv $\mathbb{R}^2$. Găsiţi matricea care reprezintă $T$ în raport cu aceste baze.

# 4

# Vectori proprii şi forma canonică Jordan

## 4.1 Subspaţii invariante. Vectori şi valori proprii

În această parte vom dezvolta în continuare teoria aplicaţiilor liniare, şi anume, suntem interesaţi de structura unui operator.

Vom începe prin a descrie pe scurt ceea ce ne aşteptăm să obţinem.

Să presupunem că avem un spaţiu vectorial $V$ peste un corp $\mathbb{F}$ şi un operator liniar $T \in End(V)$. Presupunem de asemenea că avem descompunerea în sumă directă:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i,$$

unde fiecare $U_i$ este un subspaţiu direct al lui $V$. Pentru a înţelege comportarea lui $T$ este nevoie doar de a înţelege comportarea fiecărei restricţii $T|_{U_j}$. A studia $T|_{U_j}$ ar fi mai uşor decât a studia $T$ deoarece $U_j$ este un spaţiu vectorial "mai mic" decât $V$. Oricum avem o problemă: dacă dorim să aplicăm instrumente care sunt folosite în mod uzual în teoria aplicaţiilor liniare, problema este că în general $T$ poate să nu transforme $U_j$ în el însuşi, cu alte cuvinte $T|_{U_j}$ poate să nu fie un operator pe

$U_j$. Pentru acest motiv este natural să considerăm doar acele feluri de descompuneri pentru care $T$ transformă fiecare $U_j$ în el însuşi.

**Definiţia 4.1.** *Fie $V$ un operator peste spaţiul vectorial $V$ peste $\mathbb{F}$ şi $U$ un subspaţiu al lui $V$. Subspaţiul $U$ este numit invariant în raport cu $T$ dacă $T(U) \subset U$, cu alte cuvinte $T|_U$ este un operator al lui $U$.*

Bineînţeles că o altă întrebare naturală se ridică lucrând cu subspaţii invariante. Cum se comportă un oparator pe un subspaţiu invariant de dimensiune unu? Fiecare subspaţiu de dimensiune unu este de forma $U = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{F}\}$. Dacă $U$ este invariant în raport cu $T$ rezultă că $T(u)$ ar trebui să fie în $U$, şi deci trebuie să existe un scalar $\lambda \in \mathbb{F}$ astfel încât $T(u) = \lambda u$. Invers, dacă un vector diferit de vectorul $u$ există în $V$ astfel încât $T(u) = \lambda u$, pentru $\lambda \in \mathbb{F}$, atunci subspaţiul $U$ este generat de $u$ este invariant în raport cu $T$ şi pentru orice vector $v$ în $U$ avem $T(v) = \lambda v$. Pare rezonabil să dăm următoarea definiţie:

**Definiţia 4.2.** *Fie $T \in End(V)$ un operator pe un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{F}$. Un scalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se numeşte valoare proprie pentru $T$ dacă există un vector diferit de zero $v \in V$ astfel încât $T(v) = \lambda v$. Un vector corespunzător care satisface egalitatea de mai sus se numeşte vector propriu asociat valorii proprii $\lambda$.*

Mulţimea vectorilor proprii ai lui $T$ corespunzători unei valori proprii $\lambda$ formează un spaţiu vectorial, notat cu $E(\lambda)$, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda$. Este evident că $E(\lambda) = \ker(T - \lambda I_V)$.

Pentru cazul finit dimensional fie $M_T$ matricea lui $T$ într-o bază oarecare. Egalitatea $T(v) = \lambda v$ este echivalentă cu $M_T v = \lambda v$, sau $(M_T - \lambda I_n)v = 0$, care este un sistem liniar. Evident acest sistem liniar omogen de ecuaţii liniare are soluţii netriviale dacă şi numai dacă

$$\det(M_T - \lambda I_n) = 0.$$

Să observăm că $\det(M_T - \lambda I_n)$ este un polinom de gradul $n$ în $\lambda$, unde $n = \dim V$. Acest polinom este denumit polinom caracteristic al operatorului $T$. Deci, valorile proprii ale lui $T$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic.

Mai observăm şi faptul că polinomul caracteristic nu depinde de alegerea bazei $B$ care este folosită la calculul matricii $M_T$ a transformării $T$. Într-adevăr, fie $B'$ o altă bază şi $M'_T$ matricea lui $T$ în raport cu noua bază. Mai mult, fie $P$ matricea transformării din $B$ în $B'$. Deci $M'_T = P^{-1}M_T P$ şi $\det(P) \neq 0$. Avem

$$\begin{aligned} \det(P^{-1}M_T P - \lambda I) &= \det(P^{-1}M_T P - P^{-1}(\lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}(M_T - \lambda I)P) \\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(M_T - \lambda I)\det(P) \\ &= \det(M_T - \lambda I), \end{aligned}$$

ceea ce demonstrază ceea ce am pretins.

**Teorema 4.3.** *Fie $T \in End(V)$. Presupunem că $\lambda_i, i = \overline{1,m}$, sunt valori proprii distincte ale lui $T$, şi $v_i, i = \overline{1,m}$, sunt vectorii proprii corespunzători. Mulţimea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ este liniar independentă.*

*Demonstraţie.* Presupunem, prin absurd, că mulţimea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ este liniar dependentă. Rezultă că există un cel mai mic index $k$ astfel încât

$$v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}.$$

Prin urmare există scalarii $a_1, \ldots a_{k-1}$ astfel încât

$$v_k = a_1 v_1 + \ldots a_{k-1}v_{k-1}.$$

Aplicând $T$ egalităţii de mai sus, obţinem

$$\lambda_k v_k = a_1\lambda_1 v_1 + \ldots a_{k-1}\lambda_{k-1}v_{k-1}.$$

Rezultă că

$$0 = a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1}.$$

Deoarece am ales $k$ ca fiind cel mai mic index astfel încât $v_k = a_1v_1 + \cdots + a_{k-1}v_{k-1}$, rezultă că mulţimea $\{v_1, \cdots v_{k-1}\}$ este liniar independentă. Rezultă că toate $a$-urile sunt zero. □

**Corolarul 4.4.** *Un operator $T$ pe un spaţiu vectorial finit dimensional $V$ are cel mult $\dim V$ valori proprii distincte.*

*Demonstraţie.* Aceasta este o consecinţă evidentă a faptului că într-un spaţiu vectorial avem cel mult $\dim V$ vectori liniar independenţi. □

Aplicaţiile liniare care au exact $n = \dim V$ vectori proprii liniar independenţi au nişte proprietăţi foarte drăguţe şi simple. Acesta este cel mai fericit caz pe care îl putem întâlni în clasa aplicaţiilor liniare.

**Definiţia 4.5.** *O aplicaţie liniară $T : V \to V$ se spune că este diagonalizabilă dacă există o bază a lui $V$ compusă din $n$ vectori proprii independenţi unde $n = \dim V$.*

Reamintim că matricele $A$ şi $B$ sunt asemenea dacă există o matrice inversabilă $P$ astfel încât $B = PAP^{-1}$. Prin urmare, o matrice $A$ este diagonalizabilă dacă este asemenea cu o matrice diagonală $D$.

## 4.2 Polinomul minimal al unui operator

Motivul principal pentru care există o teorie mai bogată a operatorilor liniari decât a aplicaţiilor liniare este că operatorii pot fi ridicaţi la putere (putem să considerăm compunerea unui operator cu el însuşi).

Fie $V$ un spaţiu vectorial $n$-dimensional peste corpul $\mathbb{F}$ şi $T : V \to V$ un operator liniar.

Acum, $L(V, V) = End(V)$ este un spaţiu vectorial $n^2$ dimensional. Putem considera $T^2 = T \circ T$ şi bineînţeles putem obţine $T^n = T^{n-1} \circ T$ în mod inductiv. Definim $T^0$ ca fiind operatorul identitate $I = I_V$ pe $V$. Dacă $T$ este inversabilă (bijectivă), atunci există $T^{-1}$, deci putem defini $T^{-m} = (T^{-1})^m$. Bineînţeles că

$$T^m T^n = T^{m+n}, \quad \text{pentru} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $T \in End(V)$ şi $p \in \mathbb{F}[X]$ un polinom dat de

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_m z^m \ , \quad z \in \mathbb{F}$$

definim operatorul $p(T)$ dat de

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \dots a_m T^m.$$

Aceasta este o nouă utilizare a aceluiaşi simbol $p$, deoarece putem aplica operatorii nu doar elementelor din $\mathbb{F}$. Dacă fixăm operatorul $T$ obţinem o funcţie definită pe $\mathbb{F}[X]$ cu valori în $End(V)$, dată de $p \to p(T)$ care este liniară. Pentru $p, q \in \mathbb{F}[X]$ definim operatorul $pq$ dat prin $(pq)(T) = p(T)q(T)$.

Acum începem studiul existenţei valorilor proprii şi proprietăţilor acestora.

**Teorema 4.6.** *Orice operator peste un spaţiu vectorial complex finit dimensional, diferit de zero, are o valoare proprie.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $V$ este un spaţiu vectorial complex finit dimensional şi $T \in End(V)$. Alegem $v \in V$, $v \neq 0$. Considerăm mulţimea

$$(v, T(v), T^2(v), \dots T^n(v)).$$

Această mulţime este un sistem liniar dependent (ei sunt $n+1$ vectori şi $\dim V = n$). Atunci există numerele complexe, $a_0, \dots a_n$, nu toate 0, astfel încât

$$0 = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v) \ .$$

Fie $m$ cel mai mare index astfel încât $a_m \neq 0$. Atunci avem descompunerea

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m = a_0(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_m) \ .$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 v + a_1 T(v) + \dots a_n T^n(v) \\ &= (a_0 I + a_1 T + \dots a_n T^n)(v) \\ &= a_0(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_m I)(v) \ . \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $T - \lambda_j I$ nu este injectivă pentru cel puţin un $j$, sau echivalent $T$ are o valoare proprie. □

**Observaţia 4.7.** Afirmaţia analoagă nu este adevărată pentru spaţiile vectoriale reale. Dar spaţiile vectoriale reale sunt întotdeauna subspaţii invariante de dimensiune 1 sau 2.

**Exemplul 4.8.** Fie $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ dat de $T(x, y) = (-y, x)$. Acesta nu are valori proprii şi vectori proprii dacă $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Găsiţi-i dacă $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Evident, $T(x, y) = \lambda(x, y)$ conduce la $(-y, x) = \lambda(x, y)$, sau echivalent

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ \lambda y - x = 0. \end{cases}$$

Sistemul anterior este echivalent cu $x = \lambda y$, $(\lambda^2 + 1)y = 0$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci soluţia este $x = y = 0$, dar să observăm că $(0, 0)$ este exclus din vectorii proprii prin definiţie.

Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ obţinem valorile proprii $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ şi vectorii proprii corespunzători $(i, 1) \in \mathbb{C}^2$, respectiv $(-i, 1) \in \mathbb{C}^2$.

**Teorema 4.9.** *Orice operator pe un spaţiu vectorial real de dimensiune impară are o valoare proprie.*

*Demonstraţie.* Fie $T \in End(V)$ şi $n = \dim V$ număr impar. Valorile proprii ale lui $T$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic care este $\det(M_T - \lambda I_n)$. Acest polinom este un polinom de grad $n$ în $\lambda$, deci, deoarece $n$ este impar, ecuaţia $\det(M_T - \lambda I_n) = 0$ are cel puţin o soluţie reală. □

Un scop central al algebrei liniare este de a arăta că un operator dat $T \in End(V)$ are o matrice rezonabil de simplă într-o bază dată. Este natural să ne gândim că rezonabil simplu înseamnă cât de mulţi de zero posibil.
Reamintim că pentru o bază $\{e_k, k = \overline{1, n}\}$,

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \ ,$$

unde $M_T = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ este matricea operatorului.

**Teorema 4.10.** *Presupunem $T \in End(V)$ şi $\{e_i, i = \overline{1, n}\}$ este o bază a lui $V$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Matricea lui $T$ în raport cu o bază $\{e_i, i = \overline{1, n}\}$ este superior triunghiulară.*

2. *$T(e_k) \in span\{e_1, \ldots, e_k\}$ pentru $k = \overline{1, n}$.*

3. *$span\{e_1, \ldots, e_k\}$ este invariantă în raport cu $T$ pentru fiecare $k = \overline{1, n}$.*

*Demonstraţie.* 1⇔2 evident rezultă din definiţie. De asemenea şi 3⇒2. Rămâne doar de a demonstra că 2⇒3.

Deci, presupunem că 2 are loc. Fixăm $k \in \{1, \ldots, n\}$. Din 2 avem

$$\begin{aligned} T(e_1) &\in \operatorname{span}\{e_1\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \\ T(e_2) &\in \operatorname{span}\{e_1, e_2\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \\ &\vdots \\ T(e_k) &\in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}. \end{aligned}$$

Deci, pentru $v$ o combinaţie liniară de vectorii $\{e_1, \ldots, e_k\}$ avem că

$$T(v) \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\},$$

şi prin urmare 3. are loc. $\square$

**Teorema 4.11.** *Presupunem că $V$ este un spaţiu vectorial complex şi $T \in End(V)$. Atunci există o bază a lui $V$ astfel încât $T$ este o matrice superior triunghiulară în raport cu baza.*

*Demonstraţie.* Facem inducţie după $\dim V$. Evident afirmaţia are loc pentru $\dim V = 1$.

Presupunem că $\dim V > 1$ şi afirmaţia are loc pentru toate spaţiile vectoriale complexe de dimensiune mai mică decât dimensiunea lui $V$. Fie $\lambda$ o valoare proprie a lui $T$ (aceasta există) şi

$$U = \operatorname{im}(T - \lambda I).$$

Deoarece $T - \lambda I$ nu este surjectivă, $\dim U < \dim V$. Mai mult $U$ este invariantă în raport cu $T$, deci pentru $u \in U$ există $v \in V$ astfel încât $u = T(v) - \lambda v$, deci $T(u) = T(T(v)) - \lambda T(v) = (T - \lambda I)(w) \in U$ unde $w = T(v)$.

Prin urmare, $T|_U$ este un operator peste $U$. Din ipoteza inducţiei există o bază $\{u_1, \ldots, u_m\}$ a lui $U$ în raport cu care $T|_U$ are o matrice superior triunghiulară.

Deci, pentru orice $j \in \{1, \dots, m\}$ avem

$$T(u_j) = T|_U(u_j) \in \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}.$$

Extindem baza $\{u_1, \dots, u_m\}$ a lui $U$ la o bază $\{u_1, \dots u_m, v_1, \dots v_n\}$ a lui $V$. Pentru orice $k = \overline{1, n}$

$$T(v_k) = (T - \lambda I)(v_k) + \lambda v_k.$$

Din definiţia lui $U$, $(T - \lambda I)(v_k) \in U = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$. Aşadar ecuaţia de mai sus arată că

$$T(v_k) \in \text{span}\{u_1, \dots, u_m, v_k\}.$$

Din aceasta, în virtutea teoremei anterioare, rezultă că $T$ are o matrice superior triunghiulară în raport cu această bază. $\square$

Unul dintre aspectele pozitive ale acestei teoreme este că, dacă avem acest tip de bază, putem decide dacă operatorul este inversabil prin analiza matricii operatorului.

**Teorema 4.12.** *Presupunem că $T \in End(V)$ are o matrice superior triunghiulară în raport cu o bază a lui $V$. Atunci $T$ este inversabilă dacă şi numai dacă toate elementele de pe diagonala matricii sunt diferite de zero.*

*Demonstraţie.* Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui $V$ în raport cu care $T$ are matricea

$$M_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vom demonstra că $T$ nu este inversabilă dacă unul din $\lambda_k$ este egal cu zero. Dacă $\lambda_1 = 0$, atunci $T(v_1) = 0$, deci $T$ nu este inversabilă, aşa cum doream.

Presupunem că $\lambda_k = 0$, $1 < k \leq n$. Operatorul $T$ transformă vectorii $e_1, \ldots, e_{k-1}$ în $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ şi, deoarece $\lambda_k = 0$, $T(e_k) \in \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. Deci, vectorii $T(e_1), \ldots, T(e_k)$ sunt liniar dependenţi (sunt $k$ vectori într-un spaţiu vectorial $k-1$ dimensional, $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. Prin urmare $T$ nu este injectiv, şi nu este inversabil.

Presupunem că $T$ nu este inversabil. Atunci $\ker T \neq \{0\}$, deci $v \in V$, $v \neq 0$ există astfel încât $T(v) = 0$. Fie

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

şi fie $k$ cel mai mare întreg cu $a_k \neq 0$. Atunci

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k,$$

şi

$$0 = T(v),$$

$$0 = T(a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k),$$

$$0 = (a_1 T(e_1) + \cdots + a_{k-1} T(e_{k-1})) + a_k T(e_k).$$

Termenul $(a_1 T(e_1) + \cdots + a_{k-1} T(e_{k-1}))$ este în $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, datorită formei lui $M_T$. În cele din urmă $T(e_k) \in \operatorname{span}\{e_1 \ldots, e_{k-1}\}$. Aşa că $T(e_k)$ este scris ca o combinaţie liniară a bazei $\{e_1, \ldots, e_n\}$, coeficienţii $e_k$ vor fi zero. Cu alte cuvinte, $\lambda_k = 0$. □

**Teorema 4.13.** *Presupunem că $T \in End(V)$ are o matrice superior triunghiulară în raport cu o bază a lui $V$. Atunci valorile proprii ale lui $T$ sunt exact valorile de pe diagonala principală a matricii superior triunghiulare.*

*Demonstraţie.* Presupunem că avem matricea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel încât matricea lui $T$ este superior triunghiulară în această bază. Fie $\lambda \in \mathbb{F}$, şi considerăm operatorul $T - \lambda I$. Este aceeaşi matrice, exceptând că pe diagonală elementele sunt $\lambda_i - \lambda$ iar elementele din $T$ sunt $\lambda_j$. Rezultă că $T - \lambda I$ nu este inversabilă dacă $\lambda$ este egal cu $\lambda_j$. Deci $\lambda$ este o valoare proprie aşa cum am dorit. □

## 4.3 Matrice diagonală

O matrice diagonală este o matrice cu elementele zero exceptând eventual elementele de pe diagonală.

**Propoziţia 4.14.** *Dacă $T \in End(V)$ are $\dim V$ valori proprii distincte, atunci $T$ are o matrice diagonală*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*în raport cu o anumită bază.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $T$ are $\dim V$ valori proprii distincte, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, unde $n = \dim V$. Alegem vectorii proprii corespunzători $e_1, \dots, e_n$. Deoarece vectorii diferiţi de zero corespunzători valorilor proprii distincte sunt liniar independenţi, obţinem un set de vectori cu cardinalul egal cu $\dim V$, care este o bază, şi în această bază matricea lui $T$ este diagonală. $\square$

Următoarea propoziţie impune câteva condiţii unui operator care sunt echivalente cu a avea o matrice diagonală.

**Propoziţia 4.15.** *Presupunem că $T \in End(V)$. Notăm $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale lui $T$. Următoarele condiţii sunt echivalente.*

1. *$T$ are o matrice diagonală în raport cu o bază din $V$.*

2. *$V$ are o bază formată din vectori proprii.*

3. *Există subspaţiile de dimensiune unu $U_1, \dots, U_m$ ale lui $V$, fiecare invariant în raport cu $T$ astfel încât*
$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m.$$

*4.* $V = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_n I)$.

*5.* $\dim V = \dim \ker(T - \lambda_1 I) + \cdots + \dim \ker(T - \lambda_n I)$.

*Demonstraţie.* Am văzut că $1 \Leftrightarrow 2$. Presupunem că 2 are loc. Alegem $\{e_1, \ldots, e_m\}$ o bază formată din vectori proprii, şi $U_i = \operatorname{span}\{e_i\}$, pentru $i = \overline{1,m}$. Deci $2 \Rightarrow 3$. Presupunem că 3 are loc. Alegem o bază $e_j \in U_j$, $j = \overline{1,m}$. Rezultă că fiecare $e_j$, $j = \overline{1,m}$ este un vector propriu, deci ei sunt liniar independenţi, şi deoarece ei sunt $m$ vectori, formează o bază. Aşadar 3 implică 2.

Acum ştim că $1, 2, 3$ sunt echivalente. În cele ce urmează vom demonstra următorul lanţ de implicaţii

$$2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2$$

Presupunem că 2 are loc, atunci $V$ are o bază formată din vectori proprii. Atunci fiecare vector din $V$ este o combinaţie liniară de vectori proprii din $T$, adică

$$V = \ker(T - \lambda_1 I) + \cdots + \ker(T - \lambda_n I).$$

Arătăm că aceasta este o sumă directă. Presupunem că

$$0 = u_1 + \cdots + u_n \ ,$$

cu $u_j \in \ker(T - \lambda_j I)$, $j = \overline{1,n}$. Aceştia sunt liniar independenţi, deci ei sunt toţi 0.

În cele din urmă implicaţia $4 \Rightarrow 5$ este evidentă deoarece în 4 avem o sumă directă.

$5 \Rightarrow 2$. $\dim V = \dim \ker(T - \lambda_1 I) + \cdots + \dim \ker(T - \lambda_n I)$. Conform cu rezultatul precedent, valorile proprii distincte au condus la vectori proprii liniar independenţi. Fie $\{e_1^1, \ldots, e_{i_1}^1\}, \ldots, \{e_1^n, \ldots, e_{i_n}^n\}$ baze în $\ker(T - \lambda_1 I), \ldots, \ker(T - \lambda_n I)$. Atunci $\dim V = i_1 + \cdots + i_n$, şi $\{e_1^1, \ldots, e_{i_1}^1, \ldots, e_1^n, \ldots, e_{i_n}^n\}$ sunt liniar independenţi. Prin urmare $V = \operatorname{span}\{e_1^1, \ldots, e_{i_1}^1, \ldots, e_1^n, \ldots, e_{i_n}^n\}$ ceea ce demonstrază că 2 are loc. $\square$

**Exemplul 4.16.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătaţi că $A$ este diagonalizabilă şi găsiţi o matrice diagonală asemenea cu $A$.

Polinomul caracteristic al lui $A$ este

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Deci, valorile proprii ale lui $A$ sunt $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = 3$. Pentru a găsi vectorii proprii corespunzători, trebuie să rezolvăm cele trei sisteme liniare $(A + I)v = 0$, $(A - 2I)v = 0$ şi $(A - 3I)v = 0$. Rezolvând cele trei sisteme, găsim că spaţiile soluţiilor sunt

$$\{(\alpha, \alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

$$\{(\alpha, \alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

respectiv

$$\{(\alpha, -\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Deci, vectorii proprii corespunzători lui $\lambda_1, \lambda_2$ şi $\lambda_3$ respectiv, sunt $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 1, -1)$ şi respectiv $v_3 = (1, -1, 0)$. Există 3 vectori proprii liniar independenţi, deci $A$ este diagonalizabilă.

Matricea de trecere este $P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Avem $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Deci, matricea diagonală asemenea lui $A$ este

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Evident putem să calculăm direct $D$, ştiind că $D$ este matricea diagonală având valorile proprii ale lui $A$ pe diagonala sa principală.

**Propoziţia 4.17.** *Dacă $\lambda$ este o valoare proprie pentru un operator (endomorfism) $T$, şi $v \neq 0$, $v \in V$ este un vector propriu atunci avem:*

1. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda^k$ este o valoare proprie pentru $T^k = T \circ \cdots \circ T$ ($k$ ori) şi $v$ este vector propriu al lui $T^k$.*

2. *Dacă $p \in \mathbb{F}[X]$ este un polinom cu coeficienţi în $\mathbb{F}$, atunci $p(\lambda)$ este o valoare proprie pentru $p(T)$ şi $v$ este un vector propriu al lui $p(T)$.*

3. *Pentru $T$ automorfism (endomorfism bijectiv), $\lambda^{-1}$ este o valoare proprie pentru $T^{-1}$ şi $v$ este un vector propriu pentru $T^{-1}$.*

*Demonstraţie.* 1. Avem $T(v) = \lambda v$, deci $T \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$. Presupunem că $T^{k-1}(v) = \lambda^{k-1}v$. Atunci $T^k(v) =$

$$T \circ T^{k-1}(v) = T(T^{k-1}(v)) = T(\lambda^{k-1}v) = \lambda^{k-1}T(v) = \lambda^{k-1}\lambda v = \lambda^k v.$$

2. Fie $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}[X]$. Atunci $p(T)(v) =$

$$a_0I(v) + a_1T(v) + \cdots + a_nT^n(v) = a_0v + a_1(\lambda v) + \cdots + a_n(\lambda^n v) = p(\lambda)v.$$

3. $T^{-1}(v) = u$ astfel încât $T(u) = v$. Dar $v = \lambda^{-1}T(v) = T(\lambda^{-1}v)$, deci $T(u) = T(\lambda^{-1}v)$. Deoarece $T$ este injectiv avem $u = \lambda^{-1}v$, sau echivalent $T^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$. $\square$

**Exemplul 4.18.** Fie $T : V \to V$ o aplicaţie liniară. Arătaţi că dacă $-1$ este o valoare proprie a lui $T^2 + T$ atunci 1 este o valoare proprie a lui $T^3$. Aici $I$ este aplicaţia identitate şi $T^2 = T \circ T$, etc.

Din faptul că $-1$ este o valoare proprie a lui $T^2 + T$ există $v \neq 0$ astfel încât

$$\left(T^2 + T\right) v = -v,$$

sau, echivalent

$$\left(T^2 + T + I\right) v = 0.$$

Acum, aplicând aplicaţia liniară $T - I$ (reamintim că o aplicaţie liniară formează un spaţiu vectorial, deci suma sau diferenţa a două aplicaţii liniare este tot liniară) relaţiei de mai sus obţinem

$$(T - I)\left(T^2 + T + I\right) v = 0.$$

Aici am folosit faptul că, din liniaritate, $(T - I)\, 0 = 0$.

În final, calcule simple arată că $(T - I)(T^2 + T + I) = T^3 - I$, deci ecuaţia de mai sus arată că

$$T^3 v = v,$$

aşa cum am dorit.

## 4.4 Forma canonică Jordan

Într-o secţiune anterioară am studiat endomorfismele care sunt diagonalizabile.

Fie $V$ un spaţiu vectorial de dimensiune finită $n$ peste un corp $\mathbb{F}$. Fie $T : V \to V$ şi fie $\lambda_0$ o valoare proprie a lui $T$. Considerăm matricea endomorfismului într-o bază, $T(v) = M_T v$. Valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$\det(M_t - \lambda I_n) = 0$. Poate fi arătat că acest polinom nu depinde de bază şi de matricea $M_T$. Deci, va fi numit polinomul caracteristic al endomorfismului $T$, şi va fi notat cu $P(\lambda)$, şi desigur că grad $P = n$. Câteodată este denumit polinomul caracteristic al matricii, dar vom înţelege că e matricea asociată unui operator.

Notăm prin $m(\lambda_0)$ multiplicitatea lui $\lambda_0$ ca rădăcină a acestui polinom. Asociat la valoarea proprie $\lambda_0$ considerăm subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda_0$:

$$E(\lambda_0) = \{v \in V | T(v) = \lambda_0 v\}.$$

Considerăm o bază a lui $V$ şi fie $M_T$ matricea lui $T$ în raport cu această bază. Avem că:

**Teorema 4.19.** *Cu notaţiile de mai sus, următoarea afirmaţie are loc:*

$$dim\, E(\lambda_0) = n - rang\,(M_T - \lambda_0 I) \leq m(\lambda_0).$$

*Demonstraţie.* Evident este îndeajuns să demonstrăm afirmaţia în $V = \mathbb{R}^n$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ vectori proprii liniar independenţi asociaţi lui $\lambda_0$, deci $\dim E(\lambda_0) = r$. Completăm această mulţime cu $x_{r+1}, \ldots x_n$ la o bază din $\mathbb{R}^n$. Fie $P$ o matrice ale cărei coloane sunt $x_i$, $i = \overline{1,n}$. Avem $M_T P = [\lambda_0 x_1 | \ldots | \lambda_0 x_r | \ldots]$. Obţinem că primele $r$ coloane ale lui $P^{-1} M_T P$ sunt diagonale cu $\lambda_0$ pe diagonală, dar restul coloanelor sunt indeterminabile. Arătăm mai departe că $P^{-1} M_T P$ are acelaşi polinom caracteristic ca şi $M_T$. Într-adevăr

$$\det(P^{-1} M_T P - \lambda I) = \det(P^{-1} M_T P - P^{-1}(\lambda I) P) =$$

$$\det(P^{-1}(M_T - \lambda I) P) = \frac{1}{\det(P)} \det(M_T - \lambda I) \det(P) = \det(M_T - \lambda I).$$

Dar deoarece cele câteva coloane ale lui $P^{-1} M_T P$ sunt diagonale cu $\lambda_0$ pe diagonală avem că polinomul caracteristic al lui $P^{-1} M_T P$ are un factor de cel puţin $(\lambda_0 - \lambda)^r$, deci multiplicitatea algebrică a lui $\lambda_0$ este cel puţin $r$.

□

Valoarea $\dim E(\lambda_0)$ este numită multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda_0$.

Fie $T \in End(V)$, şi presupunem că rădăcinile polinomului caracteristic sunt din $\mathbb{F}$. Fie $\lambda$ o rădăcină a polinomului caracteristic, adică o valoare proprie a lui $T$. Considerăm $m$ multiplicitatea algebrică a lui $\lambda$ şi $q = \dim E(\lambda)$ multiplicitatea geometrică a lui $\lambda$.

Este posibil să găsim $q$ vectori proprii şi $m - q$ vectori principali (deasemenea denumiţi şi vectori proprii generalizaţi), toţi liniari independenţi, şi un vector propriu $v$ şi vectorii principali corespunzători $u_1, \ldots, u_r$ care satisfac

$$T(v) = \lambda v, T(u_1) = \lambda u_1 + v, \ldots, T(u_r) = \lambda u_r + u_{r-1}.$$

Definiţia precedentă poate fi spusă în mod echivalent astfel:

Un vector $u$ diferit de zero este denumit vector propriu generalizat de rang $r$ asociat valorii proprii $\lambda$ dacă şi numai dacă $(T - \lambda I)^r(u) = 0$ şi $(T - \lambda I)^{r-1}(u) \neq 0$. Observăm că un vector propriu generalizat de rang 1 este un vector propriu obişnuit. Vectorii proprii definiţi anterior ca vectori principali $u_1, \ldots, u_r$ sunt vectorii proprii generalizaţi de rang $2, \ldots, r + 1$.

Este cunoscut că dacă $\lambda$ este o valoare proprie cu multiplicitatea algebrică $m$, atunci sunt $m$ vectori proprii liniar independenţi asociaţi lui $\lambda$.

Aceşti vectori proprii şi vectori proprii generalizaţi asociaţi tuturor valorilor proprii ale lui $T$, formează o bază a lui $V$, numită baza Jordan în raport cu $T$. Matricea lui $T$ relativ la o bază Jordan este numită matricea Jordan, şi are forma

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix}$$

$J$-urile sunt matrici, numite celule Jordan. Fiecare celulă reprezintă contribuţia unui vector propriu $v$, şi vectorilor principali corespunzători, $u_1, \ldots u_r$, şi are forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{F})$$

Este uşor să vedem că matricea Jordan este o matrice diagonală dacă nu sunt vectori principali, dacă $m(\lambda) = \dim E(\lambda)$ pentru fiecare valoare proprie $\lambda$.

Fie $M_T$ matricea lui $T$ în raport cu o bază dată $B$, şi $J$ matricea Jordan în raport cu o bază Jordan $B'$. Fie $P$ matricea de trecere din $B$ la $B'$, deci are coloane ce conţin vectori proprii sau vectori proprii generalizaţi. Atunci $J = P^{-1}M_TP$, deci $M_T = PJP^{-1}$.

**Exemplul 4.20.** Considerăm operatorul cu matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Găsiţi matricea Jordan şi matricea de transformare a matricii $A$.

Polinomul caracteristic al lui $A$ este $\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^3$, deci $\lambda = 2$ este o valoare proprie cu multiplicitatea algebrică 3. Rezolvând sistemul omogen $(A-2I)v = 0$ obţinem spaţiul soluţiilor $E(2) = \ker(A-2I) = \{(\alpha, 2\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci dimensiunea lui $E(2)$ este 2, prin urmare valoarea proprie $\lambda = 2$ are multiplicitatea geometrică 2. Prin urmare putem lua vectorii proprii liniar independenţi $v_1 = (1, 2, 1)$ respectiv $v_2 = (0, 0, 1)$. Să remarcăm că avem nevoie de un vector propriu generalizat, care poate fi obţinut ca soluţie a sistemului

$$(A - 2I)u = v_1.$$

Soluţiile acestui sistem sunt date de mulţimea $\{(\alpha, 2\alpha+1, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, deci vectorul propriu generalizat, este $u_1 = (1, 3, 0)$.

Să remarcăm că $v_1, u_1, v_2$ sunt liniar independenţi, deci avem matricea de trecere $P = [v_1|u_1|v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exemplul 4.21.** Considerăm operatorul cu matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -7 \\ 1 & -13 & -4 \\ -1 & 25 & 8 \end{pmatrix}$. Găsiţi matricea Jordan şi matricea transformării lui $A$.

Polinomul caracteristic al lui $A$ este $\det(A - \lambda I) = -(\lambda+2)^3$, deci $\lambda = -2$ este o valoare proprie cu multiplicitatea algebrică 3. Rezolvând sistemul omogen $(A+2I)v = 0$ obţinem spaţiul soluţiilor $E(2) = \ker(A+2I) = \{(5\alpha, 3\alpha, -7\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci dimensiunea lui $E(2)$ este 1, prin urmare valoarea proprie $\lambda = 2$ are multiplicitatea geometrică 1. Deci putem lua vectorul propriu liniar independent $v = (5, 3, -7)$. Să remarcăm că avem nevoie de doi vectori proprii generalizaţi, care pot fi obţinuţi ca soluţii ale sistemului

$$(A+2I)u_1 = v,$$

respectiv

$$(A+2I)u_2 = u_1.$$

Soluţiile primului sistem sunt cuprinse în mulţimea $\{(-\frac{1+5\alpha}{7}, -\frac{2+3\alpha}{7}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, deci un vector propriu generalizat, pentru $\alpha = 4$ este $u_1 = (-3, -2, 4)$.

Soluţiile sistemului $(A+2I)u_2 = u_1$ cu $u_1 = (-3,-2,4)$ sunt date de mulţimea $\{(-\frac{3+5\alpha}{7}, \frac{1-3\alpha}{7}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, deci un vector propriu generalizat, pentru $\alpha = 5$ este $u_1 = (-4,-2,5)$. Să remarcăm că $v, u_1, u_2$ sunt liniar independenţi, deci vom lua matricea de trecere $P = [v_1|u_1|u_2] = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Atunci $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, deci

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 4.5 Probleme

**Problema 4.5.1.** Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului $T : C^\infty(1,b) \to C^\infty(1,b),\ T(f)(x) = \frac{f'(x)}{xe^{x^2}}$.

**Problema 4.5.2.** Găsiţi matricele care diagonalizează următoarele matrice:

*a)* $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

**Problema 4.5.3.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de trecere pentru matricea

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.4.** Arătaţi că o matricea pătratică şi transpusa sa au aceleaşi valori proprii.

**Problema 4.5.5.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de transformare pentru matricea
$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.6.** Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorilor $T : C[-\pi, \pi] \to C[-\pi, \pi]$,
$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos y + \sin x \sin y) f(y) dy.$$

**Problema 4.5.7.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de transformare pentru matricea
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.8.** Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului $T : C[-\pi, \pi] \to C[-\pi, \pi]$,
$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^3(x - y) + 1) f(y) dy.$$

**Problema 4.5.9.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de trecere pentru matricea
$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.10.** Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului $T : C^\infty(1, 2) \to C^\infty(1, 2),\ T(f)(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2 x}$.

**Problema 4.5.11.** Găsiţi matricea triunghiulară a matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Problema 4.5.12.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de trecere pentru matricea

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.13.** Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru operatorul $T$ : $C^\infty(1,b) \to C^\infty(1,b)$, $T(f)(x) = \frac{f'(x)}{\tan^2 x}$.

**Problema 4.5.14.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de trecere pentru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.15.** Arătaţi că o matrice complexă $2\times 2$ nu este diagonalizabilă dacă şi numai dacă este asemenea cu o matrice de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, unde $b \neq 0$.

**Problema 4.5.16.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de trecere pentru matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 4.5.17.** Arătaţi că dacă $A$ şi $B$ sunt matrice de tip $n \times n$, atunci $AB$ şi $BA$ au aceleaşi valori proprii .

**Problema 4.5.18.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

# 5

# Spaţii liniare cu produs scalar

## 5.1 Definiţii şi noţiuni introductive

Până acum am studiat spaţii vectoriale, aplicaţii liniare şi aplicaţii liniare particulare.

Putem determina dacă doi vectori sunt egali, dar nu avem noţiunea de "lungime" deci nu putem compara doi vectori.

Într-un spaţiu vectorial se poate defini norma unui vector şi produsul scalar dintre doi vectori. Noţiunea de normă ne permite să măsurăm lungimea unui vector şi astfel putem să comparăm doi vectori. Produsul scalar dintre doi vectori, pe de o parte introduce o normă, deci lungimea poate fi măsurată, pe de altă parte (cel puţin în cazul spaţiilor vectoriale reale), ne permite să măsurăm unghiul dintre doi vectori, deci se poate construi o întreagă geometrie. Cu toate acestea, în cazul spaţiilor vectoriale complexe, unghiul dintre doi vectori nu este definit în mod clar, dar ortogonalitatea este.

**Definiţia 5.1.** *Produsul scalar pe un spaţiu vectorial $V$ peste corpul $\mathbb{F}$ este funcţia (în formă biliniară) $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

- $\langle v, v\rangle \geq 0$ *şi* $\langle v, v\rangle = 0$ *dacă* $v = 0$ *(pozitiv definire).*
- $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, *pentru orice* $u, v, w \in V$ *(aditivitate în prima variabilă).*
- $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$ *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{F}$ *şi* $v, w \in V$ *(omogenitate în prima variabilă).*
- $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ *pentru orice* $v, w \in V$ *(simetrie conjugată).*

*Un spaţiu liniar cu produs scalar este o pereche* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *unde* $V$ *este un spaţiu vectorial şi* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este un produs scalar peste* $V$.

Cel mai important exemplu de spaţiu liniar cu produs scalar este $\mathbb{F}^n$. Fie $v = (v_1, \ldots, v_n)$ şi $w = (w_1, \ldots w_n)$ şi se defineşte produsul scalar prin

$$\langle v, w\rangle = v_1\overline{w}_1 + \cdots + v_n\overline{w}_n.$$

Acesta este exemplul clasic de produs scalar numit şi produs scalar Euclidian, şi când $\mathbb{F}^n$ este referit ca un spaţiu liniar cu produs scalar, se subînţelege că produsul scalar este cel Euclidian, dacă nu se specifică altfel.

**Exemplul 5.2.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ o matrice pozitiv definită, adică $a > 0$, $\det(A) > 0$. Atunci, pentru orice $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ definim $\langle u, v\rangle = (v_1\, v_2)A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Se poate verifica uşor că $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar pe spaţiul liniar real $\mathbb{R}^2$.

Dacă $A = I_2$ se obţine produsul scalar obişnuit $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$.

Din definiţie se pot deduce uşor următoarele proprietăţi ale produsului scalar:

$$\begin{aligned}
&\langle v, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0,\\
&\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,\\
&\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle,\\
&\text{pentru orice } u, v, w \in V \text{ şi } \alpha \in \mathbb{F}
\end{aligned}$$

**Definiţia 5.3.** *Fie $V$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$. O funcţie*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

*se numeşte normă pe $V$ dacă:*

- $\|v\| \geq 0$, $v \in V$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(pozitivitate);*
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v \in V$ *(omegenitate);*
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$ *(inegalitatea triunghiului).*

*un spaţiu normat este o pereche $(V, \|\cdot\|)$, unde $V$ este un spaţiu vectorial şi $\|\cdot\|$ este o normă peste $V$.*

**Exemplul 5.4.** Pe spaţiul liniar real $\mathbb{R}^n$ se poate defini o normă în diferite moduri. Într-adevăr, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ norma sa se defineşte ca $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Se poate verifica uşor că axiomele din definiţia normei sunt îndeplinite. Această normă se numeşte *norma Euclidiană.*

Mai general, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ se poate defini $\|x\| = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, aşa numita $p-$*normă* pe $\mathbb{R}^n$.

Un alt fel de a defini o normă pe $\mathbb{R}^n$ este $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Aceasta poartă denumirea de *norma maximum.*

**Definiţia 5.5.** *Fie $X$ o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care verifică următoarele proprietăţi:*

- $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ *şi* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(pozitivitate);*
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *(simetrie);*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiului);*

*este numită o metrică sau distanţă pe $X$. O mulţime $X$ cu o metrică definită pe ea se numeşte spaţiu metric.*

**Exemplul 5.6.** Fie $X$ o mulţime arbitrară. Se poate defini distanţa pe $X$ prin

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Această metrică poartă denumirea de *metrica discretă* pe $X$. Pe $\mathbb{R}^n$ *distanţa Chebyshev* este definită ca

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În acest curs suntem în principal interesaţi de spaţii cu produs scalar. Dar trebuie să evidenţiem că un produs scalar scalar pe $V$ defineşte o normă, prin $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ pentru $v \in V$, şi o normă pe $V$ defineşte o metrică prin $d(v, w) = \|w - v\|$, pentru $v, w \in V$.

Pe de altă parte, din punct de vedere al generalităţii, metricele sunt cele mai generale, (pot fi definite pe orice mulţime), urmate de norme (care presupun liniaritatea spaţiilor pe care sunt definite) şi pe ultima poziţie este produsul scalar. Trebuie să evidenţiem faptul că orice produs scalar generează o normă, dar nu orice normă provine dintr-un produs scalar, cum este cazul max normei definite mai sus.

Pentru un spaţiu cu produs scalar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ următoarea egalitate este adevărată:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \langle v_i, w_j \rangle.$$

**Definiţia 5.7.** *Doi vectori $u, v \in V$ sunt ortogonali ($u \perp v$) dacă $\langle u, v \rangle = 0$.*

Pe un spaţiu real cu produs scalar putem defini *unghiul a doi vectori* ca

$$\widehat{(v, w)} = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Avem

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \widehat{(v, w)} = \frac{\pi}{2}.$$

**Teorema 5.8.** ***(Regula paralelogramului)*** *Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar şi $u, v \in V$. Atunci*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

*Demonstraţie.*

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.9.** ***(Teorema lui Pitagora)*** *Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar, şi $u, v \in V$ doi vectori ortogonali. Atunci*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

*Demonstraţie.*

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2.\end{aligned}$$

□

Vom demonstra în continuare una dintre cele mai importante inegalităţi ale matematicii, şi anume inegalitatea Cauchy-Schwarz. Sunt câteva metode pentru a o demonstra, noi vom reda una care să reflecte scopul nostru.

Considerăm $u, v \in V$. Dorim să scriem $u$ ca suma dintre un vector coliniar cu $v$ şi un vector ortogonal cu $v$. Fie $\alpha \in \mathbb{F}$ şi scriem $u$ ca $u = \alpha v + (u - \alpha v)$. Impunând condiţia ca $v$ să fie ortogonal pe $(u - \alpha v)$, se obţine

$$0 = \langle u - \alpha v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \alpha\|v\|^2,$$

deci trebuie să alegem $\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, şi descompunerea este

$$u = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v + \left(u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right).$$

**Teorema 5.10.** ***Inegaliatatea Cauchy-Schwarz*** *Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar şi $u, v \in V$. Atunci*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

*Egalitatea are loc dacă unul dintre $u, v$ este multiplul în raport cu înmulţirea cu scalari a celuilalt ($u$ şi $v$ sunt coliniari).*

*Demonstraţie.* Fie $u, v \in V$. Dacă $v = 0$ atunci amândouă părţi ale inegalităţii sunt 0 şi rezultatul dorit are loc. Să presupunem că $v \neq 0$. Scriem $u = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v +$

$\left(u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right)$. Luând în considereare că vectorii $\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$ şi $u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$ sunt ortogonali, din teorema lui Pitagora obţinem

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left\|\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2 + \left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2 \\
&= \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2 \\
&\geq \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2},
\end{aligned}$$

inegalitate echivalentă cu cea din teoremă.

Avem egalitate dacă $u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v = 0$, adică, dacă $u$ este multiplu în raport cu înmulţirea cu scalari al lui $v$.

$\square$

## 5.2 Baze Ortogonale

**Definiţia 5.11.** *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spaţiu cu produs scalar şi fie $I$ o mulţime arbitrară indexată. O familie de vectori $A = \{e_i \in V | i \in I\}$ se numeşte o familie* ortogonală*, dacă $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pentru orice pentru orice $i, j \in I$, $i \neq j$. Familia $A$ se numeşte* ortonormală *dacă ea este ortogonală şi $\|e_i\| = 1$ pentru orice $i \in I$.*

Unul dintre motivele pentru care se studiază familii ortonormale este că în acestea, calculele sunt mult mai simple.

**Propoziţia 5.12.** *Dacă $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ este o familie ortonormală de vectori din $V$, atunci*

$$\|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2$$

*pentru orice $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$.*

*Demonstraţie.* Aplicând teorema lui Pitagora, avem:

$$\|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m\|^2 = |\alpha_1|^2\|e_1\|^2 + |\alpha_2|^2\|e_2\|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2\|e_n\|^2.$$

Concluzia reiese dacă luăm în considerare faptul că $\|e_i\| = 1$, $i = \overline{1,n}$. □

**Corolarul 5.13.** *Orice listă de vectori ortonormală este liniar independentă.*

*Demonstraţie.* Fie $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ o listă ortonormală de vectori din $V$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ cu

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = 0.$$

Rezultă că $\|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 = 0$, adică $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1,m}$. □

O bază ortonormală a unui spaţiu vectorial cu produs scalar $V$ este o bază din $V$ care este de asemenea o listă ortonormală din $V$. Este evident că orice listă ortonormală de vectori de lungime $\dim V$ este o bază ortonormală (deoarece este liniar independentă, fiind ortonormală).

**Teorema 5.14.** *Fie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază ortonormală a unui spaţiu cu produs scalar $V$. Dacă $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in V$, atunci*

- $\alpha_i = \langle v, e_i\rangle$, *pentru orice* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *şi*
- $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i\rangle|^2$

*Demonstraţie.* Deoarece $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, făcând produs scalar în ambele părţi cu $e_i$ avem

$$\langle v, e_i\rangle = \alpha_1\langle e_1, e_i\rangle + \alpha_2\langle e_2, e_i\rangle + \cdots + \alpha_i\langle e_i, e_i\rangle + \cdots + \alpha_n\langle e_n, e_i\rangle = \alpha_i.$$

A doua afirmaţie reiese din aplicarea propoziţiei anterioare. Într-adevăr,

$$\|v\|^2 = \|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i\rangle|^2.$$

□

Până acum avem o imagine asupra utilităţii bazelor ortonormale. Avantajul este că într-o bază ortonormală calculele sunt simple, ca în spaţiile euclidiene bi sau tri dimensionale. Dar cum se pot găsi ele? Următorul rezultat dă un răspuns acestei întrebări. Acesta este un algoritm bine cunoscut în algebra liniară, numit procedura Gram-Schmidt. Procedura este enunţată aici, dând o metodă de a transforma o listă de vectori liniar independenţi într-una ortonormală, cu acelaşi sistem de generatori ca cea originală.

**Teorema 5.15.** ***Gram-Schmidt*** *Dacă $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ este o mulţime de vectori liniar independenţi din $V$, atunci există o mulţime ortonormală de vectori $(e_1, \ldots e_m)$ din $V$, astfel încât*

$$span(v_1, v_2, \ldots, v_k) = span(e_1, e_2 \ldots, e_k)$$

*pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

*Demonstraţie.* Fie $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ o mulţime de vectori liniar independenţi. Familia ortonormală de vectori $(e_1, e_2 \ldots, e_m)$ va fi constriută inductiv. Vom porni cu $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Presupunem acum că $j > 1$ şi o familie ortonormală $(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1})$ a fost construită astfel încât

$$\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}) = \mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1})$$

Considerăm că

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}$$

Deoarece lista $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ este liniar independentă, rezultă că $v_j$ nu este în $\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1})$, şi prin urmare nu este în $\mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1})$. Deci $e_j$ este bine definită, şi $\|e_j\| = 1$. Prin calcul direct rezultă că pentru $1 < k < j$ avem

$$\begin{aligned}
\langle e_j, e_k\rangle &= \left\langle \frac{v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}, e_k \right\rangle \\
&= \frac{\langle v_j, e_k\rangle - \langle v_j, e_k\rangle}{\|v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

prin urmare $(e_1, e_2, \ldots e_k)$ este o familie ortonormală. Prin definiţia vectorilor $e_j$ se poate observa că $v_j \in \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots, e_j)$, ceea ce ne conduce (împreună cu ipoteza de inducţie), că

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_j) \subset \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots, e_j)$$

Amândouă listele fiind liniar independente (prima din ipoteză şi cea de-a doua prin ortonormalitate), rezultă că subspaţiul generat mai sus are aceeaşi dimensiune $j$, deci sunt egale. □

**Observaţia 5.16.** Dacă în procedeul Gram-Schmidt nu vom normaliza vectorii obţinuţi, vom obţine o bază ortogonală în locul uneia ortonormale.

**Exemplul 5.17.** Ortonormalizaţi următoarea listă de vectori din $\mathbb{R}^4$ :

$$\{v_1 = (0, 1, 1, 0), v_2 = (0, 4, 0, 1), v_3 = (1, -1, 1, 0), v_4 = (1, 3, 0, 1)\}.$$

Prima dată vom ortogonaliza folosind procedeul Gram-Schmidt.

Fie $u_1 = v_1 = (0, 1, 1, 0)$.

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (0, 4, 0, 1) - \frac{4}{2}(0, 1, 1, 0) = (0, 2, -2, 1).$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \left(1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

$$u_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 - \frac{\langle v_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} u_3 = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{22}, -\frac{1}{22}, -\frac{2}{11}\right).$$

Se poate verifica foarte uşor că lista $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ este ortogonală. Luând acum $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$, $i = \overline{1,4}$, vom obţine

$$w_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$w_2 = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$w_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{3\sqrt{11}}, \frac{1}{3\sqrt{11}}, \frac{4}{3\sqrt{11}}\right),$$

$$w_4 = \left(\frac{\sqrt{22}}{11}, \frac{\sqrt{22}}{22}, -\frac{\sqrt{22}}{22}, -\frac{2\sqrt{22}}{11}\right).$$

Evident lista $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este ortonormală.

Acum vom putea prezenta rezultatul principal al acestei secţiuni.

**Corolarul 5.18.** *Orice spaţiu cu produs scalar finit dimensional are o bază ortonormală.*

*Demonstraţie.* Alegând o bază din $V$ şi aplicându-i procedeul Gram-Schmidt vom obţine o listă ortonormală de lungime egală cu $\dim V$. Rezultă că lista este o bază, fiind liniar independentă. □

Următoare propoziţie ne arată că orice listă ortonormală poate fi extinsă la o bază ortonormală.

**Propoziţia 5.19.** *Orice familie ortonormală de vectori poate fi extinsă la o bază ortonormală a lui $V$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ este o familie ortonormală de vectori. Fiind liniar independentă, poate fi extinsă la o bază $(e_1, e_2, \ldots, e_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$. Aplicând acum procedeul Gram-Schmidt vectorilor $(e_1, e_2, \ldots, e_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ obţinem lista $(e_1, e_2, \ldots, e_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)$, (să observăm că procedeul Gram Schmidt lasă primele $m$ intrări neschimbate, fiind deja ortonormale). Deci vom avem o extindere la o bază ortonormală. $\square$

**Corolarul 5.20.** *Presupunem că $T \in End(V)$. Dacă $T$ are o formă triunghiulară superioară în raport cu o bază din $V$, atunci $T$ are o formă triunghiulară în raport cu baza ortonormală din $V$.*

**Corolarul 5.21.** *Presupunem că $V$ este un spaţiu vectorial complex şi $T \in End(V)$. Atunci $T$ are o formă triunghiulară superioară în raport cu baze ortonormale din $V$.*

## 5.3 Complementul Ortogonal

Fie $U \subseteq V$ o submulţime a unui spaţiu cu produs scalar $V$. *Complementul ortogonal* a lui $U$, notat cu $U^\perp$ este mulţimea tuturor vectorilor din $V$ care sunt ortogonali cu orice vector din $U$ adică:

$$U^\perp = \{v \in V | \langle v, u\rangle = 0,\ \forall u \in U\}.$$

Se poate verifica uşor că $U^\perp$ este un subspaţiu al lui $V$, $V^\perp = \{0\}$ şi $\{0\}^\perp = V$, şi de asemenea $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.

**Teorema 5.22.** *Dacă $U$ este un subspaţiu al lui $V$, atunci*

$$V = U \oplus U^\perp$$

*Demonstraţie.* Presupunem că $U$ este un subspaţiu al lui $V$. Vom arăta că

$$V = U + U^\perp$$

Fie $\{e_1, \dots, e_m\}$ o bază ortonormală din $U$ şi $v \in V$. Avem

$$v = (\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m\rangle e_m) + (v - \langle v, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v, e_m\rangle e_m)$$

Notăm primul vector cu $u$ şi pe cel de-al doilea cu $w$. Evident $u \in U$. Pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ avem

$$\begin{aligned} \langle w, e_j \rangle &= \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Prin urmare $w$ este ortogonal pe orice vector al bazei din $U$, adică $w \in U^\perp$, deci

$$V = U + U^\perp.$$

Vom arăta acum că $U \cap U^\perp = \{0\}$. Presupunem că $v \in U \cap U^\perp$. Atunci $v$ este ortogonal pe orice vector din $U$, adică $\langle v, v \rangle = 0$, ceea ce înseamnă că $v = 0$. Relaţiile $V = U + U^\perp$ şi $U \cap U^\perp = \{0\}$ implică concluzia teoremei. □

**Propoziţia 5.23.** *Dacă $U_1, U_2$ sunt subspaţii ale lui $V$ atunci*

*a)* $U_1 = (U_1^\perp)^\perp$.

*b)* $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

*c)* $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

*Demonstraţie.* a) Arătăm prima dată că $U_1 \subseteq (U_1^\perp)^\perp$. Fie $u_1 \in U_1$ Atunci pentru orice $v \in U_1^\perp$ avem că $v \perp u_1$. Cu alte cuvinte $\langle u_1, v \rangle = 0$ pentru orice $v \in U_1^\perp$. Prin urmare $u_1 \in (U_1^\perp)^\perp$.

Să admitem acum că $(U_1^\perp)^\perp \not\subseteq U_1$. Deci, există $u_2 \in (U_1^\perp)^\perp \setminus U_1$. Deoarece $V = U_1 \oplus U_1^\perp$ obţinem că există $u_1 \in U_1$ astfel încât $u_2 - u_1 \in U_1^\perp$ $(*)$.

Pe de altă parte, conform cu prima parte a deomonstraţiei $u_1 \in (U_1^\perp)^\perp$ şi $(U_1^\perp)^\perp$ este un subspaţiu liniar, deci $u_2 - u_1 \in (U_1^\perp)^\perp$. Prin urmare, pentru orice $v \in U_1^\perp$ avem $(u_2 - u_1) \perp v$ $(**)$.

$(*)$ şi $(**)$ implică faptul că $(u_2 - u_1) \perp (u_2 - u_1)$ de unde rezultă că $\langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle = 0$, ceea ce ne conduce la $u_1 = u_2$, contradicţie.

b) Pentru $v \in (U_1 + U_2)^\perp$ avem $\langle v, u_1 + u_2 \rangle = 0$ pentru orice $u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$. Luând $u_2 = 0$ obţinem că $v \in U_1^\perp$ şi considerând $u_1 = 0$ obţinem că $v \in U_2^\perp$. Deci $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

Viceversa, fie $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Atunci $\langle v, u_1 \rangle = 0$ pentru orice $u_1 \in U_1$ şi $\langle v, u_2 \rangle = 0$ pentru orice $u_2 \in U_2$. Deci $\langle v, u_1 + u_2 \rangle = 0$ pentru orice $u_1 \in U_1$ şi $u_2 \in U_2$, adică $v \in (U_1 + U_2)^\perp$.

c) Din a) avem $((U_1 \cap U_2)^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$.

Conform b) şi a) $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$.

Deci, $((U_1 \cap U_2)^\perp)^\perp = (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp$ ceea ce înseamnă că $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$. $\square$

**Exemplul 5.24.** Fie $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Ştiind că $U$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^4$, calculaţi $\dim U$ şi $U^\perp$.

Este uşor de observat că

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_1 - x_2 + x_3) \,| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 (1,0,0,1) + x_2 (0,1,0,-1) + x_3 (0,0,1,1) \,| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Cei trei vectori $(1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,1)$ sunt liniar independenţi (rangul matricii ce o formează este 3), deci sunt o bază pentru $U$ şi $\dim U = 3$.

Din formula dimensiunii

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4$$

avem că $\dim U^\perp = 1$, deci $U^\perp$ este generat de un singur vector. Un vector ce generează $U^\perp$ este $(1, -1, 1, -1)$, vectorul format de coeficienţii care apar în ecuaţia liniară care defineşte $U$. Aceasta este adevărat deoarece partea dreaptă a ecuaţiei este exact produsul scalar dintre $u^{\perp} = (1, -1, 1, -1)$ şi un vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$.

## 5.4 Varietăţi Liniare

Fie $V$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{F}$.

**Definiţia 5.25.** *O mulţime $L = v_0 + V_L = \{v_0 + v | v \in V_L\}$ , unde $v_0 \in V$ este un vector şi $V_L \subset V$ este un subspaţiu al lui $V$, se numeşte varietate liniară. Subspaţiul $V_L$ este numit subspaţiul director al varietăţii liniare.*

**Observaţia 5.26.** Se pot verifica uşor următoarele:

- O varietate liniară este un subspaţiu translatat, adică $L = f(V_L)$ unde $f : V \to V$, $f(v) = v_0 + v$.
- dacă $v_0 \in V_L$ atunci $L = V_L$.
- $v_0 \in L$ deoarece $v_0 = v_0 + 0 \in v_0 + V_L$.
- pentru $v_1, v_2 \in L$ avem $v_1 - v_2 \in V_L$.
- pentru orice $v_1 \in L$ avem $L = v_1 + V_L$.
- $L_1 = L_2$, unde $L_1 = v_0 + V_{L_1}$ şi $L_2 = v_0' + V_{L_2}$ dacă $V_{L_1} = V_{L_2}$ şi $v_0 - v_0' \in V_{L_1}$ .

**Definiţia 5.27.** *Dorim să subliniem că:*

1. *Dimensiunea unei varietăţi liniare este dimensiunea subspaţiului său director.*
2. *Două varietăţi liniare $L_1$ şi $L_2$ sunt numite ortogonale dacă $V_{L_1} \perp V_{L_2}$.*

3. *Două varietăţi liniare* $L_1$ *şi* $L_2$ *sunt numite paralele dacă* $V_{L_1} \subset V_{L_2}$ *sau* $V_{L_2} \subset V_{L_1}$.

Fie $L = v_0 + V_L$ o varietate liniară a spaţiului vectorial finit dimensional $V$. Pentru $\dim L = k \leq n = \dim V$ se poate alege în subspaţiul director $V_L$ o bază de dimensiune finită $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Avem

$$L = \{v = v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k | \alpha_i \in \mathbb{F}, i = \overline{1, k}\}$$

Putem considera o bază arbitrară (fixată) în $V$, să spunem $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi dacă folosim vectorii coloană pentru coordonatele vectorilor din această bază, adică $v_{[E]} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $v_{0_{[E]}} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\top$, $v_{j_{[E]}} = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})^\top$, $j = \overline{1, k}$, se găsesc *ecuaţiile parametrice ale varietăţii liniare*

$$\begin{cases} x_1 = & x_1^0 + \alpha_1 x_{11} + \cdots + \alpha_k x_{1k} \\ \vdots & \\ x_n = & x_n^0 + \alpha_1 x_{n1} + \cdots + \alpha_k x_{nk} \end{cases}$$

Rangul matricii $(x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}}$ este $k$ deoarece vectorii $v_1, \ldots, v_k$ sunt liniar independenţi. Menţionăm că:

1. o varietate liniară de dimensiune unu se numeşte dreaptă.
2. o varietate liniară de dimensiune doi se numeşte plan.
3. o varietate liniară de dimensiune $k$ se numeşte $k$ plan.
4. o varietate liniară de dimensiune $n - 1$ este un spaţiu vectorial $n$ dimensional denumit hiperplan.

**Teorema 5.28.** *Considerăm $V$ un spaţiu vectorial $n$-dimensional peste corpul $\mathbb{F}$. Atunci orice subspaţiu al lui $V$ este nucleul unei aplicaţii liniare surjective.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $V_L$ este un subspaţiu al lui $V$ de dimensiune $k$. Alegem o bază $\{e_1, \ldots, e_k\}$ în $V_L$ şi o completăm la o bază $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ din $V$. Considerăm $U = \operatorname{span}\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Fie $T : V \to U$ dat de

$$T(e_1) = 0, \ldots T(e_k) = 0, T(e_{k+1}) = e_{k+1}, \ldots, T(e_n) = e_n.$$

Evident, $T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T(e_1) + \cdots + \alpha_n T(e_n) = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \alpha_n e_n$ defineşte o aplicaţie liniară. Este de asemenea evident că $\ker T = V_L$ ca şi faptul că $T$ este surjectivă, adică $\operatorname{im} T = U$. $\square$

**Observaţia 5.29.** De fapt aplicaţia construită în teorema anterioară nu e altceva decât proiecţia pe $U$ paralelă cu spaţiul $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

**Teorema 5.30.** *Fie $V$ şi $U$ două spaţii liniare peste acelaşi corp $\mathbb{F}$. Dacă $T : V \to U$ este o aplicaţie liniară surjectivă, atunci pentru orice $u_0 \in U$, mulţimea $L = \{v \in V | T(v) = u_0\}$ este o varietate liniară.*

*Demonstraţie.* $T$ fiind surjectivă, există $v_0 \in V$ cu $T(v_0) = u_0$. Vom arăta că $\{v - v_0 | v \in L\} = \ker T$.

Fie $v \in L$. Avem $T(v - v_0) = T(v) - T(v_0) = 0$, deci $\{v - v_0 | v \in L\} \subseteq \ker T$.

Fie $v_1 \in \ker T$, adică $T(v_1) = 0$. Scriem $v_1 = (v_1 + v_0) - v_0$. $T(v_1 + v_0) = u_0$, deci $(v_1 + v_0) \in L$. Prin urmare, $v_1 \in \{v - v_0 | v \in L\}$ sau, cu alte cuvinte $\ker T \subseteq \{v - v_0 | v \in L\}$.

Deci $L = v_0 + \ker T$, ceea ce dovedeşte că $L$ este o varietate liniară. $\square$

Teorema anterioară ne conduce către următoarea:

**Teorema 5.31.** *Fie $V$ spaţiu liniar de dimensiune $n$. Atunci, pentru orice varietate liniară $L \subset V$ de dimensiune $\dim L = k < n$, există un spaţiu vectorial $n-k$-dimensional $U$, o aplicaţie liniară surjectivă $T : V \to U$ şi un vector $u \in U$ astfel încât*

$$L = \{v \in V | T(v) = u\}.$$

*Demonstraţie.* Într-adevăr, să considerăm $L = v_0 + V_L$, unde dimensiunea unui subspaţiu director $V_L = k$. Alegem o bază $\{e_1, \dots, e_k\}$ în $V_L$ şi o completăm la o bază $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ a lui $V$. Considerăm $U = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Evident $\dim U = n - k$. Potrivit teoremei anterioare aplicaţia liniară $T : V \to U$, $T(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ este surjectivă şi $\ker T = V_L$. Fie $T(v_0) = u$. Atunci, potrivit cu demonstraţia teoremei anterioare $L = \{v \in V | T(v) = u\}$. $\square$

**Observaţia 5.32.** Dacă alegem în $V$ şi $U$ două baze şi scriem aplicaţia liniară în notaţie matricială $M_T v = u$ avem ecuaţiile implicite ale varietăţii liniare $L$,

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = & u_1 \\ \vdots & \\ a_{p1}v_1 + a_{p2}v_2 + \cdots + a_{pn}v_n = & u_p \end{cases}$$

unde $p = n - k = \dim U = \text{rang}\,(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Un hiperplan are doar o ecuaţie

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = u_0,$$

iar subspaţiul director poate fi văzut ca

$$V_L = \{v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n | f(v) = 0\} = \ker f,$$

unde $f$ este o aplicaţie liniară (o funcţională liniară) $f : V \to \mathbb{R}$ cu $f(e_1) = a_1, \ldots, f(e_n) = a_n$.

Dacă ne gândim la un hiperplan ca la o varietate liniară în spaţiul Euclidian $\mathbb{R}^n$, ecuaţia poate fi scrisă ca

$$\langle v, a\rangle = u_0, \text{unde } \ a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n,\ u_0 \in \mathbb{R}.$$

Vectorul $a$ se numeşte *vectorul normal* la hiperplan.

În general, într-un spaţiu Euclidian ecuaţiile unei varietăţi liniare sunt:

$$\begin{cases} \langle v, v_1\rangle = & u_1 \\ \vdots & \\ \langle v, v_p\rangle = & u_p \end{cases}$$

unde vectorii $v_1, \ldots v_p$ sunt liniar independenţi. Subspaţiul director este dat de

$$\begin{cases} \langle v, v_1\rangle = & 0 \\ \vdots & \\ \langle v, v_p\rangle = & 0 \end{cases}$$

deci, vectorii $v_1, \ldots, v_p$ sunt ortogonali subspaţiului director $V_L$.

## 5.5 Determinantul Gram. Distanţe.

În această secţiune vom explica cum putem măsura distanţa dintre ”mulţimi liniare”, care sunt varietăţi liniare.

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi considerăm vectorii $v_i \in V$ , $i = \overline{1, k}$.

Determinantul

$$G(v_1,\dots,v_k)=\begin{vmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \dots & \langle v_1,v_k\rangle\\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & \langle v_2,v_k\rangle\\ \dots\dots & \dots & \dots & \\ \langle v_k,v_1\rangle & \langle v_k,v_2\rangle & \dots & \langle v_k,v_k\rangle\end{vmatrix}$$

este numit *Determinantul Gram* al vectorilor $v_1\dots v_k$.

**Propoziţia 5.33.** *Într-un spaţiu cu produs scalar vectorii $v_1,\dots,v_k$ sunt liniar independenţi dacă $G(v_1,\dots,v_k)\neq 0$.*

*Demonstraţie.* Să considerăm sistemul omogen

$$G\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Acest sistem poate fi scris ca

$$\begin{cases}\langle v_1,v\rangle=0\\ \vdots\\ \langle v_k,v\rangle=0\end{cases}\quad \text{unde}\ \ v=x_1v_1+\dots x_kv_k.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente.

Vectorii $v_1,\dots,v_k$ sunt liniar independenţi. $\Longleftrightarrow$ Există $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{F}$, nu toţi zero astfel încât $v=0$. $\Longleftrightarrow$ Sistemul omogen are o soluţie nebanală. $\Longleftrightarrow$ $\det G=0$. □

**Propoziţia 5.34.** *Dacă $\{e_1,\dots,e_n\}$ sunt vectori liniar independenţi şi $\{f_1,\dots,f_n\}$ sunt vectori obţinuţi prin metoda Gram Schmidt de ortogonalizare, avem:*

$$G(e_1,\dots,e_n)=G(f_1,\dots,f_n)=\|f_1\|^2\cdot\dots\cdot\|f_n\|^2$$

*Demonstraţie.* În $G(f_1, \ldots, f_n)$ substitium $f_n$ prin $e_n - a_1 f_1 - \cdots - a_{n-1} f_{n-1}$ şi obţinem

$$G(f_1, \ldots, f_n) = G(f_1, \ldots, f_{n-1}, e_n).$$

Printr-o metodă inductivă va rezulta relaţia din teoremă. Evident $G(f_1, \ldots, f_n) = \|f_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|f_n\|^2$ deoarece în determinant avem doar pe diagonală $\langle f_1, f_1 \rangle, \ldots, \langle f_n, f_n \rangle$.

$\square$

**Observaţia 5.35.** Să observăm că:

- $\|f_k\| = \sqrt{\dfrac{G(e_1, \ldots e_k)}{G(e_1, \ldots, e_{k-1})}}$
- $f_k = e_k - a_1 f_1 - \ldots a_{k-1} f_{k-1} = e_k - v_k$ se obţine $e_k = f_k + v_k$, $v_k \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ şi $f_k \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}^{\perp}$, deci $f_k$ este complementul ortogonal al lui $e_k$ în raport cu spaţiul generat de $\{e_1 \ldots, e_{k-1}\}$.

**Distanţa dintre un vector şi un subspaţiu**

Fie $U$ un subspaţiu al spaţiului cu produs scalar $V$. Distanţa dintre vectorul $v$ şi subspaţiul $U$ este

$$d(v, U) = \inf_{w \in U} d(v, w) = \inf_{w \in U} \|v - w\|.$$

**Observaţia 5.36.** Structura liniară implică un fapt simplu, dar foarte folositor:

$$d(v, U) = d(v + w, w + U)$$

pentru orice $v, w \in V$ şi $U \subseteq V$, adică structura liniară implică faptul că distanţa este invariantă la translaţii.

Suntem interesaţi în special de cazul când $U$ este un subspaţiu.

**Propoziţia 5.37.** *Distanţa dintre vectorul $v \in V$ şi subspaţiul $U$ este dată de*

$$d(v,U) = \|v^{\perp}\| = \sqrt{\frac{G(e_1,\ldots,e_k,v)}{G(e_1,\ldots,e_k)}},$$

*unde $v = v_1 + v^{\perp}$, $v_1 \in U$, $v^{\perp} \in U^{\perp}$ şi $e_1,\ldots,e_k$ este o bază în $U$.*

*Demonstraţie.* Prima dată vom demonstra că $\|v^{\perp}\| = \|v - v_1\| \leq \|v - u\|, \quad \forall u \in U$. Avem

$$\begin{aligned} \|v^{\perp}\| &\leq \|v-u\| \Leftrightarrow \\ \langle v^{\perp}, v^{\perp}\rangle &\leq \langle v^{\perp} + v_1 - u, v^{\perp} + v_1 - u\rangle \Leftrightarrow \\ \langle v^{\perp}, v^{\perp}\rangle &\leq \langle v^{\perp}, v^{\perp}\rangle + \langle v_1 - u, v_1 - u\rangle. \end{aligned}$$

A doua parte a egaliăţii, adică $\|v^{\perp}\| = \sqrt{\frac{G(e_1,\ldots,e_k,v)}{G(e_1,\ldots,e_k)}}$, rezultă din observaţia anterioară. □

**Definiţia 5.38.** *Dacă $e_1,\ldots,e_k$ sunt vectori în $V$, volumul $k$- paralelipipedului construit pe vectorii $e_1,\ldots,e_k$ este definit prin $\mathcal{V}_k(e_1,\ldots,e_k) = \sqrt{G(e_1,\ldots,e_k)}$.*

Avem următoarea relaţie inductivă:

$$\mathcal{V}_{k+1}(e_1,\ldots,e_k,e_{k+1}) = \mathcal{V}_k(e_1,\ldots,e_k)d(e_{k+1},\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_k\}).$$

**Distanţa dintre un vector şi o varietate liniară**

Fie $L = v_0 + V_L$ o varietate liniară, şi fie $v$ un vector într-un spaţiu finit dimensional cu produs scalar $V$. Distanţa indusă de normă este invariantă la translaţii, adică, pentru orice $v_1, v_2 \in V$ avem

$$d(v_1,v_2) = d(v_1+v_0, v_1+v_0) \Leftrightarrow \|v_1 - v_2\| = \|v_1 + v_0 - (v_2+v_0)\|$$

.

Aceasta înseamnă că avem

$$\begin{aligned} d(v, L) &= \inf_{w\in L} d(v, w) = \inf_{v_L\in V_L} d(v, v_0 + v_L) \\ &= \inf_{v_L\in V_L} d(v - v_0, v_L) \\ &= d(v - v_0, V_L). \end{aligned}$$

În cele din urmă,

$$d(v, L) = d(v - v_0, V_L) = \sqrt{\frac{G(e_1, \ldots, e_k, v - v_0)}{G(e_1, \ldots, e_k)}},$$

unde $e_1, \ldots, e_k$ este o bază în $V_L$.

**Exemplul 5.39.** Considerăm varietăţile liniare $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + t = 2, x - 2y + z + t = 3\}$, $K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z - t = 1, x + y + z + t = 3\}$. Găsiţi subspaţiul director $V_L, V_K$ şi o bază în $V_L \cap V_K$. Găsiţi distanţa de la $v = (1, 0, 2, 2)$ la $L$, respectiv $K$, şi arătaţi că distanţa dintre $L$ şi $K$ este 0.

Deoarece $L = v_0 + V_L$ şi $K = u_0 + V_K$ rezultă că $V_L = L - v_0$ şi $V_K = K - u_0$ pentru $v_0 \in L$, $u_0 \in K$. Luând $x = y = 0$ în ecuaţiile care descriu $L$ obţinem $t = 2$, $z = 1$, prin urmare $v_0 = (0, 0, 1, 2) \in L$. Analog $u_0 = (0, 0, 2, 1) \in K$. Deci subspaţiile directoare sunt

$$V_L = \{(x, y, z - 1, t - 2) \in \mathbb{R}^4 | x + y + t = 2, x - 2y + z + t = 3\} =$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + t = 0, x - 2y + z + t = 0\},$$

respectiv

$$V_K = \{(x, y, z - 2, t - 1) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z - t = 1, x + y + z + t = 3\} =$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z - t = 0, x + y + z + t = 0\}.$$

Rezolvând sistemele omogene $\begin{cases} x+y+t=0 \\ x-2y+z+t=0 \end{cases}$, respectiv $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ obţinem că

$$V_L = \operatorname{span}\{e_1 = (-1,1,3,0), e_2 = (-1,0,0,1)\},$$

respectiv

$$V_K = \operatorname{span}\{e_3 = (-1,1,0,0), e_4 = (-1,0,1,0)\}.$$

Deoarece $\det[e_1|e_2|e_3|e_4] = 3 \neq 0$ vectorii $e_1, e_2, e_3, e_4$ sunt liniar independenţi, deci $V_L \cap V_K = \{0\}$. Distanţa lui $v$ faţă de $L$ este

$$d(v, L) = d(v - v_0, V_L) = \sqrt{\frac{G(e_1, e_2, v - v_0)}{G(e_1, e_2)}} = \sqrt{\frac{19}{21}},$$

în timp ce

$$d(v, K) = d(v - v_0, V_K) = \sqrt{\frac{G(e_3, e_4, v - v_0)}{G(e_3, e_4)}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Este evident că $K \cap L \neq \emptyset$, deoarece sistemul $\begin{cases} x+y+t=2 \\ x-2y+z+t=3 \\ x+y+z-t=1 \\ x+y+z+t=3 \end{cases}$ este compatibil, având soluţia $(1,0,1,1)$, deci trebuie să avem că

$$d(L, K) = 0.$$

Să considerăm acum hiperplanul $H$ al ecuaţiei

$$\langle v - v_0, n\rangle = 0\ .$$

Subspaţiul director este $V_H = \langle v, n\rangle = 0$ şi distanţa

$$d(v, H) = d(v - v_0, V_H).$$

Se poate descompune $v - v_0 = \alpha n + v_H$, unde $v_H$ este proiecţia ortogonală al lui $v - v_0$ pe $V_H$ şi $\alpha n$ este componenta normală al lui $v - v_0$ în raport cu $V_H$. Înseamnă că

$$d(v, H) = \|\alpha n\|$$

Să calculăm puţin, luând în considerare observaţia anterioară despre tangentă şi partea normală:

$$\begin{aligned}\langle v - v_0, n\rangle &= \langle \alpha n + v_H, n\rangle \\ &= \alpha\langle n, n\rangle + \langle v_H, n\rangle \\ &= \alpha\|n\|^2 + 0\end{aligned}$$

Deci, vom obţine

$$\frac{|\langle v - v_0, n\rangle|}{\|n\|} = |\alpha|\|n\| = \|\alpha n\|$$

ceea ce însesamnă

$$d(v, H) = \frac{|\langle v - v_0, n\rangle|}{\|n\|}$$

În cazul în care avem o bază ortonormală la îndemână, ecuaţia hiperplanului $H$ este

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b = 0 \ ,$$

deci relaţia este acum

$$d(v, H) = \frac{|a_1v_1 + \cdots + a_kv_k + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_k^2}} \ .$$

**Distanţa dintre două varietăţi liniare**

Pentru mulţimile $A$ şi $B$ într-un spaţiu metric, distanţa dintre ele este definită ca

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A \ , \ b \in B\}.$$

Pentru varietăţile liniare $L_1 = v_1 + V_1$ şi $L_2 = v_2 + V_2$ rezultă cu uşurinţă că:

$$d(L_1, L_2) = d(v_1 + V_1, v_2 + V_2) = d(v_1 - v_2, V_1 - V_2) \tag{5.1}$$

$$= d(v_1 - v_2, V_1 + V_2). \tag{5.2}$$

Aceasta ne dă următoarea propoziţie.

**Propoziţia 5.40.** *Distanţa dintre varietăţile liniare $L_1 = v_1 + V_1$ şi $L_2 = v_2 + V_2$ este egală cu distanţa dintre vectorul $v_1 - v_2$ şi spaţiul sumă $V_1 + V_2$.*

Dacă alegem o bază în $V_1 + V_2$, să spunem $e_1, \ldots, e_k$, atunci rezultă această formulă:

$$d(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{G(e_1, \ldots, e_k, v_1 - v_2)}{G(e_1, \ldots, e_k)}}.$$

**Aplicaţii la geometria analitică**

În această secţiune vom aplica problemele de distanţă în spaţii Euclidiene. Considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ cu produsul scalar, adică: pentru $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ produsul scalar este dat de

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_k y_k.$$

Considerăm $D_1$, $D_2$ două drepte (varietăţi liniare de dimensiune unu), $M$ un punct (varietate liniară de dimensiune zero, vom asimila cu vectorul $\overline{x}_M = \overline{0M}$), $P$ o varietate liniară de dimensiune doi (un plan), şi $H$ o varietate liniară de dimensiune $n - 1$ (hiperplan). Ecuaţiile acestor varietăţi liniare sunt:

$$D_1 \ : \ \overline{x} = \overline{x}_1 + s\overline{d}_1,$$

$$D_2 \ : \ \overline{x} = \overline{x}_2 + t\overline{d}_2,$$

$$M \ : \ \overline{x} = \overline{x}_M,$$

$$P \;:\; \overline{x} = \overline{x}_P + \alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2,$$

respectiv

$$H \;:\; \langle \overline{x}, \overline{n}\rangle + b = 0,$$

unde $s, t, \alpha, \beta, b \in \mathbb{R}$. Reamintim că două varietăţi liniare sunt paralele dacă spaţiul director al uneia este inclusă în spaţiul director al celeilalte.

Putem nota acum câteva formule pentru distanţa dintre varietăţi liniare.

$$\begin{aligned}
d(M, D_1) &= \sqrt{\frac{G(\overline{x}_M - \overline{x}_1, \overline{d}_1)}{G(\overline{d}_1)}};\\
d(M, P) &= \sqrt{\frac{G(\overline{x}_M - \overline{x}_P, \overline{v}_1, \overline{v}_2)}{G(\overline{v}_1, \overline{v}_2)}};\\
d(D_1, D_2) &= \sqrt{\frac{G(\overline{x}_1 - \overline{x}_2, \overline{d}_1, \overline{d}_2)}{G(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}} \quad \text{dacă} \quad D_1 \not\parallel D_2\\
d(D_1, D_2) &= \sqrt{\frac{G(\overline{x}_1 - \overline{x}_2, \overline{d}_1)}{G(\overline{d}_1)}} \quad \text{dacă} \quad D_1 \parallel D_2\\
d(M, H) &= \frac{|\langle \overline{x}_M, \overline{n}\rangle + b|}{\|\overline{n}\|}\\
d(D_1, P) &= \sqrt{\frac{G(\overline{x}_1 - \overline{x}_P, \overline{d}_1, \overline{v}_1, \overline{v}_2)}{G(\overline{d}_1, \overline{v}_1, \overline{v}_2)}} \quad \text{dacă} \quad D_1 \not\parallel P
\end{aligned}$$

**Exemplul 5.41.** Găsiţi distanţa dintre hiperplanul $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 1\}$ şi dreapta $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 3, x - y - 3z - t = -1, 2x - 2y + 3z + t = 1\}$.

Deoarece $v_0 = (0, 0, 0, 1) \in H$ subspaţiul său director este $V_H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\} = \text{spam}\{e_1 = (1, 0, 0, -1), e_2 = (0, 1, 0, -1), e_3 = (0, 0, 1, -1)\}$.

Deoarece $u_0 = (1, 1, 0, 1) \in D$ subspaţiul său director este $V_D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0, x-y-3z-t = 0, 2x-2y+3z+t = 0\} = \text{spam}\{e_4 = (1, 1, 1, -3)\}$.

Avem $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$ deci $V_D \subset V_H$ ceea ce înseamnă că $D$ şi $H$ sunt paralele. Evident se poate calcula distanţa dintre ele folosind formula

$$d(D,H) = \sqrt{\frac{G(e_1,e_2,e_3,v_0-u_0)}{G(e_1,e_2,e_3)}}.$$

Dar, să observăm că distanţa dintre aceste varietăţi liniare este chiar distanţa de la un punct $M \in D$ şi $H$, deci este mai simplu de a calcula din formula $d(M,H) = \frac{|\langle \overline{x_M}, \overline{n}\rangle + b|}{\|\overline{n}\|}$, cu $\overline{x_M} = u_0$. Într-adevăr ecuaţia lui $H$ este $x+y+z+t=1$, prin urmare $\overline{n} = (1,1,1,1)$ şi $b=-1$, deci

$$d(D,H) = \frac{|\langle (1,1,0,1),(1,1,1,1)\rangle - 1|}{\|(1,1,1,1)\|} = \frac{2}{2} = 1.$$

## 5.6 Probleme

**Problema 5.6.1.** Arătaţi că pentru vectorii nenuli $x, y \in \mathbb{R}^2$, are loc

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta,$$

unde $\theta$ este unghiul dintre $x$ şi $y$.

**Problema 5.6.2.** Găsiţi unghiul dintre vectorii $(-2,4,3)$ şi $(1,-2,3)$.

**Problema 5.6.3.** Găsiţi vectorul de două unităţi care este ortogonal pe vectorii $(-2,3,-1)$ şi $(1,1,1)$.

**Problema 5.6.4.** Fie $u, v \in V$, $V$ un spaţiu cu produs scalar. Arătaţi că

$$\|u\| \le \|u+av\|, \forall a \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

**Problema 5.6.5.** Arătaţi că

$$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^n i a_i^2)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} b_i^2),$$

pentru orice $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , $, i = \overline{1,n}$.

**Problema 5.6.6.** Fie $S$ un subspaţiu al spaţiului cu produs scalar $\mathbb{R}_3[X]$, spaţiul polinoamelor cu grad cel mult 3, generat de polinoamele $1 - x^2$ şi $2 - x + x^2$, unde $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Găsiţi o bază pentru complementul ortogonal al lui $S$.

**Problema 5.6.7.** Fie $u, v \in V$, $V$ spaţiu cu produs scalar. Dacă

$$\|u\| = 3 \ , \ \|u + v\| = 4 \ , \ \|u - v\| = 6,$$

găsiţi $\|v\|$.

**Problema 5.6.8.** Dovediţi dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă: Există un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$ astfel încât norma indusă de acest produs scalar să verifice

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|,$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

**Problema 5.6.9.** Arătaţi că planele $P: \ x - 3y + 4z = 12$ şi $P_2: \ 2x - 6y + 8z = 6$ sunt paralele şi apoi găsiţi distanţa dintre ele.

**Problema 5.6.10.** Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar. Atunci are loc:

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4} \ , \ \forall u, v \in V.$$

**Problema 5.6.11.** Dacă $V$ este un spaţiu vectorial complex cu produs scalar, arătaţi că

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2}{4} \ , \ \forall \ u, v \in V.$$

**Problema 5.6.12.** Arătaţi că următoarea mulţime

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

este ortonormală în $C[-\pi, \pi]$, înzestrată cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

**Problema 5.6.13.** Arătaţi că mulţimea tuturor vectorilor din $\mathbb{R}^n$ care sunt ortogonali pe un vector dat $v \in \mathbb{R}^n$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n$. Care va fi dimensiunea sa?

**Problema 5.6.14.** Dacă $S$ este un subspaţiu al unui spaţiu real cu produs scalar, finit dimensional $V$, arătaţi că $S^{\perp} \simeq V/S$.

**Problema 5.6.15.** Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar şi fie $\{v_1, \dots, v_m\}$ o listă de vectori liniar independenţi din $V$. Câte familii ortonormale $\{e_1, \dots, e_m\})$ pot fi construite utilizând metoda Gram-Schmidt, astfel încât

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_i\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}, \ \forall \ \ i = \overline{1, m}.$$

**Problema 5.6.16.** Ortonormalizaţi următoarea listă de vectori în $\mathbb{R}^4$

$\{(1, 11, 0, 1), (1, -2, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

**Problema 5.6.17.** Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar şi fie $U \subseteq V$ un subspaţiu. Arătaţi că

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U.$$

**Problema 5.6.18.** Fie $\{e_1, \dots, e_m\}$ o listă ortonormală în spaţiul cu produs scalar $V$. Arătaţi că

$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m\rangle|^2$$

dacă şi numai dacă $v \in span\{e_1, \dots, e_m\}$.

**Problema 5.6.19.** Fie $V$ un spaţiu finit dimensional real cu produs scalar cu o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$. Arătaţi că pentru orice $u, w \in V$ are loc $\langle u, w\rangle = [u]^{\top} G(e_1, \dots, e_n)[w]$ unde $[u]$ sunt coordonatele vectorului (reprezentate ca matrice coloană) $u$ în raport cu baza dată şi $G(e_1, \dots, e_n)$ este matrice având ca intrări aceleaşi ca ale determinantului Gram ale $\{e_1, \dots, e_n\}$..

**Problema 5.6.20.** Găsiţi distanţa dintre varietăţile liniare.

a) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + t = 1, x - 2y + z = -1\}, K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y + 2z - t = 1, x + y + z + t = 2, x - y - 2z = -4\}$.

b) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + t = 2, x - 2y + z = 3\}, K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y + z - t = 1, 2x - y + z + t = 3\}$.

c) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + z + t = 1, x + y + z = 2\}, K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y + t = 3, x + t = 4\}$.

d) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + z + t = 1, x + y + z = 2, x - y + t = 2\}, K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + y + 2z + t = 4\}$.

**Problema 5.6.21.** Fie $V$ spaţiu cu produs scalar, $U \subseteq V$ o submulţime arbitrară şi fie $U_1, U_2 \subseteq V$ subspaţii. Arătaţi că $U^\perp$ este subspaţiu al lui $V$, şi $V^\perp = 0$, respectiv $0^\perp = V$. Arătaţi apoi că următoarea implicaţie are loc: $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$.

# 6

# Operatori pe spaţii cu produs scalar.

## 6.1 Funcţionale liniare şi adjuncte

O funcţională liniară pe un spaţiu vectorial $V$ peste corpul $\mathbb{F}$ este o transformare liniară $f : V \to \mathbb{F}$.

**Exemplul 6.1.** $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$ dată prin $f(v_1, v_2, v_3) = 3v_1+4v_2-5v_3$ este o funcţională liniară peste $\mathbb{F}^3$.

Presupunem acum că $V$ este un spaţiu cu produs scalar. Pentru un $v \in V$ fixat, aplicaţia $f : V \to \mathbb{F}$ dată prin $f(u) = \langle u, v\rangle$ este o funcţională liniară. Următoarea teoremă fundamentală arată că în cazul când $V$ este un spaţiu Hilbert, atunci orice funcţională continuă şi liniară pe $V$ este de această formă.

Reamintim că un spaţiu cu produs scalar este un spaţiu Hilbert dacă este complet, adică, orice şir Cauchy este convergent, adică,

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n, m > n_\epsilon \implies \|x_n - x_m\|_V < \epsilon$$

implică $(x_n)$ este convergent.

**Teorema 6.2.** *Presupunem că $f$ este o funcţională liniară continuă pe spaţiul Hilbert $V$. Atunci există un vector unic $v \in V$ astfel încât*

$$f(u) = \langle u, v \rangle \ .$$

*Demonstraţie.* Prezentăm demonstraţia doar pentru cazul finit dimensional. Arătăm mai întâi că există un vector $v \in V$ astfel încât $f(u) = \langle u, v \rangle$. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormală a lui $V$. Avem

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\langle u, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n) = \langle u, e_1 \rangle f(e_1) + \ldots \langle u, e_n \rangle f(e_n) \\ &= \langle u, \overline{f(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{f(e_n)} e_n \rangle \ , \end{aligned}$$

pentru orice $u \in V$. Rezultă că vectorul

$$v = \overline{f(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{f(e_n)} e_n$$

verifică $f(u) = \langle u, v \rangle$ pentru orice $u \in V$.

Rămâne de demonstrat unicitatea lui $v$. Presupunem că există $v_1, v_2 \in V$ astfel încât

$$f(u) = \langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle,$$

pentru orice $u \in V$. Rezultă că

$$0 = \langle u, v_1 \rangle - \langle u, v_2 \rangle = \langle u, v_1 - v_2 \rangle \quad \forall \ \ u \in V$$

Luând $u = v_1 - v_2$ rezultă că $v_1 = v_2$, deci $v$ este unic. □

**Observaţia 6.3.** Să observăm că orice funcţională liniară pe un spaţiu Hilbert finit dimensional este continuă. Mai mult de atât, pe orice spaţiu finit dimensional cu produs scalar, produsul scalar defineşte o normă (metrică) astfel încât împreună cu topologia indusă de această metrică spaţiul cu produs scalar este complet.

Să consideră un alt spaţiu vectorial $W$ peste $\mathbb{F}$, şi un produs scalar peste acesta, astfel încât $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este un spaţiu Hilbert.

Fie $T \in L(V, W)$ un operator continuu în topologiile induse de normele $\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v\rangle_V}$, respectiv $\|w\|_W = \sqrt{\langle w, w\rangle_W}$, (ca o funcţie continuă în analiza matematică). Acum, definim adjunctul lui $T$, după cum urmează.

Fixăm $w \in W$ şi considerăm funcţionala liniară pe $V$ care transformă $v$ în $\langle T(v), w\rangle_W$. Rezultă că există un unic vector $T^*(w) \in V$ astfel încât

$$\langle v, T^*(w)\rangle_V = \langle T(v), w\rangle_W \quad \forall v \in V.$$

Operatorul $T^\star : W \to V$ construit mai sus este denumit **adjunctul** lui $T$.

**Exemplul 6.4.** Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dat de $T(x, y, z) = (y + 3z, 2x)$.

Operatorul său adjunct este $T^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Fixăm $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Rezultă că

$$\begin{aligned}
\langle (x, y, z), T^*(u, v)\rangle &= \langle T(x, y, z), (u, v)\rangle \\
&= \langle (y + 3z, 2x), (u, v)\rangle \\
&= yu + 3zu + 2xv \\
&= \langle (x, y, z), (2v, u, 3u)\rangle
\end{aligned}$$

pentru orice $(x, y, z) \in R^3$. Aceasta ne arată că

$$T^*(u, v) = (2v, u, 3u).$$

Să remarcăm că în exemplul de mai sus $T^*$ nu este doar o aplicaţie de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^3$, dar şi o transformare liniară.

Vom demonstra aceasta pe cazul general. Fie $T \in L(V, W)$, deci dorim să arătăm că $T^* \in L(W, V)$.

Fie $w_1, w_1 \in W$. Din definiţie avem:

$$\begin{aligned}\langle T(v), w_1 + w_2\rangle &= \langle T(v), w_1\rangle + \langle Tv, w_2\rangle \\ &= \langle v, T^*(w_1)\rangle + \langle v, T^*(w_2)\rangle \\ &= \langle v, T^*(w_1) + T^*(w_2)\rangle,\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $T^*(w_1) + T^*(w_2)$ joacă rolul lui $T^*(w_1 + w_2)$.

Din unicitatea demonstrată mai sus, avem că

$$T^*(w_1) + T^*(w_2) = T^*(w_1 + w_2) \quad .$$

Rămâne de verificat omogenitatea lui $T^*$. Pentru $a \in \mathbb{F}$ avem

$$\begin{aligned}\langle T(v), aw\rangle &= \overline{a}\langle T(v), w\rangle \\ &= \overline{a}\langle v, T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, aT^*(w)\rangle \ .\end{aligned}$$

Aceasta ne arată că $aT^*(w)$ joacă rolul lui $T^*(aw)$, şi din nou, din unicitatea adjunctului avem că

$$aT^*(w) = T^*(aw) \ .$$

Prin urmare $T^*$ este o transformare liniară, cum trebuia să arătăm.

Se pot verifica uşor următoarele proprietăţi:

a) **aditivitatea** $(S + T)^* = S^* + T^*$ pentru orice $S, T \in L(V, W)$.

b) **omegenitatea conjugată** $(aT)^* = \overline{a}T^*$ pentru orice $a \in \mathbb{F}$ şi $T \in L(V, W)$.

c) **adjunctul adjunctului** $(T^*)^* = T$ pentru orice $T \in L(V, W)$.

d) **identitatea** $I^* = I$, dacă $I = I_V$, $V = W$.

e) **produse** $(ST)^* = T^*S^*$ pentru orice $T \in L(V, W)$ şi $S \in L(W, U)$.

Vom demonstra afirmaţiile de mai sus. Considerăm $v \in V$ şi $w \in W$.

*a*) Fie $S, T \in L(U, W)$. Atunci, $\langle (S+T)(v), w\rangle = \langle v, (S+T)^*(w)\rangle$. Pe de altă parte $\langle (S+T)(v), w\rangle = \langle S(v), w\rangle + \langle T(v), w\rangle = \langle v, S^*(w)\rangle + \langle v, T^*(w)\rangle = \langle v, (S^* + T^*)(w)\rangle$.

Deci, $(S+T)^* = S^* + T^*$.

*b*) Fie $a \in \mathbb{F}$ şi $T \in L(U, W)$. Avem $\langle (aT)(v), w\rangle = \langle v, (aT)^*(w)\rangle$.

Dar $\langle (aT)(v), w\rangle = a\langle T(v), w\rangle = a\langle v, T^*(w)\rangle = \langle v, \overline{a}T^*(w)\rangle$.

Prin urmare, $(aT)^* = \overline{a}T^*(w)$.

*c*) Fie $T \in L(U, W)$. Atunci $\langle w, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), w\rangle} = \overline{\langle v, T^*(w)\rangle} = \langle T^*(w), v\rangle = \langle w, (T^*)^*(v)\rangle$.

Deci, $(T^*)^* = T$.

*d*) Fie $V = W$. Avem $\langle v, I(w)\rangle = \langle v, w\rangle = \langle I(v), w\rangle = \langle v, I^*(w)\rangle$.

Prin urmare $I = I^*$.

*e*) Fie $T \in L(V, W)$ şi $S \in L(W, U)$. Atunci pentru orice $u \in U$ şi $v \in V$ are loc: $\langle T^*S^*(u), v\rangle = \langle S^*(u), ((T)^*)^*(v)\rangle = \langle S^*(u), T(v)\rangle = \langle u, (S^*)^*T(v)\rangle = \langle u, ST(v)\rangle = \overline{\langle ST(v), u\rangle} = \overline{\langle v, (ST)^*(u)\rangle} = \langle (ST)^*(u), v\rangle$.

Deci, $T^*S^* = (ST)^*$.

**Propoziţia 6.5.** *Presupunem că $T \in L(V, W)$ este continuă. Atunci*

1. $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

2. $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$.

3. $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$.

4. $\operatorname{im} T = (\ker T^*)^\perp$.

*Demonstraţie.* 1. Fie $w \in W$. Atunci

$$\begin{aligned} w \in \ker T^* &\Leftrightarrow T^*(w) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v, T^*(w)\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle T(v), w\rangle = 0 \quad \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow w \in (\operatorname{im} T)^{\perp} \quad , \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^{\perp}$. Dacă considerăm complementul ortogonal în ambele părţi va rezulta 4. Înlocuind $T$ cu $T^*$ în 1 şi 4 va rezulta 3 şi 2. □

Matricea transpusă conjugată de tip $(m, n)$ este o matrice de tip $(n, m)$ obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor şi luând conjugatul complex al fiecărui element. Adjuncta unei matrici (care este o transformare liniară între două spaţii finit dimensionale în baze corespunzătoare) este transpunsa conjugată a matricii cum ne arată următorul rezultat.

**Propoziţia 6.6.** *Presupunem că $T \in L(V, W)$. Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$, şi $\{f_1, \ldots, f_m\}$ sunt baze ortonormale pentru $V$ şi respectiv $W$, şi notăm prin $M_T$ şi $M_{T^*}$ matricele lui $T$ şi $T^*$ în aceste baze, atunci $M_{T^*}$ este transpusa conjugată a lui $M_T$.*

*Demonstraţie.* A $k - a$ coloană a lui $M_T$ este obţinută prin scrierea lui $T(e_k)$ ca şi combinaţie liniară a $f_j$-urilor, scalarii folosiţi devin a $k$-a coloană a lui $M_T$. Fiind baza cu vectorii $f_j$ ortonormali, rezultă că

$$T(e_k) = \langle T(e_k), f_1\rangle f_1 + \cdots + \langle T(e_k), f_m\rangle f_m.$$

Deci pe poziţia $(k, j)$ din $M_T$ avem elementul $\langle T(e_k), f_j\rangle$. Înlocuind $T$ cu $T^*$ şi interschimbând rolul jucat de $e$-uri şi $f$-uri, vedem că elementul de pe poziţia $(j, k)$ a matricii $M_{T^*}$ este $\langle T^*(f_k), e_j\rangle$, care este egal cu $\langle f_k, T(e_j)\rangle$, şi care este egal cu $\overline{\langle T(e_j), f_k\rangle}$. Cu alte cuvinte, $M_{T^*}$ este egală cu conjugatul complex al lui $M_T$. □

## 6.2 Operatori normali

Un operator pe Spaţiul Hilbert este numit normal dacă comută cu adjunctul său, adică

$$TT^* = T^*T \ .$$

**Observaţia 6.7.** *Numim matrice complexă pătratică normală dacă comută cu transpunsa sa conjugată, adică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este normală dacă*

$$AA^* = A^*A.$$

*Aici $A^* = \overline{A}^\top$ este conjugata transpusă a lui $A$.*
*Se poate observa uşor că matricea unui operator normal este o matrice normală.*

**Exemplul 6.8.** Pe $\mathbb{F}^2$ considerăm operatorul care în baza canonică are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Acesta este un operator normal.

Într-adevăr fie $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ un operator a cărui matrice este $A$. Atunci $T(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$, prin urmare $\langle T(x, y),(u, v)\rangle = (2x - 3y)u + (3x + 2y)v = (2v - 3u)y + (3v + 2u)x = \langle (x, y),(3v + 2u, 2v - 3u)\rangle$. Deci, adjunctul lui $T$ este $T^*(u, v) = (2u + 3v, -3u + 2v)$. Se poate calcula uşor că $TT^*(u, v) = T^*T(u, v) = (13u, 13v)$, deci $TT^* = T^*T$.

**Propoziţia 6.9.** *Un operator $T \in L(V)$ este un operator normal dacă*

$$\|T(v)\| = \|T^*(v)\| \textit{ pentru orice } v \in V.$$

*Demonstraţie.* Fie $T \in L(V)$.

$$\begin{aligned} T \text{ este normal} &\iff T^*T - TT^* = 0 \\ &\iff \langle (T^*T - TT^*)(v), v\rangle = 0 \text{ pentru orice } v \in V \\ &\iff \langle T^*T(v), v\rangle = \langle TT^*(v), v\rangle \text{ pentru orice } v \in V \\ &\iff \|T(v)\|^2 = \|T^*(v)\|^2 \text{ pentru orice } v \in V. \end{aligned}$$

□

**Teorema 6.10.** *Fie $T$ un operator normal pe $V$ şi $\lambda_0$ o valoare proprie a lui $T$.*

1. *Subspaţiul propriu $E(\lambda_0)$ este $T^*$ invariant.*
2. *Dacă $v_0$ este un vector propriu al lui $T$ corespunzător valorii proprii $\lambda_0$, atunci $v_0$ este un vector propriu al lui $T^*$ corespunzător valorii proprii $\overline{\lambda}_0$.*
3. *Fie $v, w$ doi vectori proprii corespunzători valorilor proprii distincte $\lambda, \beta$.*

   *Atunci $v, w$ sunt ortogonali.*

*Demonstraţie.* Fie $v \in E(\lambda_0)$. Trebuie să arătăm că $T^*(v) \in E(\lambda_0)$.

Deoarece $T(v) = \lambda_0 v$, avem

$$T(T^*(v)) = (TT^*)(v) = (T^*T)(v) = T^*(T(v)) = T^*(\lambda_0 v) = \lambda_0 T^*(v).$$

ceea ce ne arată că $T^*(v) \in E(\lambda_0)$.

Pentru cea de-a doua afirmaţie din teoremă avem că $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Fie $w \in E(\lambda_0)$. Atunci

$$\begin{aligned} \langle T^*(v_0), w\rangle &= \langle v_0, T(w)\rangle \\ &= \langle v_0, \lambda_0 w\rangle = \overline{\lambda}_0 \langle v_0, w\rangle \\ &= \langle \overline{\lambda}_0 v_0, w\rangle. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că

$$\langle T^*(v_0) - \overline{\lambda}_0 v_0, w\rangle = 0 \ ,$$

pentru orice $w \in E(\lambda_0)$. Primul termen din produsul scalar este $E(\lambda_0)$ din afirmaţia anterioară. Luăm $w = T^*(v_0) - \overline{\lambda}_0 v_0$ şi rezultă că $T^*(v_0) = \overline{\lambda}_0 v_0$, adică, a doua afirmaţie a teoremei este de asemenea adevărată.

Acum, avem de demonstrat ultima afirmaţie. Avem $T(v) = \lambda v$ şi $T(\beta) = \beta w$. Din cele de mai devreme avem $T^*(w) = \overline{\beta} w$, deci

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)$$

(din definiţia adjunctului), ceea ce implică $\lambda\langle v, w\rangle = \beta\langle v, w\rangle$. Deoarece $\lambda \neq \beta$, rezultă că $\langle v, w\rangle = 0$. □

**Propoziţia 6.11.** *Dacă $U$ este un $T$ subspaţiu invariant al lui $V$ atunci $U^\perp$ este un $T^*$ subspaţiu invariant al lui $V$.*

*Demonstraţie.* Avem

$$w \in U^\perp \ , \ v \in V \Longrightarrow w \in U^\perp \ , \ T(v) \in U \Longrightarrow \langle v, T^*(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle.$$

Aceasta înseamnă că $T^*(w) \in U^\perp$. □

Un spaţiu unitar este un spaţiu cu produs scalar peste $\mathbb{C}$.

**Teorema 6.12.** *Presupunem că $V$ este un spaţiu unitar finit dimensional, şi $T \in L(V)$ este un operator. Atunci $T$ este normal dacă există o bază ortonormală $B$ a lui $V$ relativ cu care matricea lui $T$ este diagonală.*

*Demonstraţie.* Să presupunem întâi că $T$ are o matrice diagonală. Matricea lui $T^*$ este transpusa complexă, deci aceasta este şi ea diagonală. Fiecare dintre cele două matrici diagonale comută, ceea ce înseamnă că $T$ este normal.

Ca să demonstrăm invers presupunem că $T$ este normal. Atunci, există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui $V$ în raport cu care matricea $T$ este superior triunghiulară, adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{n,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Vom arăta că matricea $A$ este de fapt una diagonală.

Avem

$$\|T(e_1)\| = \sqrt{|a_{1,1}|^2}$$

şi

$$\|T^*(e_1)\| = \sqrt{|a_{1,1}|^2 + \cdots + |a_{1,n}|^2}.$$

Deoarece $T$ este normal, normele sunt egale, deci $a_{1,2} = \cdots = a_{1,n} = 0$.

$$\|T(e_2)\| = \sqrt{|a_{1,2}|^2 + |a_{2,2}|^2} = \sqrt{|a_{2,2}|^2}$$

şi

$$\|T^*(e_2)\| = \sqrt{|a_{2,2}|^2 + \cdots + |a_{2,n}|^2}.$$

Deoarece $T$ este normal, normele sunt egale, deci $a_{2,3} = \cdots = a_{2,n} = 0$.

Continuând această procedură obţinem că pentru orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ avem $a_{k,k+1} = \cdots = a_{k,n} = 0$, deci $A$ este diagonal.

□

**Teorema 6.13.** ***(Teorema spectrală)*** *Presupunem că $V$ este un spaţiu unitar. Atunci $T$ are o bază ortonormală alcătuită din vectorii proprii dacă $T$ este normal.*

*Demonstraţie.* Facem inducţie după $n = \dim V$. Afirmaţia este evidentă pentru $n = 1$. Presupunem că aceasta este adevărat pentru orice dimensiune mai mică decât

$n$. Fie $T \in L(V)$. Atunci $T$ are cel puţin o valoare proprie $\lambda$. Dacă $\dim E(\lambda) = n$ este îndeajuns pentru a construi o bază ortonormală a lui $E(\lambda)$. Pentru $\dim E(\lambda) < n$, alegem $E^{\perp}(\lambda)$, şi avem $0 < \dim E^{\perp}(\lambda) < n$.

Acum $E(\lambda)$ este $T^*$ invariant, deci $E^{\perp}(\lambda)$ este $T$ invariant. Din ipoteza de inducţie, $E^{\perp}(\lambda)$ are o bază bază ortonormală alcătuită din vectori proprii ai lui $T$. Adăugăm aceştia la bază ortonormală a lui $E(\lambda)$. Rezultatul este o bază ortonormală a lui $V$ alcătuită din vectori proprii. $\square$

## 6.3 Izometrii

Un operator $T \in L(V)$ este numit o izometrie dacă

$$\|T(v)\| = \|v\| \text{ , pentru orice } v \in V.$$

**Exemplul 6.14.** Fie $I$ aplicaţia identitate a lui $V$ ($V$ spaţiu vectorial complex), şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$. Aplicaţia $\lambda I$ este o izometrie, deoarece $\|\lambda I(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = \|v\|$.

Dacă $T$ este o izometrie rezultă uşor că $T$ este injectiv.

Într-adevăr, presupunând contrariul, adică, există $u, v \in V$, $u \neq v$ astfel încât $T(u) = T(v)$. Deci, $0 = \|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|$, ceea ce este în contradicţie cu $u \neq v$.

**Teorema 6.15.** *Presupunem că $T \in L(V)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$T$ este o izometrie.*

2. *$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ pentru orice $u, v \in V$.*

3. *$T^*T = I$.*

4. *$\{T(e_1), \ldots, T(e_m)\}$ este o listă ortonormală pentru orice listă ortonormală $\{e_1, \ldots, e_m\}$.*

5. *Există o bază ortonormală $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui $V$ astfel încât $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ este o bază ortonormală.*

6. *$T^*$ este o izometrie.*

7. *$\langle T^*(u), T^*(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ pentru orice $u, v \in V$.*

8. *$TT^* = I$*

9. *$\{T^*(e_1), \ldots, T^*(e_m)\}$ este o listă ortonormală pentru orice listă ortonormală $(e_1, \ldots, e_m)$ .*

10. *Există o bază ortonormală $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui $V$ astfel încât $\{T^*(e_1), \ldots, T^*(e_n)\}$ este o bază ortonormală.*

*Demonstraţie.* Presupunem că 1 are loc. Fie $u, v \in V$. Atunci

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 = \|T(u-v)\|^2 & \\ &= \langle T(u)-T(v), T(u)-T(v)\rangle \\ &= \|T(u)\|^2 + \|T(v)\|^2 - 2\langle T(u), T(v)\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle T(u), T(v)\rangle.\end{aligned}$$

Pe de altă parte $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$.

Presupunem acum că 2 are loc. Atunci

$$\langle (T^*T - I)(u), v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle - \langle u, v\rangle = 0 \ .$$

pentru orice $u, v \in V$. Luăm $v = (T^*T - I)(u)$ şi rezultă că $T^*T - I = 0$, adică 3.

Presupunem că 3 are loc. Fie $(e_1 \ldots e_m)$ o listă de vectori ortonormali din $V$. Atunci

$$\langle T(e_j), T(e_k)\rangle = \langle T^*T(e_j), e_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle,$$

adică 4 are loc. Evident 4 implică 5.

Presupunem că 5 are loc. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormală a lui $V$ astfel încât $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ este bază ortonormală. Pentru $v \in V$

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &= \|T(\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n)\|^2 \\ &= \|\langle v, e_1\rangle T(e_1) + \cdots + \langle v, e_n\rangle T(e_n)\|^2 \\ &= |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2 . \end{aligned}$$

Luând rădăcinile pătrate vedem că $T$ este o izometrie. Avem acum $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 1$. Înlocuind $T$ cu $T^*$ vedem că 6 şi până la 10 sunt echivalente. Este nevoie să arătăm doar echivalenţa unei afirmaţii din primul grup cu una din cel de-al doilea grup.

$3 \Leftrightarrow 8$ ceea ce este uşor de observat deoarece $TT^* = I \Rightarrow TT^*(u) = u, \forall u \in V \Rightarrow (TT^*)(T(u)) = T(u), \forall u \in V$, sau echivalent $T((T^*T)(u)) = T(u), \forall u \in V$, $T$ este injectiv, deci $T^*T = I$.

Invers, $T^*T = I \Rightarrow T^*T(u) = u, \forall u \in V \Rightarrow (T^*T)(T^*(u)) = T^*(u), \forall u \in V$, sau echivalent $T^*((TT^*)(u)) = T^*(u), \forall u \in V$, $T^*$ este injectiv, deci $TT^* = I$. □

**Observaţia 6.16.** Reamintim că o matrice pătratică reală $A$ este numită ortogonală dacă $AA^\top = A^\top A = I$. O matrice pătratică complexă $B$ este numită unitară dacă $BB^* = B^*B = I$, unde $B^*$ este transpusa conjugată a lui $B$, ceea ce înseamnă că $B^* = \overline{B}^\top$. Se poate observa uşor că matricea izometriei pe un spaţiu cu produs scalar real (complex) finit dimensional este o matrice ortogonală (unitară).

Ultima teoremă arată că orice izometrie este un operator normal. Deci, caracterizarea unui operator normal poate fi folosită pentru a da o descriere completă izometriilor.

**Teorema 6.17.** *Presupunem că $V$ este un spaţiu complex cu produs scalar şi $T \in L(V)$. Atunci $T$ este o izometrie dacă există o bază ortonormală a lui $T$ alcătuită din vectori proprii ai lui $T$ care corespund valorilor proprii având modulele* 1.

*Demonstraţie.* Presupunem că există o bază ortonormală $\{e_1, \dots, e_n\}$ alcătuită din vectorii proprii corespunzători valorilor proprii $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ având valoarea absolută 1. Rezultă că pentru orice $v \in V$

$$\begin{aligned} T(v) &= \langle v, e_1 \rangle T(e_1) + \cdots + \langle v, e_n \rangle T(e_n) \\ &= \lambda_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

Prin urmare $\|T(v)\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2 = \|v\|^2$ ceea ce înseamnă

$$\|T(v)\| = \|v\|.$$

Vom demonstra acum în sens invers. Presupunem că $T$ este o izometrie. Din teorema spectrală există o bază ortonormală a lui $V$ alcătuită din vectorii proprii $\{e_1, \dots, e_n\}$. Fie $e_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ un astfel de vector, asociat unei valori proprii $\lambda_j$. Rezultă că

$$|\lambda_j| \|e_j\| = \|\lambda_j e_j\| = \|T(e_j)\| = \|e_j\|,$$

deci $|\lambda_j| = 1$, pentru orice $j \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

În cele din urmă vom da următoarea teoremă importantă cu privire la forma matricii unei izometrii.

**Teorema 6.18.** *Presupunem că $V$ este un spaţiu real cu produs scalar şi $T \in L(V)$. Atunci $T$ este o izometrie dacă există o bază ortonormală a lui $V$ în raport cu care $T$ are o matrice diagonală bloc unde fiecare bloc a matricii diagonale este o matrice $(1,1)$ conţinând $1$ sau $-1$, sau o matrice $(2,2)$ de forma*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

*cu $\theta \in (0,\pi)$.*

*Demonstraţie.* Valorile proprii ale lui $T$ au valoarea absolută 1, deci sunt de forma $1$, $-1$ sau $\cos\theta \pm \sin\theta$. Pe de altă parte, matricea lui $T$ este similară cu o matrice diagonală a cărei elemente de pe diagonală sunt valorile proprii. □

## 6.4 Operatori autoadjuncţi

Un operator $T \in L(V)$ este numit autoadjunct dacă $T = T^*$ adică $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ pentru orice $v, w \in V$.

**Observaţia 6.19.** În mod evident, un operator autoadjunct $T \in L(V)$ este normal deoarece în acest caz are loc

$$TT^* = T^*T^* = T^*T.$$

**Exemplul 6.20.** Fie $T$ un operator pe $\mathbb{F}^2$ a cărui matrice în raport cu baza standard este

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Atunci $T$ este autoadjunct dacă $b = 3$.

Într-adevăr, pentru $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ avem $T(x, y) = (2x + by, 3x + 5y)$, deci pentru $(u, v) \in \mathbb{F}^2$ are loc

$$\langle T(x, y), (u, v)\rangle = (2x + by)u + (3x + 5y)v = \langle (x, y), (2u + 3v, bu + 5v)\rangle.$$

Prin urmare $T^*(x, y) = (2x + 3y, bx + 5y)$.

În concluzie $T$ este autoadjunct, adică $T = T^*$ dacă $b = 3$.

Poate fi uşor verificat că suma a doi operatori autoadjuncţi şi produsul unui operator autoadjunct cu un scalar real este un operator autoadjunct.

Într-adevăr, fie $S, T \in L(V)$ doi operatori autoadjuncţi. Atunci $(S + T)^* = S^* + T^* = S + T$, deci $S + T$ este autoadjunct. Pe de altă parte pentru produsul lor avem $(ST)^* = T^*S^* = TS$. Deci $TS$ este autoadjunct dacă $ST = TS$.

Fie acum $a \in \mathbb{R}$. Atunci $(aT)^* = \overline{a}T^* = aT$, deci $aT$ este autoadjunct.

**Observaţia 6.21.** Când $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ adjunctul pe $L(V)$ joacă un rol similar în conjugarea complexă pe $\mathbb{C}$. Un număr complex este real dacă $z = \overline{z}$. Prin urmare pentru un operator autoadjunct $T$, suma $T + T^*$ este analoagă cu un număr real. Analogia este reflectată în câteva proprietăţi importante a operatorilor autoadjuncţi, începând cu valorile sale proprii.

**Observaţia 6.22.** Reamintim că o matrice pătratică complexă $A$ este numită hermitiană dacă $A = A^*$, unde $A^*$ este conjugata transpusă a lui $A$, care este $A^* = \overline{A}^\top$. Dacă $A$ este o matrice pătratică cu elemente numere reale, atunci $A$ este numită simetrică dacă $A = A^\top$. Se poate observa uşor că matricea unui operator autoadjunct pe un spaţiu cu produs scalar complex (real), este hermitiană (simetrică).

**Propoziţia 6.23.** *Următoarea afirmaţie are loc.*

- *Orice valoare proprie a unui operator autoadjunct este reală.*

- *Fie $v, w$ vectori proprii corespunzători unor valori proprii distincte. Atunci $\langle v, w\rangle = 0$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $T$ este un operator autoadjunct al lui $V$. Fie $\lambda$ o valoare proprie a lui $T$, şi $v$ un vector propriu, adică $T(v) = \lambda v$. Atunci

$$\begin{aligned}
\lambda\|v\|^2 &= \langle \lambda v, v\rangle \\
&= \langle T(v), v\rangle \\
&= \langle v, T(v)\rangle \quad \text{(deoarece } T \text{ este autoadjunct)} \\
&= \langle v, \lambda v\rangle \\
&= \overline{\lambda}\|v\|^2.
\end{aligned}$$

Prin urmare $\lambda = \overline{\lambda}$, adică, $\lambda$ este real. □

Următoarea afirmaţie reiese din faptul că un operator autoadjunct este normal.

**Teorema 6.24.** *Fie $T \in L(V)$, unde $V$ este un spaţiu cu produs scalar. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *$T$ este autoadjunct.*
2. *Există o bază ortonormală a lui $V$ în raport cu care matricea lui $T$ este diagonală cu elemente numere reale.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $T$ este autoadjunct. Deoarece $T$ este normal există o bază ortonormală a lui $V$ relativ la care matricea lui $M_T$ a operatorului este superior triunghiulară. Dar matricea lui $T^*$ în această bază este $M_{T^*} = {M_T}^*$, şi din $T = T^*$ avem $M_T = M_T^*$, deci $M_T$ este diagonală, şi diagonala este formată din elemente numere reale.

Invers, fie $M_T$ o matrice diagonală a lui $T$, cu elemente numere reale într-o bază ortonormală. Atunci $M_T = M_T^\top$, deci $M_T = M_{T^*}$ sau echivalent $T = T^*$. □

## 6.5 Probleme

**Problema 6.5.1.** Presupunem că $A$ este o matrice complexă cu valori proprii reale care poate fi diagonalizată de o matrice unitară. Arătaţi că $A$ trebuie să fie hermitiană.

**Problema 6.5.2.** Demonstraţi sau daţi un contraexemplu: produsul a doi operatori autoadjuncţi ai unui spaţiu cu produs scalar finit dimensional este autoadjunct.

**Problema 6.5.3.** Arătaţi că o matrice superior triunghiulară este normală dacă şi numai dacă este diagonală.

**Problema 6.5.4.** Presupunem că $p \in L(V)$ este astfel încât $p^2 = p$. Arătaţi că $p$ este o proiecţie ortogonală dacă şi numai dacă $p$ este autoadjunct.

**Problema 6.5.5.** Arătaţi că dacă $V$ este un spaţiu cu produs scalar real, atunci mulţimea operatorilor autoadjuncţi pe $V$ este un subspaţiu a lui $L(V)$. Arătaţi că dacă $V$ este un spaţiu cu produs scalar complex, atunci mulţimea operatorilor autoadjuncţi pe $V$ nu este un subspaţiu al lui $L(V)$.

**Problema 6.5.6.** Arătaţi că dacă $\dim V \geq 2$ atunci mulţimea operatorilor normali pe $V$ nu este un subspaţiu al lui $L(V)$.

**Problema 6.5.7.** Fie $A$ o matrice normală. Arătaţi că $A$ este unitară dacă şi numai dacă toate valorile sale proprii $\lambda$ satisfac $|\lambda| = 1$.

**Problema 6.5.8.** Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ orice matrice cu elemente numrere complexe şi considerăm $A = I_n - 2XX^*$. Arătaţi că $A$ este şi hermitiană şi unitară. Deduceţi că $A = A^{-1}$.

**Problema 6.5.9.** Presupunem că $V$ este un spaţiu cu produs scalar complex şi $T \in L(V)$ este un operator normal astfel încât $T^9 = T^8$. Arătaţi că $T$ este autoadjunct şi $T^2 = T$.

**Problema 6.5.10.** Fie $A$ o matrice normală. Arătaţi că $A$ este hermitiană dacă şi numai dacă toate valorile sale proprii sunt reale.

**Problema 6.5.11.** Arătaţi că dacă $T \in L(V)$ este normal, atunci

$$\operatorname{im} T = \operatorname{im} T^*.$$

şi

$$\ker T^k = \ker T$$

$$\operatorname{im} T^k = \operatorname{im} T$$

pentru orice întreg pozitiv k.

**Problema 6.5.12.** O matrice complexă $A$ este numită anti-hermitiană dacă $A^* = -A$. Arătaţi următoarele afirmaţii.

a) O matrice anti-hermitiană este normală.

b) Valorile proprii ale unei matrici anti-hermitiene sunt pur imaginare, adică, au partea reală 0.

c) O matrice normală este anti-hermitiană dacă toate valorile sale proprii sunt pur imaginare.

**Problema 6.5.13.** Presupunem că $V$ este un spaţiu cu produs scalar complex. Un operator $S \in L(V)$ este numit rădăcina pătrată a lui $T \in L(V)$ dacă $S^2 = T$. Notăm cu $S = \sqrt{T}$. Arătaţi că orice operator normal pe $V$ are o rădăcină pătrată.

**Problema 6.5.14.** Confirmaţi sau infirmaţi: operatorul identitate pe $\mathbb{F}^2$ are un număr infinit de rădăcini pătrate autoadjuncte.

**Problema 6.5.15.** Fie $T, S \in L(V)$ izometrii şi $R \in L(V)$ un operator pozitiv, (adică $\langle R(v), v\rangle \geq 0$ pentru orice $v \in V$), astfel încât $T = SR$. Arătaţi că $R = \sqrt{T^*T}$.

**Problema 6.5.16.** Fie $\mathbb{R}_2[X]$ spaţiul cu produs scalar al polinoamelor de grad cel mult 2, cu produsul scalar

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Fie $T \in L(\mathbb{R}_2[X])$, $T(ax^2 + bx + c) = bx$.

a) Arătaţi că matricea lui $T$ în raport cu o bază dată este hermitiană.

b) Arătaţi că $T$ nu este autoadjunct.

(Să remarcăm că nu este o contradicţie între aceste afirmaţii deoarece baza din prima afirmaţie nu este ortonormală.)

**Problema 6.5.17.** Arătaţi că un operator normal pe un spaţiu cu produs scalar complex este autoadjunct dacă şi numai dacă toate valorile sale proprii sunt reale.

# 7

# Elemente de geometrie

## 7.1 Forme pătratice

Considerăm spaţiul n dimensional $\mathbb{R}^n$ şi notăm prin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordonatele vectorului $x \in \mathbb{R}^n$ în baza canonică $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. O **formă pătratică** este o aplicaţie $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \ldots 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

unde coeficienţii $a_{ij}$ sunt toţi numere reale.

Prin urmare, formele pătratice sunt polinoame omogene de grad doi cu un număr dat de variabile.

Folosindu-ne de multiplicarea matricelor, putem scrie $Q$ într-o formă compactă ca

$$Q(x) = X^\top AX,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea simetrică $A$ (să observăm că $a_{ij} = a_{ji}$) se numeşte matricea în formă pătratică. Fiind simetrică (şi reală), $A$ este matricea operatorului autoadjunct în raport cu baza $E$. Acest operator, pe care îl denumim $T$, este diagonalizabil şi există o bază $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ format din vectori proprii în raport cu care $T$ are o matrice diagonală formată din valori proprii de asemenea notată cu $T$)

$$T = diag\{\lambda_1 \dots, \lambda_n\}.$$

Fie $C$ matricea de trecere de la $E$ la $B$ şi

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

coordonatele vectorului iniţial scris în $B$. Avem că

$$X = CX'$$

Ştiind că $T = C^{-1}AC$, şi că $C^{-1} = C^\top$ putem calcula

$$\begin{aligned} Q(x) &= X^\top AX \\ &= (CX')^\top A\,(CX') \\ &= X'^\top C^\top ACX' \\ &= X'^\top TX' \\ &= \lambda_1 x'^2_1 + \dots + \lambda_n x'^2_n, \end{aligned}$$

şi spunem că am redus $Q$ la forma sa canonică

$$Q(x) = \lambda_1 x'^2_1 + \cdots + \lambda_n x'^2_n.$$

Aceasta poartă denumirea de metodă geoemtrică.

Forma pătratică se numeşte

- pozitiv definită dacă $Q(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ definită dacă $Q(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Putem caracteriza pozitiv definirea a formei pătratice în termeni de minori diagonali a matricii sale

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \det A.$$

Avem următorul cirteriu:

- $Q$ este pozitiv definită dacă $D_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$
- $Q$ este negativ definită dacă $(-1)^i D_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$.

## 7.2 Cuadrice

Ecuaţia generală a unei cuadrice este

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Din punct de vedere geometric, cuadricele, care sunt denumite de asemenea **suprafeţe cuadrice**, sunt suprafeţe bidimensionale definite ca locul geometric al zerourilor polinomului de grad doi în $x, y$ şi $z$. Poate cel mai important exemplu de cuadrice este sfera (suprafaţa sferică).

Tipul lor este determinat de forma pătratică care conţine toţi termenii de grad doi

$$Q = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Distingem, bazat pe semnul valorilor proprii ale matricii lui $Q$, între: elipsoizi, paraboloizi eliptici sau hiperbolici, hiperboloizi cu una sau două pânze, conuri şi cilindrii.

Vom studia cum să reducem ecuaţia generală a unei cuadrice la forma canonică. Vom reduce $Q$ la forma canonică folosind metoda geometrică.

Considerăm matricea $A$ asociată lui $Q$. Fiind simetrică, $A$ are valori proprii reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dacă sunt distincte, vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali (dacă nu sunt, se aplică algoritmul Gram-Schmidt). Prin urmare, obţinem trei vectori unitate ortogonali $\{b_1, b_2, b_3\}$, o bază în $\mathbb{R}^3$.

Fie $R$ matricea de trecere din $\{i, j, k\}$ la o nouă bază $\{b_1, b_2, b_3\}$. Reamintim din capitolele anterioare că $R$ are cei trei vectori $b_1, b_2, b_3$ ca şi coloanele sale

$$R = [b_1|b_2|b_3].$$

Acum, calculăm $\det R$ şi verificăm dacă

$$\det R = 1.$$

Dacă este necesar, adică, dacă $\det R = -1$, vom modifica unul din vectori în opusul său (de exemplu vom lua $R = [-b_1|b_2|b_3]$). Aceasta asigură că $R$ defineşte o **rotaţie**, noua bază fiind obţinută din cea originală prin această rotaţie. Fie $(x, y, z)$ şi

$(x', y', z')$ coordonatele ale aceluiaşi punct în baza originală şi în noua bază, avem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Ştim că în raport cu noile coordonate

$$Q = \lambda_1 x'^2 + \lambda_1 y'^2 + \lambda_n z'^2,$$

şi prin urmare, ecuaţia cuadricei se reduce la forma mai simplă

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_1 y'^2 + \lambda_n z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0.$$

Ca să obţinem forma canonică a cuadricei trebuie să mai aplicăm o nouă transformare, adică o **translaţie**. Ca să îndeplinim acest pas vom aborda următoarele cazuri: (A) dacă $A$ are trei valori proprii diferite de zero, (B) când o valoare proprie este zero şi (C) când două valori proprii sunt egale cu zero.

(A) Pentru $\lambda_i \neq 0$ obţinem

$$\lambda_1(x' - x_0)^2 + \lambda_2(y' - y_0)^2 + \lambda_3(z' - z_0)^2 + a'_{44} = 0$$

Considerăm matricea de translatare definită de

$$\begin{aligned} x'' &= x' - x_0, \\ y'' &= y' - y_0, \\ z'' &= z' - z_0. \end{aligned}$$

În noile coordonate ecuaţia cuadricei se reduce la forma canonică

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_{44} = 0.$$

Cazurile (B) şi (C) vor fi tratate similar.

Vom încheia această secţiune prin a arăta reprezentări ale diferitelor suprafeţelor cuadrice, începând cu cazurile degenerate şi anume conuri şi cilindiri.

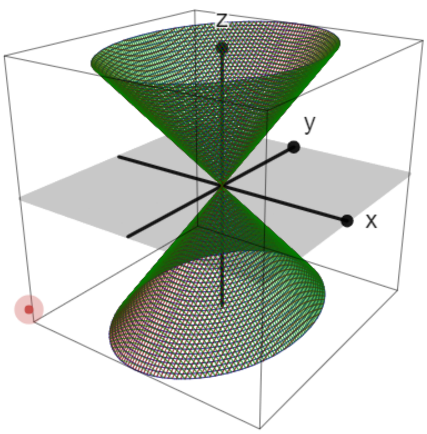


Figura 7.1: Conul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

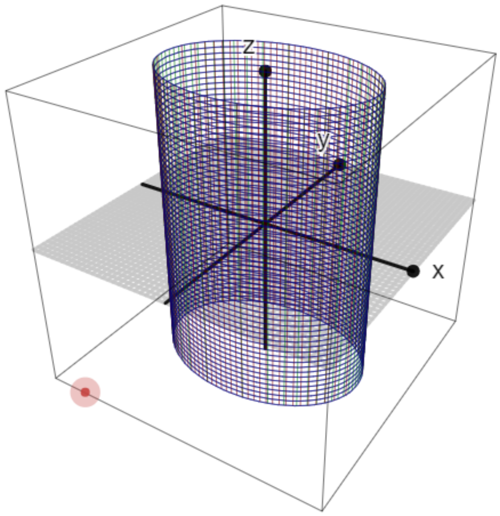


Figura 7.2: Cilindrul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Suprafeţele cuadrice nedegenerate sunt date în continuare.

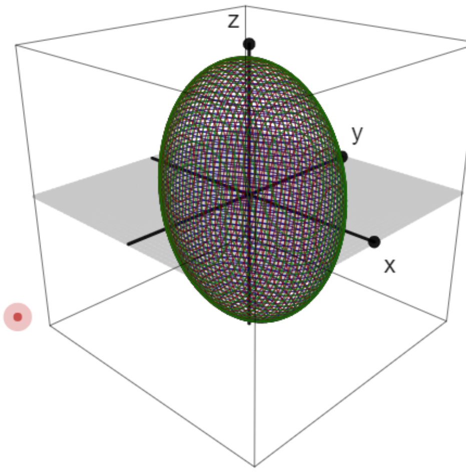


Figura 7.3: Elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

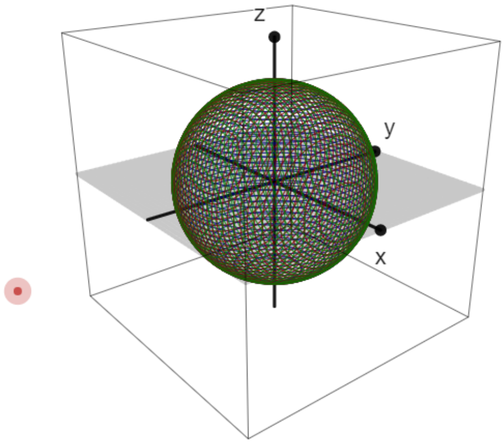


Figura 7.4: Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

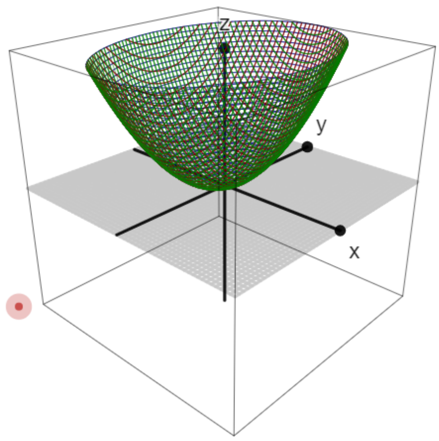


Figura 7.5: Paraboloidul eliptic
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

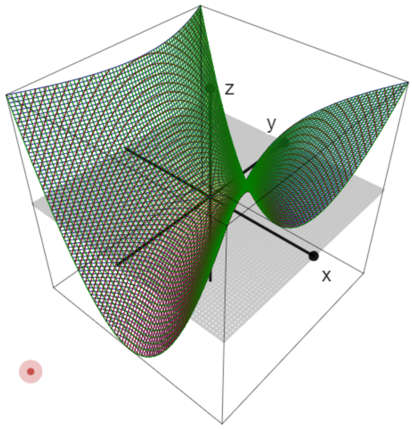


Figura 7.6: Paraboloidul hiperbolic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

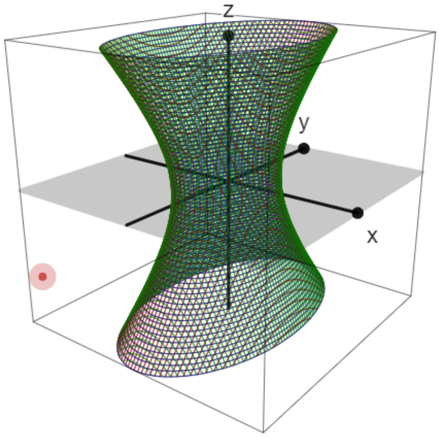


Figura 7.7: Hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

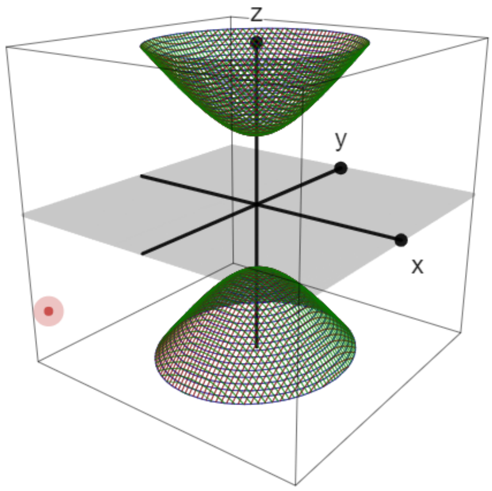


Figura 7.8: Hiperboloidul cu două pânze
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

## 7.3 Conice

Studiate încă din vremea grecilor antici, **secţiunile conice** (sau doar conicele) sunt obţinute, precum denumirea lor indică, prin intersectarea unui con cu o secţiune plană. Acestea au jucat un rol crucial în dezvoltarea ştiinţei moderne, în special în astronomie. De asemenea, menţionăm faptul că cercul este o secţiune conică, un caz particular al unei elipse.

Ecuaţia generală a unei conice este

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Următorii doi determinanţi obţinuţi din coeficienţii conicei, joacă un rol crucial în clasificarea conicelor

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{şi} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Să remarcăm că al doilea determinant corespunde formei pătratice definită de primii trei termeni.

Secţiunile conice pot fi clasificate după cum urmează:

**Conice degenerate**, pentru care $\mathbf{\Delta = 0}$. Acestea includ: două drepte intersectate (când $D_2 < 0$), două drepte paralele sau o dreaptă (cănd $D_2 = 0$) şi un punct (când $D_2 > 0$).

**Conice nedegenerate**, pentru care $\mathbf{\Delta = 0}$. În funcţie de $D_2$ distingem între

**Elipsă** $(D_2 > 0)$ a cărei ecuaţie canonică este $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

**Parabolă** $(D_2 = 0)$ a cărei ecuaţie canonică este $y^2 - 2ax = 0$,

**Hiperbolaă** $(D_2 < 0)$ a cărei ecuaţie canonică este $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

O reprezentare grafică a fiecărei dintre aceste trei curbe este dată mai jos.

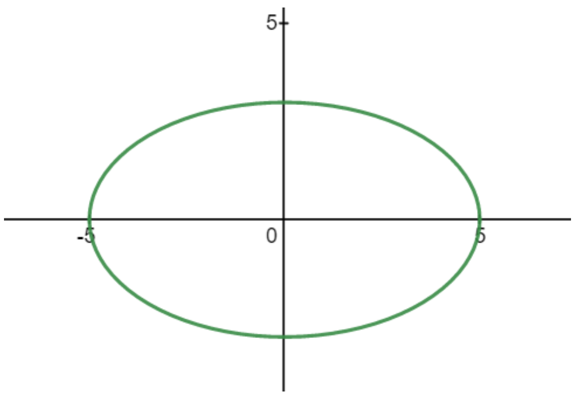


Figura 7.9: Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

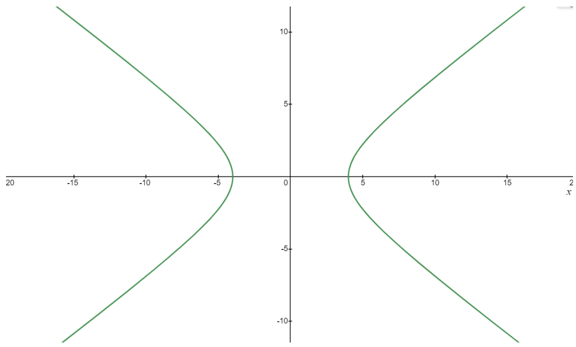


Figura 7.10: Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

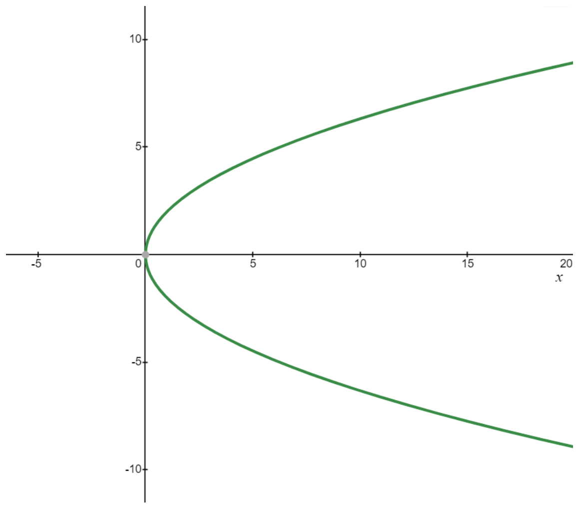


Figura 7.11: Parabola $y^2 - 2ax = 0$

Reducerea unei secţiuni conice la forma ei canonică este foarte asemănătoare cu procedura prezentată în secţiunea anterioară când ne-am ocupat de cuadrice. Din nou, trebuie să efectuăm o rotaţie şi o tranzlaţie. Vom arăta cum se poate realiza o astfel reducere prin intermediul următorului exemplu.

**Exemplul 7.1.** Găsiţi forma canonică pentru $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

Matricea formei pătratice a acestei conice este

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

şi valorile ei proprii sunt soluţiile ecuaţiei $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$. Deci $\lambda_1 = 9$ şi $\lambda_2 = 4$, în timp ce doi vectori proprii normaţi sunt $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ şi respectiv $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$. Matricea de rotaţie este prin urmare

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

şi putem verifica că $\det R = 1$.

Acum, relaţia între vechile şi noile coordonate este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right). \end{aligned}$$

Substituind aceste expresii în relaţia iniţială obţinem

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144\sqrt{5}}{5}x' + \frac{8\sqrt{5}}{5}y' + 80 = 0.$$

Ca să vedem translaţia de care avem nevoie vom rescrie ecuaţia de mai sus astfel

$$\begin{aligned} &9\left(x'^2 - 2\frac{8\sqrt{5}}{5}x' + \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) + 4\left(y'^2 + 2\frac{\sqrt{5}}{5}y' + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) \\ &-9\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 80 = 0. \end{aligned}$$

În cele din urmă se obţine

$$9\left(x' - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 30 = 0.$$

Prin urmare, tranzlaţia $x'' = x' - \frac{8\sqrt{5}}{5}, y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{5}$ reduce conica la forma canonică

$$\frac{3}{10}x''^2 + \frac{2}{15}y''^2 = 1.$$

## 7.4 Probleme

**Problema 7.4.1.** Găsiţi forma canonică a următoarelor suprafeţe cuadrice:

a) $2y^2 + 4xy - 8xz - 6x + 8y + 8 = 0$,

b) $3x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$,

c) $xz = y$,

d) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$

**Problema 7.4.2.** Găsiţi forma canonică a următoarelor conice:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 20 = 0$,

b) $3y^2 - 4xy - 2y + 4x - 3 = 0$,

c) $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2y - 1 = 0$,

d) $xy = 1$.

**Problema 7.4.3.** Fiind dat elipsoidul

$$(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1 = 0,$$

Găsiţi valoarea parametrului $p$ pentru care dreapta

$$\begin{cases} x = z + p \\ y = z + 2 \end{cases}$$

este tangentă la $(E)$.

**Problema 7.4.4.** Găsiţi ecuaţia planului care este tangent sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**Problema 7.4.5.** Găsiţi ecuaţia planelor care conţin dreapta

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

şi sunt tangente sferei

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

**Problema 7.4.6.** Considerăm hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

Determinaţi dreapta care aparţine suprafeţei şi trece prin punctul $P(4, 3, -2)$.

**Problema 7.4.7.** Găsiţi ecuaţia cercului al cărui centru este situat $C(1, 2)$ şi a cărei rază este $R = 2$.

**Problema 7.4.8.** Determinaţi centrul şi raza cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

**Problema 7.4.9.** Scrieţi ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, 1)$.

# 8

# Probleme rezolvate

## Spaţii vectoriale

**Problema 8.0.1.** Fie

$$U = \operatorname{span}\{u_1 = (1,1,2,-1); u_2 = (0,-1,-1,2), u_3 = (-1,2,1,-3)\}$$

şi

$$V = \operatorname{span}\{v_1 = (2,1,0,1); v_2 = (-2,-1,-1,-1), v_3 = (3,0,2,3)\}$$

subspaţii în $\mathbb{R}^4$. Determinaţi câte o bază în $U$, $V$, $U+V$ şi $U \cap V$.

**Rezolvare**:

Dimensiunea subspaţiului $U$ este dat de rangul matricii formate de vectorii $u_1, u_2, u_3$, adică:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{-L_1+L_2,-2L_1+L_3,L_1+L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_3,2L_2+L_4}{\sim}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ceea ce înseamnă că rangul matricii este 3, prin urmare $\dim U = 3$, deci o bază pentru $U$ este $B_U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Dimensiunea subspaţiului $V$ este dat de rangul matricii formate de vectorii $v_1, v_2, v_3$, adică:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{L}_1-2\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_1-2\mathrm{L}_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ceea ce înseamnă că rangul matricii este 3, prin urmare $\dim V = 3$, deci o bază pentru $V$ este $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$U + V = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$. Dimensiunea spaţiului $U + V$ este dat de rangul matricii formate din coordonatele vectorilor ce formează bazele subspaţiilor $U$ şi $V$, adică:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{-\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2,-2\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3,\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{-L_2+L_3,2L_2+L_4}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ceea ce înseamnă că rangul matricii este 4, prin urmare $\dim(U+V)=4$, deci o bază pentru $U+V$ este $B_{U+V}=\{u_1,u_2,u_3,v_1\}$. Dimensiunea spaţiului $U\cap V$ este $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2$. Dacă vectorul $a\in U\cap V$ înseamnă că $a$ se poate scrie ca şi combinaţie liniară de vectorii $u_1,u_2,u_3$ dar şi ca o combinaţie liniară de vectorii $v_1,v_2,v_3$. Deci pentru $a\in U\cap V\Rightarrow a=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_2u_3=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3$, ceea ce înseamnă rezolvarea sistemului: $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_3-2\beta_1+2\beta_2-3\beta_3=0\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1+\beta_2=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\beta_2-2\beta_3=0\\ -\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3-\beta_1+\beta_2-3\beta_3=0\end{cases}$. Rangul matricii sistemului omogen este 4, deci este compatibil dublu nedeterminat. Determinăm soluţiile prin metoda eliminării Gauss-Jordan.

Avem $\left(\begin{array}{cccc|cc}1&0&-1&-2&-2&3\\1&-1&2&-1&-1&0\\2&-1&1&0&-1&2\\-1&2&-3&-1&-1&3\end{array}\right)\overset{-L_1+L_2,-2L_1+L_3,L_1+L_4}{\simeq}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1&0&-1&-2&-2&3\\0&-1&3&1&1&-3\\0&-1&3&4&3&-4\\0&2&-4&-3&-3&6\end{array}\right)\overset{-L_2+L_3,2L_2+L_4}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1&0&-1&-2&-2&3\\0&-1&3&1&1&-3\\0&0&0&3&2&-1\\0&0&2&-1&-1&0\end{array}\right).$$

Sistemul este echivalent cu: $\begin{cases} 3\beta_1 = 2\beta_2 - \beta_3 \\ 2\alpha_3 - \beta_1 = -\beta_2 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 + \beta_1 = \beta_2 - 3\beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 - 2\beta_1 = -2\beta_2 + 3\beta_3 \end{cases}$, cu soluţiile

$S = \{(\alpha_1 = \frac{-5\beta_2+11\beta_3}{6}, \alpha_2 = \frac{-5\beta_2+7\beta_3}{6}, \alpha_3 = \frac{-\beta_2-3\beta_3}{6}, \beta_1 = \frac{2\beta_2-\beta_3}{3}) \mid \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\beta_2 = 0$ şi $\beta_3 = 3$ avem că $\beta_1 = -1$ deci un prim vector $a_1 = -(2,1,0,1) + 3(3,0,2,3) = (7,-1,6,8)$, iar pentru $\beta_2 = 3$ şi $\beta_3 = 0$ avem că $\beta_1 = 2$ deci un alt vector din baza subspaţiului $U \cap V$ este $a_2 = 2(2,1,0,1) + 3(-2,-1,-1,-1) = (-2,-1,-3,-1)$. (Aceiaşi vectori i-am fi găsit şi dacă am fi calculat $a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_2 u_3$ pentru aceleaşi valori ale lui $\beta_2$ şi $\beta_3$). Deci o bază pentru $U \cap V$ este $B_{U\cap V} = \{(7,-1,6,8), (-2,-1,-3,-1)\}$.

**Problema 8.0.2.** Fie

$$S = \mathrm{span}\{u_1 = (1,2,1,2); u_2 = (1,1,1,1)\}$$

şi

$$V = \mathrm{span}\{v_1 = (1,0,-1,0); v_2 = (2,1,0,1)\}$$

subspaţii în $\mathbb{R}^4$. Determinaţi câte o bază în $S + V$ şi $S \cap V$.

**Rezolvare**:

Dimensiunea subspaţiului $U$ este 2, deci o bază pentru $U$ este $B_U = \{u_1, u_2\}$.

Dimensiunea subspaţiului $V$ este 2, deci o bază pentru $V$ este $B_V = \{v_1, v_2\}$.

$U + V = \mathrm{span}\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Dimensiunea spaţiului $U + V$ este dat de rangul matricii formate de elementele vectorilor din bazele subspaţiilor $U$ şi $V$, adică:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2L_1+L_2,-L_1+L_3,-L_2+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ deci rangul este

3, prin urmare $\dim(S+V)=3$, deci o bază pentru $S+V$ este $B_{S+V}=\{u_1,u_2,v_1\}$. Dimensiunea spaţiului $S\cap V$ este $\dim S\cap V=\dim S+\dim V-\dim(S+V)=2+2-3=1$. Dacă vectorul $a\in S\cap V$ însemană că $a$ se poate scrie ca şi combinaţie liniară de vectorii $u_1,u_2$ dar şi ca o combinaţie liniară de vectorii $v_1,v_2$. Deci pentru $a\in S\cap V\Rightarrow a=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=\beta_1v_1+\beta_2v_2$, ceea ce înseamnă rezolvarea sistemului: $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-2\beta_2=0\\ 2\alpha_1+\alpha_2-\beta_2=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\beta_1=0\\ 2\alpha_1+\alpha_2-\beta_2=0\end{cases}$. Rangul matricii sistemului omogen este 3, deci este compatibil simplu nedeterminat. Determinăm soluţiile prin metoda eliminării Gauss-Jordan.

Avem $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\2&1&0&1\\1&1&1&0\end{array}\right)\overset{-2L_1+L_2,-L_1+L_3}{\simeq}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&-1&2&-3\\0&0&2&-2\end{array}\right)$.

Adică sistemul este echivalent cu: $\begin{cases}2\beta_1=-2\beta_2\\ -\alpha_2+2\beta_1=-3\beta_2\\ \alpha_1+\alpha_2-\beta_1=2\beta_2\end{cases}$, cu soluţiile $S=\{(\alpha_1=0,\alpha_2=\beta_2,\beta_1=-\beta_2)\mid\beta_2\in\mathbb{R}\}$.

Pentru $\beta_2=1$ avem că $\beta_1=-1$ deci $a=-(1,0,-1,0)+1(2,1,0,1)=(1,1,1,1)$. (Acelaşi vector îl găsim si dacă vom calcula $a=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$ pentru aceeşi valoare a lui $\beta_2$). Deci o bază pentru $S\cap V$ este $B_{S\cap V}=\{(1,1,1,1)\}$.

**Problema 8.0.3.** Fie

$$S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid 2x-y-z-t=0,x+z=0,x-y-2z-t=0\}$$

şi

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x+y+z+t=0\}.$$

Determinaţi câte o bază în $S+V$ şi $S\cap V$.

**Rezolvare**: Pentru a determina o bază în $S$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x-y-z-t=0 \\ x+z=0 \\ x-y-2z-t=0 \end{cases}$.

Avem $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-2L_1+L_2,-L_1+L_3}{\simeq}$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z=\alpha$ şi $t=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S=\{(-\alpha,-3\alpha-\beta,\alpha,\beta)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Deci $S=\text{span}\{u_1=(-1,-3,1,0),u_2=(0,-1,0,1)\}$.

Pentru a determina o bază în $V$ rezolvăm ecuaţia $x+y+z+t=0$ care are soluţia dată de mulţimea $V=\{(-y-z-t,y,z,t)\mid y,z,t\in\mathbb{R}\}$. Deci $V=\text{span}\{v_1=(-1,1,0,0),v_2=(-1,0,1,0),v_3=(-1,0,0,1)\}$.

$S+V=\text{span}\{v_1=(-1,1,0,0),v_2=(-1,0,1,0),v_3=(-1,0,0,1),u_1=(-1,-3,1,0),u_2=(0,-1,0,1)\}$. Dimensiunea spaţiului $S+V$ este dată de rangul matricii $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_2}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2+L_3}{\simeq}$
$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, deci rangul este 4, prin urmare $\dim(S+V)=4$, deci o bază pentru $S+V$ este $B_{S+V}=\{v_1,v_2,v_3,u_1\}$.

Dimensiunea spaţiului $S \cap V$ este $\dim S \cap V = \dim S + \dim V - \dim (S + V) = 2 + 2 - 3 = 1$. Dacă vectorul $a \in S \cap V$ însemană că $a$ se poate scrie ca şi combinaţie liniară de vectorii $v_1, v_2, v_3$ dar şi ca o combinaţie liniară de vectorii $u_1, u_2$. Deci pentru $a \in S \cap V \Rightarrow a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, ceea ce înseamnă rezolvarea sistemului: $\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - 3\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_3 - \beta_2 = 0 \end{cases}$, sistem a cărui matrice are rangul 4, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Dacă luăm $\beta_2$ necunosută secundară avem soluţiile $\alpha_1 = -\beta_2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \beta_2$, $\beta_1 = 0$. Pentru $\beta_2 = 1$ avem că $\beta_1 = 0$ deci $a = (0, -1, 0, 1)$. (Acelaşi vector îl găsim şi dacă vom calcula $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ pentru aceeşi valoare a lui $\beta_2$). Deci o bază pentru $S \cap V$ este $B_{S \cap V} = \{(0, -1, 0, 1)\}$.

**Problema 8.0.4.** Fie subspaţiul liniar al lui $\mathbb{R}^4$ $S$, dat de

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x + z = 0\}$$

şi subspaţiul

$$U = \operatorname{span}\{(-3, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (3, 2, 0, 1)\}.$$

Determinaţi câte o bază în $S + U$ şi $S \cap U$.

**Rezolvare**:

Pentru a determina o bază în $S$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, sistem a cărui matrice are rangul 2, deci avem două necunoscute secundare $z = \alpha$ şi $t = \beta$, iar soluţia sistemului este dată de mulţimea $S = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \operatorname{span}\{v_1 = (-1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Dimensiunea subspaţiului $U$ este dat de rangul matricii formate de vectorii $u_1, u_2, u_3$, adică: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{2}{3}L_1+L_2, \frac{1}{3}L_1+L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ceea ce înseamnă că rangul matricii este 3, prin urmare $\dim U = 3$, deci o bază pentru $U$ este $B_U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$S + V = \operatorname{span}\{v_1 = (-1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1), u_1 = (-3, 2, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1, 1), u_3 = (3, 2, 0, 1)\}$. Dimensiunea spaţiului $S+V$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_3}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2+L_4}{\simeq}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_3+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ deci rangul este 4, prin urmare $\dim(S+V) = 4$, deci o bază pentru $S+V$ este $B_{S+V} = \{v_1, v_2, u_1, u_2\}$. Dimensiunea spaţiului $S \cap V$ este $\dim S \cap V = \dim S + \dim V - \dim(S+V) = 2+3-4 = 1$. Dacă vectorul $a \in S \cap V$ însemană că $a$ se poate scrie ca şi combinaţie liniară de vectorii $v_1, v_2$ dar şi ca o combinaţie liniară de vectorii $u_1, u_2, u_3$. Deci pentru $a \in S \cap V \Rightarrow a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$, ceea ce înseamnă rezolvarea sistemului: $\begin{cases} -\alpha_1 + 3\beta_1 - 3\beta_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_3 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 - \beta_3 = 0 \end{cases}$, sistem a cărui matrice are rangul

4, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2+L_4}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{L_3+L_4}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right).$$

Adică sistemul este echivalent cu: $\begin{cases} -2\beta_2 = 6\beta_3 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 3\beta_3 \\ -\alpha_2 - 2\beta_1 = 2\beta_3 \\ -\alpha_1 + 3\beta_1 = 3\beta_3 \end{cases}$, cu soluţiile $\alpha_1 = -3\beta_3$, $\alpha_2 = -2\beta_3$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -3\beta_3$. Pentru $\beta_3 = 1$ avem că $\beta_1 = 0$ şi $\beta_2 = -3$ deci $a = (3, 2, -3, -2)$. Deci o bază pentru $S \cap V$ este $B_{S\cap V} = \{(3, 2, -3, -2)\}$.

**Problema 8.0.5.** Determinaţi câte o bază şi dimensiunea spaţiilor $S + V$ şi $S \cap V$ dacă

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, x + 2y + t = 0, y + z + t = 0\}$$

şi

$$S = \text{span}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}.$$

**Rezolvare**:

Dimensiunea subspaţiului $S$ este dat de rangul matricii formate de vectorii $u_1, u_2, u_3$, adică:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-L_1+L_3,-L_1+L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deducem că rangul matricii este 2, prin urmare $\dim S = 2$, deci o bază pentru $S$ este $B_S = \{u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (0,1,1,0)\}$.

Pentru a determina o bază în $V$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+t=0 \\ y+z+t=0 \end{cases}$.

Avem $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3}{\simeq}$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Rangul este 2, avem 4 necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Alegem $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $V = \{(2\alpha+\beta, -\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $V = \operatorname{span}\{v_1 = (2,-1,1,0), v_2 = (1,-1,0,1)\}$.

Dimensiunea spaţiului $S+V$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-L_1+L_3,-L_1+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_3,-L_2+L_4}{\simeq}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, deci rangul este 3, prin urmare $\dim(S+V) = 3$, deci o bază pentru $S+V$ este $B_{S+V} = \{v_1, v_2, u_1\}$. Dimensiunea spaţiului $S \cap V$ este $\dim S \cap V = \dim S + \dim V - \dim(S+V) = 2+2-3 = 1$. Dacă vectorul $a \in S \cap V$ însemană că $a$ se poate scrie ca şi combinaţie liniară de vectorii $v_1, v_2$ dar şi ca o combinaţie liniară de vectorii $u_1, u_2$. Deci pentru $a \in S \cap V \Rightarrow a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, ceea ce înseamnă rezolvarea sistemului: $\begin{cases} \alpha_1 - 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2 = 0 \end{cases}$, sistem a cărui matrice are rangul 3, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Determinăm soluţiile prin metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_3, -L_1+L_4}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3, -L_2+L_4}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$. Adică sistemul este echivalent cu: $\begin{cases} \beta_1 = \beta_2 \\ \alpha_2 + \beta_1 = -\beta_2 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 = \beta_2 \end{cases}$, cu soluţiile $\alpha_1 = 3\beta_2$, $\alpha_2 = -2\beta_3$, $\beta_1 = \beta_2$. Pentru $\beta_2 = 1$ avem că $\beta_1 = 1$ deci $a = (3, -2, 1, 1)$. Deci o bază pentru $S \cap V$ este $B_{S \cap V} = \{(3, -2, 1, 1)\}$.

# Spaţii cu produs scalar

**Problema 8.0.6.** Fie

$$V = \text{span}\{v_1 = (1, -1, 1, -1); v_2 = (5, 1, 1, 1), v_3 = (-3, 3, 1, -3)\}.$$

Determinaţi o bază ortonormală pentru $V$.

**Rezolvare**:

Vom ortogonaliza vectorii $v_1, v_2, v_3$ aplicând procedeul Gram-Schmidt. Alegem $u_1 = v_1 = (1, -1, 1, -1)$.

$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (5, 1, 1, 1) - \frac{\langle (5,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle}{\langle (1,-1,1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle}(1, -1, 1, -1) = (5, 1, 1, 1) - (1, -1, 1, -1) = (4, 2, 0, 2)$.

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = (-3, 3, 1, -3) + \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) + \frac{1}{2}(4, 2, 0, 2) = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$.

Pentru baza ortonormală a lui $V$ calculăm:

$n_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,-1,1,-1)}{2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,

$n_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(4,2,0,2)}{2\sqrt{6}} = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6})$,

$n_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(-\frac{1}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2},-\frac{5}{2})}{\sqrt{21}} = (-\frac{\sqrt{21}}{42}, \frac{\sqrt{21}}{6}, \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{-5\sqrt{21}}{42})$.

Prin urmare vectorii $\{n_1, n_2, n_3\}$ formează o bază ortonormală pentru $V$.

**Problema 8.0.7.** Determinaţi complementul ortogonal algebric $S^\perp$ pentru subspaţiul

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + 2t = 0, x - 2z + t = 0, y + z + t = 0\}.$$

**Rezolvare**: Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ x - 2z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$.

Avem $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2+L_3}{\simeq}$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$S = \{(2\alpha - \beta, -\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \text{span}\{u_1 = (2, -1, 1, 0), u_2 = (-1, -1, 0, 1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^\perp = 4 - 2 = 2$.

Fie $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^\perp \Rightarrow \langle v, (2, -1, 1, 0)\rangle = 0$ şi $\langle v, (-1, -1, 0, 1)\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^\perp = \{(\alpha, \beta, -2\alpha + \beta, \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $S^\perp = \text{span}\{v_1 = (1, 0, -2, 1), v_2 = (0, 1, 1, 1)\}$. Pentru a obţine o bază ortogonală pentru $S^\perp$ vom ortogonaliza vectorii $v_1 = (1, 0, -2, 1)$ şi $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ prin procedeul Gram-Schmidt. Alegem $u_1 = v_1 = (1, 0, -2, 1)$.

$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (0, 1, 1, 1) - \frac{\langle (0,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle}{\langle (1,-1,1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle}(1, -1, 1, -1) = (0, 1, 1, 1) - \frac{-1}{6}(1, 0, -2, 1) = (\frac{1}{6}, 1, \frac{2}{3}, \frac{7}{6})$.

Deci o bază ortogonală pentru $S^\perp$ este $B_{S^\perp} = \{(1, 0, -2, 1), (1, 6, 4, 7)\}$.

**Problema 8.0.8.** Fie $S \subseteq \mathbb{R}$,

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x - y + z - t = 0, x + z = 0\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $S^\perp$.

**Rezolvare**:

Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2, -L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}L_2+L_3, \frac{1}{2}L_2}{\simeq}$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \text{span}\{u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^\perp = 4 - 2 = 2$.

Fie $a = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^\perp \Rightarrow \langle a, (-1, 0, 1, 0)\rangle = 0$ şi $\langle a, (0, -1, 0, 1)\rangle = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^\perp = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $S^\perp = \text{span}\{a_1 = (1, 0, 1, 0), a_2 = (0, 1, 0, 1)\}$. Observăm că $\langle a_1, a_2\rangle = 0$, deci o bază ortogonală pentru $S^\perp$ este $B_{S^\perp} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.

**Problema 8.0.9.** Fie

$$V = \text{span}\{v_1 = (1, 1, -2, -2); v_2 = (6, 8, -1, 3), v_3 = (3, 9, 3, 8)\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $V$.

**Rezolvare**:

Vom ortogonaliza vectorii $v_1, v_2, v_3$ aplicând procedeul Gram-Schmidt. Alegem $u_1 = v_1 = (1, 1, -2, -2)$.

$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (6, 8, -1, 3) - \frac{\langle (6,8,-1,3),(1,1,-2,-2)\rangle}{\langle (1,1,-2,-2),(1,1,-2,-2)\rangle}(1, 1, -2, -2) = (6, 8, -1, 3) - (1, 1, -2, -2) = (5, 7, 1, 5)$.

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = (3, 9, 3, 8) + (1, 1, -2, -2) - \frac{121}{100}(5, 7, 1, 5) = (-\frac{205}{100}, \frac{153}{100}, -\frac{21}{100}, -\frac{5}{100})$. Deci, o bază ortogonală pentru $S^\perp$ este

$B_{S^\perp} = \{(1, 1, -2, -2), (5, 7, 1, 5), (-205, 153, -21, -5)\}$.

**Problema 8.0.10.** Fie $S \subseteq \mathbb{R}^4$,

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + t = 0, x + y + z + t = 0\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $S^{\perp}$.

**Rezolvare**:

Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} -x+y-z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$.

Se observă că rangul matricii sistemului este 2, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z=\alpha$ şi $t=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S=\{(-\alpha,-\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Deci $S=\text{span}\{u_1=(-1,0,1,0), u_2=(0,-1,0,1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^{\perp}=4-2=2$.

Fie $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^{\perp} \Rightarrow \langle v,(-1,0,1,0)\rangle=0$ şi $\langle v(0,-1,0,1)\rangle=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} -x_1+x_3=0 \\ -x_2+x_4=0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_3=\alpha$ şi $x_4=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^{\perp}=\{(\alpha,\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha=0$ şi $\beta=1$ avem $v_1=(0,1,0,1)\in S^{\perp}$, iar dacă luăm $\alpha=1$ şi $\beta=0$ avem $v_2=(1,0,1,0)\in S^{\perp}$. Observăm că $\langle v_1,v_2\rangle=0$, deci $v_1\perp v_2$. O bază ortogonală pentru $S^{\perp}$ este $B_{S^{\perp}}=\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$.

**Problema 8.0.11.** Fie

$$V=\text{span}\{v_1=(1,-1,1,-1); v_2=(-3,3,1,-3), v_3=(2,1,1,1)\}.$$

Determinaţi o bază ortonormală pentru $V$.

**Rezolvare**:

Vom ortogonaliza vectorii $v_1,v_2,v_3$ aplicând procedeul Gram-Schmidt. Alegem

$u_1=v_1=(1,-1,1,-1)$.

$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1=(-3,3,1,-3)-\frac{\langle(-3,3,1,-3),(1,-1,1,-1)\rangle}{\langle(1,1,-2,-2),(1,-1,1,-1)\rangle}(1,1,-2,-2)=$

$=(-3,3,1,-3)+\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)=(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$. Pentru calcul mai uşor vom considera $u_2:=(-5,5,3,-7)$.

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - \frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2 = (2,1,1,1) - \frac{1}{4}(1,-1,1,-1) + \frac{1}{12}(-5,5,3,-7) = (\frac{4}{3},\frac{5}{3},1,\frac{2}{3})$. Pentru calcul mai uşor putem considera $u_3 := (4,5,3,2)$.

Pentru baza ortonormală a lui $V$ calculăm:

$n_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,-1,1,-1)}{2} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$,

$n_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-5,5,3,-7)}{6\sqrt{3}} = (-\frac{5}{6\sqrt{3}},\frac{5}{6\sqrt{3}},\frac{3}{6\sqrt{3}},-\frac{7}{6\sqrt{3}})$,

$n_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(4,5,3,2)}{3\sqrt{6}} = (\frac{4}{3\sqrt{6}},\frac{5}{3\sqrt{6}},\frac{3}{3\sqrt{6}},\frac{2}{3\sqrt{6}})$.

Prin urmare vectorii $\{n_1,n_2,n_3\}$ formează o bază ortonormală pentru $V$.

**Problema 8.0.12.** Fie $S \subseteq \mathbb{R}^4$,

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y-z-t=0, x+z=0, x-y-2z-t=0\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $S^\perp$.

**Rezolvare**:

Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} 2x-y-z-t=0 \\ x+z=0 \\ x-y-2z-t=0 \end{cases}$.

Schimbăm ordinea ecuaţiilor pentru calcule mai uşoare, şi avem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2,-2L_1+L_3}{\simeq}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cum rangul matricii sistemului este 2 şi pentru că avem patru necunoscute, sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z=\alpha$ şi $t=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S = \{(-\alpha,-3\alpha-\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \mathrm{span}\{u_1 = (-1,-3,1,0), u_2 = (0,-1,0,1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^\perp = 4-2 = 2$.

Fie $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^{\perp} \Rightarrow \langle v, (-1,-3,1,0)\rangle = 0$ şi $\langle v, (0,-1,0,1)\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^{\perp} = \{(\alpha, \beta, \alpha + 3\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$ avem $v_1 = (1, 0, 1, 0) \in S^{\perp}$. Căutăm un alt vector din $S^{\perp}$, $v_2 = (\alpha, \beta, \alpha + 3\beta, \beta) \perp v_1 \Rightarrow \langle(\alpha, 2\alpha - \beta, \alpha, \beta), (1, 0, 1, 0)\rangle = 0 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 0$, iar pentru $\alpha = 3$ avem că $\beta = -2$ şi obţinem vectorul $v_2 = (3, -2, -3, -2)$. O bază ortogonală pentru $S^{\perp}$ este $B_{S^{\perp}} = \{(1, 0, 1, 0), (3, -2, -3, -2\}$.

**Problema 8.0.13.** Fie $S \subseteq \mathbb{R}^4$,

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x + z = 0\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $S^{\perp}$.

**Rezolvare**:

Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$.

Se observă că rangul matricii sistemului este 2, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \text{span}\{u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^{\perp} = 4 - 2 = 2$.

Fie $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^{\perp} \Rightarrow \langle v, (-1, 0, 1, 0)\rangle = 0$ şi $\langle v, (0, -1, 0, 1)\rangle = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_3 = \alpha$ şi $x_4 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^{\perp} = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S^{\perp} = \text{span}\{v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1)\}$. Cum $\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$, deci o bază ortogonală pentru $S^{\perp}$ este $B_{S^{\perp}} = \{(0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$.

**Problema 8.0.14.** Fie $S \subseteq \mathbb{R}^4$,

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + 2z + t = 0, x + y + z + t = 0, x + 2y + z + 2t = 0\}.$$

Determinaţi o bază ortogonală pentru $S^\perp$. Determinaţi un subspaţiu $V \subseteq \mathbb{R}^4$ astfel încât $\mathbb{R}^4 = S \oplus V$.

**Rezolvare**:

Determinăm o bază în $S$ rezolvând sistemul $\begin{cases} 2x + y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + z + 2t = 0 \end{cases}$.

Avem:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2, -2L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2+L_3}{\simeq}$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Cum rangul matricii sistemului este 2 şi pentru că avem patru necunoscute, sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $S = \text{span}\{u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim S^\perp = 4 - 2 = 2$. Fie $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^\perp \Rightarrow \langle v, (-1, 0, 1, 0)\rangle = 0$ şi $\langle v, (0, -1, 0, 1)\rangle = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_3 = \alpha$ şi $x_4 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $S^\perp = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S^\perp = \text{span}\{v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1)\}$. Cum $\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$, deci o bază ortogonală pentru $S^\perp$ este $B_{S^\perp} = \{(0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$.

Evident, $S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^4$, deci $V = S^\perp$.

# Varietăţi liniare

**Problema 8.0.15.** Fie subspaţiul vectorial

$$U = \text{span}\{(1,1,2,-1),(0,-1,-1,2),(-1,2,1,-3)\}$$

şi varietatea liniară

$$L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t=1, x-y+z-t=0, x+z=0\}.$$

Calculaţi distanţa de la $U$ la $L$.

**Rezolvare**:

Distanţa de la $U$ la varietatea liniară $L$ este $d(v_0, U+V_L)$, unde $L = v_0 + V_{L_1}$, $v_0$ este o soluţie a sistemului $\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ cu soluţia dată de mulţimea $V = \{(-\alpha, \frac{1}{2}, \alpha, -\frac{1}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Pentru $\alpha = 0$ avem că $v_0 = (0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, iar

$V_L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t=0, x-y+z-t=0, x+z=0\}$.

Pentru a determina o bază în $V_L$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$, a cărui matrice are rangul 3, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $z=\alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$V = \{(\alpha, 0, -\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci $V = \text{span}\{v_1 = (1,0,-1,0)\}$.

Dimensiunea spaţiului $U + V_L$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle -L_1+L_2, -2L_1+L_3, L_1+L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle -L_2+L_3, 2L_2+L_4}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, deci o bază în $U+V_L$ este $B_{U+V_L} = \{u_1, u_2, u_3, v_1\}$. Cum $dim_{U+V_L} = 4$ şi $U + V_L$ este un subspaţiu în $\mathbb{R}^4$ rezultă că $U + V_L = \mathbb{R}^4$ deci $d(U, L) = d(v_0, U + V_L) = d(v_0, \mathbb{R}^4) = 0$.

Evident, se pot face şi calcule: $d(U, L) = d(v_0, U + V_L) = \sqrt{\frac{G(u_1,u_2,u_3,v_1,v_0)}{G(u_1,u_2,u_3,v_1)}}$.

$$G(u_1, u_2, u_3, v_1) = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 6 & -1 \\ -5 & 6 & -9 & 1 \\ 6 & -9 & 15 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$$G(u_1, u_2, u_3, v_1, v_0) = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 6 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -9 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -9 & 15 & -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0. \text{ Deci, } d(U, L) = \sqrt{\frac{0}{16}} = 0.$$

**Problema 8.0.16.** Fie

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1, x - y + z - t = -1, x + z = 0\}$$

şi

$$L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 2, -x + y + z + t = 0\}$$

două varietăţi liniare. Calculaţi distanţa de la $L_1$ la $L_2$.

**Rezolvare**:

Distanţa de la varietatea liniară $L_1$ la varietatea liniară $L_2$ este

$d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2})$,

unde $L_1 = v_0 + V_{L_1}$ şi $L_2 = u_0 + V_{L_2}$.

Căutăm o soluţie a sistemului $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \\ x+z=0 \end{cases}$ care are soluţia generală dată de mulţimea $L_1 = \{(-\alpha, 1-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ avem că $v_0 = (0, 1, 0, 0)$, iar

$V_{L_1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0, x-y+z-t=0, x+z=0\}$.

Pentru a determina o bază în $V_{L_1}$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$, a cărui matrice are rangul 2, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$V_{L_1} = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Deci $B_{V_{L_1}} = \{v_1 = (-1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Căutăm o soluţie a sistemului $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ -x+y+z+t=0 \end{cases}$ care are soluţia dată de mulţimea $L_2 = \{(1, 1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ avem că $u_0 = (1, 1, 0, 0)$, iar

$V_{L_2} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0, -x+y+z+t=0\}$.

Pentru a determina o bază în $V_{L_2}$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -x+y+z-t=0 \end{cases}$, a cărui matrice are rangul 2, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $V_{L_2} = \{(0, -\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Deci $V_{L_2} = \text{span}\{u_1 = (0, -1, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Dimensiunea spaţiului $V_{L_1} + V_{L_2}$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_3, L_2+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3+L_4}{\simeq}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci o bază în $V_{L_1} + V_{L_2}$ este $B_{V_{L_1}+V_{L_2}} = \{v_1, v_2, u_1\}$.

$d(L_1, L_2) = d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2}) = \sqrt{\frac{G(v_1,v_2,u_1,v_0-u_0)}{G(v_1,v_2,u_1)}}$.

$G(v_1, v_2, u_1, v_0 - u_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $G(v_1, v_2, u_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

Deci, $d(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

**Problema 8.0.17.** Determinaţi complementul ortogonal algebric $S^\perp$ pentru

$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0, 4x + 3y + 2z + t = 5, x + y + z + t = 1\}$.

**Rezolvare**: $S$ este o varietate liniară, deci $S = v_0 + V_S$.

$v_0$ este o soluţie a sistemului $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + t = 5 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$, iar pentru a determina o bază în $V_S$ trebuie să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$.

Avem $\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-4L_1+L_2, -L_1+L_3}{\simeq}$

$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-5L_3+L_2, L_2:(-5)}{\simeq}$

$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Pentru $S$ soluţia este dată de mulţimea $S = \{(\alpha + 2\beta + 2, -2\alpha - 3\beta - 1, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ obţinem $v_0 = (2, -1, 0, 0)$.

Pentru $V_S$ soluţia dată de mulţimea $V_S = \{(\alpha + 2\beta, -2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deci $B_{V_S} = \{u_1 = (1, -2, 1, 0), u_2 = (2, -3, 0, 1)\}$. Dimensiunea subspaţiului $S$ este 2, ceea ce înseamnă că $\dim {V_S}^{\perp} = 4 - 2 = 2$.

Fie $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in {S_V}^{\perp} \Rightarrow \langle v, (1, -2, 1, 0)\rangle = 0$ şi $\langle v, (2, -3, 0, 1)\rangle = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea ${V_S}^{\perp} = \{(\alpha, \beta, -\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. ${V_S}^{\perp} = \text{span}\{v_1 = (1, 0, -1, -2), v_2 = (0, 1, 2, 3)\}$. Pentru a obţine o bază ortogonală pentru ${V_S}^{\perp}$ vom ortogonaliza vectorii $v_1 = (1, 0, -1, -2)$ şi $v_2 = (0, 1, 2, 3)$ prin procedeul Gram-Schmidt. Alegem $u_1 = v_1 = (1, 0, -1, -2)$.

$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (0, 1, 2, 3) - \frac{\langle (1,0,-1,-2),(0,1,2,3)\rangle}{\langle (1,0,-1,-2),(1,0,-1,-2)\rangle}(1, 0, -1, -2) = (0, 1, 2, 3) - \frac{-8}{6}(1, 0, -1, -2) = (\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

O bază ortogonală pentru $S^{\perp}$ este $B_{{S_V}^{\perp}} = \{(1, 0, -1, -2), (4, 3, 2, 1)\}$.

$S^{\perp} = V_S^{\perp}$.

**Problema 8.0.18.** Fie

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + t = 1, x + y + z + t = 1, x + z = 0\}$$

şi

$$L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 2, x + z = 3\}.$$

Calculaţi distanţa de la $L_1$ la $L_2$.

**Rezolvare**:

Distanţa de la varietatea liniară $L_1$ la varietatea liniară $L_2$ este

$d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2})$, unde $L_1 = v_0 + V_{L_1}$ şi $L_2 = u_0 + V_{L_2}$.

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} -x + y - z + t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ care are soluţia generală dată de mulţimea $L_1 = \{(-\alpha, 1 - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, care se poate scrie şi

$L_1 = (0, 1, 0, 0) + \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, deci vectorul director este $v_0 = (0, 1, 0, 0)$ iar subspaţiul director este

$V_{L_1} = \text{span}\{v_1 = (-1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Pentru varietatea $L_2$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ care are soluţia generală dată de mulţimea $L_2 = \{(3 - \alpha, -1 - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, deci

$L_2 = (3, -1, 0, 0) + \text{span}\{u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Considerăm vectorul director $u_0 = (3, -1, 0, 0)$ iar subspaţiul director este

$V_{L_2} = \text{span}\{(u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}\}$.

Dimensiunea spaţiului $V_{L_1} + V_{L_2}$ este dată de rangul matricii

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care este 2, prin urmare o bază în $V_{L_1} + V_{L_2}$ este

$B_{V_{L_1}+V_{L_2}} = \{v_1, v_2\}$.

$d(L_1, L_2) = d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2}) = \sqrt{\frac{G(v_1,v_2,v_0-u_0)}{G(v_1,v_2)}}$.

$$G(v_1, v_2, u_1, v_0 - u_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 13 \end{vmatrix} = 26;\ G(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Prin urmare, $d(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

**Problema 8.0.19.** Fie

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 1, x - y + z - t = 0, x + z = 0\}$$

şi

$$L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 3\}.$$

Calculaţi distanţa de la $L_1$ la $L_2$.

**Rezolvare**:

Distanţa de la varietatea liniară $L_1$ la varietatea liniară $L_2$ este $d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2})$, unde $L_1 = v_0 + V_{L_1}$ şi $L_2 = u_0 + V_{L_2}$.

Căutăm o soluţie a sistemului $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ care are soluţia dată de mulţimea $L_1 = \{(-\alpha, \frac{1}{2}, \alpha, -\frac{1}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha = 0$ avem că $v_0 = (0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, iar

$V_{L_1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0, x - y + z - t = 0, x + z = 0\}$.

Pentru a determina o bază în $V_{L_1}$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, a cărui matrice are rangul 3, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $z = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$V_{L_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci $B_{V_{L_1}} = \{v_1 = (-1, 0, 1, 0)\}$.

O soluţie a ecuaţiei $x + y + z - t = 3$ este de exemplu $u_0 = (0, 0, 0, -3)$, iar $V_{L_2} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0\}$. Ecuaţia are soluţia dată de mulţimea $V_{L_2} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

$V_{L_2} = \text{span}\{u_1 = (1, 0, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0, 1), u_3 = (0, 0, 1, 1)\}$.

Dimensiunea spaţiului $V_{L_1} + V_{L_2}$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-L_1+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-L_3+L_4}{\simeq}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prin urmare o bază în $V_{L_1} + V_{L_2}$ este $B_{V_{L_1}+V_{L_2}} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$d(L_1, L_2) = d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2}) = \sqrt{\frac{G(u_1,u_2,u_3,v_0-u_0)}{G(u_1,u_2,u_3)}}$.

$$G(u_1, u_2, u_3, v_0 - u_0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{vmatrix} = 4;\ G(v_1, v_2, u_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Deci, $d(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$.

**Problema 8.0.20.** Fie

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = 1, y + z = 0, x + z + t = 1\}$$

şi

$$L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 3\}.$$

Calculaţi distanţa de la $L_1$ la $L_2$.

**Rezolvare**:

Distanţa de la varietatea liniară $L_1$ la varietatea liniară $L_2$ este $d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2})$, unde $L_1 = v_0 + V_{L_1}$ şi $L_2 = u_0 + V_{L_2}$.

Căutăm o soluţie a sistemului $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + z + t = 1 \end{cases}$ care are soluţia dată de mulţimea $L_1 = \{(-\frac{3\alpha}{2} + 1, -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha = 0$ avem că $v_0 = (1,0,0,0)$, iar $V_{L_1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = 0, y + z = 0, x + z + t = 0\}$.

Pentru a determina o bază în $V_{L_1}$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$, a cărui matrice are rangul 3, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $t = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$V_{L_1} = \{(\frac{-3\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci $B_{V_{L_1}} = \{v_1 = (-3,-1,1,2)\}$.

O soluţie a ecuaţiei $x + z + t = 3$ este de exemplu $u_0 = (3,0,0,0)$, iar

$V_{L_2} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0\}$. Ecuaţia are soluţia dată de mulţimea

$V_{L_2} = \{(\alpha, \beta, \gamma, -\alpha - \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

$V_{L_2} = \text{span}\{u_1 = (1,0,0,-1), u_2 = (0,1,0,0), u_3 = (0,0,1,-1)\}$.

Dimensiunea spaţiului $V_{L_1} + V_{L_2}$ este dată de rangul matricii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_1 + L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_3 + L_4}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ deci

o bază în $V_{L_1} + V_{L_2}$ este $B_{V_{L_1} + V_{L_2}} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$d(L_1, L_2) = d(v_0 - u_0, V_{L_1} + V_{L_2}) = \sqrt{\frac{G(u_1,u_2,u_3,v_0-u_0)}{G(u_1,u_2,u_3)}}$.

$$G(u_1,u_2,u_3,v_0-u_0)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=4;\ G(v_1,v_2,u_1)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

Deci, $d(L_1,L_2)=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

# Aplicaţii liniare

**Problema 8.0.21.** Fie $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, $T(v)=A\cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$.

**Rezolvare**:

Fie $v=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, atunci $T(v)=(x+2y+z+2t,2x+y+2z+t,x+y+z+t)$. $\ker T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid T(v)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y+z+2t=0,2x+y+2z+t=0,x+y+z+t=0\}$.

Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-2L_1+L_2,-L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}L_2+L_3,\frac{1}{3}L_2}{\simeq}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z=\alpha$ şi $t=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$$\ker T = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Prin urmare, $B_{\ker T} = \{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$, iar $\dim \ker T = 2$. Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker T = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} T &= \{(x + 2y + z + 2t, 2x + y + 2z + t, x + y + z + t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 2, 1) + y(2, 1, 1) + z(1, 2, 1) + t(2, 1, 1) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}.
\end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este $B_{\operatorname{im} T} = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.

O altă abordare pentru determinarea unei baze a lui $\operatorname{im} T$ este să completăm vectorii din baza lui $\ker T$ la o bază pentru $\mathbb{R}^4$.

$B_{\ker T} = \{v_1 = (-1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1)\}$, deci alegem $v_3$ şi $v_4$ astfel încât rangul matricii formate cu elementele vectorilor $v_1, v_2, v_3, v_4$ să fie 4. Putem alege de exemplu $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ şi $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ca matricea să fie diagolanlă iar determinatul să fie imediat calculat ca fiind nenul. În aceste condiţii, $\operatorname{im} T$ este generat de $T(v_3) = (1, 2, 1)$ şi $T(v_4) = (2, 1, 1)$, deci $B_{\operatorname{im} T} = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.

**Problema 8.0.22.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $T(v) = (x+2y+3z+4t, 4x+3y+2z+t, x+y+z+t)$. $\ker T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0, 4x+3y+2z+t = 0, x+y+z+t = 0\}$. Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-4L_1+L_2, -L_1+L_3}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{5}L_2, L_2+L_3}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$\ker T = \{(\alpha + 2\beta, -2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Prin urmare, $B_{\ker T} = \{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$, iar $\dim \ker T = 2$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker T = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T &= \{(x + 2y + 3z + 4t, 4x + 3y + 2z + t, x + y + z + t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 4, 1) + y(2, 3, 1) + z(3, 2, 1) + t(4, 1, 1) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(1, 4, 1), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (4, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T} = \{(1, 4, 1), (2, 3, 1)\}$.

**Problema 8.0.23.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $T(v) = (x + 2y + z, 2x + y + z, x + 2y + z, 2x + y + z)$. $\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0, 2x + y + z = 0, x + 2y + z = 0, 2x + y + z = 0\}$. Observăm că ultimele două ecuaţii sunt identice cu primele două, matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $y = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $\ker T = \{(\alpha, \alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Prin urmare,

$B_{\ker T} = \{(1, 1, -3)\}$, iar $\dim \ker T = 1$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker T = 3 - 1 = 2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T &= \{(x + 2y + z, 2x + y + z, x + 2y + z, 2x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 2, 1, 2) + y(2, 1, 2, 1) + z(1, 1, 1, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T} = \{(1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1)\}$.

**Problema 8.0.24.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $T(v) = (x + 2y + z + 2t, 2x + y + 2z + t, x + z)$.

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + 2t = 0, 2x + y + 2z + t = 0, x + z = 0\}. \end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-2L_1+L_2, -L_1+L_3}{\simeq}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}L_2, -\frac{1}{2}L_3, -L_2+L_3}{\simeq}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z = \alpha$ şi $t = \beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $\ker T = \{(-\alpha, -\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Prin urmare,

$B_{\ker T} = \{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$, iar $\dim \ker T = 2$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker T = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{im} T &= \{(x+2y+z+2t, 2x+y+2z+t, x+z) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,2,1)+y(2,1,0)+z(1,2,1)+t(2,1,1) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}\{(1,2,1),(2,1,0),(1,2,1),(2,1,1)\}.\end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este $B_{\operatorname{im} T} = \{(1,2,1),(2,1,0)\}$.

**Problema 8.0.25.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, iar $T(v) = (2x+y+z, x+2y+z, 2x+y+z, x-y)$.

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\}\\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0, x+2y+z=0, 2x+y+z=0, x-y=0\}.\end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_3, -L_2+L_4, -2L_2+L_1, L_1 \leftrightarrow L_2}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_4}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $y = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $\ker T = \{(\alpha, \alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Prin urmare, $B_{\ker T} = \{(1, 1, -3)\}$, iar $\dim \ker T = 1$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker T = 3 - 1 = 2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T &= \{(2x + y + z, x + 2y + z, 2x + y + z, x - y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 1, 2, 1) + y(1, 2, 1, 2) + z(1, 1, 1, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T} = \{(2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 2)\}$.

**Problema 8.0.26.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, atunci $T(v) = (x + 2y + z, x + y + z, x + 2y + z, x + y + z)$. $\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0, x + y + z =$

$0, x+2y+z=0, x+y+z=0\}$. Observăm că primele două ecuaţii ale sistemului coincid cu ultimele două, matricea sistemului are rangul 2, prin urmare sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $z=\alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$\ker T = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Prin urmare, $B_{\ker T} = \{(-1, 0, 1)\}$, iar $\dim \ker T = 1$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker T = 3 - 1 = 2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{im} T &= \{(x+2y+z, x+y+z, x+2y+z, x+y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,1,1,1) + y(2,1,2,1) + z(1,1,1,1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}\{(1,1,1,1), (1,2,1,2), (1,1,1,0)\}.\end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T} = \{(1,1,1,1), (1,2,1,2)\}$.

**Problema 8.0.27.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Considerăm $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, iar $T(v) = (x - y + 2z, y + z, x + z + t)$. $\ker T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = 0, y + z = 0, x + z + t = 0\}$. Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $z = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea

$\ker T = \{(-3\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Prin urmare, $B_{\ker T} = \{(-3, -1, 1, 2)\}$, iar $\dim \ker T = 1$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker T = 4 - 1 = 3$.

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T & \{(x - y + 2z, y + z, x + z + t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(-1, 1, 0) + z(2, 1, 1) + t(0, 0, 1) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 1), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este 3, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.

*Observaţie.* $\operatorname{im} T \subseteq \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \operatorname{im} T = 3 \Rightarrow \operatorname{im} T = \mathbb{R}^3$, şi o bază poate fi chiar baza canonică $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

**Problema 8.0.28.** Determinaţi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{im} T$ pentru $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(v) = A \cdot v$ o aplicaţie liniară reprezentată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare**:

Fie $v=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, iar $T(v)=(2x+y+2z+t, x+y+z+t, x+2y+z+2t)$. $\ker T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid T(v)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z+t=0, x+y+z+t=0, x+2y+z+2t=0\}$. Rezolvăm sistemul prin metoda eliminării lui Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-2L_1+L_2, -L_1+L_3}{\simeq}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_2+L_3, (-1)L_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Sistemul este compatibil dublu nedeterminat, cu $z=\alpha$ şi $t=\beta$ necunoscute secundare, iar sistemul are soluţia dată de mulţimea $\ker T=\{(-\alpha,-\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Prin urmare, $B_{\ker T}=\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$, iar $\dim\ker T=2$.

Ştim că $\dim \operatorname{im} T=\dim\mathbb{R}^4-\dim\ker T=4-2=2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{im} T &= \{(2x+y+2z+t, x+y+z+t, x+2y+z+2t) \mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(2,1,2)+y(1,1,2)+z(2,1,1)+t(1,1,2) \mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}\{(2,1,2),(1,1,2),(2,1,1),(1,1,2)\}.\end{aligned}$$

Rangul matricii $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ este 2, deci o bază în $\operatorname{im} T$ este

$B_{\operatorname{im} T}=\{(2,1,2),(1,1,2)\}$.

# Valori şi vectori proprii. Forma canonică Jordan

**Problema 8.0.29.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow -(\lambda-1)^3 = 0$, deci $\lambda = 1$ este rădăcină triplă. Pentru valoarea proprie $\lambda = 1$ avem multiplicitatea algebrică $m(\lambda = 1) = 3$.

Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 1$, rezolvând ecuaţia matricială

$$(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$\Leftrightarrow (A - I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$.

Avem sistemul $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 15x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim doi vectori proprii liniari independenţi corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$. Deci, multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda = 1$ este $q(\lambda = 1) = 2$.

Pentru că $m(1) - q(1) = 1$ avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + 5\beta \\ a \\ \beta \end{pmatrix}$.

Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca $\alpha = \beta$, deci acesta se reduce la ecuaţia $x_1 + 2x_2 - 5x_3 = \alpha$. Pentru $\alpha = 1$, $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, deci vectorul propriu generalizat este $v_3 = (1, 0, 0)$ care corespunde vectorului propriu $v_2 = (3, 1, 1)$ (vector obţinut pentru $\alpha = \beta = 1$). Putem alege $v_1 = (-2, 1, 0)$, vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$.

Deci, matricea pasaj este $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.0.30.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow -(\lambda - 1)^3 = 0$, deci $\lambda = 1$ este rădăcină triplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 1$, rezolvând ecuaţia matricială

$(A-\lambda I_3)\cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A-I_3)\cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v=(x_1,x_2,x_3)$.

Avem sistemul $\begin{cases} -3x_2+3x_3=0 \\ -2x_1-7x_2+13x_3=0 \\ -x_1-4x_2+7x_3=0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & 0 \\ -1 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{-2L_3+L_2,(-1)L_3,\frac{1}{3}L_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right).$$

Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu $x_3=\alpha$ necunoscută secundară, iar $v\in\{(3\alpha,\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$, prin urmare avem un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda=1$, iar pentru $\alpha=1$ avem $v_1=(3,1,1)$. Avem nevoie să determinăm doi vectori proprii generalizaţi. Pentru a determina un prim vector propriu generalizat $v=(x_1,x_2,x_3)$ rezolvăm ecuaţia matricială $(A-I_3)\cdot v^T = v_1^T$ adică $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{-2L_3+L_2,\frac{1}{3}L_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2}{\simeq}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right)$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $x_3=\alpha$, iar soluţia este dată de mulţimea $\{(3\alpha+3,\alpha-1,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha=1$ obţinem $v_2=(6,0,1)$ un vector propriu generalizat.

Pentru a determina al doilea vector propriu generalizat $v = (x_1, x_2, x_3)$ rezolvăm ecuaţia matricială $(A - I_3) \cdot v^T = v_2^T$ adică $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 6 \\ -2 & -7 & 13 & 0 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{-2L_3+L_2, \frac{1}{3}L_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{-L_1+L_2}{\simeq}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right)$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu $x_3 = \alpha$, iar soluţia este dată de mulţimea $\{(3\alpha + 7, \alpha - 2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Pentru $\alpha = 1$ obţinem $v_3 = (10, -1, 1)$ un vector propriu generalizat.

Matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este $J = T^{-1}AT =$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Problema 8.0.31.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) =$

$$0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -9-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 = 0, \text{ deci } \lambda = 0 \text{ este rădăcină triplă.}$$

Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 0$, rezolvând ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow A \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} 12x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ 18x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \\ 18x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(\alpha, \beta, 6\alpha - 3\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, prin urmare avem doi vectori proprii liniari independenţi corespunzători valorii proprii $\lambda = 0$. Avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha - 3\beta \end{pmatrix}.$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca $3\alpha = 2\beta$, iar sistemul se reduce la ecuaţia $6x_1 - 3x_2 - x_3 = \frac{\alpha}{2}$. Pentru $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 3$, şi alegem $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$, deci vectorul propriu generalizat este $v_3 = (0, 0, -1)$ care corespunde vectorului propriu $v_2 = (2, 3, 3)$ (vector obţinut pentru $\alpha = 2$ şi $\beta = 3$). Putem alege $v_1 = (1, 0, 6)$, vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$. Deci, matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.0.32.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$, deci $\lambda = -1$ este rădăcină dublă, iar $\lambda = 2$ este rădăcină simplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorilor proprii găsite. Pentru $\lambda = 2$, se rezolvă ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - 2I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{2L_3+L_1, -L_3+L_2, L_3 \leftrightarrow L_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2+L_3, \frac{1}{3}L_2}{\simeq}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, iar $v \in \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim vectorul propriu $v_1 = (1, 1, 1)$ asociat valorii proprii $\lambda = 2$.

Pentru $\lambda = -1$, se rezolvă ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I_3) \cdot v^T =$

$0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim doi vectori proprii $v_2 = (-1, 1, 0)$ şi $v_3 = (-1, 0, 1)$ asociaţi valorii proprii $\lambda = -1$. Deci, matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$J = T^{-1}AT = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**Problema 8.0.33.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = 0 \Rightarrow -(\lambda - 3)^3 = 0$, deci $\lambda = 3$ este rădăcină triplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 3$, rezolvând ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A -$

$3I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim doi vectori proprii liniari independenţi corespunzători valorii proprii $\lambda = 3$. Avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ a \\ \beta \end{pmatrix}$. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca $\alpha = -2\beta$, iar sistemul se reduce la ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = \beta$. Pentru $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = -1$, şi dacă alegem $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, deci vectorul propriu generalizat este $v_3 = (-1, 0, 0)$ care corespunde vectorului propriu $v_2 = (-1, 2, -1)$ (vector obţinut pentru $\alpha = 2$ şi $\beta = -1$). Putem alege $v_1 = (-1, 1, 0)$, vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$.

Matricea pasaj este $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.0.34.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A-\lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -1-\lambda & 4 \\ 5 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3-\lambda^2+8\lambda+12 = 0 \Rightarrow -(\lambda+2)^2(\lambda-3) = 0$, deci $\lambda = -2$ este rădăcină dublă, iar $\lambda = 3$ este rădăcină simplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorilor proprii găsite $\lambda = -2$ şi $\lambda = 3$. Pentru $\lambda = 3$, se rezolvă ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - 3I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1+L_2, L_1+L_3}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, iar $v \in \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim vectorul propriu $v_1 = (0, 1, 1)$ asociat valorii proprii $\lambda = 3$.

Pentru $\lambda = -2$, se rezolvă ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - 2I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, iar $v \in \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim un vector propriu $v_2 = (-1, 1, 1)$. Avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sistemul are soluţia dată de mulţimea $\{(-a, a+1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ iar pentru $a = -1$, obţinem vectorul propriu generalizat $v_3 = (1, 0, -1)$.

Matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.0.35.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda - 27 = 0 \Rightarrow -(\lambda+3)^3 = 0$, deci $\lambda = -3$ este rădăcină triplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = -3$, rezolvând ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + 3I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} 12x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ 18x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \\ 18x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(\alpha, \beta, 6\alpha - 3\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim doi vectori proprii liniari independenţi corespunzători valorii proprii $\lambda = -3$. Avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha - 3\beta \end{pmatrix}$. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca $3\alpha = 2\beta$, iar sistemul se reduce la ecuaţia $12x_1 - 6x_2 - 3x_3 = \alpha$. Pentru $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 3$, şi dacă alegem $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$, deci vectorul propriu generalizat este $v_3 = (0, 0, -1)$ care corespunde vectorului propriu $v_2 = (2, 3, 3)$ (vector obţinut pentru $\alpha = 2$ şi $\beta = 3$). Putem alege $v_1 = (1, 0, 6)$, vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$.

Matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.0.36.** Găsiţi forma canonică Jordan şi matricea de pasaj pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

Determinăm valorile proprii ale matricii prin rezolvarea ecuaţiei $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = 0 \Rightarrow -(\lambda + 2)^3 = 0$, deci $\lambda = -2$ este rădăcină triplă. Vom determina acum vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = -2$, rezolvând ecuaţia matricială $(A - \lambda I_3) \cdot v^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + 2I_3) \cdot v^T =$

$0_{\mathbb{R}^3}$, unde $v = (x_1, x_2, x_3)$. Avem sistemul $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului are rangul 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ necunoscute secundare, iar $v \in \{(2\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, prin urmare găsim doi vectori proprii liniari independenţi corespunzători valorii proprii $\lambda = -2$. Avem nevoie să determinăm un vector propriu generalizat rezolvând ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca $\alpha = \beta$, iar sistemul se reduce la ecuaţia $x_1 - 2x_2 = \alpha$. Pentru $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1$, şi dacă alegem $x_2 = 0$, $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, deci vectorul propriu generalizat este $v_3 = (1, 0, 0)$ care corespunde vectorului propriu $v_2 = (2, 1, 1)$ (vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$). Putem alege $v_1 = (2, 1, 0)$, vector obţinut pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$.

Matricea pasaj este $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan este

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

# Bibliografie

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, Springer, 2-nd edition, 2004.

[2] D. Cîmpean, D. Inoan, I. Raşa, *An Invitation to Linear Algebra and Analytic Geometry*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2009.

[3] I.R.Peter, S.C.László, A. Viorel: *Elements of Linear Algebra*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2014.

[4] V. Pop, I. Raşa, *Linear Algebra with Application to Markov Chains*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.

[5] I. V. Proskuryakov, *Problems in Linear Algebra*, MIR Publishing House, Moskow, 1978.

[6] D. Robinson: *A Course in Linear Algebra with Applications*, World Scientific Publishing, 2-nd Edition, 2006.

[7] http://desmos.com