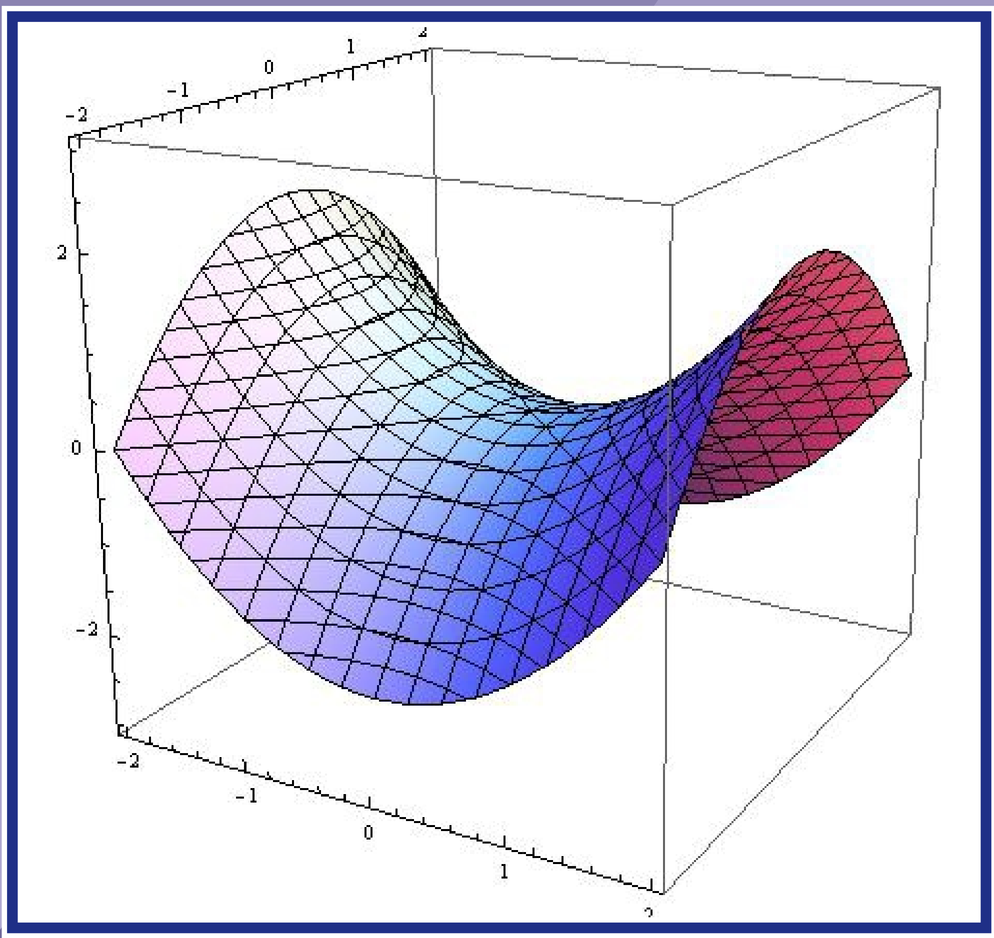
Octavian Mircia GURZĂU

Vicuța NEAGOȘ

GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

Noțiuni teoretice și aplicații



U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2024
ISBN 978-606-737-743-9

Octavian Mircia GURZĂU

Vicuța NEAGOȘ

Geometrie analitică și diferențială

Noțiuni teoretice și aplicații

U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2024
ISBN 978-606-737-743-9

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Lector.dr.mat. Vasile-Horea Ile

Prof.dr. Radu Peter

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

ISBN 978-606-737-743-9

Cuprins

Capitolul 1

Calcul vectorial

1.1 Sisteme de coordonate în plan şi în spaţiu

Sisteme de coordonate în plan

1. Reper cartezian
   Orice punct din plan se poate reprezenta într-un sistem de coordonate cartezian xOy printr-o pereche de numere reale numite coordonate. Pentru $M_0(x_0, y_0)$ coordonatele x_0 şi y_0 se numesc abscisa respectiv ordonata punctului M_0.

2. Reper polar
   Poziţia unui punct în plan poate fi determinată şi cu ajutorul coordonatelor polare. Astfel, unui punct M îi corespunde perechea (ρ, θ) unde $\rho = OM$, $\rho > 0$ şi $\theta =$măs$(\widehat{OM, Ox})$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Se notează $M(\rho, \theta)$, unde ρ este raza polară şi θ este argumentul polar al punctului M.

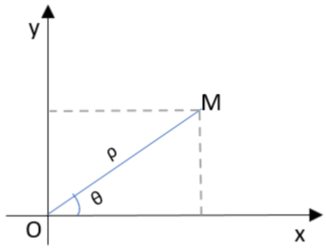


Figura 1.1: Coordonate în plan

Relaţii între coordonatele carteziene (x, y) şi coordonatele polare (ρ, θ):

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}, \text{ respectiv } \begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Sisteme de coordonate în spaţiu

1. Reper cartezian în spaţiu
În sistemul de coordonate carteziene $Oxyz$ un punct este fixat prin coordonatele (x_0, y_0, z_0) numite abscisă, ordonată, respectiv cotă.

2. Repere polare

a) Coordonate sferice
Poziţia unui punct M din spaţiu poate fi determinată prin tripletul (ρ, θ, φ) unde $\rho = OM$, $\rho > 0$, $\theta = \text{măs}(\widehat{OM', Ox})$, $\theta \in [0, 2\pi)$ iar $\varphi = \text{măs}(\widehat{OM, Oz})$, $\varphi \in [0, \pi]$ (M' este proiecţia lui M pe xOy).
Legătura dintre coordonatele carteziene şi cele sferice:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\varphi \end{cases}, \text{ respectiv } \begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\varphi &= \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \operatorname{tg}\theta &= \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

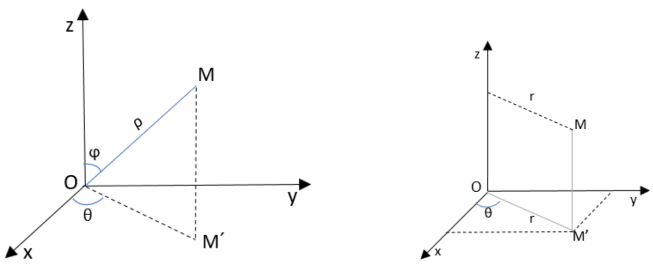


Figura 1.2: Coordonate în spaţiu

b) Coordonate cilindrice
Un punct M din spaţiu poate fi reprezentat prin tripletul (r, θ, z) unde (r, θ) sunt coordonatele polare ale proiecţiei punctului M pe planul xOy iar z este cota punctului M.
Legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele cilidrice:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}, \text{ respectiv } \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= \dfrac{y}{x} \\ z &= z \end{cases}.$$

Observaţia 1.1.1. *Legătura dintre coordonatele cilindrice şi coordonatele sferice este exprimată prin următoarele relaţii:*

$$M(\rho, \theta, \varphi) \Rightarrow M(r, \theta, z) \text{ unde } r = \rho \sin\varphi,\ \theta = \theta,\ z = \rho\cos\varphi$$

şi

$$M(r, \theta, z) \Rightarrow M(\rho, \theta, \varphi) \text{ unde } \rho = \sqrt{r^2 + z^2},\ \theta = \theta,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{z}.$$

Schimbări de coordonate carteziene în plan

1. Translaţia reperului
   Fie reperele $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ şi $\left\{O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ în plan. Punctul M are coordonatele (x, y) în primul reper şi coordonatele (x', y') în al doilea reper. Dacă O' are coordonatele (x_0, y_0) (adică $\overrightarrow{OO'} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$) atunci:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

2. Rotaţia reperului
   Fie reperele $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ şi $\left\{O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right\}$ în plan. Punctul M are coordonatele (x, y) în primul reper şi coordonatele (x', y') în al doilea reper. Dacă α este unghiul dintre versorii $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{i}'$, atunci:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

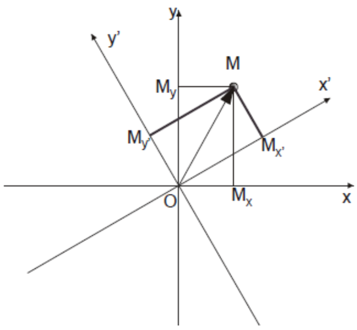


Figura 1.3: Rotaţia reperului în plan

Reciproc, au loc relaţiile:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{1.1.1}$$

1.2 Vectori liberi

Fie A şi B două puncte din spaţiu. Se numeşte **segment orientat** de la A la B (vector legat) perechea ordonată (A, B) în care A este originea iar B este extremitatea. Se notează $\overrightarrow{AB}$.
Dacă $A = B$ atunci segmentul orientat este nul şi se notează $\overrightarrow{0}$.
Dacă $A \neq B$, dreapta AB se numeşte dreapta suport a vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ iar distanţa de la A la B se numeşte modul (lungime, normă).

Definiţia 1.2.1. *Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie (dreptele AB şi CD sunt paralele), acelaşi sens şi acelaşi modul. Se foloseşte notaţia $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*

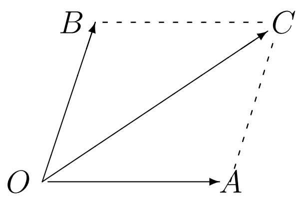
Definiţia 1.2.2. *Mulţimea segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat se numeşte **vector liber**. Orice segment orientat din clasa de echipolenţă considerată, este un reprezentant al vectorului liber respectiv.*

Vectorii liberi se notează de obicei prin litere mici: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v}$. Mulţimea vectorilor din spaţiu se notează V_3.
Modulul vectorului $\overrightarrow{v}$ se notează $|\overrightarrow{v}|$ sau v.
Un vector având lungimea egală cu 1 se numeşte vector unitate (versor).

Operaţii cu vectori liberi

Adunarea vectorilor

- regula triunghiului: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- regula paralelogramului: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



Proprietăţile adunării vectorilor sunt cuprinse în teorema următoare.

Teorema 1.2.3. *Mulţimea vectorilor înzestrată cu operaţia de adunare $(\mathcal{V}_3, +)$ formează un grup abelian.*

Scăderea vectorilor $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA} \text{ vectori opuşi})$$

Observaţia 1.2.4. *Suma, respectiv diferenţa a doi vectori sunt diagonalele paralelogramului construit pe cei doi vectori.*

Înmulţirea unui vector cu un scalar

$$\overrightarrow{v} \in V_3,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\overrightarrow{v} \in V_3$$

Versorul unui vector $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ este $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$.

Teorema 1.2.5. *Pentru orice vectori* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathcal{V}_3$ *şi pentru orice scalari* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *sunt adevărate egalităţile:*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{v} = (\alpha_1\overrightarrow{v}) + (\alpha_2\overrightarrow{v}),$$
$$\alpha(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = (\alpha\overrightarrow{v_1}) + (\alpha\overrightarrow{v_2}),$$
$$(\alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{v} = \alpha_1(\alpha_2\overrightarrow{v}),$$
$$1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.$$

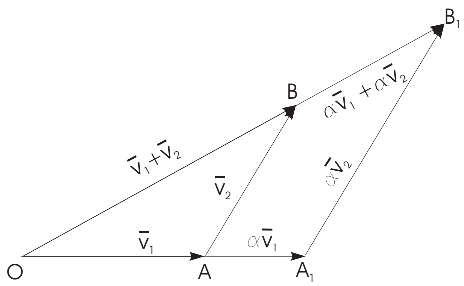


Figura 1.4: Distributivitatea înmulţirii vectorilor cu scalari faţă de adunarea vectorilor

Din teoremele 1.2.3 şi 1.2.5 rezultă teorema următoare.

Teorema 1.2.6. $(V_3, +, \cdot)$ *este un spaţiu vectorial real numit spaţiul vectorial al vectorilor liberi din spaţiu.*

Definiţia 1.2.7. *Doi vectori nenuli din spaţiu se numesc vectori coliniari dacă au aceeaşi direcţie.*

$$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \text{ (vectori coliniari)} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$$

Aplicaţii:

a) $AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ coliniari $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$

b) A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ vectori coliniari $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$

1.3 Dependenţă liniară în V_3

Definiţia 1.3.1. *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp K (de exemplu, $K = \mathbb{R}$). Vectorii $\overrightarrow{v_i} \in V$, $i = \overline{1, n}$, se numesc liniar independenţi dacă:*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Vectorii $\overrightarrow{v_i} \in V$, $i = \overline{1, n}$, se numesc liniar dependenţi dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, nu toţi nuli, astfel încât:

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}.$$

Proprietatea 1.3.2. *Doi vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V_3$ sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi. Trei vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in V_3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*

Teorema 1.3.3. *Dacă vectorii $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}_1$ şi $\overrightarrow{v}_2$ sunt coplanari iar $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt necoliniari, atunci există în mod unic doi scalari λ_1, λ_2 astfel încât:*

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}.$$

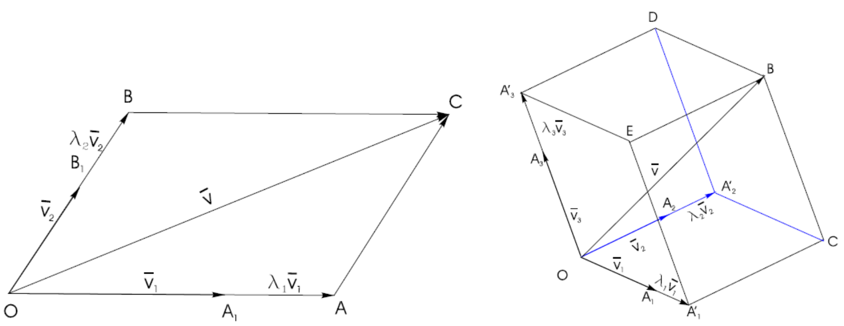


Figura 1.5: Descompunerea unui vector după 2 sau 3 direcţii

Teorema 1.3.4. *Dacă vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ sunt necoplanari, atunci oricare ar fi $\overrightarrow{v} \in V_3$, există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, unici, astfel încât:*

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \lambda_3 \overrightarrow{v_3}.$$

Observaţia 1.3.5. *Numărul maxim de vectori liniar independenţi în spaţiu este 3. Oricare 4 vectori din spaţiu sunt liniar dependenţi.*

1.4 Reprezentarea analitică a vectorilor din spaţiu

Definiţia 1.4.1. *Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct în spaţiu. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte vector de poziţie al punctului M în raport cu originea sistemului de coordonate $Oxyz$ şi*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r_M} = x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j} + z_0 \overrightarrow{k} .$$

Teorema 1.4.2. *Dacă $Oxyz$ este sistemul cartezian de coordonate din spaţiu iar $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ sunt versorii axelor de coordonate, atunci pentru orice vector $\overrightarrow{v} \in V_3$ există în mod unic numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\overrightarrow{v} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} . \tag{1.4.1}$$

Relaţia (1.4.1) se numeşte reprezentarea analitică a vectorului $\overrightarrow{v}$.
Spunem că $\overrightarrow{v}$ are coordonatele (x, y, z) în baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.
Se mai notează $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$.
Modulul vectorului $\overrightarrow{v}$ este: $v = |\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Dacă α, β, γ sunt măsurile unghiurilor formate de vectorul $\overrightarrow{v}$ cu versorii $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, atunci

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{v}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{v}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{v}|}.$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ se numesc cosinusurile directoare ale vectorului $\overrightarrow{v}$ şi verifică relaţia:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Se verifică uşor că suma şi diferenţa a doi vectori au coordonatele egale cu sumele respectiv diferenţele coordonatelor celor doi vectori.
Prin înmulţirea unui vector $\overrightarrow{v}$ cu un scalar λ se obţine un vector ale cărui coordonate sunt egale cu coordonatele lui $\overrightarrow{v}$ înmulţite cu λ.
Doi vectori sunt coliniari dacă au coordonatele proporţionale.
Dacă A şi B sunt două puncte în spaţiu, atunci are loc:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k} .$$

Distanţa dintre punctele A şi B se calculează folosind formula:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} .$$

1.5 Produse de vectori

Produs scalar

Definiţia 1.5.1. *Produsul scalar a doi vectori* $\overrightarrow{v_1}$ *şi* $\overrightarrow{v_2}$ *este numărul real*

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}).$$

Observaţii 1.5.2. *a) Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre lungimea unuia din vectori, lungimea proiecţiei celui de al doilea vector pe primul, şi* $+1$ *dacă unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decât* $\frac{\pi}{2}$ *respectiv* -1 *dacă unghiul dintre cei doi vectori este obtuz.*
b) Vectorii nenuli $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ *sunt ortogonali* $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.

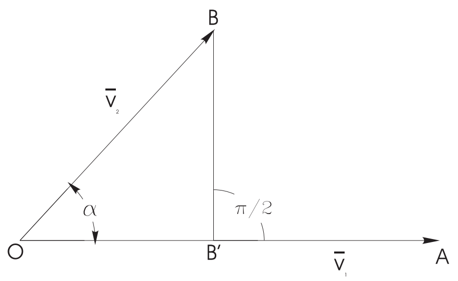


Figura 1.6: Produs scalar

Interpretare mecanică: Produsul scalar dintre vectorii $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_1}$ este egal cu lucrul mecanic produs de o forţă egală cu $\overrightarrow{v_2}$ la deplasarea $\overrightarrow{v_1}$.

Proprietatea 1.5.3. *Produsul scalar este comutativ şi distributiv faţă de adunarea vectorilor.*

Pentru a calcula modulul unui vector se foloseşte relaţia: $v = \sqrt{\overrightarrow{v}^2}$.

Expresia analitică a produsului scalar

Fie $\overrightarrow{v_1} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$. Are loc formula:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Folosind definiţia produsului scalar şi expresia sa analitică, se obţine:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Produs vectorial

Definiţia 1.5.4. *Produsul vectorial a doi vectori* $\overrightarrow{v_1}$ *şi* $\overrightarrow{v_2}$ *este un vector notat prin* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, *care are următoarele proprietăţi:*

(i) direcţia lui $\overrightarrow{v}$ *este perpendiculară pe planul determinat de* $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$;

(ii) sensul lui $\overrightarrow{v}$ *este dat de regula burghiului;*

(iii) $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| = |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$.

Vectorii nenuli $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$.

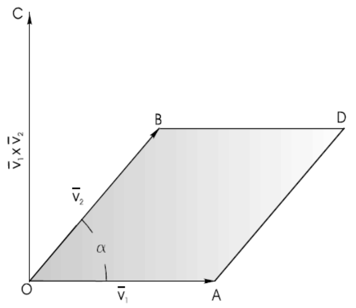


Figura 1.7: Produs vectorial

Interpretare mecanică: Produsul vectorial dintre vectorii $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_1}$ este egal cu momentul forţei $\overrightarrow{v_2}$ având braţul forţei $\overrightarrow{v_1}$, momentul având originea în originea braţului forţei.

Teorema 1.5.5. *Oricare sunt vectorii* $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ *şi* $\overrightarrow{v_3}$ *şi oricare ar fi scalarul* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sunt adevărate egalităţile:*

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1} \text{ (anticomutativitate)}$$

$$\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_3} \text{ (distributivitate faţă de adunarea vectorilor)}$$

$$(\alpha\overrightarrow{v_1}) \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} \times (\alpha\overrightarrow{v_2}) = \alpha\,(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}).$$

Expresia analitică a produsului vectorial

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Interpretarea geometrică a produsului vectorial

a) Aria paralelogramului determinat de vectorii necoliniari $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ este egală cu $|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|$.

b) Aria triunghiului ABC este: $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

Produs mixt

Definiţia 1.5.6. *Produsul mixt al vectorilor* $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ *şi* $\overrightarrow{v_3}$ *este scalarul notat* $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, *definit prin formula*

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}).$$

Proprietăţi 1.5.7. *Produsul mixt are următoarele proprietăţi:*

1. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}) = (\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$
2. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = -(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$
3. $(k\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = k(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$
4. $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$

Expresia analitică a produsului mixt

Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}$, respectiv $\overrightarrow{v_3} = x_3\overrightarrow{i} + y_3\overrightarrow{j} + z_3\overrightarrow{k}$. Are loc formula:

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Interpretarea geometrică a produsului mixt

a) Vectorii $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sunt coplanari $\Leftrightarrow (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 0$.

b) Dacă vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

c) Volumul tetraedrului $ABCD$ este egal cu $\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Produs dublu vectorial

Definiţia 1.5.8. *Se numeşte produs dublu vectorial al vectorilor* $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ *şi* $\overrightarrow{v_3}$, *vectorul*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}).$$

Proprietatea 1.5.9. *Vectorul* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$ *este coplanar cu vectorii* $\overrightarrow{v_2}$ *şi* $\overrightarrow{v_3}$ *şi se poate calcula cu ajutorul formulei (formula lui Gibs):*

$$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3})\overrightarrow{v_2} - (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3}. \tag{1.5.1}$$

Observaţia 1.5.10. *Relaţia (1.5.1) arată că produsul vectorial nu este asociativ.*

1.6 Probleme rezolvate

1. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are două vârfuri în punctele $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ şi $B\left(8, -\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Să se afle coordonatele polare ale punctului $M\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$.

3. Să se afle coordonatele carteziene ale punctului $A\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Să se afle coordonatele sferice ale punctului $M(2\sqrt{3}, 6, 4)$.

5. Să se afle unghiul format de vectorii unitari $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ ştiind că vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali.

6. Să se afle modulul vectorului $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ şiind că $|\overrightarrow{v_1}| = 4$, $|\overrightarrow{v_2}| = 2$, $|\overrightarrow{v_3}| = 6$, măs $\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right) =$ măs $\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}}\right) =$ măs $\left(\widehat{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

7. Fie vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ astfel încât $|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 3$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Calculaţi lungimile diagonalelor paralelogramului format de $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

8. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}| = 5, |\overrightarrow{b}| = 3$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$. Să se afle unghiul format de diagonalele paralelogramului determinat de $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

9. Fie $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ vectori necoliniari. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ să fie coliniari.

10. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ ştiind că $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}, |\overrightarrow{b}| = 4$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

11. Fie $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ unde $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 3$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$. Calculaţi aria triunghiului format de $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$.

12. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ trei vectori oarecare. Să se arate că:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = 0\,.$$

13. Fie vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$. Să se calculeze volumul paralelipipedului determinat de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$, ştiind că $|\overrightarrow{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{w}| = 2$, măs $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ iar măsura unghiului format de $\overrightarrow{u}$ cu planul determinat de $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{w}$ este $\dfrac{\pi}{4}$.

14. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$ unde $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt vectori necoplanari.

    a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ sunt necoplanari.

    b) Să se descompună vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ după $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$.

15. Să se determine:

    a) unghiul format de $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

    b) cosinusurile directoare ale vectorului $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

16. Să se arate că:

    a) vectorii $\overrightarrow{v_1} = (1, 4, -1)$ şi $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, 5)$ sunt ortogonali

    b) punctele $A(-1, 3, 2)$, $B(0, 4, 1)$ şi $C(2, 6, -1)$ sunt coliniare

17. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se determine un versor ortogonal pe $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

18. Să se calculeze:

    a) produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{v_1}(3, 4, 5)$, $\overrightarrow{v_2}(4, -2, 1)$ şi $\overrightarrow{v_3}(1, 1, -1)$

    b) $\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$ unde $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

19. Să se demonstreze că:

    a) $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k}$ sunt vectori coplanari

    b) punctele $A(-1, 2, -2)$, $B(-2, 5, 1)$, $C(-1, 6, 0)$ şi $D(2, 3, -6)$ sunt coplanare

20. Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1} = (2, -3, 4)$ şi $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, -3)$. Să se determine aria paralelogramului format de $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ şi înălţimea paralelogramului corespunzătoare bazei $\overrightarrow{v_2}$.

21. Fie punctele $A(2,-1,3)$, $B(3,3,1)$ şi $C(4,2,2)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din A.

22. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ şi înălţimea paralelipipedului considerând ca bază paralelogramul determinat de vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

23. Se consideră punctele $M(4,0,0)$, $N(0,4,0)$, $P(0,0,9)$ şi $Q\,(1,2,3)$. Să se calculeze aria $\triangle MNP$ şi volumul tetraedrului $MNPQ$.

24. Fie punctele $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(2,4,3)$ şi $D(1,0,1)$. Să se afle volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii din D.

Soluţii:

1. Punctele A şi B au coordonatele carteziene:

$$x_A = 5\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y_A = 5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$x_B = 8\cos\frac{-\pi}{12} = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}),\ y_B = 8\sin\frac{-\pi}{12} = 2\sqrt{2}(1-\sqrt{3}).$$

Se obţine $AB = 7$. Aria triunghiului echilateral de latură AB este $\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$.

2. $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 4$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Rezultă $M\left(4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. Avem: $\rho = 4$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Se obţin coordonatele carteziene:

$$\begin{array}{rcl} x &=& \rho\cos\theta\sin\varphi = 3 \\ y &=& \rho\sin\theta\sin\varphi = \sqrt{3} \\ z &=& \rho\cos\varphi = 2 \end{array} \Rightarrow A(3,\sqrt{3},2).$$

4. Avem: $x = 2\sqrt{3}$, $y = 6$, $z = 4$. Se obţin coordonatele sferice:

$$\begin{array}{rcl} \rho &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 8 \\ \cos\varphi &=& \dfrac{z}{\rho} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos\theta &=& \dfrac{x}{\rho\sin\varphi} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \Rightarrow M\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

5. Dacă vectorii $\overrightarrow{u}$ ş $\overrightarrow{v}$ sunt ortogonali atunci $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

$$(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})\cdot(5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}) = 0 \Rightarrow 5\overrightarrow{a}^2 + 6\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{b}^2 = 0\,,$$

adică, $6\vec{a}\cdot\vec{b}=3$. Ştiind că $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, din definiţia produsului scalar rezultă $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{1}{2}$. Măsura unghiului format de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este $\dfrac{\pi}{3}$.

6. Lungimea vectorului $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}$ este $v=\sqrt{\vec{v}^{\,2}}$.

$$\vec{v}^{\,2}=(\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3})^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+2\,(\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}+\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}+\vec{v_2}\cdot\vec{v_3})\,,$$

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=v_1\cdot v_2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=4,\ \vec{v_1}\cdot\vec{v_3}=12,\ \vec{v_2}\cdot\vec{v_3}=6\Rightarrow\vec{v}^{\,2}=100\Rightarrow v=10.$

7. Diagonalele paralelogramului sunt $\vec{a}+\vec{b}$ şi $\vec{a}-\vec{b}$, cu lungimile $|\vec{a}+\vec{b}|$ şi $|\vec{a}-\vec{b}|$. Din relaţia $\vec{v}^{\,2}=|\vec{v}|^2$ rezultă $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{\,2}}$.
$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2=19.$
Analog, $(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2=7.$
Rezultă că $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$ şi $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$.

8. $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=3,\ \text{măs}\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{a}^{\,2}=25,\ \vec{b}^{\,2}=9,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Fie $\vec{d_1}$ şi $\vec{d_2}$ diagonalele paralelogramului construit pe $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ iar α măsura unghiului format de $\vec{d_1}$ şi $\vec{d_2}$.

$$\begin{array}{l}\vec{d_1}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\\ \vec{d_2}=\vec{v_1}-\vec{v_2}\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{d_1}=2\vec{a}-\vec{b}\\ \vec{d_2}=5\vec{b}\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{d_1}^{\,2}=(2\vec{a}-\vec{b})^2=109\Rightarrow|\vec{d_1}|=\sqrt{109}\\ |\vec{d_2}|=5|\vec{b}|=15\end{array}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|}=\frac{(2\vec{a}-\vec{b})\cdot5\vec{b}}{15\sqrt{109}}=\frac{10\vec{a}\,\vec{b}-5\vec{b}^{\,2}}{15\sqrt{109}}=\frac{-3}{\sqrt{109}}$$

9. $\vec{u},\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$
$\vec{u}\times\vec{v}=(\lambda\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=-\lambda\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{b}\times\vec{a}=(\lambda+2)\vec{b}\times\vec{a}.$
Deoarece vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt necoliniari, $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow(\lambda+2)\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{\neq\vec{0}}=\vec{0}\Rightarrow\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=-2.$$

10. Aria paralelogramului determinat de $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ este $\mathcal{A}=|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|$.
$\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})=2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}-\vec{a}\times\vec{b}+6\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-\vec{a}\times\vec{b}}-3\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}},$
adică, $\vec{v_1}\times\vec{v_2}=-\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{a}\times\vec{b}=-7\vec{a}\times\vec{b}$.
Rezultă că $\mathcal{A}=|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|=|-7\vec{a}\times\vec{b}|=7|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=42.$

11. Aria triunghiului format de vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este $\mathcal{A} = \dfrac{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}{2}$.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) = 9\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = 10\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b},$$

de unde rezultă că $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = 10\,|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = 10 \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\dfrac{\pi}{2} = 90$.
Se obţine $\mathcal{A} = 45$.

12. Se folosesc proprietăţi ale produsului mixt.

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) + \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right),$$

unde

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}),$$

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) + \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right).$$

Se obţine $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right) = 0$.

13. Volumul paralelipipedului format de vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ este

$$\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)\right|, \text{ unde } \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right).$$

Vom aplica definiţia şi unele proprietăţi ale produsului mixt.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} &= (5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}) \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \\
&= 5\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - 5\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + 4\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} - 3\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} - 3\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \\
&= 9\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - 8\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}
\end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) &= (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})\,(9\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - 8\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \\
&= \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) - 16\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) = \\
&= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + 16(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 17(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})
\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}| \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 6.$$

Se obţine:

$$\mathcal{V} = 17\left|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\right| = 17 \cdot 6 = 102.$$

14. a) Arătăm că $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ sunt liniar independenţi. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

$$\lambda_1(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c})+\lambda_2(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\lambda_3(2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c})=\overrightarrow{0},\ \text{adică},$$
$$\overrightarrow{a}(\lambda_1+\lambda_2)+\overrightarrow{b}(\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)+\overrightarrow{c}(-2\lambda_1+3\lambda_3)=\overrightarrow{0}.$$

Vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sunt necoplanari, deci liniar independenţi, ceea ce implică:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1+3\lambda_3 &= 0 \end{cases}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat cu soluţia unică:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\ \text{ vectori liniar independenţi}$$

b) Determinăm $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{v_1}+\beta\overrightarrow{v_2}+\gamma\overrightarrow{v_3}$. Avem:

$$\alpha(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c})+\beta(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\gamma(2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha-\beta+2\gamma &= 1 \\ -2\alpha+3\gamma &= 1 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul, obţinem: $\alpha=\dfrac{2}{5}$, $\beta=\dfrac{3}{5}$, $\gamma=\dfrac{3}{5}$, de unde rezultă:

$$\overrightarrow{v}=\frac{2}{5}\overrightarrow{v_1}+\frac{3}{5}\overrightarrow{v_2}+\frac{3}{5}\overrightarrow{v_3}.$$

15. a) $|\overrightarrow{v_1}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{v_2}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{21}$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}\right)=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{v_1\cdot v_2}=\frac{12-8+5}{5\sqrt{2}\sqrt{21}}=\frac{9}{5\sqrt{42}}$$

Unghiul format de vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ are măsura $\arccos\dfrac{9}{5\sqrt{42}}$.

b) Modulul vectorului $\overrightarrow{v}$ este $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{14}$. Dacă α,β,γ sunt unghiurile formate de $\overrightarrow{v}$ cu axele de coordonate (deci cu versorii $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$), atunci cosinusurile directoare ale vectorului $\overrightarrow{v}$ sunt:

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{14}}.$$

16. a) $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0\Rightarrow\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ vectori ortogonali

b) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,3,-3)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ deci vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari. Rezultă că punctele A, B şi C sunt coliniare.

17. Un vector perpendicular pe $\overrightarrow{v_1}$ şi pe $\overrightarrow{v_2}$ este produsul lor vectorial. Un versor al acestuia se obţine împărţind coordonatele la modulul vectorului.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \Rightarrow |\overrightarrow{v}| = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = -\frac{\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

18. a) $\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}) = \left(3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}\right)\left(\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right) = 53$$

sau: $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 53.$

b) $\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

Acelaşi rezultat se obţine aplicând formula lui Gibs.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}) &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3} \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\overrightarrow{v_2} + 4\overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

19. a) Vectorii $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sunt coplanari $\Leftrightarrow (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 0$.

$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ vectori coplanari

b) A, B, C, D puncte coplanare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vectori coplanari

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1, 3, 3) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 4, 2) \\ \overrightarrow{AD} &= (3, 1, -4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

20. Paralelogramul determinat de $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ are aria $\mathcal{A} = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|$.

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k} \Rightarrow \mathcal{A} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$$

De asemenea, are loc formula: $\mathcal{A} = b \cdot h$ unde $b = |\overrightarrow{v_2}|$.

$|\overrightarrow{v_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow h = \dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{21}}{7}$.

21. Aria triunghiului ABC este $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (2, -3, -5) \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{38} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{38}}{2}$$

Folosind formula $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$, unde $b = BC = \sqrt{3}$, se obţine relaţia:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{38}}{2} \text{ de unde rezultă } h = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}.$$

22. $\mathcal{V} = |\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})\,|$, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow \mathcal{V} = 7$

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \Rightarrow |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{35}$$

$$\mathcal{V} = A_b \cdot h = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot h \Rightarrow h = \frac{\mathcal{V}}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} = \frac{7}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

23. Folosim formula: $\mathcal{A}_{MNP} = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}\right|}{2}$.

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 36\overrightarrow{i} + 36\overrightarrow{j} + 16\overrightarrow{k} = 4\left(9\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\right)$$

$$\mathcal{A}_{MNP} = \frac{4\sqrt{9^2 + 9^2 + 4^2}}{2} = 2\sqrt{178}.$$

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{12}{6} = 2.$$

24. Volumul tetraedrului este: $\mathcal{V} = \dfrac{|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)|}{6} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot h_D}{3}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{13}{6}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 25\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 11\overrightarrow{k} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{762}}{2}$$

Rezultă $h_D = \dfrac{3\,\mathcal{V}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{13}{\sqrt{762}}$.

1.7 Probleme propuse

1. Să se determine:

   a) coordonatele carteziene pentru $M\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ şi $N\left(4, \dfrac{7\pi}{6}\right)$

   b) coordonatele polare pentru $A(-1, \sqrt{3})$ şi $B(2, -2)$

2. Să se determine distanţa dintre punctele $M_1(\rho_1, \theta_1)$ şi $M_2(\rho_2, \theta_2)$. Ca aplicaţie, să se calculeze distanţa dintre $M_1\left(3, \dfrac{\pi}{8}\right)$ şi $M_2\left(6, \dfrac{5\pi}{8}\right)$.

3. Să se calculeze aria ΔABC unde $A\left(3, \dfrac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8, \dfrac{7\pi}{24}\right)$, $C\left(6, \dfrac{5\pi}{8}\right)$.

4. Să se determine coordonatele carteziene ale punctelor:

   a) $M\left(\sqrt{2}, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\quad N\left(4, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

   b) $A\left(1, \dfrac{\pi}{6}, 3\right)$, $\quad B\left(6, \dfrac{7\pi}{4}, 1\right)$

5. Să se calculeze lungimile diagonalelor paralelogramului format de vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, dacă $|\overrightarrow{a}| = 5$, $|\overrightarrow{b}| = 6$, măs$\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

6. Fie vectorii ortogonali $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ astfel încât $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 4$. Să se afle unghiul format de diagonalele paralelogramului determinat de vectorii $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

7. Să se arate că dacă vectorii $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ sunt coliniari atunci şi vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari.

8. Fie vectorii necoliniari $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ să fie coliniari.

9. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ ştiind că $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 2$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

10. Fie $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$. Dacă $|\overrightarrow{u}| = 3$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{2}$ şi măs $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, să se calculeze:

    a) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi unghiul format de acestea,

    b) aria paralelogramului format de $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

11. Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}$, unde $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt vectori necoplanari.

    a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ sunt necoplanari.

    b) Să se descompună vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}$ după $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$.

12. Să se calculeze lungimea diagonalei paralelipipedului format de vectorii $\overrightarrow{v}_1 = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}_2 = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v}_3 = -\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

13. a) Să se determine unghiul format de vectorii $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.
    b) Să se afle cosinusurile directoare ale vectorului $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$.

14. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + 2a\overrightarrow{j} - (a-1)\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = (3-a)\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ să fie ortogonali.

15. Fie $A(2, -1, 3)$, $B(3, 3, 1)$ şi $C(4, 2, 2)$. Să se afle unghiurile ΔABC.

16. Fie vectorii $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 3)$ şi $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 1)$. Să se determine:

    a) aria triunghiului ABC

    b) $\sin A$

17. Fie $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Să se calculeze $\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$ şi $\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$.

18. Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se calculeze $\sin\widehat{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}$ şi $\cos\widehat{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}$.

19. Să se studieze coplanaritatea vectorilor:

    a) $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$

    b) $\overrightarrow{v_1} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, -4, 1)$ şi $\overrightarrow{v_3} = (3, -2, 2)$.

20. Să se arate că punctele $A(1, 1, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 7, -3)$ şi $D(5, 7, 2)$ sunt coplanare.

21. Fie $\overrightarrow{v_1} = (3, -1, a)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, -4)$ şi $\overrightarrow{v_3} = (4, 0, 1)$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ să fie coplanari.

22. Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

    a) Să se afle aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

    b) Să se calculeze $\sin\widehat{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}$.

23. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Să se calculeze:

    a) aria paralelogramului format de cei doi vectori

    b) lungimea înălţimii paralelogramului corespunzătoare bazei $\overrightarrow{v_2}$.

24. Fie punctele $A(1, -5, 4)$, $B(0, -3, 1)$ şi $C(1, 0, 1)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din A.

25. Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se calculeze:

    a) volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$

    b) înălţimea paralelipipedului având ca bază paralelogramul determinat de vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

26. Fie punctele $M(3, 0, 0)$, $N(0, 3, 0)$ şi $P(0, 0, 6)$. Să se determine:

    a) volumul piramidei $OMNP$ unde $O(0, 0, 0)$

    b) lungimea înălţimii din O a piramidei $OMNP$.

Capitolul 2

Planul şi dreapta în spaţiu

2.1 Planul

Ecuaţia generală a planului este:

$$(P): \ ax + by + cz + d = 0, \ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

unde $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ este un vector normal al planului (perpendicular pe plan).
O dreaptă (N) având direcţia vectorului $\overrightarrow{n}$ se numeşte normală la plan.

Planul determinat de un punct şi un vector normal
Fie un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi un vector nenul $\overrightarrow{n}(a, b, c)$. Există un singur plan care trece prin M_0 şi este perpendicular pe direcţia vectorului $\overrightarrow{n}$.
Dacă M este un punct al acestui plan unic determinat, atunci $\overrightarrow{M_0M}$ şi $\overrightarrow{n}$ sunt vectori ortogonali, deci au produsul scalar nul: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

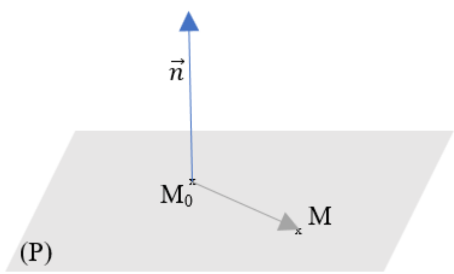


Figura 2.1: Plan determinat de un punct şi un vector normal

Folosind coordonatele vectorilor, se obţine ecuaţia planului care trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{n}(a, b, c)$:

$$(P): \ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ecuaţia normală a planului

Ecuaţia unui plan se poate determina dacă se cunoaşte distanţa p de la origine la plan şi un versor normal al planului definit prin cosinusurile directoare $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, unde α, β, γ sunt unghiurile formate de versorul normal cu axele de coordonate. Ecuaţia normală a planului (ecuaţia lui Hesse) este:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,.$$

Observaţia 2.1.1. *Dacă se dă ecuaţia generală a planului, ecuaţia normală se obţine împărţind ecuaţia dată prin* $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Planul determinat de un punct şi doi vectori directori

Se consideră punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii necoliniari $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ şi $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Pentru a scrie ecuaţia planului care trece prin M_0 şi este paralel cu cele două direcţii se foloseşte condiţia de coplanaritate a vectorilor $\overrightarrow{MM_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ (M punct arbitrar în plan), adică: $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = 0.$

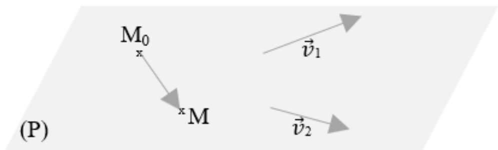


Figura 2.2: Plan determinat de un punct şi doi vectori directori

Se obţine ecuaţia planului determinat de M_0 şi de vectorii $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$:

$$(P): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Fie punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ şi fie M un punct arbitrar în planul determinat de cele trei puncte.

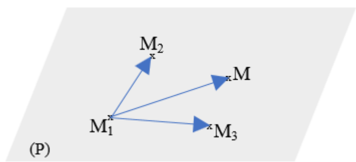


Figura 2.3: Planul determinat de trei puncte necoliniare

Vectorii $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coplanari, deci au produsul mixt nul:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0.$$

Se obţine ecuaţia:

$$(P): \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este echivalentă cu ecuaţia:

$$(P): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 2.1.2. *Dacă se cunosc punctele de intersecţie ale unui plan cu axele de coordonate, $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$, atunci ecuaţia planului este: $(P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (ecuaţia planului "prin tăieturi").*

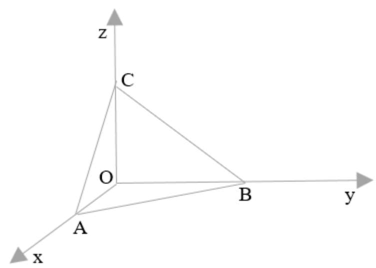


Figura 2.4: Intersecţiile unui plan cu axele de coordonate

Plane particulare

a) Planele de coordonate au ecuaţiile:

$$xOy: z = 0, \quad yOz: x = 0, \quad xOz: y = 0.$$

Generalizând, se obţine ecuaţia unui plan paralel cu un plan de coordonate. De exemplu, un plan paralel cu xOy are ecuaţia: $z = z_0$.

b) Un plan care trece prin origine are ecuaţia $ax + by + cz = 0$.

2.2 Dreapta în spaţiu

Dreapta determinată de un punct şi un vector director

Se consideră un punct în spaţiu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi un vector $\overrightarrow{v}(l, m, n)$.

Ecuaţia vectorială a dreptei care trece prin punctul M_0 şi este paralelă cu direcţia vectorului $\overrightarrow{v}$ este:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{v}\,, \tag{2.2.1}$$

unde $M(x, y, z)$ este punctul curent al dreptei.

Vectorul $\overrightarrow{v}$ se numeşte vector director al dreptei iar coordonatele acestuia se numesc parametri directori.

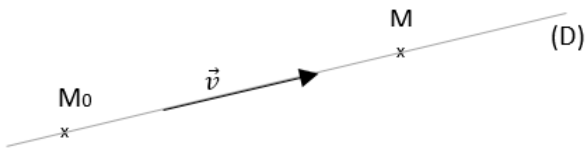


Figura 2.5: Dreapta în spaţiu

Ecuaţia (2.2.1) este echivalentă cu:

$$\begin{cases} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad (\textbf{ecuaţii parametrice}) \tag{2.2.2}$$

respectiv

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,. \qquad (\textbf{ecuaţii canonice}) \tag{2.2.3}$$

Observaţia 2.2.1. *Fie α, β, respectiv γ măsurile unghiurilor formate de $\overrightarrow{v}$ cu versorii $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, respectiv $\overrightarrow{k}$. Atunci $\cos\alpha$, $\cos\beta$ şi $\cos\gamma$ se numesc cosinusurile directoare ale direcţiei vectorului $\overrightarrow{v}$ şi verifică relaţiile:*

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\right),$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Dreapta determinată de două puncte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o dreaptă definită prin ecuaţiile:

$$\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2}\,, \qquad (\textbf{ecuaţia vectorială})$$

$$\begin{cases} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(ecuaţii parametrice)}$$

respectiv

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad \textbf{(ecuaţii canonice)}$$

Ecuaţiile generale ale unei drepte în spaţiu

Fie planele $(P_1): \; a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ şi $(P_2): \; a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$. Dacă rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$, atunci cele două plane sunt secante. Dreapta $(D) = (P_1) \cap (P_2)$ are ecuaţiile:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

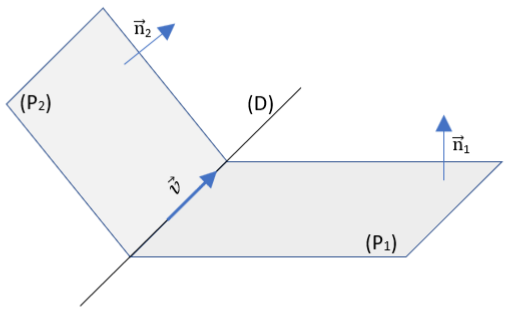


Figura 2.6: Dreapta de intersecţie a două plane

Observaţia 2.2.2. *Dacă o dreaptă este definită prin ecuaţiile generale (ca intersecţie a două plane) atunci putem scrie ecuaţiile canonice ale dreptei. Pentru aceasta se determină vectorul director al dreptei* $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$, *unde* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ *şi se află un punct al dreptei. Ecuaţiile parametrice se obţin din ecuaţiile canonice egalând cu un parametru real* t *cele trei rapoarte.*

Exemplul 2.2.3. *Axa* Ox *a sistemului de coordonate din spaţiu poate fi definită prin ecuaţiile:*

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ox : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \Leftrightarrow Ox : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

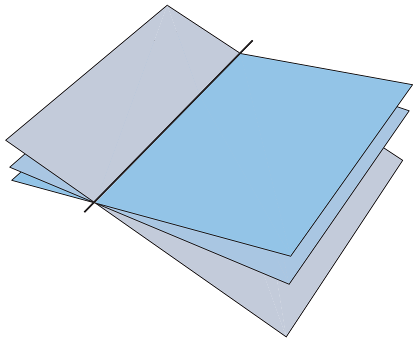


Figura 2.7: Fascicul de plane

Fascicul de plane

Fie planele secante $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ iar (D) dreapta de intersecţie a celor două plane.

Ecuaţia fasciculului determinat de dreapta (D) este:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nu sunt simultan nule. Într-o formă mai simplă putem scrie:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.3 Poziţii relative ale dreptelor şi planelor în spaţiu. Intersecţii.

Poziţii relative a două plane

Fie planele $(P_1):\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $(P_2):\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Acestea pot fi:

1. paralele dacă $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$;

2. confundate (coincid) dacă $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$;

3. secante dacă vectorii lor normali sunt necoliniari (sistemul format din ecuaţiile celor două plane este simplu nedeterminat).
   Dreapta de intersecţie a planelor este dată prin ecuaţiile generale.
   În particular, două plane sunt perpendiculare dacă vectorii lor normali sunt ortogonali, adică $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Poziţii relative a trei plane

Fie trei plane $(P_1), (P_2), (P_3)$. Acestea pot fi:

1. paralele dacă au vectorii normali coliniari; în acest caz, sistemul format de ecuaţiile planelor este incompatibil;
2. concurente, având ca intersecţie un punct, coordonatele lui fiind soluţia sistemului (compatibil determinat) format din ecuaţiile celor trei plane;
3. secante, adică $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$; în acest caz, sistemul format de cele trei ecuaţii este compatibil nedeterminat;
4. secante două câte două, cele trei drepte de intersecţie fiind paralele;
5. două plane paralele tăiate de al treilea după două drepte paralele.

Poziţii relative a două drepte

Fie $(D_1) : \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$, $(D_2) : \dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$.

1. Dreptele sunt necoplanare dacă $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0$.
2. Dreptele sunt coplanare dacă $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0$.
   a) $(D_1) \parallel (D_2)$ dacă vectorii lor directori sunt coliniari şi $M_1 \notin (D_2)$. Planul format de cele două drepte are ecuaţia:
   $$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_2}) = 0.$$
   b) Dreptele coincid dacă au vectorii directori coliniari şi $M_1 \in (D_2)$.
   c) Dreptele sunt concurente dacă au vectorii directori necoliniari. Punctul de intersecţie a celor două drepte se determină folosind ecuaţiile parametrice sau generale ale acestora.
   Planul determinat de cele două drepte concurente are ecuaţia:
   $$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0\,.$$

Poziţia unei drepte faţă de un plan

Fie $(D) : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ şi $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$.

1. $(D) \parallel (P)$ dacă vectorii $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{n}$ sunt ortogonali ($\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$) şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin (P)$;
2. $(D) \subset (P)$ dacă $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$;
3. $(D) \cap (P) = \{M_1\}$ dacă $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$ ($aA + bB + cC \neq 0$).
   Pentru a afla coordonatele lui M_1, se rezolvă sistemul format de ecuaţia planului şi ecuaţiile parametrice (sau ecuaţiile generale) ale dreptei.

2.4 Distanţe şi unghiuri în spaţiu

Distanţe în spaţiu

1. Distanţa de la $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $(P) : ax + by + cz + d = 0$ este:

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2. Distanţa de la un punct A la o dreaptă (D):

$$d(A, D) = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{v}|}, \text{ unde } B \in (D),\ \overrightarrow{v} \text{ vector director al lui } (D)$$

(înălţimea paralelogramului format de $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{AB}$, având baza $\overrightarrow{v}$)

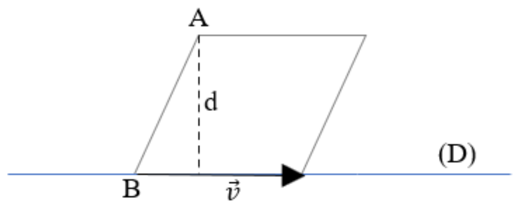


Figura 2.8: Distanţa de la un punct la o dreaptă

3. Distanţa dintre două plane paralele (P_1) şi (P_2):

$$d(P_1, P_2) = d(M_1, P_2), \text{ unde } M_1 \in (P_1)$$

4. Distanţa dintre două drepte

   a) $d(D_1, D_2) = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{v_1}|}{|\overrightarrow{v_1}|}$, dacă $(D_1) \parallel (D_2)$

   b) $d(D_1, D_2) = \dfrac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}$ dacă dreptele sunt necoplanare
   (înălţimea paralelipipedului determinat de vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, considerând ca bază paralelogramul format de $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$)

Unghiuri în spaţiu

1. Unghiul a două plane este unghiul format de vectorii lor normali.

$$\alpha = \text{măs}(\widehat{P_1, P_2}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

2. Unghiul a două drepte este unghiul vectorilor directori ai acestora.

$$\alpha = \text{măs}(\widehat{D_1, D_2}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}$$

3. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan este unghiul format de dreaptă şi proiecţia ei pe plan, adică, este complementul unghiului format de vectorul normal al planului cu vectorul director al dreptei.

$$\alpha = \text{măs}(\widehat{D, P}) \Rightarrow \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$$

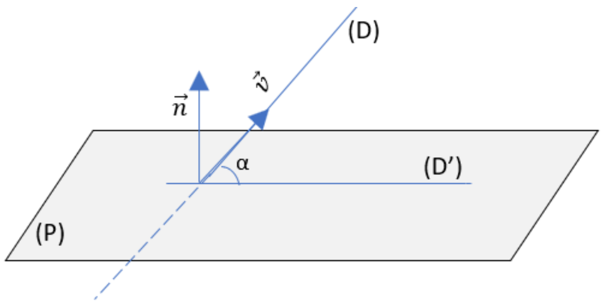


Figura 2.9: Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

2.5 Proiecţii ortogonale. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare.

Dreapta perpendiculară pe un plan dusă printr-un punct dat Fie punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ şi planul $(P) : ax+by+cz+d = 0$. Dacă $(D) \perp (P)$, $A \in (D)$ atunci $(D) : \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ $\quad(\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n})$.

Planul perpendicular pe o dreaptă (D) dus printr-un punct dat Fie punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ şi dreapta $(D) : \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$. Dacă $(P) \perp (D)$, $A \in (P)$ atunci $(P) :\ a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$.

Proiecţia unui punct A pe un plan (P) se obţine intersectând planul cu dreapta perpendiculară pe acesta, dusă prin A. Simetricul punctului A faţă de planul (P) este simetricul lui A faţă de proiecţia sa pe plan.

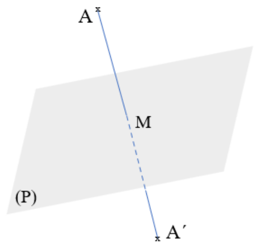


Figura 2.10: Simetricul unui punct faţă de un plan

Proiecţia unui punct A pe o dreaptă (D) se obţine intersectând dreapta cu planul care trece prin A şi este perpendicular pe (D). Simetricul lui A faţă de dreapta (D) este simetricul faţă de proiecţia sa pe dreaptă.

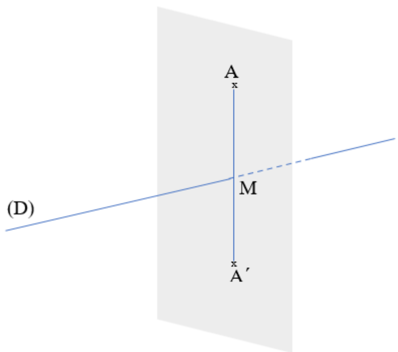


Figura 2.11: Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Proiecţia unei drepte pe un plan se obţine unind proiecţiile a două puncte ale dreptei pe planul dat. De asemenea, se poate folosi metoda planului proiectant: se pune condiţia ca un plan din fasciculul de plane care trec prin dreapta dată, să fie perpendicular pe planul dat. Intersecţia planului obţinut cu planul dat reprezintă proiecţia dreptei date pe plan.

Perpendiculara comună a două drepte este o dreaptă care intersectează dreptele considerate şi care este perpendiculară pe fiecare.

Fie dreapta (D) perpendiculara comună a dreptelor (D_1) şi (D_2). Atunci $(D) = (P_1) \cap (P_2)$ unde (P_1) este planul determinat de (D_1) şi $\overrightarrow{v}$ iar (P_2) este planul determinat de (D_2) şi $\overrightarrow{v}$ $(\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$.

Distanţa dintre două drepte din spaţiu este lungimea segmentului situat pe perpendiculara comună, cuprins între cele două drepte.

2.6 Probleme rezolvate

1. Să se determine ecuaţia normală a planului care conţine punctul $M(2,3,-1)$ şi este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

2. Să se scrie ecuaţia unui plan care:

   a) trece prin punctul $A(-2,3,4)$ şi este paralel cu $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$

   b) conţine punctele $A(2,-3,4)$, $B(3,2,-1)$, $C(0,1,-2)$

3. Să se afle ecuaţia planului mediator al segmentului $[AB]$ unde $A(2,1,3)$ şi $B(-4,3,1)$.

4. Să se afle ecuaţia planului care conţine punctul $M(1,-2,4)$ şi intersectează axele de coordonate la distanţe egale faţă de origine.

5. Să se scrie ecuaţiile canonice şi ecuaţiile parametrice ale dreptei care conţine punctele $A(1,3,2)$ şi $B(-1,3,5)$.

6. Să se determine ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor $(P_1): 2x + y - 3z + 4 = 0$, $(P_2): x - y + 4z - 2 = 0$.

7. Să se determine ecuaţiile dreptei care trece prin $M(2,-1,4)$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ respectiv $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

8. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptei de ecuaţii
$$(D): \begin{cases} 3x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}.$$

9. Să se scrie ecuaţia unui plan care conţine punctul $A(2,-5,3)$ şi este paralel cu planul de ecuaţie $x - 2y - 3z - 7 = 0$.

10. Să se afle ecuaţia planului care trece prin $M(1,0,-1)$ şi este perpendicular pe planele $(P_1): x + y + 4z - 2 = 0$, $(P_2): x + y + 5z - 3 = 0$.

11. Să se afle ecuaţiile canonice ale dreptei care trece prin punctul $A(2,1,1)$ şi este paralelă cu planele de ecuaţii $x - y + z + 2 = 0$ şi $x + y + 2z - 1 = 0$.

12. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât planul $(P): ax - y + 2z - 2 = 0$ să fie paralel cu dreapta $(D): \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$.

13. Să se arate că planele de ecuaţii $x+y+2z+1=0$, $2x-y+2z+4=0$ şi $4x+y+4z+2=0$ se intersectează într-un punct şi să se afle coordonatele acestuia.

14. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât intersecţia planelor $x-y+z-2=0$, $3x-y-2z+2=0$ şi $x+y-4z+\alpha=0$ să fie o dreaptă şi să se scrie ecuaţiile acesteia.

15. Să se stabilească dacă dreptele $(d_1) : \begin{cases} x &= 4t-3 \\ y &= -3t+5 \\ z &= 5t-2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ şi $(d_2) : \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-8}{5}$ sunt coplanare. În caz afirmativ, să se scrie ecuaţia planului format de aceste drepte. Dacă dreptele sunt concurente, să se afle coordonatele punctului de intersecţie.

16. Să se afle ecuaţia planului care conţine punctul $A(1,-1,2)$ şi dreapta $(D) : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$.

17. Să se afle ecuaţia planului paralel cu $(d) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$, care conţine dreapta $(D) : \begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x+y+z+4=0 \end{cases}$.

18. Să se afle ecuaţia planului care trece prin punctul $A(1,-2,3)$ şi conţine dreapta $(D) : \begin{cases} 2x-3y+z-1=0 \\ x+3y+2z+1=0 \end{cases}$.

19. Să se determine ecuaţia planului care conţine dreapta (D) de ecuaţii $\begin{cases} x-y+3z-4=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ şi este perpendicular pe $(P) : x-y+2z+3=0$.

20. Să se afle distanţa de la $A(-2,3,1)$ la planul $(P) : 2x-6y+9z+2=0$.

21. Să se afle distanţa de la origine la dreapta $(D) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

22. Să se calculeze distanţa dintre dreptele
$$(D_1) : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3} \text{ şi } (D_2) : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

23. Să se stabilească poziţia dreptelor
$$\begin{aligned} (D_{1)} &: x-3t-1, y=4t, z=5t \text{ şi} \\ (D_2) &: x=t-3, y=2t-1, z=6t-8. \end{aligned}$$

24. Se consideră dreptele:

$$(D_1): \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ şi } (D_2): \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

   a) Să se arate că dreptele sunt necoplanare.

   b) Să se afle distanţa dintre cele două drepte.

25. Să se determine unghiul format de:

   a) $(D_1): \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{0}$ şi $(D_2): \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

   b) planele $(P_1): x - y + z = 0$ şi $(P_2): 3x - y - z + 2 = 0$

   c) dreapta $(D): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ şi planul $(P): 2x - y - z + 2 = 0$

26. Să se determine simetricul punctului $A(1,2,3)$ faţă de planul

$$(P): 3x - 2y - z + 6 = 0.$$

27. Să se afle coordonatele simetricului punctului $A\,(2,3,2)$ faţă de planul determinat de punctele $M_1\,(1,0,0)$, $M_2\,(0,1,0)$ şi $M_3\,(0,0,1)$.

28. Să se determine simetricul punctului $A(2,-1,-3)$ faţă de dreapta $(d): \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{2}$.

29. Să se determine proiecţia dreptei (d) de intersecţie a planelor $(P_1): x - 3y - 5z + 2 = 0$ şi $(P_2): x + 3y + 5z - 4 = 0$ pe planul yOz.

30. Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor $(D_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{0}$ şi $(D_2): \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Soluţii:

1. Planul determinat de $M(2,3,-1)$ şi vectorul normal $\overrightarrow{n} = (1,-2,2)$ are ecuaţia:

$$x - 2 - 2(y-3) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 6 = 0.$$

Ecuaţia normală a planului este: $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z - 2 = 0.$

2. a) Ecuaţia planului se scrie:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10(x+2)-(y-3)+8(z-4)=0.$$

b) Ecuaţia planului se obţine folosind formula:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-4 \\ 1 & 5 & -5 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(-1,2,2)$. Un vector normal al planului mediator al segmentului $[AB]$ este $\overrightarrow{AB} = (-6,2,-2)$. Rezultă că ecuaţia planului mediator este:

$$-6(x+1)+2(y-2)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-y+z+3=0.$$

4. Un plan care taie axele de coordonate la distanţe egale faţă de origine are ecuaţia: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}-1=0$. Înlocuind coordonatele punctului M rezultă:

$$\frac{1}{a}-\frac{2}{a}+\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=3 \Rightarrow x+y+z-3=0.$$

5. $AB : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2t+1 \\ y &= 3 \\ z &= 3t+2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

6. Dreapta de intersecţie a celor două plane are vectorul director

$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1,-11,-3)$$

iar punctul $M(-1,1,1)$ aparţine dreptei. Ecuaţiile canonice sunt:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-1}{-3}.$$

7. Un vector director al dreptei este:

$$\overrightarrow{v} = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Ecuaţiile canonice ale dreptei sunt:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} = \frac{z-4}{-1}.$$

8. Din ecuaţiile generale ale dreptei se obţine vectorul director:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -2) \Rightarrow |\vec{v}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \vec{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Cosinusurile directoare $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, respectiv $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ implică $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, respectiv $\gamma = \dfrac{3\pi}{4}$.

9. Un plan paralel cu planul $x-2y-3z-7=0$ are ecuaţia $x-2y-3z+d=0$. Punând condiţia să treacă prin punctul $A(2, -5, 3)$, rezultă $d = -3$. Se obţine ecuaţia: $x - 2y - 3z - 3 = 0$.

10. Un plan perpendicular pe planele (P_1) şi (P_2) este perpendicular pe dreapta lor de intersecţie, deci are vector normal vectorul director al dreptei:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (1, -1, 0).$$

Ecuaţia planului care trece prin $M(1, 0, -1)$ şi are vectorul normal $\vec{v}$ este:

$$x - y - 1 = 0.$$

11. O dreaptă paralelă cu două plane secante este paralelă cu dreapta lor comună, deci are acelaşi vector director ca aceasta, adică:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -1, 2).$$

Ecuaţiile canonice ale dreptei sunt: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

12. Din ecuaţia planului deducem că $\vec{n} = a\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$ este un vector normal al lui (P). Un vector director al dreptei (D) este:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\,\vec{i} - 8\,\vec{j} - \vec{k}.$$

$(D) \parallel (P) \Rightarrow \overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{n}$ ortogonali $\Rightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow -5a + 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{6}{5}$.

13. Sistemul format din ecuaţiile celor 3 plane este compatibil determinat, având soluţia unică $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. Rezultă că punctul de intersecţie este $A(1, 2, -2)$.

14. Planele sunt secante dacă sistemul format din ecuaţiile acestora este compatibil nedeterminat. Se obţine $\alpha = 6$.
Ecuaţiile generale ale dreptei de intersecţie se obţin scriind ecuaţiile a două plane, de exemplu $(P_1) \cap (P_2)$.

15. Din ecuaţiile celor două drepte deducem că $A(-3, 5, -2) \in (d_1)$, $B(5, 4, 8) \in (d_2)$ iar $\overrightarrow{v}_1 = (4, -3, 5)$ şi $\overrightarrow{v}_2 = (4, 2, 5)$ sunt vectori directori ai celor două drepte. Deoarece $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 10 \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, dreptele sunt coplanare. Vectorii $\overrightarrow{v}_1$ şi $\overrightarrow{v}_2$ sunt necoliniari, deci dreptele sunt concurente.
Ecuaţia planului care conţine dreptele date este:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z+2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Punctul de intersecţie al dreptelor se află înlocuind coordonatele (x, y, z) din ecuaţiile dreptei (d_2) cu $(4t-3, -3t+5, 5t-2)$. Se obţine $t = 1$ deci punctul comun celor două drepte are coordonatele $(1, 2, 3)$.

16. Planul determinat de un punct A şi o dreaptă (D) are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

unde $B \in (D)$, iar $\overrightarrow{v}(a, b, c)$ este un vector director al dreptei (D).
Pentru $A(1, -1, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v}(2, 3, -1)$, se obţine ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5z + 5 = 0.$$

17. Folosind ecuaţiile dreptei (D) se găseşte punctul $A(-1, 0, -3) \in (D)$ şi vectorul director $\overrightarrow{v}_1 = (2, -3, 1)$. Vectorul director al dreptei (d) este $\overrightarrow{v}_2 = (2, 1, -1)$ şi este vector director pentru orice plan paralel cu (d).
Deoarece $\overrightarrow{v}_1$ şi $\overrightarrow{v}_2$ sunt vectori necoliniari, ecuaţia planului care conţine (D) şi este paralel cu (d) este:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z+3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 4z + 13 = 0.$$

18. Fasciculul de plane determinat de dreapta (D) are ecuaţia:

$$\alpha(2x-3y+z-1)+\beta(x+3y+2z+1)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2\neq 0.$$

Punând condiţia ca un plan care aparţine acestui fascicul să treacă prin punctul $A(1,-2,3)$, se obţine $10\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-5\alpha$. Înlocuind în ecuaţia fasciculului, va rezulta ecuaţia: $x+6y+3z+2=0$.
Altfel, se determină un punct şi un vector director al dreptei (D) şi se foloseşte ecuaţia planului determinat de un punct şi doi vectori directori.

Dreapta (D) are vectorul director $\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=(-9,-3,9)$.

Punctul $B(1,0,-1)\in(D)$. Se obţine $\overrightarrow{AB}=(0,2,-4)$.
Ecuaţia planului care conţine punctul A şi dreapta (D) este:

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{v}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -9 & -3 & 9 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x+6y+3z+2=0.$$

19. Fasciculul de plane având ca axă dreapta dată are ecuaţia:

$$x-y+3z-4+\lambda(x+y-z+2)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Planul (P) are vectorul normal $\overrightarrow{n}=(1,-1,2)$ iar un plan care aparţine fasciculului are vectorul normal $\overrightarrow{n}_\lambda=(1+\lambda,-1+\lambda,3-\lambda)$.
Punând condiţia ca un plan din fascicul să fie perpendicular pe planul (P), adică $\overrightarrow{n}_\lambda\cdot\overrightarrow{n}=0$, se obţine $\lambda=4$. Înlocuind în ecuaţia fasciculului se obţine ecuaţia: $5x+3y-z+4=0$.
Altfel, se poate folosi ecuaţia planului determinat de un punct şi doi vectori directori. Fie, de exemplu, punctul $A(1,-3,0)\in(D)$. Vectorul director al dreptei (D) este $\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-2,4,2)$.
Un plan perpendicular pe planul (P) va avea ca vector director vectorul normal al lui (P), adică, $\overrightarrow{n}=(1,-1,2)$. Astfel, ecuaţia planului care conţine dreapta (D) şi este perpendicular pe planul (P) este:

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{v},\overrightarrow{n}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 5x+3y-z+4=0.$$

20. Distanţa de la punctul $A(-2,3,1)$ la planul $(P): 2x-6y+9z+2=0$ se calculează astfel:

$$d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-4-18+9+2|}{\sqrt{4+36+81}}=1.$$

21. $A(1,0,-1) \in (D)$, $O(0,0,0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$,

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \Rightarrow \mathrm{d}\,(O,D) = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Problema poate fi rezolvată prin metode ale *Analizei matematice*. Astfel, putem afla distanţa de la origine la dreapta dată, calculând minimul distanţei de la O la un punct al dreptei (folosim ecuaţiile parametrice ale dreptei). Minimul funcţiei $f(t) = (t+1)^2 + (2t)^2 + (2t-1)^2 = 9t^2 - 2t + 2$ este $f_{min} = \dfrac{17}{9}$, deci, $d = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

În general, distanţa de la un punct la o dreaptă din spaţiu poate fi calculată rezolvând o problemă de extrem condiţionat.

22. Din ecuaţiile dreptelor date se obţin:
$M_1(0,1,-2) \in (D_1)$, $M_2(2,0,1) \in (D_2)$, $\overrightarrow{v_1}(2,1,-3)$ şi $\overrightarrow{v_2}(3,1,1)$ vectori directori pentru (D_1) respectiv (D_2).

$$d(D_1,D_2) = \frac{|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} = \frac{16}{\sqrt{138}}.$$

23. Se verifică dacă $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$, unde $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = -3$, $y_2 = -1$, $z_2 = -8$ iar $a_1 = 3$, $b_1 = 4$, $c_1 = 5$ şi $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 6$.

$$\begin{vmatrix} -3+1 & -1 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 31 \neq 0 \Rightarrow (D_1),\ (D_2) \text{ necoplanare.}$$

24. a) Vectorul director al dreptei (D_1) este $\overrightarrow{v_1} = (3,4,5)$ iar al dreptei (D_2) este $\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,6)$. Vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ fiind necoliniari, dreptele nu sunt paralele. Dacă dreptele ar fi situate în acelaşi plan, ele ar fi concurente. Înlocuind coordonatele unui punct care aparţine lui (D_1) în ecuaţiile generale ale dreptei (D_2), rezultă sistemul: $\begin{cases} 2(3t-1) - 4t + 5 = 0 \\ 12t - 5t - 5 = 0 \end{cases}$, care este incompatibil. În concluzie, dreptele sunt necoplanare.

b) Pentru aflarea distanţei dintre cele două drepte, se foloseşte formula:

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}.$$

$$M_1(-1,0,0) \in (D_1),\ M_2(-2,1,-2) \in (D_2) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = (-1,1,-2)$$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -31$$

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (14, -13, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{369}$$

Rezultă: $d(D_1, D_2) = \dfrac{31}{3\sqrt{41}}$.

25. a) $\cos\left(\widehat{D_1, D_2}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right)$, unde $\overrightarrow{v_1} = (2,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (-1,2,1)$.

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow (D_1) \perp (D_2).$$

b) $\cos\left(\widehat{P_1, P_2}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)$, unde $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{n_2} = (3,-1,-1)$.

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 3 + 1 - 1 = 3,\ |\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{3},\ |\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{11} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

c) Vectorul director al dreptei (D) este $\overrightarrow{v} = (1,2,-1)$ iar vectorul normal al planului (P) este $\overrightarrow{n} = (2,-1,-1)$.

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 2 - 2 + 1 = 1,\ |\overrightarrow{v}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},\ |\overrightarrow{n}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Se obţine: $\sin\left(\widehat{D, P}\right) = \dfrac{1}{6}$.

26. Ecuaţiile dreptei care trece prin A şi este perpendiculară pe planul (P) sunt: $(D) : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$. Proiecţia punctului A pe plan se obţine intersectând dreapta (D) cu planul (P).

$$M(3t+1, -2t+2, -t+3) \in (P) \Rightarrow t = -\frac{1}{7} \Rightarrow M\left(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}, \frac{22}{7}\right).$$

Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ (B este simetricul punctului A faţă de planul (P)).

$$B(2x_M - x_A, 2y_M - y_A, 2z_M - z_A) \Rightarrow B\left(\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{23}{7}\right).$$

27. Ecuaţia planului determinat de punctele M_1, M_2 şi M_3 este

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x+y+z-1=0.$$

Proiecţia punctului A pe planul $(M_1M_2M_3)$ este intersecţia planului cu dreapta perpendiculară pe plan dusă prin A. Se obţine punctul $M(0,1,0)$. Simetricul lui A faţă de plan este simetricul punctului faţă de M. Rezultă:

$$A'(2x_M-x_A, 2y_M-y_A, 2z_M-z_A) \Rightarrow A'(-2,-1,-2).$$

28. Ecuaţia planului care conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta (d) este:

$$(P):\ x-2+2(y+1)+2(z+3)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z+6=0.$$

Proiecţia punctului A pe dreapta (d) este intersecţia dreptei cu planul (P) şi se determină cu ajutorul ecuaţiilor parametrice ale dreptei (d).

$$M(t+5, 2t-1, 2t) \in (P) \Rightarrow t+5+2(2t-1)+4t+6=0 \Rightarrow t=-1,$$

de unde rezultă $M(4,-3,-2)$. Simetricul lui A faţă de dreapta (d) este:

$$B(2x_M-x_A, 2y_M-y_A, 2z_M-z_A) \Rightarrow B(6,-5,-1).$$

29. Proiecţia unei drepte pe un plan este intersecţia dintre planul proiectant (care trece prin dreaptă şi este perpendicular pe plan) şi planul dat. Planul proiectant aparţine fasciculului de plane care trec prin (d), având ecuaţia:

$$x-3y-5z+2+\lambda\,(x+3y-5z-4)=0 \Rightarrow \overrightarrow{n}_\lambda=(1+\lambda,-3+3\lambda,-5-5\lambda)\,.$$

Un vector normal al planului yOz este $\overrightarrow{n}=(1,0,0)$. Din condiţia $\overrightarrow{n}_\lambda\cdot\overrightarrow{n}=0$ rezultă $\lambda=-1$, de unde se obţine ecuaţia planului proiectant: $y-1=0$.

Proiecţia dreptei (d) pe planul yOz are ecuaţiile: $\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$.

30. Perpendiculara comună a dreptelor (D_1) şi (D_2) este dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2) unde (P_1) este planul determinat de (D_1) şi $\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$) iar (P_2) este planul determinat de (D_2) şi $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(1,-2,5)$$

$$(P_1):\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0,\ (P_2):\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0$$

Ecuaţiile perpendicularei comune a celor două drepte sunt:

$$\begin{cases} x-2y-z+5 &=& 0 \\ 2x+y &=& 0 \end{cases}.$$

2.7 Probleme propuse

1. Să se determine ecuaţia normală a planului care intersectează axele de coordonate în punctele $A(2,0,0)$, $B(0,-6,0)$, $C(0,0,3)$.

2. Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctele $A(1,-1,1), B(0,2,4)$ şi este paralel cu $\overrightarrow{v}=(0,2,1)$.

3. Să se determine ecuaţia unui plan ştiind că $B(1,2,1)$ este piciorul perpendicularei duse din $A(3,-2,1)$ pe plan.

4. Să se afle ecuaţiile canonice şi parametrice ale dreptei de intersecţie a planelor $(P_1): x-y+z-1=0$ şi $(P_2): 2x+y-3=0$.

5. Să se scrie ecuaţiile generale ale dreptei care trece prin $A(1,-5,-3)$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha=45°, \beta=60°, \gamma=120°$.

6. Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctele $A(1,1,1), B(2,2,3)$ şi este perpendicular pe planul $x+y-z=0$.

7. Se consideră dreptele

$$(D_1): \begin{cases} 5x+10y-4=0 \\ 2x-3z-1=0 \end{cases} \text{ şi } (D_2): \begin{cases} x-5y-2=0 \\ 3x-z+5=0 \end{cases}.$$

   Să se afle ecuaţia planului care trece prin (D_1) şi este paralel cu (D_2).

8. Să se scrie ecuaţia planului care:

   a) conţine dreapta $\begin{cases} x+3y+5z-4=0 \\ x-y-2z+7=0 \end{cases}$ şi este paralel cu axa Oy

   b) trece prin origine şi conţine dreapta $D: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

9. Să se afle ecuaţia planului care trece prin dreapta $\begin{cases} 3x+2y+1=0 \\ 2y+3z-2=0 \end{cases}$ şi care este perpendicular pe planul de ecuaţie $3x+2y-z-5=0$.

10. Să se afle ecuaţiile dreptei care:

    a) conţine punctul $A(0,0,1)$ şi este paralelă cu dreapta MN unde $M(3,2,1), N(5,0,1)$

    b) conţine punctul $M(1,2,3)$ şi este perpendiculară pe planul de ecuaţie $3x-2y-z+6=0$

11. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{z-4}{-3}$ să fie perpendiculară pe planul $3x - 2y + bz + 1 = 0$.

12. Fie dreapta (D): $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+1}{p}$ şi planul $(P) : x-3y+6z+7=0$.

    a) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care $(D) \parallel (P)$.

    b) Pentru $p = 1$ să se afle intersecţia dreptei cu planul.

13. Să se arate că dreptele de ecuaţii

$$(d_1) : \begin{cases} 4x + z - 1 &= 0 \\ x - 2y + 3 &= 0 \end{cases} \text{ şi } (d_2) : \begin{cases} 3x + y - z + 4 &= 0 \\ y + 2z - 8 &= 0 \end{cases}$$

sunt concurente şi să se determine punctul de intersecţie.

14. Să se arate că dreptele

$$(d_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{şi} \quad (d_2) : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{6}$$

sunt coplanare şi se afle ecuaţia planului format de acestea.

15. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care planele de ecuaţii $x - y + z = 0$, $3x - y - z + 2 = 0$, $4x - y - 2z + \lambda = 0$ se intersectează după o dreaptă. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale acestei drepte.

16. Fie dreapta $(D) : \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 8 &= 0 \\ x - 2y + z + 3 &= 0 \end{cases}$.

    a) Să se afle punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate.

    b) Să se afle intersecţiile dreptei cu planele de coordonate.

17. Să se calculeze distanţa de la $M(1, 0, 3)$ la planul $x - 2y + 3z + 4 = 0$.

18. Să se calculeze distanţa dintre planele $(P_1) : 2x - y + 3z - 1 = 0$ şi $(P_2) : 4x - 2y + 6z + 3 = 0$.

19. Să se calculeze distanţa de la $A(1, 4, 2)$ la $(D) : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

20. Să se stabilească poziţia dreptelor (D_1) şi (D_2) şi să se calculeze distanţa dintre ele dacă:

    a) $(D_1) : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$, $(D_2) : \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$

b) $(D_1): \begin{cases} x+y-4=0 \\ x-2y+z+5=0 \end{cases}$, $(D_2): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{0}$

21. Să se determine unghiul format de dreptele

$$(D_1): \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2} \text{ şi } (D_2): \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}.$$

22. Să se determine unghiul format de:

   a) dreptele $(D_1): \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=z$ şi $(D_2): \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-3}=z-1$

   b) planele $(P_1): x-y=0$ şi $(P_2): x-2y+z-1=0$

   c) dreapta $(D): \dfrac{x-1}{-2}=y=\dfrac{z+1}{2}$ şi planul $(P): x-y+3=0$

23. Să se determine proiecţia punctului $M(2,-1,3)$ pe:

   a) dreapta $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z-2}{2}$

   b) planul $2x-2y+z+1=0$.

24. Să se afle simetricul punctului $A(1,0,2)$ faţă de planul $x-y+4z-3=0$.

25. Să se afle proiecţia punctului $A(2,-3,1)$ pe $(D): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

26. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(3,-1,2)$ faţă de dreapta $(D): \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$.

27. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2,-3,6)$ faţă de dreapta $(D): \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$ şi să se afle distanţa de la A la (D).

28. Fie punctul $A(4,3,10)$ şi dreapta $(D): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

   a) Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul A şi dreapta (D).

   b) Să se determine simetricul punctului A faţă de dreapta (D).

29. Să se afle ecuaţiile proiecţiei dreptei $(D): \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ pe planul $(P): x+y+z=0$.

30. Fie dreapta $(D): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ şi planul $(P): x+y+z-3=0$.

a) Să se determine ecuaţiile proiecţiei dreptei (D) pe planul (P).

b) Să se determine ecuaţiile simetricei dreptei (D) faţă de planul (P).

31. Fie (D) dreapta de intersecţie a planelor:

$$(P_1):\ x-3y-5z-7=0, \qquad (P_2):\ -x+3y-5z+9=0.$$

Să se afle ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei (D) pe planul yOz.

32. Să se determine ecuaţiile simetricei dreptei (D) faţă de planul (P), unde

$$(D):\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+2y+3z+2=0 \end{cases},\ (P): x+y+z=0.$$

33. Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor:

a) $(D_1): \dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{3}$ şi $(D_2): \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

b) $(D_1): \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ şi $(D_2): \begin{cases} 3x+8y-4=0 \\ 3x-8z-68=0 \end{cases}$

34. Fie dreptele $(D_1):\begin{cases} x-2y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$ şi $(D_2):\begin{cases} x+z+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$.

a) Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte.

b) Să se afle ecuaţiile perpendicularei comune celor două drepte.

35. Fie punctele $A(1,2,1)$, $B(2,0,1)$, $C(0,0,2)$ şi $D(1,-1,1)$.

a) Să se arate că punctele A, B, C şi D sunt necoplanare şi să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$.

b) Să se afle ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor AB şi CD şi distanţa dintre aceste drepte.

36. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A\,(-3,2,-6)$ faţă de planul care trece prin dreptele de ecuaţii

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}.$$

37. Să se determine pe dreapta $(D):\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ un punct egal depărtat de punctele $O(0,0,0)$ şi $A(2,1,2)$.

Capitolul 3

Cercul. Sfera.

3.1 Cercul

Definiţia 3.1.1. *Se numeşte cerc mulţimea punctelor din plan situate la aceeaşi distanţă r (raza) faţă de un punct fix M_0 (centrul cercului).*

Ecuaţia cercului de centru $M_0(x_0, y_0)$ şi rază r este:

$$(C): \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \,. \tag{3.1.1}$$

Ecuaţia generală a cercului este:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \tag{3.1.2}$$

unde $M_0(-a, -b)$ este centrul cercului şi $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ este raza.
Cercul poate fi definit parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \,.$$

Ecuaţia cercului determinat de trei puncte necoliniare M_1, M_2 şi M_3, se obţine folosind formula:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau rezolvând sistemul obţinut înlocuind coordonatele punctelor în ecuaţia generală (3.1.2).

Ecuaţia tangentei la cercul definit prin (3.1.1), în $M_1(x_1, y_1) \in (C)$, se obţine din ecuaţia cercului prin dedublare:

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2.$$

Un punct dat poate să aparţină cercului, să fie situat în interiorul cercului sau în exteriorul acestuia. Poziţia unui punct faţă de un cerc se stabileşte comparând distanţa de la punct la centrul cercului cu raza r.
O dreaptă în raport cu un cerc poate fi: tangentă, secantă sau exterioară. Pentru a stabili poziţia unei drepte date faţă de un cerc comparăm distanţa de la centrul cercului la dreaptă cu raza r.

3.2 Sfera

Definiţia 3.2.1. *Se numeşte sferă mulţimea punctelor din spaţiu situate la aceeaşi distanţă (raza sferei) faţă de un punct fix numit centrul sferei.*

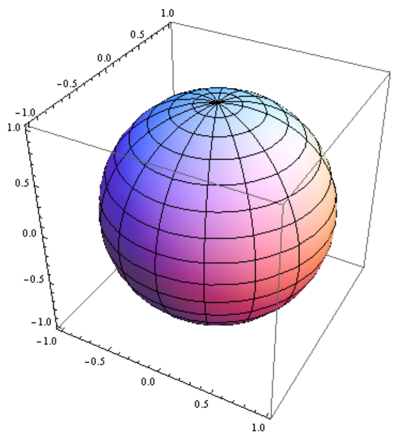


Figura 3.1: Sfera

Din definiţie rezultă ecuaţia sferei de centru $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi rază R:

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{3.2.1}$$

Dacă ecuaţia unei sfere este

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\,, \tag{3.2.2}$$

atunci sfera are centrul $M_0(-a, -b, -c)$ şi raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
Sfera de centru M_0 şi rază R poate fi definită prin ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\varphi \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

Patru puncte necoplanare se află pe o sferă, a cărei ecuaţie este:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pentru a stabili poziţia unei drepte faţă de o sferă, se calculează distanţa de la centrul sferei la dreaptă şi se compară cu raza sferei. O dreaptă poate fi tangentă, secantă sau exterioară unei sfere.
Intersecţia unei sfere cu un plan poate fi: un punct (plan tangent), un cerc (plan secant) sau mulţimea vidă. Pentru a stabili poziţia unui plan faţă de o sferă se compară distanţa de la centrul sferei la plan cu raza sferei.
Ecuaţia planului tangent la sfera (S) într-un punct $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (S)$ se obţine din ecuaţia sferei prin dedublare:

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = R^2.$$

Proprietatea 3.2.2. *Printr-o dreaptă exterioară unei sfere se pot duce două plane tangente la sfera dată.*

3.3 Probleme rezolvate

1. Să se afle ecuaţia cercului cu centrul în $M_0(2, -2)$ şi raza $R = 5$. Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $M(5, -6)$.

2. Să se afle ecuaţia cercului care are centrul $M_0(2, 3)$ şi este tangent dreptei $x - 2y - 1 = 0$ şi să se determine punctul de tangenţă.

3. Fie punctele $A(1, 2)$, $B(0, 3)$ şi $C(-2, 2)$. Să se determine centrul şi raza cercului circumscris ΔABC.

4. Să se afle ecuaţiile tangentelor la cercul $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, paralele cu dreapta $3x - 4y + 1 = 0$.

5. Determinaţi ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(5, 0)$, $B(1, 4)$ şi are centrul pe dreapta de ecuaţie $x + y - 3 = 0$.

6. Să se afle ecuaţiile tangentelor duse din punctul $M(2, -3)$ la cercul

$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 22 = 0.$$

7. Fie $A(2,2,3)$, $B(6,4,7)$. Să se afle ecuaţia sferei având diametrul AB şi să se scrie ecuaţia planului tangent la sferă în punctul A.

8. Să se afle centrul şi raza sferei $x^2+y^2+z^2-12x+2y-6z+21=0$.

9. Să se determine centrul şi raza cercului de secţiune a sferei

$$(S): x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z-22=0$$

cu planul $(P): 3x+y-z+3=0$.

10. Să se afle ecuaţia sferei care are centrul $C(-1,2,3)$ şi este tangentă planului $(P): 2x-3y-6z-23=0$. Să se determine punctul de tangenţă.

11. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la sfera cu centrul $C(2,3,-1)$ şi raza $\sqrt{12}$, în punctele de intersecţie cu dreapta $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-z-3=0 \end{cases}$.

12. Fie sfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+8=0$. Să se afle ecuaţiile planelor tangente la sferă, care sunt paralele cu planul $2x+y-z+1=0$.

Soluţii:

1. Ecuaţia cercului este:

$$(x-2)^2+(y+2)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+4y-17=0.$$

Coordonatele lui M verifică ecuaţia cercului. Ecuaţia tangentei în M este:

$$(5-2)(x-2)+(-6+2)(y+2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y-39=0.$$

2. Raza cercului este distanţa de la centrul cercului la tangenta dată.

$$R=\frac{|2-2\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}.$$

Ecuaţia cercului este:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5.$$

Pentru a afla coordonatele punctului de tangenţă, se rezolvă sistemul format din ecuaţia cercului şi ecuaţia tangentei. Se obţine punctul $M(3,1)$.

3. Punctele A,B,C verifică ecuaţia generală a cercului (3.1.2). Se obţine sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2a+4b+c &= -5 \\ 6b+c &= -9 \\ -4a+4b+c &= -8 \end{cases}$, cu soluţia: $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=0 \end{cases}$.

Ecuaţia cercului este:

$$x^2+y^2+x-3y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

Centrul cercului este $M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ iar raza este $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. Din ecuaţia cercului rezultă centrul $M_0(3,-2)$ şi raza $R=4$. Tangentele la cerc paralele cu dreapta $3x-4y+1=0$, au ecuaţia de forma $3x-4y+n=0$. Folosind proprietatea că distanţa de la centrul cercului la o dreaptă care este tangentă cercului, este egală cu raza, se obţine:

$$\frac{|3\cdot 3-4\cdot(-2)+n|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|n+17|}{5}=4 \Rightarrow |n+17|=20.$$

Rezultă $n_1=3$ şi $n_2=-37$. Ecuaţiile tangentelor sunt:

$$3x-4y+3=0, \quad 3x-4y-37=0.$$

5. Centrul cercului se află intersectând dreapta dată cu perpendiculara pe coarda AB dusă prin mijlocul acesteia.

Coarda AB are mijlocul $M(3,2)$. Panta dreptei AB este $m=-1$, de unde rezultă că perpendiculara în M pe AB are ecuaţia $x-y-1=0$. Intersecţia dreptei obţinute cu dreapta $x+y-3=0$ este $M_0(2,1)$.

Raza cercului este $M_0A=\sqrt{10}$. Ecuaţia cercului este:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10.$$

6. Ecuaţia cercului se scrie $(x-1)^2+(y+5)^2=4$ deci cercul are centrul $M_0(1,-5)$ şi raza $r=2$. Deoarece $M_0M=\sqrt{5}>2$ rezultă că punctul M este exterior cercului, deci prin M trec două tangente la cerc. Determinăm punctele de tangenţă. Ecuaţia unei drepte tangente la cerc este

$$x_1x+y_1y-x_1-x+5y_1+5y+22=0.$$

Înlocuind coordonatele punctului M în ecuaţia tangentei se obţine relaţia $x_1+2y_1+5=0$. Punctul $M_1(x_1,y_1)$ aparţine cercului, deci coordonatele lui verifică ecuaţia acestuia. Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} x_1+2y_1+5=0 \\ x_1^2+y_1^2-2x_1+10y_1+22=0 \end{cases}.$$

Se obţin punctele $M_1(1,-3)$ şi $M_2\left(\frac{13}{5},-\frac{19}{5}\right)$. Ecuaţiile tangentelor sunt:

$$y+3=0, \text{ respectiv } 4x+3y+1=0.$$

7. Centrul sferei este mijlocul segmentului AB iar $R = \dfrac{AB}{2} = AM$.
Obţinem: $M(4,3,5)$ şi $AM = \sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2+(5-3)^2} = 3$.
Ecuaţia sferei este $(S) : (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$.

8. Centrul sferei este $C(6,-1,3)$ iar raza $R = \sqrt{36+1+9-21} = 5$.

9. Sfera are centrul $M(2,3,1)$ şi raza $R = 6$.

$$d(M,(P)) = MN = \frac{|3\cdot 2+3-1+3|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} < 6\,,$$

deci planul (P) intersectează sfera după un cerc cu centrul în N şi rază r. Coordonatele lui N se determină intersectând planul (P) cu dreapta MN. Din $MN \perp (P)$ rezultă:

$$MN : \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$N\,(2+3t, 3+t, 1-t) \in (P) \Rightarrow 3(2+3t)+3+t-1+t+3 = 0 \Rightarrow t = -1$.
Se obţine $N(-1,2,2)$.
Raza r se calculează din relaţia: $r^2 = R^2 - MN^2$. Rezultă $r = 5$.

10. Raza sferei este distanţa de la centrul C la planul tangent:

$$R = \frac{|-2-3\cdot 2-6\cdot 3-23|}{\sqrt{4+9+36}} = 7.$$

Ecuaţia sferei este:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 49.$$

Punctul de tangenţă este intersecţia planului (P) cu perpendiculara dusă din centru pe plan.

Din sistemul $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-6} \\ 2x-3y-6z-23 = 0 \end{cases}$ rezultă $A(1,-1,-3)$.

11. Sfera are ecuaţia: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 12$.
Din sistemul format de ecuaţia sferei şi ecuaţiile dreptei rezultă punctele $A(4,1,1)$ şi $B(0,5,-3)$. Planele tangente sferei în aceste puncte au ecuaţiile:

$$x-y+z-4 = 0, \text{ respectiv } x-y+z+8 = 0.$$

Se observă că planele sunt paralele. Punctele A şi B sunt diametral opuse (mijlocul segmentului AB este centrul sferei).

12. Ecuaţia sferei se scrie: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$, deci sfera are centrul $C(2,-1,3)$ şi raza $R=\sqrt{6}$.
Un plan tangent paralel cu planul $(P): 2x+y-z+1=0$ are ecuaţia $2x+y-z+d=0$. Din condiţia de tangenţă, rezultă:

$$d(C,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|4-1-3+d|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow |d|=6 \Leftrightarrow d=\pm 6.$$

Se obţin planele: $2x+y-z+6=0$, respectiv $2x+y-z-6=0$.

3.4 Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul $M(3,-4)$ şi raza $R=5$. Să se afle punctele de intersecţie ale cercului cu axele de coordonate.

2. Fie cercul de ecuaţie $x^2+y^2-16x+4y+18=0$.

   a) Să se determine centrul şi raza cercului.

   b) Să se afle ecuaţiile tangentelor la cerc în punctele de intersecţie cu dreapta de ecuaţie $x+y=0$.

3. Să se afle ecuaţiile tangentelor la cercul $(C): x^2+y^2-10x+2y+6=0$, paralele cu dreapta $2x+y-5=0$.

4. Să se arate că tangentele duse din punctul $A(4,2)$ la cercul de ecuaţie $x^2+y^2=10$, sunt perpendiculare.

5. Să se afle ecuaţia sferei determinată de:

   a) centrul $C(3,-4,2)$ şi raza $R=3$;

   b) punctele necoplanare $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,1,1)$ şi $D(2,1,2)$.

6. Fie $A(-2,0,3)$, $B(6,4,3)$. Să se afle ecuaţia sferei având diametrul AB şi ecuaţia planului tangent la sferă în punctul A.

7. Fie sfera de ecuaţie $(S): x^2+y^2+z^2-8x-6y-10z+41=0$.

   a) Să se afle centrul şi raza sferei.

   b) Să se afle ecuaţia planului tangent la sferă în punctul $A(6,4,7)$.

8. Să se determine centrul şi raza cercului de secţiune a sferei

   $$(S): x^2+y^2+z^2-2x-6y+8z-13=0$$

   cu planul $(P): 3x+y-2z=0$.

9. Să se arate că planul $(P): x-y+z-3=0$ este secant sferei de centru $C(1,-2,-3)$ şi rază $R=4$ şi să se determine centrul şi raza cercului de secţiune.

10. Să se scrie ecuaţia unei sfere ştiind că are centrul $C(1,2,1)$ şi este tangentă planului $(P): 2x+y+2z-3=0$.

11. Stabiliţi poziţia planului (P) faţă de sfera $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ pentru:

    a) $(P): 2x+y+2z+3=0$;

    b) $(P): 8x+4y+z+2=0$;

    c) $(P): x+y+z+4=0$.

    În caz de tangenţă, să se afle coordonatele punctului de tangenţă. În cazul unui plan secant, să se afle centrul şi raza cercului de secţiune.

12. Să se demonstreze că prin dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases} 8x-11y+8z-30 & = & 0 \\ x-y-2z & = & 0 \end{cases}$$

    se pot duce două plane tangente la sfera de ecuaţie

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0$$

    şi să se determine ecuaţiile lor.

13. Fie sfera $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-11=0$. Să se afle ecuaţiile planelor tangente la sferă, care sunt paralele cu planul $4x+3z-17=0$.

14. Să se determine planele tangente la sfera $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+2=0$ care trec prin dreapta $(D): \begin{cases} y=5 \\ x+z=2 \end{cases}$.

15. Să se afle ecuaţia sferei care trece prin cercul $(C): \begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi prin punctul $M(1,2,-1)$.

16. Să se afle ecuaţia sferei care trece prin origine şi prin cercul definit prin ecuaţiile $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 2x-3y+5z=5 \end{cases}$.

17. Să se calculeze cea mai mică distanţă de la punctul $A(-2,6,-3)$ la sfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Capitolul 4

Conice şi cuadrice

4.1 Conice

Definiţia 4.1.1. *Se numeşte conică o curbă plană pentru care raportul distanţelor de la un punct al curbei la un punct fix numit* ***focar****, respectiv la o dreaptă fixă numită* ***directoare****, este constant. Acest raport se notează* e *şi se numeşte* ***excentricitatea*** *conicei.*

Ecuaţia unei conice este:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{4.1.1}$$

Denumirea de conică este justificată de faptul că aceste curbe se obţin prin intersecţia unui con circular drept cu un plan. Conicele se împart în conice propriu-zise şi conice degenerate.
Conicele propriu-zise (nedegenerate) sunt: elipsa, hiperbola, parabola.

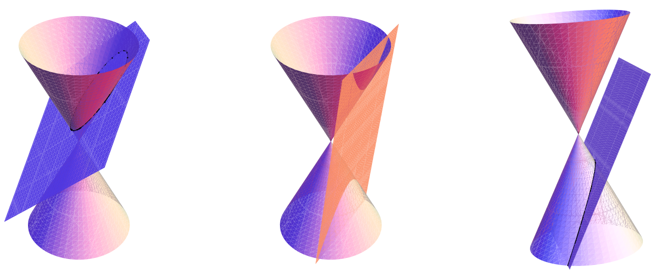


Figura 4.1: Conice

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct situat pe conica definită prin ecuaţia (4.1.1) atunci tangenta la conică în acest punct are ecuaţia:

$$a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

4.1.1 Ecuaţiile canonice ale conicelor

Elipsa

Definiţia 4.1.2. *Se numeşte elipsă mulţimea punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două puncte fixe numite focare este constantă.*

Un punct M aparţine elipsei (E) dacă are loc relaţia:

$$MF_1 + MF_2 = 2a, \ a > 0.$$

MF_1 şi MF_2 se numesc razele vectoare ale lui M.
Punctele $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$ sunt focarele elipsei iar vârfurile elipsei sunt $A_1(a, 0), A_2(-a, 0)$, respectiv $B_1(0, b), B_2(0, -b)$, $a, b, c > 0, a > b$.
Ecuaţia canonică a elipsei este

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Excentricitatea elipsei este $e = \dfrac{c}{a} \in (0, 1)$.

Ecuaţiile directoarelor elipsei sunt: $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Ecuaţiile parametrice ale elipsei sunt: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$.

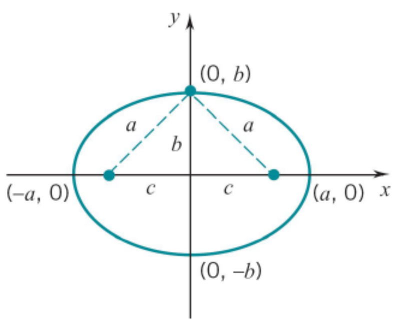


Figura 4.2: Elipsa

Tangenta la elipsă într-un punct $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ este:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Perpendiculara dusă prin $M_0 \in (E)$ pe tangenta în M_0 la elipsă, se numeşte normala la elipsă în punctul M_0.
Normala şi tangenta într-un punct $M_0 \in (E)$ sunt bisectoarea interioară, respectiv bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{F_1 M_0 F_2}$.
Proprietatea optică a elipsei: o rază de lumină care pleacă dintr-un focar se reflectă în celălalt focar.

Hiperbola

Definiţia 4.1.3. *Se numeşte hiperbolă mulţimea punctelor din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la două puncte fixe numite focare este constantă (adică,* $|MF_1 - MF_2| = 2a$*,* $a > 0$*).*

Punctele $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$ sunt focarele hiperbolei.
Ecuaţia canonică a hiperbolei este

$$(H): \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Excentricitatea hiperbolei este $e = \dfrac{c}{a} > 1$.

Ecuaţiile directoarelor hiperbolei sunt: $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei sunt: $\begin{cases} x = \pm a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

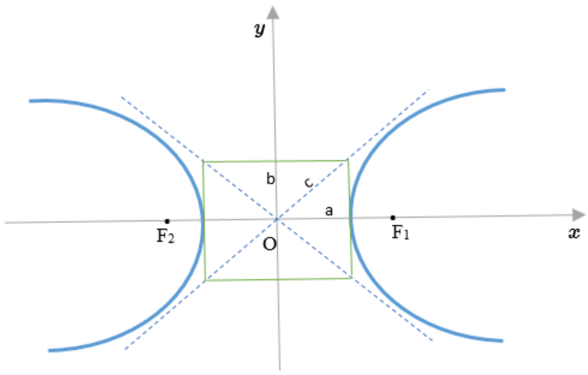


Figura 4.3: Hiperbola

Asimptotele hiperbolei sunt dreptele $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.
Tangenta la hiperbolă într-un punct $M_0(x_0, y_0) \in (H)$ este:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Normala la hiperbolă în punctul $M_0 \in (H)$ este perpendiculara dusă prin M_0 pe tangenta în M_0 la hiperbolă.
Tangenta şi normala într-un punct $M_0 \in (H)$ sunt bisectoarea interioară, respectiv bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{F_1M_0F_2}$.

Parabola

Definiţia 4.1.4. *Se numeşte parabolă mulţimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit focar şi o dreaptă fixă numită directoare.*

Focarul parabolei este $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ iar ecuaţia directoarei este $x=-\frac{p}{2}$.
Excentricitatea parabolei este: $e=\frac{c}{a}=1$.
Ecuaţia canonică a parabolei este $(P):\ y^2=2px$.

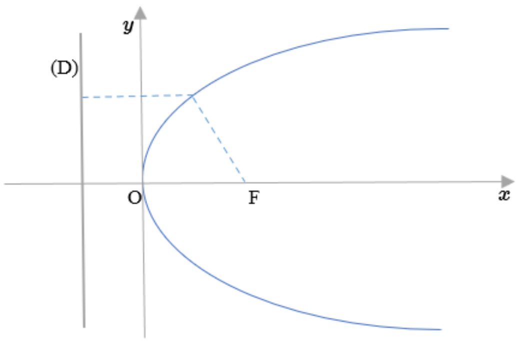


Figura 4.4: Parabola

Tangenta la parabolă într-un punct $M_0(x_0,y_0)\in(P)$ este:

$$y_0y=p(x+x_0).$$

Conice degenerate

O conică degenerată poate avea una dintre următoarele ecuaţii:

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (drepte concurente)

b) $x^2-a^2=0$ (drepte paralele)

c) $x^2=0$ (drepte confundate)

d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (punctul)

e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$ (mulţimea vidă)

4.1.2 Reducerea unei conice la forma canonică

Unei conice date prin ecuaţia generală (4.1.1) i se ascociază următorii determinanţi simetrici:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Conicele se pot clasifica în funcţie de Δ şi δ.

1. $\Delta \neq 0$
   (i) $\delta > 0 \Rightarrow$ elipsă
   (ii) $\delta < 0 \Rightarrow$ hiperbolă
   (iii) $\delta = 0 \Rightarrow$ parabolă
2. $\Delta = 0$
   (i) $\delta > 0 \Rightarrow$ un punct (centrul conicei)
   (ii) $\delta < 0 \Rightarrow$ două drepte concurente în centrul conicei
   (iii) $\delta = 0 \Rightarrow$ două drepte paralele

Definiţia 4.1.5. *Fie (C) o conică definită prin ecuaţia (4.1.1). Un punct $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte centru de simetrie al conicei dacă pentru orice punct $M \in (C)$, simetricul lui faţă de M_0 aparţine conicei.*

Coordonatele *centrului conicei* se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & = & 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} & = & 0 \end{cases}. \tag{4.1.2}$$

Punctele de intersecţie ale unei conice cu *axele de simetrie* ale acesteia se numesc *vârfurile conicei.*

Proprietatea 4.1.6. *Direcţiile axelor de simetrie ale unei conice cu centru de simetrie unic sunt rădăcinile ecuaţiei*

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0. \tag{4.1.3}$$

Ecuaţiile axelor conicei sunt:

$$f'_x(x,y) + m_1 f'_y(x,y) = 0, \ f'_x(x,y) + m_2 f'_y(x,y) = 0.$$

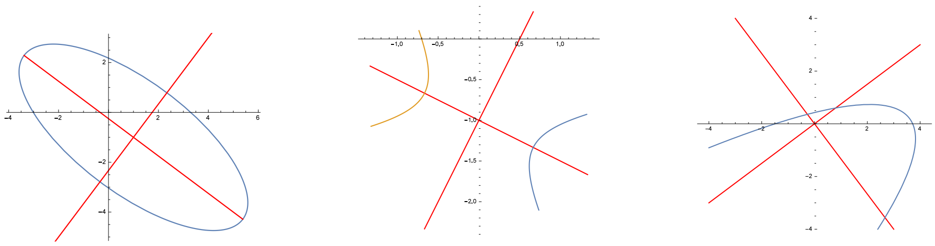


Figura 4.5: Reducerea la forma canonică

Pentru a obţine ecuaţia redusă (forma canonică) a unei conice dată prin ecuaţia generală, se efectuează o translaţie şi o rotaţie.

Translaţia. Se determină (dacă există) centrul conicei şi se efectuează translaţia:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}.$$

După translaţia reperului, centrul de simetrie al conicei va fi originea sistemului de coordonate.

Observaţia 4.1.7. *Dacă* $\delta \neq 0$ *atunci are loc egalitatea* $f(x_0, y_0) = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Rotaţia. Se roteşte reperul în jurul centrului M_0, în sens pozitiv, unghiul de rotaţie fiind dat de ecuaţia $\operatorname{tg} \alpha = m$, unde m este rădăcina pozitivă a ecuaţiei (4.1.3). Se folosesc relaţiile:

$$\begin{cases} x' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y' = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}.$$

Se folosesc formulele: $\sin^2 \alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

După efectuarea rotaţiei, axele de simetrie ale conicei vor fi axele de coordonate.

Proprietatea 4.1.8. *Dacă* $\delta \neq 0$ *(conica are centru) şi* $\Delta \neq 0$ *atunci ecuaţia canonică a conicei este:*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde λ_1, λ_2 *sunt soluţiile ecuaţiei* $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0$.

4.2 Cuadrice

Cuadricele sunt suprafeţe definite cu ajutorul unor ecuaţii algebrice de gradul al doilea. Ecuaţia generală a unei cuadrice este:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

unde cel puţin unul dintre coeficienţii a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul.

Cuadricele pot fi:

- cuadrice propriu-zise: elipsoid, sferă, hiperboloid cu o pânză, hiperboloid cu două pânze, paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic

- cuadrice degenerate: cilindru, con, perechi de plane.

Cuadricele sunt folosite în mecanică, geodezie, tehnică. De exemplu, hiperboloidul cu o pânză este folosit în diverse construcţii industriale (turnuri de răcire, coşuri de fum) sau, la fel ca şi conul de rotaţie, la transmiterea mişcării de rotaţie între doi arbori (roţi dinţate hiperbolice respectiv conice). Paraboloidul eliptic este folosit la antene parabolice, reflectoare, staţii de captare a energiei solare iar paraboloidul hiperbolic se foloseşte în proiectarea unor acoperişuri sau în alte construcţii industriale.

Prin transformări geometrice (translaţie şi rotaţie), ecuaţiile cuadricelor pot fi reduse la forma canonică. În continuare, vom prezenta cuadricele prin ecuaţiile reduse.

4.2.1 Cuadrice prin ecuaţii reduse

Elipsoidul

Definiţia 4.2.1. *Se numeşte elipsoid mulţimea punctelor din spaţiu care verifică ecuaţia*

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4.2.1}$$

Numerele reale şi pozitive a, b, c se numesc semiaxele elipsoidului.

Dacă $a=b=c=R$, se obţine ecuaţia:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad \text{(sfera cu centrul în origine şi raza } R\text{)}.$$

Vârfurile elipsoidului sunt punctele $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$.

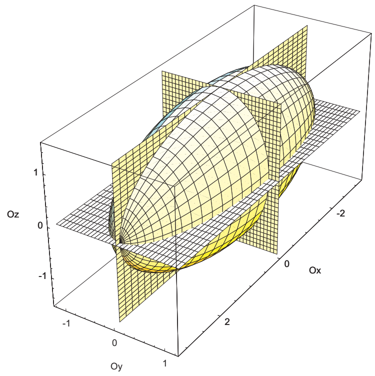


Figura 4.6: Elipsoid

Teorema 4.2.2. *Planul tangent la elipsoidul definit prin (4.2.1), în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (E)$ are ecuaţia:*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Observaţii 4.2.3. *a) Pentru elipsoidul definit prin ecuaţia redusă, axele de coordonate sunt axe de simetrie, planele de coordonate sunt plane de simetrie iar originea $O(0, 0, 0)$ este centru de simetrie.*
b) Denumirea elipsoidului se justifică prin faptul că secţiunile acestuia prin plane paralele cu planele de coordonate sunt elipse.
De exemplu, secţionând elipsoidul cu plane paralele cu planul xOy se obţine o familie de elipse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = \alpha \end{cases}, \ |\alpha| < c.$$

Dacă $a = b$ atunci (E) este un elipsoid de rotaţie fiind generat prin rotirea în jurul axei Oz a unei elipse situate în planul xOz sau yOz, având ecuaţiile:

$$(E_1) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ respectiv } (E_2) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Elipsoidul poate fi definit parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\varphi \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, \pi].$$

Hiperboloidul

a) Hiperboloidul cu o pânză

$$(H_1): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{4.2.2}$$

Intersecţiile hiperboloidului definit prin (4.2.2) cu plane paralele cu xOy sunt elipse. Intersecţia cu planul xOy se numeşte *elipsa colier* şi are ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Intersectând hiperboloidul cu o pânză cu un plan paralel cu xOz de ecuaţie $y = h$ se obţine o hiperbolă dacă $|h| \neq b$, respectiv o pereche de drepte concurente dacă $|h| = b$. Analog, interescţia lui (H_1) cu un plan paralel cu yOz de ecuaţie $x = h$ este o hiperbolă dacă $|h| \neq a$ respectiv o pereche de drepte concurente dacă $|h| = a$.
Dacă $a = b$ atunci (H_1) este un hiperboloid de rotaţie. Cuadrica se obţine prin rotaţia hiperbolei de ecuaţie $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ în jurul axei Oz.
O parametrizare a hiperboloidului definit prin ecuaţia implicită (4.2.2) este:

$$x = a\cos u \cosh v, \ y = b \sin u \cosh v, \ z = c \sinh v, \ u \in [0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Alte ecuaţii pentru } H_1: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

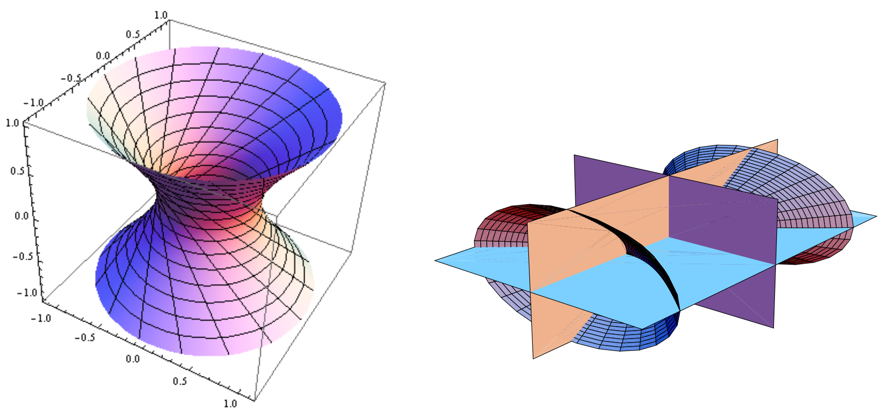


Figura 4.7: Hiperboloidul

b) Hiperboloidul cu două pânze

$$(H_2): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \tag{4.2.3}$$

Vârfurile hiperboloidului cu două pânze sunt punctele de intersecţie cu axa transversă Oz şi au coordonatele $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$.
Intersectând hiperboloidul definit prin ecuaţia (4.2.3) cu un plan paralel cu xOy, de ecuaţie $z = h$, se obţine o elipsă dacă $|h| > c$, mulţimea vidă (elipsă imaginară) dacă $|h| < c$ respectiv unul dintre vârfuri dacă $|h| = c$.
Curbele de intersecţie ale cuadricei cu plane paralele cu yOz sau xOz sunt hiperbole.
O parametrizare a hiperboloidului definit prin ecuaţia implicită (4.2.3) este:

$$x = a \cos u \sinh v, \ y = b \sin u \sinh v, \ z = \pm c \cosh v, \ u \in [0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

Hiperboloidul este o suprafaţă simetrică în raport cu originea sistemului de coordonate, cu axele de coordonate şi cu planele de coordonate.
Ecuaţiile planelor tangente se pot obţine prin dedublare.

Paraboloidul

a) Paraboloidul eliptic

$$(P_e): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{4.2.4}$$

Ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P_e)$ este:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = z + z_0.$$

Dacă se intersectează paraboloidul definit prin (4.2.4) cu un plan $z = h$ se obţine o elipsă dacă $h > 0$, mulţimea vidă (elipsă imaginară) dacă $h < 0$, respectiv originea $O(0, 0, 0)$ dacă $h = 0$. Curbele de intersecţie ale cuadricei cu plane paralele cu yOz sau xOz sunt parabole.
Dacă $a = b$, paraboloidul se obţine prin rotaţia parabolei $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$ în jurul axei Oz.
O parametrizare a paraboloidului eliptic definit prin (4.2.4) este:

$$x = 2au \cos v, \ y = 2bu \sin v, \ z = 2u^2, \ u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi).$$

O altă parametrizare este: $x = 2au, y = 2bv, z = 2(u^2 + v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

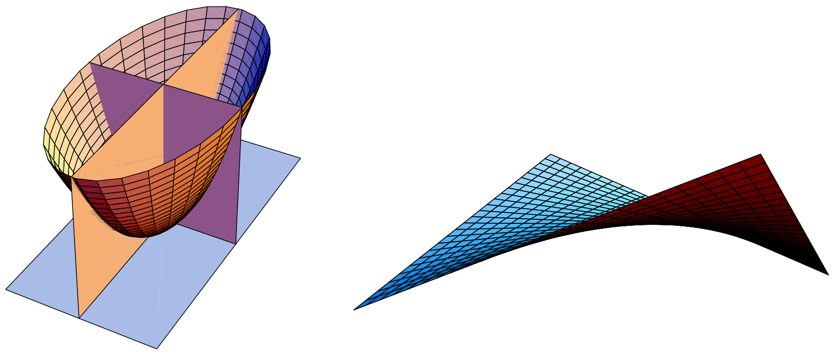


Figura 4.8: Paraboloidul

b) Paraboloidul hiperbolic

$$(P_h): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{4.2.5}$$

Dacă se intersectează paraboloidul definit prin (4.2.5) cu plane $z = h$, se obţin hiperbole iar prin intersecţia cu plane paralele cu xOz sau yOz se obţin parabole.
Paraboloidul hiperbolic nu este suprafaţă de rotaţie. (P_h) definit prin ecuaţia (4.2.5) se obţine prin translaţia unei parabole de ecuaţie $y^2 = -2b^2 z$ pe o parabolă de ecuaţie $x^2 = 2a^2 z$.
O parametrizare pentru (P_h) definit prin (4.2.5) este:

$$x = 2au\cosh v,\ y = 2bu\sinh v,\ z = 2u^2,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Altă parametrizare este: $x = 2au, y = 2bv, z = 2(u^2 - v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$.
Paraboloidul definit prin (4.2.4) sau (4.2.5) are Oz axă de simetrie şi planele xOz, yOz plane de simetrie.

Cele mai cunoscute *cuadrice degenerate* sunt cilindrul şi conul.

Cilindrul

Cilindrul este o cuadrică degenerată care poate fi de mai multe tipuri.

a) **Cilindrul eliptic** are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ a, b > 0.$$

Ecuaţii parametrice: $x = a\cos v$, $y = b\sin v$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$.
Intersectând un cilindru eliptic cu un plan $z = h$, se obţine o elipsă.
În particular, un cilindru circular are ecuaţia: $x^2 + y^2 = a^2$.

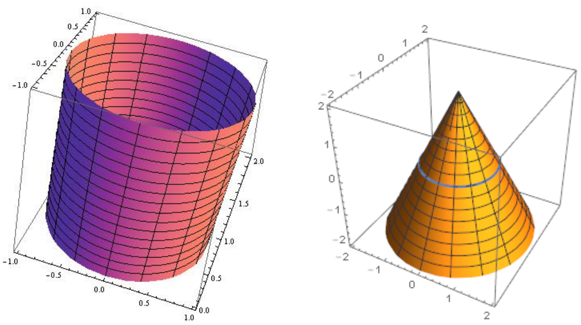


Figura 4.9: Cilindru. Con.

b) **Cilindrul hiperbolic** are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ a, b > 0.$$

Ecuaţii parametrice: $x = a\cosh v$, $y = b\sinh v$, $z = u$, $u, v \in \mathbb{R}$.
Intersecţia unui cilindru hiperbolic cu un plan $z = h$, este o hiperbolă.

c) **Cilindrul parabolic** are ecuaţia:

$$y^2 = 2px\,.$$

Intersecţia cilindrului parabolic cu un plan $z = h$, este o parabolă.

Conul

Conul este o cuadrică degenerată definită prin ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\ \text{, unde } a, b, c > 0.$$

Ecuaţii parametrice:

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = cu,\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi).$$

Dacă $a = b$ atunci cuadrica este un con de rotaţie.
Conul este o suprafaţă simetrică în raport cu planele de coordonate, cu axele de coordonate şi cu originea sistemului de coordonate.
Intersectând un con cu un plan paralel cu planul xOy se obţine elipsa:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}.$$

Intersecţia unui con de rotaţie cu un plan de ecuaţie $z = h$ este un cerc. Curbele de intersecţie ale conului cu plane paralele cu xOz sau yOz sunt hiperbole.

Alte exemple de cuadrice degenerate

- pereche de plane secante: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$
- pereche de plane paralele: $x^2 - a^2 = 0$
- pereche de plane confundate: $x^2 = 0$
- dreaptă: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$
- punct: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$
- mulţimea vidă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \text{ (elipsoid imaginar)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \text{ (cilindru eliptic imaginar)}$$

$$x^2 + a^2 = 0,\ a \neq 0 \text{ (pereche de plane paralele imaginare)}$$

4.2.2 Generatoare rectilinii

Unele cuadrice sunt suprafeţe riglate, adică sunt suprafeţe generate de mişcarea unei drepte variabile.

Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză
Hiperboloidul cu o pânză definit prin ecuaţia (4.2.2) este generat de două familii de drepte de ecuaţii:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} &= \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} &= \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{şi}$$

$$(G_\mu) : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} &= \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} &= \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

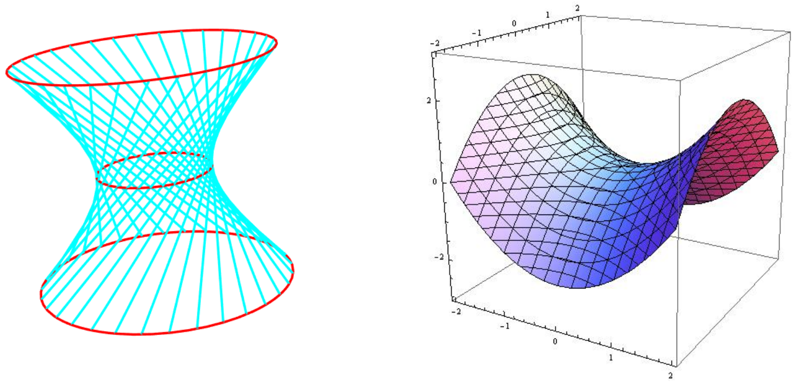


Figura 4.10: Generatoare rectilinii (H_1), (P_h)

Generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic
Paraboloidul hiperbolic definit prin ecuaţia (4.2.5) este generat de două familii de drepte de ecuaţii:

$$(G_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} &= \lambda z\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} &= \dfrac{2}{\lambda}\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ şi } (G_\mu):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} &= \mu z\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} &= \dfrac{2}{\mu}\end{cases},\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Familiile de generatoare definite pentru hiperboloidul cu o pânză, respectiv cele definite pentru paraboloidul hiperbolic au aceleaşi proprietăţi:

(i) Prin orice punct al cuadricei trece câte o generatoare din fiecare familie.

(ii) Două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează.

(iii) Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.

4.3 Probleme rezolvate

1. Să se determine semiaxele şi excentricitatea elipsei care are ecuaţia $4x^2+6y^2=24$.

2. Să se determine ecuaţia canonică a elipsei care trece prin punctele $M\left(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $N\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3},-2\right)$.

3. Să se determine ecuaţia canonică a elipsei care are semiaxa mică 6 şi excentricitatea $0,5$.

4. Fie elipsa de ecuaţie $x^2 + 4y^2 = 25$.

   a) Să se determine focarele elipsei.

   b) Să se afle ecuaţiile tangentelor la elipsă în punctele de intersecţie cu dreapta $x + 2y - 7 = 0$.

5. Fie elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Să se afle ecuaţiile tangentelor la elipsă, care sunt paralele cu dreapta $x - 2y - 3 = 0$.

6. Fie hiperbola definită prin ecuaţia $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. Să determine excentricitatea hiperbolei şi să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M(6, 2)$.

7. Să se determine ecuaţia hiperbolei care trece prin $M\left(\dfrac{3\sqrt{13}}{2}, 3\right)$ şi are asimptotele $y = \pm\dfrac{2}{3}x$.

8. Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 18x$.

   a) Să se determine focarul şi ecuaţia directoarei parabolei.

   b) Să se determine ecuaţiile tangentelor la parabolă în punctele de intersecţie cu dreapta de ecuaţie $6x + y - 6 = 0$.

9. Să se determine pe parabola $(P) : y^2 = 8x$ un punct situat la o distanţă egală cu 4 de directoarea parabolei.

10. Să se afle tangenta la parabola $y^2 = 12x$ care este paralelă cu dreapta $3x - 2y + 30 = 0$ şi să se calculeze distanţa de la tangentă la dreaptă.

11. Să se reducă la forma canonică ecuaţiile conicelor următoare:

    a) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

    b) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

12. Fie elipsoidul $(E) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$. Să se determine:

    a) curbele de intersecţie ale elipsoidului cu planele de coordonate;

    b) punctele de intersecţie ale elipsoidului cu axele de coordonate.

13. Să se determine planele tangente la elipsoidul $(E) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ în punctele de intersecţie cu dreapta $(d) : x = y = z$.

14. Să se determine planele tangente la elipsoidul $(E) : 4x^2+16y^2+8z^2 = 1$, care sunt paralele cu planul $(P) : x - 2y + 2z + 17 = 0$.

15. Să se afle ecuaţia planului tangent la cuadrica $(P_e) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$ în punctul de intersecţie cu dreapta $(d) : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = z$.

16. Să se afle ecuaţia planului tangent la cuadrica $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$, care este perpendicular pe dreapta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

17. Să se determine unghiul format de generatoarele rectilinii ale hiperboloidului $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$, care trec prin punctul $M(3, 4, 2)$.

18. Fie cuadrica $(P_h) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = y$ şi punctul $M(3, 1, 0)$.

    a) Să se scrie ecuaţia planului tangent la cuadrică în punctul M.

    b) Să se afle ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale cuadricei, care trec prin punctul M.

19. Să se determine generatoarele rectilinii care trec prin M pentru:

    a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \;\; M\,(1, 1, -1)$

    b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = z, \quad M\,(-2, 0, 1)$

    c) $x^2 - y^2 = 2z, \quad M(0, 0, 0)$

20. Să se determine ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16} = 1$, care sunt paralele cu planul $(P) : 6x+4y+3z-17 = 0$.

Soluţii:

1. Pentru elipsa dată avem $a^2 = 6$ şi $b^2 = 4$ deci semiaxa mare este $a = \sqrt{6}$ şi semiaxa mică este $b = 2$. Excentricitatea elipsei este $e = \dfrac{c}{a}$ unde $c^2 = a^2 - b^2 = 2$. Rezultă $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Punctele M şi N sunt situate pe elipsa $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$$\left.\begin{array}{l} M\left(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)\Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{27}{4b^2}=1 \\ N\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3},-2\right)\in(E)\Rightarrow \dfrac{20}{9a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2=4,\ b^2=9$$

Ecuaţia elipsei este: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3. Ştiind că $b=6$, ecuaţia elipsei este: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{a^2-36}{a^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow a^2=48.$$

Rezultă ecuaţia: $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

4. a) $a^2=25$, $b^2=\dfrac{25}{4}$, de unde rezultă $c^2=a^2-b^2=\dfrac{75}{4}$. Focarele elipsei sunt: $F\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2},0\right)$, $F'\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2},0\right)$.

b) Rezolvând sistemul: $\begin{cases} x^2+4y^2=25 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$, se obţin punctele de intersecţie ale elipsei cu dreapta dată: $M_1(3,2)$ şi $M_2\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$. Tangentele la elipsă în aceste puncte au ecuaţiile:

$$3x+8y=25,\ \text{respectiv}\ 4x+6y=25.$$

5. Ecuaţia tangentei într-un punct al elipsei date este: $\dfrac{x_0x}{9}+\dfrac{y_0y}{4}=1$, adică $4x_0x+9y_0y=36$. Fiind paralelă cu dreapta $x-2y=3$, are loc condiţia: $\dfrac{4x_0}{1}=\dfrac{9y_0}{-2}$, de unde se obţine relaţia $y_0=\dfrac{-8x_0}{9}$. Înlocuind în ecuaţia elipsei va rezulta $x_0^2=\dfrac{81}{25}$. Se obţin punctele: $M_1\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$ şi $M_2\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{5}\right)$, în care tangentele la elipsă au ecuaţiile:

$$x-2y-5=0,\ \text{respectiv}\ x-2y+5=0.$$

6. Excentricitatea hiperbolei este $e=\dfrac{c}{a}$. Pentru hiperbola dată avem: $a^2=20$, $b^2=5$ iar $c^2=a^2+b^2=25$. Rezultă $e=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Punctul $M(6,2)$ aparţine hiperbolei. Ecuaţia tangentei este: $3x-4y-10=0$.

7. $M\left(\dfrac{3\sqrt{13}}{2}, 3\right) \in (H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{117}{4a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1.$

Din ecuaţiile asimptotelor rezultă $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}$. Se obţine: $a^2 = 9,\ b^2 = 4$.

Ecuaţia hiperbolei este: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

8. a) Din ecuaţia parabolei deducem că $p = 9$, deci parabola are focarul $F\left(\dfrac{9}{2}, 0\right)$ şi directoarea de ecuaţie $x = -\dfrac{9}{2}$.

b) Rezolvând sistemul $\begin{cases} y^2 = 18x \\ 6x + y - 6 = 0 \end{cases}$, rezultă $M\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$ şi $N(2, -6)$.

Tangentele la parabolă în aceste puncte au ecuaţiile:

$$6x - 2y + 3 = 0, \text{ respectiv } 3x + 2y + 6 = 0.$$

9. Din ecuaţia parabolei deducem că $p = 4$. Ecuaţia directoarei parabolei este $(D) : x = -\dfrac{p}{2}$ adică $(D) : x + 2 = 0$.

Fie $M(a, b)$ un punct al parabolei. Distanţa de la M la (D) este:

$$d(M, D) = \frac{|a + 2|}{1} = 4 \Rightarrow |a + 2| = 4 \Rightarrow a = 2 \ (a > 0).$$

Deoarece $M(2, b) \in P$ rezultă că $b^2 = 16$, deci $b = \pm 4$.

Am obţinut astfel punctele $M_1(2, 4)$ şi $M_2(2, -4)$.

10. Ecuaţia unei tangente la parabola $y^2 = 12x$ este $y_0 y = 6x + 6x_0$, unde $M(x_0, y_0)$ este un punct situat pe parabolă. Din condiţia de paralelism dintre tangentă şi dreapta $3x - 2y + 30 = 0$ rezultă $\dfrac{6}{3} = \dfrac{-y_0}{-2}$, deci $y_0 = 4$, de unde, înlocuind în ecuaţia parabolei, se obţine $x_0 = \dfrac{4}{3}$.

Ecuaţia tangentei în $M\left(\dfrac{4}{3}, 4\right)$ este: $3x - 2y + 4 = 0$.

Distanţa dintre tangenta obţinută şi dreapta dată este egală cu distanţa de la punctul M la dreaptă.

$$d = \frac{\left|3 \cdot \dfrac{4}{3} - 2 \cdot 4 + 30\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

11. a) Se calculează δ, Δ, λ_1 şi λ_2.

$$\begin{aligned}
\delta &= \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{vmatrix} = 150 \neq 0 \\
\Delta &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & -2 \\ 12 & 21 & 9 \\ -2 & 9 & -139 \end{vmatrix} = -22500 \\
\lambda^2 - 35\lambda + 150 &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 30
\end{aligned}$$

Ecuaţia canonică este:

$$5x^2 + 30y^2 - 150 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

b) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} < 0$, conica este de tip hiperbolic.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4y + 16 = 0 \\ f'_y(x,y) = 4x + 6y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -4 \end{cases} \Rightarrow M_0(3,-4)$$

Efectuând translaţia: $\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases}$, se obţine ecuaţia:

$$3y'^2 + 4x'y' - 36 = 0.$$

Ecuaţia $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0$ are soluţia pozitivă $m = 2$. Din $\operatorname{tg}\alpha = 2$ rezultă $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Aplicând formulele de rotaţie:

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) \end{cases},$$

ecuaţia conicei devine $4X^2 - Y^2 = 36$. Ecuaţia redusă a conicei date este:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1 \text{ (hiperbolă)}.$$

12. a) Elipsa de intersecţie a elipsoidului cu planul xOy are ecuaţiile:

$$(E_1): \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Analog se obţin celelalte două elipse (intersecţiile cu xOz şi yOz).

b) Vârfurile elipsoidului sunt:

$$A(2,0,0), A'(-2,0,0), B(0,3,0), B'(0,-3,0), C(0,0,4), C'(0,0,-4).$$

13. Notăm $(d) \cap (E) = \{A, B\}$. Avem succesiv:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{25x^2}{36} = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{6}{5}.$$

Folosind ecuaţia $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} + \dfrac{z_0z}{c^2} = 1$, obţinem ecuaţiile planelor tangente în $A\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ şi $B\left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{6}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$:

$$9x + 12y + 4z - 30 = 0, \;\; 9x + 12y + 4z + 30 = 0.$$

14. Un plan tangent la elipsoid într-un punct $M \in (E)$ are ecuaţia $4x_0x + 16y_0y + 8z_0z = 1$. Planul tangent care este paralel cu planul dat are vectorii normali coliniari cu $\overrightarrow{n} = (1, -2, 2)$. Din relaţiile $4x_0 = -8y_0 = 4z_0$ rezultă $x_0 = -2y_0$ şi $z_0 = -2y_0$ care, înlocuite în ecuaţia elipsoidului, conduc la $y_0 = \pm\dfrac{1}{8}$. Se obţin punctele $M_1\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{4}\right)$ şi $M_2\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right)$. Planele tangente la elipsoid în aceste puncte au ecuaţiile:

$$x - 2y + 2z + 1 = 0, \quad x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

15. Coordonatele unui punct de pe (d) verifică relaţiile $x = 3z$, $y = 2z$. Înlocuind în ecuaţia cuadricei, rezultă $z^2 = z$. Cum $z > 0$, se obţine punctul $M(3,2,1) \in (P_e)$. Planul tangent la paraboloid în acest punct are ecuaţia:

$$(T):\; 2x + 3y - 6z - 6 = 0.$$

16. Ecuaţia unui plan tangent la cuadrică este:

$$\frac{x_0x}{3} + \frac{y_0y}{4} = z + z_0 \Leftrightarrow 4x_0x + 3y_0y - 12z - 12z_0 = 0.$$

Vectorul normal al planului este coliniar cu vectorul director al dreptei date, de unde rezultă:

$$\frac{4x_0}{2} = \frac{3y_0}{-1} = \frac{-12}{-2} \Rightarrow 2x_0 = -3y_0 = 6 \Rightarrow x_0 = 3,\; y_0 = -2.$$

Coordonatele punctului de tangenţă sunt $(3, -2, z_0)$. Înlocuind în ecuaţia cuadricei, se obţine $z_0 = 2$. Ecuaţia planului tangent în $(3, -2, 2)$ este:

$$2x - y - 2z - 4 = 0.$$

17. Punctul $M \in (H_1)$. Ecuaţia cuadricei se scrie echivalent:

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1 - \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3} - z\right)\left(\frac{x}{3} + z\right) = \left(1 - \frac{y}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{2}\right).$$

Cele două familii de generatoare sunt:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = \lambda\left(1 - \frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{3} + z = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{2}\right) \end{cases}, \ (G_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = \mu\left(1 + \frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{3} + z = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{2}\right) \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind coordonatele lui M în ecuaţiile generatoarelor se obţin valorile $\lambda = 1$ şi $\mu = -\frac{1}{3}$. Astfel, cele două generatoare ale cuadricei care trec prin punctul M au ecuaţiile:

$$(G_1) : \begin{cases} 2x + 3y - 6z - 6 = 0 \\ 2x - 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases} \text{ şi } (G_2) : \begin{cases} 2x + y - 6z + 2 = 0 \\ 2x - 9y + 6z + 18 = 0 \end{cases}.$$

Unghiul format de cele două drepte este unghiul format de doi vectori directori ai dreptelor. Folosind produsul vectorial se determină:

$$\overrightarrow{v_1} = (2, 3, -6) \times (2, -3, 6) = (0, -24, -12) = -12 \cdot (0, 2, 1),$$

$$\overrightarrow{v_2} = (2, 1, -6) \times (2, -9, 6) = (-48, -24, -20) = -4 \cdot (12, 6, 5).$$

Din formula de calcul pentru produsul scalar obţinem:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{17}{5\sqrt{41}}.$$

18. Se arată că punctul dat aparţine cuadricei.
a) $(T) : \frac{3x}{9} - \frac{0z}{4} = \frac{1}{2}(y + 1) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y + 1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 3 = 0$
b) Ecuaţia cuadricei se scrie sub forma echivalentă:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{z}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{z}{2}\right) = y.$$

Generatoarele cuadricei au ecuaţiile generale:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{z}{2} = \lambda y \\ \frac{x}{3} + \frac{z}{2} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}, \ (G_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{z}{2} = \mu y \\ \frac{x}{3} - \frac{z}{2} = \frac{1}{\mu} \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Din condiţiile $M \in (G_\lambda)$, $M \in (G_\mu)$ rezultă $\lambda = 1$ şi $\mu = 1$.
Se obţin ecuaţiile:

$$(G_1) : \begin{cases} \dfrac{x}{3} - y - \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{2} - 1 = 0 \end{cases}, \ (G_2) : \begin{cases} \dfrac{x}{3} - y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{z}{2} - 1 = 0 \end{cases}.$$

19. a) Ecuaţia cuadricei se scrie: $(x - z)(z + z) = (1 - y)(1 + y)$.
Ecuaţiile generatoarelor le scriem sub forma:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \lambda(x - z) &= 1 - y \\ x + z &= \lambda(1 + y) \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(G_\mu) : \begin{cases} x - z &= \mu(1 + y) \\ \mu(x + z) &= 1 - y \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Punând condiţia ca dreptele să treacă prin punctul $M(1, 1, -1)$, situat pe cuadrică, se obţin valorile $\lambda = 0$ şi $\mu = 1$. Ecuaţiile generatoarelor sunt:

$$(G_1) : \begin{cases} 1 - y &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}, \ (G_2) : \begin{cases} x - y - z - 1 &= 0 \\ x + y + z - 1 &= 0 \end{cases}.$$

b) Ecuaţia paraboloidului se scrie:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = z.$$

Ecuaţiile celor două familii de generatoare au forma:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \lambda z \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}, \ (G_\mu) : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \mu \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{\mu} z \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$M \in (G_\lambda), M \in (G_\mu) \Rightarrow \lambda = -1$, $\mu = -1$. Se obţin generatoarele:

$$(G_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 6z = 0 \\ 3x + 2y + 6 = 0 \end{cases}, \ (G_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}.$$

c) Ecuaţia cuadricei se scrie: $(x - y)(x + y) = 2z$.
Ecuaţiile generatoarelor se scriu sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{x - y}{2} &= \frac{z}{x + y} = \lambda \\ \frac{x - y}{z} &= \frac{2}{x + y} = \mu. \end{aligned}$$

Generatoarele care trec prin origine corespund lui $\lambda = 0$ şi $\mu = \infty$. Rezultă dreptele:

$$(G_1) : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \; (G_2) : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

20. Ecuaţia hiperboloidului se scrie echivalent:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{4}\right) = \left(1 - \frac{y}{3}\right)\left(1 + \frac{y}{3}\right).$$

Generatoarele rectilinii ale cuadricei au ecuaţiile:

$$(G_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = \lambda\left(1 - \frac{y}{3}\right) \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4\lambda y - 3z - 12\lambda = 0 \\ 6\lambda x - 4y + 3\lambda z - 12 = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(G_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = \mu\left(1 + \frac{y}{3}\right) \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4\mu y - 3z - 12\mu = 0 \\ 6\mu x + 4y + 3\mu z - 12 = 0 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

(G_λ) şi (G_μ) au vectorii directori:

$\overrightarrow{v_1} = 12\left(\lambda^2 - 1, -3\lambda, -2\lambda^2 - 2\right)$, respectiv $\overrightarrow{v_2} = -12\left(\mu^2 - 1, 3\mu, -2\mu^2 - 2\right)$.

Dreptele sunt paralele cu planul (P) care are vectorul normal $\overrightarrow{n} = (6, 4, 3)$, deci vectorii lor directori sunt ortogonali cu $\overrightarrow{n}$.
Din relaţiile $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ şi $\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ se obţin valorile $\lambda = -1$ şi $\mu = 1$.
Ecuaţiile generatoarelor sunt:

$$(G_1) : \begin{cases} 6x - 4y - 3z + 12 = 0 \\ 6x + 4y + 3z + 12 = 0 \end{cases}, \quad (G_2) : \begin{cases} 6x - 4y - 3z - 12 = 0 \\ 6x + 4y + 3z - 12 = 0 \end{cases}.$$

4.4 Probleme propuse

1. Fie elipsa $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Să se determine focarele elipsei. Să se afle ecuaţiile tangentelor la elipsă în punctele de abscisă 3.

2. Să se determine ecuaţia canonică a elipsei care are semiaxa mare 25 si excentricitatea $0,6$.

3. Să se determine ecuaţia canonică a elipsei care trece prin punctele $M\left(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}\right)$ şi $N\left(2\sqrt{3}, 2\right)$.

4. Fie elipsa $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Să se afle ecuaţiile tangentelor la elipsă, care sunt paralele cu dreapta $y=2x+3$.

5. Să se determine ecuaţiile tangentelor la elipsa $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$, care trec prin punctul $M\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

6. Prin punctul $M(10,-8)$ se duc tangentele la elipsa $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Să se calculeze lungimea coardei care uneşte punctele de tangenţă.

7. Fie hiperbola $(H): \dfrac{x^2}{24}-\dfrac{y^2}{18}=1$.

   a) Să se determine distanţa focală şi ecuaţiile asimptotelor.

   b) Să se afle ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul $M(6,-3)$.

8. Să se determine ecuaţia unei hiperbole care are excentricitatea $e=\sqrt{2}$ şi care trece prin punctul $M(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

9. Să se determine excentricitatea unei hiperbole echilatere $(a=b)$.

10. Să se determine ecuaţiile tangentelor la hiperbola $(H): \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$, duse prin punctul $N(1,-5)$.

11. Să se determine ecuaţiile tangentelor la hiperbola $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$, care sunt perpendiculare pe dreapta $4x+3y-7=0$.

12. Să se determine ecuaţiile tangentelor la parabola $y^2=4x$ în punctele de intersecţie cu dreapta $x+y-3=0$.

13. Fie parabola de ecuaţie $y^2=8x$.

    a) Să se determine focarul şi ecuaţia directoarei parabolei.

    b) Să se afle poziţia dreptei $x-y+2=0$ faţă de parabolă.

14. Să se afle forma canonică a conicelor de ecuaţii:

    a) $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$

    b) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$

    c) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$

15. Fie elipsoidul $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$. Să se determine:

    a) curbele de intersecţie ale elipsoidului cu planele de coordonate;

    b) vârfurile elipsoidului.

16. Să se afle ecuaţiile planelor tangente la elipsoidul

$$(E): \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1$$

    în punctele de intersecţie cu dreapta $(d): \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+6}{-4}$.

17. Determinaţi ecuaţia planului tangent la:

    a) $(H_1): x^2 + 6y^2 - z^2 = 1$ în punctul $M(2,1,3)$;

    b) $(P_h): y^2 - \dfrac{z^2}{9} = 3x$ în punctul $M_1(1,2,3)$.

18. Să se determine planele tangente la elipsoidul

$$(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8} - 1 = 0,$$

    care sunt paralele cu planul $(P): 3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

19. Să se arate că planul de ecuaţie $5x + 2z + 5 = 0$ este tangent la cuadrica

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} + 1 = 0$$

    şi să se determine punctul de tangenţă.

20. Să se arate că planul $2x - 2y - z - 10 = 0$ este tangent la cuadrica

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$$

    şi să se determine punctul de tangenţă.

21. Să se determine ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului

$$(H_1): x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1,$$

    care trec prin $M(1,4,8)$ şi să se calculeze unghiul format de acestea.

22. Să se afle unghiul format de generatoarele rectilinii ale paraboloidului $x^2 - \frac{y^2}{9} = 3z$, care trec prin punctul $M(2, 3, 1)$.

23. Să se determine generatoarele rectilinii care trec prin M pentru:

    a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad M(6, 2, 8)$

    b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z, \quad M(8, 2, 3)$

    c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1, \quad M(5, -4, 2)$

    d) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 8z, \quad M(3, 2, 1)$

24. Să se determine ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $(P_h) : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$, care sunt paralele cu planul de ecuaţie $(P) : 3x + 2y - 4z = 0$.

25. Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care diferenţa distanţelor la punctele $F_1(0, 5, 0)$ şi $F_2(0, -5, 0)$ este egală cu 6.

26. Să se arate că suprafaţa generată de dreptele

$$\begin{cases} 2x - 3\alpha y + 6z - 6\alpha = 0 \\ 2\alpha x + 3y - 6\alpha z - 6 = 0 \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

    este un hiperboloid cu o pânză.

27. Fie cuadrica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ şi planul $(P) : 4x - 5y - 10z - 20 = 0$. Să se arate că planul (P) intersectează cuadrica după două generatoare rectilinii şi să se afle ecuaţiile acestora.

28. Să se arate că planul $2x - 12y - z + 16 = 0$ intersectează paraboloidul hiperbolic $x^2 - 4y^2 = 2z$ după două generatoare rectilinii şi să se afle ecuaţiile acestora.

Capitolul 5

Generarea suprafeţelor

5.1 Noţiuni generale

Se numeşte suprafaţă o mulţime de puncte din spaţiu ale căror coordonate verifică o relaţie de forma:

$$F(x,y,z)=0,\ (x,y,z)\in V\subset\mathbb{R}^3\,. \tag{5.1.1}$$

O curbă în spaţiu poate fi definită prin intersecţia a două suprafeţe. În acest caz, curba va fi reprezentată analitic prin două ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}. \tag{5.1.2}$$

Dacă din ecuaţia implicită (5.1.1) a unei suprafeţe date, se poate exprima z în funcţie de x şi y, atunci suprafaţa va fi definită prin ecuaţia explicită:

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2.$$

În astfel de situaţii, o curbă spaţială va fi definită prin:

$$\begin{cases} z=f_1(x,y) \\ z=f_2(x,y) \end{cases}.$$

O altă reprezentare analitică a unei suprafeţe este cea parametrică:

$$(S):\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}. \tag{5.1.3}$$

Din ecuaţiile (5.1.3) rezultă că suprafaţa (S) se obţine (este generată) prin mişcarea unui punct în spaţiu după o lege care depinde de doi parametri.

De asemenea, o suprafaţă poate fi generată prin mişcarea unei curbe din spaţiu după o lege care depinde de un parametru sau care depinde de doi parametri între care există o relaţie dată.
Exemple de suprafeţe generate prin mişcarea unei curbe variabile: suprafeţe riglate (cilindrice, conice, conoide), suprafeţe de rotaţie.

5.2 Suprafeţe riglate

Suprafeţele generate de o dreaptă variabilă care se mişcă după o lege dată (de exemplu, se sprijină pe o curbă dată) se numesc *suprafeţe riglate*.

5.2.1 Suprafeţe cilindrice

Se numeşte suprafaţă cilindrică suprafaţa generată de o dreaptă variabilă de direcţie fixă, numită generatoare, care verifică o condiţie geometrică dată (de exemplu, intersectează o curbă dată, numită curbă directoare, sau este tangentă la o suprafaţă dată).

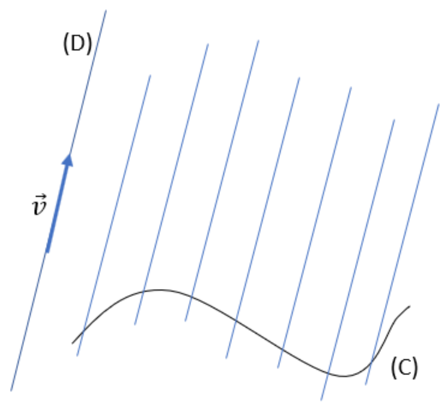


Figura 5.1: Suprafaţă cilindrică

Ecuaţia suprafeţei cilindrice se obţine în funcţie de ecuaţiile generatoarei şi de condiţiile geometrice verificate de aceasta.

1. Dacă direcţia fixă este dată de vectorul $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ şi curba directoare are ecuaţiile parametrice $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ atunci suprafaţa cilindrică are ecuaţiile:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x(t) + \lambda a, \\ Y & = & y(t) + \lambda b, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \\ Z & = & z(t) + \lambda c, \end{array}\right.$$

2. Dacă direcţia fixă este dată de o dreaptă (D) reprezentată prin ecuaţiile generale iar curba (C) este dată ca intersecţie a două suprafeţe, atunci suprafaţa cilindrică generată va fi dată prin ecuaţia implicită.

   Fie $(D): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{cases}$, $(C): \begin{cases} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases}$.

   Din sistemul de ecuaţii $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= \beta \\ F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases}$ se obţine o relaţie între parametrii α şi β de forma $\phi(\alpha,\beta) = 0$, numită condiţia de compatibilitate. Prin eliminarea parametrilor α şi β se obţine ecuaţia suprafeţei cilindrice:

$$\phi\left(a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2\right) = 0.$$

3. Dacă direcţia fixă a dreptei care generează suprafaţa cilindrică este $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ atunci generatoarele au ecuaţiile:

$$(g): \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z}{c} \quad (\text{dacă } \overrightarrow{v} \text{ nu este paralel cu } xOy).$$

   Deoarece (g) se sprijină pe o curbă dată (C), sistemul format din ecuaţiile lui (g) şi (C) trebuie să fie compatibil, de unde rezultă condiţia de compatibilitate şi ecuaţia suprafeţei generate.

Uneori, condiţia geometrică a problemei este ca dreapta variabilă de direcţie fixă să fie tangentă la o suprafaţă (S). În acest caz, din ecuaţiile generatoarei se exprimă x şi y în funcţie de z, α şi β şi se înlocuiesc în ecuaţia suprafeţei. Condiţia ca generatoarea să fie tangentă la (S) se reduce la condiţia ca ecuaţia în z obţinută să admită soluţie unică. De aici rezultă relaţia $\phi(\alpha,\beta) = 0$. Revenind la x, y şi z, va rezulta ecuaţia suprafeţei cilindrice generate.

5.2.2 Suprafeţe conice

O suprafaţă conică este generată de o dreaptă variabilă (generatoare) care trece printr-un punct fix (vârf) şi care satisface o condiţie geometrică dată. Ecuaţia suprafeţei conice se obţine în funcţie de ecuaţiile generatoarei şi de condiţiile geometrice verificate de aceasta.

1. Dacă dreapta variabilă trece prin punctul fix $V(x_0, y_0, z_0)$ şi se sprijină pe curba $(C): x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, atunci suprafaţa

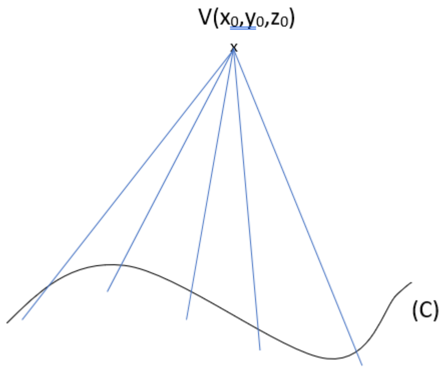


Figura 5.2: Suprafaţă conică

conică are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X &= x_0 + \lambda(x(t) - x_0), \\ Y &= y_0 + \lambda(y(t) - y_0), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \\ Z &= z_0 + \lambda(z(t) - z_0), \end{cases}$$

2. Dacă punctul V este determinat de intersecţia a trei plane de ecuaţii $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{cases}$ iar curba directoare este definită prin ecuaţiile implicite $(C) : \begin{cases} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases}$, atunci suprafaţa conică va fi reprezentată prin ecuaţia implicită.
Ecuaţiile fasciculului de drepte cu vârful V sunt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= \alpha(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= \beta(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) \end{cases}.$$

Din condiţia ca aceste drepte să se sprijine pe curba (C) se obţine condiţia de compatibilitate $\phi(\alpha, \beta) = 0$. Eliminând parametrii α şi β se obţine ecuaţia suprafeţei conice.

3. Dacă punctul fix este $V(x_0, y_0, z_0)$ atunci ecuaţiile generatoarei sunt:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 &= \alpha(z - z_0) \\ y - y_0 &= \beta(z - z_0) \end{cases}.$$

Condiţia de compatibilitate este o relaţie de forma $\phi(\alpha, \beta) = 0$, de unde rezultă ecuaţia suprafeţei conice:

$$\phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

5.2.3 Suprafeţe conoide

O suprafaţă conoidă este suprafaţa generată de o dreaptă care intersectează o dreaptă dată (D), este paralelă cu un plan dat (P) (plan director) şi se sprijină pe o curbă dată (C) (sau îndeplineşte altă condiţie geometrică).

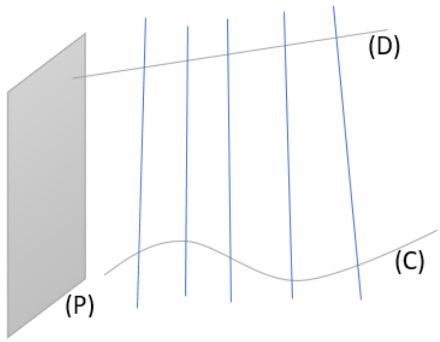


Figura 5.3: Suprafaţă conoidă

Fie dreapta $(D) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$, planul $(P) : ax+by+cz+d=0$ şi curba $(C) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.
Dreptele care intersectează (D) şi sunt paralele cu (P) se obţin intersectând fascicolul de plane care trec prin (D) cu plane paralele cu (P), deci au ecuaţiile:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = \alpha\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ ax + by + cz + d = \beta \end{cases}.$$

Din condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & \alpha\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ ax + by + cz + d & = & \beta \\ F(x, y, z) & = & 0 \\ G(x, y, z) & = & 0 \end{cases}$$

se obţine o relaţie de forma $\phi(\alpha, \beta) = 0$. Eliminând parametrii α şi β rezultă ecuaţia suprafeţei conoide:

$$\phi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}, ax + by + cz + d\right) = 0.$$

5.3 Suprafeţe de rotaţie

Se numeşte suprafaţă de rotaţie suprafaţa generată de o curbă (C) care se roteşte (fără alunecare) în jurul unei axe fixe (D), numită axă de rotaţie. Prin rotirea curbei (C) în jurul dreptei (D), fiecare punct al curbei descrie un cerc (cerc generator sau paralel) situat într-un plan perpendicular pe (D), având centrul pe (D). Astfel, un cerc generator reprezintă intersecţia dintre o sferă de rază variabilă cu centrul pe (D) şi un plan perpendicular pe (D).

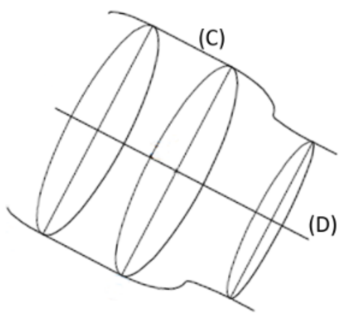


Figura 5.4: Suprafaţă de rotaţie

Dacă axa de rotaţie şi curba (C) sunt date prin ecuaţiile

$$(D): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},\ (C): \begin{cases} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases},$$

atunci cercul generator este reprezentat prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \alpha^2 \\ ax + by + cz = \beta \end{cases} \quad \text{(familie de cercuri).}$$

Sistemul format din ecuaţiile cercului generator şi ecuaţiile curbei (C) este compatibil (cercul se sprijină pe curbă). De aici rezultă relaţia $\phi(\alpha^2, \beta) = 0$ (condiţia de compatibilitate). Eliminând parametrii α şi β rezultă ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$\phi\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, ax + by + cz\right) = 0.$$

Cele mai cunoscute suprafeţe de rotaţie sunt sfera, cilindrul, conul.

Observaţia 5.3.1. *Există şi alte moduri de a genera o suprafaţă. De exemplu, o cuadrică poate fi generată de o conică variabilă care se sprijină pe o conică fixă. Astfel, elipsoidul este generat de o elipsă variabilă care se deplasează pe o elipsă fixă, hiperboloidul este generat de o elipsă variabilă şi o hiperbolă fixă. Paraboloidul eliptic, respectiv hiperbolic este generat de o elipsă variabilă, respectiv parabolă variabilă şi o parabolă fixă.*

5.4 Probleme rezolvate

1. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice generată de o dreaptă variabilă paralelă cu dreapta $(d): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ şi care are curba directoare $(C): \begin{cases} xy = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

2. Să se afle ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice generată de dreapta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ şi curba $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice generată de o dreaptă paralelă cu $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$, care intersectează curba $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$.

4. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice care are curba directoare $(C): \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ şi generatoarele perpendiculare pe planul curbei directoare.

5. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată de o dreaptă variabilă care formează unghiuri egale cu axele de coordonate şi este tangentă sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Să se determine ecuaţia cilindrului care are generatoarele perpendiculare pe planul $x + y - 2z - 5 = 0$ şi este circumscris sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. Să se afle ecuaţia cilindrului circumscris la sferele de ecuaţii:
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \text{ şi } x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

8. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(1,1,1)$ şi care are curba directoare $(C): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

9. Să se afle ecuaţia unui con cu vârful în $V(3,-1,-2)$ şi având curba directoare definită prin ecuaţiile:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

10. Să se afle ecuaţia unui con cu vârful în origine şi având ca şi curbă directoare curba de ecuaţii: $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

11. Să se determine suprafaţa conică având vârful $V(-1,0,2)$, care intersectează curba $(C):\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & t^2 \\ z & = & t^3-1 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

12. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în origine, tangentă sferei $(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16$.

13. Să se afle ecuaţia suprafeţei generată de o dreaptă variabilă paralelă cu planul xOy şi care se sprijină pe dreapta $(d):\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y+z=2 \end{array}\right.$ şi pe cercul $(C):\left\{\begin{array}{lll} x^2+z^2 & = & 4 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$.

14. Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide care are generatoarele paralele cu xOy, intersectează axa Oz şi are ca şi curbă directoare elicea
$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt.$$

15. Să se determine ecuaţia suprafaţei obţinute prin rotaţia dreptei de ecuaţii $(d):\left\{\begin{array}{l} z-3y=0 \\ x-2=0 \end{array}\right.$ în jurul axei Oz (hiperboloid cu o pânză).

16. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia cercului de ecuaţii $(C):\left\{\begin{array}{lll} (x-a)^2+z^2 & = & r^2 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$
a) în jurul axei Ox (sferă) b) în jurul axei Oz (tor).

17. Să se afle ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea curbei $(C):\left\{\begin{array}{l} x^2=z \\ y=0 \end{array}\right.$ în jurul axei Oz.

18. Să se afle ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotaţia curbei de ecuaţii
$$(C):\left\{\begin{array}{lll} x^2-z^2 & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ în jurul axei } Oz\,.$$

19. Să se afle ecuaţia cilindrului circular drept care trece prin $M\,(2,-1,1)$ şi are ca şi axă dreapta:
$$x=3t+1, y=-2t-2, z=t+2.$$

Soluţii:

1. Ecuaţiile dreptei (d) se scriu sub forma $\begin{cases} 3x-2y-3 &= 0 \\ x+2z+1 &= 0 \end{cases}$ de unde rezultă ecuaţiile generatoarei (g) : $\begin{cases} 3x-2y-3 &= \alpha \\ x+2z+1 &= \beta \end{cases}$.
Din condiţia ca (g) să intersecteze curba directoare (C) rezultă că sistemul $\begin{cases} 3x-2y-3 &= \alpha \\ x+2z+1 &= \beta \\ xy &= 4 \\ z &= 0 \end{cases}$ este compatibil. Exprimând pe x, y, z în funcţie de α şi β obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\frac{1}{2}(\beta-1)(3\beta-\alpha-6)=4.$$

În această relaţie înlocuim pe α şi β din ecuaţiile generatoarei (g) şi obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice generate:

$$(S):(x+2z)(y+3z)=4.$$

2. Dreapta generatoare are vectorul director $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$. Se obţin ecuaţiile parametrice ale suprafeţei generate:

$$\begin{cases} X &= \cos t+\lambda \\ Y &= \sin t+2\lambda \\ Z &= 3\lambda \end{cases},\ t\in[0,2\pi],\lambda\in\mathbb{R}.$$

Eliminând parametrii t şi λ din ecuaţiile parametrice, se poate obţine ecuaţia implicită a suprafeţei cilindrice.

$$(X-\lambda)^2+(Y-2\lambda)^2=1 \Leftrightarrow \left(X-\frac{Z}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{2Z}{3}\right)^2=1.$$

Altfel, ecuaţia implicită a suprafeţei generate se poate obţine folosind ecuaţiile generale ale curbei directoare:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

Generatoarele suprafeţei au ecuaţiile:

$$x-\alpha=\frac{y-\beta}{2}=\frac{z}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{z}{3}=\alpha \\ y-\dfrac{2z}{3}=\beta \end{cases}.$$

Condiţia de compatibilitate este $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, de unde rezultă ecuaţia suprafeţei cilindrice generate:

$$\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2z}{3}\right)^2 = 1.$$

3. Vectorul director al dreptei (D) este $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$.

Ecuaţiile generatoarei sunt:

$$(g) : \frac{x-\alpha}{2} = \frac{y-\beta}{2} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z & = & \alpha \\ y + 2z & = & \beta \end{array} \right. .$$

Din sistemul format de ecuaţiile generatoarei şi ecuaţiile curbei directoare se obţine condiţia de compatibilitate:

$$(\alpha - 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 = 36 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 6.$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice generate este:

$$(x + 2z)^2 - (x + 2z)(y + 2z) + (y + 2z)^2 = 6.$$

4. Planul curbei directoare este $x - 2z = 0$ deci are vectorul normal $\overrightarrow{n} = (1, 0, -2)$. Generatoarele fiind perpendiculare pe plan, au ecuaţiile:

$$(g) : \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{0} = \frac{z}{-2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + z & = & 2\alpha \\ y & = & \beta \end{array} \right. .$$

Din sistemul format de ecuaţiile generatoarelor şi ecuaţiile curbei directoare se obţine condiţia de compatibilitate:

$$4\alpha^2 + 25\beta^2 = 20\alpha.$$

Dar $\alpha = \dfrac{2x + z}{2}$ şi $\beta = y$. Rezultă că suprafaţa cilindrică are ecuaţia:

$$(2x + z)^2 + 25y^2 - 10(2x + z) = 0.$$

5. Dacă φ este măsura unghiurilor formate de generatoarele suprafeţei cu axele de coordonate, atunci direcţia acestora este dată de vectorul

$$(\cos\varphi, \cos\varphi, \cos\varphi) = \cos\varphi \cdot (1, 1, 1).$$

Deci, ecuaţiile generatoarei suprafeţei cilindrice sunt:

$$(g): \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z &= \alpha \\ y-z &= \beta \end{cases}.$$

Generatoarele sunt tangente la sfera dată, deci sistemul format din ecuaţiile lui (g) şi ecuaţia sferei este compatibil. Înlocuind x cu $z+\alpha$ şi y cu $z+\beta$ în ecuaţia sferei se obţine o ecuaţie de gradul doi în z:

$$(z+\alpha)^2 + (z+\beta)^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow 3z^2 + 2(\alpha+\beta)z + \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

Cum (g) este tangentă sferei, ecuaţia obţinută are o singură soluţie, deci are discriminantul nul.

$$\Delta = 4(\alpha+\beta)^2 - 12(\alpha^2+\beta^2-1) = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta = 3.$$

În relaţia de compatibilitate obţinută, se înlocuieşte α cu $x-z$, respectiv β cu $y-z$ şi rezultă ecuaţia cilindrului circumscris sferei date:

$$2(x-z)^2 + 2(y-z)^2 - 2(x-z)(y-z) = 3.$$

6. Generatoarele au ecuaţiile:

$$(g): \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \alpha - \dfrac{z}{2} \\ y &= \beta - \dfrac{z}{2} \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia sferei se obţine ecuaţia de gradul doi în z:

$$\frac{3}{2}z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0,$$

care are soluţie unică ($\Delta = 0$). Se obţine condiţia de compatibilitate:

$$(\alpha+\beta)^2 - 6(\alpha^2+\beta^2-1) = 0 \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2 = 6.$$

Folosind relaţiile: $\alpha = x + \dfrac{z}{2}$ şi $\beta = y + \dfrac{z}{2}$, se obţine ecuaţia cilindrului:

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 6 = 0.$$

7. Dreapta care uneşte centrele celor două sfere are ecuaţiile: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$. Generatoarele cilindrului sunt paralele cu această dreaptă, deci au ecuaţiile:

$$\begin{cases} z = \alpha \\ x - 2y = \beta \end{cases}.$$

Generatoarele sunt tangente la a doua sferă, adică o intersectează într-un singur punct, ceea ce înseamnă că ecuaţia

$$(\beta + 2y)^2 + y^2 + \alpha^2 = 25$$

are o singură soluţie în y. Rezultă condiţia de compatibilitate:

$$5\alpha^2 + \beta^2 = 125.$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice este: $5z^2 + (x - 2y)^2 = 125$.

8. Generatoarea suprafeţei conice este o dreaptă variabilă care trece prin punctul V, deci are ecuaţiile $(g) : \dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y-1}{\beta} = \dfrac{z-1}{1}$, care se mai scriu sub forma $(g) : \begin{cases} x - 1 = \alpha(z-1) \\ y - 1 = \beta(z-1) \end{cases}$.

Din condiţia ca generatoarea să se sprijine pe curba (C) rezultă că sistemul $\begin{cases} x-1 &= \alpha(z-1) \\ y-1 &= \beta(z-1) \\ x^2+y^2 &= 4 \\ z &= 0 \end{cases}$ este compatibil. Exprimând pe x, y, z în funcţie de α şi β obţinem condiţia de compatibilitate:

$$(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 = 4.$$

În această relaţie înlocuim pe α şi β din ecuaţiile generatoarei (g) şi obţinem ecuaţia suprafeţei conice generate:

$$(S) : (z-x)^2 + (z-y)^2 = 4(z-1)^2.$$

9. Vârful V este dat prin intersecţia planelor de ecuaţii $x - 3 = 0$, $y + 1 = 0$, $z + 2 = 0$. Ecuaţiile generatoarei suprafeţei conice pot fi scrise sub forma: $\begin{cases} y + 1 = \alpha(x-3) \\ z + 2 = \beta(x-3) \end{cases}$.

Sistemul: $\begin{cases} y + 1 = \alpha(x-3) \\ z + 2 = \beta(x-3) \\ x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$ trebuie să fie compatibil.

Din primele trei ecuaţii se obţin relaţiile:

$$x = \frac{3\alpha - 3\beta - 1}{\alpha - \beta - 1},\ y = \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha - \beta - 1},\ z = \frac{-2\alpha + 4\beta + 2}{\alpha - \beta - 1}.$$

Înlocuind în a patra ecuaţie, se obţine:

$$\left(\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha-\beta-1}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha-\beta-1}\right)^2-\left(\frac{-2\alpha+4\beta+2}{\alpha-\beta-1}\right)^2=1\,,$$

$$\text{adică, } 5\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha-7\beta^2-10\beta-3=0\,.$$

Din ecuaţiile generatoarei avem: $\alpha=\dfrac{y+1}{x-3}$ iar $\beta=\dfrac{z+2}{x-3}$. Rezultă că ecuaţia suprafeţei conice generate este:

$$5\left(\frac{y+1}{x-3}\right)^2+2\frac{y+1}{x-3}\frac{z+2}{x-3}+6\frac{y+1}{x-3}-7\left(\frac{z+2}{x-3}\right)^2-10\frac{z+2}{x-3}-3=0\,,$$

adică:

$$3x^2-6xy+10xz-4x-5y^2-2yz+4y+7z^2-4z+4=0.$$

10. Vârful suprafeţei conice este intersecţia planelor de coordonate: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Din compatibilitatea sistemului

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \alpha x\\ z & = & \beta x\\ x^2-2z+1 & = & 0\\ y-z+1 & = & 0\end{array}\right.,$$

rezultă condiţia de compatibilitate:

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)^2-2\frac{\beta}{\beta-\alpha}+1=0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+1=0\,.$$

Înlocuind α,β din primele două ecuaţii rezultă ecuaţia suprafeţei conice:

$$x^2+y^2-z^2=0\,.$$

O altă soluţie se poate obţine parametrizând curba directoare a suprafeţei generate. Putem scrie, de exemplu:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t\\ y & = & \dfrac{t^2+1}{2}-1\\ z & = & \dfrac{t^2+1}{2}\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t\\ y & = & \dfrac{t^2-1}{2}\\ z & = & \dfrac{t^2+1}{2}\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

Suprafaţa conică are vârful în origine. Rezultă ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X &= \lambda t \\ Y &= \lambda \dfrac{t^2-1}{2} \\ Z &= \lambda \dfrac{t^2+1}{2} \end{cases}, t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

11. Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei conice sunt:

$$\begin{cases} X &= -1+\lambda(t+1) \\ Y &= \lambda t^2 \\ Z &= 2+\lambda\left(t^3-3\right) \end{cases}, \ t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

12. Generatoarele au ecuaţiile: $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = z$.
Înlocuind $x = \alpha z$ şi $y = \beta z$ în ecuaţia sferei, se obţine ecuaţia

$$z^2(\alpha^2+\beta^2+1) + (-10\alpha + 2\beta)z + 10 = 0,$$

care are soluţie unică ($\Delta = 0$), de unde rezultă condiţia de compatibilitate:

$$15\alpha^2 - 10\alpha\beta - 9\beta^2 = 10.$$

Revenind la x, y, z, rezultă ecuaţia conului cu vârful în origine, circumscris sferei date:

$$15x^2 - 9y^2 - 10z^2 - 10xy = 0.$$

13. Folosind ecuaţia planului director $xOy : z = 0$ şi ecuaţiile dreptei (d), scriem ecuaţiile generatoarei suprafeţei conoide

$$(g) : \begin{cases} z = \alpha \\ y + z - 2 = \beta x \end{cases}.$$

Generatoarea se sprijină pe cercul (C) deci sistemul

$$\begin{cases} z &= \alpha \\ y+z-2 &= \beta x \\ x^2+z^2 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{este compatibil.}$$

Exprimând pe x, y, z în funcţie de α şi β obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\left(\frac{\alpha-2}{\beta}\right)^2 + \alpha^2 = 4.$$

În această relaţie înlocuim pe α şi β din ecuaţiile generatoarei (g) şi obţinem ecuaţia suprafeţei conoide generate:

$$(S): x^2(z-2)^2 + (y+z-2)^2(z^2-4) = 0.$$

14. Ecuaţiile generale ale elicei sunt: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z = b \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$.

Generatoarele suprafeţei conoide au ecuaţiile: $\begin{cases} z=\alpha \\ y=\beta x \end{cases}$.

Sistemul format de ecuaţiile elicei şi ecuaţiile generatoarelor este compatibil. Se obţine condiţia $\alpha = b \operatorname{arctg} \beta$. Ecuaţia implicită a suprafeţei generate este:

$$z = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad \text{(elicoid)}.$$

15. Axa de rotaţie este $Oz: \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$. Ecuaţiile cercului generator sunt: $(g): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= \alpha^2 \\ z &= \beta \end{cases}$. Acesta intersectează dreapta dată deci sistemul format din ecuaţiile lui (g) şi (d) este compatibil. Se obţine condiţia de compatibilitate:

$$36 + 10\beta^2 = 9\alpha^2.$$

Rezultă ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 = 36 \quad \text{(hiperboloid cu o pânză)}.$$

16. a) $Ox: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$ este axa de rotaţie a suprafeţei.

Cercul generator este $(g): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= \alpha^2 \\ x &= \beta \end{cases}$. Acesta intersectează cercul (C) deci sistemul format din ecuaţiile lui (g) şi (C) este compatibil. Se obţine condiţia de compatibilitate:

$$\alpha^2 - 2a\beta + a^2 = r^2,$$

de unde rezultă ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{(sferă)}.$$

b) Axa de rotaţie a suprafeţei este $Oz: \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$.

Cercurile cu centrul în $O(0,0,0) \in Oz$, situate în plane perpendiculare pe Oz, au ecuaţiile $(g): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= \alpha^2 \\ z &= \beta \end{cases}$.

Din sistemul compatibil format din ecuaţiile lui (g) şi (C) rezultă condiţia de compatibilitate:

$$\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-a\right)^2+\beta^2=r^2.$$

Eliminând parametrii α şi β între relaţia obţinută şi ecuaţiile lui (g), se obţine ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$x^2+y^2+z^2+a^2-r^2=2a\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(tor)}.$$

Altfel, folosind reprezentarea parametrică a cercului care se roteşte:

$$x=a+r\cos t,\ y=0,\ z=r\sin t,\ t\in[0,2\pi],$$

se obţin ecuaţiile parametrice ale torului:

$$x=(a+r\cos u)\cos v, y=(a+r\cos u)\sin v, z=r\sin u,\ u,v\in[0,2\pi]\,.$$

17. Axa de rotaţie este $Oz:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$. Cercul generator este intersecţia unei sfere de rază variabilă având centrul pe Oz cu un plan perpendicular pe Oz, deci are ecuaţiile:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= \alpha^2 \\ z &= \beta \end{cases}.$$

Condiţia de compatibilitate rezultă din sistemul format din ecuaţiile cercului generator şi a curbei (C) şi este:

$$\beta+\beta^2=\alpha^2.$$

În această relaţie înlocuim pe α şi β din ecuaţiile cercului generator şi obţinem ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$(S):z=x^2+y^2.$$

Suprafaţa obţinută este un paraboloid eliptic generat prin rotirea unei parabole în jurul axei Oz.

18. Suprafaţa este generată de cercuri cu centrul pe Oz, situate în plan perpendicular pe Oz:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= \alpha^2 \\ z &= \beta \end{cases}.$$

Din sistemul format de ecuaţiile curbei (C) şi ecuaţiile cercurilor generatoare, se obţine condiţia de compatibilitate:

$$1+2\beta^2=\alpha^2\,.$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1\,.$$

Se observă că suprafaţa obţinută este un hiperboloid cu o pânză generat prin rotirea unei hiperbole în jurul axei Oz.

19. Cilindrul este o suprafaţă de rotaţie, obţinută prin rotaţia unei drepte paralele cu axa, care trece prin M. Ecuaţiile dreptei care se roteşte sunt:

$$\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= -2t-1 \\ z &= t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z-1 \\ y = -2z+1 \end{cases}.$$

Cercurile care generează suprafaţa de rotaţie au ecuaţiile:

$$\begin{cases} 3x-2y+z &= \alpha \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 &= \beta \end{cases}.$$

Din sistemul $\begin{cases} 3x-2y+z=\alpha \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\beta \\ x=3z-1 \\ y=-2z+1 \end{cases}$ rezultă condiţia de compatibilitate:

$$\frac{1}{14}\alpha^2 - \frac{9}{7}\alpha + \frac{123}{14} = \beta.$$

De aici, înlocuind α şi β din ecuaţiile cercurilor generatoare, se va obţine ecuaţia suprafeţei de rotaţie.

5.5 Probleme propuse

1. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice generată de o dreaptă paralelă cu $(D): \begin{cases} x-y-3=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$, care intersectează curba $(C): \begin{cases} yz=4 \\ x=0 \end{cases}$.
2. Să se determine suprafaţa cilindrică generată de o dreaptă care este paralelă cu dreapta $(D): \begin{cases} x+y-z &= 3 \\ y+z &= 1 \end{cases}$ şi are curba directoare $(C): \begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4} &= 1 \\ x+z &= 5 \end{cases}$.
3. Să se determine suprafaţa generată de o dreaptă paralelă cu dreapta $\begin{cases} x-y+z-1 &= 0 \\ 2x+y-z+2 &= 0 \end{cases}$, care intersectează curba $\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= 5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Să se afle ecuaţia unui cilindru care are curba directoare:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
şi generatoarele perpendiculare pe planul curbei directoare.

5. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu dreapta $x = y = z$ care sunt tangente sferei $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Să se determine suprafaţa conică având vârful $V(0,0,0)$ şi curba directoare $(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{cases}$.

7. Să se determine suprafaţa conică având vârful în origine şi curba directoare $(C) : \begin{cases} y^2 - x &= 0 \\ 4x + 3y + 2z - 1 &= 0 \end{cases}$.

8. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0,1,2)$ şi curba directoare $(C) : x = 2\cos t, y = \sin t, z = 0,\ t \in [0, 2\pi]$.

9. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în origine, tangentă sferei $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(1,1,1)$, care este tangentă la sfera de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{4}$.

11. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(3,0,-1)$, care este tangentă la elipsoidul
$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

12. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care este paralelă cu planul xOy şi se sprijină pe axa Oz şi pe cercul $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + z^2 &= 1 \\ y &= 4 \end{cases}$.

13. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă paralelă cu planul $(P) : x + y + z = 0$, care intersectează dreapta $(D) : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ şi curba $(C) : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

14. Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă paralelă cu planul $(P) : x + 3y - z + 11 = 0$, care se sprijină pe dreapta $(D) : \begin{cases} 2x + z - 4 &= 0 \\ 3y - 2z - 2 &= 0 \end{cases}$ şi pe curba $(C) : \begin{cases} x - 2z &= 0 \\ 2y - 3z + 4 &= 0 \end{cases}$.

15. Să se determine ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotaţia curbei $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 & = & 0 \\ x + z + 3 & = & 0 \end{cases}$ în jurul dreptei $(d) : x = y = z$.

16. Să se determine ecuaţia suprafaţei obţinută prin rotaţia dreptei de ecuaţii $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ în jurul axei Oz.

17. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia curbei $\begin{cases} x^3 - x^2 - y^2 & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$ în jurul axei Ox.

18. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia dreptei $\begin{cases} x + z & = & 2 \\ y & = & 0 \end{cases}$ în jurul dreptei $(D) : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

19. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia curbei $\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ x - z & = & 1 \end{cases}$ în jurul dreptei $(D) : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$.

20. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia cercului

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{în jurul axei } Oz.$$

21. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia elipsei

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{în jurul axei } Ox.$$

22. Să se determine ecuaţia suprafeţei generată prin rotaţia hiperbolei

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{în jurul axei } Oy.$$

Capitolul 6

Geometrie diferenţială

Geometria diferenţială este o ramură a matematicii care studiază proprietăţi ale curbelor şi suprafeţelor folosind calculul diferenţial şi integral.

Se consideră funcţia vectorială $\overrightarrow{r}: I \to \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Se notează:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{6.0.1}$$

unde funcţiile scalare x, y, z sunt funcţii reale de variabilă reală t.

Definiţia 6.0.1. *Se numeşte derivata funcţiei $\overrightarrow{r}$ în punctul t, funcţia $\overrightarrow{r}'(t)$ definită prin:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} = \overrightarrow{r}'(t), \tag{6.0.2}$$

dacă limita din membrul stâng există şi este finită.

Observaţia 6.0.2. *Derivata unui vector se poate interpreta mecanic ca viteza instantanee, expresia lui $\overrightarrow{r}(t)$ fiind legea de mişcare a unui punct.*

Teorema 6.0.3. *Fie $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$. Atunci $\overrightarrow{r}'(t)$ există dacă şi numai dacă funcţiile reale x, y, z sunt derivabile. Are loc egalitatea:*

$$\overrightarrow{r}'(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}.$$

Regulile de derivare pentru funcţii vectoriale sunt aceleaşi ca pentru funcţii reale. Astfel, dacă $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ sunt funcţii vectoriale derivabile iar f este o funcţie reală derivabilă în t atunci au loc:

$$(\overrightarrow{r_1}(t) \pm \overrightarrow{r_2}(t))' = \overrightarrow{r_1}'(t) \pm \overrightarrow{r_2}'(t)$$

$$(f(t)\overrightarrow{r_1}(t))' = f'(t)\overrightarrow{r_1}(t) + f(t)\overrightarrow{r_1}'(t)$$

$$(\overrightarrow{r_1}(t) \cdot \overrightarrow{r_2}(t))' = \overrightarrow{r_1}(t) \cdot \overrightarrow{r_2}'(t) + \overrightarrow{r_1}'(t) \cdot \overrightarrow{r_2}(t)$$

$$(\overrightarrow{r_1}(t) \times \overrightarrow{r_2}(t))' = \overrightarrow{r_1}(t) \times \overrightarrow{r_2}'(t) + \overrightarrow{r_1}'(t) \times \overrightarrow{r_2}(t)$$

6.1 Curbe plane

6.1.1 Reprezentarea analitică a unei curbe plane

Definiţia 6.1.1. *Se numeşte arc regulat de curbă plană o mulţime de puncte din plan care poate fi reprezentată analitic prin relaţii de forma:*

1. $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}$ *(ecuaţia explicită a curbei)*
2. $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *(ecuaţia implicită)*
3. $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ *(ecuaţii parametrice)*
4. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$ *(ecuaţia vectorială),*

unde funcţiile $f, F, x, y, \overrightarrow{r}$ *verifică următoarele condiţii:*

(i) *sunt funcţii uniforme, continue şi admit derivate (respectiv derivate parţiale) de ordinul întâi continue,*

(ii) *funcţiile x şi y stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele curbei şi mulţimea valorilor parametrului t,*

(iii) $F_x'^{\,2} + F_y'^{\,2} \neq 0, \quad x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t) \neq 0, \quad |\overrightarrow{r}'(t)| \neq 0$ *(condiţii de regularitate).*

Definiţia 6.1.2. *Un punct situat pe o curbă plană se numeşte punct singular dacă nu verifică cel puţin una dintre condiţiile de regularitate. Un punct al curbei care verifică toate aceste condiţii se numeşte punct ordinar.*

Observaţia 6.1.3. *O curbă plană poate fi definită uneori folosind coordonate polare, printr-o ecuaţie explicită sau implicită:*

$$\rho = \rho(\theta) \text{ sau } F(\rho, \theta) = 0.$$

Exemplul 6.1.4. *Cercul cu centrul în origine şi raza R, poate fi definit prin:*

- *ecuaţiile parametrice:* $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$,
- *ecuaţia implicită:* $x^2 + y^2 = R^2$,
- *ecuaţiile explicite:* $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$,
- *ecuaţia polară* $\rho = R$.

Definiţia 6.1.5. *Se numeşte arc regulat de ordinul n un arc de curbă plană regulată pentru care funcţiile prin care este reprezentat admit derivate (respectiv derivate parţiale) continue până la ordinul n astfel încât nu toate derivatele parţiale de acelaşi ordin să se anuleze.*

Exemple de curbe plane

Conicele prezentate în (4.1) sunt exemple cunoscute de curbe plane. Alte exemple: cicloida, astroida, cardioida.

a) *Cicloida* este curba trasată de un punct fix situat pe un cerc care se rostogoleşte, fără alunecare, de-a lungul unei drepte.

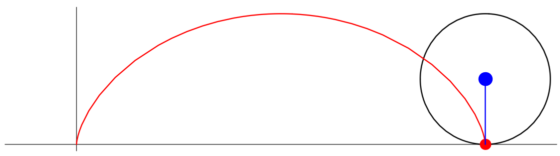


Figura 6.1: Cicloida

Ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) *Astroida* este curba descrisă de un punct fix situat pe un cerc de rază r care se rostogoleşte, fără alunecare, în interiorul unui cerc de rază $R = 4r$, cercul mobil fiind tangent (interior) la cercul fix.

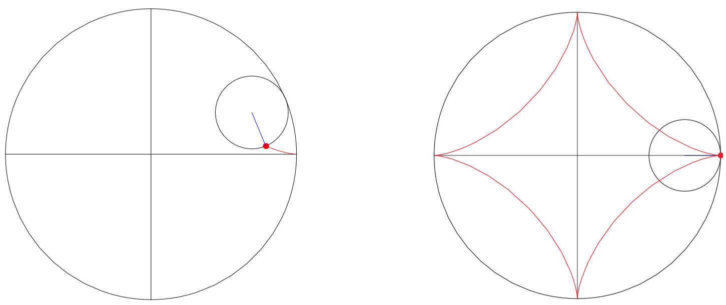


Figura 6.2: Astroida

Astroida este definită parametric şi implicit prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Generalizare: *hipocicloida* (cercul exterior are raza $R > r$) are ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = (R - r)\cos t + r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \\ y = (R - r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \end{cases}.$$

c) *Cardioida* este curba descrisă de un punct fix situat pe un cerc de rază r care se rostogoleşte, fără alunecare, în exeriorul unui cerc de aceeaşi rază, cele două cercuri fiind tangente.

Ecuaţia implicită a cardioidei este:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$$

iar ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x &= 2r\cos t - r\cos 2t \\ y &= 2r\sin t - r\sin 2t \end{cases} .$$

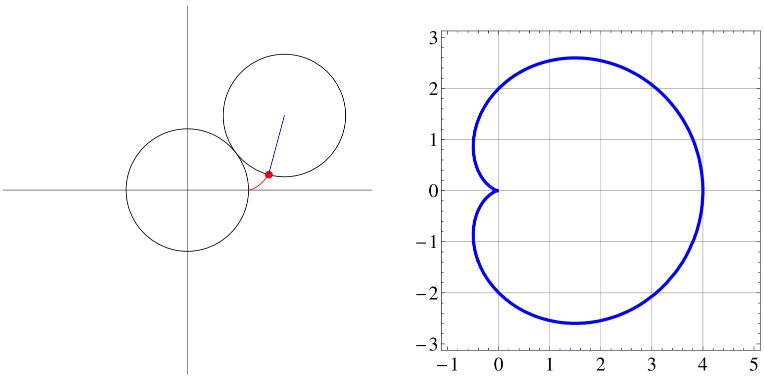


Figura 6.3: Cardioida

Generalizare: *epicicloida* (cercurile au raze diferite)

6.1.2 Lungimea unui arc de curbă. Element de arc.

Fie curba dată parametric $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, formată doar din puncte ordinare. Se demonstrează că lungimea curbei (C) este:

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă A este un punct fixat pe curba (C) iar M este un punct arbitrar al curbei, numim parametru natural al curbei, lungimea arcului (variabil) de curbă $\overset{\frown}{AM}$:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Se notează ds elementul de arc al curbei plane (C).
Pentru diferite reprezentări ale curbei avem:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

În prezentarea noţiunilor următoare, se vor considera doar arce de curbă plană regulată.

6.1.3 Tangenta şi normala la o curbă plană

Fie o curbă plană definită prin ecuaţiile parametrice $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ şi $M(x(t), y(t))$ un punct arbitrar al curbei.
Tangenta, respectiv normala la curbă în punctul M au ecuaţiile:

$$(T) : \frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)},\ (N) : x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0.$$

Dacă ecuaţia curbei este dată explicit atunci avem ecuaţiile:

$$(T) : Y - y(x) = y'(x)(X - x),\ (N) : Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x).$$

Pentru o curbă definită implicit avem ecuaţiile:

$$(T) : F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0,\ (N) : \frac{X - x}{F'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{F'_y(x, y)}.$$

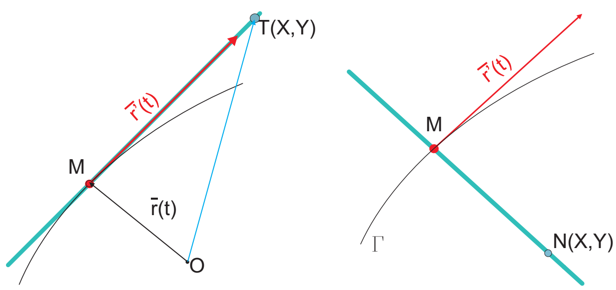


Figura 6.4: Tangenta şi normala la o curbă plană

6.1.4 Curbura unei curbe plane

Fie (C) o curbă plană regulată de ordin cel puţin doi.

Curbura curbei (C) reprezintă deviaţia curbei de la direcţia rectilinie a tangentei în fiecare punct al curbei.

Dacă α este unghiul format de tangenta la curba (C) într-un punct M cu axa Ox atunci curbura curbei în punctul M este limita raportului $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ (adică, derivata unghiului α în raport cu parametrul natural al curbei).

Se obţin următoarele formule pentru curbură, corespunzătoare diferitelor reprezentări ale unei curbe plane:

1. $K = \dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3}$

2. $K = \dfrac{y''(x)}{\left(\sqrt{1 + y'^2(x)}\right)^3}$

3. $K = \dfrac{\rho^2 - \rho\rho'' + 2\rho'^2}{\left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right)^3}$

4. $K = -\dfrac{(F'_x)^2 \cdot F''_{y^2} - 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} + (F'_y)^2 \cdot F''_{x^2}}{\left(\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2}\right)^3}.$

Observaţia 6.1.6. *O curbă pentru care $K = 0$, este un segment de dreaptă.*

Raportul $R = \frac{1}{|K|}$ se numeşte rază de curbură.

6.1.5 Cerc osculator. Evolută, evolventă.

Definiţia 6.1.7. *Fie (C) o curbă plană regulată de ordin cel puţin doi. Se numeşte cerc osculator la curba (C) în punctul M cercul având centrul pe normala la curbă şi raza egală cu raza de curbură.*

Centrul cercului osculator are coordonatele:

$$X = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$
$$Y = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}.$$

Definiţia 6.1.8. *Fie (C) o curbă plană. Locul geometric al centrelor de curbură (deci, al centrelor cercurilor osculatoare) se numeşte* ***evoluta*** *curbei.*

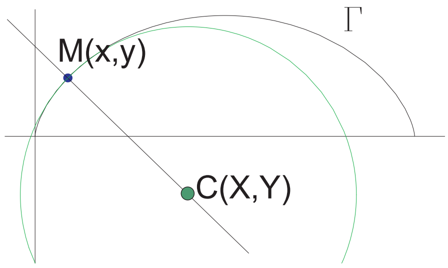


Figura 6.5: Cerc osculator

Ecuaţiile parametrice ale evolutei sunt date de relaţiile care exprimă coordonatele centrului cercului osculator.

Observaţia 6.1.9. *Cercul osculator este poziţia limită a unui cerc care trece prin punctele M, M_1, M_2 de pe curbă când M_1 şi M_2 tind către M.*

Definiţia 6.1.10. ***Evolventa*** *(desfăşurătoarea) unei curbe (C) este o curbă (C_1) care are ca evolută (desfăşurată) curba dată.*

Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane $(C_a) : F(x, y, a) = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$, este o curbă (C), cu următoarele proprietăţi:

(i) prin fiecare punct al curbei trece o singură curbă din familia (C_a),

(ii) fiecare curbă din familia considerată are un singur punct comun cu curba (C),

(iii) în punctele comune, curba (C) şi curbele din familia (C_a) admit tangente comune.

Ecuaţia înfăşurătoarei se obţine eliminând parametrul a între ecuaţia familiei de curbe şi ecuaţia obţinută egalând cu zero derivata în raport cu a.
Din sistemul $\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$ se determină o ecuaţie în x şi y.

Observaţia 6.1.11. *Tangentele la o curbă plană formează o familie de drepte care depind de un parametru. Înfăşurătoarea acestor drepte este chiar curba dată.*

Proprietatea 6.1.12. *Înfăşurătoarea familiei normalelor la o curbă plană este evoluta curbei. Astfel, evoluta poate fi reprezentată prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) = 0 \\ x''(t)(x - x(t)) + y''(t)(y - y(t)) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0 \end{cases}.$$

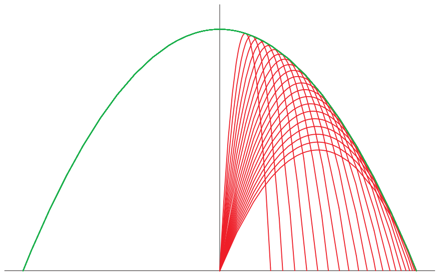


Figura 6.6: Înfăşurătoarea unei familii de curbe

Contactul a două curbe

Se consideră două curbe plane $(C_1) : y = f_1(x)$ şi $(C_2) : y = f_2(x)$. Pentru a afla punctele comune ale celor două curbe, se rezolvă ecuaţia $f_1(x) = f_2(x)$. Notând $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ problema se reduce la determinarea rădăcinilor ecuaţiei $g(x) = 0$. Pentru fiecare rădăcină se obţine un punct comun celor două curbe. Dacă x_0 este o rădăcină multiplă de ordinul $n + 1$ a ecuaţiei $g(x) = 0$, spunem că în punctul respectiv curbele au un contact de ordin n.

Observaţia 6.1.13. *Dacă două curbe au într-un punct un contact de ordinul întâi atunci au aceeaşi tangentă în acel punct. Dacă ordinul de contact este cel puţin doi, atunci în punctul respectiv curbele au aceeaşi tangentă, aceeaşi normală şi aceeaşi curbură.*

Proprietatea 6.1.14. *Curbele plane definite explicit prin ecuaţiile $y = f_1(x)$ şi $y = f_2(x)$ au într-un punct comun $M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n dacă şi numai dacă au loc relaţiile:*

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0), \dots, f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0)$$

şi $f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0)$.

Proprietatea 6.1.15. *Fie curbele plane $(C_1) : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ şi $(C_2) : F(x, y) = 0$ şi fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct comun, unde $x_0 = x(t_0)$ şi $y_0 = y(t_0)$. Cele două curbe au un contact de ordinul n în punctul M_0 dacă t_0 este rădăcină multiplă de ordinul $n + 1$ pentru funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = F(x(t), y(t))$, adică au loc relaţiile:*

$$f(t_0) = 0,\ f'(t_0) = 0, \dots, f^{(n)}(t_0) = 0,\ f^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

6.2 Curbe în spaţiu

6.2.1 Reprezentarea analitică a unei curbe spaţiale

Definiţia 6.2.1. *Se numeşte arc regulat de curbă spaţială o mulţime de puncte din spaţiu care poate fi reprezentată analitic prin relaţii de forma:*

1. $(C): \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ *(ecuaţia vectorială)*

2. $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$ *(ecuaţii parametrice)*

3. $(C): \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ *(ecuaţii implicite),*

unde funcţiile $\overrightarrow{r}, x, y, z, F, G$ verifică următoarele condiţii:

(i) sunt funcţii uniforme, continue şi admit derivate (respectiv derivate parţiale) de ordinul întâi continue,

(ii) funcţiile x, y şi z stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele curbei şi mulţimea valorilor parametrului t,

(iii) $|\overrightarrow{r}'(t)| \neq 0$, $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$ iar determinanţii funcţionali (jacobienii)

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \frac{D(F,G)}{D(z,x)}, \frac{D(F,G)}{D(x,y)} \text{ nu se anulează simultan}$$

(condiţii de regularitate).

Definiţia 6.2.2. *Un punct situat pe o curbă spaţială se numeşte punct singular dacă în acest punct nu este îndeplinită cel puţin una dintre condiţiile de regularitate. Punctele curbei care verifică toate condiţiile de regularitate se numesc puncte ordinare.*

Observaţia 6.2.3. *Ecuaţiile $F(x,y,z) = 0$ şi $G(x,y,z) = 0$ reprezintă ecuaţii implicite ale unor suprafeţe. Astfel, o curbă în spaţiu poate fi definită prin intersecţia a două suprafeţe. Ţinând cont că o suprafaţă se poate defini şi explicit, o altă reprezentare a unei curbe spaţiale este:*

$$(C): \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = g(x,y) \end{cases} \quad (\text{ecuaţii explicite}).$$

Definiţia 6.2.4. *Se numeşte arc regulat de curbă spaţială de ordinul n un arc de curbă spaţială regulată pentru care funcţiile prin care este reprezentat admit derivate (respectiv derivate parţiale) continue până la ordinul n astfel încât nu toate derivatele parţiale de acelaşi ordin să se anuleze.*

Exemple de curbe spaţiale

a) O elice cilindrică (circulară) este curba descrisă de un punct situat pe un cilindru, care efectuează o mişcare compusă dintr-o rotaţie în jurul axei cilindrului şi o translaţie de-a lungul acestei axe, cele două mişcări fiind proporţionale. Ecuaţiile parametrice sunt:

$$(C): \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt, \ t \in \mathbb{R}.$$

Eliminând parametrul t, se obţin ecuaţiile implicite ale elicei cilindrice:

$$x^2 + y^2 = a^2, \ z = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

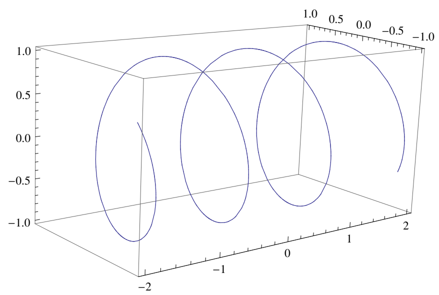


Figura 6.7: Elice cilindrică

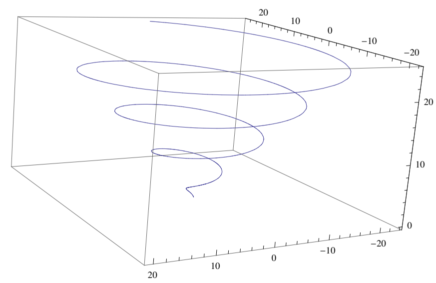


Figura 6.8: Elice conică

b) Curba descrisă de un punct care se deplasează cu viteză constantă pe o dreaptă care se roteşte cu viteză unghiulară constantă în jurul unei axe fixe, cu care formează un unghi de mărime constantă, se numeşte elice conică.

O elice conică poate fi reprezentată prin ecuaţiile parametrice:

$$x = at\cos t, \ y = at\sin t, \ z = bt,$$

sau prin ecuaţiile implicite:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} z^2, \ z = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

c) Un cerc în spaţiu este definit prin intersecţia unei sfere cu un plan. De exemplu, intersecţia planului xOy cu sfera de rază R având centrul în origine, este cercul de ecuaţii:

$$(C): \ \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

d) Curba obţinută prin intersecţia unei sfere cu un cilindru circular drept care trece prin centrul sferei şi are diametrul egal cu raza sferei, se numeşte *curba lui Viviani*. Ecuaţiile implicite sunt:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}$$

iar ecuaţiile parametrice sunt:

$$x=\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2},\ y=\frac{R}{2}\sin t,\ z=\pm R\sin\frac{t}{2},\ t\in[0,2\pi]\,.$$

O altă parametrizare este:

$$x=R\sin^2 t,\ y=\frac{R}{2}\sin 2t,\ z=\pm R\cos t.$$

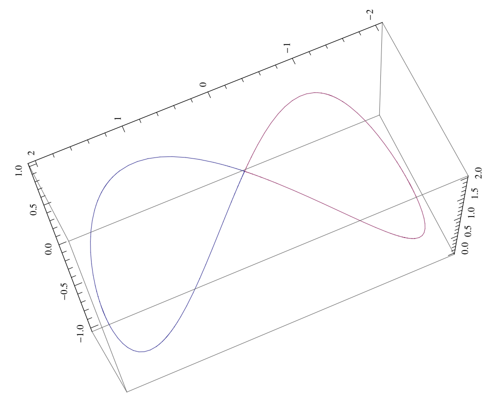


Figura 6.9: Curba lui Viviani

6.2.2 Lungimea unui arc de curbă din spaţiu

Se consideră o curbă spaţială regulată definită parametric. Distanţa dintre două puncte ale curbei aproximează lungimea Δs a arcului de curbă cuprins între cele două puncte.

Elementul de arc este, prin definiţie:

$$\mathrm{d}s=|\overrightarrow{r}'(t)|\mathrm{d}t=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Lungimea arcului de curbă de la A la B unde $A(t_1),B(t_2)\in(C)$ este

$$l(\overset{\frown}{AB})=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Dacă fixăm originea curbei în $A(t_0)$ iar $M(t)$ este un punct arbitrar al curbei atunci lungimea arcului variabil al curbei este dată de:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Parametrul s se numeşte **parametrul natural al curbei**.
În continuare, vom considera doar arce de curbă spaţială regulată.

6.2.3 Tangenta şi planul normal la o curbă din spaţiu

Fie curba spaţială $(C) : \overrightarrow{r} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ şi un punct $M \in (C)$. Vectorul director al tangentei în M este $\overrightarrow{r'}(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}$, deci ecuaţiile tangentei sunt:

$$(T) : \frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}.$$

Dacă se cunosc ecuaţiile implicite ale curbei atunci tangenta este dată prin:

$$(T) : \frac{X - x_0}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{Y - y_0}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{Z - z_0}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}},$$

unde $\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}$ etc.

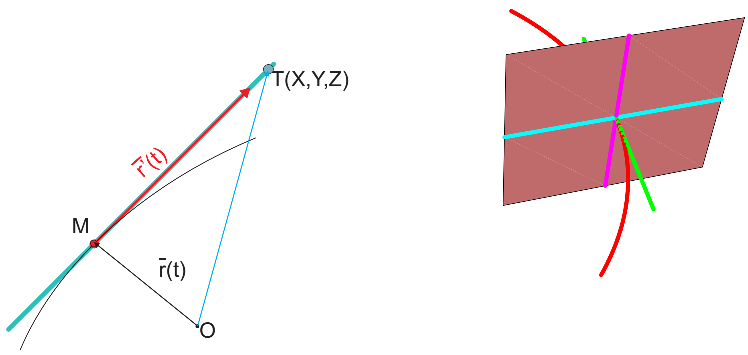


Figura 6.10: Tangenta şi planul normal

Planul normal la curba (C) în punctul M este planul care trece prin M şi este perpendicular pe tangentă. Astfel, planul normal are ca vector normal vectorul director al tangentei. Ecuaţia planului normal este:

$$(P_n) : x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0, \text{ respectiv}$$

$$(P_n): \frac{D(F,G)}{D(y,z)}(X - x_0) + \frac{D(F,G)}{D(z,x)}(Y - y_0) + \frac{D(F,G)}{D(x,y)}(Z - z_0) = 0.$$

Ultima ecuaţie se mai poate scrie sub forma:

$$(P_n): \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0.$$

6.2.4 Triedrul şi reperul lui Frenet

Fie (C) o curbă spaţială regulată de ordin cel puţin doi. În fiecare punct M al curbei se defineşte un triedru dreptunghic cunoscut sub numele de triedrul lui Frenet. Vom defini muchiile şi planele triedrului şi vom prezenta ecuaţiile acestora, precum şi expresiile versorilor reperului Frenet.
Fie M_0 un punct fixat al curbei spaţiale (C) şi M_1, M_2 două puncte ale curbei. Poziţia limită a planului $(M_0M_1M_2)$ când M_1 şi M_2 tind (pe curbă) spre M_0 se numeşte **plan osculator** al curbei (C) în M_0. Ecuaţia acestui plan este:

$$(P_o): \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după prima linie ecuaţia devine:

$$\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}(X - x(t)) + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & z'' \end{vmatrix}(Y - y(t)) + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}(Z - z(t)) = 0.$$

Observaţia 6.2.5. *Planul osculator al unei curbe plane coincide cu planul curbei.*

Intersecţia dintre planul normal şi planul osculator al curbei în punctul M se numeşte **normala principală**, notată (N) şi este dată prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0 \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}(X - x(t)) + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}(Y - y(t)) + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}(Z - z(t)) = 0 \end{cases}.$$

Dreapta perpendiculară pe planul osculator se numeşte **binormală**. Vectorul director al binormalei este vectorul normal al planului osculator, deci ecuaţiile acesteia sunt:

$$(B): \frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Planul rectificant este planul determinat de tangentă şi binormală şi este perpendicular pe normala principală. Astfel, ecuaţia planului rectificant este:

$$(P_r): \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

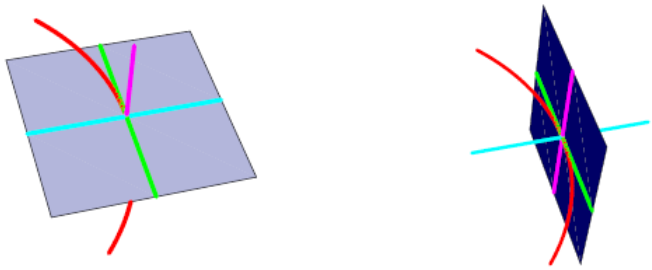


Figura 6.11: Plan osculator. Plan rectificant.

Definiţia 6.2.6. *Se numeşte triedrul Frenet la curba (C) în punctul M triedrul format din planul osculator, planul normal şi planul rectificant (feţele triedrului). Muchiile triedrului sunt dreptele de intersecţie ale acestor plane: tangenta, normala principală şi binormala.*

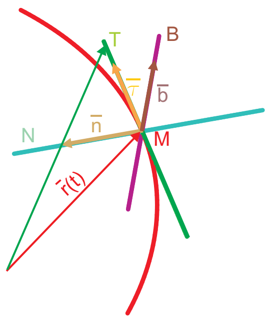


Figura 6.12: Reperul lui Frenet: versori

Reperul Frenet în punctul M este definit prin $\{M, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ unde $\overrightarrow{t}$ este versorul tangentei, $\overrightarrow{n}$ versorul normalei principale iar $\overrightarrow{b}$ versorul binormalei.

$$\overrightarrow{t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \frac{\overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r}'|}, \ \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''}{|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''|}, \ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{t}.$$

6.2.5 Curbura şi torsiunea unei curbe spaţiale

Vom considera o curbă spaţială regulată de ordin cel puţin 3.

Curbura unei curbe spaţiale într-un punct dat se defineşte la fel ca în cazul unei curbe plane. Intuitiv, curbura reprezintă rapiditatea de abatere a curbei de la direcţia rectilinie a tangentei.

Torsiunea unei curbe din spaţiu într-un punct dat are ca semnificaţie intuitivă rapiditatea de abatere a curbei de la situaţia de curbă plană (deviaţia curbei de la planul osculator).

Pentru a calcula curbura K şi torsiunea T, folosim următoarele formule:

$$K = \frac{|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''|}{|\overrightarrow{r}'|^3}, \quad \text{respectiv } T = \frac{(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''')}{|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''|^2},$$

$$\text{unde } |\overrightarrow{r}'| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''| = \sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}$$

$$\text{iar } (\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''') = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}.$$

Raza de curbură este $\frac{1}{K}$ iar raza de torsiune este $\frac{1}{|T|}$.

Observaţia 6.2.7. *O curbă este plană dacă are torsiunea identic nulă, planul curbei fiind planul osculator într-un punct arbitrar. Dacă o curbă are curbura identic nulă, atunci curba este un segment de dreaptă.*

Formulele lui Frenet sunt relaţii între derivatele versorilor reperului lui Frenet şi versori. Prin aceste relaţii se exprimă modul cum variază reperul lui Frenet în funcţie de curbură şi torsiune.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{t}}{\mathrm{d}s} = K\overrightarrow{n}, \; \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}s} = -K\overrightarrow{t} + T\overrightarrow{b}, \; \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{b}}{\mathrm{d}s} = -T\overrightarrow{n} \tag{6.2.1}$$

Formulele (6.2.1) se pot scrie sub forma unui tabel:

	$\overrightarrow{t}$	$\overrightarrow{n}$	$\overrightarrow{b}$
$\frac{d\overrightarrow{t}}{ds}$	0	K	0
$\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}$	$-K$	0	T
$\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}$	0	$-T$	0

6.3 Suprafeţe

6.3.1 Reprezentări analitice ale unei suprafeţe

Definiţia 6.3.1. *Se numeşte porţiune regulată de suprafaţă o mulţime* (S) *de puncte din spaţiu ale căror coordonate verifică relaţii de forma:*

1. $F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ *(ecuaţia implicită)*
2. $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D' \subset \mathbb{R}^2$ *(ecuaţia explicită)*
3. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v), \quad (u, v) \in [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ *(ecuaţia vectorială)*
4. $(S): \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ *(ecuaţii parametrice)*

unde funcţiile $F, f, \overrightarrow{r}, x, y, z$ *îndeplinesc condiţiile:*

(i) sunt funcţii uniforme, continue şi admit derivate parţiale de ordinul întâi continue,

(ii) x, y *şi* z *stabilesc o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între punctele* $M \in (S)$ *şi mulţimea valorilor parametrilor* u *şi* v,

(iii) cel puţin unul dintre jacobienii $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}, \dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}, \dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}$ *este nenul.*

Pentru o suprafaţă definită parametric, perechile (u, v) formează un sistem de coordonate pentru punctele suprafeţei. Un punct definit prin coordonate curbilinii se notează $M(u, v) \in (S)$.
O porţiune de suprafaţă regulată de ordinul 2 este o porţiune de suprafaţă pentru care funcţiile F, f, $\overrightarrow{r}$, x, y şi z admit derivate parţiale continue de ordinul 2 astfel încât nu toate derivatele parţiale de acelaşi ordin să fie nule.

Exemple de suprafeţe

Cea mai simplă suprafaţă este planul. Alte suprafeţe cunoscute sunt cuadricele, prezentate în secţiunea 4.2, suprafeţele riglate şi suprafeţele de rotaţie (cap. 5).

O suprafaţă conoidă cunoscută este suprafaţa elicoidală sau *elicoidul.* O reprezentare parametrică a elicoidului este:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = bv.$$

Un exemplu de suprafaţă de rotaţie este *torul.* Acesta este generat prin rotaţia unui cerc în jurul unei drepte care este situată în acelaşi plan şi care este exterioară cercului. De exemplu, prin rotaţia cercului $(x-a)^2+z^2=r^2$ în jurul axei Oz, se obţine torul cu ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2+a^2-r^2=2a\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ecuaţiile parametrice ale torului sunt:

$$\begin{cases} x &= (a+r\cos u)\cos v \\ y &= (a+r\cos u)\sin v \\ z &= r\sin u \end{cases},\ (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi].$$

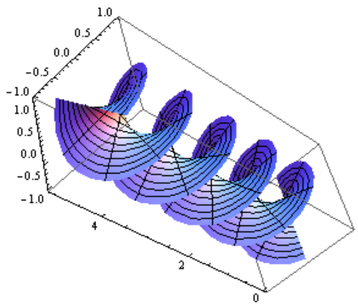


Figura 6.13: Elicoid

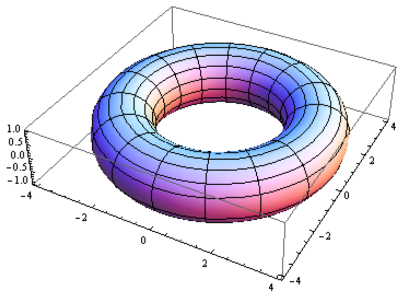


Figura 6.14: Tor

Curbe trasate pe o suprafaţă. Curbe de coordonate.

Definiţia 6.3.2. *Se numeşte curbă pe o suprafaţă definită parametric mulţimea punctelor de pe suprafaţă care verifică una dintre relaţiile:*

$$u=f(v),\ v=g(u) \ \textit{sau}\ h(u,v)=0$$

sau u şi v sunt funcţii care depind de acelaşi parametru t.

În particular, pentru $M_0(u_0,v_0)\in(S)$, se definesc curbele de coordonate:

(i) curba de coordonată v: $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u_0,v)$

(ii) curba de coordonată u: $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v_0)$

Prin fiecare punct al suprafeţei trece o singură curbă u şi o singură curbă v, acestea având tangente diferite în punctul respectiv. Cele două familii de coordonate (curbe u şi curbe v) formează o reţea pe suprafaţă.

6.3.2 Plan tangent. Dreaptă normală la o suprafaţă.

Planul tangent la suprafaţa regulată (S) în punctul $M \in (S)$ este planul format din tangentele tuturor curbelor de pe suprafaţă care trec prin M.

1. Ecuaţia planului tangent la o suprafaţă definită parametric este:

$$(P_t): \begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x'_u(u,v) & y'_u(u,v) & z'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix} = 0\,.$$

2. Pentru o suprafaţă definită implicit, ecuaţia planului tangent la (S) într-un punct arbitrar $M(x,y,z) \in (S)$ este:

$$(P_t):\ F'_x(x,y,z)(X-x) + F'_y(x,y,z)(Y-y) + F'_z(x,y,z)(Z-z) = 0.$$

3. Pentru suprafaţa definită explicit, planul tangent are ecuaţia:

$$(P_t):\ p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z(x,y)) = 0,\ \ p = f'_x(x,y),\ q = f'_y(x,y).$$

Normala la suprafaţa (S) în punctul $M \in (S)$ este perpendiculara pe planul tangent la (S) în M.

1. Pentru o suprafaţă definită parametric avem:

$$(N):\ \frac{X - x(u,v)}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{Y - y(u,v)}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{Z - z(u,v)}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}\,.$$

2. Pentru o suprafaţă definită implicit, normala are ecuaţiile::

$$(N):\ \frac{X-x}{F'_x(x,y,z)} = \frac{Y-y}{F'_y(x,y,z)} = \frac{Z-z}{F'_z(x,y,z)}.$$

3. Ecuaţiile normalei la o suprafaţă definită prin ecuaţia explicită sunt:

$$(N):\ \frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z(x,y)}{-1}\,.$$

Observaţia 6.3.3. *Vectorul normal la suprafaţă (vectorul director al normalei) este* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_u}' \times \overrightarrow{r_v}'$.

Cosinuşii directori ai normalei:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

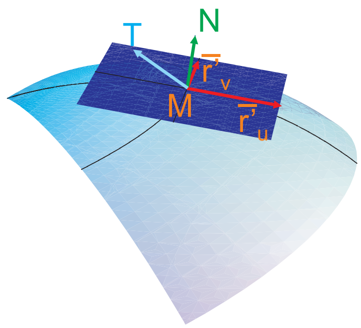


Figura 6.15: Plan tangent. Normala la o suprafaţă.

6.3.3 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

Definiţia 6.3.4. *Fie $(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ o suprafaţă regulată şi (C) o curbă trasată pe suprafaţa (S). Se numeşte **prima formă fundamentală** a suprafeţei (S) expresia*

$$\Phi_1 = \mathrm{d}s^2,$$

unde $\mathrm{d}s$ *este elementul de arc al curbei (C).*

Are loc: $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_u}'\,\mathrm{d}u + \overrightarrow{r_v}'\,\mathrm{d}v$, de unde rezultă că:

$$|\mathrm{d}\overrightarrow{r}|^2 = \mathrm{d}\overrightarrow{r}^2 = \overrightarrow{r_u}'^{\,2}\,\mathrm{d}u^2 + 2\overrightarrow{r_u}'\overrightarrow{r_v}'\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \overrightarrow{r_v}'^{\,2}\,\mathrm{d}v^2.$$

Ştiind că $\mathrm{d}s = |\overrightarrow{r'(t)}\,|\mathrm{d}t = |\mathrm{d}\overrightarrow{r}|$ deducem că $\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}\overrightarrow{r}|^2$.

Astfel, expresia primei forme fundamentale a unei suprafeţe definite prin ecuaţia vectorială este:

$$\Phi_1 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,\ \text{unde } E = \overrightarrow{r_u}'^2,\ F = \overrightarrow{r_u}'\overrightarrow{r_v}',\ G = \overrightarrow{r_v}'^2.$$

Teorema 6.3.5. *1. Dacă (S) este definită prin ecuaţiile parametrice, atunci:*

$$\Phi_1 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,\ \textit{unde}$$

$$E = (x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2,\ F = x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v',\ G = (x_v')^2+(y_v')^2+(z_v')^2.$$

2. Dacă suprafaţa este definită explicit, avem:

$$\Phi_1 = (1+p^2)\mathrm{d}x^2 + 2pq\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (1+q^2)\mathrm{d}y^2.$$

3. Dacă suprafaţa este definită prin ecuaţia implicită, atunci are loc:

$$\Phi_1 = \frac{(F_x'^{\,2} + F_z'^{\,2})\,\mathrm{d}x^2 + 2F_x'F_y'\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (F_y'^{\,2} + F_z'^{\,2})\,\mathrm{d}y^2}{F_z'^{\,2}}.$$

Elementul de arc al curbei (C) este:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E(u(t), v(t))u'^{\,2}(t) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Prima formă fundamentală defineşte metrica suprafeţei. Cu ajutorul acestei expresii se pot calcula: lungimea unei curbe situate pe suprafaţă, unghiul dintre două direcţii tangente într-un punct al suprafeţei precum şi aria unui domeniu de pe suprafaţă.

Lungimea unui arc de curbă

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă situat pe suprafaţa (S), definit prin ecuaţiile

$$u = u(t),\ v = v(t),\ t \in [a, b].$$

Lungimea arcului se calculează cu formula:

$$l(\overset{\frown}{AB}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{Eu'^{\,2}(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t,$$

unde E, F, G se calculează în punctul $M(u(t), v(t))$.

6.3.4 Unghiul a două curbe situate pe o suprafaţă

Fie (C_1) şi (C_2) două curbe trasate pe o suprafaţă (S) şi M un punct care aparţine intersecţiei celor două curbe. Prin definiţie, unghiul format de (C_1) şi (C_2) în punctul M este unghiul α format de tangentele la cele două curbe în M. Se notează $\mathrm{d}u$ şi $\mathrm{d}v$, respectiv δu şi δv diferenţialele lui u şi v de-a lungul lui (C_1) respectiv (C_2). Folosind formulele:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r} \cdot \delta\overrightarrow{r}}{|\mathrm{d}\overrightarrow{r}| \cdot |\delta\overrightarrow{r}|},\ \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_u}'\mathrm{d}u + \overrightarrow{r_v}'\mathrm{d}v,\ \delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_u}'\delta u + \overrightarrow{r_v}'\delta v,$$

se obţine:

$$\cos\alpha = \frac{E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

unde E, F, G sunt coeficienţii primei forme fundamentale ale suprafeţei, calculaţi în punctul M.

Observaţia 6.3.6. *Dacă se consideră două curbe de coordonate care trec prin M, de exemplu (C_1) curbă u ($\mathrm{d}v = 0$) iar (C_2) curbă v ($\delta u = 0$), atunci*

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Definiţia 6.3.7. *Două curbe (C_1), (C_2) trasate pe o suprafaţă regulată sunt ortogonale în punctul $M \in (C_1) \cap (C_2)$ dacă măsura unghiului format de tangentele în M la aceste curbe este egal cu $\frac{\pi}{2}$.*

Observaţia 6.3.8. *Două curbe sunt ortogonale dacă în punctul de intersecţie are loc relaţia:*

$$E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v = 0.$$

În particular, două curbe de coordonate care trec prin M sunt ortogonale dacă $F = 0$.

6.3.5 Elementul de arie al unei suprafeţe

Se consideră o porţiune de suprafaţă regulată (S), având reprezentarea vectorială:

$$(S): \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v),\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Pentru a calcula aria porţiunii de suprafaţă (S), aceasta se împarte în paralelograme curbilinii cu ajutorul unor familii de curbe de coordonate (C_u), (C_v), trasate pe suprafaţă.

Fiecărui paralelogram curbiliniu i se asociază un paralelogram (rectiliniu) situat în planul tangent la (S) dus printr-un vârf al său. Aria paralelogramului curbiliniu se va aproxima astfel cu aria acestui paralelogram asociat. Prin însumare, rezultă că aria porţiunii de suprafaţă (S) se aproximează cu suma ariilor paralelogramelor aproximante.

Teorema 6.3.9. *Aria unei porţiuni de suprafaţă regulată (S) este:*

$$A(S) = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

unde E, F, G sunt coeficienţii primei forme fundamentale ale lui (S).

Definiţia 6.3.10. *Se numeşte **element de arie** al suprafeţei (S) expresia*

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Observaţia 6.3.11. *Dacă (S) este definită explicit prin ecuaţia $z = f(x,y)$, atunci:*

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

iar dacă suprafaţa este definită prin ecuaţia implicită $F(x,y,z) = 0$, atunci:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\sqrt{F_x'^{\,2} + F_y'^{\,2} + F_z'^{\,2}}}{F_z'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6.3.6 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe

Definiţia 6.3.12. *Se consideră* $(S): \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$ *o suprafaţă regulată de ordin cel puţin doi şi* $M \in (S)$. *Se numeşte* ***a doua formă fundamentală*** *a suprafeţei* (S) *expresia*

$$\Phi_2 = \overrightarrow{n} \cdot \mathrm{d}^2\overrightarrow{r},$$

unde $\overrightarrow{n}$ *este versorul normalei la suprafaţă în punctul* M.

La fel ca în cazul primei forme fundamentale, expresia celei de-a doua forme fundamentale este dată de modul de definire a suprafeţei.

Teorema 6.3.13. *Fie* (S) *o suprafaţă regulată de ordin cel puţin doi.*

1. *Dacă* (S) *este definită prin ecuaţia vectorială* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$ *atunci:*

$$\Phi_2 = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2, \text{ unde}$$

$$L = \frac{(\overrightarrow{r_u}', \overrightarrow{r_v}', \overrightarrow{r}''_{uu})}{|\overrightarrow{r_u}' \times \overrightarrow{r_v}'|},\ M = \frac{(\overrightarrow{r_u}', \overrightarrow{r_v}', \overrightarrow{r}''_{uv})}{|\overrightarrow{r_u}' \times \overrightarrow{r_v}'|},\ N = \frac{(\overrightarrow{r_u}', \overrightarrow{r_v}', \overrightarrow{r}''_{vv})}{|\overrightarrow{r_u}' \times \overrightarrow{r_v}'|}.$$

2. *Dacă* (S) *este definită prin ecuaţiile parametrice, atunci:*

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},\ N = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\text{unde } EG - F^2 = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2.$$

3. *Dacă suprafaţa este definită prin ecuaţia explicită* $z = f(x,y)$, *atunci:*

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \right),$$

unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x},\ q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Proprietatea 6.3.14. *1. Dacă o suprafaţă este plană atunci* $L = M = N = 0$.
2. O suprafaţă este sferică dacă şi numai dacă $\dfrac{E}{L} = \dfrac{F}{M} = \dfrac{G}{N}$.

6.3.7 Curbura unei curbe pe o suprafaţă

Forma unei suprafeţe influenţează forma fiecărei curbe situate pe suprafaţa respectivă. De asemenea, folosind forma curbelor situate pe o suprafaţă, care trec prin acelaşi punct, se poate determina forma acestei suprafeţe, în jurul punctului respectiv.
Fie (S) o suprafaţă regulată de ordin cel puţin doi iar (C) o curbă trasată pe suprafaţă, care trece printr-un punct $M \in (S)$. Se consideră $\overrightarrow{\tau}$ versorul tangentei şi $\overrightarrow{\nu}$ versorul normalei principale la curba (C) în punctul M iar $\overrightarrow{n}$ versorul normalei la suprafaţa (S) în M. Dacă R este raza de curbură a curbei (C) în punctul M, conform primei formule a lui Frenet, are loc relaţia

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}, \text{ adică, } \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}.$$

Înmulţind scalar cu $\overrightarrow{n}$ ultima egalitate deducem că

$$\frac{\overrightarrow{n}\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\cos\theta}{R},$$

unde θ este unghiul format de normalele $\overrightarrow{\nu}$ şi $\overrightarrow{n}$. S-a obţinut formula:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Teorema 6.3.15. *Se consideră (S) o suprafaţă regulată de ordin cel puţin doi. Fie (C_1) şi (C_2) două curbe trasate pe (S), care trec printr-un punct $M \in (S)$ şi care au razele de curbură R_1, respectiv R_2 în M. Fie $\overrightarrow{\tau_1}$, $\overrightarrow{\tau_2}$, $\overrightarrow{\nu_1}$, $\overrightarrow{\nu_2}$ versorii tangentelor, respectiv normalelor principale la cele două curbe în M iar $\overrightarrow{n}$ versorul normalei la (S) în M. Dacă $\overrightarrow{\tau_1} = \overrightarrow{\tau_2}$ atunci are loc:*

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = \frac{\cos\theta_2}{R_2},$$

unde θ_1, θ_2 sunt unghiurile formate de $\overrightarrow{n}$ cu $\overrightarrow{\nu_1}$, respectiv $\overrightarrow{\nu_2}$.

Observaţia 6.3.16. *Din teorema 6.3.15 rezultă că toate curbele trasate pe (S) care au aceeaşi tangentă în M vor avea aceeaşi curbură, egală cu raportul $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ înmulţit cu $\frac{1}{\cos\theta}$, θ fiind unghiul format de versorul normalei la suprafaţă în M şi versorul tangentei la curbele considerate.*

6.3.8 Curbura normală. Curburi principale.

Definiţia 6.3.17. *Fie (S) o suprafaţă regulată de ordin cel puţin doi iar $\overrightarrow{n}$ versorul normalei în $M \in (S)$. Fie $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de curbe trasate pe (S), tangente în M iar $\overrightarrow{\tau}$ versorul tangentei. Se numeşte secţiune normală asociată familiei de curbe considerate, curba plană (C_n) obţinută prin intersecţia suprafeţei cu planul determinat de M, $\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{\tau}$.*

Definiţia 6.3.18. *Se numeşte **curbură normală** a curbei (C_α) în punctul M, expresia $\pm\dfrac{1}{R_n}$, unde R_n este raza de curbură a secţiunii normale (C_n).*

Observaţia 6.3.19. *Valoarea absolută a curburii normale a curbei (C_α) este egală cu curbura $\dfrac{1}{R_n}$ a secţiunii normale asociate curbei (C_α).*

Deoarece toate curbele considerate (C_α) au aceeaşi tangentă în punctul comun M, din definiţia 6.3.18 rezultă că acestea au aceeaşi curbură normală.

Notăm K_n curbura normală a suprafeţei (S) în punctul M după o direcţie $\overrightarrow{\tau}$ din planul tangent în M la (S).
Are loc formula:

$$K_n = \frac{L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2},$$

care se mai poate scrie sub forma:

$$K_n = \frac{Lm^2 + 2Mm + N}{Em^2 + 2Fm + G}, \text{ unde } m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Definiţia 6.3.20. *Valorile extreme ale curburii normale la suprafaţa (S) în punctul M se numesc **curburi principale** iar direcţiile pe care se află se numesc **direcţii principale**.*

Notăm k_1 şi k_2 curburile principale ale suprafeţei (S) în M.

Teorema 6.3.21. *Curburile principale ale suprafeţei (S) în M sunt rădăcinile ecuaţiei*

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0,$$

care se mai poate scrie echivalent

$$(EG - F^2)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + LN - M^2 = 0.$$

Definiţia 6.3.22. *Un punct $M \in (S)$ se numeşte **punct ombilical** dacă în acest punct curburile principale sunt egale.*

Observaţia 6.3.23. *Într-un punct ombilical curbura normală este constantă iar coeficienţii celor două forme fundamentale sunt proporţionali, adică:*

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}.$$

De asemenea, direcţiile principale într-un punct ombilical $M \in (S)$ sunt nedeterminate (orice direcţie pe suprafaţă în punctul M este direcţie principală).

Proprietatea 6.3.24. *Fie $M \in (S)$ un punct care nu este ombilical. Atunci direcţiile principale în M sunt ortogonale.*

Definiţia 6.3.25. *Se numeşte* ***curbură totală*** *(curbura Gauss) în $M \in (S)$ şi se notează K, produsul curburilor principale.*
Se numeşte ***curbură medie*** *în M şi se notează H, semisuma curburilor principale.*

Observaţia 6.3.26. *Au loc formulele:*

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Definiţia 6.3.27. *Un punct M al unei suprafeţe regulate (S) se numeşte:*

a) ***punct eliptic*** *al suprafeţei dacă în M curbura totală este pozitivă;*

b) ***punct hiperbolic*** *al suprafeţei dacă în M curbura totală este negativă;*

c) ***punct parabolic*** *al suprafeţei dacă în M curbura totală este nulă.*

O suprafaţă formată numai din puncte eliptice se numeşte suprafaţă de tip eliptic. Dacă suprafaţa este formată numai din puncte hiperbolice este o suprafaţă de tip hiperbolic iar dacă este formată doar din puncte parabolice, suprafaţa este de tip parabolic.

Exemple 6.3.28. *a) Elipsoidul, sfera, hiperboloidul cu două pânze, parabolidul eliptic sunt suprafeţe de tip eliptic.*
De exemplu, o sferă de rază R are curbura totală $K = \dfrac{1}{R^2} > 0$.

b) Hiperboloidul cu o pânză, parabolidul hiperbolic sunt suprafeţe de tip hiperbolic.

c) Planul, suprafeţele cilindrice, suprafeţele conice sunt suprafeţe de tip parabolic.

Definiţia 6.3.29. *O suprafaţă care are curbura medie nulă în toate punctele sale se numeşte suprafaţă minimală.*

Observaţia 6.3.30. *O suprafaţă minimală are curbura totală negativă.*

Exemplul 6.3.31. *Elicoidul este o suprafaţă minimală ($H = 0$).*

6.4 Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei la astroidă într-un punct arbitrar.

2. Să se afle ecuaţiile tangentei şi normalei la curba $y = x^2 + 4x + 3$ în punctul de intersecţie cu axa Oy.

3. Să se afle ecuaţiile tangentei şi normalei la curba:
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \text{ în punctul } A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right).$$

4. Să se afle lungimea curbei $x = 8at^3$, $y = 3a\left(2t^2 - t^4\right)$ cuprinsă între punctele care corespund lui $t = 0$ şi $t = \sqrt{2}$.

5. Să se afle lungimea curbei $(C) : y = x\sqrt{x}$, $x \in [1, 2]$.

6. Să se afle curbura într-un punct arbitrar al curbei de ecuaţii
$$(C) : \begin{cases} x &= ae^{-t}(\cos t - \sin t) \\ y &= ae^{-t}(\cos t + \sin t) \end{cases}, \ a > 0.$$

7. Să se calculeze curbura parabolei de ecuaţie $y^2 = 2px$, pentru $y = 0$.

8. Să se demonstreze că normala la cicloidă într-un punct M intersectează axa Ox în mijlocul segmentului MC unde C este centrul de curbură.

9. Să se determine înfăşurătoarea familiei de curbe:
   a) $x \sin p + y \cos p - a \sin p \cos p = 0$, $p \in \mathbb{R}$
   b) $(1 - p^2)\, x + 2py - a = 0$, $p \in \mathbb{R}$

10. Fie cicloida $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.
    a) Să se determine cercul osculator în punctul corespunzător lui $t = \pi$.
    b) Să se determine evoluta cicloidei.

11. Să se afle ordinul de contact al curbelor plane
$$(C_1) : y = 2x^4 - 1 \text{ şi } (C_2) : y = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 3$$
în punctul $M(1, 1)$.

12. Să se afle ordinul de contact al curbelor plane $(C_1) : y = \cos x$ şi $(C_2) : x^2 + y^2 = 1$ în punctul $M(0,1)$.

13. Să se calculeze lungimea curbei

$$(C) : \ x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos(2t), \ t \in [0, 2\pi].$$

14. Fie curba $(C) : \overrightarrow{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$. Să se determine elementul de arc şi să se calculeze lungimea arcului cuprins între punctele A şi B care corespund valorilor $t = 0$, $t = 1$.

15. Să se determine ecuaţiile tangentei, ecuaţia planului normal şi versorul tangentei la curba (C) de ecuaţii:

$$\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \\ z &= 4a \sin \dfrac{t}{2} \end{cases}, \text{ în punctul corespunzător lui } t = \frac{\pi}{2}.$$

16. Să se afle ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curba de ecuaţii $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 \end{cases}$ în punctul $M(\sqrt{3}, 1, 1)$.

17. Să se determine ecuaţiile tangentelor la curba

$$(C) : \overrightarrow{r}(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right),$$

care sunt paralele cu planul $(P) : 3x + y + z + 2 = 0$.

18. Fie curba $(C) : \overrightarrow{r}(t) = (t^3 + t + 1, 1 - t, t^3 + 2)$. Să se arate că este o curbă plană şi să se scrie ecuaţia planului în care este situată.

19. Să se afle ecuaţia planului osculator şi ecuaţiile binormalei la curba

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \text{ în punctul } M(1, 1, 1).$$

20. Să se afle ecuaţia planului rectificant şi ecuaţiile normalei principale la curba:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

într-un punct arbitrar.

21. Să se determine ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frenet în punctul $M(2, 1, 0)$ situat pe curba $(C) : \overrightarrow{r}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t > 0$.

22. Să se afle afle versorii reperului lui Frenet pentru curba:
$$x = t\sin t, y = t\cos t, z = te^t \text{ în punctul } M(0,0,0).$$

23. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei
$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos(2t), \ t \in [0, 2\pi],$$
în punctul corespunzător lui $t = \dfrac{\pi}{3}$.

24. Să se determine planul tangent şi normala la suprafeţele:
    a) $(S): x = u + v, y = u - v, z = uv$ în punctul corespunzător lui $u = 2, v = 1$
    b) $(S): z = \cos x + \sin y$, în punctul $M\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi, 0\right)$
    c) $(S): x^3yz + 2xy^2 - y^3z^2 - 4z^3 - 2 = 0$ în punctul $M(1, 2, -1)$

25. Să se afle ecuaţia planului tangent la torul:
$$x = (7 + 5\cos u)\cos v, \ y = (7 + 5\cos u)\sin v, \ z = 5\sin u$$
în punctul M pentru care $\cos u = 3/5$, $\cos v = 4/5$, $u, v \in [0, \pi/2]$.

26. Să se arate că suprafaţa $(S): x = u^2 + v^2, u = uv, z = (u + v)^2$ este un plan.

27. Să se determine prima formă fundamentală a cilindrului de ecuaţii
$$x = R\cos u, y = R\sin u, z = v.$$

28. Se consideră suprafaţa $(S): \overrightarrow{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u + v)$. Să se calculeze lungimea arcului curbei $u = 1$ cuprins între curbele $v = 1$ şi $v = 2$.

29. Fie suprafaţa $(S): x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = v$. Să se calculeze perimetrul triunghiului curbiliniu determinat de curbele $(C_1): v = 1$, $(C_2): u = \dfrac{1}{2}v^2$, $(C_3): u = -\dfrac{1}{2}v^2$, situate pe suprafaţa (S).

30. Să se afle unghiul dintre curbele $u - v = 1$ şi $u + v = 3$ situate pe suprafaţa de ecuaţii $x = v\cos u, \ y = v\sin u, \ z = v^2$.

31. Fie suprafaţa $(S) : \overrightarrow{r}(u,v) = (u+\cos v, u-\sin v, \sqrt{2}u)$. Să se determine unghiul format de curbele de coordonate care trec prin punctul corespunzător lui $u = 1$ şi $v = \frac{\pi}{2}$.

32. Să se calculeze aria torului $\begin{cases} x = (a+b\cos u)\cos v \\ y = (a+b\cos u)\sin v \\ z = b\sin u \end{cases}$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

33. Să se determine a doua formă fundamentală a suprafeţei

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, u^2+v^2\right).$$

34. Să se calculeze curburile principale pentru:

   a) cilindrul $\overrightarrow{r}(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$

   b) suprafaţa $(S) : z = xy$ în punctul $M(1,1,1)$

35. Fie suprafaţa $(S) : \overrightarrow{r}(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$. Să se calculeze curbura totală şi curbura medie în punctul corespunzător lui $u = 1$, $v = 2$.

Soluţii:

1. Din ecuaţiile parametrice ale astroidei: $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, rezultă: $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$.

Ecuaţia tangentei: $\dfrac{X - x(t)}{x'(t)} = \dfrac{Y - y(t)}{y'(t)} \Leftrightarrow \dfrac{X - a\cos^3 t}{-\cos t} = \dfrac{Y - a\sin^3 t}{\sin t}$.

Se obţine ecuaţia: $X\sin t + Y\cos t - \frac{a}{2}\sin 2t = 0$.

Ecuaţia normalei: $x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0$, adică:

$$\begin{aligned}
-\cos t\left(X - a\cos^3 t\right) + \sin t\left(Y - a\sin^3 t\right) &= 0 \\
-X\cos t + Y\sin t + a\left(\cos^4 t - \sin^4 t\right) &= 0 \\
-X\cos t + Y\sin t + a\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) &= 0 \\
-X\cos t + Y\sin t + a\cos 2t &= 0.
\end{aligned}$$

2. Intersecţia curbei cu axa Oy este punctul $M(0,3)$. Ecuaţia tangentei la curbă în punctul M este:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x) \Leftrightarrow 4X - Y + 3 = 0$$

iar ecuaţia normalei este:

$$Y - f(x) = \frac{-1}{f'(x)}(X - x) \Leftrightarrow X + 4Y - 12 = 0.$$

3. Verificare: $\left(\frac{3a}{2}\right)^3+\left(\frac{3a}{2}\right)^3-3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{27a^3}{8}+\frac{27a^3}{8}-3a\frac{9a^2}{4}=0$, deci A aparţine curbei date.

Ecuaţia tangentei la curba definită prin ecuaţia implicită este:

$$F'_x(x,y)(X-x)+F'_y(x,y)(Y-y)=0$$

unde $F(x,y)=x^3+y^3-3axy$, $x=\frac{3a}{2}$, $y=\frac{3a}{2}$.

$$F'_x(x,y)=3x^2-3ay \Rightarrow F'_x\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\frac{9}{4}a^2 \quad \text{şi}$$

$$F'_y(x,y)=3y^2-3ax \Rightarrow F'_y\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\frac{9}{4}a^2.$$

Rezultă ecuaţia:

$$\frac{9}{4}a^2(X+Y-3a)=0, \Leftrightarrow X+Y=3a.$$

Ecuaţia normalei:

$$\frac{X-x}{F'_x(x,y)}=\frac{Y-y}{F'_y(x,y)} \Leftrightarrow \frac{X-3a/2}{\frac{9}{4}a^2}=\frac{Y-3a/2}{\frac{9}{4}a^2} \Leftrightarrow X-Y=0.$$

4. Folosim formula $l(C)=\int_{(C)}\mathrm{d}s$.

$$\begin{aligned}
l(C) &= \int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{dt}\\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(24at^2\right)^2+\left(3a\left(4t-4t^3\right)\right)^2}\,\mathrm{dt}\\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{144a^2t^2\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{dt}=\int_0^{\sqrt{2}}12at\left(t^2+1\right)\mathrm{dt}=24a.
\end{aligned}$$

5. $y'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}\Rightarrow 1+y'^2(x)=1+\frac{9x}{4}=\frac{9x+4}{4}$. Lungimea curbei este:

$$l(C)=\int_1^2\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{9x+4}}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{27}(22\sqrt{22}-13\sqrt{13}).$$

6. Calculăm derivatele:

$$x'(t)=-2ae^{-t}\cos t,\; y'(t)=-2ae^{-t}\sin t,$$

$$x''(t) = 2ae^{-t}(\cos t + \sin t),\ y''(t) = 2ae^{-t}(\sin t - \cos t),$$

de unde obţinem:

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 4a^2e^{-2t}(-\cos t \sin t + \cos^2 t + \sin t \cos t + \sin^2 t) = 4a^2e^{-2t},$$

$$\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3 = (2ae^{-t})^3 = 8a^3e^{-3t}.$$

Rezultă: $K = \dfrac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3} = \dfrac{e^t}{2a}$.

7. Putem scrie ecuaţia parabolei în forma explicită: $x = \dfrac{y^2}{2p}$.

În acest caz, aplicăm formula de calcul:
$K = \dfrac{f''(y)}{\left(\sqrt{1 + f'^2(y)}\right)^3}$, unde $x = f(y) = \dfrac{y^2}{2p}$. Rezultă:

$$K = \left.\frac{\frac{1}{p}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}\right)^3}\right|_{y=0} = \frac{1}{p}, \quad R = \frac{1}{|K|} = p\ (p > 0).$$

Altfel, putem folosi ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x &= \dfrac{t^2}{2p} \\ y &= t \end{cases}$.

8. Coordonatele punctului M situat pe cicloidă sunt $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Ecuaţia normalei la curbă în punctul M este:

$$(1 - \cos t)(X - a(t - \sin t)) + \sin t\,(Y - a(1 - \cos t)) = 0.$$

Intersecţia normalei cu axa Ox este punctul $N(at, 0)$. Distanţa MN este:

$$\sqrt{(a(t - \sin t) - at)^2 + a^2(1 - \cos t)^2} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a\sin(t/2),$$

adică, jumătate din raza de curbură corespunzătoare punctului M.

9. a) Din sistemul $\begin{cases} x\sin p + y\cos p - a\sin p\cos p &= 0 \\ x\cos p - y\sin p - a\cos^2 p + a\sin^2 p &= 0 \end{cases}$, se obţine

$$\begin{cases} x = a\cos^3 p \\ y = a\sin^3 p \end{cases} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (astroidă)}.$$

b) Înfăşurătoarea familiei de drepte date se obţine din:

$$\begin{cases} (1 - p^2)\,x + 2py - a &= 0 \\ -2px + 2y &= 0 \end{cases}.$$

Înlocuind $p = \dfrac{y}{x}$ în prima ecuaţie, rezultă:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) x + 2\frac{y}{x} y - a &= 0 \\ x^2 - y^2 + 2y^2 - ax &= 0 \\ x^2 + y^2 - ax &= 0, \end{aligned}$$

adică, un cerc cu centrul $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ şi raza $\dfrac{a}{2}$.

10. a) $x(\pi) = a(\pi - \sin\pi) = a\pi,\ y(\pi) = a(1 - \cos\pi) = 2a$.

Cercul osculator are centrul $M_0(p, q)$, unde

$$p = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)},$$

$$q = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

şi raza $r = \dfrac{1}{|K|} = \dfrac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}$.

$$x'(t) = a - a\cos t \Rightarrow x'(\pi) = 2a,\ y'(t) = a\sin t \Rightarrow y'(\pi) = 0,$$

$$x''(t) = a\sin t \Rightarrow x''(\pi) = 0,\ y''(t) = a\cos t \Rightarrow y''(\pi) = -a.$$

Rezultă că

$$x'^2(\pi) + y'^2(\pi) = 4a^2 \text{ şi } x'(\pi)y''(\pi) - x''(\pi)y'(\pi) = -2a^2.$$

Se obţin coordonatele:

$$p = a\pi,\ q = 2a + 2a \cdot \frac{4a^2}{-2a^2} = 2a - 4a = -2a \Rightarrow M_0(a\pi, -2a)$$

şi raza $r = \dfrac{4a^2\sqrt{4a^2}}{|-2a^2|} = 4a$. Astfel, ecuaţia cercului osculator este:

$$(x - a\pi)^2 + (y + 2a)^2 = 16a^2.$$

b) Ecuaţiile parametrice ale evolutei sunt:

$$\begin{cases} x = x(t) - y'(t)\dfrac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \\ y = y(t) + x'(t)\dfrac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \end{cases}. \tag{6.4.1}$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = (a - a\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 2a^2(1-\cos t),$$

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a\cos t & a\sin t \\ a\sin t & a\cos t \end{vmatrix} = a^2(\cos t - 1).$$

Înlocuind în (6.4.1), obţinem:

$$x = a(t - \sin t) - a\sin t \cdot \frac{2a^2(1-\cos t)}{a^2(\cos t - 1)} = a(t + \sin t) \text{ şi}$$

$$y = a(1-\cos t) + (a - a\cos t)\cdot \frac{2a^2(1-\cos t)}{a^2(\cos t - 1)} = a(\cos t - 1).$$

Ecuaţiile evolutei sunt:

$$\begin{cases} x = a(t + \sin t) \\ y = a(\cos t - 1) \end{cases} \quad \text{(tot cicloidă).}$$

11. Fie $g(x) = f_1(x) - f_2(x) = 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 2$. Aflăm ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0 = 1$ a ecuaţiei $g(x) = 0$. Are loc $g(1) = 0$.

$$g'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8 \Rightarrow g'(1) = 0,$$

$$g''(x) = 24x^2 - 48x + 24 \Rightarrow g''(1) = 0,$$

$$g'''(x) = 48x - 48 \Rightarrow g'''(1) = 0,\ g^{IV}(x) = 48 \Rightarrow g^{IV}(1) \neq 0,$$

deci $M(1,1)$ este punct de contact de ordinul 3 pentru curbele (C_1) şi (C_2).

12. Curba (C_1) se defineşte parametric prin ecuaţiile $x = t$, $y = \cos t$. Se arată că $t_0 = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul 4 pentru $f(t) = t^2 + \cos^2 t - 1$. Rezultă că în punctul $M(0,1)$ curbele au un contact de ordinul 3.

13. $x' = -3\cos^2 t\sin t$, $y' = 3\sin^2\cos t$, $z' = -2\sin(2t)$
Aplicăm formula de calcul pentru lungimea unui arc de curbă definit prin ecuaţii parametrice.

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t + 16\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 5\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t = 10\,. \end{aligned}$$

14. Elementul de arc al curbei este $\mathrm{d}s = |\overrightarrow{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$.

$$\overrightarrow{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \Rightarrow |\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = e^t + e^{-t}.$$

Rezultă că $\mathrm{d}s = (e^t + e^{-t})\,\mathrm{d}t$ iar lungimea arcului este:

$$l(C) = \int_0^1 \left(e^t + e^{-t}\right) \mathrm{d}t = e^t\big|_0^1 - e^{-t}\big|_0^1 = e - \frac{1}{e}.$$

15. Pentru $t = \dfrac{\pi}{2}$ se obţine punctul $M\left(a\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right), a, 2a\sqrt{2}\right)$.

$$x'(t) = a(1 - \cos t), y'(t) = a \sin t, z'(t) = 2a \cos\frac{t}{2} \Rightarrow \overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(a, a, a\sqrt{2}\right)$$

Ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curbă în punctul M sunt:

$$\frac{X - a(\pi/2 - 1)}{1} = \frac{Y - a}{1} = \frac{Z - 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad X + Y + \sqrt{2}Z - \frac{\pi a}{2} - 4a = 0.$$

$$\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 2a \Rightarrow \text{ versorul tangentei la curbă în } M \text{ este : } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

16. Derivatele parţiale ale funcţiilor

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 \text{ şi } G(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4$$

$$\text{sunt : } F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 0, G'_x = 2x, G'_y = 0, G'_z = 2z.$$

În punctul $M(\sqrt{3}, 1, 1)$ situat pe curbă, avem:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \ \frac{D(F,G)}{D(z,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -4\sqrt{3},$$

$$\text{respectiv } \frac{D(F,G)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{3}.$$

Ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal:

$$\frac{X - \sqrt{3}}{1} = \frac{Y - 1}{-\sqrt{3}} = \frac{Z - 1}{-\sqrt{3}},$$

$$X - \sqrt{3} - \sqrt{3}(Y - 1) - \sqrt{3}(Z - 1) = 0 \Leftrightarrow X - \sqrt{3}Y - \sqrt{3}Z + \sqrt{3} = 0.$$

17. Vectorul director al tangentei la curba (C) într-un punct al curbei este:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \left(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\right) = 3\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right).$$

Tangenta este paralelă cu planul (P) dacă vectorii $\overrightarrow{r}'$ şi $\overrightarrow{n} = (3, 1, 1)$ sunt ortogonali.

$$3(1 - t^2) + 2t + 1 + t^2 = 0 \Rightarrow -2t^2 + 2t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Se obţin punctele $M_1(-2,3,-4)$ şi $M_2(-2,12,14)$. Tangentele la curbă în aceste puncte au ecuaţiile:

$$\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{2},\ \text{respectiv}\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-12}{4}=\frac{z-14}{5}.$$

18. $\overrightarrow{r}'(t)=(3t^2+1,-1,3t^2)$, $\overrightarrow{r}''(t)=(6t,0,6t)$. Planul osculator al curbei într-un punct arbitrar are vectorul normal (A,B,C) unde:

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 3t^2 \\ 0 & 6t \end{vmatrix}=-6t,\ B=\begin{vmatrix} 3t^2 & 3t^2+1 \\ 6t & 6t \end{vmatrix}=-6t,\ C=\begin{vmatrix} 3t^2+1 & -1 \\ 6t & 0 \end{vmatrix}=6t.$$

Rezultă că $(A,B,C)=-6t(1,1,-1)$, deci ecuaţia planului osculator este:

$$x-t^3-t-1+y-1+t-z+t^3+2=0 \Leftrightarrow x+y-z=0.$$

Deoarece ecuaţia planului osculator nu depinde de t, curba este plană, fiind situată în planul $x+y-z=0$.

19. Punctul $M\,(1,1,1)$ corespunde lui $t=1$.
Ecuaţia planului osculator într-un punct al curbei este:

$$\begin{vmatrix} X-t & Y-t^2 & Z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix}=0,$$

iar în punctul M:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3X-3Y+Z-1=0.$$

Ecuaţiile binormalei în M sunt: $\dfrac{X-1}{3}=\dfrac{Y-1}{-3}=\dfrac{Z-1}{1}.$

20. Calculăm vectorii: $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$, $\overrightarrow{r}'(t)\times\overrightarrow{r}''(t)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'(t) &= -\sin t\,\overrightarrow{i}+\cos t\,\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\\
\overrightarrow{r}''(t) &= -\cos t\,\overrightarrow{i}-\sin t\,\overrightarrow{j}\\
\overrightarrow{r}'(t)\times\overrightarrow{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\sin t-\overrightarrow{j}\cos t+\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Ecuaţia planului rectificant este:

$$\begin{vmatrix} X-\cos t & Y-\sin t & z-t \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ \sin t & -\cos t & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow X\cos t+Y\sin t-1=0$$

iar ecuaţiile normalei principale sunt:

$$\frac{X - \cos t}{\cos t} = \frac{Y - \sin t}{\sin t} = \frac{Z - t}{0}.$$

21. Punctul M corespunde valorii $t = 1$. Vectorul director al tangentei la curbă în punctul M este $\overrightarrow{r}'(1) = (2, 2, 1)$ deci ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curbă în punctul M sunt:

$$(T) : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1},$$

$$(P_n) : 2(x-2) + 2(y-1) + z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 6 = 0.$$

Din $\overrightarrow{r}''(t) = \left(0, 2, -\dfrac{1}{t^2}\right)$ rezultă $\overrightarrow{r}''(1) = (0, 2, -1)$ de unde se obţine vectorul director al binormalei în M:

$$\overrightarrow{r}'(1) \times \overrightarrow{r}''(1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 2, 4).$$

Ecuaţiile binormalei şi ecuaţia planului osculator în punctul M sunt:

$$(B) : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2},$$

$$(P_o) : 2(x-2) - (y-1) - 2z = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z - 3 = 0.$$

Normala principală este intersecţia dintre planul normal şi planul osculator, deci are ecuaţiile:

$$(N) : \begin{cases} 2x + 2y + z - 6 & = & 0 \\ 2x - y - 2z - 3 & = & 0 \end{cases}.$$

Planul rectificant este determinat de punctul M şi vectorii directori ai tangentei şi binormalei la curbă în acest punct, deci are ecuaţia:

$$(P_r) : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0.$$

22. Versorii se determină folosind formulele:

$$\overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}, \ \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)}{|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)|}, \ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{t}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}'(t) &= (\sin t + t\cos t)\overrightarrow{i} + (\cos t - t\sin t)\overrightarrow{j} + \left(e^t + te^t\right)\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{r}''(t) &= (2\cos t - t\sin t)\overrightarrow{i} + (-2\sin t - t\cos t)\overrightarrow{j} + \left(2e^t + te^t\right)\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Punctul $M(0,0,0)$ corespunde lui $t=0$. În acest punct avem:

$$\overrightarrow{r}'(0) = \overline{j}+\overline{k},\ \overrightarrow{r}''(0) = 2\overline{i}+2\overline{k},\ \overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0) = \begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix} = 2\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{t} &= \frac{\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{\sqrt{2}}\\ \overrightarrow{b} &= \frac{2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{\sqrt{3}}\\ \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{t} = \begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix} = \frac{2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

23. Folosim formulele trigonometrice:

$$\cos^3 t = \frac{\cos(3t)+3\cos t}{4},\ \sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin(3t)}{4}.$$

Atunci, $\overrightarrow{r}(t) = \cos^3 t\,\overrightarrow{i} + \sin^3 t\,\overrightarrow{j} + \cos(2t)\,\overrightarrow{k}$ se poate scrie astfel:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t, \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin(3t), \cos(2t)\right).$$

Pentru calculul curburii şi torsiunii, se efectuează următoarele calcule:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}'(t) &= \frac{1}{4}(-3\sin(3t) - 3\sin t)\overrightarrow{i} + \frac{1}{4}(3\cos t - 3\cos(3t))\overrightarrow{j} - 2\sin(2t)\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{r}''(t) &= \frac{1}{4}(-9\cos(3t) - 3\cos t)\overrightarrow{i} + \frac{1}{4}(-3\sin t + 9\sin(3t))\overrightarrow{j} - 4\cos(2t)\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{r}'''(t) &= \frac{1}{4}(27\sin(3t) + 3\sin t)\overrightarrow{i} + \frac{1}{4}(-3\cos t + 27\cos(3t))\overrightarrow{j} + 8\sin(2t)\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

În punctul indicat vom avea:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{3\sqrt{3}}{8}\overrightarrow{i}+\frac{9}{8}\overrightarrow{j}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{k}\\
\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{15}{8}\overrightarrow{i}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\overrightarrow{j}+2\,\overrightarrow{k}\\
\overrightarrow{r}'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3\sqrt{3}}{8}\overrightarrow{i}-\frac{57}{8}\overrightarrow{j}+4\sqrt{3}\,\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{-3\sqrt{3}}{8} & \frac{9}{8} & -\sqrt{3}\\ \frac{15}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{8} & 2 \end{vmatrix} = \frac{9}{8}\left(\overrightarrow{i}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{j}-\frac{3}{2}\overrightarrow{k}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right),\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right),\overrightarrow{r}'''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} \frac{-3\sqrt{3}}{8} & \frac{9}{8} & -\sqrt{3}\\ \frac{15}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{8} & 2\\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{-57}{8} & 4\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

$$\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{\frac{27}{64}+\frac{81}{64}+3} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \quad \text{şi}$$

$$\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \frac{9}{8}\sqrt{1+3+\frac{9}{4}} = \frac{45}{16}.$$

Curbura este:

$$K = \frac{\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|^3} = \frac{4\sqrt{3}}{25}$$

iar torsiunea:

$$T = \frac{\left(\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right),\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right),\overrightarrow{r}'''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|^2} = \frac{16\sqrt{3}}{75}.$$

24. a) Punctul corespunzător lui $u=2$ şi $v=1$ este $M(3,1,2)$.

$$\begin{aligned}
x'_u &= 1, y'_u = 1, z'_u = v\\
x'_v &= 1, y'_v = -1, z'_v = u
\end{aligned}$$

Pentru $u = 2, v = 1$ obţinem ecuaţia planului tangent în M:

$$\begin{vmatrix} X-3 & Y-1 & Z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3X - Y - 2Z - 4 = 0.$$

Ecuaţiile normalei la suprafaţă în punctul M sunt:

$$\frac{X-3}{3} = \frac{Y-1}{-1} = \frac{Z-2}{-2}.$$

b) Vectorul director al normalei la suprafaţa definită explicit este $(p, q, -1)$, unde $p = f'_x(x,y) = -\sin x$, $q = f'_y(x,y) = \cos y$. În punctul M se obţine vectorul $(-1,-1,-1)$. Ecuaţiile normalei la suprafaţă în punctul M sunt:

$$x - \frac{\pi}{2} = y - \pi = z$$

iar ecuaţia planului tangent este:

$$x - \frac{\pi}{2} + y - \pi + z = 0 \Leftrightarrow x + y + z - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Problema se poate rezolva considerând o parametrizare a suprafeţei date, de exemplu $x = u$, $y = v$, $z = \cos u + \sin v$. Ecuaţiile normalei şi a planului tangent la suprafaţă se scriu în punctul care corespunde lui $u = \dfrac{\pi}{2}$ şi $v = \pi$.

c) Suprafaţa este definită prin ecuaţia implicită $F(x,y,z) = 0$, unde $F(x,y,z) = x^3yz + 2xy^2 - y^3z^2 - 4z^3 - 2$. Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei F în punctul $M(1,2,-1)$.

$$F'_x(x,y,z) = 3x^2yz + 2y^2 \Rightarrow F'_x(1,2,-1) = 2,$$
$$F'_y(x,y,z) = x^3z + 4xy - 3y^2z^2 \Rightarrow F'_y(1,2,-1) = -5,$$
$$F'_z(x,y,z) = x^3y - 2y^3z - 12z^2 \Rightarrow F'_z(1,2,-1) = 6.$$

Ecuaţiile normalei şi ecuaţia planului tangent sunt:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{6},\ 2x - 5y + 6z + 14 = 0.$$

25. Avem $\sin v = \dfrac{3}{5}$, $\sin u = \dfrac{4}{5}$, deci coordonatele lui M sunt:

$$\begin{aligned} x_M &= \left(7 + 5\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} = 8 \\ y_M &= \left(7 + 5\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = 6 \\ z_M &= 5\cdot\frac{4}{5} = 4. \end{aligned}$$

Derivatele parţiale pentru $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ în M sunt:

$$\begin{aligned} x'_u &= -5\sin u\cos v\big|_M = -\frac{16}{5}, y'_u = -5\sin u\sin v\big|_M = -\frac{12}{5}, z'_u = 5\cos u\big|_M = 3 \\ x'_v &= -(7+5\cos u)\sin v\big|_M = -6, y'_v = (7+5\cos u)\cos v\big|_M = 8, z'_v = 0. \end{aligned}$$

Deci ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul M este:

$$\begin{vmatrix} X-8 & Y-6 & Z-4 \\ -\dfrac{16}{5} & -\dfrac{12}{5} & 3 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 24X + 18Y + 40Z - 460 = 0.$$

26. O suprafaţă este un plan dacă normala într-un punct arbitrar are direcţie fixă (vectorul director nu depinde de u şi v).

$$x'_u = 2u,\ y'_u = v,\ z'_u = 2(u+v),\ x'_v = 2v,\ y'_v = u,\ z'_v = 2(u+v)$$

Vectorul director al normalei la (S) are coordonatele (A,B,C) unde:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & 2(u+v) \\ u & 2(u+v) \end{vmatrix} = 2(u+v)(v-u),$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(u+v) & 2u \\ 2(u+v) & 2v \end{vmatrix} = 4(u+v)(v-u),$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & v \\ 2v & u \end{vmatrix} = 2(u+v)(u-v).$$

Rezultă că un vector director al normalei are coordonatele

$$2(u+v)(v-u)\,(1,2,-1)\,,$$

deci direcţia normalei este dată de vectorul $\overrightarrow{v} = (1,2,-1)$.

27. Coeficienţii E, F, G din prima formă fundamentală a suprafeţei sunt:

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u + 0 = R^2, \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = -R\sin u \cdot 0 + R\cos u \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = 0 + 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Prima formă fundamentală a cilindrului este: $\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$.

28. $(C) : u = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 0 \Rightarrow \mathrm{d}s = \sqrt{G\mathrm{d}v^2} = \sqrt{G}\mathrm{d}v$

$$G = \left(\overrightarrow{r}'_v\right)^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1$$

Rezultă că pentru $u = 1$ elementul de arc este $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{d}v$. Lungimea arcului curbei (C) cuprins între $v = 1$, $v = 2$ este:

$$l(C) = \int_{(C)} \mathrm{d}s = \int_1^2 \sqrt{2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{2}.$$

29. $(C_1) \cap (C_2) = \{A\}$, $(C_2) \cap (C_3) = \{B\}$, $(C_1) \cap (C_3) = \{C\}$, de unde rezultă: $A\left(u = \frac{1}{2}, v = 1\right)$, $B\,(u = 0, v = 0)$, $C\left(u = -\frac{1}{2}, v = 1\right)$. Perimetrul triunghiului este suma lungimilor arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ şi $\overset{\frown}{AC}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} E &=& \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1 \\ F &=& -u\cos v \sin v + u \sin v \cos v + 0 = 0 \\ G &=& u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + (u^2+1)\mathrm{d}v^2$$

$$\text{Pentru}\,(C_1) : v = 1 \Rightarrow \mathrm{d}v = 0 \Rightarrow \mathrm{d}s = \mathrm{d}u \Rightarrow l(\overset{\frown}{AC}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u = 1.$$

$$\text{Pentru}\,(C_2) : u = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v \Rightarrow \mathrm{d}s^2 = v^2\mathrm{d}v^2 + \left(\frac{1}{4}v^4 + 1\right)\mathrm{d}v^2, \text{ adică}$$

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)\mathrm{d}v, \text{ de unde rezultă că } l(\overset{\frown}{AB}) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)\mathrm{d}v = \frac{7}{6}.$$

$$\text{Pentru}\,(C_3) : u = -\frac{1}{2}v^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = -v\,\mathrm{d}v \Rightarrow l(\overset{\frown}{BC}) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)\mathrm{d}v = \frac{7}{6}.$$

Rezultă că: $P_{ABC} = l(\overset{\frown}{AB}) + l(\overset{\frown}{BC}) + l(\overset{\frown}{AC}) = \dfrac{10}{3}$.

30. Coeficienţii primei forme fundamentale a suprafeţei sunt:

$$\begin{array}{rcl} E &=& x_u'^2(u,v) + y_u'^2(u,v) + z_u'^2(u,v) = (-v\sin u)^2 + (v\cos u)^2 = v^2, \\ F &=& x_u'(u,v)\,x_v'(u,v) + y_u'(u,v)\,y_v'(u,v) + z_u'(u,v)\,z_v'(u,v) = \\ &=& (-v\sin u)\cos u + (v\cos u)\sin u + 0 = 0, \\ G &=& x_v'^2(u,v) + y_v'^2(u,v) + z_v'^2(u,v) = (\cos u)^2 + (\sin u)^2 + (2v)^2 = 1 + 4v^2. \end{array}$$

Punctul de intersecţie a celor două curbe corespunde lui $u = 2$ şi $v = 1$ pentru care se obţin valorile:

$$E = 1,\ F = 0,\ G = 5.$$

Din ecuaţiile curbelor avem: $u = v + 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}v$, $u = 3 - v \Rightarrow \delta u = -\delta v$.

Înlocuind valorile calculate în formula:

$$\cos\alpha = \frac{E\mathrm{d}u\delta u + F\left(\mathrm{d}u\delta v + \delta u \mathrm{d}v\right) + G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

vom obţine: $\cos\alpha = \dfrac{-1+5}{\sqrt{1+5}\sqrt{1+5}} = \dfrac{2}{3}$.

31. Unghiul format de curbele de coordonate care trec printr-un punct al suprafeţei se determină folosind formula: $\cos\alpha = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

$$\overrightarrow{r}'_u(u,v) = (1,1,\sqrt{2}\,),\ \overrightarrow{r}'_v(u,v) = (-\sin v, -\cos v, 0),\ \text{de unde rezultă}$$

$$\overrightarrow{r}'_u\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = (1,1,\sqrt{2}\,),\ \overrightarrow{r}'_v\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = (-1,0,0).$$

Rezultă:

$$E = \overrightarrow{r}'^2_u = 4,\ F = \overrightarrow{r}'_u \cdot \overrightarrow{r}'_v = -1,\ G = \overrightarrow{r}'^2_v = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

32. Aria unei suprafeţe se calculează prin formula:

$$\mathcal{A} = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Folosind formulele:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v,$$

se obţin coeficienţii:

$$E = (-b\sin u\cos v)^2 + (-b\sin u\sin v)^2 + (b\cos u)^2 = b^2,$$

$$F = (-b\sin u\cos v)\left(-(a+b\cos u)\sin v\right) + (-b\sin u\sin v)\left((a+b\cos u)\cos v\right) = 0,$$

$$G = \left(-(a+b\cos u)\sin v\right)^2 + \left((a+b\cos u)\cos v\right)^2 = (a+b\cos u)^2.$$

Aria torului va fi:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} b\,(a+b\cos u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v \ = \ 2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos u)\,\mathrm{d}u = 4\pi^2 ab.$$

33. Se calculează derivatele parţiale:

$$\overrightarrow{r}'_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 2u)\,,\ \overrightarrow{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 2v)\,,\ \overrightarrow{r}''_{u^2}(u,v) = (0,0,2),$$

$$\overrightarrow{r}''_{uv}(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)\,,\ \overrightarrow{r}''_{v^2}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 2),$$

de unde rezultă

$$E = 1+4u^2,\ F = 4uv,\ G = u^2+4v^2 \Rightarrow EG - F^2 = u^2+4v^2+4u^4,$$

$$(\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{u^2}) = 2u, (\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{uv}) = -2v, (\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{v^2}) = 2u(u^2+1).$$

Coeficienţii L, M, N sunt:

$$L = \frac{2u}{\sqrt{u^2+4v^2+4u^4}},\ M = -\frac{2v}{\sqrt{u^2+4v^2+4u^4}},\ N = \frac{2u(u^2+1)}{\sqrt{u^2+4v^2+4u^4}},$$

de unde se obţine a doua formă fundamentală a suprafeţei:

$$\Phi_2 = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \frac{2u\mathrm{d}u^2 - 4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 2u(u^2+1)\mathrm{d}v^2}{\sqrt{u^2+4v^2+4u^4}}.$$

34. a) $\overrightarrow{r}'_u = (-r\sin u, r\cos u, 0)$, $\overrightarrow{r}'_v = (0,0,1) \Rightarrow EG - F^2 = r^2$

$$L = \frac{(\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{u^2})}{\sqrt{EG-F^2}} = -r, M = \frac{(\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} = 0, N = \frac{(\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v, \overrightarrow{r}''_{v^2})}{\sqrt{EG-F^2}} = 0$$

$$(EG-F^2)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + LN - M^2 = 0 \Leftrightarrow r^2k^2 + rk = 0$$

Curburile principale sunt: $k_1 = -\dfrac{1}{r}$, $k_2 = 0$.

b) Pentru $(S) : \overrightarrow{r}(u,v) = (u, v, uv)$, în $M(u=1, v=1)$, se calculează:

$$\overrightarrow{r}'_u = (1,0,1),\ \overrightarrow{r}'_v = (0,1,1) \Rightarrow E = 2, F = 1, G = 2 \Rightarrow EG - F^2 = 3$$

$$\overrightarrow{r}''_{u^2} = (0,0,0),\ \overrightarrow{r}''_{uv} = (0,0,1),\ \overrightarrow{r}''_{v^2} = (0,0,0) \Rightarrow L = 0, M = \frac{1}{\sqrt{3}}, N = 0$$

Curburile principale sunt soluţiile ecuaţiei: $3k^2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}k - \dfrac{1}{3} = 0$.

Rezultă: $k_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad k_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

35. Calculăm coeficienţii celor două forme fundamentale ale suprafeţei în punctul $M(u=1, v=2)$.

$$\overrightarrow{r}'_u(u,v) = (1, 2u, 3u^2) \Rightarrow \overrightarrow{r}'_u(1,2) = (1,2,3),$$
$$\overrightarrow{r}'_v(u,v) = (1, 2v, 3v^2) \Rightarrow \overrightarrow{r}'_v(1,2) = (1,4,12),$$
$$\overrightarrow{r}''_{u^2}(1,2) = (0,2,6),\ \overrightarrow{r}''_{uv}(1,2) = (0,0,0),\ \overrightarrow{r}''_{v^2}(1,2) = (0,2,12),$$
$$\left(\overrightarrow{r'_u}, \overrightarrow{r'_v}, \overrightarrow{r''_{uu}}\right) = -6,\ \left(\overrightarrow{r'_u}, \overrightarrow{r'_v}, \overrightarrow{r''_{uv}}\right) = 0,\ \left(\overrightarrow{r'_u}, \overrightarrow{r'_v}, \overrightarrow{r''_{vv}}\right) = 6,$$

de unde rezultă

$$E = 14,\ F = 45,\ G = 161 \Rightarrow EG - F^2 = 229,\ \text{respectiv}$$

$$L = \frac{-6}{\sqrt{229}},\ M = 0,\ N = \frac{6}{\sqrt{229}} \Rightarrow LN - M^2 = \frac{-36}{229},\ EN - 2FM + GL = \frac{-882}{\sqrt{229}}.$$

Curbura totală şi curbura medie în punctul M sunt:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{36}{229^2},\ H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = -\frac{441}{\sqrt{229}^3}.$$

6.5 Probleme propuse

1. Să se afle ecuaţiile tangentei şi a normalei la următoarele curbe:

   a) $(C):\begin{cases} x(t)=t^2+t+1 \\ y(t)=t^2-t+1 \end{cases}$ în punctul corespunzător lui $t=0$

   b) $(C):\begin{cases} x(t)=t^3-2t \\ y(t)=3t^2+1 \end{cases}$ în punctul $M(-1,4)$

   c) $(C):\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y(t)=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$, $t\neq 0$, într-un punct arbitrar

2. Să se afle ecuaţiile tangentei şi a normalei la următoarele curbe:

   a) $(C): y=x^3-2x^2+5$ în punctul de abscisă $x_0=1$

   b) $(C): y\sin x+x\cos y=\dfrac{\pi}{2}$ în punctul de intersecţie cu axa Ox

3. Să se calculeze lungimile arcelor de curbă următoare:

   a) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$

   b) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ x\in[1,4]$

4. Fie curba $(C):\begin{cases} x=t^2+3 \\ y=2t-1 \end{cases}$, $t\in[0,1]$. Să se determine elementul de arc al curbei şi să se calculeze lungimea curbei.

5. Să se determine curbura şi raza de curbură pentru următoarele curbe:

   a) $\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$ pentru $t=\pi$

   b) $y=\ln(\sin x)$ pentru $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

   c) $x^3y-2x^2y^2+x-y^3-1=0$ în punctul $M(2,1)$

6. Fie curba $(C):\overrightarrow{r}(t)=(t^2+3)\overrightarrow{i}+(2t-1)\overrightarrow{j}$, $t\in[0,1]$.

   a) Determinaţi tangenta şi normala pentru $t=1$.

   b) Determinaţi curbura curbei pentru $t=1$.

7. Să se determine înfăşurătoarea familiei de curbe:

a) $(x-p^2)^3-(y-p)^2=0$

b) $x^2+y^2-2px+p^2-4p=0$, $p>0$

c) $t^2x-(t-1)y+2=0$

8. Să se determine cercul osculator al elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ în $A(a,0)$.

9. Să se afle ecuaţiile parametrice ale evolutei astroidei $\begin{cases} x\,(t)=a\cos^3 t \\ y\,(t)=a\sin^3 t \end{cases}$.

10. Să se determine punctele de contact ale curbelor

$$(C_1):\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases},\ t\in[0,2\pi] \text{ şi } (C_2): x^2+y^2=1.$$

11. Să se determine punctele de contact ale curbelor

$$(C_1):\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \text{ şi } (C_2):\begin{cases} x=\sin t \\ y=\dfrac{1}{2}\cos t \end{cases},\ t\in[0,2\pi].$$

12. Să se determine elementul de arc al elicei conice $(C): x=at\cos t$, $y=at\sin t$, $z=bt$.

13. Să se calculeze:

a) lungimea curbei $(C):\overrightarrow{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t), t\in[0,\pi]$

b) lungimea arcului curbei $(C):\overrightarrow{r}(t)=(2t,t^2,\ln t)$, $t>0$, cuprins între punctele $M_1(2,1,0)$ şi $M_2(4,4,\ln 2)$

14. Să se afle ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curbele:

a) $(C): x=t+\ln t, y=t^2, z=1-t$ în punctul $M(1,1,0)$

b) $(C): y=x^2, z=\dfrac{1}{x^3}$ în punctul $M(1,1,1)$

c) $(C):\begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ y^2+z^2 &= 25 \end{cases}$ în punctul $M(1,-3,-4)$

d) $(C):\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= r^2 \\ x^2+y^2 &= rx \end{cases}$ într-un punct arbitrar

15. Să se afle ecuaţia planului normal şi ecuaţiile tangentei la curba

$$(C):\ x=a\sin^2 t, y=a\sin t\cos t, z=a\cos t$$

într-un punct arbitrar.

16. Să se afle ecuaţiile tangentelor la curba $(C) : \overrightarrow{r} = \left(\frac{1}{2}t^4, \frac{1}{3}t^3, t^2\right)$, care sunt paralele cu planul $(P) : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

17. Să se afle ecuaţia planului osculator pentru curbele:

    a) $(C) : \overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, e^t)$ în punctul corespunzător lui $t = 0$

    b) $(C) : x = 1 + 3t + 2t^2, y = 2 - 2t + 5t^2, z = 1 - t^2$ într-un punct arbitrar

18. Să se determine ecuaţiile tangentei, normalei principale şi binormalei la curba $(C) : x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ într-un punct oarecare al curbei.

19. a) Fie curba $(C) : \overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 2t^2 - 1\right)$, $t \neq 0$. Să se determine punctele de pe curbă în care binormala este perpendiculară pe dreapta de ecuaţii $(D) : \begin{cases} x + y &= 0 \\ 4x - z &= 0 \end{cases}$.

    b) Fie curba de ecuaţii $(C) : x = \frac{1}{t},\ y = \ln t,\ z = t,\ t > 0$. Să se determine punctele curbei în care normala principală este paralelă cu planul $(P) : 5x + 2y - 5z = 0$.

20. Să se determine versorii reperului lui Frenet pentru curbele:

    a) $(C) : x = 1 - \cos t, y = \sin t, z = t,\ t = \frac{\pi}{2}$

    b) $(C) : y = x^2, z = 2x,\ x_0 = 2$

    c) $(C) : \overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k}$, într-un punct oarecare.

21. Să se afle ecuaţiile axelor şi planelor triedrului lui Frenet pentru curbele:

    a) $(C) : \overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + (1 - t^2)\,\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}t^3\,\overrightarrow{k}$, pentru $t = 1$

    b) $(C) : \overrightarrow{r}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} + \cos 2t\,\overrightarrow{k}$, pentru $t = \frac{\pi}{2}$

    c) $(C) : y^2 = x,\ x^2 = z$ în punctul $M(1, 1, 1)$

22. Să se se calculeze curbura şi torsiunea curbelor următoare, într-un punct arbitrar:

    a) $\overrightarrow{r}(t) = (2t, t^2, \ln t),\ t > 0$

b) $\begin{cases} x = t\cos(\ln t) \\ y = t\sin(\ln t) \\ z = t \end{cases}$, $t > 0$

23. Să se calculeze torsiunea curbei $(C) : \overrightarrow{r}(t) = \left(\dfrac{1+t}{1-t}, \dfrac{1}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t}\right)$ şi să se arate că este o curbă plană.

24. Să se determine planul tangent şi normala la suprafeţele:

    a) $(S) : x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$, în punctul corespunzător lui $u = 2$, $v = 1$

    b) $(S) : \overrightarrow{r}(u, v) = ue^v \overrightarrow{i} + ue^{-v} \overrightarrow{j} + 4uv \overrightarrow{k}$ în punctul corespunzător lui $u = 2$, $v = 0$

    c) $(S) : x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2 v$, în punctul $M(1, 3, 4)$

    d) $\overrightarrow{r}(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$, în punctul corespunzător lui $u = \dfrac{\pi}{4}$, $v = \dfrac{\pi}{2}$

    e) $(S) : z = x^3 + y^3$ în punctul $M_0(1, 2, 9)$

    f) $(S) : xyz = 1$ în $M(1, 1, 1)$

25. Să se arate că suprafaţa $(S) : x = (u - v)^2, u = u^2 - 3v^2, z = \dfrac{uv}{2} - v^2$ este un plan.

26. Să se determine prima formă fundamentală pentru suprafeţele:

    a) $(S) : x = u^2 + v$, $y = u + v^2$, $z = u + v$

    b) $(S) : z = x^2 + y^3$

    c) $(S) : x + y^2 - z^3 = 0$

27. Fie suprafaţa $(S) : \overrightarrow{r}(u, v) = u\cos v \overrightarrow{i} + u\sin v \overrightarrow{j} + v \overrightarrow{k}$. Să se calculeze lungimea curbei $(C) : \begin{cases} u = 1 - t \\ v = t \end{cases}$, $t \in [0, 1]$.

28. Fie $(S) : x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$. Să se calculeze perimetrul triunghiului curbiliniu determinat de curbele $u = 1$, $v = -1$, $u - v = 1$, situate pe suprafaţa (S).

29. Să se determine unghiul dintre curbele:

    a) $u = -1$ şi $v = -2$ trasate pe suprafaţa

$$(S) : x = u^2 + v, y = u^2 - v, z = uv$$

b) $u + v = 0$ şi $u - v = 0$ trasate pe suprafaţa

$$(S) : \overrightarrow{r}(u, v) = u \cos v \overrightarrow{i} + u \sin v \overrightarrow{j} + 2v \overrightarrow{k}$$

30. Fie suprafaţa $(S) : x = u^2 + 3u,\ y = v,\ z = uv + u$. Să se determine unghiul format de curbele de coordonate care trec prin punctul corespunzător lui $u = -1,\ v = 0$.

31. Să se arate că două curbe de coordonate situate pe suprafaţa sferei sunt ortogonale.

32. Să se calculeze aria suprafeţei $\overrightarrow{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ limitată de curbele de coordonate $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$.

33. Să se determine a doua formă fundamentală pentru suprafeţele:

    a) $x = u^2,\ y = v^2,\ z = u + v$

    b) $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = u^2$

34. Să se determine curburile principale pentru suprafaţa $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2,\ z = uv$ în punctul corespunzător lui $u = 1,\ v = 1$.

35. Să se determine curbura totală şi curbura medie pentru suprafeţele:

    a) $S) : \overrightarrow{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$

    b) $(S) : x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = u + v$ în punctul corespunzător lui $u = 2,\ v = 1$

    c) $(S) : z = x^2 - y^3$ în punctul $M(2, 1, 3)$

36. Fie suprafaţa $(S) : x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av$. Să se determine curburile principale, curbura totală şi curbura medie.

37. Se consideră paraboloidul eliptic $z = x^2 + y^2$.

    a) Să se determine curbura totală şi curbura medie.

    b) Să se arate că toate punctele suprafeţei sunt de tip eliptic.

38. Să se arate că toate punctele suprafeţei $(S) : x + y - z^3 = 0$ sunt parabolice.

39. Să se arate că suprafaţa definită prin ecuaţiile:

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3,\ y = 3v + 3u^2v - v^3,\ z = 3u^2 - 3v^2$$

este minimală.

Bibliografie

[1] Chiriţă, Stan, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

[2] Danko, P.E. et coll., *Higher mathematics in problems and exercises*, vol. 1, Mir Publisher, Moscow, 1983

[3] Fédenko, A. et coll., *Recueil d'exercises de géométrie différentielle*, Mir, Moscow, 1982

[4] Fetcu, Dorel, *Elemente de algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Casa Editorială Demiurg, Iaşi, 2009

[5] Gheorghiu, Gh. Th., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977

[6] Gurzău, Octavian Mircia, https://users.utcluj.ro/∼ gurzau/

[7] Klétényik, D.V., *Problèmes de géométrie analytique*, Mir, Moscow, 1981

[8] Matei, Pavel, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, MatrixRom, Bucureşti, 2007

[9] Miheşan, Vasile, *Geometrie analitică şi diferenţială*, Mediamira, 2011

[10] Murgulescu, Elena, *Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965

[11] Neagu, M., Oană, A., *Geometrie superioară în plan şi în spaţiu*, Editura Universităţii "Transilvania", Braşov, 2008

[12] Păltineanu, G., Donescu, Ş., Zamfir, M., *Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Conspress, Bucureşti, 2011

[13] Potra, Teodor G., *Geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 2006

[14] Procopiuc, Gheorghe, *Probleme de algebră liniară şi geometrie*, Iaşi, 2005

[15] Roşculeţ, Marcel, *Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987

[16] Rusu, Eugen, *Vectori*, Editura Albatros, Bucureşti, 1976

[17] Udrişte, C., *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976

[18] Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981