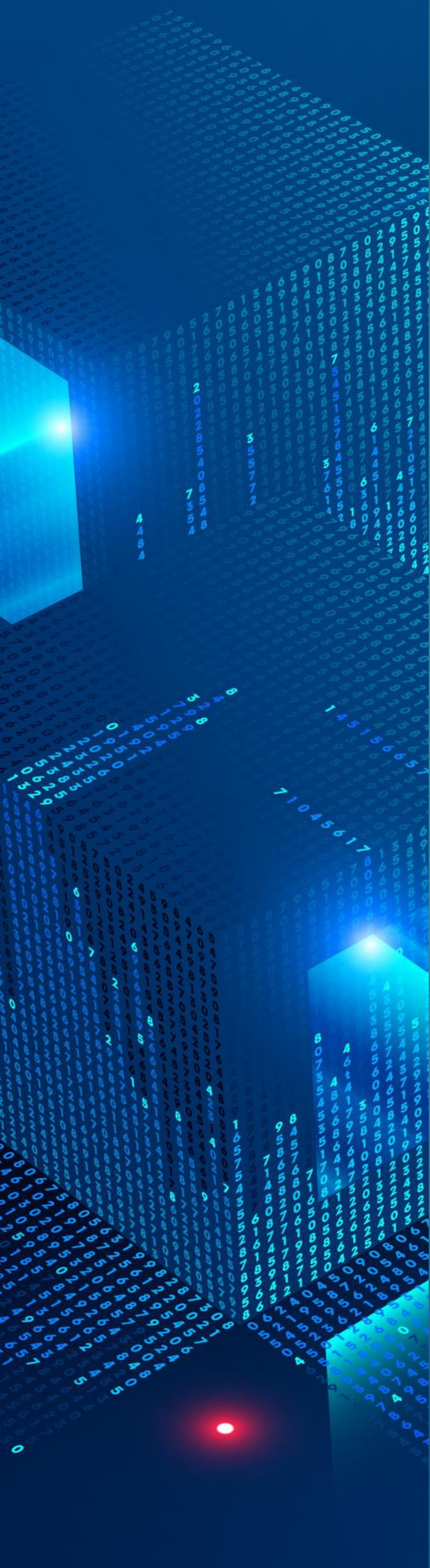


Liana TIMBOȘ

Algebră Liniară
Geometrie Analitică
și Diferențială

TEORIE ȘI PROBLEME DE SEMINAR

U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2024
ISBN 978-606-737-746-0

Liana TIMBOȘ

ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

TEORIE ȘI PROBLEME DE SEMINAR

U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2024
ISBN 978-606-737-746-0

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Conf.dr. Inoan Daniela

Conf.univ.dr. Capătă Adela

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

ISBN 978-606-737-746-0

Cuprins

Prefaţă

Această carte se adresează studenţilor de la Facultăţile de inginerie care studiază algebra liniară, geometria analitică şi diferenţială în primul an de facultate.

Cartea este structurată în mai multe capitole, fiecare dintre ele începând cu o prezentare succintă a noţiunilor teoretice: definiţii, proprietăţi, teoreme etc., fără a avea pretenţia că s-a intrat în detaliu în prezentarea lor sau că au fost demonstrate riguros, multe dintre teoreme fiind doar enunţate. După partea teoretică urmează o secţiune în care sunt prezentate probleme rezolvate în detaliu şi apoi o serie de probleme propuse spre rezolvare.

Scopul cărţii este ca cititorii să poată parcurge cât mai confortabil noţiunile matematice prezentate, de multe ori percepute ca dificile, atât prin prezentarea lor succintă, cât şi prin evidenţierea lor prin figuri ilustrative şi prin exemplele şi problemele rezolvate, iar apoi să fi dobândit deprinderile şi tehnicile de lucru pentru rezolvarea altor exerciţii şi probleme, dar şi pentru aplicarea lor în cadrul disciplinelor de studiu specifice ingineriei.

Nu în ultimul rând, autorul mulţumeşte cu recunoştinţă sprijinul Prof. Daniela Inoan şi Prof. Adela Capătă care au citit cu atenţie manuscrisul sugerând îmbunătăţiri valoroase.

1

Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

1.1 Determinanţi

Pentru fiecare matrice pătratică $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se poate atribui scalarul $\det(A)$ numit şi determinantul lui A. În formă extinsă scriem:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiţie 1.1. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.* ***Determinantul*** *matricii A este scalarul definit de ecuaţia*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Pentru $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2}\\ j=\overline{1,2}}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,3}\\ j=\overline{1,3}}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, determinantul poate fi calculat după regula:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi fie k un număr natural, $1 \leqslant k \leqslant n$. Considerăm liniile $i_1 \dots i_k$ şi coloanele $j_1 \dots j_k$ ale matricii A. Eliminând celelalte linii şi coloane obţinem submatricea matricii A de ordin k, al cărei determinant este numit **minorul** lui A şi este notat cu $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$. Eliminând liniile $i_1 \dots i_k$ şi coloanele $j_1 \dots j_k$ ale matricii A obţinem **minorul complementar** $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ notat cu $CM_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.

Una dintre metodele de calcul a determinaţilor se numeşte dezvoltarea după elementele unei linii sau coloane şi este o consecinţă a teoremei lui Laplace.

Teorema 1.2. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci*

(i) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} CM_i^k$, *- dezvoltarea după linia i;*

(ii) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} CM_k^j$, *- dezvoltarea după coloana j.*

Definiţie 1.3. *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte* ***singulară*** *dacă determinantul ei este* 0*, adică,* $\det(A) = 0$*. Dacă* $\det(A) \neq 0$ *matricea A se numeşte* ***nesingulară****.*

Proprietăţi ale determinanţilor.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci:

(1) $\det(A^\top) = \det(A)$.

(2) O permutare de linii, (respectiv coloane) a lui A înmulţeşte determinantul cu semnul permutării.

(3) Un determinant cu două linii (sau două coloane egale) este zero.

(4) Determinantul matricii A nu se schimbă dacă înmulţim o linie (sau coloană) cu un număr şi o adunăm la altă linie (sau coloană).

(5) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

(6) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(7) $\det(aA) = a^n \det(A)$.

Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dată de $a_{ij} = 0$ când $i > j$, respectiv $a_{ij} = 0$ când $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ respectiv } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

este numită **matrice superior triunghiulară**, respectiv **matrice inferior triunghiulară**.

Dacă toate elementele în afara diagonalei principale sunt zero, A este numită matrice **diagonală**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observaţie 1.4. *Dacă A este o matrice triunghiulară sau diagonală, atunci determinantul este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală, adică*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.2 Rangul unei matrice

Rang. Transformări elementare

Numărul natural r este numit **rangul** matricii $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dacă:

1. există o submatrice $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ a lui A care este nesingulară (adică, $\det(M) \neq 0$).

2. pentru orice submatrice $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ cu $p > r$ a lui A avem $\det(N) = 0$.

Notăm $\operatorname{rang}(A) = r$.

Definiţie 1.5. *Următoarele operaţii se numesc **transformări elementare** asupra liniilor matricii $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:*

1. *Interschimbarea a două linii.*

2. *Înmulţirea elementelor liniei cu un număr diferit de zero.*

3. *Adunarea elementelor unei linii la altă linie.*

Similar se pot defini transformări elementare asupra coloanelor.

Pentru calculul rangului vom utiliza transformări elementare. Şi anume, vom transforma matricea dată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ folosind o succesiune de transformări elementare într-o matrice B, numită formă eşalon a matricii A, astfel:

- elementele diagonalei matricii B sunt fie 0 sau 1, orice 1 este în faţa zerourilor pe diagonală.

- toate celelalte elemente ale lui B sunt 0.

Rangul este invariant la transformări elementare, deci avem că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$, dar este evident că rangul matricii B este egal cu numărul elementelor de 1 de pe diagonală.

O matrice este în formă **eşalon linie** dacă

(1) Toate liniile nenule sunt deasupra liniilor nule.

(2) Primul element diferit de zero (pivotul) al unei linii nenule este întotdeauna strict în dreapta primului element diferit de zero al liniei deasupra ei.

Pentru a stabili rangul este suficient să transformăm matricea în forma eşalon linie. În acest caz, rangul va fi egal cu numărul de linii diferite de zero din forma eşalon linie.

Inversa unei matrice

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică relaţiile:

$$AB = I_n \;\text{ şi }\; BA = I_n$$

(dacă există) este numită **inversa** matricii A şi este notată cu $B = A^{-1}$. Nu toate matricele pătratice admit o inversă (sunt inversabile). O matrice pătratică inversabilă se numeşte *nesingulară* iar o matrice pătratică care nu admite inversă se numeşte *matrice singulară.*

Teorema 1.6. *Dacă o matrice este transformată în matricea identitate printr-o succesiune de transformări elementare, atunci aceeaşi succesiune de transformări elementare aplicate matricei identitate va produce inversa matricii iniţiale.*

1.3 Sisteme de ecuaţii liniare

Reamintim că un sistem liniar cu m ecuaţii liniare şi n necunoscute poate fi scris ca

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Aici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt necunoscute, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ sunt coeficienţii sistemului, iar $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sunt termenii liberi.

Un sistem de ecuaţii liniare poate fi scris ca $Ax = b$, unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ şi $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Matricea A este numită *matricea coeficienţilor*, iar matricea $[A|b] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$,

$$[A|b]_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \text{ dacă } j \neq n+1, \ i = \overline{1,m} \\ b_i \text{ dacă } j = n+1, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

este numită *matricea extinsă* a sistemului.

Putem spune că $x_1, x_2, ..., x_n$ este o **soluţie** a sistemului liniar dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ verifică fiecare ecuaţie a sistemului. Un sistem liniar este **compatibil** dacă admite soluţie (soluţii), şi este **incompatibil** dacă nu admite soluţie.

Conform teoremei lui Rouché-Capelli un sistem liniar de ecuaţii este:

- **incompatibil** dacă $\operatorname{rang}(\overline{A}) > \operatorname{rang}(A)$, adică sistemul nu admite soluţie.
- **compatibil** dacă $\operatorname{rang}(\overline{A}) = \operatorname{rang}(A)$, adică sistemul admite cel puţin o soluţie.
  - Soluţia este **unică** dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = n$, unde n este numărul de necunoscute.
  - Sistemul are **o infinitate de soluţii** (compatibil nedeterminat) dacă $\operatorname{rang} A < n$. În acest caz soluţia generală a sistemului se scrie în funcţie de k parametrii, $k = n - \operatorname{rang} A$.

Un sistem liniar de ecuaţii este reprezentat folosind matricea extinsă a sistemului $[A|b]$.

Această matrice poate fi modificată folosind transformări elementare exculsiv asupra liniilor până se ajunge la forma eşalon. Deoarece aceste transformări sunt reversibile, matricea extinsă generată în urma transformărilor elementare efectuate pe linii, reprezintă întotdeauna un sistem echivalent cu cel dat, iar din forma eşalon se pot citi cu uşurinţă soluţiile sistemului.

Un sistem omogen este echivalent cu o ecuaţie matricială de forma

$$Ax = O,$$

unde $O \in \mathcal{M}_{m,1}$ este matricea având toate elementele zero. Evident, un sistem omogen este întotdeauna compatibil, având cel puţin soluţia banală (trivială) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Poate fi uşor de observat că un sistem liniar omogen are şi alte soluţii în afară de cea banală dacă numărul pivoţilor (elementele diferite de zero de pe diagonala principală) din forma eşalon este mai mic decât numărul necunoscutelor, în alte cuvinte, matricea coeficienţilor este singulară.

1.4 Probleme rezolvate

Problema 1.1. Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Rezolvare: Aplicăm dezvoltarea după elementele unei linii/coloane. Pentru a face acest lucru, este mai eficient să aplicăm în prealabil proprietăţi ale determinanţilor pentru a obţine pe o linie sau coloană cât mai multe elemente de zero. Prin urmare, alegem a_{11} ca şi pivot şi transformăm elementele primei coloane în zero astfel:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{-2L_1+L_2, L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1, C_2+C_3}{=} 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5(8-3) = -25.$$

Problema 1.2. Rezolvaţi ecuaţia $\begin{vmatrix} -2-a & -1 & 1 \\ 5 & -1-a & 4 \\ 5 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = 0.$

Rezolvare: Bineînţeles că se poate aplica regula triunghiului sau regula lui Sarrus pentru calculul determinantului dar, este mult mai uşor de rezolvat ecuaţia dacă aplicăm proprietăţi ale determinanţilor pentru a avea rezultatul ca un produs de factori.

$$\begin{vmatrix} -2-a & -1 & 1 \\ 5 & -1-a & 4 \\ 5 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \overset{C_2+C_3}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} -2-a & -1 & 0 \\ 5 & -1-a & 3-a \\ 5 & 1 & 3-a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(3-a) \begin{vmatrix} -2-a & -1 & 0 \\ 5 & -1-a & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \overset{-L_2+L_3}{\Longleftrightarrow} (3-a) \begin{vmatrix} -2-a & -1 & 0 \\ 5 & -1-a & 1 \\ 0 & 2+a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(3-a)(2+a)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2-a & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -(3-a)(2+a)(-2-a) = 0 \Longrightarrow$$

$a \in \{-2, 3\}$.

Problema 1.3. Calculaţi rangul următoarelor matrice folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare: Vom aplica transformări elementare exculsiv asupra liniilor până cele două condiţii sunt îndeplinite:

(C.1) Toate liniile nenule sunt deasupra liniilor nule.

(C.2) Primul element diferit de zero (pivotul) al unei linii nenule este întotdeauna strict în dreapta primului element diferit de zero al liniei deasupra ei.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{-L_1+L_3,\frac{1}{2}L_1}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{-L_2+L_3,-L_2+L_4}{\simeq}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rangul matricii A este $\operatorname{rang}(A) = 3$ (numărăm numărul de linii diferite de zero în ultima matrice, după ce ne asigurăm că avem condiţiile **C.1** şi **C.2** îndeplinite.

Pentru matricea B aplicăm aceeaşi metodă.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-3L_1+L_2,-2L_1+L_3,-4L_1+L_4}{\simeq}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}L_2+L_3,-3L_2+2L_4}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Condiţiile **C.1** şi **C.2** sunt îndeplinite, deci $\operatorname{rang}(B) = 2$.

Problema 1.4. Determinaţi inversa matricii A folosind metoda eliminării Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare: Vom aplica aceleaşi transformări elementare asupra matricelor A şi I_4 astfel ca matricea A să fie transformată în I_4. Matricea care rezultă din I_4 în urma acestor transformări va fi inversa matricii A, adică A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1+L_3,-2L_1+L_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2+L_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}L_4,L_3\leftrightarrow L_4,-L_2}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{2L_4+L_3,-L_4+L_2,-2L_4+L_1}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{3L_3+L_2}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{L_2+L_1}{\simeq} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Am obţinut în partea stângă matricea I_4, deci inversa matricii A este formată din elementele obţinute în partea dreaptă, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Problema 1.5. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$(S_1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ -2x + 2y - 3z + 3t = 2 \\ x - y + 2z + 5t = -1 \\ -x + y - 3z + 2t = 4 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

(S_1): Scriem sistemul (S_1) folosind matricea extinsă şi o vom transforma folosind transformări elementare asupra liniilor pentru a citi uşor rangul matricii sistemului şi rangul matricii extinse.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right] \overset{-5L_1+L_2,-3L_1+L_3}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -7 & -11 & -18 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{9}L_2}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 & -18 \end{array}\right] \overset{7L_2+L_3}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}L_3,-2L_3+L_2,-4L_3+L_1}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{-2L_2+L_1}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$, avem 3 necunoscute, deci sistemul are o soluţie unică şi o putem citi din ultima formă a matricii, şi anume $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

$S_1 = \{(-2, 1, 1)\}$.

$$(S_2): \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{2L_1+L_2,-L_1+L_3,L_1+L_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right] \overset{L_2+L_3,-2L_2+L_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 \end{array}\right] \overset{L_3+L_4}{\simeq} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Observăm că $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 4$, deci sistemul este incompatibil.

Observaţie: Dacă rescriem sistemul din ultima formă de matrice, avem

$$(S_2)\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ -3z + 7t = 4 \\ 10t = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

şi este evident că ultima ecuaţie este falsă, deci nu există $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile sistemului (S_2) să fie verificate.

(S_3): Acest sistem este omogen, deci vom avea cel puţin soluţia banală $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Calculăm rangul matricii sistemului pentru a vedea dacă sistemul are şi alte soluţii.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{L_1+L_2,-L_1+L_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{L_2+L_3,-L_2+L_4}{\simeq} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

rang (A) = rang $(\overline{A}) = 2$, dar avem 4 necunoscute. Deci, 2 dintre ele vor deveni necunoscute secundare (parametrii), de exemplu alegem $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ (rangul este 2 deoarece minorul format din coeficienţii necunoscutelor x_1 şi x_2 din primele două ecuaţii este diferit de zero, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci, x_1 şi x_2 rămân necunoscute).

Rescriem sistemul din ultima formă de matrice obţinută şi avem:

$$(S_3)\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3\alpha - 4\beta \\ -x_2 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}.$$

Calculăm $x_1 = \alpha$ şi $x_2 = 2\alpha + 2\beta$. Deci, soluţia generală a sistemului (S_3) este $S_3 = \{(\alpha, 2\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1.5 Probleme propuse

Problema 1.6. Calculaţi determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4-x & -5 & 2 \\ 5 & -7-x & 3 \\ 6 & -9 & 4-x \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ -3 & -4-x & -3 \\ 4 & 7 & 6-x \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Problema 1.7. Calculaţi rangul următoarelor matrice folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Problema 1.8. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$(S_1)\begin{cases} x + 2y + 4z - 3t = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4t = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19t = 0 \\ 4x + 5y - 2z + 3t = 0 \end{cases}; \qquad (S_2)\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ -x - y + 2z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases};$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4-3x_5=0\\ -x_1+3x_2-x_3-2x_4-x_5=0\\ -x_1+x_2-x_3+x_5=0\\ x_1+x_2-x_4-x_5=0\end{cases};\quad (S_4)\begin{cases} x+2y-3z=0\\ x-y+2z-t=0\\ -2x-y+z+t=0\\ -x-8y+13z-2t=0\end{cases}.$$

Problema 1.9. Determinaţi inversa pentru fiecare din următoarele matrice folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

2

Spaţii vectoriale

2.1 Definiţii şi Proprietăţi

Definiţie 2.1. *Un* ***spaţiu vectorial*** V *peste corpul* $\mathbb{F}$ *(sau* $\mathbb{F}$ *spaţiu vectorial) este mulţimea* V *împreună cu adunarea* $+$ *(lege de compoziţie internă) astfel încât* $(V, +)$ *este grup abelian, şi înmulţirea cu scalari* $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, (\alpha, v) \to \alpha \cdot v = \alpha v$*, care verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w,\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v, w \in V$

(2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V$

(3) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(4) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$

- Elementele din V sunt numite **vectori**.
- Elementele din $\mathbb{F}$ sunt numite **scalari**.
- Dacă $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avem spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ sau spaţiu vectorial real.
- Dacă $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ avem spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$ sau spaţiu vectorial complex.

În cele ce urmează vom considera $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, deci vom discuta despre spaţii vectoriale reale.

Observaţie. Din definiţia spaţiului vectorial V peste $\mathbb{R}$ se pot deduce uşor următoarele reguli de calcul:

- $\alpha \cdot 0_V = 0_V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$
- $\alpha \cdot v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ sau $v = 0_V$.

Definiţie 2.2. *Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. O submulţime $U \subset V$ este numită* ***subspaţiu*** *al lui V peste $\mathbb{R}$ dacă este stabilă în raport cu legile de compoziţie, anume:*

1. $v + u \in U,\ \forall v, u \in U$
2. $\alpha v \in U,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in U$.

Propoziţie 2.3. *Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial şi $U \subset V$ o submulţime nevidă. U este un subspaţiu vectorial al lui V peste $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă*

$$\alpha v + \beta u \in U,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall u, v \in U.$$

Observaţie 2.4. $0_{\mathbb{R}}$ *este scalar, deci $\forall u \in U$ avem că $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_V \in U$. Prin urmare orice subspaţiu vectorial al lui V conţine cel puţin un element, şi anume 0_V.*

Propoziţie 2.5. *Fie V un spaţiu vectorial şi $U, W \subset V$ două subspaţii vectoriale. Mulţimile*

$$U \cap W = \{v | v \in U \text{ şi } v \in W\}$$

şi

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui V.

- Subspaţiul $U \cap W$ este denumit intersecţia subspaţiilor vectoriale.
- Subspaţiul $U + W$ este denumit suma subspaţiilor vectoriale.

Definiţie 2.6. *Fie V un spaţiu vectorial şi $U_1, U_2 \subset V$ subspaţii vectoriale. Suma $U_1 + U_2$ este numită **sumă directă** şi este notată cu $U_1 \bigoplus U_2$, dacă orice $u \in U_1 + U_2$ poate fi scris unic ca $u = u_1 + u_2$ unde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.*

Propoziţie 2.7. *Fie V un spaţiu vectorial şi $U, W \subset V$ subspaţii vectoriale. Suma $U + W$ este sumă directă dacă şi numai dacă $U \cap W = \{0_V\}$.*

Definiţie 2.8. *Suma*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

*se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor $v_1, \ldots, v_n \in V$, unde V este un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial, cu scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.*

Definiţie 2.9. *O mulţime nevidă $L = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se numeşte o mulţime **liniar independentă** de vectori dacă*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_i = 0$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

*O mulţime nevidă de vectori care nu este liniar independentă se numeşte **liniar dependentă**.*

Definiţie 2.10. *Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial. O mulţime nevidă $S \subset V$ se numeşte **sistem de generatori** pentru V dacă pentru orice $v \in V$ există o submulţime finită $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ şi scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.*

Propoziţie 2.11. *Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $U \subset V$ nevidă, $U = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$. Mulţimea*

$$\langle U \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \ \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ şi } v_i \in U, \forall i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

este un subspaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ al lui V.

Mulţimea $\langle U \rangle$ este **subspaţiul generat** de U şi este notată de asemenea şi prin

$$\langle U \rangle = \text{span}\{v_1, v_2, \dots v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n | \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}\}.$$

Definiţie 2.12. *O submulţime $B \subset V$ este numită* ***bază*** *a lui V dacă este un sistem de generatori liniar independent. În acest caz orice vector $v \in V$ poate fi scris în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori din B.*

Câteva teoreme importante legate de noţiunea de bază sunt enumerate în cele ce urmează.

Teorema 2.13. *Dacă V este un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial finit generat şi S un sistem de generatori finit al lui V atunci:*

- *Orice spaţiu vectorial V nevid are o bază.*
- *Din orice sistem de generatori finit S, $S \neq \{0\}$, se poate extrage o bază.*
- *Orice mulţime liniar independentă $L \subset S$ poate fi completată la o bază a lui V.*
- *Orice bază a lui V este finită şi are acelaşi număr de elemente.*

Definiţie 2.14. *Fie $V \neq \{0\}$ un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial generat, finit. Numărul de elemente al unei baze B din V se numeşte* ***dimensiunea*** *lui V, şi este notată cu* $\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}} V$*, şi nu depinde de alegerea bazei.*

$dim V = card(B)$.

Pentru $V = \{0\}$, $dim_{\mathbb{R}} V = 0$.

Corolar 2.15. *Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune finită, $dim_{\mathbb{R}} V = n$.*

1. *Orice sistem liniar independent de n vectori este o bază. Orice sistem de m vectori, $m > n$ este liniar dependent.*

2. *Orice sistem de generatori din V format din n vectori este o bază. Orice sistem de m vectori, $m < n$ nu este un sistem de generatori.*

Observaţie 2.16. Dimensiunea unui spaţiu vectorial finit dimensional este egală cu oricare dintre următoarele:

- Numărul vectorilor dintr-o bază.
- Numărul minim de vectori dintr-un sistem de generatori.
- Numărul maxim de vectori dintr-un sistem de vectori liniar independenţi.

Teorema 2.17. *Dacă U şi W sunt două subspaţii a unui spaţiu vectorial finit dimensional V, atunci*

$$dim(U+W) = dim U + dim W - dim(U \cap W)\ .$$

Observaţie 2.18. *Pentru $V = \mathbb{R}^n$ spaţiul vectorial peste $\mathbb{R}$, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ are forma $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, sau $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. În cele ce urmează, vom folosi ambele notaţii în funcţie de cum este mai convenabil.*

Operaţia internă + este definită de

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{bmatrix},$$

unde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Înmulţirea cu scalari (operaţia externă) este definită de

$$\alpha x = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dimensiunea lui $\mathbb{R}^n$ este $dim\mathbb{R}^n = n$, şi ***baza canonică*** *pentru $\mathbb{R}^n$ este*

$$B_e = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vectorul e_i este astfel încât are 1 pe poziţia i şi 0 în rest, $i = \overline{1, n}$.

2.2 Coordonate. Schimbări de baze

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiu vectorial real, cu baza $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Orice vector $v \in \mathbb{R}^n$ este reprezentat unic ca o combinaţie liniară de vectorii din baza B,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

Scalarii $a_1, \dots, a_n$ se numesc coordonatele vectorului v în baza B.

Dacă considerăm o altă bază $B^{'} = \{e_1^{'}, \dots, e_n^{'}\}$, coordonatele aceluiaşi vector în noua bază $B^{'}$ se schimbă.

Avem

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = b_1 e_1^{'} + \dots + b_n e_n^{'}.$$

$v_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ este reprezentarea vectorului v în baza B şi

$$v_{B'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ este reprezentarea vectorului v în noua bază $B^{'}$.

Dacă considerăm reprezentarea vectorilor $e_1^{'}, \ldots, e_n^{'}$ în baza B, avem:

$$\begin{aligned} e_1^{'} &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ &\cdots \\ e_n^{'} &= a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

Fie $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ matricea formată din coeficienţii ecuaţiilor de mai sus.
Coloanele acestei matrice sunt date de coordonatele vectorilor din noua bază $B^{'}$ în funcţie de vechea bază B.

Matricea A^t - transpusa matricii A - este numită **matricea de trecere de la baza B la baza $B^{'}$** şi o notăm prin $P^{B,B'}$.

Observaţii

- Matricea de trecere de la baza canonică $B_e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la noua bază $B_v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este matricea care are pe coloane componenetele vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

- Dacă considerăm trecerea de la baza B la B' cu matricea de trecere notată $P^{B,B'}$ şi trecerea de la baza B' la B'' cu matricea de trecere notată $P^{B',B''}$, matricea de trecere de la baza B la baza B'' este:

$$P^{B,B''} = P^{B,B'} \cdot P^{B',B''}.$$

- Dacă $B'' = B$ avem:

$$P^{B,B'} \cdot P^{B',B} = I_n \Longleftrightarrow (P^{B',B})^{-1} = P^{B,B'}.$$

- Relaţia între reprezentarea aceluiaşi vector în două baze diferite B şi B' este dată de:
$$v_B = P^{B,B'} \cdot v_{B'}.$$

2.3 Probleme rezolvate

Problema 2.1. Determinaţi care dintre următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$:

- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0\}$;
- $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1\}$;
- $S_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \dfrac{x_1 + 4}{-2} = \dfrac{x_2 - 3}{3} = \dfrac{x_3 + 1}{5}\right\}$;
- $S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \dfrac{x_1}{-2} = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{5}\right\}$;
- $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 || x_2| = x_1 + x_3\}$;
- $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 3x_2 + 2x_3^2 = 0\}$.

Rezolvare: Folosind Observaţia 2.4 putem uşor observa că $(0, 0, 0)$ nu este un element al mulţimilor S_2 şi S_3, deci aceste două submulţimi nu sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra că doar mulţimile având condiţii date ca ecuaţii liniare omogene sau sisteme liniare de ecuaţii omogene sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^n$. Deci, mulţimile S_5 şi S_6 nu sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$. Demonstrăm că S_5 şi S_6 nu sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$.

Deoarece în Definiţia 2.2 este folosit simbolul $\forall$, putem arăta că S_5 şi S_6 nu sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ alegând exemple care nu îndeplinesc una din condiţiile definiţiei subspaţiului vectorial.

Pentru S_5 alegem $u = (1, 4, 3) \in S_5$ şi $v = (1, -4, 3) \in S_5$, şi se obsevă că $u + v = (2, 0, 6) \notin S_5$ (deoarece $|0| \neq 2 + 6$).

Pentru S_6 alegem $u = (1, 1, 1) \in S_5$ şi $v = (1, 1, -1) \in S_6$, şi este evident că $u + v = (2, 2, 0) \notin S_6$ (deoarece $2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0^2 \neq 0$).

Demonstrăm acum că S_1 şi S_4 sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$.

S_1: Folosim Propoziţia 2.3. Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3) \in S_1$, deci avem $x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0$ şi $y_1 - 5y_2 + 4y_3 = 0$. Aceasta înseamnă că

$\alpha(x_1 - 5x_2 + 4x_3) = 0$ şi $\beta(y_1 - 5y_2 + 4y_3) = 0$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff$

$\alpha(x_1 - 5x_2 + 4x_3) + \beta(y_1 - 5y_2 + 4y_3) = 0$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff$

$\alpha x_1 - 5\alpha x_2 + 4\alpha x_3 + \beta y_1 - 5\beta y_2 + 4\beta y_3 = 0$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff$

$\alpha x_1 + \beta y_1 - 5(\alpha x_2 + \beta y_2) + 4(\alpha x_3 + \beta y_3) = 0$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff$

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in S_1$, prin urmare S_1 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$.

S_4: Rescriem condiţia din definiţia mulţimii S_4, astfel:

$$\frac{x_1}{-2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5} \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3) \in S_4$.

Avem $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ 5y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 + 5y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = 0 \\ 5(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = 0 \end{cases} \iff x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in S_4.$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha(3x_1 + 2x_2) = 0 \\ \alpha(5x_2 - 3x_3) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha x_1 + 2\alpha x_2 = 0 \\ 5\alpha x_2 - 3\alpha x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in S_4$.

Am demonstrat ambele condiţii $x+y \in S_4$ şi $\alpha x \in S_4$, deci S_4 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$.

Problema 2.2. Arătaţi că $B = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$. Determinaţi coordonatele vectorului $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$ în baza B.

Rezolvare: B este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ dacă numărul de elemente ale mulţimii B este 3, ceea ce este evident adevărat, şi dacă vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi.

v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi dacă $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow a = b = c = 0$.

$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow$

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b \\ 2b \\ -5b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ -c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 3b + c \\ a + 2b - c \\ -3a - 5b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \\ -3a - 5b + c = 0 \end{cases}.$$

Vectorii sunt liniar independenţi dacă $a = b = c = 0$ este unica soluţie a acestui sistem de ecuaţii liniare. Deci, calculăm rangul matricii sistemului. În acest caz este mai rapid dacă calculăm determinantul matricii, întrucât se observă că rangul este cel puţin 2 (avem un minor de ordin 2 diferit de 0, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$).

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2+R_3, R_2+R_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$
$-9 + 10 = 1 \neq 0.$

Rangul este 3 şi este egal cu numărul de necunoscute, deci avem o soluţie unică $a = b = c = 0$ şi putem concluziona că vectorii sunt liniar independenţi deci ei formează o baza în $\mathbb{R}^3$.

Vectorul $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$ este dat în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, adică

$$B_e = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Coordonatele lui v în baza B sunt $v_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ dacă $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \\ -3\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ -5\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 4 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = -9 \end{cases} .$$

Rezolvăm sistemul folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right] \overset{R_2 - 2R_1, 3R_1 + R_3}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \overset{R_2 + R_3}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 4 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = -4 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Prin calcul avem $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, deci $v_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Problema 2.3. Determinaţi dimensiunea şi o bază pentru subspaţiul $U \subseteq \mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rezolvare: Din definiţia lui U, vectorii formează un sistem de generatori pentru U. Trebuie să determinăm dacă sunt liniar independenţi sau, dacă nu, care e numărul maxim de vectori liniar independenţi din mulţime. Facem o combinaţie liniară de vectorii u_1, u_2, u_3, u_4 pentru a afla acest lucru.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \\ c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 2d \\ 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} a+b+2c \\ b+c+d \\ b+c+2d \\ -a+b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a+b+2c=0 \\ b+c+d=0 \\ b+c+2d=0 \\ -a+b+3d=0 \end{cases}.$$

Vectorii sunt liniar independenţi dacă $a = b = c = d = 0$ este unica soluţie a sistemului de ecuaţii liniare. Deci, vom calcula rangul matricii sistemului.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_4}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{-R_2+R_3, 2R_2-R_4}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_3+R_4}{\simeq}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observăm că rangul este 3. Aceasta înseamnă ca avem o soluţie generală şi nu unică ($\text{rang}\,(A) = 3 <$ numărul necunoscutelor $= 4$), deci vectorii nu sunt liniar independenţi. Deoarece rangul este 3, înseamnă că avem 3 vectori liniar independenţi din lista dată. Vom alege 3 dintre vectori astfel încât rangul matricii formate cu componentele lor să fie 3. De exemplu, putem alege u_1, u_2, u_4. $B_U = \{u_1, u_2, u_4\}$ şi $\dim(U) = 3$.

Problema 2.4. Determinaţi o bază în spaţiul real al soluţiilor următoarelor sisteme de ecuaţii liniare:

(a) $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0 \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$

Rezolvare:

(a) Aplicăm metoda eliminării Gauss-Jordan pentru a determina soluţia generală pentru sistemul (S_1).

$$(S_1): \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2-R_1, 2R_1-R_3, R_4-R_1}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2+2R_3, R_2+2R_4}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3+R_4}{\simeq} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$ şi avem 4 necunoscute, deci una devine necunoscută secundară (parametru) , $t = \alpha$.

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x + y - z = -\alpha \\ -2y + 3z = 2\alpha \\ z = -4\alpha. \end{cases}$$

Calculăm $-2y = -3z + 2\alpha = 12\alpha + 2\alpha \Rightarrow y = -7\alpha$, şi $x = -y + z - \alpha = 7\alpha - 4\alpha - \alpha = 2\alpha$.

Soluţia generală este:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -7\alpha \\ -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Deci, o bază pentru S_1 este $B_{S_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ şi dimensiunea este $\dim(S_1) = 1$.

(b) Să determinăm acum soluţia generală pentru cel de-al doilea sistem dat.

$$(S_2) : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1-R_2, R_1-R_3}{\simeq} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2+R_3}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang}(A) = 2$ şi avem 4 necunoscute, deci vom avea 2 parametrii, $x = \alpha$ şi $y = \beta$.

Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} z - t = -\alpha + \beta \\ t = 2\beta \end{cases}$, prin urmare $z = -\alpha + \beta + t = -\alpha + 3\beta$.

Soluţia generală este:

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha + 3\beta \\ 2\beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 3\beta \\ 2\beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

O bază pentru S_2 este $B_{S_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ şi dimensiunea este $\dim(S_2) = 2$.

Problema 2.5. Determinaţi o bază şi dimensiunea pentru fiecare dintre subspaţiile vectoriale $U + V$ şi $U \cap V$ dacă

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z + t = 0\}$$

şi

$$U = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rezolvare:

$U + V = \{u + v | u \in U \text{ şi } v \in V\}$.

Dacă $u \in U$ şi o bază a lui U este $B_U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ atunci $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Dacă $v \in V$ şi o bază a lui V este $B_V = \{v_1, \ldots, v_l\}$ atunci $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Prin urmare,

$$\begin{aligned} U + V &= \{u + v | u \in U \text{ şi } v \in V\} \\ &= \{\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k},\ \beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, l}\} \\ &= \text{span}\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}. \end{aligned}$$

Vom determina câte o bază pentru fiecare dintre subspaţiile U şi V.

Dimensiunea subspaţiului vectorial U este egală cu rangul matricii având ca şi coloane componentele vectorilor u_1, u_2, u_3, u_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle 2R_1-R_2, R_1-R_3, R_1-R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle R_2-R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle 2R_3-R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rangul matricii este 3, deci $\dim U = 3$. O bază pentru U este

$$B_U = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pentru subspaţiul vectorial V scriem soluţia generală a ecuaţiei $x-2y-z+t=0$. Rangul este evident 1, avem 4 necunoscute, prin urmare soluţia generală are 3 parametrii, $y = \alpha$, $z = \beta$ şi $t = \gamma$. Calculăm $x = 2\alpha + \beta - \gamma$, şi soluţia generală a ecuaţiei este:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \operatorname{span} \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

O bază pentru V este $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$U + V = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$.

Dimensiunea subspaţiului $U + V$ este egală cu rangul matricii:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{2R_1-R_2, R_1-R_3, R_1-R_4}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_2-R_3}{\simeq}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{2R_3-R_4}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangul este 4, prin urmare $\dim(U+V) = 4$. O bază pentru $U+V$ este $B_{U+V} = \{u_1, u_2, u_3, v_2\}$.

Dimensiunea subspaţiului $S \cap V$ este $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Dacă $v \in U \cap V$ atunci v poate fi scris în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori din ambele baze B_U şi B_V. Prin urmare, pentru $v \in U \cap V \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$, ceea ce ne conduce la următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = \beta_3 \end{cases} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$ (vezi calculul rangului pentru subspaţiul $U + V$).

Rangul matricii este 4, şi deoarece sistemul are 6 necunoscute, două din ele vor deveni parametrii, $\beta_1 = a$ şi $\beta_3 = b$.

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 - \beta_2 = 2a - b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\beta_2 = 3a - 2b \\ 2\alpha_3 - 2\beta_2 = a - b \\ 0 = \beta_2 \end{cases}.$$

Deoarece avem nevoie doar de una din scrierile lui v, $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ sau $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$ este mai uşor să o algem pe cea de-a doua unde $\beta_1 = a$, $\beta_2 = 0$ şi $\beta_3 = b$, deci

$$v = av_1 + 0v_2 + bv_3 = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow v \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Prin urmare, o bază pentru $U \cap V$ este $B_{U\cap V} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Problema 2.6. Demonstraţi că $B = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$. Determinaţi matricea de trecere de la baza B la baza canonică. Determinaţi coordonatele vectorului $v = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ dat în baza canonică în noua bază B.

Rezolvare: Rangul matricii având coordonatele vectorilor v_1, v_2, v_3 ca şi coloane este 3 întrucât determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{-C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Vectorii sunt liniar independenţi şi ei formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

Vectorul $v = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ este dat în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$,

$$e = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Coordonatele lui v în raport cu baza B sunt $v_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ dacă $v = av_1 + bv_2 + cv_3$.

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6 = a + b \\ 3 = a + b + c \\ 8 = a + 2b + 2c \end{cases}.$$

Putem rezolva sistemul cu metoda eliminării Gauss-Jordan, sau putem folosi matricea de trecere din baza canonică la noua bază B, $P^{e,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ pentru a determina coordonatele lui v în raport cu noua bază B.

Sistemul de mai sus poate fi scris şi ca un produs de matrice astfel:

$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Longrightarrow v_e = P^{e,B} \cdot v_B \Longrightarrow v_B = (P^{e,B})^{-1} \cdot v_e$, unde

$$P^{e,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trebuie să determinăm inversa matricii $P^{e,B}$ care este matricea $P^{B,e}$ adică matricea de trecere de la noua bază B la baza canonică.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1-R_2, R_1-R_3}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{2R_3-R_2}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_2+R_1,-R_3}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Deci, $P^{B,e} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Putem acum calcula coordonatele lui v în noua bază B:

$$v_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Observaţie. *Folosind matricea de trecere putem să calculăm coordonatele oricărui vector w din $\mathbb{R}^3$ în noua bază B înmulţind matricea $P^{B,e}$ cu w.*

Problema 2.7. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm baza $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ şi $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Determinaţi matricea de trecere de la B' la B. Determinaţi coordonatele vectorului $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ în baza B'. Care sunt coordonatele vectorului v în baza B?

Rezolvare: Putem scrie matricele de trecere din baza canonică în ambele baze B şi B', adică

$$P^{e,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^{e,B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ştim că $P^{B'B} = P^{B',B''} \cdot P^{B'',B}$ şi vom folosi ca B'' baza canonică e. Prin urmare, $P^{B'B} = P^{B',e} \cdot P^{e,B} = (P^{e,B'})^{-1} \cdot P^{e,B}$.

Calculăm inversa matricii $P^{e,B'}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1-R_2,R_1+R_3}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2R_3+R_2,2R_3+R_1}{\simeq}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-3R_2+R_1}{\simeq} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Deci, matricea de trecere de la B' la B este

$$P^{B',B} = P^{B',e} \cdot P^{e,B} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Putem determina coordonatele lui v în baza B':

$$v_{B'} = P^{B',e} \cdot v_e = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determinăm coordonatele vectorului v în baza B folosind formula $v_B = P^{B,e} \cdot v_e$ sau $v_B = P^{B,B'} \cdot v_{B'}$. Este mai uşor să folosim $P^{B,e} = (P^{e,B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, deci $v_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2.4 Probleme propuse

Problema 2.8. Arătaţi că $(V, \oplus)$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, unde $V = \mathbb{R}_+^*$, legea de compoziţie internă este $x \oplus y = x \cdot y$, şi operaţia externă, înmulţirea cu scalari este $\alpha \star x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Problema 2.9. Determinaţi care dintre următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$:

- $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
- $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$;
- $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$;
- $A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3-2}{2}\}$;
- $A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{2}\}$;
- $A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | |x_1| = x_2 - x_3\}$;
- $A_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 - x_2 + x_3 = 0\}$;
- $A_8 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 - x_2 + x_3 = 0; x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = 0\}$;
- $A_9 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 - x_2 + x_3 = 2; x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = -1\}$.

Problema 2.10. Determinaţi dacă următoarele mulţimi de vectori sunt liniar independente:

a) $S_1 = \{v_1 = 1 + X, v_2 = 2 + X, v_3 = 2 - 3X\}$, $S_1 \subset \mathbb{R}[X]$;

b) $S_2 = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $S_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

c) $S_3 = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$, $S_3 \subset \mathbb{R}^3$;

d) $S_4 = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, $S_4 \subset \mathbb{R}^4$.

Problema 2.11. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $v_1, v_2, v_3 \in V$ vectori liniar independenţi. Arătaţi că vectorii $w_1 = v_1 - v_2 - v_3$, $w_2 = -v_1 - 2v_2 + 3v_3$ şi $w_3 = -v_1 + v_2 - v_3$ sunt liniar independenţi.

Problema 2.12. Arătaţi că vectorii $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ şi $v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ sunt liniar dependenţi. Scrieţi vectorul v_4 ca o combinaţie liniară de vectorii v_1, v_2, v_3.

Problema 2.13. Determinaţi coordonatele vectorului v în baza B (demonstraţi în prealabil că B este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$) dacă:

a) $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ şi $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$;

b) $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ şi $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$;

c) $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ şi $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$;

d) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ şi $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$;

e) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ şi $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Problema 2.14. Găsiţi dimensiunea şi o bază pentru subspaţiile generate de următoarele mulţimi de vectori:

a) $U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $U_1 \subset \mathbb{R}^4$;

b) $U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^4$;

c) $U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, U_3 \subset \mathbb{R}^4;$

d) $U_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, U_4 \subset \mathbb{R}^5;$

e) $U_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, U_5 \subset \mathbb{R}^4;$

f) $U_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, U_6 \subset \mathbb{R}^3;$

g) $U_7 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, U_7 \subset \mathbb{R}^3;$

h) $U_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, U_8 \subset \mathbb{R}^2.$

Problema 2.15. Găsiţi o bază în spaţiul real al soluţiilor următoarelor sisteme liniare de ecuaţii:

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + 2y + z + -t = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$(S_2)\ \begin{cases} x+y-z-2t=0 \\ x-y+2t=0 \\ y+-z+t=0. \end{cases}$$

$$(S_3)\ \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ 2x+3y+3z-t=0 \\ 3x+2y+4z-2t=0 \\ x+4y+2z=0. \end{cases}$$

$$(S_4)\ \begin{cases} x-y-z+t=0 \\ x+y-2z+t=0 \\ x-5y-z+t=0. \end{cases}$$

$$(S_5)\ \begin{cases} x+y-t=0 \\ x+z-2t=0 \\ y-z+t=0. \end{cases}$$

$$(S_6)\ \begin{cases} x-y+2z-4t=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x+t=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

Problema 2.16. Determinaţi dimensiunea şi o bază pentru suma $S+V$ şi intersecţia $S\cap V$ subspaţiilor vectoriale S şi V dacă:

a) $S=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$

$$V = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\};$$

b) $S = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, V = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\};$

c) $S = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\},$

$$V = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\};$$

d) $S = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 2z - t = 0\};$

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y + z = 0\},$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y - 2z = 0\};$

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 5z = 0\},$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -3x + y + z = 0\};$

g) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + 2z - t = 0; x + 2y - z + t = 0; x + 5y - 4z + 3t = 0\},$

$$V = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\};$$

h) $$S = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}\right\},$$

$$V = span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Problema 2.17. Arătaţi că fiecare dintre următoarele două mulţimi de vectori este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi găsiţi relaţia dintre coordonatele aceluiaşi vector în cele două baze:

$$B = \left\{a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$$

şi

$$B' = \left\{b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Problema 2.18. Arătaţi că fiecare dintre următoarele două mulţimi de vectori este o bază în spaţiul polinoamelor cu coeficienţi reali de grad $\leqslant 3$ şi găsiţi matricea de trecere între cele două baze

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2, e_4 = X^3\}$$

şi

$$B' = \{e'_1 = 1 + X, e'_2 = 1 - X^2, e'_3 = X^2 + X, e'_4 = X^3 - X^2\}.$$

Problema 2.19. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ considerăm bazele

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determinaţi matricea de trecere de la B la B'. Determinaţi coordonatele vectorului $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ în baza B'. Care sunt coordonatele vectorului v în baza B?

Problema 2.20. Arătaţi că următoarele două mulţimi de vectori sunt baze în spaţiul $R_2[X]$ şi găsiţi matricea de trecere între cele două baze dacă

$$B = \{X^2, X + X^2, 1 + X + X^2\}$$

şi

$$B' = \{2 + 3X^2, 4 + X - X^2, 2 + 5X + 3X^2\}.$$

Găsiţi coordonatele polinomului $4 - 4X - X^2$ în ambele baze B şi B'.

3

Coordonate în plan şi spaţiu

3.1 Coordonate în plan

În $\mathbb{R}^2$ considerăm sistemul cartezian de coordonate xOy. **Coordonatele carteziene** sau *coordonatele rectangulare* ale punctului $M \in \mathbb{R}^2$ sunt notate în perechea ordonată (x_0, y_0). **Coordonatele polare** ale punctului M sunt (r, θ) unde:

- r este lungimea segmentului de dreaptă $[OM]$, $r \geqslant 0$;
- θ este unghiul dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi dreapta OM, $\theta \in [0, 2\pi]$.

  Unghiul se măsoară în radiani în sens trigonometric (sensul invers acelor de ceasornic dinspre axa Ox spre OM).

r şi θ pot fi transformate în coordonatele carteziene x şi y folosind formulele trigonometrice sinus şi cosinus:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Invers:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \ x \neq 0. \end{cases}$$

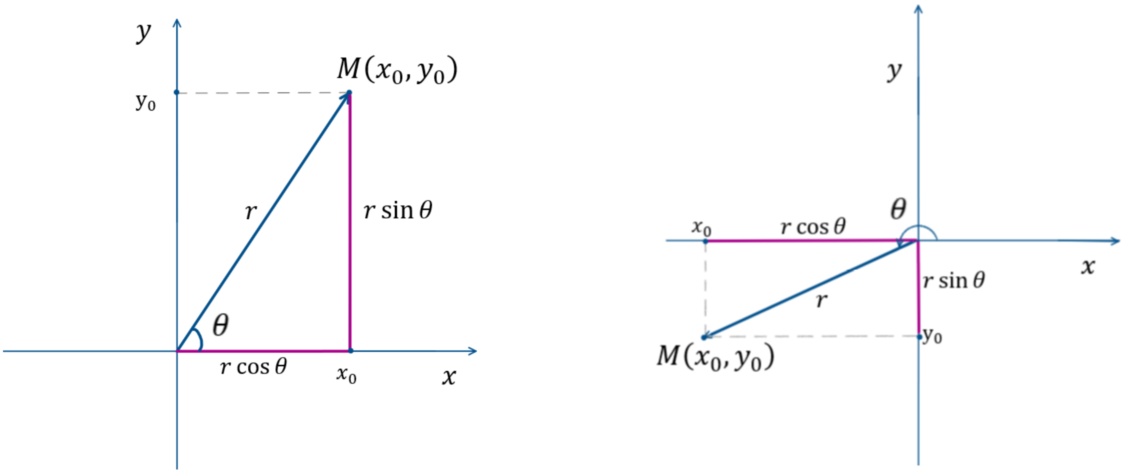


Figura 3.1: Relaţia dintre coordonatele polare şi cele carteziene

Dacă $x = 0$ şi $y > 0$ atunci $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

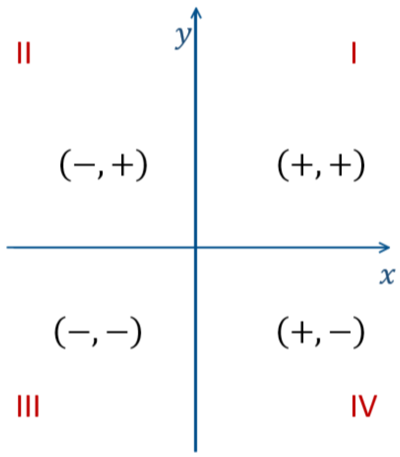
Dacă $x = 0$ şi $y < 0$ atunci $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Observaţie 3.1. $\tan\theta = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0 \Longleftrightarrow \theta = \arctan\dfrac{y}{x} + k\pi$ *unde*

$$\begin{cases} k = 0, & (x, y) \in \textit{cadranul } I \\ k = 1, & (x, y) \in \textit{cadranul } II \textit{ sau cadranul } III \\ k = 2, & (x, y) \in \textit{cadranul } IV. \end{cases}$$

Observaţie 3.2. *Când lucrăm cu valori negative ale lui x şi y, axele Ox şi Oy împart planul în patru cadrane, cadranele I, II, III şi IV, numerotate în sens trigonometric.*

- *În cadranul I x şi y au valori pozitive.*
- *În cadranul II x este negativ iar y este pozitiv.*
- *În cadranul III x şi y sunt amblele negative.*
- *În cadranul IV x este pozitiv şi y este negativ.*

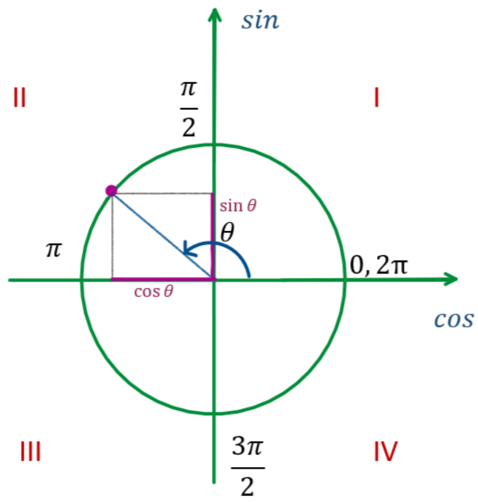


Funcţiile trigonometrice pentru valori care nu sunt în primul cadran se pot reduce la primul cadran folosind următoarele relaţii:

- *Dacă* $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Longrightarrow \theta = \pi - x$, *unde* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi - x) = -\tan(x). \end{cases}$

- *Dacă* $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow \theta = \pi + x$, *unde* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x). \end{cases}$

- *Dacă* $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Longrightarrow \theta = 2\pi - x$, *unde* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \sin(2\pi - x) = -\sin(x) \\ \cos(2\pi - x) = \cos(x) \\ \tan(2\pi - x) = -\tan(x). \end{cases}$



3.2 Coordonate în spaţiu

În $\mathbb{R}^3$ considerăm sistemul cartezian ortogonal de coordonate $Oxyz$. **Coordonatele carteziene** ale punctului $M \in \mathbb{R}^3$ sunt puse în tripletul ordonat (x_0, y_0, z_0) şi notăm $M(x_0, y_0, z_0)$.

Coordonatele cilindrice ale punctului M sunt (r, θ, z) unde:

- r este lungimea segmentului de dreaptă $[OM']$, unde M' este proiecţia pe planul xOy a punctului M, $r \geqslant 0$.
- θ este unghiul dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi dreapta OM', $\theta \in [0, 2\pi]$.

Notăm coordonatele cilindrice ale punctului cu $M(r, \theta, z)$.

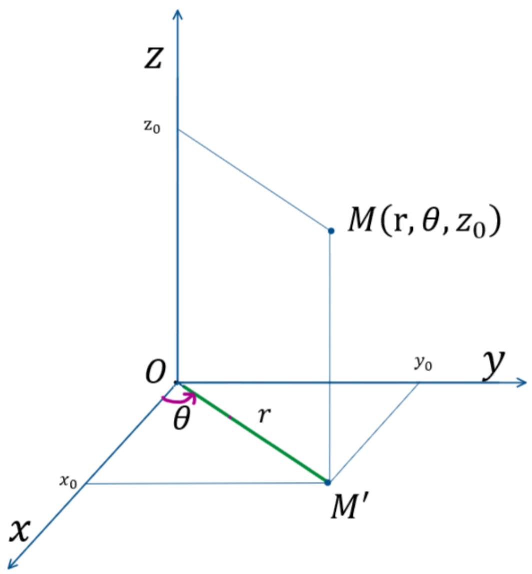


Figura 3.2: Coordonatele cilindrice

Legătura dintre coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele cilindrice (r, θ, z) este dată de ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} ; \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \ \ x \neq 0 \\ z = z. \end{cases} .$$

Dacă $x = 0$ şi $y > 0$ atunci $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Dacă $x = 0$ şi $y < 0$ atunci $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Coordonatele sferice de localizare a punctului M în spaţiu sunt (ρ, θ, φ) unde:

- ρ lungimea segmentului de dreaptă $[OM]$, $\rho \geqslant 0$ *distanţa radială*;

- θ unghiul dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi OM', unde M' este proiecţia pe planul xOy a punctului M, $\theta \in [0, 2\pi]$, *unghiul azimut*;

- φ unghiul dintre direcţia poitivă a axei Oz şi OM, $\varphi \in [0, \pi]$; *unghiul polar.*

Notăm coordonatele sferice ale punctului cu $M(\rho, \theta, \varphi)$.

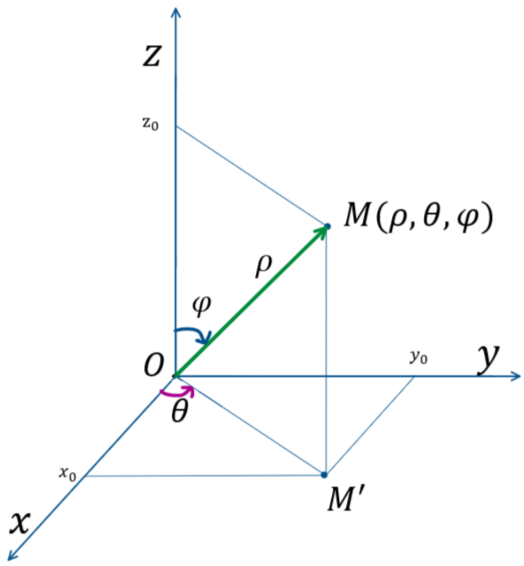


Figura 3.3: Coordonatele sferice

Legătura dintre coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele sferice (ρ, θ, φ) sunt date de relaţiile:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \ x \neq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} .$$

Dacă $x = 0$ şi $y > 0$ atunci $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Dacă $x = 0$ şi $y < 0$ atunci $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

3.3 Probleme rezolvate

Problema 3.1. Fie punctele $A(2,0)$, $B(-3,0)$, $C(-1,1)$, $D(0,-4)$, $E(3,-3\sqrt{3})$ din $\mathbb{R}^2$. Transformaţi coordonatele carteziene ale punctelor în coordonate polare.

Rezolvare:

- $A(2,0) \Longrightarrow x = 2,\ y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2+0^2} \\ \tan\theta = \dfrac{0}{2} \end{cases} \Longrightarrow$
  $\begin{cases} r = 2 \\ \theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ coordonatele polare ale punctului A sunt $(2,0)$.

- $B(-3,0) \Longrightarrow x = -3,\ y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-3)^2+0^2} \\ \tan\theta = \dfrac{0}{-3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ \theta = \pi \end{cases} \Longrightarrow$
  coordonatele polare ale punctului B sunt $(3,\pi)$.

- $C(-1,1) \Longrightarrow x = -1,\ y = 1 \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2+1^2} \\ \tan\theta = \dfrac{1}{-1}, \quad \theta \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases} \Longrightarrow$
  $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi - \arctan(1) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow$ coordonatele polare ale punctului C sunt $\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

- $D(0,-4) \Longrightarrow x = 0,\ y = -4 \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0^2+(-4)^2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Longrightarrow$ coordonatele polare ale punctului D sunt $\left(4,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

- $E(3,-3\sqrt{3}) \Longrightarrow x = -2,\ y = 2\sqrt{3} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(3)^2+(-3\sqrt{3})^2} \\ \tan\theta = \dfrac{-3\sqrt{3}}{3}, \quad \theta \in \left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ \theta = 2\pi - \arctan(\sqrt{3}) = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ coordonatele polare ale punctului E sunt $\left(6, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Problema 3.2. Fie $A\left(3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(5, \dfrac{4\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}^2$. Transformaţi coordonatele polare ale punctelor A şi B în coordonate carteziene.

Rezolvare:

- $A\left(3, \dfrac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow r = 3,\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\cos\dfrac{3\pi}{4} \\ y = 3\sin\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x = 3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \text{coordonatele carteziene ale punctului } A \text{ sunt } \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

- $B\left(5, \dfrac{4\pi}{3}\right) \Longrightarrow r = 5,\ \theta = \dfrac{4\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5\cos\dfrac{4\pi}{3} \\ y = 5\sin\dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y = 5\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

$\Longrightarrow$ coordonatele carteziene ale punctului B sunt $\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$.

Problema 3.3. Fie $A\left(4, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}^3$. Transformaţi coordonatele sferice ale punctului A în coordonate cilindrice şi coordonate carteziene.

Rezolvare:

$$A\left(4, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \Longrightarrow \rho = 4,\ \theta = \frac{7\pi}{4},\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{7\pi}{4} \\ y = 4\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{7\pi}{4} \\ z = 4\cos\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \text{coordonatele carteziene}$$

ale punctului A sunt $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2)$.

Pentru coordonatele cilindrice trebuie să calculăm (r, θ, z). Ştim că $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ şi $z = -2$. Calculăm $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, iar coordonatele cilindrice ale punctului A sunt $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{7\pi}{4}, -2\right)$.

Problema 3.4. Determinaţi coordonatele cilindrice şi sferice ale punctului $A \in \mathbb{R}^3$, $A(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, dat în coordonate carteziene.

Rezolvare:

$$A(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}) \Longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}},\ \theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{\rho},\ \ \varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \pi - \arctan 1 \\ \cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \pi - \arctan 1 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \\ \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Longrightarrow$$

coordonatele sferice ale punctului A sunt $\left(4, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Pentru coordonatele cilindrice avem nevoie să determinăm (r, θ, z). Am calculat deja $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, şi $z = 2\sqrt{3}$. Calculăm $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4} = 2$, deci coordonatele cilindrice ale punctului A sunt $\left(2, \dfrac{3\pi}{4}, 2\sqrt{3}\right)$.

Problema 3.5. Fie $M\left(5, \dfrac{5\pi}{3}, -3\right) \in \mathbb{R}^3$ dat în coordonate cilindrice. Determinaţi coordonatele carteziene şi sferice ale punctului M.

Rezolvare:

$$M\left(5, \frac{5\pi}{3}, -4\right) \Longrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ \theta = \dfrac{5\pi}{3} \\ z = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5\cos\dfrac{5\pi}{3} \\ y = 5\sin\dfrac{5\pi}{3} \\ z = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \\ y = 5 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z = -4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ coordonatele carteziene ale punctului $M\left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, -4\right)$.

Pentru coordonatele sferice determinăm (ρ, θ, φ). Ştim $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Calculăm $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{41}$ şi $\cos\varphi = \frac{-4}{\rho} = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Longrightarrow \varphi = \pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{29}}$.

Coordonatele sferice ale punctului M sunt $\left(\sqrt{41}, \frac{5\pi}{3}, \pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$.

3.4 Probleme propuse

Problema 3.6. Fie $A(-3,0)$, $B(0,-4)$, $C(4,-4)$, $D(-7,0)$, $E(0,6)$, $F(\sqrt{3},-3)$ puncte în $\mathbb{R}^2$. Transformaţi coordonatele carteziene ale punctelor în coordonate polare.

Problema 3.7. Fie $A\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ şi $C\left(9, \frac{\pi}{3}\right)$ puncte în $\mathbb{R}^2$. Transformaţi coordonatele polare ale punctelor în coordonate carteziene.

Problema 3.8. Punctul P este pe sfera de rază 4, O este centrul sferei. Unghiul dintre OP şi axa Oz este $30°$, unghiul dintre OP' ($P' = \mathrm{pr}_{xOy}P$) şi Ox este $60°$. Determinaţi coordonatele cilindrice şi coordonatele carteziene ale punctului P.

Problema 3.9. Fie punctele $A\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(12, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(4, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ în $\mathbb{R}^3$. Transformaţi coordonatele sferice ale punctelor date în coordonate cilindrice şi coordonate carteziene.

Problema 3.10. Determinaţi coordonatele cilindrice ale punctelor $A(2, 2\sqrt{3}, 5)$, $B(4,-4,6)$, $C(-3, \sqrt{3}, -4)$, $D(-3\sqrt{3}, -9, 0)$, $E(0,0,4)$ date în coordonate carteziene.

Problema 3.11. Transformaţi coordonatele carteziene ale punctelor $A(2\sqrt{3}, 6, 4)$, $B(0, -6\sqrt{3}, 6)$ şi $C(-16, 0, 0)$ în coordonate sferice.

Problema 3.12. Fie punctele $A\left(3, \frac{\pi}{3}, -3\right)$, $B\left(5, \frac{3\pi}{4}, -6\right)$, $C\left(4, \frac{7\pi}{4}, 2\right)$, $D\left(5, \frac{\pi}{3}, 2\right)$ în $\mathbb{R}^3$, date în coordonate cilindrice. Determinaţi coordonatele carteziene şi sferice ale acestor puncte.

4

Vectori în spaţiu

Un vector în spaţiu $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ este determinat de:

- **lungime**, $\|\overrightarrow{v}\|$ sau $|\overrightarrow{v}|$ (magnitudine, valoare absolută) care este un număr nenegativ;
- **direcţie** - o dreaptă care reprezintă toate dreptele paralele cu dreapta dată;
- **sens** - în care dreapta este direcţionată.

Vectorii pot fi adunaţi fie cu regula triunghiului fie cu regula paralelogramului.

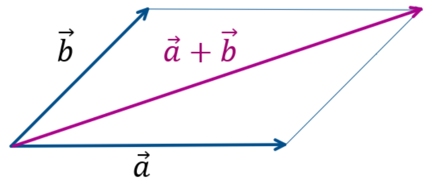


Figura 4.1: Regula paralelogramului

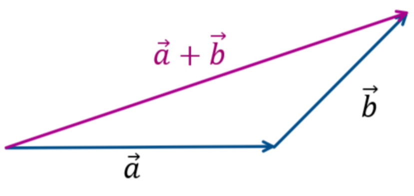


Figura 4.2: Regula triunghiului

Mulţimea tuturor vectorilor din spaţiu este notată cu $\mathcal{V}_3$.

Când vorbim despre vectori, numerele deseori sunt numite **scalari**.

Considerăm axele Ox, Oy, Oz, perpendiculare două câte două, care formează un sistem cartezian de axe de coordonate. Fie $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ versorii acestui sistem. În notaţiile folosite la spaţii vectoriale, $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ şi $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$, iar aceştia reprezintă baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Fiecare vector $\overrightarrow{v}$ poate fi scris, unic, în forma

$$\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = (a,b,c),$$

unde a, b, c sunt scalari (componetele vectorului $\overrightarrow{v}$).

Perechea ordonată de puncte (A,B), $A(x_A,y_A,z_A)$ şi $B(x_B,y_B,z_B)$ puncte în spaţiu, defineşte unul şi doar un singur vector

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k}.$$

Fie punctul $M(x_M,y_M,z_M) \in \mathbb{R}^3$. Atunci vectorul

$$\overrightarrow{OM} = x_M\overrightarrow{i} + y_M\overrightarrow{j} + z_M\overrightarrow{k}$$

este numit *vectorul de poziţie* al punctului M.
Pentru $\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$ avem:

- $\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$ - **magnitudine, lungime, valoare absolută**;
- $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (a_1 + a_2)\overrightarrow{i} + (b_1 + b_2)\overrightarrow{j} + (c_1 + c_2)\overrightarrow{k}$ - adunarea a doi vectori;
- $\alpha\overrightarrow{v_1} = \alpha a_1\overrightarrow{i} + \alpha b_1\overrightarrow{j} + \alpha c_1\overrightarrow{k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ - înmulţirea unui vector cu un scalar;
- $\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \iff \exists\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2}$.

Mulţimea $\mathcal{V}_3$ este un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale, unde operaţia internă este adunarea vectorilor iar operaţia externă este înmulţirea cu scalari operaţii definite mai sus.

4.1 Produs scalar

Asociem cu oricare doi vectori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ un număr (scalar) numit **produsul scalar** şi notat prin $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$.

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \overset{def}{=} \|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\| \cdot \cos\alpha,$$

unde $\alpha \in [0, \pi]$ este unghiul dintre $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

Proprietăţi. Pentru orice $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathcal{V}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

1. $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$ - *comutativitate*;

2. $\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}$ - *distributivitate faţă de adunarea vectorilor*;

3. $(\alpha\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2} = \alpha(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})$;

4. $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} \geqslant 0$, $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$.

Din definiţia produsului scalar avem:

- $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\|}$.
- $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.
- $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{v_2} = |\cos\alpha| \cdot \|v_2\|$, unde $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

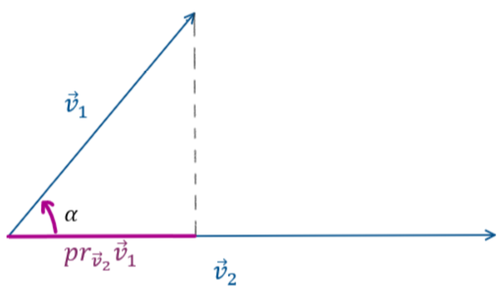


Figura 4.3: Proiecţia când $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

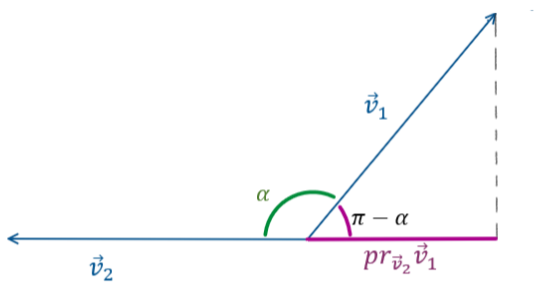


Figura 4.4: Proiecţia când $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Modulul pentru funcţia cos este necesar când unghiul dintre vectori este obtuz (mai mare decât $\dfrac{\pi}{2}$).

- $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2$.
-

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	1	0	0
$\overrightarrow{j}$	0	1	0
$\overrightarrow{k}$	0	0	1

Dacă $\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$ şi $v_2 = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$, avem următoarea formulă de calcul a produsului scalar $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

4.2 Produs vectorial

Produsul vectorial al vectorilor $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ este vectorul notat $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, caracterizat de:

- **lungimea** vectorului produs vectorial este definită de

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| = \|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\| \cdot \sin\alpha;$$

- **direcţia** vectorului $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ este perpendiculară pe amândoi vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$;
- **sensul** este astfel încât $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\}$ să fie orientaţi ca şi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

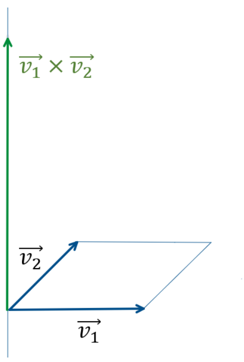


Figura 4.5: Produsul vectorial

Proprietăţi. Pentru orice $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathcal{V}_3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

1. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}$;

2. $(\alpha\overrightarrow{v_1}) \times \overrightarrow{v_2} = \alpha(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$;

3. $\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_3}$;

4. $\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$;

5. Lungimea produsului vectorial este egală cu valoarea numerică a ariei paralelogramului construit pe $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$,

$$\mathcal{A}_{\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}} = \|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|.$$

Din definiţia produsului vectorial avem

$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{k}$	$-\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$

Dacă $\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$, avem următoarea formulă de calcul a produsului vectorial al vectorilor $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}$$

sau, folosind un determinant simbolic:

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

4.3 Produsul mixt

Produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ este scalarul notat cu $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ şi definit de

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}).$$

Proprietăţi. Pentru orice $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathcal{V}_3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

1. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})$;
2. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = -(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$;
3. $(\alpha\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \alpha(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

Aplicaţii geometrice.

1. Modulul valorii produsului mixt este egal cu valoarea numerică a volumului paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$.
2. Volumul tetraedrului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ este egal cu $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})|$.
3. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sunt paraleli cu acelaşi plan (vectorii sunt coplanari).

Pentru $\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = a_3\overrightarrow{i} + b_3\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}$ formula pentru calculul produsului mixt dintre vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ este:

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4.4 Triplul produs vectorial

Triplul produs vectorial al vectorilor $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ este vectorul $\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$.

Nu are vreo proprietate din punct de vedere geometric, dar este des utilizat în aplicaţii şi se poate calcula uşor folosind formula lui Gibbs:

$$\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3})\overrightarrow{v_2} - (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} \end{vmatrix}.$$

4.5 Probleme rezolvate

Problema 4.1. Scrieţi vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ ca o combinaţie liniară de vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Rezolvare:

Descompunerea este $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} \Longleftrightarrow$

$\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} = \alpha(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) + \beta(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}) + \gamma(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha - \gamma = 3 \\ 2\beta + \gamma = -5 \end{cases}$$

Sistemul are soluţia $\alpha = 2,\ \beta = -3,\ \gamma = 1$ deci, descompunerea vectorului este $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Problema 4.2. Fie $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Calculaţi:

a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

b) $\|\overrightarrow{c}\|$.

c) $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$.

d) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

e) Unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

f) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

g) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$.

h) Proiecţia vectorului $\overrightarrow{a}$ pe vectorul $\overrightarrow{b}$, $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$.

Rezolvare:

a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + (\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}) = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

b) $\|\overrightarrow{c}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

c) $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -5$.

d) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

e) $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|} = \dfrac{2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{0+1+4}} = -\dfrac{5}{\sqrt{70}} < 0 \Longrightarrow$

$\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi - \arccos \dfrac{5}{\sqrt{70}}$.

f) $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{i}$.

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \cdot (\overrightarrow{i}) = 2$.

g) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$.

h) $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \implies \mathrm{pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\cos\varphi| \|\overrightarrow{a}\|$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|} = \frac{-5}{\sqrt{70}} \implies \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \sqrt{14} \cdot \frac{5}{\sqrt{70}} = \sqrt{5}.$$

Problema 4.3. Fie punctele din spaţiu $A(-2, 1, 0)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-2, 0, 4)$, $D(-4, 1, 3)$. Determinaţi:

a) Aria triunghiului $\triangle ABC$.

b) Distanţa de la punctul D la dreapta BC.

c) $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

d) Volumul tetraedrului $ABCD$.

e) Înălţimea tetraedrului $ABCD$ considerând baza (ABC).

Rezolvare:

a) $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

$\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$;

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} - 16\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}.$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 256 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{273}.$$

b) $d(A, BC) = h$, unde h este înălţimea pe BC a triunghiului.

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{h \cdot BC}{2}.$$

$\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \implies \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$.

$$h = \frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \sqrt{\frac{273}{17}}.$$

c) $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|}$.

$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$;

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{-12}{\sqrt{26}\sqrt{6}} = -\dfrac{6}{\sqrt{39}} < 0 \Longrightarrow \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Longrightarrow$

$= \pi - \arccos \dfrac{6}{\sqrt{39}}$.

d) $$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-10| = \frac{5}{3}.$$

e) $$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC} \cdot h}{3} \Longrightarrow h = \frac{3\mathcal{V}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{273}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{273}}.$$

Problema 4.4. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \lambda\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ să fie coplanari.

Rezolvare:

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ sunt coplanari} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 3 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow 9 - \lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{-3, 3\}$.

Problema 4.5. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\lambda\overrightarrow{j} - (\lambda - 1)\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{b} = (3 - \lambda)\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ să fie perpendiculari.

Rezolvare:

$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Longleftrightarrow 1(3 - \lambda) + 2\lambda \cdot 1 - (\lambda - 1)2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 5$.

Problema 4.6. Determinaţi unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ dacă $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ şi $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \perp (3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$.

Rezolvare: Fie $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \perp (3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow (2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) = 0 \Longleftrightarrow$

$6\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$

Aplicând definiţia şi proprietăţile produsului scalar avem:

$6\|u\|^2 - \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\alpha - 2\|\overrightarrow{v}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$6 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot 16 = 0 \Longleftrightarrow$

$24 - 8\cos\alpha - 32 = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha = -1 \Longleftrightarrow \alpha = \pi.$

Problema 4.7. Considerăm $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$, astfel încât $\|\overrightarrow{p}\| = 3$, $\|\overrightarrow{q}\| = 2$ şi unghiul dintre $\overrightarrow{p}$ şi $\overrightarrow{q}$ este egal cu $\frac{\pi}{3}$.

a) Determinaţi lungimea celor două diagonale ale paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

b) Determinaţi unghiul format de diagonalele paralelogramului având vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ ca laturi.

c) Calculaţi aria paralelogramului construit pe $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

Rezolvare:

a) Ştim că cele două diagonale sunt suma şi diferenţa vectorilor pe care este construit paralelogramul.

Fie $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{d_1} = 5\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q} + \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q} = 6\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}.$

$\overrightarrow{d_2} = 5\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q} - (\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}) = 4\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}.$

Vom folosi formula $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2$ pentru a determina lungimea diagonalelor.

Calculăm:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{d_1}\|^2 &= \|6\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}\|^2 = (6\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \cdot (6\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \\ &= 36\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} - 6\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} - 6\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= 36\|\overrightarrow{p}\|^2 - 12\|\overrightarrow{p}\| \cdot \|\overrightarrow{q}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) + \|\overrightarrow{q}\|^2 \\ &= 36 \cdot 9 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4 \\ &= 292\end{aligned}$$

Deci, $\|\overrightarrow{d_1}\| = 2\sqrt{73}$.

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{d_2}\|^2 &= \|4\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}\|^2 = (4\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}) \cdot (4\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}) \\ &= 16\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} - 20\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} - 20\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} + 25\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= 16\|\overrightarrow{p}\|^2 - 40\|\overrightarrow{p}\| \cdot \|\overrightarrow{q}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) + 25\|\overrightarrow{q}\|^2 \\ &= 16 \cdot 9 - 40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4 \\ &= 124\end{aligned}$$

Prin urmare, $\|\overrightarrow{d_1}\| = 2\sqrt{31}$.

b) Fie $\sphericalangle(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}) = \varphi \Longrightarrow \cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}}{\|\overrightarrow{d_1}\| \cdot \|\overrightarrow{d_2}\|}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d_2} \cdot \overrightarrow{d_2} &= (6\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \cdot (4\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}) \\ &= 24\|\overrightarrow{p}\|^2 - 34\|\overrightarrow{p}\| \cdot \|\overrightarrow{q}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) + 5\|\overrightarrow{q}\|^2 \\ &= 24 \cdot 9 - 34 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 20 \\ &= 134\end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \frac{134}{2\sqrt{73} \cdot 2\sqrt{31}} \Longrightarrow \varphi = \arccos\frac{67}{2\sqrt{73 \cdot 31}}.$$

c) $\mathcal{A}_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} = \dfrac{\|\overrightarrow{d_1}\| \cdot \|\overrightarrow{d_2}\| \cdot \sin\sphericalangle(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})}{2}$.

Determinăm $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{67^2}{4\cdot 31\cdot 73}} = \frac{39\sqrt{3}}{2\sqrt{31\cdot 73}}$.

Atunci,

$$\mathcal{A}_{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}} = \frac{2\sqrt{73}\cdot 2\sqrt{31}\cdot \frac{39\sqrt{3}}{2\sqrt{31\cdot 73}}}{2} = 39\sqrt{3}.$$

Problema 4.8. Demontraţi că $\overrightarrow{a} = 12\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k}$ sunt două laturi ale unui cub. Determinaţi $\overrightarrow{c}$ astfel încât $\overrightarrow{c}$ să fie a treia muchie a cubului.

Rezolvare:

$\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt două muchii ale unui cub dacă şi numai dacă:

1. $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$
2. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2} = 13$, $\|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$ deci prima condiţie este îndeplinită.

$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0 \Longleftrightarrow 12\cdot 3 + 3\cdot 4 + (-4)\cdot 12 = 0 \Longleftrightarrow 36 + 12 - 48 = 0$ ceea ce este adevărat, deci $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

A treia muchie a cubului $\overrightarrow{c}$ trebuie să verifice următoarele condiţii:

1. $\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\| = 13$,
2. $\begin{cases} \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b} \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{c} \parallel \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 12 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 52\overrightarrow{i} - 156\overrightarrow{j} + 39\overrightarrow{k}.$$

Deoarece $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \mathcal{A}_{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}} = 13^2$, şi $\|\overrightarrow{c}\| = 13$, atunci,

$\overrightarrow{c} = \pm\frac{1}{13}(52\overrightarrow{i} - 156\overrightarrow{j} + 39\overrightarrow{k}) = \pm(4\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k})$.

4.6 Probleme propuse

Problema 4.9. Descompuneţi vectorul $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ ca sumă de vectorii $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$

Problema 4.10. Scrieţi vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ ca o combinaţie liniară de vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Problema 4.11. Fie $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Demonstraţi că $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ este o bază pentru $\mathcal{V}_3$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ în baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

Problema 4.12. Considerăm punctele $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 0)$ şi $C(3, 2, -6)$ în spaţiu. Determinaţi:

a) Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

b) Produsul scalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) Aria triunghiului ΔABC.

Problema 4.13. Considerăm vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Calculaţi:

a) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

b) $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{w}$.

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

d) $\|\overrightarrow{v}\|$.

e) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

f) aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$.

g) înălţimea paralelogramului cu laturile $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$, considerând ca bază $\overrightarrow{v}$.

h) volumul tetraedrului construit pe vectorii $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{w}$.

Problema 4.14. Fie punctele în spaţiu $A(0, 1, -1)$, $B(1, 1, 3)$, $C(2, 1, -2)$, $D(3, -1, 2)$. Calculaţi:

a) Volumul tetraedrului $ABCD$.

b) Distanţa de la punctul D la planul ABC.

c) $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Problema 4.15. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + (2\lambda - 3)\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{b} = (2 + 3\lambda)\overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ să fie perpendiculari.

Problema 4.16. Determinaţi unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ dacă $\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\|\overrightarrow{b}\| = 2$ şi $(3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}) \perp (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})$.

Problema 4.17. Demonstraţi că $\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{b} = -3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ sunt două muchii ale unui cub. Determinaţi $\overrightarrow{c}$ astfel încât $\overrightarrow{c}$ să fie a treia muchie a cubului.

Problema 4.18. Considerăm vectorii $\overrightarrow{a} = (2, 3, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, -2)$, $\overrightarrow{c} = (-2, 1, 2)$. Calculaţi:

a) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;

b) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;

c) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$;

d) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

Problema 4.19. Fie punctele A, B, C, D în spaţiu. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

b) Dacă $DA\perp BC$ şi $DB\perp CA$ atunci $DC\perp AB$.

Problema 4.20. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0}$.

b) Dacă M este un punct arbitrar $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Problema 4.21. Demonstraţi identitatea lui Lagrange

$$\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\|^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=\|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2,$$

pentru orice vectori $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

Problema 4.22. Determinaţi vectorul $\overrightarrow{w}$ astfel încât $\|\overrightarrow{w}\|=3$, $\overrightarrow{w}$ este perpendicular pe axa Oz şi face un unghi de $45°$ cu direcţia pozitivă a axei Ox.

Problema 4.23. Găsiţi unghiul dintre :

a) vectorul $\overrightarrow{v}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i}+\frac{1}{2}\overrightarrow{j}$ şi axa Ox.

b) $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ unde $A(3,1,-2)$, $B(2,1,-1)$ şi $C(3,0,-1)$.

Problema 4.24. Fie $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$. Determinaţi înălţimea paralelogramului având laturile $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{u}$, considerând $\overrightarrow{v}$ ca bază.

Problema 4.25. Fie $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$. Determinaţi înălţimea paralelogramului având laturile $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, considerând ca bază paralelogramul format pe vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

Problema 4.26. Dacă $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\alpha\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$, determinaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ este paralel cu planul yOz.

Problema 4.27. Dacă $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \lambda\vec{k}$ şi $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, sunt trei vectori în spaţiu, determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ este paralel cu planul xOy.

Problema 4.28. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} - m\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari. Pentru $m = 1$, calculaţi volumul paralelipipedului cu muchiile $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Problema 4.29. Fie triunghiul ABC, $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$, $BB_1 \perp AC, B_1 \in AC$, $AA_1 \cap BB_1 = \{H\}$. Demonstraţi că $CH \perp AB$.

Problema 4.30. Fie vectorii $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ şi $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b}$ astfel încât $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ şi unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este $\frac{\pi}{3}$.

a) Determinaţi unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{w}$.

b) Determinaţi proiecţia vectorului $\vec{w}$ pe $\vec{v}$.

c) Calculaţi aria paralelogramului având ca laturi vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$.

Problema 4.31. Fie $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ şi $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ astfel încât $\|\vec{m}\| = 5$, $\|\vec{n}\| = 3$ şi unghiul dintre $\vec{n}$ şi $\vec{m}$ este $\frac{\pi}{2}$.

a) Determinaţi lungimea celor două diagonale ale paralelogramului cu laturile $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

b) Determinaţi unghiul dintre diagonalele paralelogramului format pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

c) Calculaţi aria paralelogramului format pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Problema 4.32. Demonstraţi identitatea lui Jacobi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0},$$

pentru orice vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

5

Planul şi dreapta în spaţiu

5.1 Planul în spaţiu

Ecuaţia unui plan în spaţiu se poate determina în câteva situaţii.

Planul determinat de un punct şi o direcţie perpendiculară

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din spaţiu şi fie $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ un vector. Fie (P) planul ce trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe direcţia vectorului $\overrightarrow{n}$.

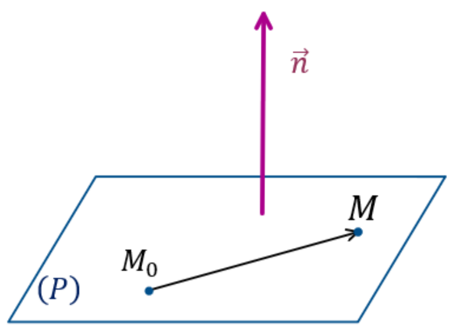


Figura 5.1: Planul determinat de un punct şi un vector normal

Punctul $M(x, y, z)$ va fi în planul (P) dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{n}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{M_0M}$.

$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Longleftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$

Prin urmare, ecuaţia planului ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ ca vector normal este

$$(P) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Dacă notăm cu $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ obţinem ecuaţia generală a planului în spaţiu

$$(P) : ax + by + cz + d = 0.$$

Vectorul

$$\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$$

se numeşte **normala** sau **vectorul normal** la planul (P) şi are direcţia perpendiculară pe planul (P).

Punctul $A(x_A, y_A, z_A)$ aparţine planului (P) dacă $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

Observaţie 5.1. *În particular, ecuaţiile planelor de coordonate xOy, xOz, yOz sunt:*

- $xOy : z = 0$;
- $xOz : y = 0$;
- $yOz : x = 0$.

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ trei puncte necoliniare din spaţiu. Fie (P) planul determinat de aceste trei puncte. Considerăm de asemenea un punct arbitrar $M(x, y, z)$ din planul (P).

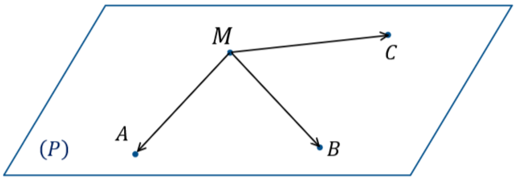


Figura 5.2: Planul determinat de trei puncte necoliniare

Punctele A, B, C şi M sunt coplanare ceea ce este echivalent cu faptul că produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{MC}$ este zero. Folosind formula analitică a produsului mixt avem:

$$\begin{vmatrix} x_A - x & y_A - y & z_A - z \\ x_B - x & y_B - y & z_B - z \\ x_C - x & y_C - y & z_C - z \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A - x & y_A - y & z_A - z & 0 \\ x_B - x & y_B - y & z_B - z & 0 \\ x_C - x & y_C - y & z_C - z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând prima linie la a doua, apoi la a treia şi în cele din urmă la a patra, obţinem ecuaţia planului determinat de punctele necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$:

$$(P): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari

Fie planul (P) ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu doi vectori necoliniari $\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$.

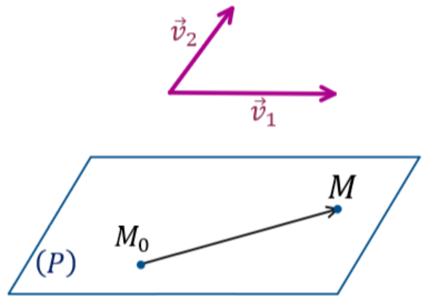


Figura 5.3: Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari

Un punct arbitrar $M(x, y, z)$ se află pe planul (P) dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coplanari, ceea ce înseamnă că $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0$ relaţie care ne conduce la forma ecuaţiei planului ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu vectori necoliniari $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$,

$$(P) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

5.2 Dreapta în spaţiu

Fie d dreapta ce trece prin punctul $A(x_A, y_A, z_A)$ şi este paralelă cu vectorul $\overrightarrow{v_d} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v_d} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}$. Punctul arbitrar $M(x, y, z)$ aparţine dreptei d dacă vectorul $\overrightarrow{MA}$ este paralel cu $\overrightarrow{v_d}$.

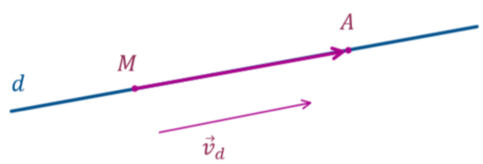


Figura 5.4: Dreapta determinată de un punct şi un vector director

Prin urmare, $A \in d \iff \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{v_d} \iff$

$$(x - x_A)\overrightarrow{i} + (y - y_A)\overrightarrow{j} + (z - z_A)\overrightarrow{k} = t(l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}) \iff$$

$$d : \begin{cases} x = lt + x_A \\ y = mt + y_A \\ z = nt + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

care sunt **ecuaţiile parametrice** ale dreptei d.

Vectorul $\overrightarrow{v_d}$ este numit **vectorul director** al dreptei d iar componentele vectorului $\overrightarrow{v_d}$ adică (l, m, n) sunt denumite **parametri directori** ai acestei direcţii. Orice alte numere proporţionale cu (l, m, n) sunt de asemenea parametri directori pentru aceeaşi direcţie.

Când $t \in \mathbb{R}$ avem ecuaţiile dreptei d, când $t \in [a, b]$ obţinem ecuaţiile segmentului de dreaptă $[AB]$ unde A este punctul obţinut pentru $t = a$, $A(t = a)$, iar $B(t = b)$.

Când eliminăm t din ecuaţiile parametrice, obţinem **ecuaţiile carteziene** ale dreptei d:

$$d : \frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}.$$

Observaţie 5.2. *Dacă una dintre componentele vectorului director este zero, atunci, în ecuaţiile carteziene ale dreptei numărătorul corespunzător este de asemenea zero.*

Exemplu 5.3. *Ecuaţiile axei Ox sunt:*

$$Ox : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

sau, echivalent

$$Ox : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Similar

$$Oy : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \iff Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff Oy : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

$$Oz : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \iff Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ecuaţiile dreptei ce trece prin două puncte

Ecuaţiile dreptei ce trece prin punctele $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$ este $d = AB$.

Figura 5.5: Dreapta ce trece prin două puncte

Scriind ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul A şi are ca vector director $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k}$, obţinem

$$d : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Dreapta determinată de intersecţia a două plane neparalele

Ecuaţiile dreptei d determinată de intersecţia planelor (P_1) şi (P_2), $(P_1) \nparallel (P_1)$, sunt:

$$d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

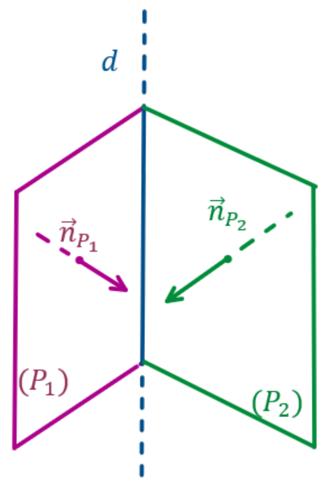


Figura 5.6: Dreapta determinată de intersecţia a două plane

Vectorii normali la (P_1) şi (P_2) sunt $\overrightarrow{n_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{n_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$. Ei sunt amândoi perpendiculari pe direcţia dreptei d, deci d este paralelă cu $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

Prin urmare, $\overrightarrow{v_d} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Parametri directori ai vectorului director $\overrightarrow{v_d}$ sunt $\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

Definiţie 5.4. *Mulţimea tuturor planelor ce trec printr-o dreaptă dată d este numită* ***fascicul de plane****. Dreapta d este numită* ***axa fasciculului****.*

Teorema 5.5. *Fie d dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2)*

$$d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Atunci ecuaţia fasciculului ce trece prin dreapta d este

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5.3 Poziţii relative ale dreptelor şi planelor

Poziţii relative ale planelor

Fie $(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ două plane în spaţiu.

- $(P_1) \parallel (P_2) \iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2} \iff \overrightarrow{n_{P_1}} \parallel \overrightarrow{n_{P_2}}$.

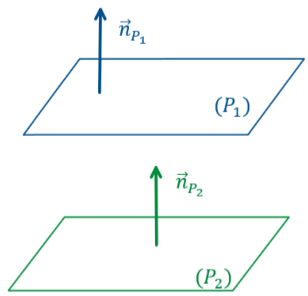


Figura 5.7: Două plane paralele

- $(P_1) \perp (P_2) \iff \overrightarrow{n_{P_1}} \perp \overrightarrow{n_{P_2}} \iff \begin{cases} \overrightarrow{n_{P_1}} \parallel (P_2) \\ \overrightarrow{n_{P_2}} \parallel (P_1) \end{cases}$.

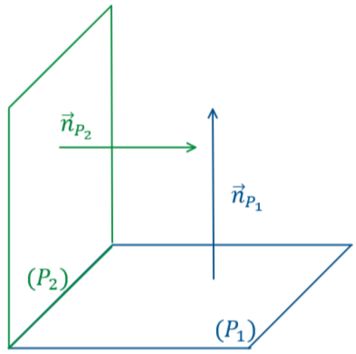


Figura 5.8: Două plane perpendiculare

- $(P_1) = (P_2) \iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$.

Poziţii relative ale dreptelor în spaţiu

Fie

$$d_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

şi

$$d_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

două drepte în spaţiu.

Vectorul director al lui d_1 este $\overrightarrow{v_{d_1}} = l_1 \overrightarrow{i} + m_1 \overrightarrow{j} + n_1 \overrightarrow{k}$ şi punctul $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$ iar vectorul director al lui d_2 este $\overrightarrow{v_{d_2}} = l_2 \overrightarrow{i} + m_2 \overrightarrow{j} + n_2 \overrightarrow{k}$ şi punctul $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$.

- dreptele sunt **coplanare** dacă vectorii $\overrightarrow{v_{d_1}}$, $\overrightarrow{v_{d_2}}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt paraleli cu acelaşi plan (sunt coplanari), ceea ce este echivalent cu

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

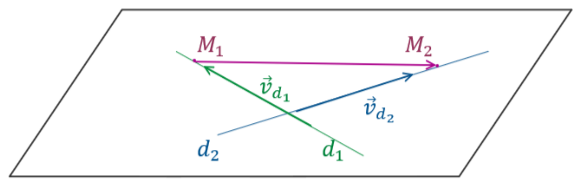


Figura 5.9: Două drepte coplanare

- dreptele sunt **paralele**, $d_1 \parallel d_2 \iff \overrightarrow{v_{d_1}} \parallel \overrightarrow{v_{d_2}} \iff \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

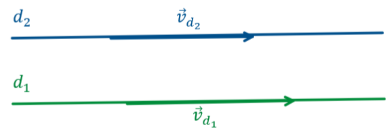


Figura 5.10: Două drepte paralele

- dreptele coincid, $d_1 = d_2 \iff \begin{cases} \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} \\ \dfrac{x_2 - x_1}{l_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{m_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{n_1} \end{cases}$.

- Două drepte sunt **necoplanare** dacă nu se intersectează şi nu sunt nici paralele. Dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

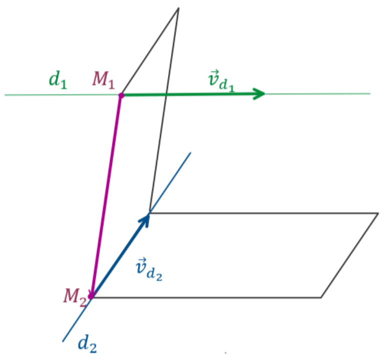


Figura 5.11: Două drepte necoplanare

- dreptele sunt **perpendiculare**, $d_1 \perp d_2 \iff \overrightarrow{v_{d_1}} \perp \overrightarrow{v_{d_2}} \iff \overrightarrow{v_{d_1}} \cdot \overrightarrow{v_{d_2}} = 0 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$

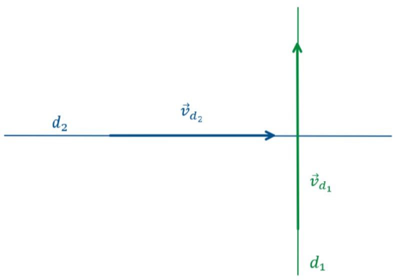


Figura 5.12: Două drepte perpendiculare

Două drepte sunt perpendiculare dacă unghiul dintre ele este $\frac{\pi}{2}$. Două drepte perpendiculare pot fi coplanare sau necoplanare.

Poziţii relative ale dreptelor şi planelor

Fie $d : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ o dreaptă în spaţiu şi $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan în spaţiu.

Avem:

- $d \parallel (P) \iff \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \iff al + bm + cn = 0.$

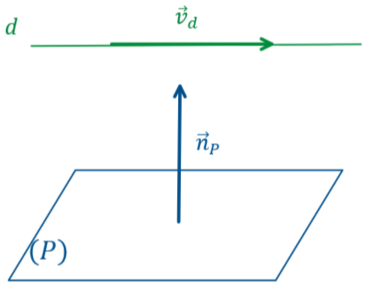


Figura 5.13: Dreapta paralelă cu planul

- $d \subset (P) \iff \begin{cases} \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in d \Longrightarrow M_0 \in (P) \end{cases}$
$$\iff \begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \end{cases}$$
- $d \cap (P) = \{M\} \iff \overrightarrow{v_d} \not\perp \overrightarrow{n_P} \iff al + bm + cn \neq 0.$
- $d \perp (P) \iff \vec{v}_d \parallel \vec{n}_P \iff \dfrac{a}{l} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{n}.$

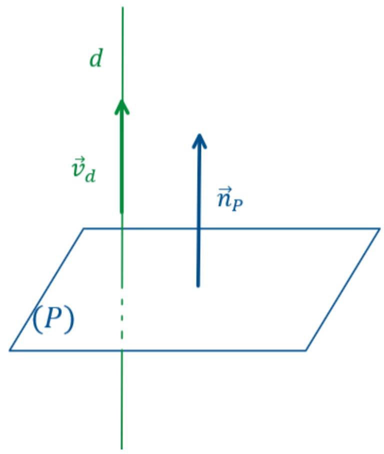


Figura 5.14: Dreapta perpendiculară pe plan

5.4 Unghiuri şi distanţe

Distanţe

- Distanţa de la punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la planul $(P) : ax + by + cz + d = 0$ este

$$\text{dist}(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

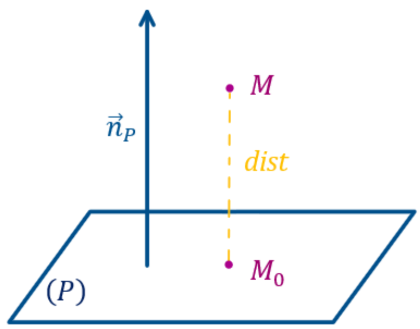


Figura 5.15: Distanţa de la un punct la un plan

- Distanţa dintre două plane paralele (P_1) şi (P_2) este distanţa de la $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (P_2)$ la planul (P_1).

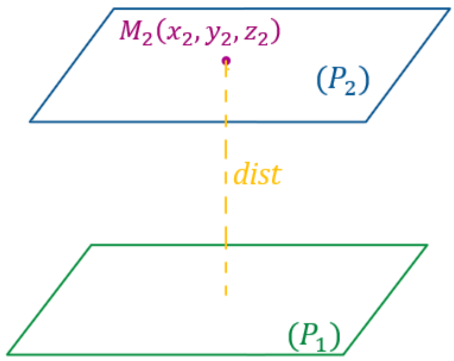


Figura 5.16: Distanţa dintre două plane paralele

- Dacă $d \parallel (P)$, distanţa de la drepta d la planul (P), este

$$\mathrm{dist}(d,(P)) = \mathrm{dist}(A,(P)),$$

unde $A \in d$.

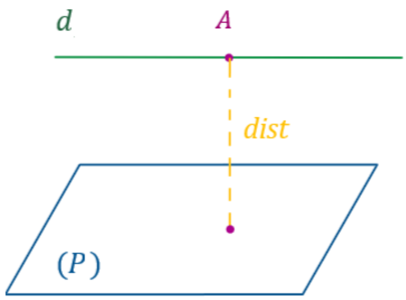


Figura 5.17: Distanţa dintre o dreaptă şi un plan paralel cu dreapta

- Distanţa de la punctul A la dreapta d este

$$\mathrm{dist}(A,d) = \frac{\|\overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{M_0A}\|}{\|\overrightarrow{v_d}\|},$$

unde $M_0 \in d$.

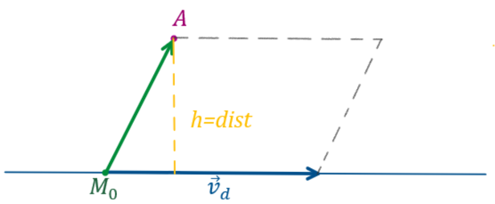


Figura 5.18: Distanţa de la un punct la o dreaptă

- Distanţa dintre dreptele paralele d_1 şi d_2 este

$$\mathrm{dist}(d_1,d_2) = \mathrm{dist}(M_2,d_1),$$

unde $M_2 \in d_2$.

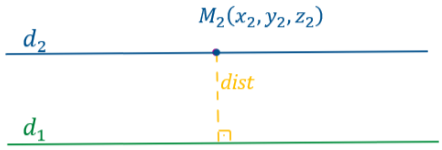


Figura 5.19: Distanţa dintre două drepte paralele

- Distanţa dintre dreptele necoplanare d_1 şi d_2 este

$$\text{dist}(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{M_1M_2})|}{\|\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}}\|},$$

unde $M_1 \in d_1$ şi $M_2 \in d_2$.

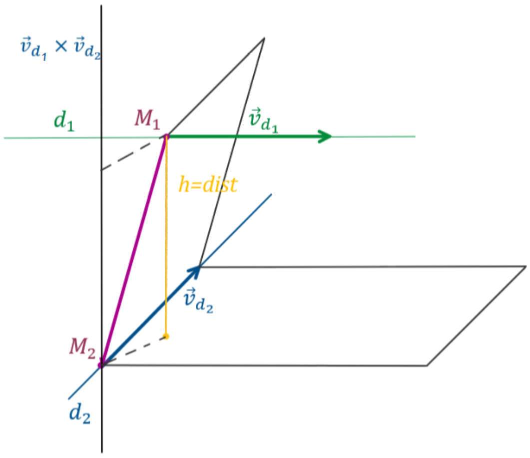


Figura 5.20: Distanţa dintre două drepte necoplanare

Unghiuri

Fie $d_1 : \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ şi $d_2 : \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ două drepte în spaţiu şi $(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ două plane în spaţiu.

- Unghiul dintre planele (P_1) şi (P_2) este

$\measuredangle((P_1),(P_2)) = \measuredangle(\overrightarrow{n_{P_1}}, \overrightarrow{n_{P_2}}) = \alpha,\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

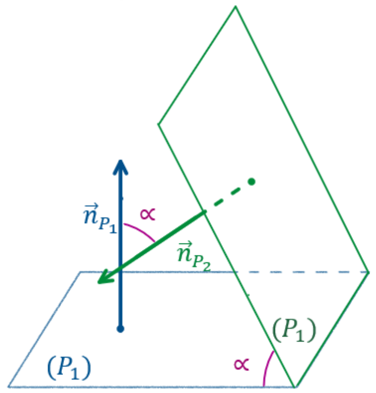


Figura 5.21: Unghiul dintre două plane

- Unghiul dintre dreptele d_1 şi d_2 este $\measuredangle(d_1, d_2) = \measuredangle(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}) = \varphi,\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

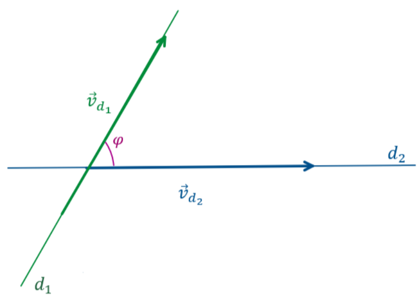


Figura 5.22: Unghiul dintre două drepte

- Unghiul dintre dreapta d_1 şi planul (P_1) este $\measuredangle(d_1,(P_1)) = 90° - \measuredangle(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{n_{P_1}}) = \theta,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{n_{P_1}})) = \sin(90^\circ - \sphericalangle(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{n_{P_1}})) = \sin\theta,$$

$$\sin\theta = \frac{|l_1a_1 + m_1b_1 + n_1c_1|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

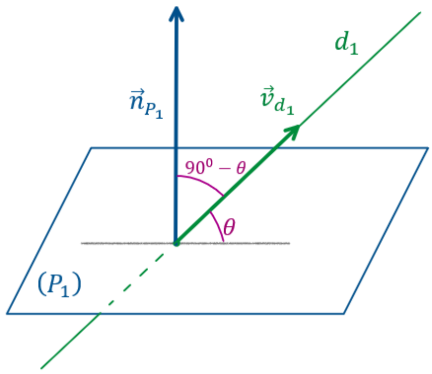


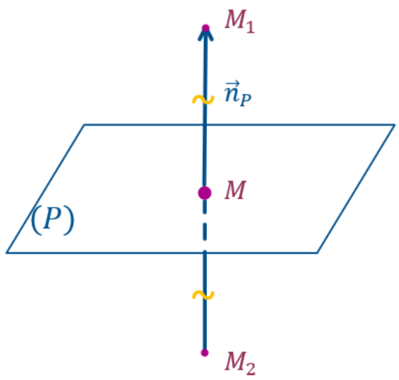
Figura 5.23: Unghiul dintre un plan şi o dreaptă

5.5 Probleme rezolvate

Problema 5.1. Scrieţi ecuaţia planului (P) dacă $M_1(1, -2, -1)$ şi $M_2(3, 4, 1)$ sunt simetrice în raport cu planul (P).

Rezolvare:

Informaţiile din ipoteza problemei pot fi reprezentate ca în figura de mai jos.



Dacă M_1 şi M_2 sunt simetrice în raport cu planul (P) atunci $M_1M_2 \perp (P) \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{n_P} \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Putem deduce de asemenea că mijlocul segmentului $[M_1M_2]$ pe care îl notăm cu M aparţine planului (P). Coordonatele lui M sunt $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$, $M(2,1,0)$.

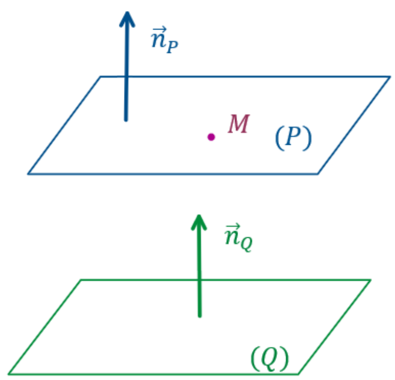
Scriem ecuaţia planului ce trece prin $M(2,1,0)$ şi are ca vector normal $\overrightarrow{n}_P = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, prin urmare ecuaţia planului (P) este $(P): x-2+3(y-1)+z = 0 \Longleftrightarrow$

$(P): x + 3y + z - 5 = 0$.

Problema 5.2. Determinaţi ecuaţia planului (P) ce trece prin $M(-4,-1,3)$ şi este paralel cu planul $(Q): x + 2y - 3z - 7 = 0$.

Rezolvare:

O reprezentare a problemei este următoarea.



$(P) \parallel (Q) \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \parallel \overrightarrow{n_Q} \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} = \alpha(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k})$. Pentru $\alpha = 1$, $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$.

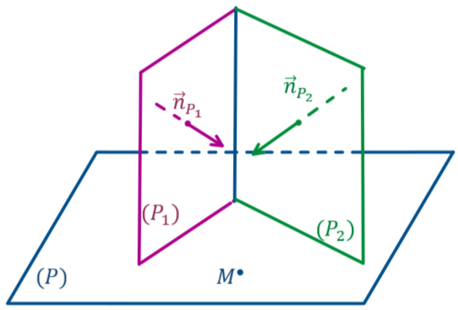
Ecuaţia planului ce trece prin $M(-4,-1,3)$ şi are ca vector normal $\overrightarrow{n_P}$ este $(P): (x+4) + 2(y+1) - 3(z-3) = 0 \Longleftrightarrow$

$(P): x + 2y - 3z + 15 = 0$.

Problema 5.3. Determinaţi ecuaţia planului (P) ce trece prin $M(2,1,0)$ şi (P) este perpendicular pe planele $(P_1): x - y + z - 7 = 0$ şi $(P_2): 2x + z - 3 = 0$.

Rezolvare:

O ilustraţie a problemei este prezentată mai jos.



$(P) \perp (P_1) \Longrightarrow \overrightarrow{n_{P_1}} \parallel (P) \Longrightarrow \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \parallel (P)$,

$(P) \perp (P_2) \Longrightarrow \overrightarrow{n_{P_2}} \parallel (P) \Longrightarrow 2\vec{i} + \vec{k} \parallel (P)$.

Ecuaţia planului ce trece prin $M(2,1,0)$ şi are doi vectori paraleli cu planul, $\overrightarrow{n_{P_1}}$ şi $\vec{n}_{P_2}$, este $(P) : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$

$(P) : -x + y + 2z + 1 = 0$.

Problema 5.4. Determinaţi ecuaţiile parametrice ale dreptei d ce trece prin $A(2,-3,1)$ şi $B(4,1,1)$.

Rezolvare:

Vom substitui în ecuaţiile dreptei ce trece prin două puncte coordonatele punctelor A şi B, adică

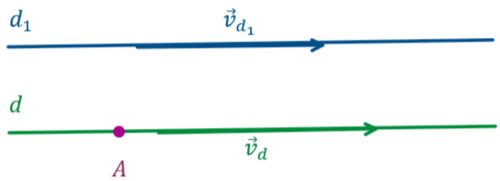
$$d : \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)} = \frac{z-1}{1-1} = t \Longleftrightarrow$$

$$d : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 4t - 3 \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Problema 5.5. Scrieţi ecuaţiile dreptei d ce trece prin $A(1, -2, 5)$ şi este paralelă cu dreapta $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+2}{-5}$.

Rezolvare:

O schiţă a problemei este prezentată mai jos.



$d \parallel d_1 \implies \overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{v_{d_1}} \implies \overrightarrow{v_d} \parallel 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} \implies \overrightarrow{v_d} = \alpha(3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k})$. Pentru $\alpha = 1$ vectorul director al dreptei d este $\overrightarrow{v_d} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$.

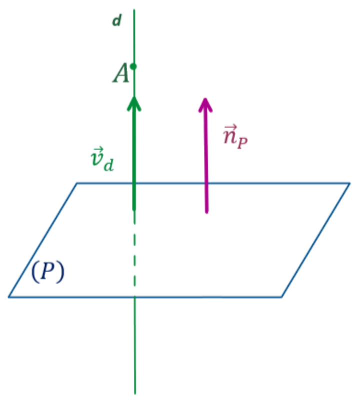
Ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $A(1, -2, 5)$ şi are ca vector director $\overrightarrow{v_d} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ sunt

$$d : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-5}.$$

Problema 5.6. Scrieţi ecuaţiile dreptei d ce trece prin $A(6, -2, -3)$ şi este perpendiculară pe planul $(P) : 2x - y + 7z - 9 = 0$.

Rezolvare:

Ilustrăm informaţiile din ipoteza problemei mai jos.



$d \perp (P) \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{n_P} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \parallel 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} = \alpha(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k})$. Pentru $\alpha = 1$ vectorul director al dreptei d este $\overrightarrow{v_d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$.

Ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $A(6, -2, -3)$ şi are ca vector director $\overrightarrow{v_d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$ sunt

$$d : \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{7}.$$

Problema 5.7. Determinaţi ecuaţiile parametrice şi carteziele ale dreptei ce se află la intersecţia planelor $(P_1) : 2x - 3y + z - 1 = 0$ şi $(P_2) : -x + 3z + 5 = 0$.

Rezolvare:

$$(P_1) \cap (P_2) = d : \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ -x + 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{n_{P_1}} \times \overrightarrow{n_{P_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}.$$

Alegem $\overrightarrow{v_d} = 9\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

Coordonatele unui punct $A(x_A, y_A, z_A)$ ce aparţine dreptei d sunt o soluţie a sistemului $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ -x + 3z + 5 = 0 \end{cases}$. Alegând $z = 0$ obţinem $x = 5$ şi $y = 3$. Deci, un punct al dreptei este $A(5, 3, 0)$.

Ecuaţiile carteziene ale dreptei ce trece prin punctul $A(5, 3, 0)$ şi are ca vector director $\overrightarrow{v_d} = 9\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ sunt

$$d : \frac{x-5}{9} = \frac{y-3}{7} = \frac{z}{3}.$$

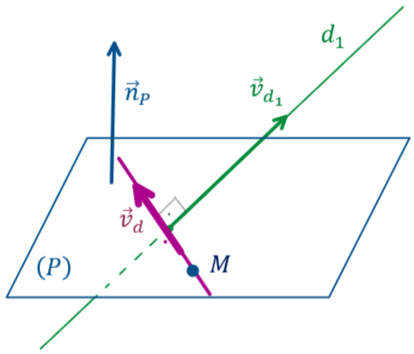
Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt:

$$d : \begin{cases} x = 9t + 5 \\ y = 7t + 3 \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Problema 5.8. Determinaţi ecuaţiile dreptei d care se află în planul $(P): x-y+3z-5=0$, d este perpendiculară pe dreapta $d_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=-t+1 \\ z=5 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$, şi trece prin $M(1,-1,1)$.

Rezolvare:

Ilustrăm informaţiile din problemă în figura de mai jos.



Vectorul director al dreptei d_1 este $\overrightarrow{v_{d_1}} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

$d \subset (P) \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

$d \perp d_1 \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{v_{d_1}} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{v_{d_1}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{n_P} \times \overrightarrow{v_{d_1}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}.$$

Alegem $\overrightarrow{v_d} = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

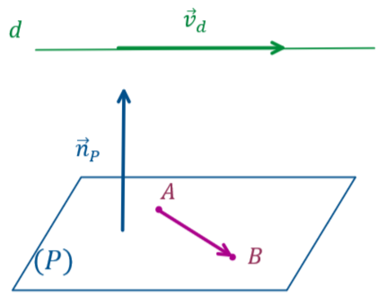
Ecuaţiile carteziene ale dreptei ce trece prin punctul $M(1,-1,1)$ şi care are ca vector director $\overrightarrow{v_d} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ sunt

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0} \iff d: \begin{cases} x-y-2=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Problema 5.9. Determinaţi ecuaţia planului (P) ce trece prin $A(2,-1,3)$ şi $B(-1,1,1)$, şi este paralel cu dreapta $d: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z$.

Rezolvare:

Reprezentăm informaţiile din ipoteza problemei în figura de mai jos.



Vom prezenta în cele ce urmează două metode de rezolvare a problemei.

Prima metodă.

$(P) \parallel d \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{v_d} \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

$A, B \in (P) \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{j}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{v_d} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{n_P} \parallel \overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Alegem $\overrightarrow{n_P} = \frac{1}{3}(-6\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Ecuaţia planului ce trece prin $A(2, -1, 3)$ şi are ca vector normal $\overrightarrow{n_P}$ este

$(P) : -2(x - 2) + (y + 1) + 4(z - 3) = 0 \Longleftrightarrow$

$(P) : -2x + y + 4z - 7 = 0$.

A doua metodă.

$(P) \parallel d \Longrightarrow (P) \parallel \overrightarrow{v_d} \Longrightarrow (P) \parallel 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

$A, B \in (P) \Longrightarrow (P) \parallel \overrightarrow{AB} \Longrightarrow (P) \parallel -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{j}$.

Ecuaţia planului ce trece prin $M(2, -1, 3)$ şi are vectorii $\overrightarrow{v_d}$ şi $\overrightarrow{AB}$ paraleli cu planul, este

$$(P) : \begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$(P): -6(x-2) + 3(y+1) + 12(z-3) = 0 \Longleftrightarrow$

$(P): -2x + y + 4z - 7 = 0.$

Problema 5.10. Determinaţi unghiul dintre dreptele $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ şi $d_2: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = z-5$.

Rezolvare:

Fie $\sphericalangle(d_1, d_2) = \varphi$ unghiul dintre dreptele d_1 şi d_2.

$\overrightarrow{v_{d_1}} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$,

$\overrightarrow{v_{d_2}} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}})) = \dfrac{\overrightarrow{v_{d_1}} \cdot \overrightarrow{v_{d_2}}}{\|\overrightarrow{v_{d_1}}\| \cdot \|\overrightarrow{v_{d_2}}\|} = \dfrac{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{9+1+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{154}} \Longrightarrow$

$\varphi = \arccos \dfrac{6}{\sqrt{154}}$.

Problema 5.11. Fie $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$ şi $(Q): \alpha x - 3y + 2z - 5 = 0$ două plane în spaţiu. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $(P) \perp (Q)$.

Rezolvare:

$(P) \perp (Q) \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0.$

$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$,

$\overrightarrow{n_Q} = \alpha\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0 \Longleftrightarrow \alpha + 9 + 4 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -13.$

Problema 5.12. Fie $d_1: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ şi $d_2: \dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$ două drepte în spaţiu. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât d_1 şi d_2 sunt coplanare.

Rezolvare:

Dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare $\Longleftrightarrow \overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{AB}$ sunt coplanari $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{AB}) = 0$, unde $A \in d_1$ şi $B \in d_2$.

$\overrightarrow{v_{d_1}} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$,

$\overrightarrow{v_{d_2}} = a\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

Fie $A(-2, -3, -1) \in d_1$, coordonate obţinute egalând fiecare raport din ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1 cu 0, şi $B(2, 3, -1) \in d_2$, $B(t = 0)$. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are expresia $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

Determinăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{AB}) = 0$.
$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ a & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -38 - 12a = 0 \iff a = -\dfrac{19}{6}$.

Problema 5.13. Fie $d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 - t \\ z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ o dreaptă în spaţiu şi $(P) : (\lambda - 1)x - y + 3z - 5 = 0$ un plan în spaţiu. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $d \parallel (P)$. Pentru λ astfel determinat, calculaţi distanţa dintre d şi (P).

Rezolvare:

$d \parallel (P) \iff \vec{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \iff \vec{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0$.
$\vec{v_d} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,
$\overrightarrow{n_P} = (\lambda - 1)\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
$\vec{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \iff 2(\lambda - 1) + 1 + 3 = 0 \iff \lambda = -1$.

Ecuaţia planului (P) pentru $\lambda = -1$ este $(P) : -2x - y + 3z - 5 = 0$ şi $\overrightarrow{n_P} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Pentru că $d \parallel (P)$, $\mathrm{dist}(d, (P)) = \mathrm{dist}(A, P)$, unde A este un punct care aparţine dreptei d.

Din ecuaţiile parametrice ale dreptei d, alegând $t = 1$, obţinem $A(1, 1, -1)$.
$\mathrm{dist}(A, (P)) = \dfrac{|-2 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{11}{\sqrt{14}} \implies$
$\mathrm{dist}(d, (P)) = \dfrac{11}{\sqrt{14}}$.

Problema 5.14. Fie

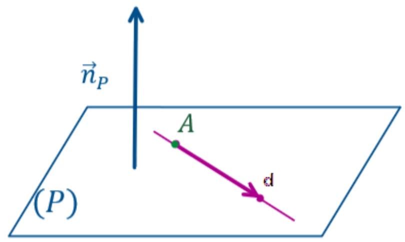
$$d : \frac{x - \beta}{1} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z + 2}{\alpha - 1}$$

o dreaptă în spaţiu şi

$$(P) : 2x - 3y + 5z + 13 = 0$$

un plan în spaţiu. Determinaţi α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $d \subset (P)$.

Rezolvare:



Putem folosi oricare dintre următoarele două condiţii:

1. $d \subset (P) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \\ A \in d \Longrightarrow A \in (P) \end{cases}$ sau

2. $d \subset (P) \Longleftrightarrow A$ şi $B \in d \Longrightarrow A$ şi $B \in (P)$.

Pentru această problemă este mai accesibil să folosim prima condiţie.

$\overrightarrow{v_d} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + (\alpha - 1)\overrightarrow{k}$,

$\overrightarrow{n_P} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Longleftrightarrow 2 - 12 + 5(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 3$.

$A(\beta, 1, -2) \in d \Longrightarrow A \in (P) \Longleftrightarrow 2\beta - 3 - 10 + 13 = 0 \Longrightarrow \beta = 0$.

Problema 5.15. Fie $d : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$ o dreaptă în spaţiu şi $M(7, 2, -3)$. Determinaţi distanţa de la punctul M la dreapta d.

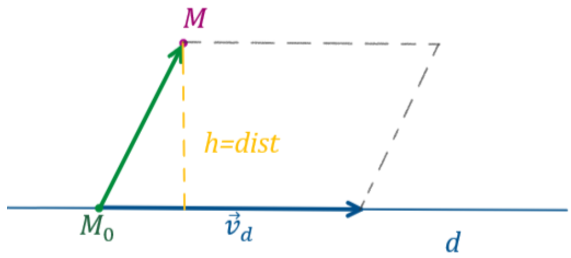
Rezolvare:

$\text{dist}(M, d) = \dfrac{\|\overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{MM_0}\|}{\|\overrightarrow{v_d}\|}$, unde $M_0 \in d$.

$\overrightarrow{v_d} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$,

$M_0 \in d, M_0(2, 1, 0) \Longrightarrow \overrightarrow{MM_0} = -5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

$$\overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{MM_0} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11\overrightarrow{i} - 22\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k} = 11(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}).$$



$$\operatorname{dist}(M,d)=\frac{\|11(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\|}{\|4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}\|}=\frac{11\sqrt{6}}{\sqrt{29}}.$$

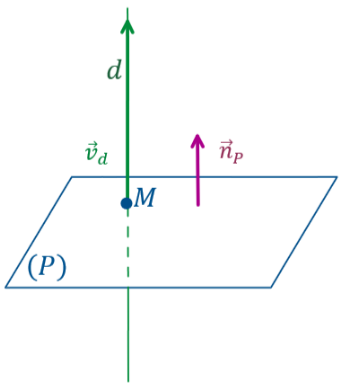
Problema 5.16. Considerăm $d:\begin{cases}x+2y-z+5=0\\ 2x-2z+3=0\end{cases}$ o dreaptă în spaţiu şi $(P): x+z-3=0$ un plan în spaţiu. Determinaţi poziţia relativă a dreptei d şi planului (P). Dacă $d\parallel(P)$ calculaţi distanţa dintre ele, altfel determinaţi punctul de intersecţie dintre d şi (P).

Rezolvare:

$$d:\begin{cases}x+2y-z+5=0\\ 2x-2z+3=0\end{cases}\implies \vec{v_d}\parallel\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&2&-1\\ 2&0&-2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{k}.$$

Vectorul normal la planul (P) este vectorul $\vec{n_P}=\vec{i}+\vec{k}$.

Este evident că $\vec{v_d}\parallel\vec{n_P}$ deoarece $\vec{v_d}=-4\vec{n_P}$, deci dreapta d este perpendiculară pe planul (P).



Fie $\{M\} = d \cap (P)$. Aceasta implică $\begin{cases} M(x_M, y_M, z_M) \in d \\ M(x_M, y_M, z_M) \in (P) \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x_M + 2y_M - z_M + 5 = 0 \\ 2x_M - 2z_M + 3 = 0 \\ x_M + z_M - 3 = 0 \end{cases}.$$

Soluţia acestui sistem sunt coordonatele punctului M, adică $M\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

Problema 5.17. Fie $d_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ şi $d_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y}{3} = z$ două drepte în spaţiu.

a) Demonstraţi că dreptele sunt necoplanare.

b) Determinaţi distanţa dintre d_1 şi d_2.

c) Determinaţi ecuaţiile perpendicularei comune pentru dreptele d_1 şi d_2.

Rezolvare:

a) Dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare dacă $\iff (\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$ unde $M_1 \in d_1$ şi $M_2 \in d_2$.

$\overrightarrow{v_{d_1}} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{v_{d_2}} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

$M_1(1, -2, -3) \in d_1$ (am ales $t = 0$ în ecuaţiile parametrice ale dreptei d_1).

$M_2(-3, 0, 0) \in d_2$ (coordonate determinate egalând fiecare fracţie din ecuaţiile carteziene ale dreptei d_2 cu 0).

$\overrightarrow{M_1M_2} = -4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

$$(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow d_1 \text{ şi } d_2 \text{ sunt drepte necolpanare.}$$

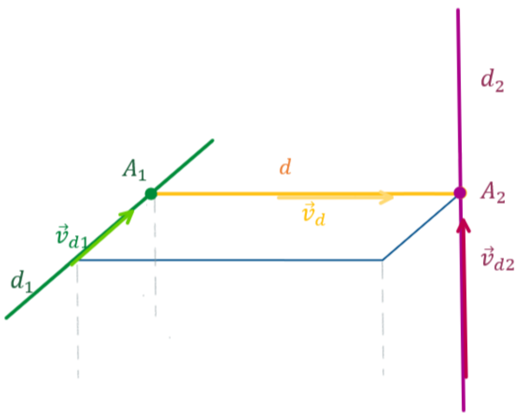
b) $\text{dist}(d_1, d_2) = \dfrac{|(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{M_1M_2})|}{\|\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}}\|}$

$$\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \Longrightarrow \|\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}}\| = \sqrt{3}.$$

$$\text{dist}(d_1, d_2) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

c) Fie d perpendiculara comună a dreptelor date. Avem că, $\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{v_{d_1}} \\ \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{v_{d_2}} \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$



$d = A_1A_2$ unde $\{A_1\} = d \cap d_1$ şi $\{A_2\} = d \cap d_2$.

Din ecuaţiile parametrice ale dreptei d_1 avem că coordonatele oricărui punct A_1 aparţinând dreptei d_1 sunt $A_1(t + 1, 2t - 2, t - 3)$.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2 sunt $d_2: \begin{cases} x = 2m - 3 \\ y = 3m \\ z = m \end{cases}, m \in \mathbb{R}$, deci, orice punct $A_2 \in d_2$ are coordonatele $A_2(2m-3, 3m, m)$.

$\overrightarrow{A_1A_2} = (2m - t - 4)\overrightarrow{i} + (3m - 2t + 2)\overrightarrow{j} + (m - t + 3)\overrightarrow{k}$.

Este evident că $\overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{A_1A_2} \iff \dfrac{2m-t-4}{-1} = \dfrac{3m-2t+2}{1} = \dfrac{m-t+3}{-1} \iff$

$\begin{cases} \dfrac{2m-t-4}{-1} = \dfrac{3m-2t+2}{1} \\ \dfrac{3m-2t+2}{1} = \dfrac{m-t+3}{-1} \end{cases} \iff \begin{cases} 5m - 3t = 2 \\ -4m + 3t = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 7 \\ t = 11 \end{cases} \implies$

$A_1(12, 20, 8)$ şi $A_2(11, 21, 7)$.

Ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$d = A_1A_2 : \frac{x-12}{-1} = \frac{y-20}{1} = \frac{z-8}{-1}.$$

Problema 5.18. Fie $d_1 : \dfrac{x-1}{-5} = y - 2 = z$ şi $d_2 : \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{0} = z$ două drepte în spaţiu. Arătaţi că d_1 şi d_2 sunt drepte necoplanare şi determinaţi ecuaţiile perpendicularei comune a celor două drepte.

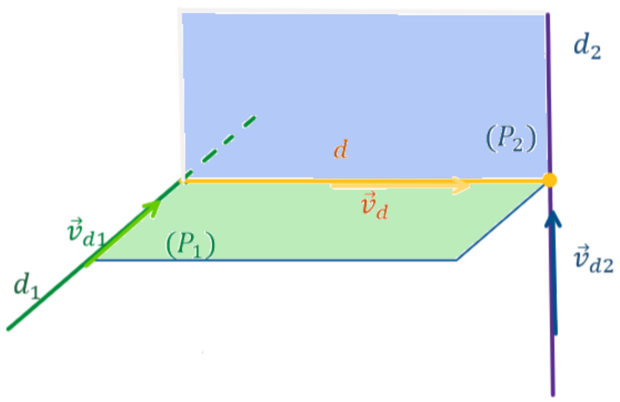
Rezolvare:

Fie $A(1, 2, 0) \in d_1$ şi $B(4, 0, 0) \in d_2$, deci $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$.

Dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare dacă $\overrightarrow{v_{d_1}}$, $\overrightarrow{v_{d_2}}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt coplanari, dar $(\overrightarrow{v_{d_1}}, \overrightarrow{v_{d_2}}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, prin urmare dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare.

Fie d perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2.

$$\overrightarrow{v}_d = \overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}.$$



Fie (P_1) şi (P_2) planele determinate de d_1 şi d, respectiv de d_2 şi d . Prin urmare, dreapta d este determinată de intersecţia planelor (P_1) şi (P_2).

$$(P_1): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (P_1): -x+11y-16z-21=0.$$

$$(P_2): \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (P_2): -3x+5y-6z+12=0.$$

Ecuaţiile dreptei d ca intersecţie de planele (P_1) şi (P_2) sunt

$$d: \begin{cases} -x+11y-16z-21=0 \\ -3x+5y-6z+12=0 \end{cases}.$$

Scriind soluţia generală a sistemului de mai sus vom determina şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d:

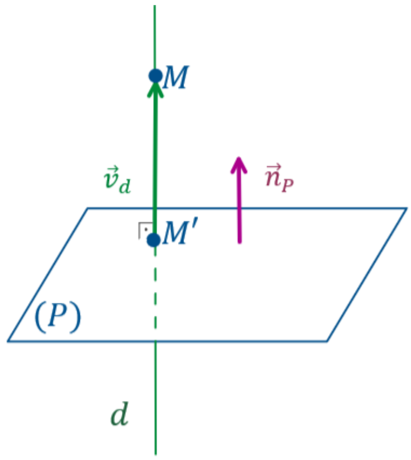
$$d: \begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{53}{7} \\ y = t \\ z = \dfrac{2t}{3} - \dfrac{25}{14} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Problema 5.19. Determinaţi proiecţia punctului $M(1,-2,3)$ pe planul $(P): x-$

$3y + z - 5 = 0$.

Rezolvare:

Fie M' proiecţia punctului M pe planul (P), $M' = \mathrm{pr}_{(P)}M$.



Aceasta implică $MM' \perp (P) \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{n}_P \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Determinăm ecuaţiile dreptei ce trece prin M, perpendiculară pe planul (P), ceea ce înseamnă că direcţia dreptei este vectorul $\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

$d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$.

Punctul M' este la intersecţia dreptei d cu planul (P).

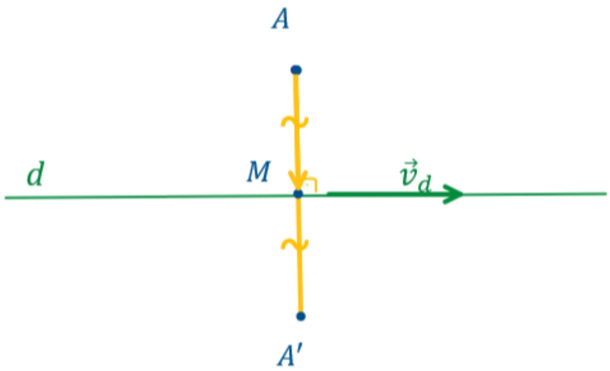
$$\begin{cases} M' \in d \Longleftrightarrow M'(t+1, -3t-2, t+3) \\ M' \in (P) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = t+1 \\ y_{M'} = -3t-2 \\ z_{M'} = t+3 \\ x_{M'} - 3y_{M'} + z_{M'} - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow t + 1 - 3(-3t-2) + (t+3) - 5 = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{5}{11} \Longrightarrow M'\left(\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{28}{11}\right).$$

Problema 5.20. Determinaţi simetricul punctului $A(-2, 1, 5)$ faţă de drepata d : $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Rezolvare:

Dacă A' este simetricul punctului A în raport cu dreapta d atunci $AA' \perp d$ şi M, mijlocul segmentului de dreaptă $[AA']$, aparţine dreptei d.



$M \in d \Longleftrightarrow M(2t-1, 3t+2, -2t-1)$ (din ecuaţiile parametrice ale dreptei d).

$\overrightarrow{AM} = (2t+1)\overrightarrow{i} + (3t+1)\overrightarrow{j} + (-2t-6)\overrightarrow{k}$.

$AM \perp d \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v_d} = 0 \Longleftrightarrow 2(2t+1) + 3(3t+1) - 2(-2t-6) = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow M(-3, -1, 1)$ (M este proiecţia punctului A pe dreapta d, $M = \mathrm{pr}_d M$).

Deoarece M este mijlocul sgmentului $[AA']$ avem

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{-2 + x_{A'}}{2} \\ -1 = \dfrac{1 + y_{A'}}{2} \\ 1 = \dfrac{5 + z_{A'}}{2} \end{cases} \Longrightarrow A'(-4, -3, -3).$$

Problema 5.21. Fie dreapta $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = z-3$ şi planul $(P) : x-3y+z+9 = 0$.

a) Determinaţi unghiul dintre dreaptă şi plan.

b) Determinaţi proiecţia dreptei d pe planul (P).

Rezolvare:

a) Vectorul director al dreptei d este $\overrightarrow{v_d} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Vectorul normal la planul (P) este $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Studiem poziţia relativă a dreptei d şi a planului (P).

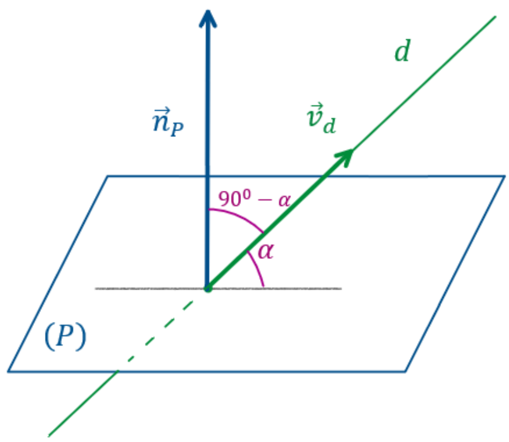
(1) Dreapta este perpendiculară pe plan, $d \perp (P) \iff \overrightarrow{v_d} \parallel \overrightarrow{n_P}$.

$\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{1}$, deci dreapta d nu este perpendiculară pe plan.

(2) Dreapta este paralelă cu planul, $d \parallel (P) \iff \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{n_P} \iff \overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0$.

$\overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P} = 2 \cdot 1 + (-2)(-3) + 1 \cdot 1 = 9 \neq 0$, deci $d \nparallel (P)$.

(3) Suntem în cea de-a treia situaţie când unghiul dintre d şi (P), $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

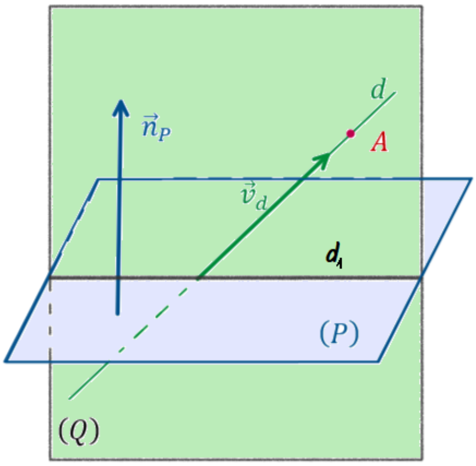


$\alpha = 90° - \sphericalangle(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{n_P})$.

$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{n_P})) = \frac{\overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_P}}{\|\overrightarrow{v_d}\| \cdot \|\overrightarrow{n_P}\|} = \frac{9}{3\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{n_P})) = \sin(90° - \sphericalangle(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{n_P})) = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} \Longrightarrow \alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

(b) Proiecţia dreptei d pe planul (P) este o dreaptă d_1 care se află în planul (P) astfel încât planul (Q) determinat de dreptele d şi d_1 să fie perpendicular pe (P).



Ecuaţia planului determinat de d şi d_1, pe care îl notăm cu (Q), este un plan ce trece printr-un punct al dreptei d, de exemplu $A(3,-1,3) \in d$, şi este paralel cu direcţiile:

- vectorul normal al planului (P): $(P) \perp (Q) \Longrightarrow \overrightarrow{n}_P = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \parallel (Q)$;
- vectorul director al dreptei d: $d \subset (Q) \Longrightarrow \overrightarrow{v}_d = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \parallel (Q)$.

$$(Q) : \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (Q) : x - y - 4z + 8 = 0.$$

$$d_1 = \mathrm{pr}_{(P)} d = (P) \cap (Q) : \begin{cases} x - 3y + z + 9 = 0 \\ x - y - 4z + 8 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul determinăm ecuaţiile parametrice ale dreptei

$$d_1 : \begin{cases} x = \dfrac{13}{2}t - \dfrac{15}{2} \\ y = \dfrac{5}{2}t + \dfrac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

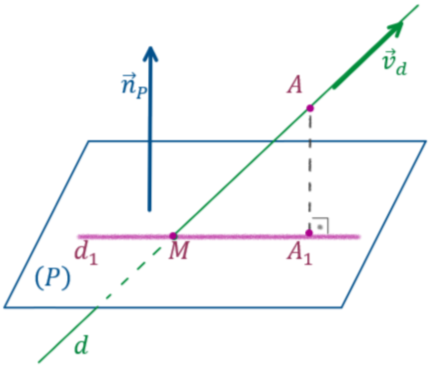
Prezentăm în cele ce urmează o altă metodă de rezolvare a acestei probleme.

Proiectând toate punctele dreptei d pe planul (P) vom avea dreapta proiecţie a dreptei d pe planul (P) pe care o notăm $d_1 = \text{pr}_{(P)}d$. Avem nevoie doar de două puncte ale dreptei d_1 pentru a scrie ecuaţiile dreptei.

Este evident că intersecţia dreptei cu planul $\{M\} = d \cap (P)$ aparţine dreptei d_1.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt: $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow M(2t + 3, -2t - 1, t + 3)$.



$$\{M\} = d \cap (P) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_M = 2t + 3 \\ y_M = -2t - 1 \\ z_M = t + 3 \\ x_M - 3y_M + z_M + 9 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 2t+3-3(-2t-1)+t+3+9 = 0$$

$\Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow M(-1, 3, 1) \in d_1$.

Pentru cel de-al doilea punct vom alege să proiectăm un punct al dreptei d pe planul (P).

Pentru $t = 0$ în ecuaţiile parametrice ale dreptei d obţinem $A(3, -1, 3) \in d$.

Să determinăm acum coordonatele proiecţiei punctului A pe planul (P), $A_1 = \text{pr}_{(P)}A$.

$AA_1 \perp (P) \Longrightarrow \overrightarrow{AA_1} \parallel \overrightarrow{n}_P = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \Longrightarrow$

$$AA_1 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{1} \Longleftrightarrow AA_1 : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -3t-1 \\ z = t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\{A_1\} = AA_1 \cap (P) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = t+3 \\ y_{A_1} = -3t-1 \\ z_{A_1} = t+3 \\ x_{A_1} - 3y_{A_1} + z_{A_1} + 9 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$t + 3 - 3(-3t-1) + t + 3 + 9 = 0 \Longrightarrow t = -\dfrac{18}{11} \Longrightarrow A_1\left(\dfrac{15}{11}, \dfrac{43}{11}, \dfrac{15}{11}\right).$

$d_1 = MA_1 : \dfrac{x+1}{\frac{15}{11}+1} = \dfrac{y-3}{\frac{43}{11}-3} = \dfrac{z-1}{\frac{15}{11}-1} \Longleftrightarrow$

$d_1 : \dfrac{x+1}{13} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-1}{2}.$

Observaţie: Ecuaţiile parametrice ale dreptei d_1

$$d_1 : \begin{cases} x = 13p - 1 \\ y = 5p + 3 \\ z = 2p + 1 \end{cases}$$

$, p \in \mathbb{R}$ nu arată în acelaşi fel ca cele obţinute prin prima metodă, adică

$$d_1 : \begin{cases} x = \dfrac{13}{2}t - \dfrac{15}{2} \\ y = \dfrac{5}{2}t + \dfrac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dar $z = t = 2p + 1$, deci putem exprima x şi y folosind parametru p în ultima formă, adică

$x = \dfrac{13t - 15}{2} = \dfrac{13(2p+1)}{2} - \dfrac{15}{2} = 13p - 1$

$y = \dfrac{5t+1}{2} = \dfrac{5(2p+1)}{2} + \dfrac{1}{2} = 5p + 3.$

Tragem concluzia că ecuaţiile parametrice ale unei drepte în spaţiu nu sunt unice.

5.6 Probleme propuse

Problema 5.22. Scrieţi ecuaţia planului (P) astfel încât:

a) $M(1,-2,-1) \in (P)$ şi $Oz \perp (P)$.

b) $M(0,1,-3) \in (P)$, $Oz \parallel (P)$ şi $Ox \parallel (P)$.

c) $M(2,-2,1) \in (P)$, $(P) \parallel (Q) : 2x - y + 6z - 5 = 0$.

Problema 5.23. Scrieţi ecuaţia planului (P) dacă $A(2,-2,3)$ şi $A'(4,2,-1)$ sunt simetrice faţă de planul (P).

Problema 5.24. Scrieţi ecuaţia planului ce trece prin punctul $M(3,2,-1)$ şi conţine axa Oy.

Problema 5.25. Determinaţi ecuaţia planului (P) care conţine punctele $A(1,0,1)$ şi $B(2,-1,1)$ şi este paralel cu axa Ox.

Problema 5.26. Scrieţi ecuaţia planului care conţine punctul $A(1,2,-1)$ şi este perpendicular pe dreapta AB, $B(2,3,5)$. Calculaţi distanţa de la punctul B la planul (P).

Problema 5.27. Determinaţi ecuaţia planului (P) ce trece prin punctul $A(1,0,1)$ şi este perpendicular pe planele $(P_1) : 3x + y - 1 = 0$ şi $(P_2) : x + y - z - 1 = 0$.

Problema 5.28. Determinaţi ecuaţia planului (P) care conţine punctele $A(-1,-2,0)$ şi $B(1,1,2)$ şi este perpendicular pe planul $(P) : x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Problema 5.29. Calculaţi distanţa de la punctul $M(1,1,2)$ la planul $(P) : x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Problema 5.30. Calculaţi unghiul dintre planele $(P) : x + 3y + 2z + 4 = 0$ şi $(Q) : 3x + 2y - z + 1 = 0$.

Problema 5.31. Scrieţi ecuaţia planului ce trece prin punctul $A(1, 2, 0)$ şi este paralel cu planul $(P) : x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Problema 5.32. Scrieţi ecuaţia planului care conţine punctele $A(3, 0, 2)$ şi $B(1, -1, 2)$ şi este paralel cu axa Ox.

Problema 5.33. Scrieţi ecuaţia planului care conţine punctul $A(1, -1, 1)$ şi este perpendicular pe planele $(P_1) : x - y + 2z - 3 = 0$ şi $(P_2) : -x + 2y - z = 0$. Găsiţi unghiul format de planele (P_1) şi (P_2).

Problema 5.34. Scrieţi ecuaţia planului care este perpendicular pe planul (P_1) : $x + 2y + 2z - 4 = 0$ şi conţine punctele $M_1(-1, -2, 0)$ şi $M_2(1, 1, 2)$.

Problema 5.35. Considerăm dreapta în spaţiu dată de ecuaţiile

$$d : \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-3} = z + 2.$$

(a) Scrieţi vectorul director al dreptei d.

(b) Scrieţi ecuaţiile parametrice ale dreptei d.

(c) Verificaţi dacă punctele $A(-1, 3, -4)$ şi $B(-1, 2, -3)$ aparţin dreptei d.

Problema 5.36. Considerăm $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 0)$ şi $C(-1, 2, 1)$ trei puncte în spaţiu. Scrieţi ecuaţiile canonice şi cele parametrice ale dreptelor d_i, $i = \overline{1, 4}$, dacă:

(a) $d_1 = AB$.

(b) d_2 trece prin C şi este paralelă cu dreapta d_1.

(c) $d_3 \perp d_1$, $d_3 \perp BC$ şi trece prin A.

(d) $d_4 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ -x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$.

Problema 5.37. Scrieţi ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $M(2, -5, 3)$ şi:

a) este paralelă cu Oz;

b) este paralelă cu dreapta $d : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$.

c) este perpendiculară pe planul $(P) : 3x - 7y + z - 23 = 0$.

Problema 5.38. Determinaţi ecuaţiile dreptei care este paralelă cu

$$d : \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 5 - t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

şi trece prin $A(1, 6, -3)$.

Problema 5.39. Scrieţi ecuaţiile dreptei AB dacă $A(-2, 5, 1)$ şi $B(-2, 2, 5)$. Scrieţi ecuaţiile segmentului de dreaptă $[AB]$.

Problema 5.40. Scrieţi ecuaţiile dreptei care este conţinută în planul $(P) : x + y - z - 2 = 0$, este perpendiculară pe dreapta $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ şi trece prin punctul $M(1, 0, -1)$.

Problema 5.41. Fie dreptele d_1 şi d_2 astfel încât $d_1 \parallel \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ şi $d_2 \parallel \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

(a) Calculaţi $m(\widehat{d_1, d_2})$.

(b) Scrieţi ecuaţiile dreptei d_3 perpendiculară pe d_1, perpendiculară pe d_2 şi care trece prin punctul $M(3, 2, 1)$.

Problema 5.42. Scrieţi ecuaţiile dreptei ce trece prin $A(2, 1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta BC, $B(5, 2, -1)$, $C(0, 1, -2)$.

Problema 5.43. Scrieţi ecuaţiile dreptei ce trece prin $A(-1,0,1)$ şi este paralelă cu dreapta $d : \begin{cases} 2x - 3y - z + 4 = 0 \\ x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Problema 5.44. Scrieţi ecuaţiile dreptei ce trece prin $M(1,2,-2)$ şi este perpendiculară pe planul $(P) : x - 3y + z - 5 = 0$.

Problema 5.45. Determinaţi ecuaţiile dreptei conţinute în planul de ecuaţie $x - 2y + z - 5 = 0$, care trece prin punctul $A(1,-1,2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + t \\ z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Problema 5.46. Scrieţi ecuaţia planului (P) care conţine dreapta

$$d : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

şi trece prin $A(-1,0,-1)$.

Problema 5.47. Determinaţi simetricul punctului $M(-1,2,2)$ faţă de planul $(P) : x - y + 2z + 2 = 0$.

Problema 5.48. Determinaţi ecuaţia planului (P) care conţine punctul $M(1,-1,2)$ şi este perpendicular pe dreapta $d : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

Problema 5.49. Determinaţi ecuaţia planului (P) determinat de dreptele $d_1 : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

Problema 5.50. Găsiţi proiecţia punctului $M(1,2,-3)$ pe planul $(P) : x - 3y + z - 2 = 0$ şi calculaţi distanţa de la M la (P).

Problema 5.51. Determinaţi proiecţia dreptei $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ pe planul $(P) : x - y - z + 1 = 0$.

Problema 5.52. Determinaţi ecuaţia planului (P) care conţine dreapta

$$d : \begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

şi este perpendicular pe planul $(Q) : x + y - z + 5 = 0$.

Problema 5.53. Determinaţi simetricul punctului $A(2,4,-3)$ faţă de dreapta $d : x = 2y = z$.

Problema 5.54. Determinaţi distanţa de la punctul $M(1,2,-3)$ la dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-2} = z.$$

Problema 5.55. Determinaţi proiecţia punctului $M(2,-1,2)$ pe dreapta

$$d : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Problema 5.56. Scrieţi ecuaţia dreptei ce trece prin $M(2,3,1)$ şi este paralelă cu dreapta $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

Problema 5.57. Scrieţi ecuaţia planului ce trece prin punctul $M(1,-1,1)$ şi este perpendicular pe dreapta

(a) $d : \frac{x-3}{2} = y - 2 = -z - 2$;

(b) $d : \begin{cases} y - z + 4 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$

Problema 5.58. Găsiţi distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 şi ecuaţiile perpendicularei comune dacă aceasta există, dacă:

a) $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = y + 1 = z$ şi $d_2 : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases};$

b) $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ şi $d_2 : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 4 - 2t \\ z = 3t - 4 \end{cases};$

c) $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z - 3$ şi $d_2 : \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}.$

Problema 5.59. Fie dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-3}$$

şi

$$d_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z+1}{-1}.$$

Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele să fie coplanare şi găsiţi punctul de intersecţie dintre d_1 şi d_2.

Problema 5.60. Fie planul $(P) : 2x - 3y + 5z + 13 = 0$ şi dreapta $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{\alpha - 1}$. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $d \subset (P)$.

Problema 5.61. Fie planul $(P) : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$ şi dreapta $d : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{\alpha + 2} = \dfrac{z+1}{1 - \alpha}$. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $d \parallel (P)$.

Problema 5.62. Fie $d_1 : \dfrac{x-1}{-5} = y-2 = z$ şi $d_2 : \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$ două drepte în spaţiu. Arătaţi că d_1 şi d_2 sunt necoplanare şi apoi determinaţi ecuaţiile perpendicularei comune. Calculaţi distanţa dintre d_1 şi d_2 cât şi unghiul dintre cele două drepte.

Problema 5.63. Determinaţi poziţia relativă a dreptelor

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

şi

$$d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$$

şi apoi calculaţi distanţa dintre ele.

Problema 5.64. Fie $(P) : 2x + 2y - 3z - 1 = 0$ un plan în spaţiu şi

$$d : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1+\alpha}$$

o dreaptă în spaţiu. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât:

(a) $(P) \parallel d$;

(b) $(P) \perp d$.

Problema 5.65. Fie $A(2,4,1)$, $B(3,7,5)$ şi $C(4,10,9)$ trei puncte în spaţiu. Arătaţi că punctele sunt coliniare.

Problema 5.66. Determinaţi dacă punctele sunt coplanare:

(a) $A(-2,1,2)$, $B(-3,5,7)$, $C(-4,3,12)$ şi $D(1,1,1)$.

(b) $A(2,-1,0)$, $B(-1,-1,-5)$, $C(2,-2,-3)$ şi $D(-4,2,-1)$.

Problema 5.67. Determinaţi distanţa dintre punctul $M(3,1,-1)$ şi dreapta

$$d : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+2}{3}.$$

Problema 5.68. Determinaţi distanţa dintre punctul $M(1,1,2)$ şi planul (P) : $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Problema 5.69. Determinaţi punctul $M \in d$, $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{5} = z + 1$ astfel încât distanţa dintre M şi $(P_1) : 4x + 2y - z + 6 = 0$ să fie egală cu distanţa dintre M şi $(P_2) : 2x - 4y + z - 5 = 0$.

Problema 5.70. Determinaţi ecuaţiile dreptei d' care este simetrica dreptei d faţă de punctul A dacă:

(a) $d : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}, t \in \ ;\ A(-1,-1,2).$

(b) $d : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-2} = z + 1\ ;\ A(3,-2,4).$

Problema 5.71. Determinaţi ecuaţiile dreptei d care este perpendiculară pe dreapta $d_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$, trece prin punctul $M(2,3,1)$ şi dreptele d şi d_1 sunt coplanare.

Problema 5.72. Determinaţi ecuaţiile planelor (P_1) şi (P_2) dacă ambele plane conţin dreapta $d : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = z + 2$, $(P_1) \perp (P_2)$ şi $A(2,-1,3) \in (P_2)$.

Problema 5.73. Determinaţi poziţia relativă a planului (P) şi dreptei d şi apoi aflaţi unghiul şi distanţa dintre dreptă şi plan dacă:

(a) $(P) : x - y + z + 5 = 0;\ \ d : x + 1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}.$

(b) $(P) : 2x - 2y + 3z - 4 = 0;\ \ d : \begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 5t + 4 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(c) $(P): x + 5y - z - 4 = 0;\ \ d: \begin{cases} x = 4 \\ y = t + 4 \\ z = 5 - 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$

6

Conice

O conică este o *curbă* obţinută ca intersecţia unui plan cu un con. Un con circular drept poate fi generat prin rotirea unei drepte ce trece prin origine în jurul axei Oy. Cele trei tipuri de secţiuni conice sunt *hiperbola*, *parabola* şi *elipsa*, *cercul* fiind un caz particular al elipsei.

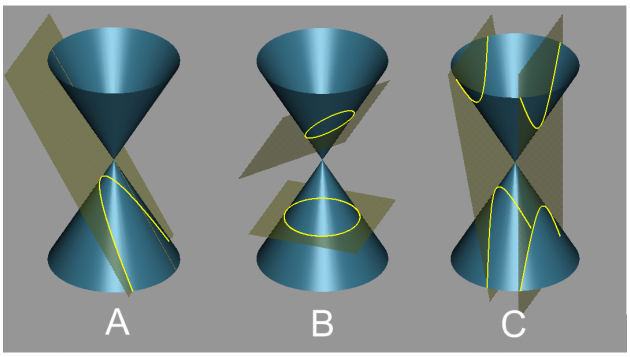


Figura 6.1: Secţiuni conice

A. Parabola B. Elipsa şi cercul C. Hiperbola

Ecuaţia generală a unei conice este

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Bx + Ex + F = 0.$$

În continuare vom discuta despre conice cu ecuaţia generală de forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Bx + Ex + F = 0,$$

adică când termenul xy nu apare în ecuaţia conicei. În acest caz conicele au ca axe de simetrie axele de coordonate, sau drepte paralele cu axele de coordonate.

6.1 Cercul

Definiţie 6.1. ***Cercul*** *este mulţimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit centru.*

Distanţa se numeşte **rază** şi este notată cu **r**.

Ecuaţia generală a cercului este

$$(\mathcal{C}) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

unde $M(h, k)$ este **centrul cercului** şi r este **raza**. Cercul de centru $M(h, k)$ şi rază r este notat cu $\mathcal{C}((h, k), r)$.

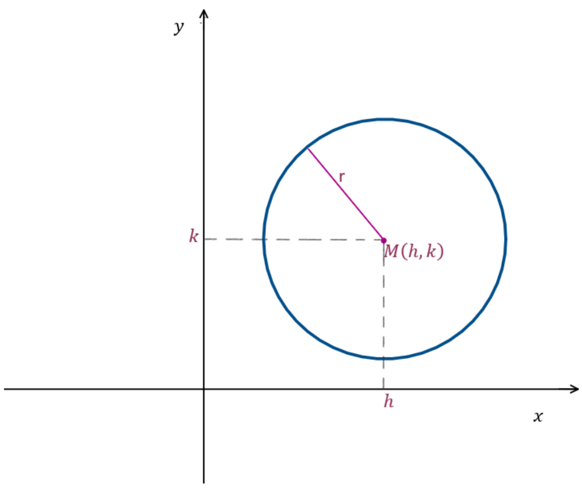


Figura 6.2: Cercul

Ecuaţiile parametrice ale cercului $\mathcal{C}((h,k),r)$ sunt:

$$(\mathcal{C}): \begin{cases} x = h + r\cos\theta \\ y = k + r\sin\theta \end{cases}, \quad r \geqslant 0,\ \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Ecuaţia generală a cercului cu centrul în origine este $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 = r^2$.

Tangenta într-un punct al cercului $\mathcal{C}((h,k),r)$.

1. Tangenta în punctul $M_0(x_0, y_0) \in (\mathcal{C})$ la cercul $(\mathcal{C})$ este

$$tg: (x-h)(x_0-h) + (y-k)(y_0-k) = r^2.$$

2. Tangentele la cercul $(\mathcal{C})$ cu panta m au ecuaţiile

$$tg: y - k = m(x-h) \pm r\sqrt{1+m^2}.$$

3. Tangentele la cercul $(\mathcal{C})$ din punctul exterior $M_0(x_0, y_0)$ au ecuaţia

$$tg: y - y_0 = m(x - x_0),$$

unde $m \in \{m_1, m_2\}$, m_1 şi m_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$y_0 - k = m(x_0 - h) \pm r\sqrt{1+m^2}.$$

6.2 Elipsa

Definiţie 6.2. ***Elipsa*** *este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor de la un punct la două puncte fixe, numite* ***focarele*** *elipsei, este constantă.*

Ecuaţia generală a elipsei este:

$$(E): \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Ecuaţiile parametrice ale elipsei (E) sunt:

$$(E): \begin{cases} x = h + a\cos\theta \\ y = k + b\sin\theta \end{cases}, \quad a, b \geqslant 0,\ \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Dacă $a > b$, atunci:

- Axa mare este pe o dreaptă paralelă cu Ox de ecuaţie $d_1 : y = k$ (elipsa este orientată orizontal), lungimea axei mari este $2a$.
- Axa mică este pe cu o dreaptă paralelă Oy de ecuaţie $d_2 : x = h$ lungimea axei mici este $2b$.
- Centrul este la intersecţia celor două axe $M(h, k)$.
- Focarele F_1, F_2 sunt pe axa mare $F_1(h-c, k)$, $F_2(h+c, k)$, unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- Vârfurile sunt capetele axei mari $V_1(h-a, k)$, $V_2(h+a, k)$.
- Excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{c}{a} < 1$. Excentricitatea elipsei se referă la cât de aplatizată sau rotundă este forma ei. Cu cât elipsa este mai aplatizată cu atât valoarea excentricităţii este mai mare. Cu cât este mai circulară cu atât mai aproape de 0 este valoarea excentricităţii.

Dacă $a > b$ şi $h = k = 0$ avem elipsă orientată orizontal centrată în origine $O(0, 0)$:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

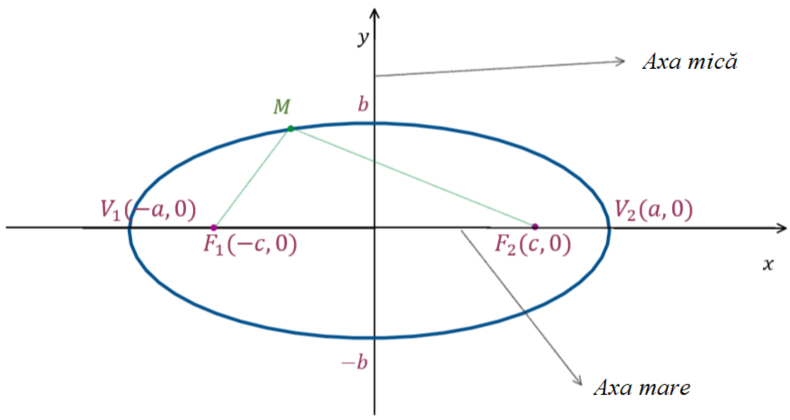


Figura 6.3: Elipsa orientată orizontal

Dacă $b > a$ şi $h = k = 0$ avem o elipsă orientată vertical centrată în origine $O(0, 0)$.

- Axa mare este pe Oy, lungimea axei mari este $2b$.
- Axa mică este pe Ox, lungimea axei mici este $2a$.
- Focarele F_1, F_2 sunt pe axa mare, Oy, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, unde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.
- Vârfurile sunt $V_1(0, -b)$ şi $V_2(0, b)$.

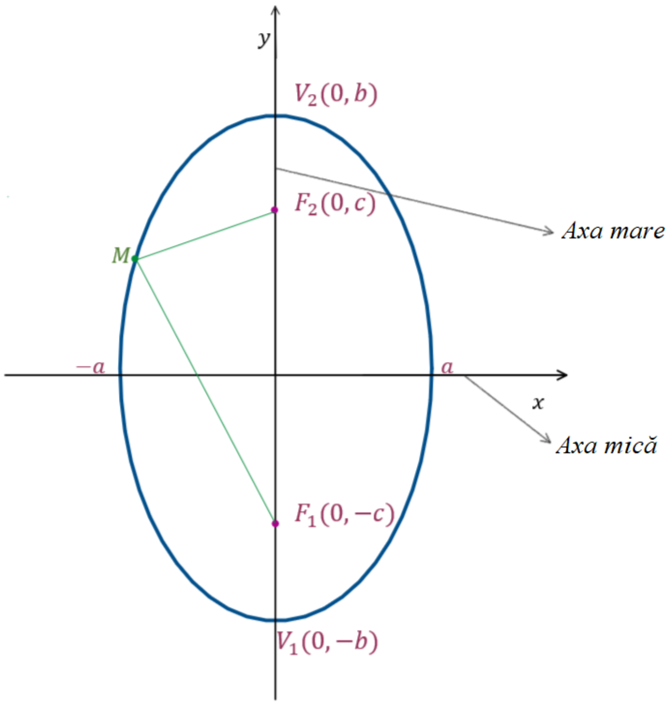


Figura 6.4: Elipsa orientată vertical

Tangenta într-un punct al elipsei (E).

1. Tangenta la un punct $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ la elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ are ecuaţia
$$tg : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

2. Tangentele la elipsa (E) având panta m au ecuaţiile
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

6.3 Hiperbola

Definiţie 6.3. ***Hiperbola*** *este mulţimea tuturor punctelor din plan pentru care valoare absolută a diferenţei dintre distanţele la două puncte fixe numite* ***focare*** F_1,

F_2, *este constantă.*

Dacă alegem focarele pe axa Ox, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, ecuaţia hiperbolei cu centrul în origine, $O(0, 0)$ este:

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

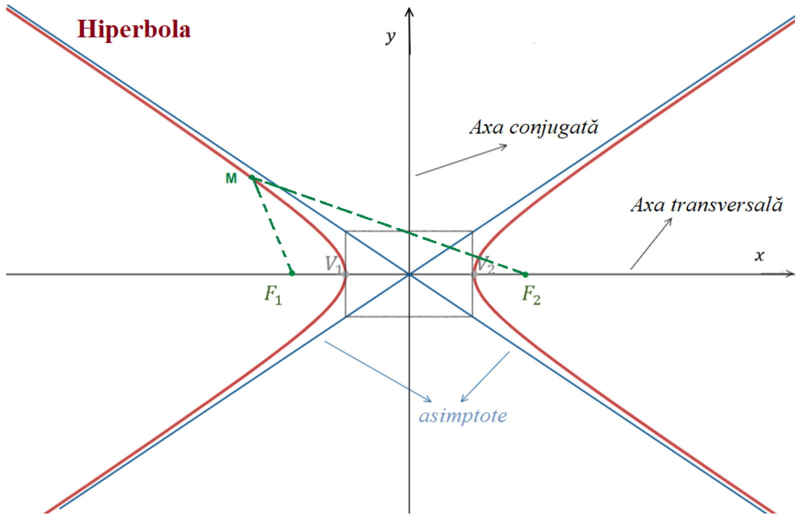


Figura 6.5: Hiperbola cu ramurile ce se deschid spre dreapta şi spre stânga

- **Axa transversală** este dreapta pe care se află focarele $F_1F_2 = Ox$.
- **Axa conjugată** este perpendiculară pe F_1F_2 şi trece prin centrul hiperbolei, în acest caz este axa Oy.
- Dreptunghiul cu lungimile $2a$ şi $2b$ şi care are ca axe de simetrie axele hiperbolei este numit **dreptunghi fundamental** al hiperbolei.
- Asimptotele hiperbolei $y = \pm\frac{b}{a}x$ sunt diagonalele dreptunghiului fundamental.
- Focare sunt $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Vârfurile, $V_1(-a, 0)$ şi $V_2(a, 0)$, sunt intersecţiile axei transversale cu hiperbola.

- Excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei (H) sunt:

$$(H) : \begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.
Tangenta în punctul $M_0(x_0, y_0) \in (H)$ la hiperbola (H) are ecuaţia

$$tg : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Dacă alegem focarele pe axa Oy atunci

$$(H) : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

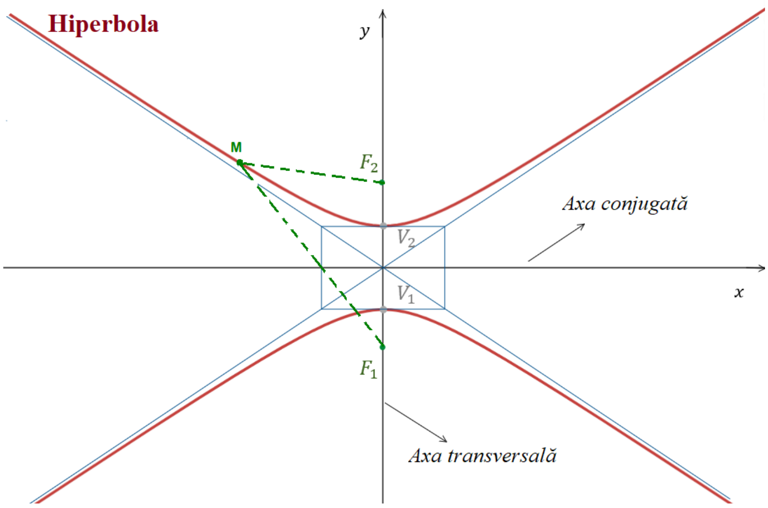


Figura 6.6: Hiperbola cu ramurile ce se deschid în sus şi în jos

- Axa transversală este axa Oy.

- Axa conjugată este axa Ox.

- Ramurile hiperbolei se deschid în sus şi în jos.
- Focarele sunt $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Vârfurile sunt $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$.
- Asimptotele au ecuaţiile $y = \pm \frac{a}{b} x$.

Ecuaţia generală a hiperbolei cu ramurile ce se deschid spre dreapta şi spre stânga este:

$$(H) : \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Pentru această hiperbolă avem:

- Centrul în $C(h, k)$.
- Vârfurile $V(h \pm a, k)$.
- Focarele sunt $F_{1,2}(h \pm c, k)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Asimptotele au ecuaţiile $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$.
- Axa transversală este F_1F_2, o dreaptă paralelă la Ox ce trece prin punctul C.
- Axa conjugată este o dreaptă ce trece prin C şi este perpendiculară pe axa transversală.

Ecuaţia generală a hiperbolei cu ramurile ce se deschid în sus şi în jos este:

$$(H) : \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Pentru această hiperbolă avem:

- Centrul $C(h, k)$.

- Vârfurile $V(h, k \pm a)$.
- Focarele $F_{1,2}(h, k \pm c)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Asimptotele au ecuaţiile $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$.
- Axa transversală este F_1F_2, o dreaptă paralelă cu Oy.
- Axa conjugată este o dreaptă ce trece prin C şi este perpendiculară pe axa transversală.

Hiperbola echilaterală este o hiperbolă pentru care asimptotele sunt perpendiculare, denumită de asemenea şi *hiperbolă echilateră* sau *hiperbolă dreaptă.*

Hiperbola echilaterală se obţine pentru $a = b$, în acest caz ecuaţia generală este $x^2 - y^2 = a^2$ sau $y^2 - x^2 = a^2$.

Dacă asimptotele hiperbolei sunt axele Ox şi Oy, atunci ecuaţia hiperbolei echilaterale este

$$(H_e) : xy = c^2.$$

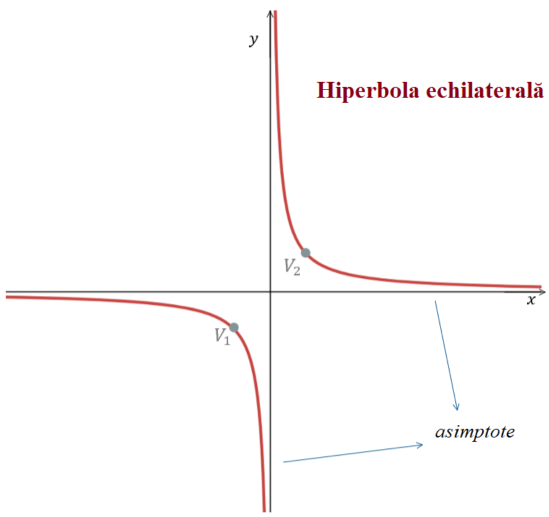


Figura 6.7: Hiperbola echilaterală $xy = c^2$

Despre hiperbola echilaterală cu ecuaţia $xy = c^2$ putem spune următoarele:

- Are aceaşi formă ca şi hiperbola standard, dar rotită cu 45°.
- Asimptotele sunt axele Ox şi Oy.
- Vârfurile sunt $V_1(-c,-c)$, $V_2(c,c)$.
- Excentricitatea este $\epsilon = \sqrt{2}$.
- Ecuaţiile parametrice sunt

$$(H) : \begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

6.4 Parabola

Definiţie 6.4. ***Parabola*** *este mulţimea punctelor din plan pentru care distanţa la un punct fix din plan numit* ***focar*** *este egală cu distanţa la o dreaptă fixă numită* ***directoare****.*

Punctul ce se află la jumătatea distanţei dintre focar şi dreapta directoare este numit **vârful** parabolei.

Există patru tipuri de parabole în sistemul de axe de coordonate. Ele se pot deschide în sus, în jos, spre dreapta sau spre stânga.

1. $(P) : (x-h)^2 = 4p(y-k)$.

   Parabola se deschide în sus dacă $p > 0$ şi se deschide în jos dacă $p < 0$.

   - Vârful este $V(h,k)$.
   - Ecuaţia directoarei este $y = k - p$.
   - Focarul este $F(h, k+p)$.

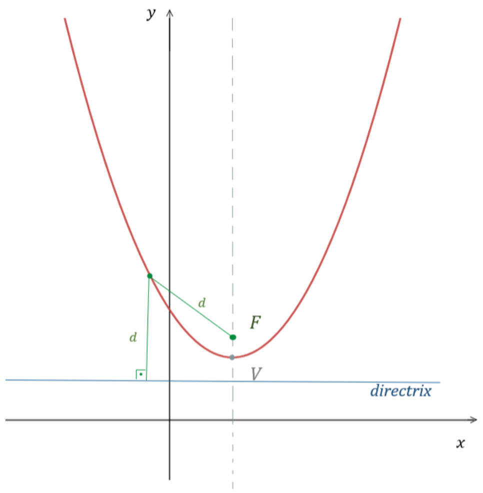


Figura 6.8: Parabola cu ramurile în sus

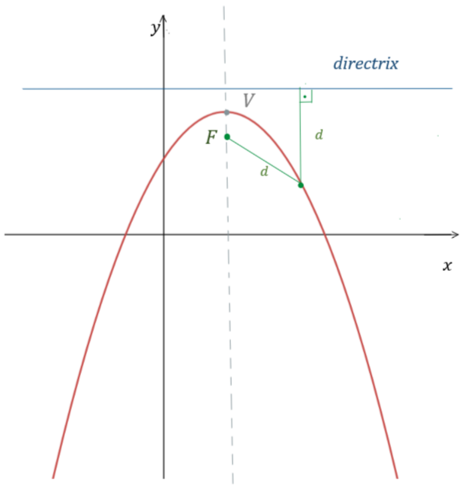


Figura 6.9: Parabola cu ramurile în jos

- Ecuaţiile parametrice sunt: $\begin{cases} x = 2pt + h \\ y = pt^2 + k \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

2. $(P) : (y - k)^2 = 4p(x - h)$.

   Parabola are ramurile spre dreapta dacă $p > 0$ şi are ramurile spre stânga dacă $p < 0$.

   - Vârful este $V(h, k)$.
   - Ecuaţia directoare este $x = h - p$.
   - Focarul este $F(h + p, k)$.
   - Ecuaţiile parametrice sunt $\begin{cases} x = pt^2 + h \\ y = 2pt + k \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Observaţie 6.5. *Când trasăm graficul unei parabole, numărul $4p$ care este denumit şi* ***latus rectum*** *este foarte util deoarece punctele ce determină segmentul de dreaptă paralel cu directoarea, cu lungimea $|4p|$ şi având ca mijloc al segmentului focarul parabolei, aparţin parabolei.*

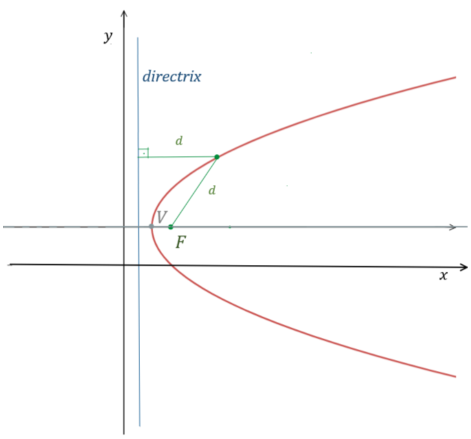


Figura 6.10: Parabola cu ramurile spre dreapta

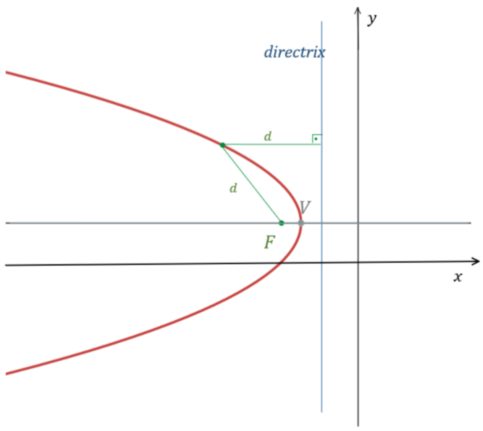


Figura 6.11: Parabola cu ramurile spre stânga

6.5 Probleme rezolvate

Problema 6.1. a) Puneţi ecuaţia $2x^2 - 8x + 2y^2 + 4y - 8 = 0$ în forma standard a ecuaţiei unui cerc.

b) Determinaţi raza şi centrul cercului.

c) Scrieţi ecuaţiile parametrice ale acestui cerc.

d) Faceţi graficul cercului.

e) Găsiţi două puncte de pe cerc şi înlocuiţi în ecuaţia cercului pentru a verifica dacă graficul este corect.

f) Scrieţi ecuaţia tangentei la cerc într-unul din punctele determinate anterior.

Rezolvare:

a) Împărţim prin 2 ecuaţia dată şi obţinem:

$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0 \Longleftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 4 - 4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow$ (ne formăm pătrate perfecte)

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

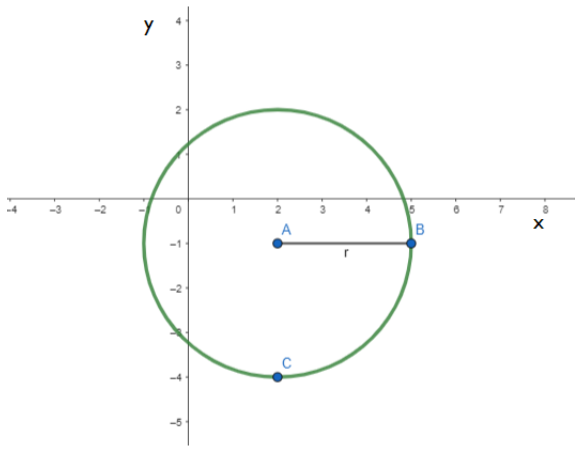
care este forma standard a ecuaţiei unui cerc.

b) Cercul $(\mathcal{C}) : (x-2)^2+(y+1)^2=9$ are raza $r=3$ şi centrul în $A(2,-1)$.

c) Ecuaţiile parametrice ale cercului sunt:

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = 2+3\cos t \\ y = -1+3\sin t \end{cases}, \quad t \in [0,2\pi].$$

d) Graficul cercului dat este:



e) Alegem punctele $B(5,-1)$ şi $C(2,-4)$ din graficul cercului. $B \in (\mathcal{C})$ dacă $(5-2)^2+(-1+1)^2=9$ ceea ce este adevărat şi $C \in (\mathcal{C})$ dacă $(2-2)^2+(-4+1)^2=9$ relaţie care se verifică şi ea, deci punctele alese aparţin cercului.

e) Tangenta în punctul $B(5,-1)$ este $tg : (x-2)(5-2)+(y+1)(-1+1)=9 \Longleftrightarrow tg : x=5$.

Problema 6.2. Pentru elipsa

$$(E) : \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

determinaţi axa mare şi lungimea ei, axa mică şi lungimea ei, centrul, vârfurile, focarele, scrieţi ecuaţiile parametrice, găsiţi intersecţiile cu axele de coordonate şi apoi trasaţi graficul ei.

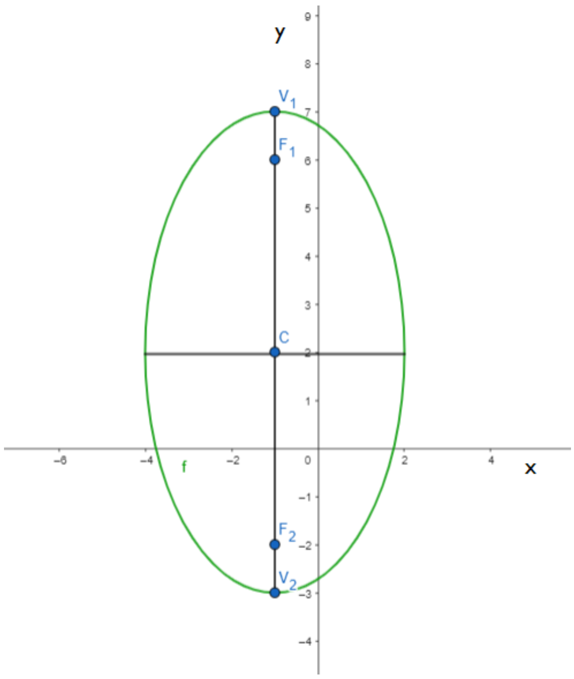
Rezolvare:

Observăm că $25 > 9$ deci avem că axa mare este pe Oy şi $a = 5$, $b = 3$. Lungimea axei mari este $2a = 10$, axa mică este Ox cu lungimea $2b = 6$.

Centrul elipsei este $C(-1, 2)$.

Vârfurile sunt pe o dreaptă paralelă cu axa Oy, $x = -1$, $V_1(-1, 7)$ şi $V_2(-1, -3)$. (Din centrul elipsei $C(-1, 2)$ ne deplasăm în jos şi în sus $a = 5$ u.m.).

Pentru coordonatele focarelor calculăm $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Focare sunt pe axa mare, $c = 4$ u.m. în sus şi jos faţă de centru, adică $F(-1, 2 \pm 4)$, $F_1(-1, 6)$ şi $F_2(-1, -2)$.



Ecuaţiile parametrice ale elipsei sunt

$$(E):\begin{cases} x=-1+3\cos t \\ y=2+5\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Intersecţiile cu axele de coordonate se calculează astfel.

- $(E)\cap Ox:\ y=0 \Longrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{4}{25}=1 \Longleftrightarrow (x+1)^2=9\cdot\dfrac{21}{25} \Longleftrightarrow$ $x=-1\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{5}$. Avem două puncte de intersecţie cu axa Ox $A_1\left(-1-\dfrac{3\sqrt{21}}{5},0\right)$ şi $A_2\left(-1+\dfrac{3\sqrt{21}}{5},0\right)$.
- $(E)\cap Oy:\ x=0 \Longrightarrow \dfrac{1}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1 \Longleftrightarrow (y-2)^2=\dfrac{200}{9} \Longleftrightarrow y=$ $2\pm\dfrac{10\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow$ avem două puncte de intersecţie cu axa Oy $B_1\left(0,2-\dfrac{10\sqrt{2}}{3}\right)$ şi $B_2\left(0,2+\dfrac{10\sqrt{2}}{3}\right)$.

Problema 6.3. Fie hiperbola de ecuaţie

$$(H): x^2-4y^2-16=0.$$

Determinaţi axa transversală şi axa conjugată, centrul, vârfurile, focarele, asimptotele, excentricitatea şi apoi trasaţi-i graficul. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale hiperbolei. Verificaţi dacă $M(2\sqrt{5},-1)$ aparţine hiperbolei şi scrieţi ecuaţia tangentei în M.

Rezolvare:

Observăm că ecuaţia nu este în formă standard deci vom împărţi la 16 ecuaţia, şi obţinem $(H):\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

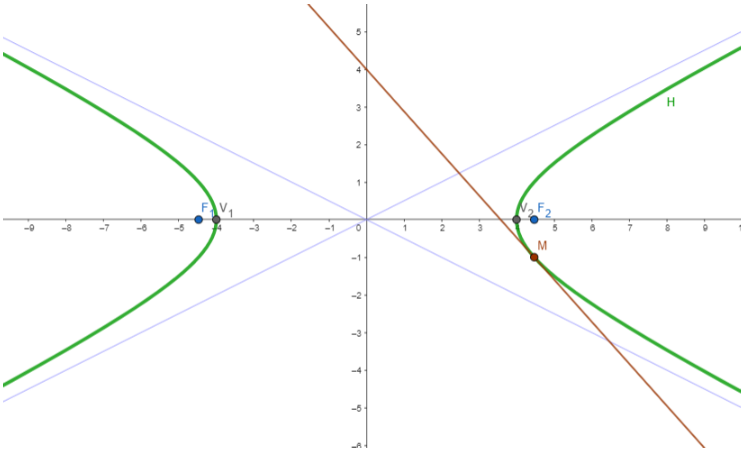
Centrul este în origine, $O(0,0)$.

Deoarece termenul cu x este pozitiv când ecuaţia este egală cu 1, axa transversală este axa Ox, $a=4$ şi axa conjugată este axa Oy, $b=2$.

Vârfurile sunt pe axa transversală $V_1(-4, 0)$ şi $V_2(4, 0)$.

Pentru coordonatele focarelor, determinăm $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$. Focarele au coordonatele $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$ şi $F_1(2\sqrt{5}, 0)$.

Ecuaţiile asimptotelor sunt $d_1 : y = \dfrac{1}{2}x$ şi $d_2 : y = -\dfrac{1}{2}x$, iar excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.



Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei sunt

$$(E) : \begin{cases} x = \pm 4 \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verificăm dacă $M(2\sqrt{5}, -1) \in (H)$.

$M(2\sqrt{5}, -1) \in (H) \iff \dfrac{(2\sqrt{5})^2}{16} - \dfrac{(-1)^2}{4} = 1 \iff \dfrac{20}{16} - \dfrac{1}{4} - 1 = 0$ ceea ce este adevărat, deci ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul M este:

$tg : \dfrac{2\sqrt{5}x}{16} - \dfrac{-1 \cdot y}{4} = 1 \iff$

$tg : \sqrt{5}x + 2y - 8 = 0.$

Problema 6.4. Fie parabola dată de ecuaţia $(P) : y^2 = 3x$. Determinaţi vârful parabolei, focarul, ecuaţia directoarei şi apoi trasaţi graficul. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale parabolei. Determine ecuaţia tangentei la parabolă ce trece prin punctul $A(12, -6)$.

Rezolvare:

Vârful parabolei este în origine $O(0,0)$ şi deoarece termenul care apare la pătrat este y, $p = \dfrac{3}{4}$, focarul este situat pe axa Ox, $F\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$. Ecuaţia dreptei directoare este o dreaptă paralelă cu Oy ce trece prin $x = -p$ deci ecuaţia directoarei este $x = -\dfrac{3}{4}$.

Ecuaţiile parametrice ale parabolei sunt

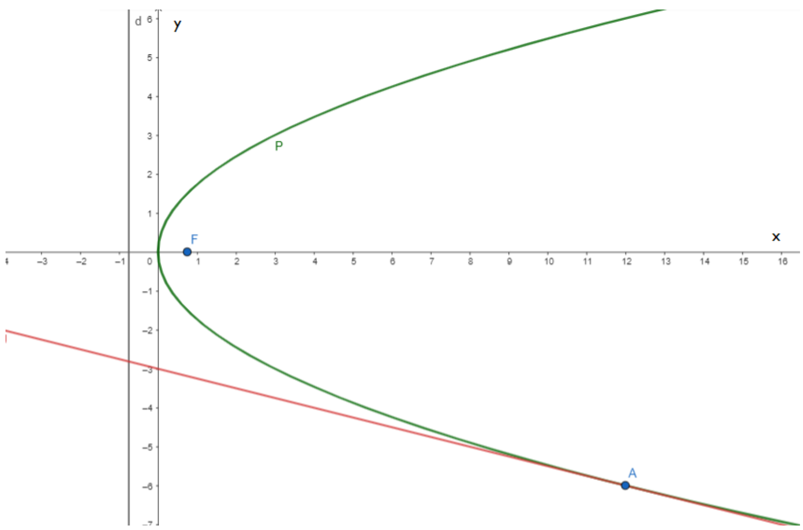
$$(P) : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{3} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$A(12, -6) \in (P)$ deoarece $(-6)^2 = 3 \cdot 12$.

Ecuaţia tangentei la parabolă în A este:

$tg : y \cdot (-6) = \dfrac{3}{2}(x + 12) \Longleftrightarrow$

$tg : x + 4y + 12 = 0.$



Problema 6.5. Identificaţi şi apoi trasaţi graficul conicei având ecuaţia:

a) $(C_1) : 3x^2 + y + 6x - 2 = 0.$

b) $(C_2) : x^2 + 4y^2 + 10x - 16y + 25 = 0.$

c) $(C_3) : x^2 + y^2 - 10x + 2y + 21 = 0.$

d) $(C_4) : 4y^2 - x^2 - 40y - 12x + 60 = 0.$

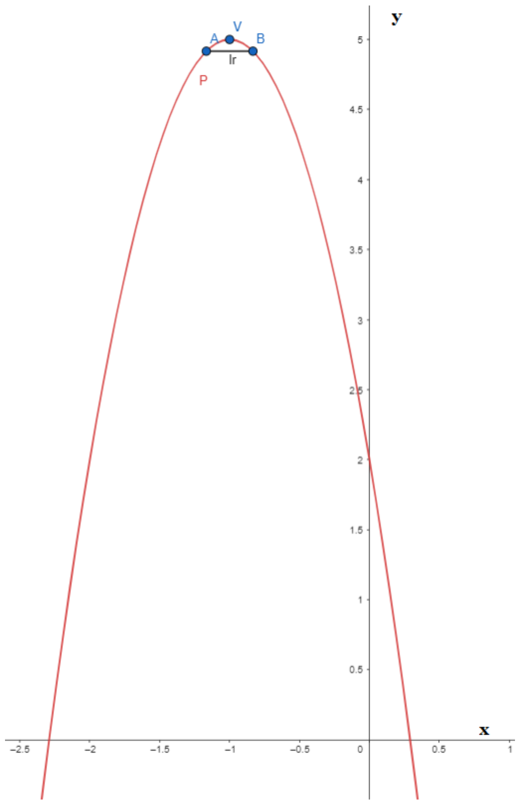
Rezolvare:

a) $(C_1) :\ 3x^2 + y + 6x - 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$(C_1) :\ 3(x^2 + 2x + 1) = -y + 2 + 3 \Longleftrightarrow$

$(C_1) :\ (x + 1)^2 = -\dfrac{y - 5}{3}$

Aceasta este ecuaţia unei parabole de-a lungul axei Oy, care are ramurile în jos, cu vârful în $V(-1, 5)$ şi $p = -\dfrac{1}{12}$. Focarul este de coordonate $F\left(-1, 5 - \dfrac{1}{12}\right)$. Pentru parabola noastră latus rectum este $\dfrac{1}{3}$ deci punctele $A\left(-1 - \dfrac{1}{6}, 5 - \dfrac{1}{12}\right)$ şi $B\left(-1 + \dfrac{1}{6}, 5 - \dfrac{1}{12}\right)$ aparţin parabolei.



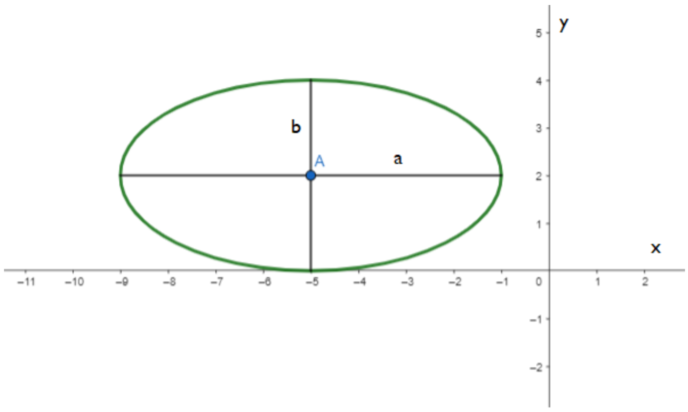
b) $(C_2):\ x^2+4y^2+10x-16y+25=0 \Longleftrightarrow$

$(C_2):\ x^2+10x+25+4(y^2-4y+4)-16=0 \Longleftrightarrow$

$(C_2):\ (x+5)^2+4(y-2)^2=16 \Longleftrightarrow$

$(C_2):\ \dfrac{(x+5)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

Aceasta este ecuaţia unei elipse cu centrul în $A(-5,2)$, iar axa mare o dreaptă paralelă cu Ox ce trece prin centru, $a=4$ şi $b=2$.

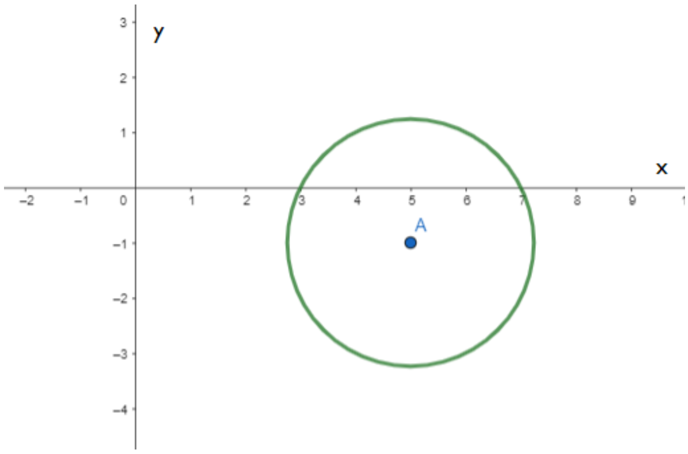


c) $(C_3):\ x^2+y^2-10x+2y+21=0 \Longleftrightarrow$

$(C_3):\ x^2-10x+25+y^2+2y+1+21-25-1=0 \Longleftrightarrow$

$(C_3):\ (x-5)^2+(y+1)^2=5$

Aceasta este ecuaţia unui cerc de centru $A(5,-1)$ şi raza $r=\sqrt{5}$.



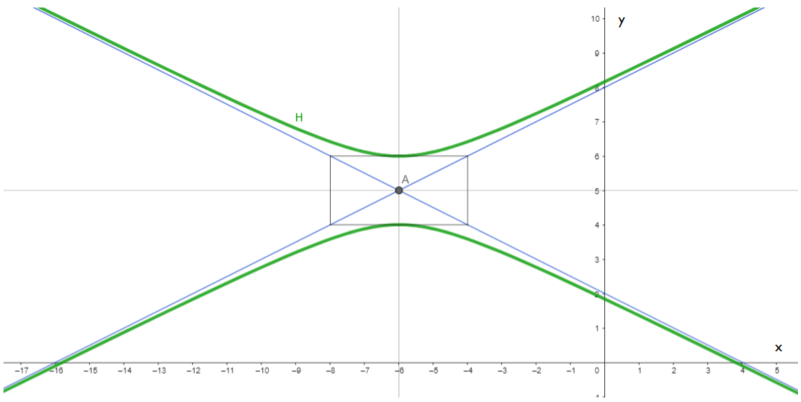
d) $(C_4):\ 4y^2 - x^2 - 40y - 12x + 60 = 0 \Longleftrightarrow$

$(C_4):\ 4(y^2 - 10y + 25) - (x^2 + 12x + 36) + 60 - 100 + 36 = 0 \Longleftrightarrow$

$(C_4):\ 4(y-5)^2 - (x+6)^2 = 4 \Longleftrightarrow$

$(C_4):\ (y-5)^2 - \dfrac{(x+6)^2}{4} = 1$

Aceasta este ecuaţia unei hiperbole cu axa transversală o dreaptă ce trece prin centrul $A(-6,5)$ şi paralelă cu axe Oy. Vârfurile sunt $V_1(-6,4)$ şi $V_2(-6,6)$. $a = 1$ şi $b = 2$, deci dreptunghiul fundamental are laturile de lungime 4 şi respectiv 2 iar diagonalele acestuia sunt asimptotele hiperbolei.



Problema 6.6. Scrieţi ecuaţia cercului astfel încât:

a) $[AB]$ este diametrul cercului, $A(-1,-2)$ şi $B(5,-4)$.

b) Centrul cercului este $A(2,-3)$ şi dreapta $d: 2x+5y-1=0$ este tangentă cercului.

Rezolvare:

a) Deoarece $[AB]$ este diametru, centrul cercului este mijlocul segmentului $[AB]$ care este $M(2,-3)$ şi raza este $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{6^2+2^2}}{2} = \sqrt{10}$.

Ecuaţia cercului este:

$$(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 10.$$

b) Raza este perpendiculară pe tangentă, prin urmare
$r = \text{dist}(A,d) = \dfrac{|4+5\cdot(-3)-1|}{\sqrt{4+25}} = \dfrac{12}{\sqrt{29}}$.

Ecuaţia cercului este:

$$(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{144}{29}.$$

Problema 6.7. Scrieţi ecuaţia elipsei centrate în origine $O(0,0)$ astfel încât:

a) Distanţa dintre focare este 6 şi excentricitatea este $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

b) Punctul $M(-2\sqrt{5},2)$ aparţine elipsei, axa mare este pe Ox şi lungimea axei mici este 6.

Rezolvare:

a) $2c = 6 \Longrightarrow c = 3$.
$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow a = \dfrac{3\cdot 5}{3} = 5$.
$b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Ecuaţia elipsei este:

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) $2b = 6 \Longrightarrow b = 3 \Longrightarrow (E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

$M(-2\sqrt{5}, 2) \in (E) \Longleftrightarrow \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{4}{9} = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{20}{a^2} = \dfrac{5}{9} \Longrightarrow a^2 = 36.$

Ecuaţia elipsei este:

$$(E) : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Problema 6.8. Scrieţi ecuaţia hiperbolei centrate în origine $O(0,0)$ astfel încât:

a) Unul dintre vârfuri este $V_1(0,-2)$ şi excentricitatea este $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$.

b) Punctul $M\left(\dfrac{9}{2}, -1\right)$ aparţine hiperbolei, ecuaţiile asimptotelor sunt $y = \pm\dfrac{2}{3}x$, şi axa transversală este pe Ox.

Rezolvare:

a) Dacă vârful are coordonatele $V_1(0,-2) \in Oy$ atunci axa transversală este pe Oy şi $a = 2$.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow c = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3.$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$

Ecuaţia hiperbolei este:

$$(E) : \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

b) $y = \pm\dfrac{2}{3}x \Longrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow a = 3k, b = 2k \Longrightarrow$

$(H) : \dfrac{x^2}{9k^2} - \dfrac{y^2}{4k^2} = 1.$

$M\left(\dfrac{9}{2}, -1\right) \in (H) \Longleftrightarrow \dfrac{81}{4 \cdot 9k^2} - \dfrac{1}{4k^2} = 1 \Longrightarrow k^2 = 2 \Longrightarrow a^2 = 18,\ b^2 = 8.$

Ecuaţia hiperbolei este:

$$(H) : \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Problema 6.9. Scrieţi ecuaţia parabolei care are ca axă de simetrie axa Oy, vârful este în origine şi trece prin $A(9, 6)$.

Rezolvare:

Ecuaţia generală a parabolei este $(P) : x^2 = 4py$.

$A(9, 6) \in (P) \Longrightarrow 81 = 4 \cdot p \cdot 6 \Longrightarrow p = \frac{27}{8}$.

Ecuaţia parabolei este:

$$(P) : x^2 = \frac{27}{2}y.$$

Problema 6.10. Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 2x$ care este perpendiculară pe dreapta $d : x - 2y + 4 = 0$.

Rezolvare:

$tg \perp d \Longrightarrow m_{tg}m_d = -1 \Longrightarrow m_{tg} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Tangenta în punctul $M(x_0, y_0)$ care aparţine parabolei este $tg : yy_0 = x + x_0 \Longrightarrow m_{tg} = \frac{1}{y_0} \Longrightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$.

$(x_0, y_0) \in (P) \Longrightarrow y_0^2 = 2x_0 \Longrightarrow x_0 = \frac{1}{8}$.

Ecuaţia tangentei este:

$tg : y(-\frac{1}{2}) = x + \frac{1}{8}$

$tg : 8x + 4y + 1 = 0$.

6.6 Probleme propuse

Problema 6.11. Scrieţi ecuaţia cercului dacă:

a) Centrul este în origine şi raza este 3.

b) $A(2, -1)$ este centrul cercului şi raza este 4.

c) Centrul este în $B(2, 5)$ şi trece prin $C(-1, 2)$.

d) Centrul este în $D(1, -1)$ şi dreapta $d : 5x - 12y + 9 = 0$ este tangentă cercului.

Problema 6.12. Scrieţi ecuaţia cercului cu diametrul $[AB]$, unde $A(2,3)$, $B(4,-1)$.

Problema 6.13. Determinaţi raza şi centrul cercului de ecuaţie

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0.$$

Scrieţi ecuaţia tangentei la cerc ce trece prin punctul $A(1,-2)$.

Problema 6.14. Scrieţi ecuaţia elipsei cu centrul în origine astfel încât:

a) lungimile axelor sunt sunt 5 şi 2 şi este orientată orizontal;

b) lungimea axei mari este 10, distanţa focală este $2c = 8$ şi este orientată orizontal;

c) axa mare este 24, distanţa focală este $2c = 10$ şi este orientată vertical;

d) $2c = 6$, excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{3}{5}$ şi este orientată orizontal;

e) lungimea axei mici este 20, excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{12}{13}$ şi este orientată vertical.

Problema 6.15. Scrieţi ecuaţia elipsei (E) centrată în origine dacă:

a) $M(-2\sqrt{5}, 2) \in (E)$, $b = 3$ şi este orientată orizontal;

b) $M(2,-2) \in (E)$, $a = 4$ şi este orientată orizontal;

c) elipsa (E) trece prin $M_1(4, -\sqrt{3})$ şi $M_2(2\sqrt{2}, 3)$;

d) $M(\sqrt{15}, -1) \in (E)$, $2c = 8$ şi este orientată orizontal;

e) $M\left(2, -\dfrac{5}{3}\right) \in (E)$, excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{2}{3}$ şi este orientată orizontal.

Problema 6.16. Determinaţi axa mare, axa mică, vârfurile, focarele, excentricitatea pentru elipsele:

a) $(E_1) : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0;$

b) $(E_2) : x^2 + 16y^2 - 16 = 0$;

c) $(E_3) : x^2 + 4y^2 - 1 = 0$;

apoi trasaţi graficele lor.

Problema 6.17. Determinaţi poziţia relativă a elipsei $(E) : 2x^2 + 5y^2 - 88 = 0$ şi dreptei $d : 3x - 5y + 14 = 0$

Problema 6.18. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{2y^2}{5} - 1 = 0$ paralele cu dreapta $d : 3x + 2y + 7 = 0$.

Problema 6.19. Scrieţi ecuaţia tangentei în $A(2, 0)$ la elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

Problema 6.20. Scrieţi ecuaţia hiperbolei centrată în origine şi:

a) $a = 5$, $b = 4$ şi axa transversală este pe axa Ox;

b) $c = 5$, $a = 4$ şi axa transversală este pe axa Oy;

c) $c = 3$, excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{3}{2}$ şi axa transversală este pe axa Ox;

d) $a = 8$ excentricitatea este $\epsilon = \dfrac{5}{4}$ şi axa transversală este pe axa Ox;

e) Ecuaţiile asimptotelor sunt $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, $c = 13$ şi axa transversală este pe axa Ox.

Problema 6.21. Scrieţi ecuaţia hiperbolei (H) centrate în origine şi:

a) $M(10, -\sqrt{5}) \in (H)$, $a = \sqrt{20}$, şi axa transversală este pe axa Oy;

b) hiperbola trece prin $M_1(5, \frac{15}{4})$ şi $M_2(-4\sqrt{2}, 5)$;

c) $M(4, -\frac{4\sqrt{7}}{3}) \in (H)$, $c = 5$ şi axa transversală este pe axa Ox;

d) $M(\frac{9}{2}, -1) \in (H)$, ecuaţiile asimptotelor sunt $y = \pm\dfrac{2}{3}x$, şi axa transversală este pe axa Ox.

Problema 6.22. Determinaţi axa transversală, axa conjugată, vârfurile, focarele, excentricitatea şi ecuaţiile asimptotelor pentru fiecare dintre hiperbolele:

a) $(H_1) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0,$

b) $(H_2) : x^2 - y^2 - 1 = 0,$

c) $(H_3) : y^2 - 4x^2 - 16 = 0,$

d) $(H_4) : 16x^2 - 9y^2 - 1 = 0,$

apoi trasaţi graficele lor.

Problema 6.23. Determinaţi poziţia relativă a dreptei $d : x - y - 4 = 0$ şi a hiperbolei $(H) : \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{3} - 1 = 0.$

Problema 6.24. Scrieţi ecuaţia tangentei la $(H) : \dfrac{x^2}{4} - y^2 - 1 = 0$ în punctul $A(-6, 2\sqrt{2})$.

Problema 6.25. Scrieţi ecuaţia parabolei astfel încât:

a) parabola are ramurile spre dreapta, are vârful în origine $O(0, 0)$ şi focarul este $F(2, 0)$;

b) parabola are ramurile spre stânga, are vârful în origine $O(0, 0)$ şi ecuaţia directoarei este $x = 5$;

c) parabola are ramurile în jos, vârful este $A(2, -3)$ şi focarul este $F(2, -6)$;

d) parabola are ramurile în sus, focarul este $F(-2, 5)$ şi ecuaţia directoarei este $y = 1$.

Problema 6.26. Determinaţi vârful, focarul, ecuaţia directoarei pentru fiecare dintre parabolele:

a) $(P_1) : (y+1)^2 = 6(x-2)$,

b) $(P_2) : x^2 = 4(y-2)$,

c) $(P_3) : x^2 = -y$,

d) $(P_4) : (y-2)^2 = -4x$,

e) $(P_5) : y^2 - 6y - 8x + 1 = 0$,

f) $(P_6) : x^2 + 8x + 4y + 20 = 0$,

apoi trasaţi graficul fiecărei parabole.

Problema 6.27. Determinaţi ecuaţia parabolei dacă:

a) Are ca axă de simetrie axa Ox, trece prin $A(9,6)$ iar vârful este în origine;

b) Are ca axă de simetrie axa Oy, trece prin $B(1,1)$ şi are vârful în origine.

Problema 6.28. Determinaţi poziţia relativă a dreptei şi parabolei dacă:

a) $d : x - y + 2 = 0,\ (P) : y^2 = 8x$;

b) $d : 8x + 3y - 15 = 0,\ (P) : x^2 = -3x$;

c) $d : 5x - y - 15 = 0,\ (P) : y^2 = -5x$.

7

Cuadrice

7.1 Cuadrice

O cuadrică este dată de o ecuaţie de gradul al doilea în forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Prezentăm câteva cuadrice de bază care au ecuaţiile de forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Prin rotaţii şi translaţii a acestor cuadrice se pot obţine suprafeţe care au ca ecuaţie forma generală dată. Termenii care conţin xy, xz, zy apar doar când avem rotaţii ale formelor de bază.

Cuadricele au ca secţiuni plane, curbe conice. Există cuadrice propriu-zise (nedegenerate) şi cuadrice degenerate.

Cuadricele nedegenerate sunt:

1. elipsoidul, sfera fiind un caz particular al elipsoidului

2. hiperboloidul cu o pânză

3. hiperboloidul cu două pânze

4. paraboloidul eliptic

5. paraboloidul hiperbolic

Cuadricele degenerate pe care le vom prezenta sunt:

1. conul

2. cilindrul

Gradul fiecărei necunoscute, semnul termenilor de gradul al doilea, cât şi care dintre termeni apar în ecuaţie ne ajută să determinăm care dintre cele tipurile de cuadrice enumerate ne este dată.

Pentru a trasa graficul unei suprafeţe cuadrice este adesea de folos să trasăm intersecţiile suprafeţei cu planele de coordonate.

Pentru a determina intersecţia cu xOy alegem $z = 0$.

Pentru a determina intersecţia cu yOz alegem $x = 0$.

Pentru a determina intersecţia cu xOz alegem $y = 0$.

Vom stabili de asemenea intersecţiile suprafeţei cu plane paralele cu planele de coordonate iar aceasta se face stabilind pe rând $x =$ constantă, $y =$ constantă, $z =$ constantă.

7.1.1 Elipsoidul

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Caracteristici:

- toţi termenii de gradul doi sunt prezenţi;

- toţi termenii de gradul doi sunt pozitivi când ecuaţia este egală cu 1;

- toate intersecţiile cu planele de coordonate sunt elipse;
- Intersecţiile cu axele de coordonate sunt $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$.

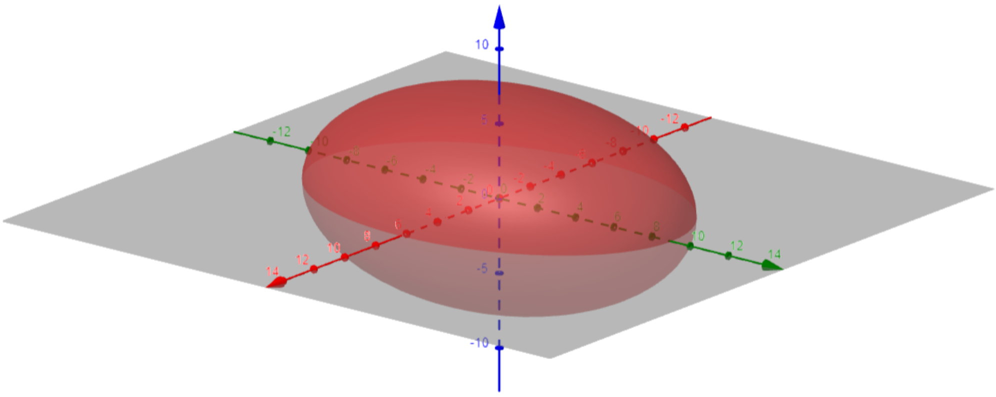


Figura 7.1: Elipsoid

Planul tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (E)$ la elipsoid este:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0.$$

Sfera

Sfera este un caz particular al elipsoidului când $a = b = c$.

Definiţie 7.1. ***Sfera*** *este locul geometric al punctelor din spaţiu care se află la o distanţă fixată numită* ***rază****, r, de la un punct fix numit* ***centru****.*

Ecuaţia sferei cu centrul în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi având raza r este:

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Planul tangent în punctul $M(x_M, y_M, z_M) \in (S)$ la sferă este:

$$(x - x_0)(x_M - x_0) + (y - y_0)(y_M - y_0) + (z - z_0)(z_M - z_0) = r^2.$$

7.1.2 Hiperboloidul cu o pânză

$$(H1P) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Caracteristici:

- toţi termenii de gradul al doilea sunt prezenţi;
- doi dintre termenii de gradul întâi sunt pozitivi şi unul este negativ când ecuaţia este egală cu 1;
- intersecţia cu planul xOy este o elipsă;
- intersecţiile cu planele yOz şi xOz sunt hiperbole;
- axa de simetrie a hiperboloidul cu o pânză este paralelă cu axa variabilei negative, adică hiperbiloidul cu o pânză este direcţionat de-a lungul axei a cărei necunoscută apare cu semnul $-$.

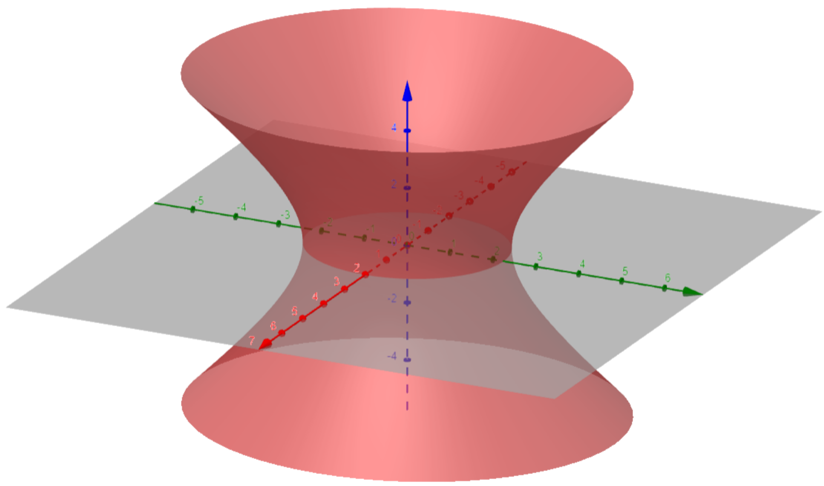


Figura 7.2: Hiperboloidul cu o pânză

Planul tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (H1P)$ la hiperboloidul cu o pânză este:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0.$$

7.1.3 Hiperboloidul cu două pânze

$$(H2P) : -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Caracteristici:

- toţi termenii de gradul al doilea sunt prezenţi;
- un termen de gradul al doilea este pozitiv şi doi sunt negativi când ecuaţia este egală cu 1;
- intersecţia cu un plan paralel cu xOy (planul determinat de necunoscutele negative) este o elipsă;
- intersecţiile cu planele de coordonate xOz şi yOz sunt hiperbole;
- axa de simetrie a hiperboloidului cu două pânze este axa variabilei care este pozitivă în ecuaţie.
- Intersecţiile cu axa Oz sunt $z = \pm c$ (egalăm variabilele care apar cu minus în ecuaţie cu 0).

Planul tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (H2P)$ la hiperboloidul cu două pânze este:

$$-\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0.$$

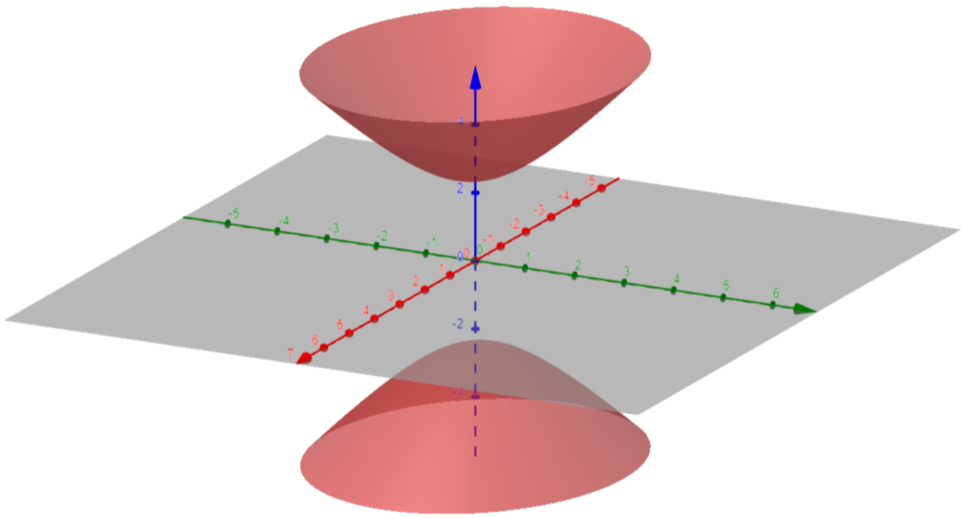


Figura 7.3: Hiperboloidul cu două pânze

7.1.4 Paraboloidul eliptic

$$(PE): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Caracteristici:

- doi termeni de gradul al doilea sunt prezenţi şi sunt pozitivi;
- avem un termen de gradul întâi;
- interecţia cu un plan paralel determinat de neconoscutele termenilor de gradul al doilea este o elipsă;
- intersecţiile cu celelalte plane de coordonate sau cu plane paralele cu acestea sunt parabole;
- axa de simetrie axa variabilei de gradul întâi.
- direcţia:

– dacă $c > 0$ paraboloidul eliptic se deschide spre direcţia pozitivă a axei necunoscutei de gradul întâi.

– dacă $c < 0$ paraboloidul eliptic se deschide spre direcţia negativă a axei necunoscutei de gradul întâi.

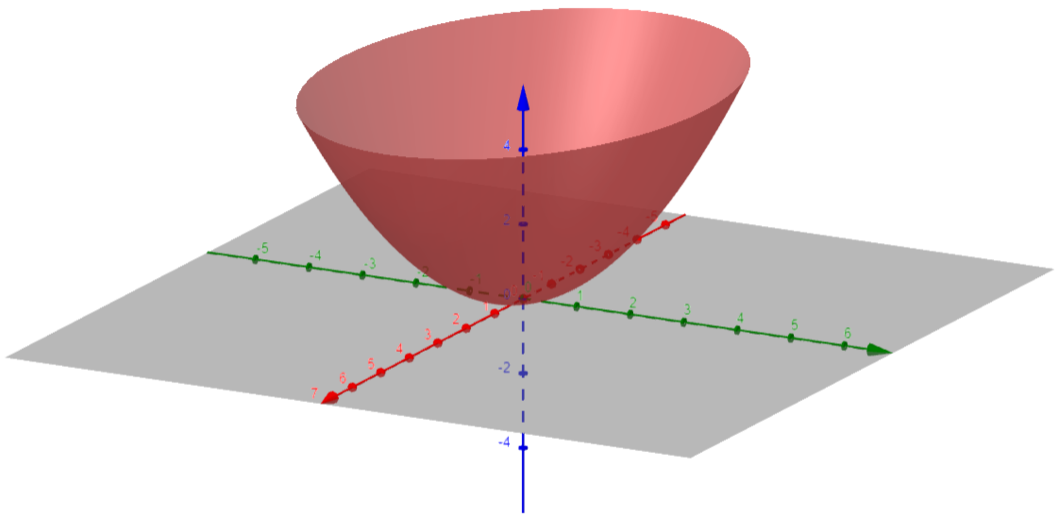


Figura 7.4: Paraboloidul eliptic

Planul tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (PE)$ la paraboloidul eliptic este:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{c}{2}(z + z_0).$$

7.1.5 Paraboloidul hiperbolic

$$(PH) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Caracteristici:

- doi termeni de gradul al doilea sunt prezenţi, unul pozitiv şi unul negativ;
- un termen de gradul întâi este prezent;

- intersecţia cu un plan paralel cu planul de coordonate a căror necunoscute apar la pătrat este o hiperbolă;
- intersecţia cu plane paralele cu celelalte două plane de coordonate xOz şi yOz sunt parabole;
- axa de simetrie este axa necunoscutei de gradul întâi.

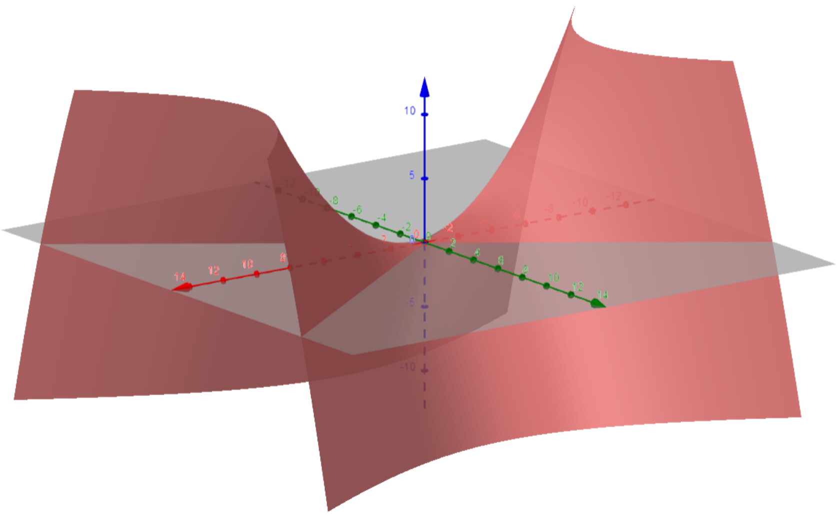


Figura 7.5: Paraboloidul hiperbolic

Planul tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (PH)$ la paraboloidul hiperbolic este:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{c}{2}(z + z_0).$$

7.1.6 Conul eliptic

$$(CE) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Dacă (x, y, z) este o soluţie a ecuaţiei generale a conului eliptic avem că $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ este de asemena o soluţie a ecuaţiei. Aceasta înseamnă că suprafaţa este reuniunea unor drepte ce trec prin origine.

Caracteristici:

- toţi termenii de gradul al doilea sunt prezenţi;
- doi termeni sunt pozitivi şi unul este negativ când ecuaţia este egală cu 0;
- intersecţia cu planul determinat de necunoscutele pozitive, xOy, sau un plan paralel cu acesta este un punct respectiv o elipsă;
- intersecţiile cu planele xOz şi yOz sau plane paralele cu acestea sunt două drepte sau hiperbole;
- axa de simetrie a conului eliptic este axa necunoscutei negative din ecuaţie.

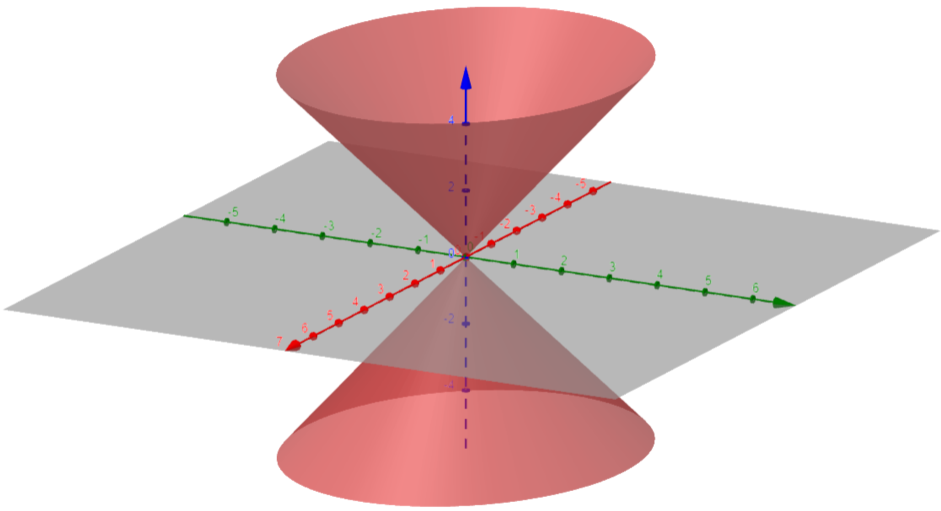


Figura 7.6: Conul eliptic

7.1.7 Cilindrul

Definiţie 7.2. *Un* ***cilindru*** *este o suprafaţă formată din toate dreptele numite şi* generatoare*, care sunt paralele cu o direcţie dată şi care trec printr-un punct variabil ce descrie o curbă plană numită* curbă directoare.

Observaţie

- În spaţiul $\mathbb{R}^3$, ecuaţia unui cilindru are doar două variabile diferite. Această ecuaţie ne oferă intersecţia cilindrului cu planul de coordonate dat de variabilele care apar în ecuaţia cilindrului.
- Curba este direcţionată de-a lungul axei variabilei care lipseşte.
- Curba nu se schimbă de-a lungul axei variabilei care lipseşte.

Exemplu 7.3. *Trasaţi graficul suprafeţei de ecuaţie* $z = x^2 + 1$.

- *Observăm că lipseşte* y *în ecuaţie, deci ne uităm la intersecţia suprafeţei cu planul* xOz.
- *În planul* xOz $z = x^2 + 1$ *este parabola cu ramurile în sus de-a lungul axei* Oz.
- *Obţinem întreaga suprafaţă punând laolaltă toate parabolele cu această ecuaţie în fiecare din planele de ecuaţie* $y = k$.

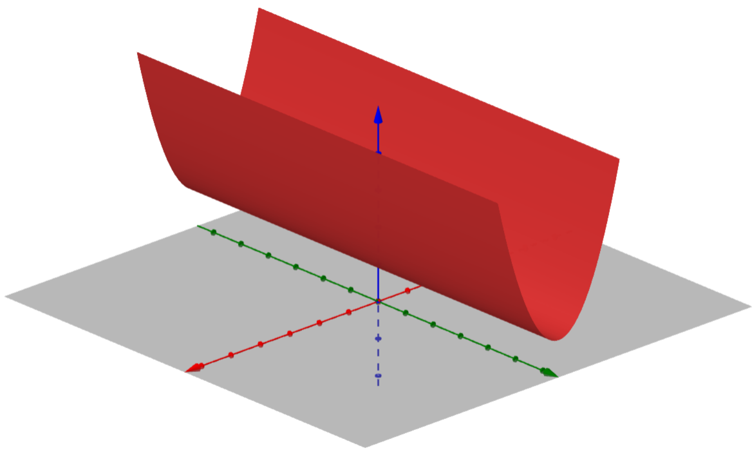


Figura 7.7: Cilindrul $z = x^2 + 1$

Exemplu 7.4. *Trasaţi graficul suprafaţei de ecuaţie* $x^2 + y^2 = 4$.

- *Lipseşte z în ecuaţie, deci avem intersecţia cu planul xOy.*
- *În planul xOy $x^2 + y^2 = 4$ este un cerc cu centrul în origine şi raza $r = 2$.*
- *Obţinem întreaga suprafaţă punând laolaltă o infinitate de astfel de cercuri aflate în fiecare plan de ecuaţie $z = k$.*

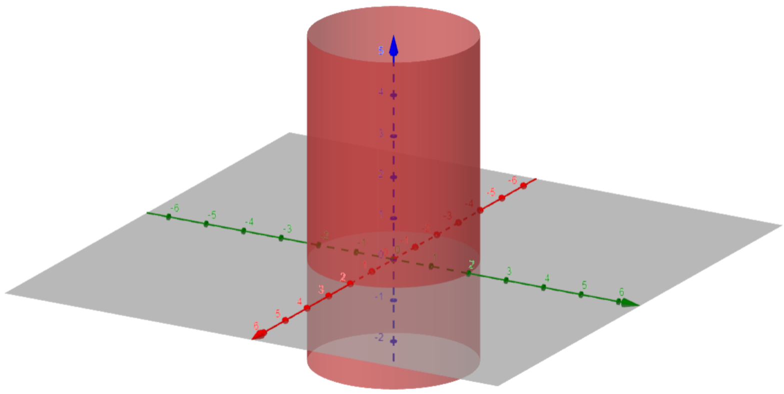


Figura 7.8: Cilindrul $x^2 + y^2 = 4$

Exemplu 7.5. *Trasaţi graficul suprafaţei de ecuaţie $yz = 6$.*

- *Nu avem x în ecuaţie, deci avem intersecţie cu planul yOz.*
- *In planul yOz $yz = 6$ este o hiperbilă echilaterală cu asimptotele axele Oy şi Oz.*
- *Obţinem întreaga suprafaţă reunind toate hiperbolele aflate în fiecare plan de ecuaţie $x = k$.*

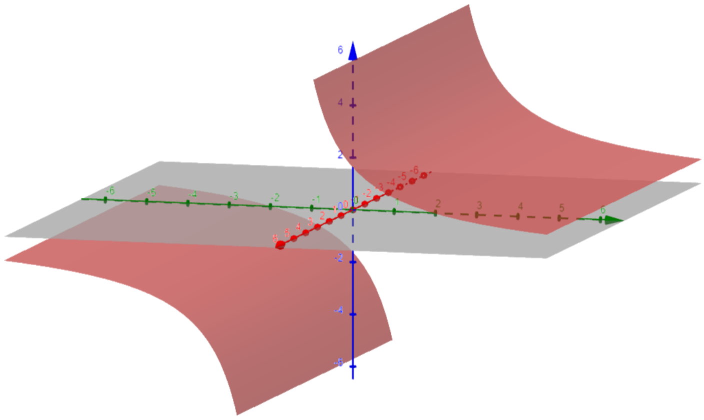


Figura 7.9: Cilindrul $yz = 6$

7.2 Probleme rezolvate

Problema 7.1. Trasaţi graficul intersecţiilor cu planele de coordonate sau cu plane paralele cu acestea apoi desenaţi şi identificaţi fiecare dintre următoarele cuadrice:

a) $(S_1) : 9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 0;$

b) $(S_2) : 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36;$

c) $(S_3) : 4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4 = 0;$

d) $(S_4) : x^2 + 4y^2 = 4;$

e) $(S_5) : z = x^2 + 4y^2 - 4;$

f) $(S_6) : 9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36;$

g) $(S_7) : x^2 - y^2 + 4z - 4 = 0.$

Rezolvare:

a) $(S_1): 9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 0$. Împărţim ecuaţia la 36 şi obţinem $(S_1): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0$, care este un con eliptic de-a lungul axei Oy.

Intersecţia cu xOy: $z = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Longleftrightarrow 9x^2 = 4y^2 \Longleftrightarrow y = \pm\frac{3}{2}x$ ce reprezintă două drepte.

Intersecţia cu xOz: $y = 0 \Longrightarrow x = z = 0 \Longrightarrow O(0, 0, 0)$.

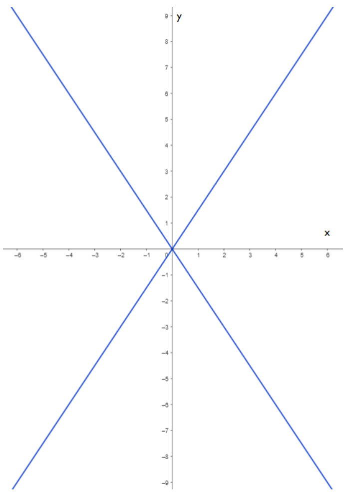
Intersecţia cu yOz: $x = 0 \Longrightarrow -\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0 \Longleftrightarrow 9z^2 = 4y^2 \Longleftrightarrow y = \pm\frac{3}{2}z$ care sunt două drepte în planul yOz.

Dacă $x = \pm 2 \Longrightarrow -\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = -1 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ avem o hiperbolă cu axa transversală Oy.

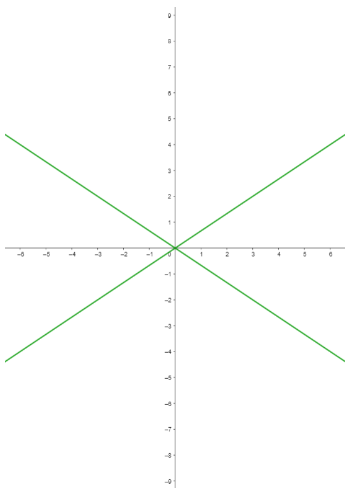
Dacă $y = \pm 3 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \Longleftrightarrow x^2 + z^2 = 4$ obţinem cercul cu raza 2 în planele $y = 3$ şi $y = -3$.

Dacă $z = \pm 2 \Longrightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ obţinem hiperbola având axa transversală Oy.

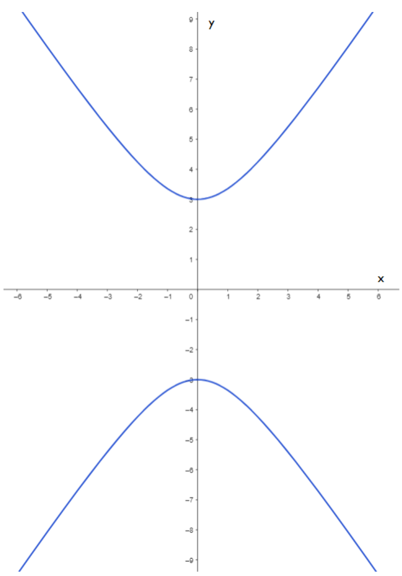
Intersecţiile cu planele de coordonate sunt reprezentate în figurile următoare.



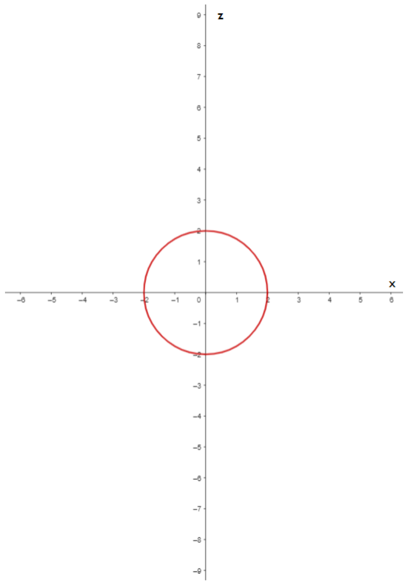
Intersecţia cu xOy



Intersecţia cu yOz



Intersecţia cu $z = \pm 2$



Intersecţia cu $y = \pm 3$

Graficul conului eliptic este reprezentat în figura de mai jos.

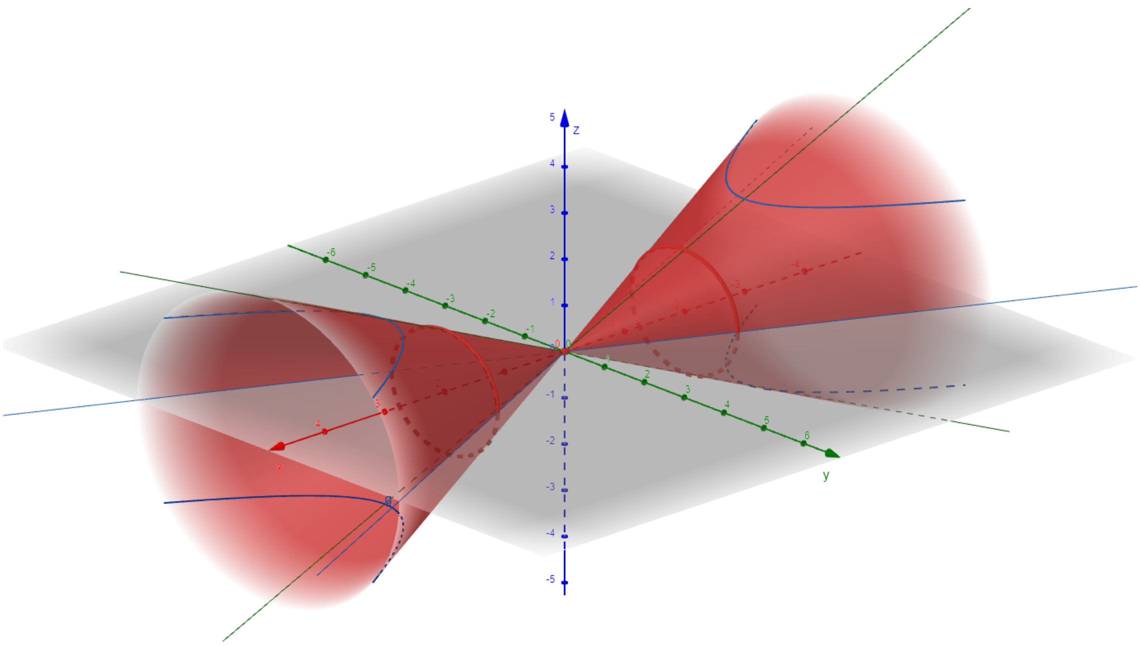


Figura 7.14: (S_1) - con eliptic

b) $(S_2): \ 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, împărţim la 36 ecuaţia şi obţinem

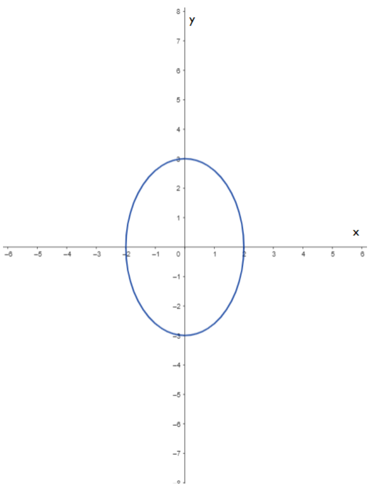
$(S_2): \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{36} = 1$, care este un elipsoid.

Intersecţia cu xOy: $z = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ este o elipsă care are axa mare pe Oy.

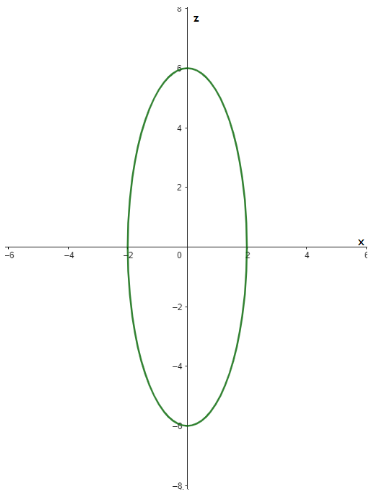
Intersecţia cu xOz: $y = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ este o elipsă care axa mare pe Oz.

Intersecţia cu yOz: $x = 0 \Longrightarrow \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ este o elipsă care are axa mare pe Oz.

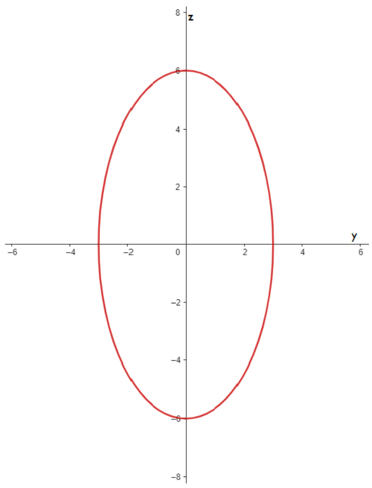
Aceste intersecţii sunt reprezentate în următoarele figuri.



Intersecţia cu xOy



Intersecţia cu xOz



Intersecţia cu yOz

Graficul elipsoidului este reprezentat în figura de mai jos.

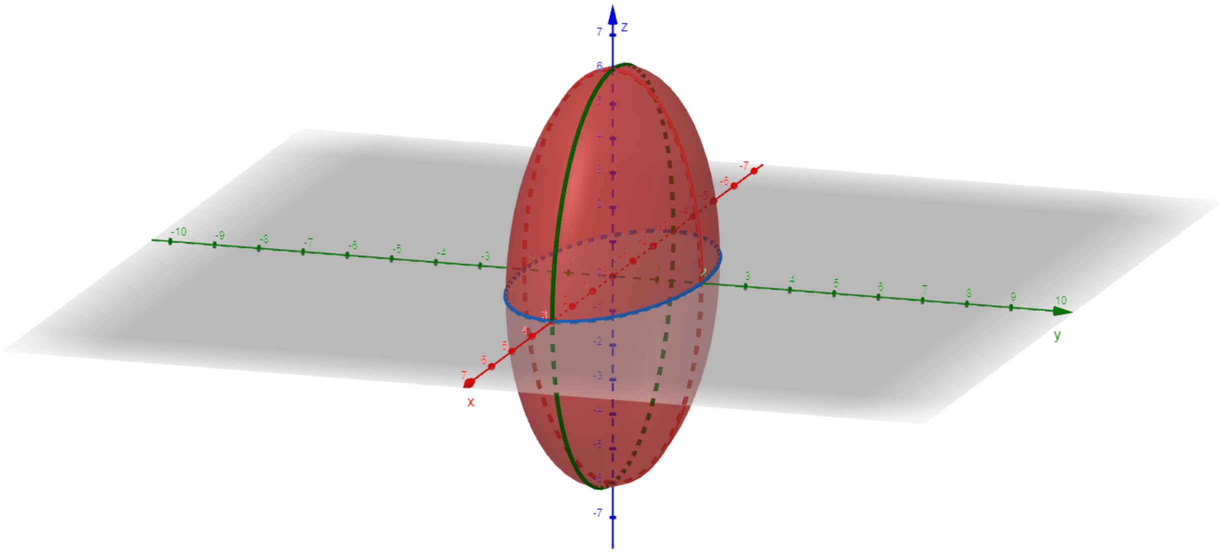


Figura 7.18: (S_2) - elipsoid

c) $(S_3): 4x^2+4y^2-z^2+4=0$. Împărţim ecuaţia la -4 şi obţinem $(S_3): -x^2-y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$, care este ecuaţia hiperboloidul cu două pânze de-a lungul axei Oz.

Intersecţia cu xOy: $z=0 \Longrightarrow -x^2-y^2=1$ este $\varnothing$.

Dacă $z=\pm 2 \Longrightarrow x^2+y^2=0 \Longrightarrow x=y=0 \Longrightarrow O(0,0)$.

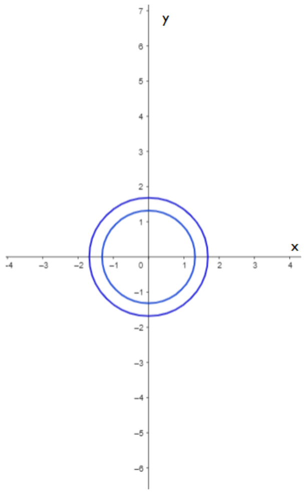
Dacă $z=\pm 4 \Longrightarrow x^2+y^2=3 \Longrightarrow$ un cerc cu raza $\sqrt{3}$.

Dacă $z=\pm 6 \Longrightarrow x^2+y^2=8 \Longrightarrow$ un cerc cu raza $\sqrt{8}$.

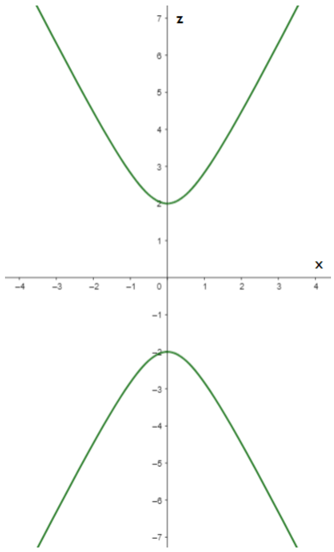
Intersecţia cu xOz: $y=0 \Longrightarrow -x^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ care este o hiperbolă cu axa transversală Oz, şi vârful $V_{1,2}(0,0,\pm 2)$.

Intersecţia cu yOz: $x=0 \Longrightarrow -y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ care este o hiperbolă cu axa transversală Oz, şi vârful $V_{1,2}(0,0,\pm 2)$.

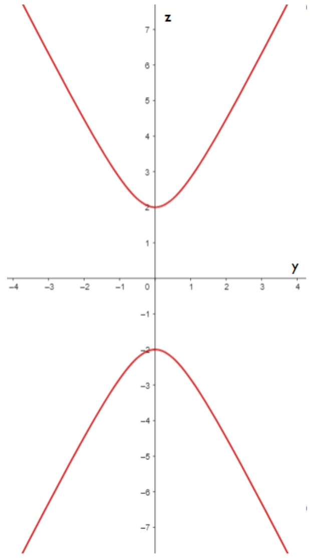
Intersecţiile sunt reprezentate în figurile de mai jos.



Intersecţiile cu planele $z = \pm 4$ şi $z = \pm 6$



Intersecţia cu xOz



Intersecţia cu yOz

Graficul hiperboloidului cu două pânze este reprezentat în figura de mai jos.

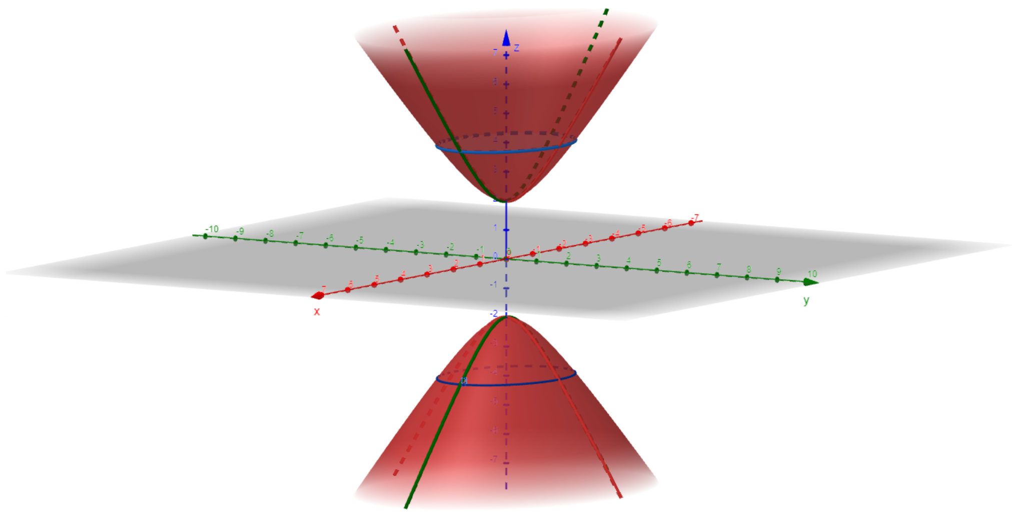
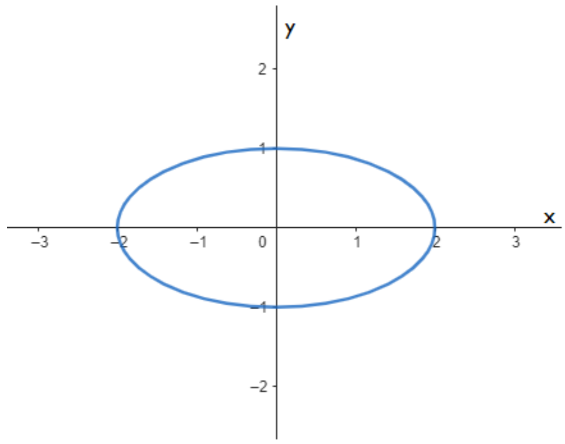


Figura 7.22: (S_3) - hiperboloid cu două pânze

d) (S_4) : $x^2 + 4y^2 = 4$ este un cilindru de-a lungul axei Oz, întrucât lipseşte variabila z din ecuaţia suprafeţei. Intersecţia cu planul xOy este $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, o elipsă cu axa mare pe Ox. Intersecţia este reprezentată în figura de mai jos.



Intersecţia cu xOy

Graficul cilindrului este ca în figura următoare.

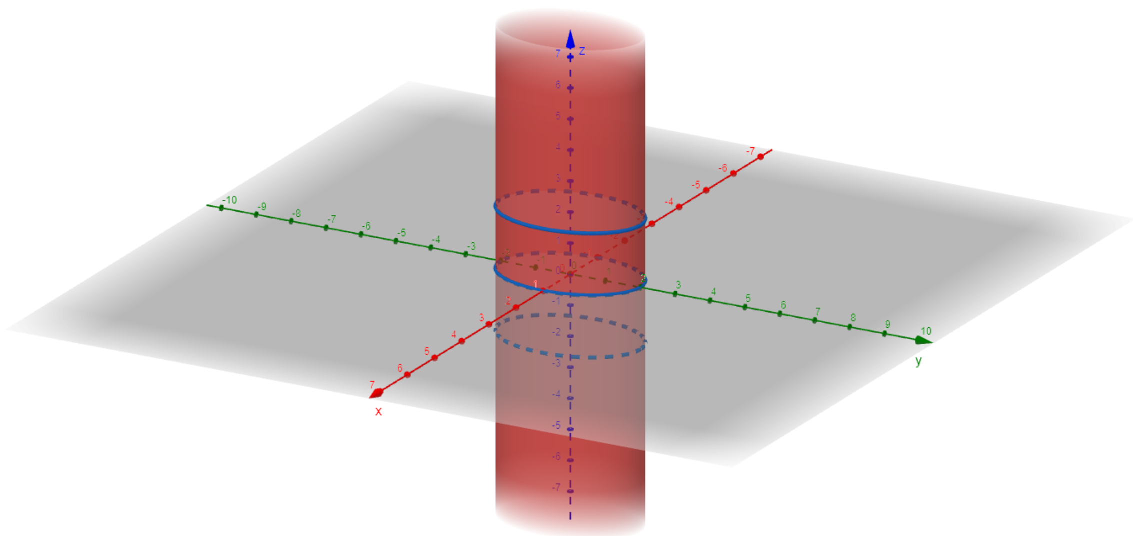


Figura 7.24: (S_4) - cilindru

e) $(S_5): z = x^2 + 4y^2 - 4 \Longleftrightarrow z + 4 = x^2 + 4y^2$ este un paraboloid eliptic de-a lungul axei Oz.

Intersecţia cu xOy: $z = 0 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ este o elipsă cu axa mare pe Ox.

Dacă $z = -4 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0 \Longrightarrow V(0, 0, -4)$ care este vârful paraboloidului eliptic.

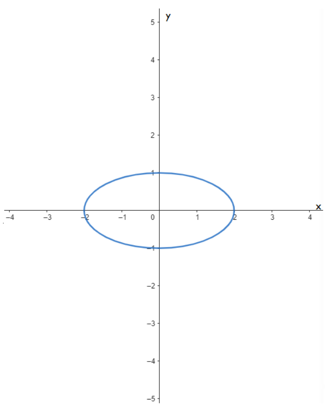
Dacă $z < -4 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 < 0 \Longrightarrow \varnothing$.

Dacă $z > -4 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = z + 4$, este ecuaţia unei elipse.

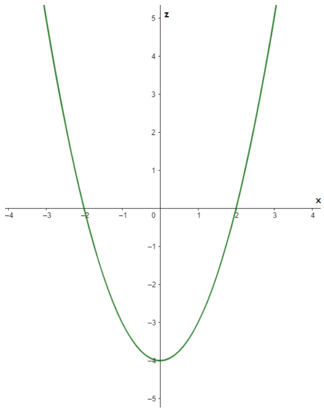
Intersecţia cu xOz: $y = 0 \Longrightarrow z + 4 = x^2$ este o parabolă de-a lungul direcţiei pozitive a axei Oz şi cu vârful în $V(0, 0, -4)$.

Intersecţia cu yOz: $x = 0 \Longrightarrow z + 4 = 4y^2$ este o parabolă de-a lungul direcţiei pozitive a axei Oz şi cu vârful în $V(0, 0, -4)$.

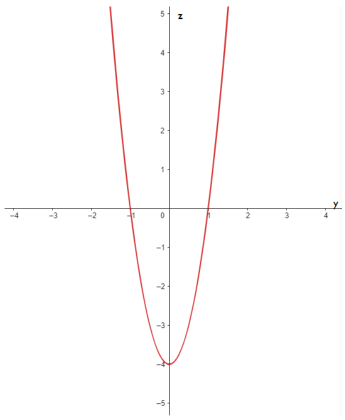
Intersecţiile sunt reprezentate în figurile de mai jos.



Intersecţia cu xOy



Intersecţia cu xOz



Intersecţia cu yOz

Graficul paraboloidului eliptic este reprezentat în figura următoare.

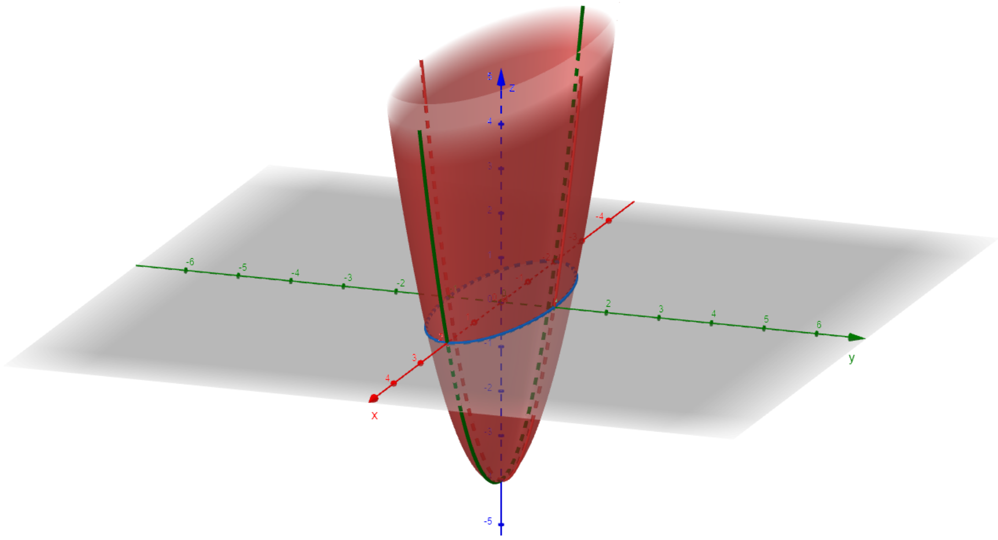


Figura 7.28: (S_5) - paraboloid eliptic

f) $(S_6) : 9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$. Împărţim ecuaţia prin 36 şi obţinem: $(S_6) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ care este ecuaţia unui hiperboloid cu o pânză de-a lungul axei Oy.

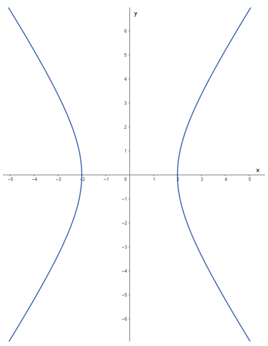
Intersecţia cu xOy: $z = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ este o hiperbolă cu axa transversală pe Ox şi vârful în $V_{1,2}(\pm 2, 0, 0)$.

Intersecţia cu xOz: $y = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, un cerc cu raza $r = 2$.

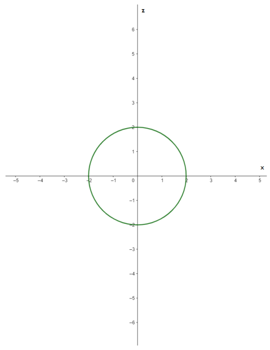
Dacă $y = \pm 6 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 5$ care este un cerc cu raza $r = 2\sqrt{5}$.

Intersecţia cu yOz: $x = 0 \Longrightarrow -\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ care este o hiperbolă cu axa transversală pe Oz şi vârful în $W_{1,2}(0, 0, \pm 2)$.

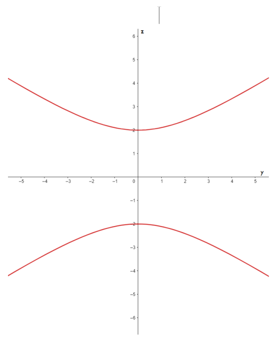
Intersecţiile sunt reprezentate în figurile următoare.



Intersecţia cu xOy



Intersecţia cu xOz



Intersecţia cu yOz

Graficul hiperboloidului cu o pânză este reprezentat în figura următoare.

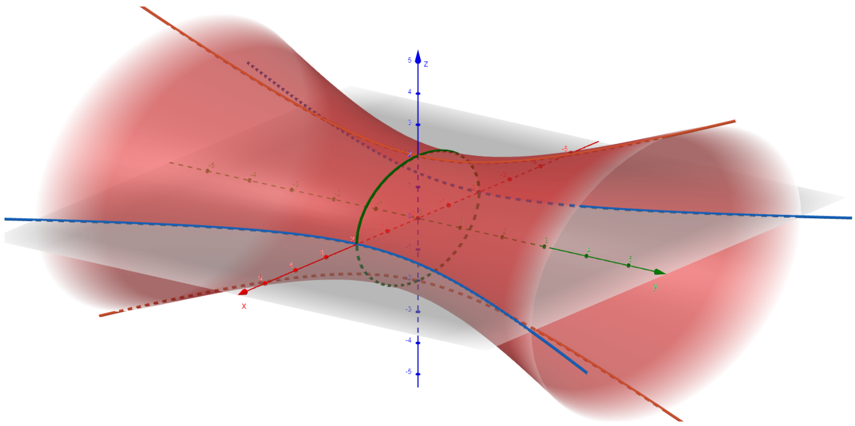


Figura 7.32: (S_6) - hiperboloid cu o pânză

g) $(S_7): \ x^2 - y^2 + 4z - 4 = 0$. Împărţim ecuaţia prin 4 şi obţinem:

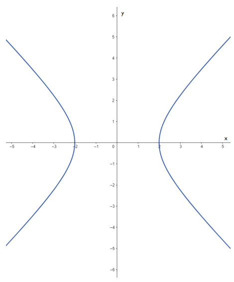
$(S_7): \ z - 1 = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}$ care este ecuaţia unui paraboloid hiperbolic.

Intersecţia cu xOy: $z = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ este o hiperbolă cu axa transversală pe Ox şi vârful în $V_{1,2}(\pm 2, 0, 0)$.

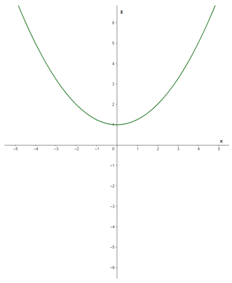
Intersecţia cu xOz: $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 4z - 4$, o parabolă de-a lungul direcţiei pozitive a axei Oz şi vârful în $W(0, 0, 1)$.

Intersecţia cu yOz: $x = 0 \Longrightarrow y^2 = -4z + 4$ o parabolă de-a lungul direcţiei negative a axei Oz şi vârful în $W(0, 0, 1)$.

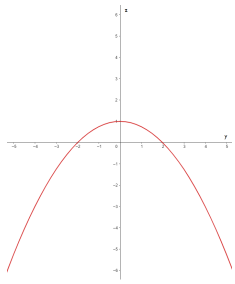
Intersecţiile sunt reprezentate în figurile de mai jos.



Intersecţia cu xOy



Intersecţia cu xOz



Intersecţia cu yOz

Graficul paraboloidului hiperbolic este reprezentat în figura de mai jos.

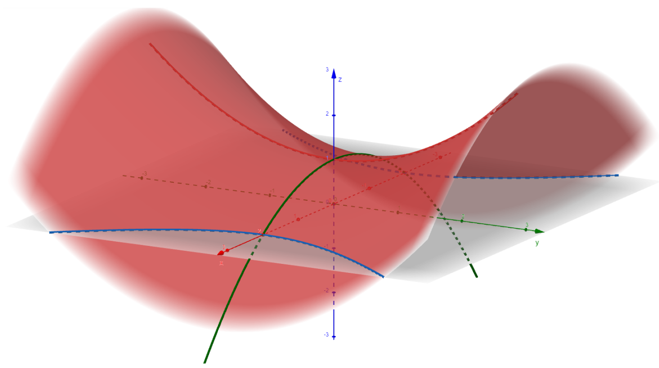


Figura 7.36: (S_7) - paraboloid hiperbolic

7.3 Probleme propuse

Problema 7.2. Determinaţi centrul şi raza cercului aflat la intersecţia sferei (S) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 6z + 1 = 0$ cu planul $(P) : x + 2y - z - 3 = 0$.

Problema 7.3. Determinaţi intersecţia dreptei $d : x - 3 = y - 1 = \dfrac{z-6}{3}$ cu hiperboloidul $(H) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} - 1 = 0$.

Problema 7.4. Determinaţi centrul şi raza sferei

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-x+3y-4z-1=0.$$

Problema 7.5. Fie sfera $(S): x^2+y^2+z^2=1$ şi $M(1,0,0)$ un punct care aparţine sferei (S). Determinaţi un punct $N \in (P)$, $(P): z=5$ astfel încât dreapta MN este tangentă sferei (S).

Problema 7.6. Determinaţi intersecţia elipsoidului $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{9}-1=0$ cu dreapta $d: x=y=z$. Scrieţi ecuaţia planului tangent la elipsoid în aceste puncte.

Problema 7.7. Determinaţi intersecţia hiperboloidului $(H): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}-1=0$ cu planele de coordonate şi identificaţi conicele obţinute.

Problema 7.8. Determinaţi ecuaţiile planelor tangente la suprafaţa

a) paraboloidului eliptic $(PE): \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$;

b) paraboloidului hiperbolic $(PH): x^2-\dfrac{y^2}{4}=3z$;

care sunt paralele cu planul $(P): x-3y+2z-1=0$.

Problema 7.9. Determinaţi ecuaţia sferei cu centrul în punctul $C(3,-5,-2)$ şi care este tangentă planului $(P): 2x-y-3z+11=0$.

Problema 7.10. Trasaţi graficul intersecţiilor cu planele de coordonate sau cu plane paralele cu acestea apoi desenaţi şi identificaţi fiecare dintre următoarele cuadrice:

a) $2x^2+y^2-3z^2=0$;

b) $x^2+y^2+4z^2+4y=0$;

c) $-x^2+y^2-2z^2=1$;

d) $2x^2+3y^2-z^2=1$;

e) $x^2+2y^2=1-z$;

f) $2x^2-y^2+3z^2=1$.

8

Generarea suprafeţelor

8.1 Suprafeţe cilindrice

Suprafaţa generată prin deplasarea unei drepte numite *generatoarea suprafeţei* având o direcţie fixă şi care intersectează o curbă fixă numită *directoarea suprafeţei* se numeşte **suprafaţă cilindrică**.

Fie generatoarea dreapta $d : \begin{cases} (P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$,

iar curba directoare $(\Gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Familia de dreapte paralele cu dreapta d are ecuaţiile $g : \begin{cases} (P_1) = \alpha \\ (P_2) = \beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dreptele g intersectează curba directoare dacă $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Ecuaţia suprafeţei cilindrice este

$$(S) : \varphi((P_1), (P_2)) = 0.$$

8.2 Suprafeţe conice

O suprafaţă care este reuniunea tuturor dreptelor ce trec printr-un punct fix numit *vârf* şi intersectează o curbă fixă numită *directoare* care nu conţine vârful, este numită **suprafaţă conică**. Fiecare dreaptă se numeşte *generatoare* pentru suprafaţa conică.

Fie V vârful dat ca intersecţie de plane

$$\begin{cases} (P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ (P_3) : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}.$$

Generatoarele sunt $g : \begin{cases} (P_1) = \alpha(P_2) \\ (P_2) = \beta(P_3) \end{cases}.$

Condiţia de compatibilitate este $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, prin urmare ecuaţia suprafeţei conice este

$$(S) : \varphi\left(\frac{(P_1)}{(P_2)}, \frac{(P_2)}{(P_3)}\right) = 0.$$

Observaţie 8.1. *Dacă vârful este dat prin coordonatele sale, $V(x_0, y_0, z_0)$, şi curba directoare este $(\Gamma) : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ atunci ecuaţiile generatoarei sunt $g : \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

Generatoarea intersectează curba (Γ) dacă $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, deci ecuaţia suprafeţei este

$$(S) : \varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

8.3 Suprafeţe conoide

O **suprafaţă conoidă** este o suprafaţă generată a căror generatoare îndeplinesc condiţiile:

- Toate generatoarele sunt paralele cu un plan numit *plan director*.
- Toate generatoarele intersectează o dreaptă fixă, *axa suprafeţei*.
- Generatoarele intersectează o curbă.

Conoidul este un conoid drept dacă axa sa este perpendiculară pe planul său director. Prin urmare toate generatoarele sunt perpendiculare pe axă.

Fie $(P) : ax + by + cz + d = 0$ planul director şi axa

$$d : \begin{cases} (P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Generatoarele au ecuaţiile:

$$g : \begin{cases} (P) = \alpha \\ (P_1) = \beta(P_2). \end{cases}$$

Condiţia de compatibilitate este $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, iar ecuaţia suprafeţei conoide este

$$(S) : \varphi\left((P), \frac{(P_1)}{(P_2)}\right) = 0.$$

8.4 Suprafeţe de rotaţie

O **suprafaţă de rotaţie** este o suprafaţă creată prin rotirea unei curbe numită *generatoare* în jurul unei drepte numite *axă de rotaţie*.

- Secţiunile unei suprafeţe de rotaţie perpendiculare pe axă sunt cercuri paralele sau denumite pe scurt paralele.

- Secţiunile care conţin axa se numesc secţiuni meridiane, sau pe scurt, meridiane.

Fie $(\Gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ generatoarea,

iar axa de rotaţie dreapta $d : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

O suprafaţă de rotaţie poate fi generată de asemenea şi de cercul $\mathcal{C}$ care se mişcă întotdeauna perpendicular pe o dreaptă fixă d cu centrul pe o dreaptă fixă şi care se măreşte sau se micşorează astfel încât în permanenţă să intersecteze curba (Γ) care întotdeauna se află în acelaşi plan cu dreapta fixă.

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha^2 \\ lx + my + nz = \beta. \end{cases}$$

Cercul $\mathcal{C}$ intersectează curba (Γ) dacă $\varphi(\alpha^2, \beta) = 0$.

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$$(S) : \varphi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, lx + my + nz) = 0.$$

8.5 Probleme rezolvate

Problema 8.1. Determinaţi ecuaţia suprafeţei cilindrice care are ca generatoare dreptele paralele cu direcţia $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ şi ca şi curbă directoare curba $(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Rezolvare:

Considerăm dreapta ca având vectorul director $\overrightarrow{v}$:

$$d : \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \iff \begin{cases} 2x - 5z = \lambda \\ 2y - 3z = \mu \end{cases}.$$

$$(\Gamma)\cap d \iff \begin{cases} 2x-5z=\lambda \\ 2y-3z=\mu \\ x^2+y^2-2=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\dfrac{\mu}{2} \\ z=0 \\ \dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\mu^2}{4}-2=0 \end{cases} \iff \lambda^2+\mu^2-8=0.$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice este:

$$(2x-5z)^2+(2y-3z)^2-8=0.$$

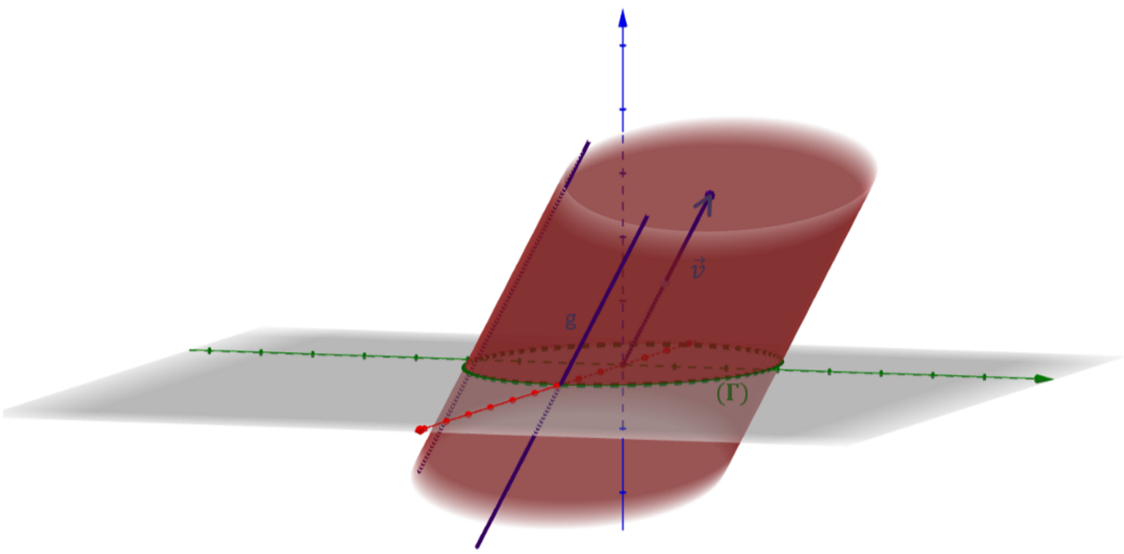


Figura 8.1: Suprafaţă cilindrică

Problema 8.2. Scrieţi ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în $(1,1,1)$ şi având curba directoare $(\Gamma):\begin{cases} y^2+z^2-1=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$

Rezolvare:

Dacă vârful are coordonatele $V(1,1,1)$ putem scrie

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow g : \begin{cases} x - 1 = \lambda(z-1) \\ y - 1 = \mu(z-1) \end{cases}.$$

$$g \cap (\Gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \lambda(z-1) \\ y - 1 = \mu(z-1) \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda(z-1) \\ y = 1 + \mu(z-1) \\ x + y - 2 = (z-1)(\lambda+\mu) \\ x + y = -z \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(z-1) \\ y = 1 + \mu(z-1) \\ (z-1)(\lambda+\mu+1) = -3 \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda(z-1) \\ y = 1 + \mu(z-1) \\ z = 1 - \dfrac{3}{\lambda+\mu+1} \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 + \mu(1 - \dfrac{3}{\lambda+\mu+1} - 1) \\ z = 1 - \dfrac{3}{\lambda+\mu+1} \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \mu\dfrac{3}{\lambda+\mu+1} \\ z = 1 - \dfrac{3}{\lambda+\mu+1} \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(1 - \mu\frac{3}{\lambda+\mu+1})^2 + (1 - \frac{3}{\lambda+\mu+1})^2 - 1 = 0.$$

Rescriem ultima condiţie astfel:

$$\left(\frac{\lambda+\mu+1-3\mu}{\lambda+\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda+\mu+1-3}{\lambda+\mu+1}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda - 2\mu + 1)^2 + (\lambda + \mu - 2)^2 = (\lambda + \mu + 1)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\mu^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda - 10\mu + 4 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda - 2\mu)^2 - 4\lambda - 10\mu + 4 = 0.$$

Ştim că $\begin{cases} \lambda = \dfrac{x-1}{z-1} \\ \mu = \dfrac{y-1}{z-1} \end{cases}$, prin urmare ecuaţia suprafeţei conice este:

$$(S) : \left(\frac{x-1}{z-1} - 2\frac{y-1}{z-1}\right)^2 - 4\frac{x-1}{z-1} - 10\frac{y-1}{z-1} + 4 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(S) : (x-2y+1)^2 - 4(x-1)(z-1) - 10(y-1)(z-1) + 4(z-1)^2 = 0$$

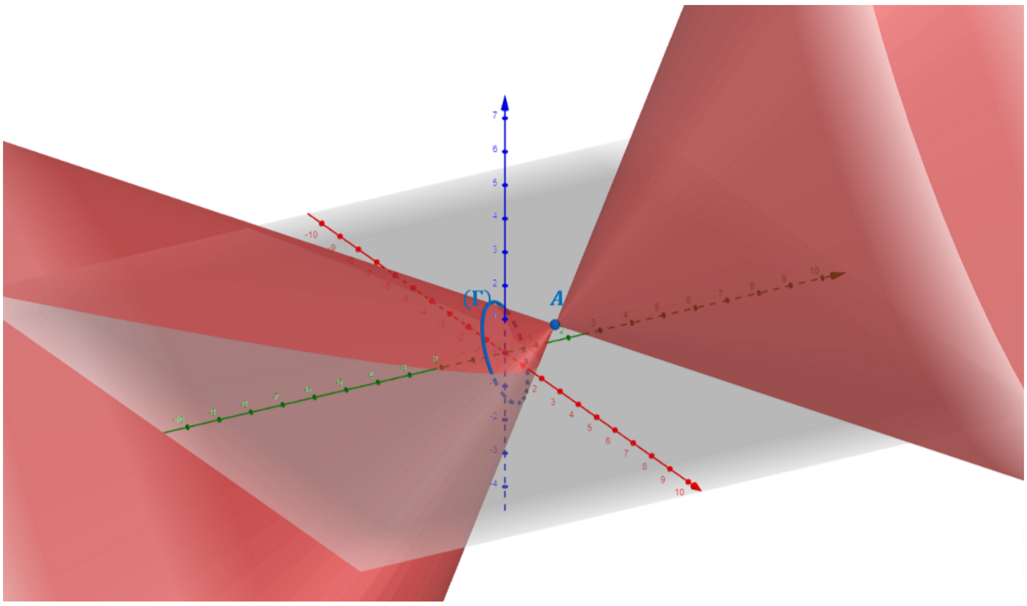


Figura 8.2: Suprafaţă conică

Problema 8.3. Scrieţi ecuaţia suprafeţei generate de dreapta ce trece prin $A(1,0,0)$ astfel încât distanţa dintre dreaptă şi punctul $B(1,2,3)$ să fie 2.

Rezolvare:

Avem o suprafaţă conică cu vârful în $A(1,0,0)$. Dacă distanţa este constantă, atunci dreptele sunt tangente la sfera centrată în B cu raza 2 iar generatoarele suprafeţei sunt tangentele la sferă.

Ecuaţia sferei este $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Punctul $A(1,0,0)$ poate fi scris ca intersecţia planelor

$$A : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies g : \begin{cases} x - 1 = \lambda z \\ y = \mu z. \end{cases}$$

$$g \cap (\Gamma) \iff \begin{cases} x - 1 = \lambda z \\ y = \mu z \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4 \end{cases} \iff$$

$\lambda^2 z^2 + (\mu z - 2)^2 + (z-3)^2 = 4 \iff z^2(\lambda^2 + \mu^2 + 1) + z(-4\mu - 6) + 9 = 0.$

g sunt tangente sferei dacă ecuaţia are soluţie unică, adică

$\Delta = 16\mu^2 + 48\mu + 36 - 36(\lambda^2 + \mu^2 + 1) = 0 \iff 9\lambda^2 + 5\mu^2 - 12\mu = 0.$

Ecuaţia suprafeţi este:

$(S) : 9\left(\dfrac{x-1}{z}\right)^2 + 5\dfrac{y^2}{z^2} - 12\dfrac{y}{z} = 0 \iff$

$(S) : 9(x-1)^2 + 5y^2 - 12yz = 0.$

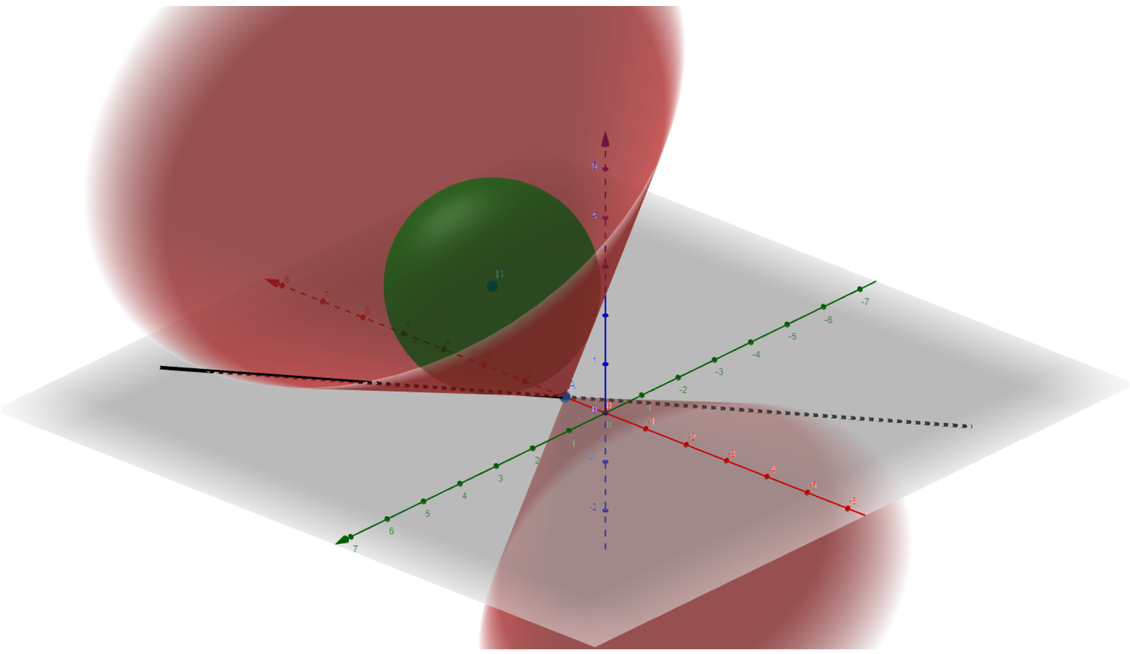


Figura 8.3: Suprafaţă conică

Problema 8.4. Scrieţi ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul xOy, intersectează dreapta $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ şi hiperbola

$$(\Gamma) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Rezolvare: Ecuaţia planul xOy este $z = 0$.

Generatoarele au ecuaţiile $g : \begin{cases} z = \lambda \\ y = \mu(x-2) \end{cases}$.

$$g \cap (\Gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ y = \mu(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ x = 2 + \dfrac{2}{\mu} \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\left(2 + \frac{2}{\mu}\right)^2}{4} - \frac{\lambda^2}{9} = 1 \Longleftrightarrow 9(1 + \frac{1}{\mu})^2 - \lambda^2 = 9.$$

Ecuaţia conoidului este:

$$(S) : 9\left(1 + \frac{x-2}{y}\right)^2 - z^2 = 9 \Longleftrightarrow$$

$$(S) : 9(x + y - 2)^2 - y^2(z^2 + 9) = 0.$$

Problema 8.5. Determinaţi ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea curbei $(\Gamma) : \begin{cases} z = \sqrt{x} \\ y = 0 \end{cases}$ în jurul axei Ox iar apoi în jurul axei Oz. Faceţi şi graficele suprafeţelor obţinute în ficeare caz.

Rezolvare:

Când rotim parabola în jurul axei Ox cercul generator este $(G) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x = \beta \end{cases}$.

$$(G) \cap (\Gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x = \beta \\ z = \sqrt{x} \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \beta^2 + \beta = \alpha^2.$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$(S) : x^2 + x = x^2 + y^2 + z^2 \Longleftrightarrow$

$(S) : y^2 + z^2 = x$ care este un paraboloid eliptic.

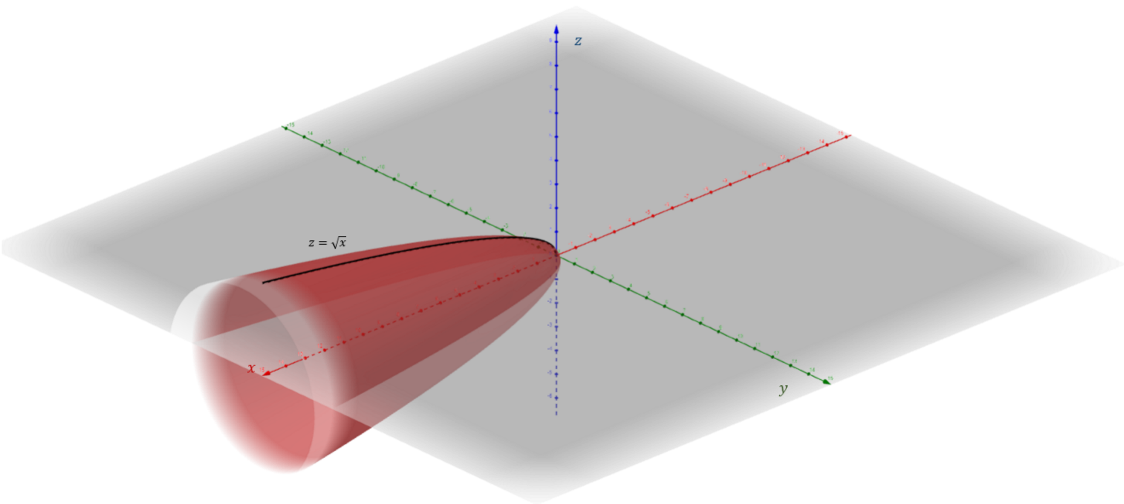


Figure 8.4: Parabola rotită în jurul axei Ox

Când rotim parabola în jurul axei Oz cercul generator este

$$(G) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ z = \beta \end{cases}.$$

$$(G) \cap (\Gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ z = \beta \\ z = \sqrt{x} \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \beta^4 + \beta^2 = \alpha^2.$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$(S) : z^4 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Longleftrightarrow$

$(S) : z^4 = x^2 + y^2.$

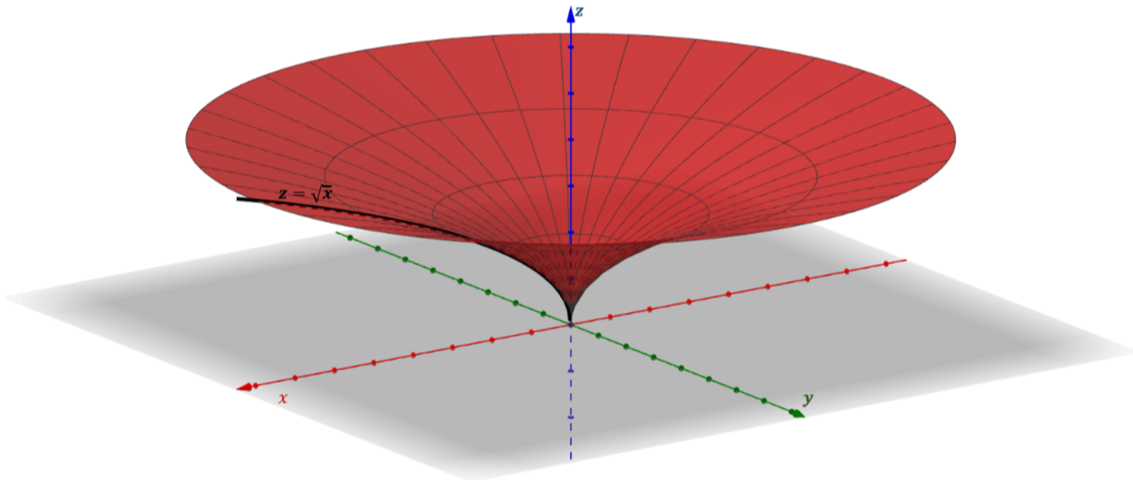


Figure 8.5: Parabola rotită în jurul axei Oz

8.6 Probleme propuse

Problema 8.6. Determinaţi ecuaţia suprafeţei cilindrice având ca generatoare dreapta $d : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$ şi ca şi curbă directoare curba $(\Gamma) : \begin{cases} xy = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

Problema 8.7. Determinaţi ecuaţia suprafeţei cilindrice având generatoarele paralele cu direcţia $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ şi curba directoare $(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + 4z - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Problema 8.8. Curba $(\Gamma) : \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$ este directoarea suprafeţei cilindrice (S). Generatoarele sale sunt perpendiculare pe planul curbei (Γ). Determinaţi ecuaţia suprafeţei (S).

Problema 8.9. Determinaţi ecuaţia suprafeţei conice având vârful în origine $O(0,0,0)$ şi directoarea $(\Gamma):\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$.

Problema 8.10. Scrieţi ecuaţia suprafeţei conice având vârful în $(1,1,1)$ iar ca directoare curba $(\Gamma):\begin{cases} y^2+z^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

Problema 8.11. Determinaţi ecuaţia conoidului generat de dreapta ce trece prin dreapta $d:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, este paralelă cu planul xOy şi intersectează hiperbola $(H):\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}-1=0 \\ y=2 \end{cases}$.

Problema 8.12. Determinaţi ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care intersectează dreapta $d: x=y=z$, curba $(\Gamma):\begin{cases} x^4+y^4-16=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi este paralelă cu planul $(P): x+y+z-1=0$.

Problema 8.13. Fie curbele din spaţiu:

a) $(\Gamma):\begin{cases} y^2-6z=0 \\ x=0 \end{cases}$;

b) $(\Gamma):\begin{cases} y^2+z^2=9 \\ x=0 \end{cases}$;

c) $(\Gamma):\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$;

d) $(\Gamma): \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Determinaţi ecuaţia generată prin rotirea curbei (Γ) în jurul axei Oz şi reprezentaţi grafic suprafaţa de rotaţie obţinută.

9

Curbe plane

O curbă plană este o curbă care se află într-un singur plan.

9.1 Reprezentarea analitică a unei curbe plane

O curbă plană poate fi reprezentată prin:

- ecuaţia **explicită** $y = y(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$.
- ecuaţia **implicită** $F(x, y) = 0$.
- ecuaţiile **parametrice** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.
- ecuaţia **vectorială** $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Toate conicele prezentate în capitolul 6 sunt curbe plane.

Exemplu 9.1. *Elipsa* $(E) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *este dată în forma implicită.*

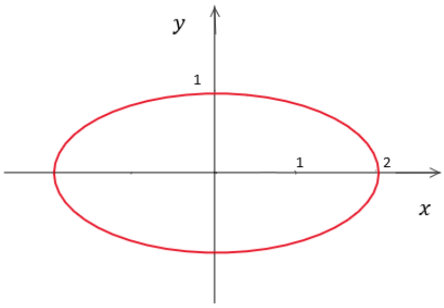


Figura 9.1: Elipsa $(E) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Ecuaţiile explicite sunt $y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, $x \in [-2, 2]$.

Ecuaţiile parametrice sunt $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ecuaţia vectorială este $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exemple de curbe plane

1. **Astroida** sau **hipocicloida** este locul geometric descris de un punct ce se află pe un cerc de rază $\frac{a}{4}$ care se roteşte în interiorul unui cerc fix de rază a.

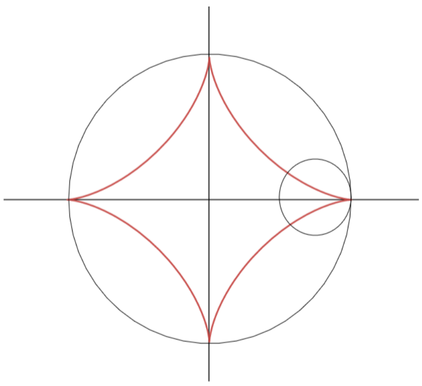


Figura 9.2: Astroida

Ecuaţia implicită este $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Ecuaţiile parametrice ale astroidei sunt $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

2. **Cicloida** este locul geometric al unui punct pe cercul de rază a ce se roteşte de-a lungul unei drepte.

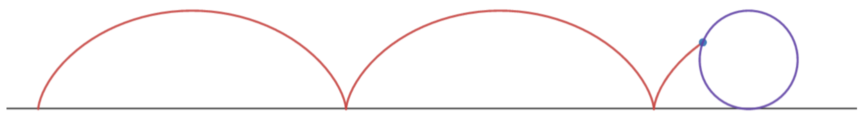


Figura 9.3: Cicloida

Ecuaţiile parametrice ale cicloidei sunt $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

3. **Cardioida** este curbă plană formată de urma lăsată de un punct de pe un cerc ce se roteşte de-a lungul unui cerc fix cu aceeaşi rază.

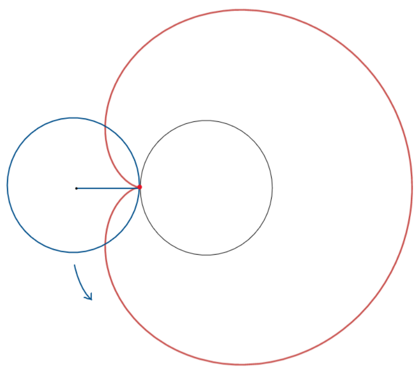


Figura 9.4: Cardioida

Ecuaţia implicită a cardioidei este $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Ecuaţiile parametrice ale cardioidei sunt $\begin{cases} x = 2a(1 - \cos t)\cos t \\ y = 2a(1 - \cos t)\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

9.2 Tangenta la o curbă plană

În cele ce urmează, este implicat calcul diferenţial, deci va trebui să punem câteva condiţii asupra funcţiilor implicate în reprezentarea analitică a curbelor cu privire la:

- continuitatea funcţiilor;
- existenţa şi continuitatea derivatelor parţiale de un anumit ordin;
- condiţii de regularitate.

Dacă curba plană este în formă implicită, $(\Gamma) : F(x, y) = 0$, $M(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ este un **punct regulat** dacă $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ sau $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Orice alt punct se numeşte punct **singular**.

Pentru curba plană dată în forma parametrică, $(\Gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $x(t)$ şi $y(t)$ trebuie să admită derivate continue pe $[a, b]$ şi $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$.

Definiţie 9.2. ***Dreapta tangentă*** *la o curbă regulată* (Γ) *în punctul* $M_0(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ *se defineşte ca limita secantei* MM_0 *când punctul* M *tinde spre* M_0 *pe curba* (Γ).

Dreapta ce trece prin M_0 *şi este perpendiculară pe tangentă se numeşte* ***normala*** *la curba* (Γ) *în punctul* M_0.

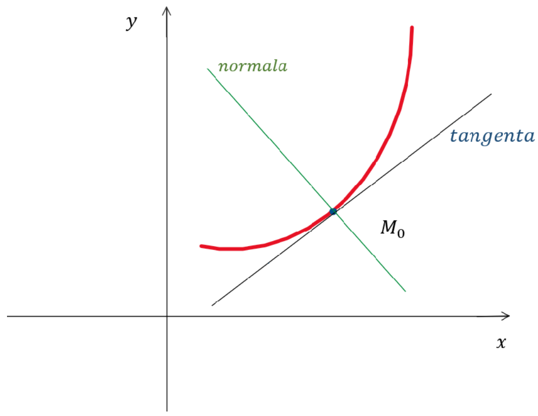


Figura 9.5: Tangenta şi normala la curbă în punctul M_0

Observaţie 9.3. *Se cunoaşte din geometria analitică în plan că dacă două drepte sunt perpendiculare produsul pantelor lor este* -1*. Deci, dacă ecuaţia tangentei în punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$tg : y - y_0 = m(x - x_0),\ \ m \neq 0$$

ecuaţia normalei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

În cele ce urmează vom scrie ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei la o curbă regulată (Γ) în punctul M_0 dacă curba este dată în una din următoarele expresii analitice.

1. Dacă curba este dată în formă **explicită**, $(\Gamma) : y = f(x)$.

   - $tg : y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
   - $n : y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0),\ \ y'(x_0) \neq 0$

2. Dacă curba este dată în forma **parametrică** $(\Gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in I.$

- $tg : \dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$ sau
- $n : y - y(t_0) = -\dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x(t_0))$

unde t_0 este astfel încât $x(t_0) = x_0$ şi $y(t_0) = y_0$.

3. Dacă curba este dată în formă **implicită**, $(\Gamma) : F(x, y) = 0$.

- $tg : y - y_0 = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0)$
- $n : y - y_0 = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}(x - x_0)$

9.3 Lungimea unei curbe plane

Fie $(\Gamma) : \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$, $t \in I$, o curbă regulată, şi $A(x(a), y(a))$ şi $B(x(b), y(b))$ două puncte pe curba (Γ).

Lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ notată cu $L(\overset{\frown}{AB})$ este

$$L(\overset{\frown}{AB}) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\|dt.$$

Elementul de arc este definit de $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

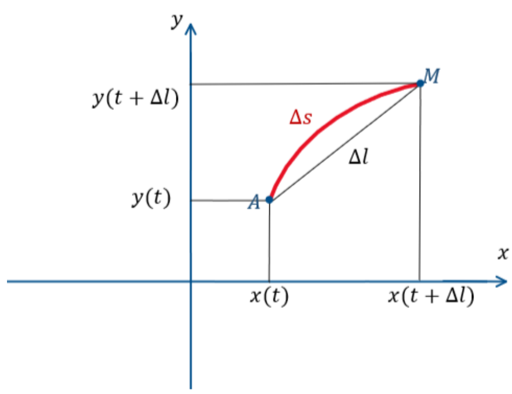


Figura 9.6: Elementul de arc

Observaţie 9.4. • *Dacă curba este în formă explicită* $(\Gamma) : y = f(x)$, *atunci elementul de arc este*

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

• *Câteodată este util să folosim* s *ca* ***parametru natural*** *şi astfel vom obţine ceea ce se numeşte parametrizarea naturală a curbei* $\overrightarrow{r}(s) = x(s)\overrightarrow{i} + y(s)\overrightarrow{j}$, *astfel încât lungimea vectorului tangentei este 1,* $\|\overrightarrow{r}'(s)\| = 1$, *deci se obţine versorul tangentei.*

Lungimea curbei (Γ) este $L(\Gamma) = \displaystyle\int_\Gamma ds$.

9.4 Curbura unei curbe plane

Curbura la un punct al curbei caracterizează viteza de rotaţie a tangentei la curbă în acest punct (cât de "abrupt" se întoarce curba).

Curbura, K, la o curbă plană se defineşte ca raportul dintre unghiul de rotaţie al tangentei (unghi de contongenţă) $\Delta\alpha$ şi lungimea arcului $\Delta s = MM_1$.

Definiţie 9.5. ***Curbura medie*** *a arcului* MM_1 *este definită de:*

$$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Curbura K într-un punct al curbei este definită de

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

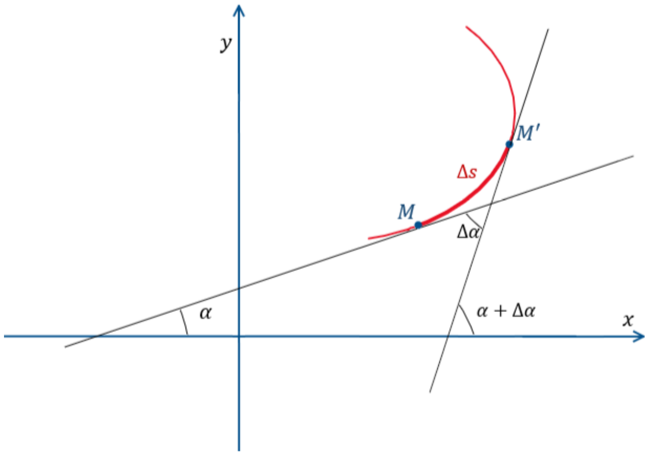


Figura 9.7: Curbura

1. Curbura curbei $(\Gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, în punctul $M(x(t_0), y(t_0))$ este

$$K = \frac{y''(t_0)x'(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}{(x'^2(t_0) + y'^2(t_0))^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Curbura curbei $(\Gamma): F(x,y) = 0$, în punctul $M(x_0, y_0)$ este

$$K = \left.\frac{F_y'^2 F_{xx}'' - 2F_x'F_y'F_{xy}'' + F_x'^2 F_{yy}''}{(F_x'^2 + F_y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

3. Curbura curbei $(\Gamma): y = f(x)$ în punctul $M(x_0, f(x_0))$ este

$$K = \frac{y''(x_0)}{(1 + y'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}.$$

Observaţie 9.6. *Din definiţie avem că curbura într-un un punct al curbei caracterizează viteza de rotaţie a tangentei la curbă în acest punct.*

Definiţie 9.7. *Valoarea inversă a valorii absolute a curburii K într-un punct la curbă este numită* ***raza de curbură****, $R = \dfrac{1}{|K|}$.*

Observaţie 9.8.

- *Raza de curbură este raza unui arc de cerc care aproximează cel mai bine curba în acel punct.*

- ***Cercul osculator*** *este cercul cu raza egală cu raza de curbură şi centrul aflat pe normala interioară. Acest cerc aproximează cel mai bine curba plană în punctul dat.*

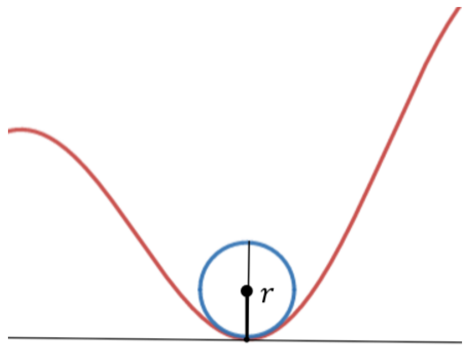


Figura 9.8: Cercul osculator

- *Ecuaţia cercului osculator este:*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

unde:

◇ $r = \dfrac{1}{|K|} = \dfrac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)|}$.

◇ $h = x(t) - y'(t)\dfrac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}$.

◇ $k = y(t) + x'(t)\dfrac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}$.

Observaţie 9.9.

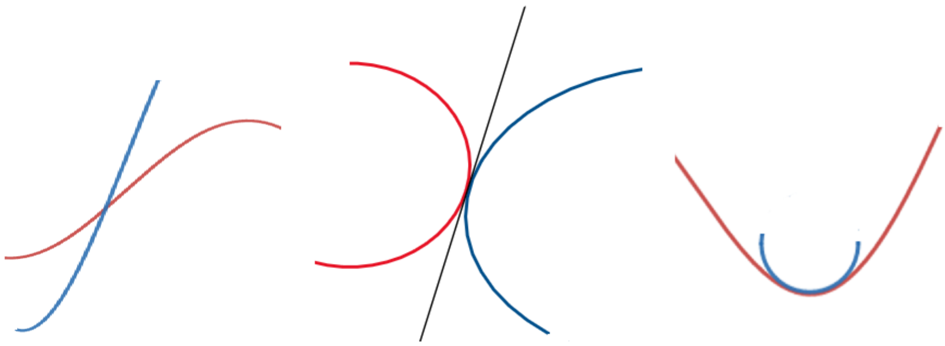
1. *Curbura unui cerc cu raza* r *este* $|K| = \dfrac{1}{r}$.

2. *Curbura unei drepte este* 0.

9.5 Ordinul de contact al curbelor plane

Fie $(\Gamma_1) : y = y_1(x)$ şi $(\Gamma_2) : y = y_2(x)$ două curbe plane.
Curbele au puncte comune (se intersectează) dacă ecuaţia $y_1(x) = y_2(x)$ are soluţii.
Dacă x_0 este o soluţie a ecuaţiei de mai sus, atunci x_0 este:

- **punct de contact de ordin 0** dacă curbele se intersectează (dar nu sunt tangente).
- **punct de contact de ordin 1** dacă curbele sunt tangente.
- **punct de contact de ordin 2** dacă curburile curbelor sunt egale în punctul de intersecţie. Astfel de curbe se numesc curbe osculatoare.



(a) (b) (c)

Figura 9.9: (a) punct de contact de ordin 0 (b) punct de contact de ordin 1 (c) punct de contact de ordin 2

Definiţie 9.10. *Curbele* $(\Gamma_1) : y = y_1(x)$ *şi* $(\Gamma_2) : y = y_2(x)$ *au un* ***contact de ordin k*** *în* $M(x_0, y_0)$ *dacă*

$y_1(x_0) = y_2(x_0),$

$y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$

$y_1''(x_0) = y_2''(x_0),$

$$\begin{aligned}
&\ldots\\
&y_1^{(k)}(x_0) = y_2^{(k)}(x_0),\\
&y_1^{(k+1)}(x_0) \neq y_2^{(k+1)}(x_0).
\end{aligned}$$

Observaţie 9.11. *Cercul osculator al curbei* (Γ) *în* M_0 *este un cerc care are un punct de contact de ordin* 2 *cu curba* (Γ) *în* M_0.

9.6 Probleme rezolvate

Problema 9.1. Determinaţi elementul de arc, lungimea arcului de curbă şi parametrul natural al cicloidei $(\Gamma) : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

Rezolvare:

Derivatele celor două componente ale curbei sunt: $\begin{cases} x' = a(1 - \cos t) \\ y' = a \sin t \end{cases}.$

Calculăm elementul de arc, ds.

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t dt}\\
&= \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}dt\\
&= a\sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}dt\\
&= 2a|\sin \frac{t}{2}|dt
\end{aligned}$$

Aplicăm formulele trigonometrice $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ şi $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$.

Deoarece $t \in [0, 2\pi] \Longrightarrow \dfrac{t}{2} \in [0, \pi] \Longrightarrow \sin \dfrac{t}{2} \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$.

$L(\Gamma) = \displaystyle\int_{(\Gamma)} ds = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$

Parametrul natural este

$$s = \int_0^t 2a \sin \frac{u}{2} du = -2a \cos \frac{t}{2} + 2a = 2a\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Deci, $s = 2a\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right) \Longrightarrow \cos\dfrac{t}{2} = 1 - \dfrac{s}{2a} \Longrightarrow t = 2\arccos\left(1 - \dfrac{s}{2a}\right)$.
Parametrizarea naturală a cicloidei este

$$\begin{cases} x = a\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{2a}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{2a}\right)\right)\right) \\ y = a\left(1 - \cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{2a}\right)\right)\right). \end{cases}.$$

Problema 9.2. Scrieţi ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei la curba

$$(\Gamma): x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0 = 0$$

în punctul de intersecţie cu axa Ox.

Rezolvare:

$(\Gamma) \cap Ox = A(a, 0) \Longrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1, 0)$.

Curba este dată în formă implicită, deci, panta tangentei $m_{tg} = -\dfrac{F'_x(1,0)}{F'_y(1,0)}$, unde $F(x, y) = x^3 - xy^2 + 2x + y - 3$.

$F'_x(x, y) = 3x^2 - y^2 + 2 \Longrightarrow F'_x(1, 0) = 5$.

$F'_y(x, y) = -2xy + 1 \Longrightarrow F'_y(1, 0) = 1$.

$y'(1) = -\dfrac{5}{1} = -5 = m_{tg}$.

Ecuaţia tangentei în punctul A este:

$tg : (y - 0) = -5(x - 1) \Longleftrightarrow$

$tg : 5x + y - 5 = 0$.

Panta normalei este $m_n = -\dfrac{1}{m_{tg}} = \dfrac{1}{5}$. Ecuaţia normalei este:

$n : (y - 0) = \dfrac{1}{5}(x - 1) \Longleftrightarrow$

$n : -x + 5y + 1 = 0$.

Problema 9.3. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei la curba plană

$$(\Gamma): \begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t^3 + 3t^2 - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

în punctul obţinut pentru $t = -1$.

Rezolvare:

Curba este dată în formă parametrică, deci, panta tangentei este $m_{tg} = \dfrac{y'(-1)}{x'(-1)}$.

Punctul corespunzător valorii $t = -1$ este $A\left(x(-1), y(-1)\right) \Longrightarrow A(-2, -2)$.

$x'(t) = 2t + 1 \Longrightarrow x'(-1) = -1$.

$y'(t) = 3t^2 + 6t \Longrightarrow y'(-1) = -3$.

Panta tangentei este $m_{tg} = 3$ în timp ce panta normalei este $m_n = -\dfrac{1}{3}$.

Ecuaţia tangentei în punctul A este:

$tg : (y - (-2)) = 3(x - (-2)) \Longleftrightarrow$

$tg : 3x - y + 4 = 0$.

Ecuaţia normalei este:

$n : (y - (-2)) = -\dfrac{1}{3}(x - (-2)) \Longleftrightarrow$

$n : x + 3y + 8 = 0$.

Problema 9.4. Scrieţi ecuaţia tangentei la curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

care este paralelă cu dreapta $d : 2x - y + 3 = 0$.

Rezolvare:

Fie $M(x_0, y_0)$ punctul de pe curba plană (Γ) pentru care tangenta la acest punct este paralelă cu dreapta d, $M(t_0^2 - 1, t_0^3 + 1)$.

Panta tangentei este $m_{tg} = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

$x'(t) = 2t$, $y'(t) = 3t^2$, deci $m_{tg} = \dfrac{3t_0^2}{2t_0} = \dfrac{3}{2}t_0$.

$tg \parallel d \Longleftrightarrow m_{tg} = m_d \Longrightarrow \dfrac{3}{2}t_0 = 2 \Longrightarrow t_0 = \dfrac{4}{3}$.

$x\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{7}{9}$, $y\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{91}{27}$.

Ecuaţia tangentei cerute este:

$$tg : y - \frac{91}{27} = 2\left(x - \frac{7}{9}\right) \Longleftrightarrow$$
$$tg : 2x - y + \frac{49}{27} = 0.$$

Problema 9.5. Determinaţi curbura şi raza de curbură pentru curba (Γ) în punctul specificat.

1. $(\Gamma) : \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ în punctul $A(t = \pi)$.

2. $(\Gamma) : y = x^4 - 4x^3 - x^2$ în punctul $O(0, 0)$.

Rezolvare:

1. $\begin{cases} x'(t) = 2 - 2\cos t \\ y'(t) = 2\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(\pi) = 4 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}.$

$\begin{cases} x''(t) = 2\sin t \\ y''(t) = 2\cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x''(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = -2 \end{cases}.$

$K = \dfrac{x'(\pi)y''(\pi) - x''(\pi)y'(\pi)}{(x'(\pi)^2 + y'(\pi)^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4 \cdot (-2) - 0 \cdot 0}{(4^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-8}{4^3} = -\dfrac{1}{8}.$

$R = \dfrac{1}{|K|} = 8.$

2. Întrucât curba este în formă explicită, aplicăm formula curburii $K = \dfrac{y''(0)}{(1 + y'(0)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$y'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 2x \Longrightarrow y'(0) = 0.$

$y''(x) = 12x^2 - 24x - 2 \Longrightarrow y''(0) = -2.$

Curbura este $K = \dfrac{-2}{1} = -2 \Longrightarrow$ raza de curbură este $R = \dfrac{1}{2}$.

Problema 9.6. Determinaţi ordinul de contact pentru curbele

$$(\Gamma_1) : y_1(x) = e^x + x - 1$$

şi

$$(\Gamma_2) : y_2(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^4$$

în punctul $x = 0$.

Rezolvare:

Calculăm derivatele funcţiilor y_1 şi y_2 în punctul corespunzător valorii $x = 0$.

$$\begin{array}{ll}
y_1(0) = 0 & y_2(0) = 0 \\
y_1'(x) = e^x + 1 \Longrightarrow y_1'(0) = 2 & y_2'(x) = 2+x+\frac{1}{2}x^2+4x^3 \Longrightarrow y_2'(0) = 2 \\
y_1''(x) = e^x \Longrightarrow y_1'(0) = 1 & y_2''(x) = 1 + x + 12x^2 \Longrightarrow y_2''(0) = 1 \\
y_1'''(x) = e^x \Longrightarrow y_1'''(0) = 1 & y_2'''(x) = 1 + 24x \Longrightarrow y_2'''(0) = 1 \\
y_1^{(4)}(x) = e^x \Longrightarrow y_1^{(4)}(0) = 1 & y_2^{(4)}(x) = 24 \Longrightarrow y_2^{(4)}(0) = 24
\end{array}$$

$y_1^{(n)}(0) = y_2^{(n)}(0), \forall n \in \{0, 1, 2, 3\}$ şi $y_1^{(4)}(0) \neq y_2^{(4)}(0)$, prin urmare, ordinul de contact al curbelor (Γ_1) şi (Γ_2) este 3.

Problema 9.7. Determinaţi ecuaţia cercului osculator al curbei

$$(\Gamma) : \overrightarrow{r}(t) = (t^2 - 2t)\overrightarrow{i} + (t^3 + t)\overrightarrow{j}, \ t \in \mathbb{R},$$

în punctul corespunzător valorii $t_0 = 1$.

Rezolvare:

Vom aplica formula cercului osculator la curbă care este

$$(\mathcal{C}_O) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

unde:

$$r = \frac{1}{|K|} = \frac{(x'^2(1) + y'^2(1))^{\frac{3}{2}}}{|y''(1)x'(1) - x''(1)y'(1)|}$$

$$h = x(1) - y'(1)\frac{x'^2(1) + y'^2(1)}{y''(1)x'(1) - x''(1)y'(1)}$$

$$k = y(1) + x'(1)\frac{x'^2(1) + y'^2(1)}{y''(1)x'(1) - x''(1)y'(1)}$$

Calculăm derivatele de ordin întâi şi al doilea ale funcţiilor x şi y în punctul $t = 1$.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^3 + t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(1) = -1 \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 2 \\ y'(t) = 3t^2 + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y'(t) = 6t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x''(1) = 2 \\ y''(1) = 6 \end{cases}.$$

$$r = \frac{(0^2 + 4^2)^{\frac{3}{2}}}{|6 \cdot 0 - 2 \cdot 4|} = 8.$$

$$h = -1 - 4\frac{0^2 + 4^2}{6 \cdot 0 - 2 \cdot 4} = -1 + 8 = 7.$$

$$k = 2 + 0 \cdot \frac{0^2 + 4^2}{6 \cdot 0 - 2 \cdot 4} = 2.$$

Ecuaţia cercului osculator este $(\mathcal{C}_O) : (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 64$.

Observaţie. Putem aplica şi faptul că cercul osculator şi curba dată au un ordinul de contact 2 în punctul dat.

Definim funcţia

$F(x(t), y(t)) = (x(t) - h)^2 + (y(t) - k)^2 - r^2$,

unde $x(t) = t^2 - 2t$ şi $y(t) = t^3 + t$.

Cercul osculator şi curba au ordin de contact 2 în punctul dat dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} F(x(1), y(1)) = 0 \\ F'(x(1), y(1)) = 0 \\ F''(x(1), y(1)) = 0 \end{cases}.$$

$F(x(t), y(t)) = (t^2 - 2t - h)^2 + (t^3 + t - k)^2 - r^2$.

$F'(x(t), y(t)) = 2(t^2 - 2t - h)(2t - 2) + 2(t^3 + t - k)(3t^2 + 1)$.

$F''(x(t), y(t)) = 2(2t-2)(2t-2) + 2(t^2-2t-h)2 + 2(3t^2+1)(3t^2+1) + 2(t^3+t-k)6t$.

$$\begin{cases} F(x(1), y(1)) = 0 \\ F'(x(1), y(1)) = 0 \\ F''(x(1), y(1)) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-2-h)^2 + (1+1-k)^2 - r^2 = 0 \\ 2(1-2-h)(2-2) + 2(2-k)4 = 0 \\ 2\cdot 0\cdot 0 + 4(-1-h) + 2\cdot 4^2 + 12(2-k) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (-1-h)^2 + (2-k)^2 - r^2 = 0 \\ 8(2-k) = 0 \\ 4(-1-h) + 32 + 12(2-k) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 8 \\ h = 7 \\ k = 2 \end{cases}.$$

Am obţinut aceeaşi ecuaţie a cercului osculator cerut, şi anume $(\mathcal{C}_O) : (x-7)^2 + (y-2)^2 = 64$.

9.7 Probleme propuse

Problema 9.8. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei la curba

$$(\Gamma) : x^2 + xy^3 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

în punctul de intersecţie a curbei cu axa Oy.

Problema 9.9. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei la curba

$$(\Gamma) : y = x \ln |x| + 1$$

în punctul $x = 1$.

Problema 9.10. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei la curba

$$(\Gamma) : y + \sin x + x \cos y - \frac{\pi}{2} = 0$$

în punctul de intersecţie cu axa Ox.

Problema 9.11. Scrieţi ecuaţia tangentei la curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t^3 + 3t^2 - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

care este paralelă cu dreapta $d : 3x - y + 3 = 0$.

Problema 9.12. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei la curba

$$(\Gamma):\begin{cases} x = 2t^3 + t^2 + t \\ y = t^2 + t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

care trece prin punctul $A(1, 0)$.

Problema 9.13. Determinaţi curbura curbei în punctul dat pentru curbele:

a) $(\Gamma_1):\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$, în punctul $A(t = \pi)$.

b) $(\Gamma_2): y = x^3 - x^2 + 2x - 2$, în punctul $x = 0$.

c) $(\Gamma_3): \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$, în punctul $A(0, 1)$.

Problema 9.14. Determinaţi lungimea curbei $(\Gamma):\begin{cases} x = 8t^3 \\ y = 3(2t^2 - t^4) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ pe intervalul $[0, \sqrt{2}]$.

Problema 9.15. Determinaţi lungimea arcului de curbă

$$(\Gamma):\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\ y = \sqrt{1 + t^2} \end{cases}$$

între punctele corespunzătoare valorilor $t_1 = 0$ şi $t_2 = 1$.

Problema 9.16. Determinaţi ecuaţia cercului osculator la curba $(\Gamma): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ în punctul $B(0, 3)$.

Problema 9.17. Determinaţi ecuaţia cercului osculator la curba

$$(\Gamma):\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

în punctul $A(t = \dfrac{\pi}{6})$.

Problema 9.18. Determinaţi ecuaţia cercului osculator al curbei

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

în punctul $A(t = \frac{\pi}{4})$.

Problema 9.19. Determinaţi ecuaţia cercului osculator al elipsei

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

întru-un punct oarecare al ei.

Problema 9.20. Determinaţi ordinul de contact pentru curbele (Γ_1) şi (Γ_2) în punctul $O(0,0)$ dacă:

a) $(\Gamma_1) : y = e^x$ şi $(\Gamma_2) : y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

b) $(\Gamma_1) : y = x^3$ şi $(\Gamma_2) : y = x\sin^2 x$.

c) $(\Gamma_1) : y = x^4$ şi $(\Gamma_2) : y = x^2\sin^2 x$.

10

Curbe în spaţiu

10.1 Reprezentarea analitică a unei curbe în spaţiu

În $\mathbb{R}^3$ o singură ecuaţie algebrică în x, y, z reprezintă o suprafaţă. Pentru a reprezenta o curbă în spaţiu e nevoie de două ecuaţii.

O curbă în spaţiu poate fi reprezentată de:

- intersecţia a două suprafeţe care reprezintă **ecuaţiile implicite** ale curbei

$$(\Gamma) : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} .$$

- **ecuaţiile parametrice** ale curbei sunt $(\Gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in I \subset \mathbb{R}.$

- **ecuaţia vectorială** a curbei este

$$(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}, \ t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Dacă curba (Γ) este reprezentată de ecuaţiile implicite, punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Gamma)$ este numit **regulat** dacă rangul matricii

$$\begin{pmatrix} F'_x(x_0, y_0, z_0) & F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ G'_x(x_0, y_0, z_0) & G'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

este 2.

Dacă curba este reprezentată de ecuaţiile parametrice sau în forma vectorială, atunci considerăm că funcţiile x, y, z sunt diferenţiabile pe I. Punctul $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in (\Gamma)$ este numit **singular** dacă $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$. Punctul M_0 este **regulat** dacă $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ şi $z'(t_0)$ nu se anulează simultan. Dacă $x'(t)$, $y'(t)$ şi $z'(t)$ nu se anulează niciodată simultan pe I atunci curba este **regulată**.

Definiţie 10.1. *Derivata unei funcţii vectoriale $\overrightarrow{r}(t)$ în t_0 este*

$$\overrightarrow{r}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t_0 + h) - \overrightarrow{r}(t_0)}{h}.$$

Teorema 10.2. *O funcţie vectorială $\overrightarrow{r}'(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ este diferenţiabilă în t_0 dacă şi numai dacă fiecare componentă este o funcţie diferenţiabilă în t_0 şi*

$$\overrightarrow{r}'(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j} + z'(t_0)\overrightarrow{k}.$$

Exemple de curbe în spaţiu

1. **Helixul circular** este o curbă pentru care tangenta face un unghi constant cu o dreaptă fixată. Cea mai scurtă cale între două puncte de pe un cilindru (nu unul exact deasupra celuilalt) este o porţiune dintr-un helix circular, după cum poate fi observat dacă desfăşurăm cilindrul de-a lungul unei generatoare, şi unind cele două puncte printr-un segment de dreaptă acesta devine un helix după refacerea cilindrului. De aceea veveriţele aleg căi helicale când coboară sau urcă în trunchiurile de copac.

Helixul circular are ecuaţiile parametrice $(\Gamma): \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}.$

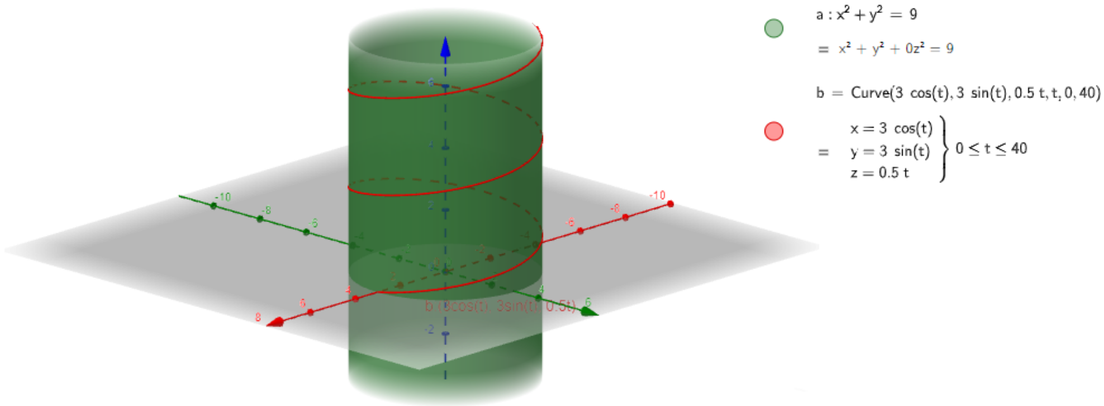


Figura 10.1: Helix circular

2. **Helixul conic** (sau elicea conică) este o curbă în spaţiu pe un con circular drept, a cărui proiecţie în planul bazei conului este o spirală plană.

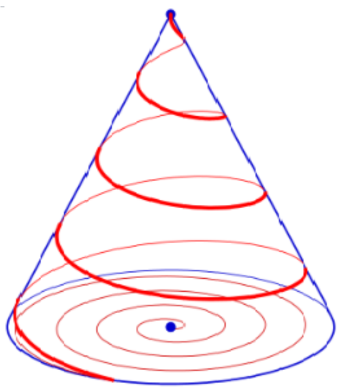


Figura 10.2: Helix conic

Helixul conic are ecuaţiile parametrice: $(\Gamma) : \begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \\ z = bt \end{cases}$.

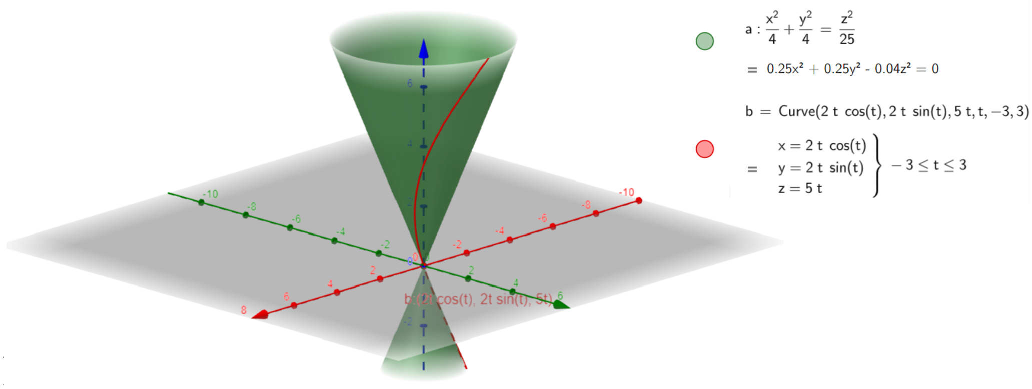


Figura 10.3: Elicea conică

3. **Curba lui Viviani** este intersecţia unei sfere cu un cilindru care este tangent sferei şi care trece printr-un diametru al sferei. Ecuaţiile curbei sunt

$$(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = rx \end{cases} .$$

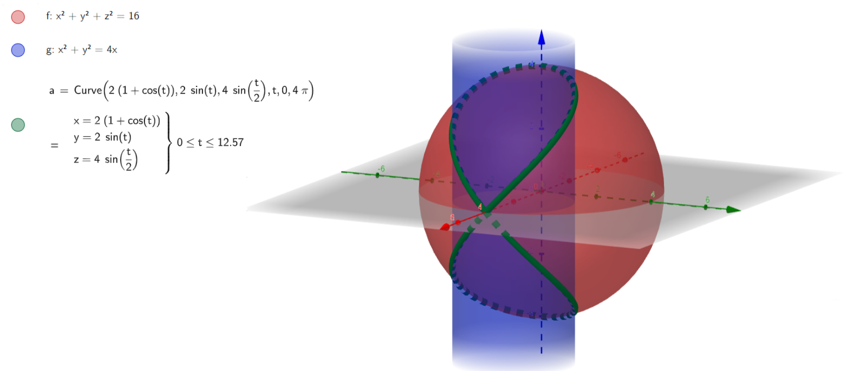


Figura 10.4: Curba lui Viviani

4. Curba aflată la intersecţia cilindrului $x^2+y^2=9$ şi a paraboloidului hiperbolic $9z=x^2-y^2$, denumintă şi curba 'Pringle'.

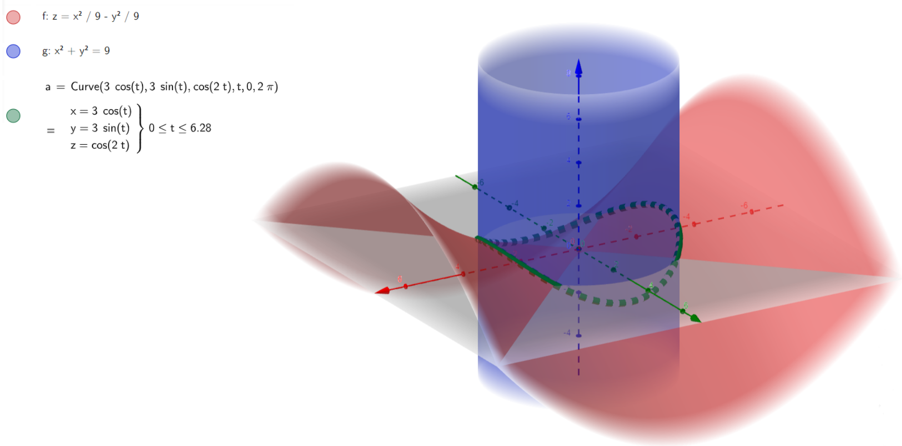


Figura 10.5: Curba 'Pringle'

5. **Spirala torică** - este o curbă care se află pe o suprafaţă torică. Suprafaţa torică este obţinută prin rotirea unui cerc generator de rază r_1 în jurul unei axe aflată la distanţa r_2.

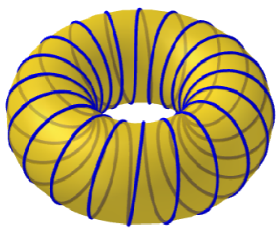


Figura 10.6: Spirală pe suprafaţă torică

Ecuaţiile parametrice sunt $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=(a+\sin bt)\cos t \\ y(t)=(a+\sin bt)\sin t \\ z(t)=\cos bt \end{cases}.$

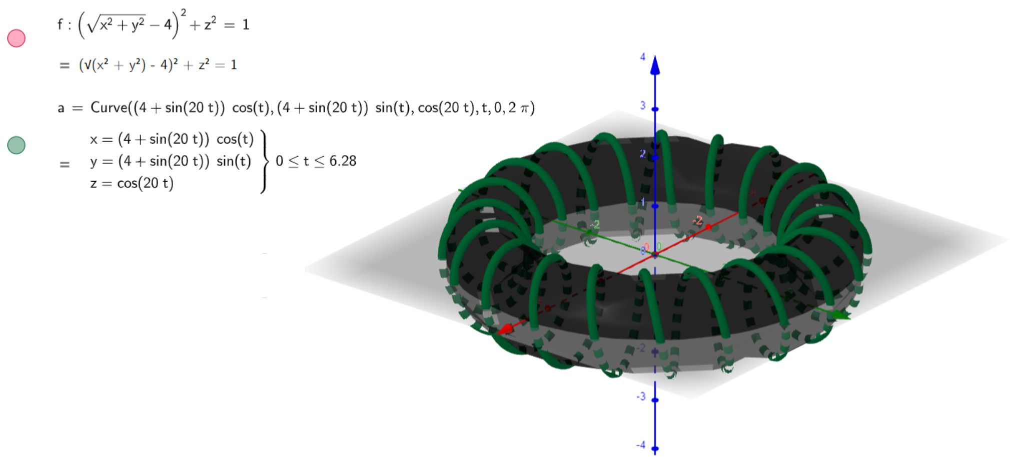


Figura 10.7: Spirală pe torus

10.2 Lungimea unei curbe în spaţiu

Fie (Γ) o curbă regulată $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k},\ t \in I \subset \mathbb{R}$, iar $A(x(a), y(a), z(a))$ şi $B(x(b), y(b), z(b))$ două puncte pe curba Γ.

Lungimea arcului $\widehat{AB}$ este

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Elementul de arc este

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Observaţie 10.3. *Elementul de arc "s" la o curbă regulată poate fi ales întotdeauna ca parametru deoarece $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$. Când s este ales ca parametru atunci, vectorul tangentei este un vector unitate (versor) şi anume*

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \|\overrightarrow{r}'(t)\| = 1.$$

10.3 Tangenta şi planul normal

Fie $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in [a, b]$, o curbă regulată şi M_0 şi M două puncte învecinate de pe curbă.

Considerăm versorul

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{\|\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)\|} = \frac{\overrightarrow{r}'(t_0)}{\|\overrightarrow{r}'(t_0)\|}.$$

Acesta este numit **versorul tangentei** la (Γ) în punctul M_0 şi este notat cu $\overrightarrow{\tau}$.

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{r}'(t_0)}{\|\overrightarrow{r}'(t_0)\|}.$$

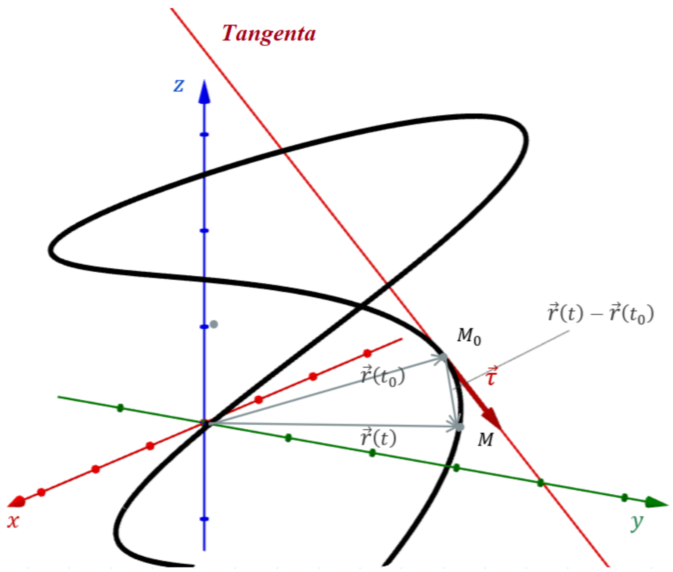


Figura 10.8: Versorul tangentei şi tangenta la o curbă în spaţiu

Definiţie 10.4. *Dreapta care trece prin punctul $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ şi are ca vector director $\overrightarrow{\tau}$ este numită **tangentă**, iar ecuaţiile ei sunt:*

$$tg : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

*Planul ce trece prin $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ perpendicular pe tangentă este numit **planul normal**, iar ecuaţia planului este:*

$$(P_N) : x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

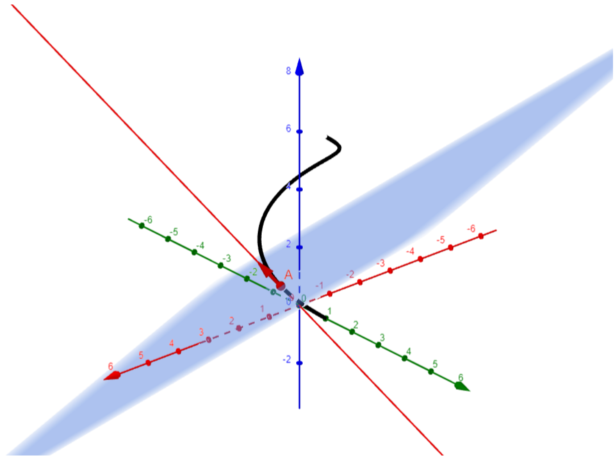


Figura 10.9: Tangenta şi planul normal într-un punct de pe curba în spaţiu

Dacă curba (Γ) este dată ca intersecţia a două suprafeţe $(\Gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, atunci tangenta la curba (Γ) în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţiile

$$tg : \frac{x - x_0}{\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{M_0}},$$

unde $\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ G'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$,

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} F'_z(x_0, y_0, z_0) & F'_x(x_0, y_0, z_0) \\ G'_z(x_0, y_0, z_0) & G'_x(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix},$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} F'_x(x_0, y_0, z_0) & F'_y(x_0, y_0, z_0) \\ G'_x(x_0, y_0, z_0) & G'_y(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}.$$

Ecuaţia planului normal poate fi scrisă astfel:

$$(P_N): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x(x_0,y_0,z_0) & F'_y(x_0,y_0,z_0) & F'_z(x_0,y_0,z_0) \\ G'_x(x_0,y_0,z_0) & G'_y(x_0,y_0,z_0) & G'_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} = 0.$$

10.4 Triedul mobil. Triedrul TNB (Frenet-Serret)

Triedrul mobil descrie mişcarea unui punct ce se deplasează de-a lungul unei curbe în spaţiu şi anume încotro se îndreaptă, cum se roteşte şi cum se răsuceşte.

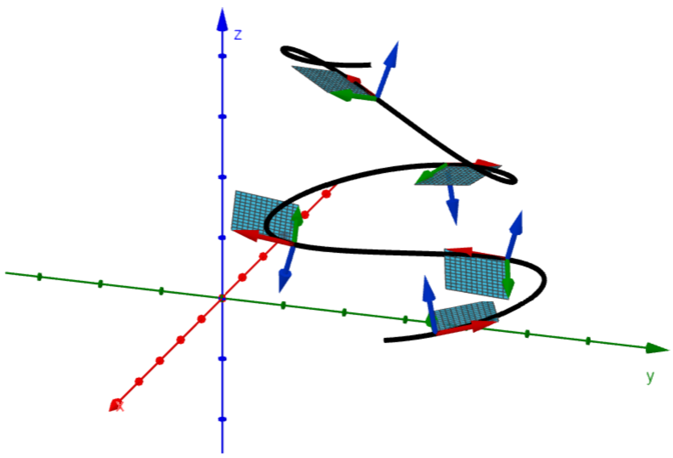


Figura 10.10: Triedrul mobil

Fie $(\Gamma): \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ o curbă regulată de ordin doi în spaţiu, aceasta înseamnă că există $\overrightarrow{r}'(t_0)$ şi $\overrightarrow{r}''(t_0)$ pentru orice $t_0 \in I$. Mai mult, presupunem că vectorii $\overrightarrow{r}'(t_0)$ şi $\overrightarrow{r}''(t_0)$ nu sunt paraleli, deci $\overrightarrow{r}'(t_0) \times \overrightarrow{r}''(t_0) \neq 0$.

În orice punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Gamma)$, $(\Gamma): \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, triedrul mobil ne dă informaţii despre:

- **versorul tangentei**, $\overrightarrow{\tau}$ care descrie direcţia în care curba se îndreaptă;
- **versorul normalei**, $\overrightarrow{n}$ care descrie cum curba se roteşte;

- **versorul binormalei**, $\overrightarrow{b}$ care descrie modul în care curba se răsuceşte.

Versorii $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ sunt ortogonali doi câte doi la fel ca şi $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ şi pot fi calculaţi în orice punct al curbei regulate după formulele următoare.

♦ $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$

♦ $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{\tau}'(t)}{\|\overrightarrow{\tau}'(t)\|} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{\tau}$

♦ $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|}$

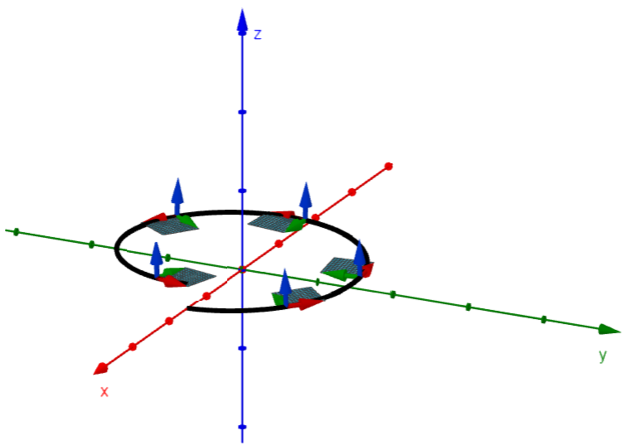


Figura 10.11: Triedrul mobil

Feţele triedrului mobil sunt:

- **planul osculator** - planul generat de $\overrightarrow{\tau}$ şi $\overrightarrow{n}$ (are ca normală vectorul $\overrightarrow{b}$).

  Planul osculator poate definit şi astfel. Fie (Γ) o curbă în spaţiu şi A şi B două puncte într-o vecinătate pe (Γ). Planul ce ocupă poziţia limită care conţine tangenta în punctul A la curba Γ şi care trece prin punctul B când $B \longrightarrow A$ este planul osculator la curbă în punctul A.

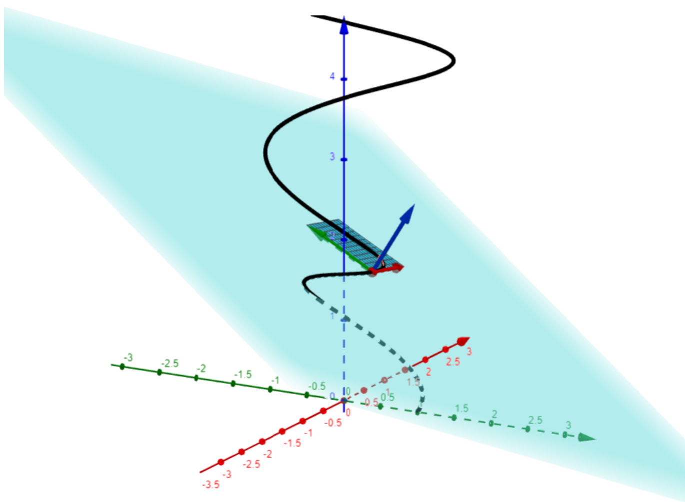


Figura 10.12: Planul osculator într-un punct la curba plană

- **planul normal** - planul generat de $\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{b}$ (are ca normală vectorul $\overrightarrow{\tau}$);
- **planul rectificant** - planul generat de $\overrightarrow{\tau}$ şi $\overrightarrow{b}$ (are ca normală vectorul $\overrightarrow{n}$).

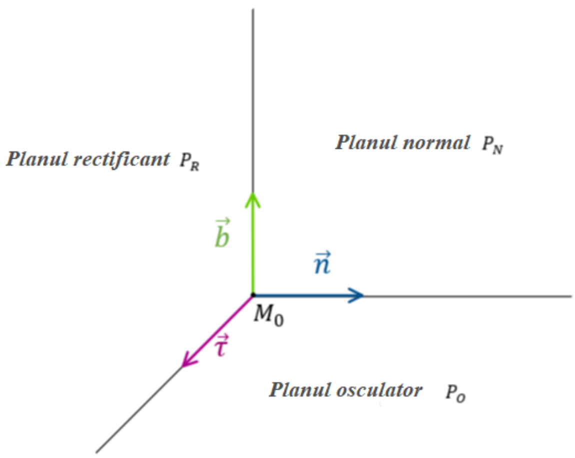


Figura 10.13: Triedrul TNB

Ecuaţia planului osculator poate fi pusă în forma următoare:

$$(P_O) : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă notăm $A = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}$, se pot scrie:

- ecuaţiile binormalei:

$$M_0B : \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

- ecuaţia planului rectificant:

$$(P_R) : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

- ecuaţiile normalei:

$$M_0N : \frac{x - x(t_0)}{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{y - y(t_0)}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ C & A \end{vmatrix}} = \frac{z - z(t_0)}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ A & B \end{vmatrix}}.$$

10.5 Curbura şi torsiunea

Curbura la o curbă în spaţiu ne arată cum anume punctele se curbează în planul osculator.

Definiţie 10.5. *Dacă $\overrightarrow{\tau}$, este versorul tangentei la o curbă regulată,* ***curbura*** *se defineşte ca*

$$K = \|\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\|.$$

$\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ este derivata versorului tangentei în raport cu lungimea de arc s. Parametrizarea în raport cu s este destul de dificil de calculat, deci dorim să avem o expresie a curburii în raport cu un parametru "t". Scriem:

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\| = \frac{\|\overrightarrow{\tau}'(t)\|}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}.$$

Expresia analitică a curburii la curba (Γ) în punctul $M(x(t), y(t), z(t)) \in (\Gamma)$ este

$$K = \frac{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|^3}.$$

Raza de curbură a curbei (Γ) în punctul M este $R = \dfrac{1}{K}$.

Următorul grafic reprezintă curbura unei curbe. Cu cât mai abruptă este curba cu atât este mai mare curbura şi mai mică raza cercului înscris.

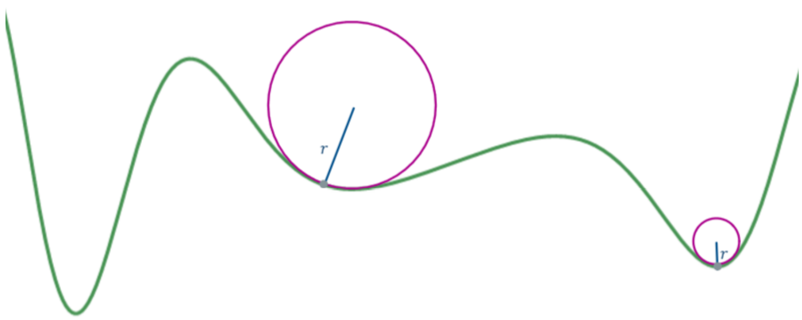


Figura 10.14: Reprezentarea curburii şi a razei de curbură

Torsiunea la o curbă într-un punct ne arată cum curba se răsuceşte, de fapt cum planul osculator se răsuceşte.

Definiţie 10.6. *Torsiunea este definită ca*

$$T = -\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}\cdot\overrightarrow{n}.$$

Expresia analitică a torsiunii la curba (Γ) în punctul $M(x(t), y(t), z(t)) \in (\Gamma)$ este:

$$T = \frac{(\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t), \overrightarrow{r}'''(t))}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|^2}.$$

Observaţie 10.7. *O curbă în spaţiu este o curbă plană dacă şi numai dacă torsiunea este nulă. Aceasta înseamnă că curba se află în planul osculator.*

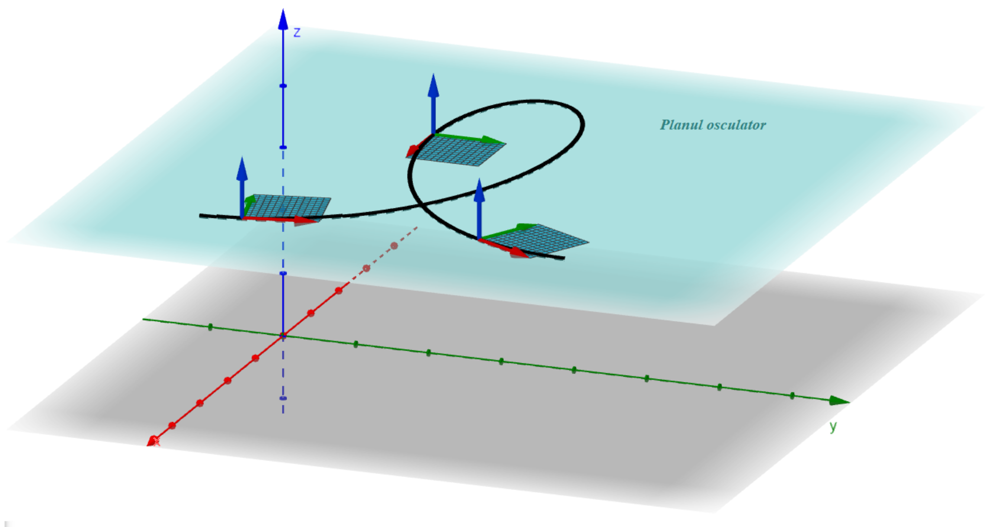


Figura 10.15: O curbă în spaţiu care se află în planul osculator

10.6 Formulele lui Frenet

Versorii $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$ definiţi anterior pot fi exprimaţi în următoarele ecuaţii numite şi formulele lui Frenet:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = K \cdot \overrightarrow{n} \\ \dfrac{d\overrightarrow{n}}{ds} = -K \cdot \overrightarrow{\tau} + T \cdot \overrightarrow{b} \\ \dfrac{d\overrightarrow{b}}{ds} = -T \cdot \overrightarrow{n} \end{cases}$$

unde K este curbura şi T este torsiunea.

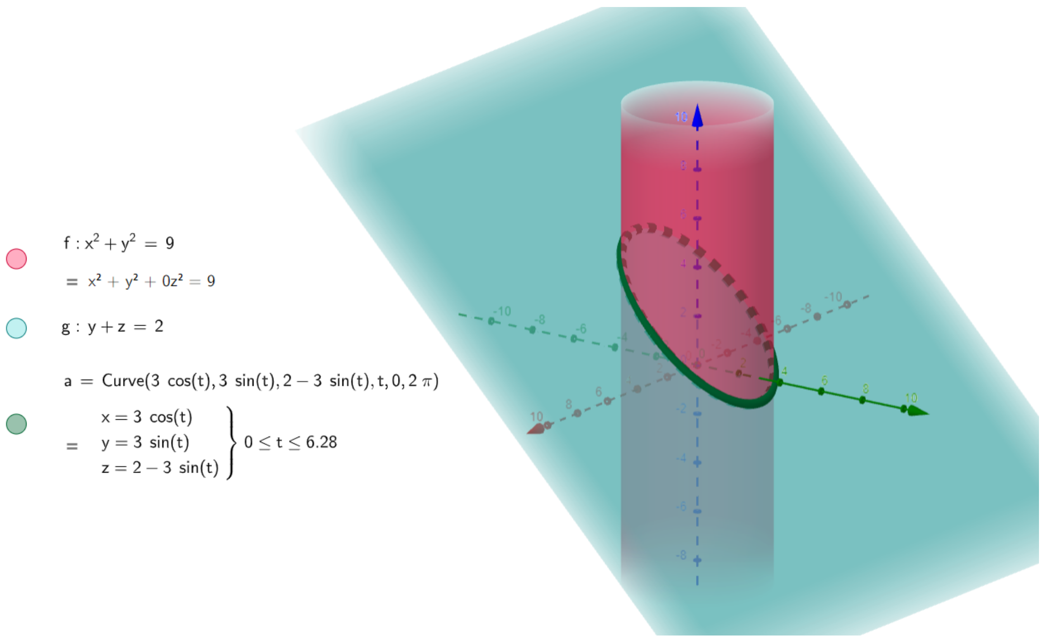
Formulele lui Frenet sunt cunoscute şi ca teorema Frenet-Serret, şi pot fi puse mai concis folosind o ecuaţie matricială:

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}.$$

10.7 Probleme rezolvate

Problema 10.1. Determinaţi forma vectorială a curbei aflate la intersecţia suprafeţelor $x^2 + y^2 = 9$ şi $y + z = 2$.

Rezolvare: Prima suprafaţă este un cilindru având intersecţia cu planul xOy un cerc iar a doua suprafaţă este un plan.



Parametrizarea cercului este $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$. Din ecuaţia planului calculăm $z = 2 - y = 2 - 3\cos t$. Deci, parametrizarea curbei dată ca intersecţie de suprafeţe este:

$$(\Gamma):\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \\ z(t) = 2 - 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

iar forma vectorială este:

$$(\Gamma): 3\cos t\,\overrightarrow{i} + 3\sin t\,\overrightarrow{j} + (2 - 3\sin t)\overrightarrow{k},\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Problema 10.2. Fie $A(2, 2, -3)$ şi $B(-2, 5, -1)$ puncte în spaţiu. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale segmetului $[AB]$.

Rezolvare: Scriem ecuaţiile dreptei AB ce trece prin A şi are ca vector director vectorul $\overrightarrow{AB}$.

$AB: \dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Deci, ecuaţiile parametrice ale dreptei sunt

$$AB:\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Pentru a avea ecuaţiile segmentului de dreaptă $[AB]$ alegem t în intervalul $[0, 1]$ (este evident că dacă alegem $t = 0$ obţinem coordonatele punctului A şi pentru $t = 1$ se obţin coordonatele puntului B). Prin urmare, ecuaţiile parametrice ale segmentului de dreaptă $[AB]$ sunt:

$$[AB]:\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases},\ \ t \in [0, 1].$$

Problema 10.3. Fie $(\Gamma): \overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, o elice. Determinaţi distanţa de la punctul $A(t = 0)$ la $B\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right)$ pe elice.

Rezolvare:

Derivatele componentelor din ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \\ z'(t) = 1 \end{cases}.$$

$ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}\, dt.$

Pentru $t = 0$ obţinem $A(1, 0, 0)$ iar pentru $t = \frac{\pi}{2}$ avem $B\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$.

$L(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$

Problema 10.4. Demonstraţi că curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = 2t^2 - 3t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = t^2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

este o curbă plană. Scrieţi ecuaţia planului în care se află curba (Γ).

Rezolvare:

O curbă în spaţiu se află într-un plan dacă torsiunea este 0. Scriem ecuaţia vectorială a curbei (Γ), $\overrightarrow{r}(t)$, şi apoi calculăm derivatele funcţiei vectoriale $\overrightarrow{r}(t)$ până la ordinul trei.

$\overrightarrow{r}(t) = (2t^2 - 3t + 1)\overrightarrow{i} + (t + 2)\overrightarrow{j} + (t^2 + 3t)\overrightarrow{k}.$

$\overrightarrow{r}'(t) = (4t - 3)\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + (2t + 3)\overrightarrow{k}.$

$\overrightarrow{r}''(t) = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}.$

$\overrightarrow{r}'''(t) = \overrightarrow{0}.$

$T = \frac{(\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t), \overrightarrow{r}'''(t))}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 4t-3 & 1 & 2t+3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|^2} = 0$, deci curba se află în planul osculator.

$$(P_O): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 4t-3 & 1 & 2t+3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă alegem $t=0$ avem $M_0(1,2,0) \in (\Gamma)$ şi

$$(P_O): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$(P_O): x+9y-2z-19=0.$

Problema 10.5. Considerăm

$$(\Gamma): \begin{cases} xy = 1 \\ 2y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

o curbă în spaţiu. Determinaţi punctele de pe curba (Γ) astfel încât binormalele să fie perpendiculare pe dreapta

$$d: \begin{cases} x+y=0 \\ -4x-z+6=0 \end{cases}.$$

Scrieţi ecuaţiile acestor binormale şi ecuaţia planului osculator în fiecare din punctele determinate anterior.

Rezolvare:

O parametrizare a curbei (Γ) este

$$(\Gamma): \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t \\ z = 2t^2 - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Ecuaţia vectorială a curbei (Γ) este:

$\overrightarrow{r}(t) = \dfrac{1}{t}\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} + (2t^2-1)\overrightarrow{k}.$

$\overrightarrow{r}'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4t\overrightarrow{k}.$
$\overrightarrow{r}''(t) = \dfrac{2}{t^3}\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k}.$
Binormala are ca vector director vectorul

$$\overrightarrow{v_b} = \overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}'' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\dfrac{1}{t^2} & 1 & 4t \\ \dfrac{2}{t^3} & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} + \frac{12}{t^2}\overrightarrow{j} - \frac{2}{t^3}\overrightarrow{k}.$$

Binormala este perpendiculară pe dreapta d dacă $\overrightarrow{v_b} \perp \overrightarrow{v_d} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_b} \cdot \overrightarrow{v_d} = 0.$

$$\overrightarrow{v_d} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

$\overrightarrow{v_b} \cdot \overrightarrow{v_d} = 0 \Longleftrightarrow -4 + \dfrac{12}{t^2} - \dfrac{8}{t^3} = 0 \Longleftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0.$
Ultima ecuaţie are soluţiile $t_{1,2} = 1$ şi $t_3 = -2$.

Prin urmare avem două puncte pentru care binormala este perpendiculară pe dreapta dată.

- Pentru $t = 1$ se obţine punctul $M_1 = (1, 1, 1)$ şi $\overrightarrow{v_b} = (4, 12, -2)$. Deci, ecuaţiile binormalei sunt

  $b : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{12} = \dfrac{z-1}{-2}.$

  Planul osculator are ca normală vectorul $\overrightarrow{v_b} = (4, 12, -2)$, deci ecuaţia planului osculator este

  $(P_O) : 4(x-1) + 12(y-1) - 2(z-1) = 0 \Longleftrightarrow$

  $(P_O) : 2x + 6y - z - 7 = 0.$

- Pentru $t = -2$ obţinem punctul $M_2\left(-\dfrac{1}{2}, -2, 7\right)$ şi $\overrightarrow{v_b} = \left(4, 3, \dfrac{1}{4}\right)$. Deci, ecuaţiile binormalei sunt

  $b : \dfrac{x+\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-7}{\frac{1}{4}}.$

Planul osculator are ca normală vectorul $\overrightarrow{v_b} = \left(4, 3, \frac{1}{4}\right)$, ecuaţia planului osculator este

$(P_O) : 4\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3(y + 2) + \frac{1}{4}(z - 7) = 0$

$(P_O) : 16x + 12y + z + 25 = 0.$

Problema 10.6. Fie $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = t\overrightarrow{i} + (1 - t^2)\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}t^3\overrightarrow{k},\ t \in \mathbb{R}$, o curbă în spaţiu.

a) Determinaţi versorii triedrului mobil în punctul corespunzător pentru $t = 1$.

b) Scrieţi ecuaţiile normalei şi ecuaţia planului rectificant în punctul corespunzător pentru $t = 1$.

c) Determinaţi curbura şi torsiunea curbei în punctul $t = 1$.

Rezolvare:

a) $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{\overrightarrow{r}'}{\|\overrightarrow{r}'\|}$

$\overrightarrow{b} = \dfrac{\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''}{\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''\|}$

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{\tau}$

Derivatele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei vectoriale $\overrightarrow{r}$ sunt:

$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i} - 2t\overrightarrow{j} + 2t^2\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{r}''(t) = -2\overrightarrow{j} + 4t\overrightarrow{k}.$

În punctul $t = 1$ obţinem

$\overrightarrow{r}'(1) = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{r}''(1) = -2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$

$\overrightarrow{\tau} = \dfrac{\overrightarrow{r}'(1)}{\|\overrightarrow{r}'(1)\|} = \dfrac{\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$

$$\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}'' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}.$$

$$\overrightarrow{b} = -\frac{4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}}{\sqrt{16+16+4}} = -\frac{1}{3}(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}).$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{\tau} = -\frac{1}{9}\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}(6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}) = -\frac{1}{3}(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}).$$

b) Punctul corespunzător de pe curba (Γ) pentru $t = 1$ este $A\left(1, 0, \frac{2}{3}\right)$, deci ecuaţiile normalei sunt:

$$n : \frac{x-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow n : \frac{x-1}{-2} = y = \frac{z-\frac{2}{3}}{2}.$$

Planul rectificant are ca normală direcţia versorului $\overrightarrow{n}$, deci ecuaţia planului rectificant este:

$$(P_R) : -\frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}(z - \frac{2}{3}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(P_R) : -6x + 3y + 6z + 2 = 0.$$

c) Curbura în punctul $t = 1$ este $K = \left.\frac{\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''\|}{\|\overrightarrow{r}'\|^3}\right|_{t=1} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$.

Torsiunea în punctul $t = 1$ este $T = \left.\frac{(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''')}{\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''\|^2}\right|_{t=1}$.

$\overrightarrow{r}'''(t) = 4\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{r}'''(1) = 4\overrightarrow{k}$.

$$(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''')|_{t=1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \Longrightarrow T = \frac{-8}{6^2} = -\frac{2}{9}.$$

10.8 Probleme propuse

Problema 10.7. Scrieţi ecuaţia planului normal şi ecuaţiile tangentei la curba (Γ):

a) $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = 2t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{2}{t}\overrightarrow{j} + t^2\overrightarrow{k},\ t \in \mathbb{R}$, în punctul obţinut pentru $t = 2$;

b) $(\Gamma) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^3 \\ z = -t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, în punctul $M(6, 16, -4)$.

Problema 10.8. Determinaţi lungimea arcului de curbă (Γ):

a) $(\Gamma) : \begin{cases} x = at \\ y = \sqrt{3ab}t^2 \\ z = 2bt^3, \end{cases}$ $, 0 \leqslant t \leqslant 1$;

b) $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 2$.

Problema 10.9. Determinaţi ecuaţiile tangentei în punctul $A(m, m, 2m^2)$ şi ecuaţia planului normal într-un punct arbitrar al curbei $(\Gamma) : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y \end{cases}$.

Problema 10.10. Scrieţi ecuaţia planului osculator la curba în spaţiu

$$(\Gamma) : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$$

în punctul $M(1, 1, 1)$.

Problema 10.11. Fie $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = t\,\overrightarrow{i} + (1 - t^2)\overrightarrow{j} + \dfrac{2}{3}t^3\overrightarrow{k}$ o curbă în spaţiu.

a) Determinaţi versorii triedrului mobil în punctul $t = 1$.

b) Scrieţi ecuaţiile normalei într-un punct arbitrar de pe curbă.

c) Determinaţi curbura şi torsiunea la curbă în punctul $t = 1$.

Problema 10.12. Determinaţi curbura şi torsiunea la curba

$$(\Gamma):\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos 2t, \end{cases}$$

în punctul $M\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Problema 10.13. Fie $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2}t^2\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{6}t^3\overrightarrow{k}$ o curbă în spaţiu.

a) Determinaţi elementul de arc.

b) Determinaţi versorii tangentei, normalei şi binormalei în punctul $t = 1$.

c) Scrieţi ecuaţia planului rectificant şi a planului osculator în punctul $t = 1$.

d) Determinaţi curbura şi torsiunea la curba (Γ) în punctul $t = 1$.

Problema 10.14. Determinaţi punctele de pe curba

$$(\Gamma) : \overrightarrow{r} = (2t - 1)\overrightarrow{i} + t^3\overrightarrow{j} + (1 - t^2)\overrightarrow{k}$$

astfel încât planul osculator al curbei în aceste puncte să fie perpendicular pe planul $(P) : 7x - 12y + 5z - 4 = 0$.

Problema 10.15. Pentru fiecare din următoarele curbe determinaţi versorii triedrului mobil, curbura, torsiunea, ecuaţia planului osculator, ecuaţia planului normal, ecuaţiile normalei, ecuaţiile tangentei în punctul specificat:

a) $(\Gamma_1) : \overrightarrow{r} = (3t^2 - 2)\overrightarrow{i} + t^3\overrightarrow{j} + (1 - t)\overrightarrow{k},\ t \in \mathbb{R},\ \ M(t = 2)$.

b) $(\Gamma_2) : \begin{cases} x = t^3 - 2t^2 \\ y = 3t + 2 \\ z = t^2 - 5 \end{cases},\ t \in \mathbb{R},\ M(-1, 5, -4)$.

c) $(\Gamma_3) : \overrightarrow{r} = 4\cos t\,\overrightarrow{i} + 2\sin t\,\overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k},\ t \in \mathbb{R},\ M\left(t = \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Problema 10.16. Determinaţi lungimea arcului de curbă (Γ):

a) $(\Gamma) : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t, \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}];$

b) $(\Gamma) : \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ z = \dfrac{x^3}{6}, \end{cases}, t \in [0, 6].$

Problema 10.17. Determinaţi punctele de pe curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} xz = 1 \\ y = \ln z \end{cases}$$

astfel încât normala la curbă în aceste puncte să fie paralelă cu planul

$$(P) : 5x + 2y - 5z = 1.$$

Problema 10.18. Determinaţi curbura şi torsiunea curbei

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = 2t \\ y = \ln t \\ z = t^2, \end{cases},\ t > 0$$

în punctul $t = 1$.

Problema 10.19. Să se verifice dacă curbele date sunt curbe plane. În caz afirmativ scrieţi ecuaţiile planelor respective:

1. $(\Gamma_1) : \begin{cases} x = t^3 + t + 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^3 + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2. $(\Gamma_2) : \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = t^2 + t \\ z = 3\cos(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3. $(\Gamma_3) : \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ z - x^2 = 0 \end{cases}.$

11

Suprafeţe

11.1 Reprezentarea analitică a suprafeţelor

În $\mathbb{R}^3$ o ecuaţie algebrică în x, y, z reprezintă o suprafaţă.

O suprafaţă poate fi reprezentată de:

- Ecuaţia **implicită** a suprafeţei

$$(S) : F(x, y, z) = 0.$$

- Ecuaţia **explicită** a suprafeţei

$$(S) : z = z(x, y),\ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- Ecuaţiile **parametrice** ale suprafeţei

$$(S) : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases},\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

- Ecuaţia **vectorială** a suprafeţei

$$(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k},\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Dacă suprafaţa (S) este reprezentată de ecuaţiile parametrice, atunci punctul $M_0(u_0, v_0) \in (S)$ se numeşte **ordinar** dacă rangul matricii

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}$$

este 2 sau, echivalent, $\overrightarrow{r}'_u(u_0, v_0)$ şi $\overrightarrow{r}'_v(u_0, v_0)$ sunt liniar independenţi.

Dacă toate punctele suprafeţei (S) sunt puncte ordinare, atunci suprafaţa se numeşte suprafaţă **regulată**.

11.2 Curbe pe o suprafaţă

Fie $(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ o suprafaţă.

Dacă $u, v : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii reale $u = u(t),\ v = v(t)$, atunci $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ este o curbă care se află pe suprafaţa (S).

Exemple de curbe pe o suprafaţă

1. **Elicea circulară** se află pe un cilindru $(S) : \begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = u \end{cases}$, $v \in [0, 2\pi], u \in \mathbb{R}$,

   r - raza fiind un număr real pozitiv constant.

   Pentru $\begin{cases} v = t \\ u = ct \end{cases}$, c o constantă obţinem elicea circulară care are ecuaţiile parametrice $(\Gamma) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}$.

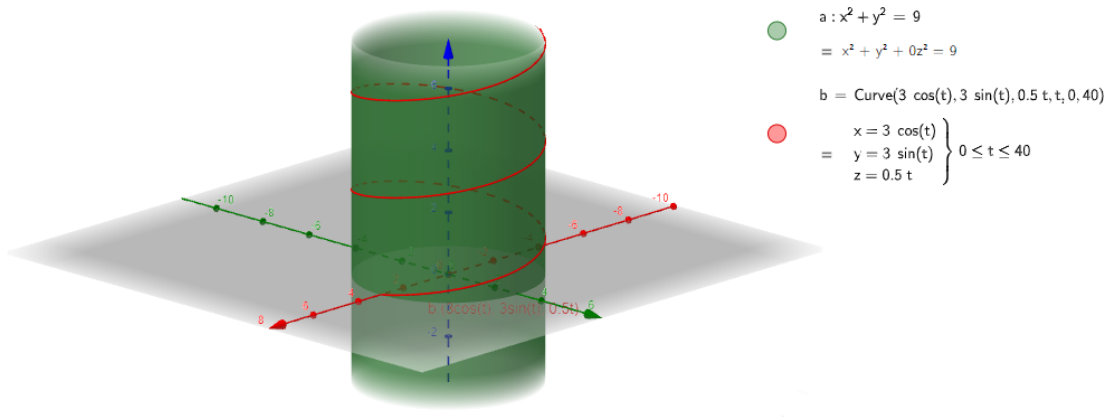


Figura 11.1: Elicea circulară

2. Când considerăm $u = u_0$ şi $v = v_0$, se obţin două curbe pe suprafaţă, iar (u_0, v_0) poartă denumirea de **coordonate curbilinii** ale punctului M_0.

   Fie $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ o sferă şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$. Ecuaţiile parametrice ale sferei sunt:

$$(S) : \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \pi].$$

   Dacă considerăm $\varphi =$ constant, curbele de pe sferă, în termeni geografici, sunt paralelele, iar dacă considerăm $\theta =$ constant, curbele reprezintă meridianele.

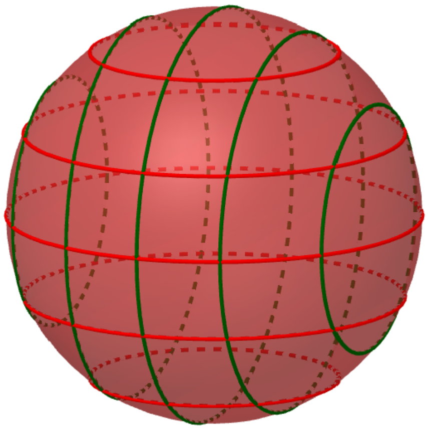


Figura 11.2: Meridiane şi paralele pe o sferă

11.3 Planul tangent şi normala la o suprafaţă

Fie $(S) : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ o curbă regulată.

Planul care trece prin $M(u_0,v_0) \in (S)$ şi are două direcţii paralele vectorii $\vec{r}'_u(u_0,v_0)$ şi $\vec{r}'_v(u_0,v_0)$ se numeşte **plan tangent** la suprafaţa S în punctul M_0.

Ecuaţia planului tangent este:

$$(P_{tg}) : \begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Notăm cu $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$, calculate în (u_0,v_0).

Normala la suprafaţa (S) în punctul M_0 este dreapta ce trece prin M_0 perpendiculară pe planul tangent. Ecuaţiile sale sunt:

$$n : \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

unde $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$.

Observaţie 11.1. *Dacă suprafaţa este dată în formă implicită* $(S) : F(x, y, z) = 0$ *atunci ecuaţia planului tangent se scrie:*

$$(P_{tg}) : F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuaţiile normalei în acest caz sunt:

$$n : \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

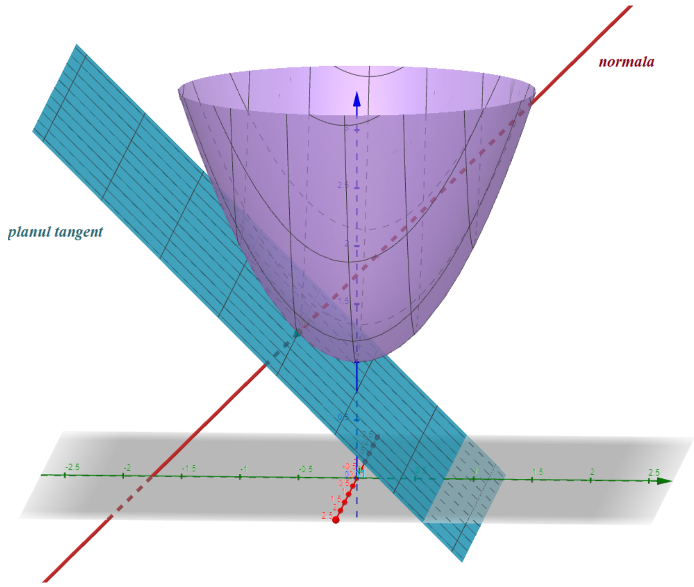


Figura 11.3: Planul tangent şi normala la o surafaţă

11.4 Prima formă pătratică fundamentală a unei suprafeţe

Lungimea unei curbe pe o suprafaţă

Fie $(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ o suprafaţă regulată şi $(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ o curbă regulată pe suprafaţa (S).

Se defineşte elementul de arc pe această curbă ca:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\overrightarrow{r}'^2(\tau)}\, d\tau.$$

$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{r}'_u \cdot u'(t) + \overrightarrow{r}'_v \cdot v'(t)$.

Folosind notaţiile lui Gauss avem:

$E = \overrightarrow{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$

$F = \overrightarrow{r}'_u \overrightarrow{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$

$G = \overrightarrow{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$

şi obţinem

$$ds = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt$$

Definiţie 11.2. *Formă pătratică*

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

se numeşte ***prima formă pătratică fundamentală*** *a suprafeţei.*

Lungimea arcului M_1M_2 de pe curba (Γ), corespunzătoare valorilor t_1 şi t_2 ale parametrului t este:

$$l(\overset{\frown}{M_1M_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt.$$

Observaţie 11.3. *Dacă suprafaţa este dată în forma explicită* $(S) : z = z(x, y)$*, iar* $p = z'_x$ *şi* $q = z'_y$*, prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei este*

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2.$$

Unghiul a două curbe de pe o suprafaţă

Fie $(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ o surprafaţă regulată şi

$(\Gamma_1) : \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_1}(u(t), v(t))$

$(\Gamma_2) : \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_2}(u(t), v(t))$

două curbe regulate trasate pe suprafaţa (S), iar $\overrightarrow{\tau_1}$, $\overrightarrow{\tau_2}$ versorii tangentelor la curbele (Γ_1) şi (Γ_2), în punctul lor comun M_0.

Fie $d\overrightarrow{r}$, du şi dv diferenţialele de-a lungul curbei (Γ_1) şi $\delta\overrightarrow{r}$, δu şi δv diferenţialele de-a lungul curbei (Γ_2).

Definiţie 11.4. *Unghiul dintre versorii tangentelor $\overrightarrow{\tau_1}$ şi $\overrightarrow{\tau_2}$ în punctul $M_0 \in (S)$ este numit unghiul dintre curbele (Γ_1) şi (Γ_2).*

$$\cos\theta = \cos\sphericalangle((\Gamma_1), (\Gamma_2)) = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Două curbe sunt **ortogonale** dacă

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0.$$

Aria unei suprafeţe

Fie $(S) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ o suprafaţă regulată.

Elementul de arie a suprafeţei (S) este

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Aria suprafeţei este

$$\int\int_D d\sigma = \int\int_D \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

unde D este domeniul în care u şi v variază.

Observaţie 11.5.
- *Dacă suprafaţa este dată în formă explicită $(S) : z = z(x, y)$, şi $p = z'_x$ şi $q = z'_y$, elementul de arie este*

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy.$$

- *Dacă suprafaţa este dată în formă implicită* $(S): F(x,y,z) = 0$, *elementul de arie este*

$$d\sigma = \frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}dxdy.$$

11.5 Probleme rezolvate

Problema 11.1. Fie suprafaţa $(S): \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$

a) Determinaţi coordonatele punctelor $A(u = 2, v = 1)$, $B(u = 1, v = 2)$.

b) Verificaţi dacă $M(4,2,3)$ şi $N(1,4,-2)$ aparţin suprafeţei (S).

c) Determinaţi ecuaţia carteziană suprafeţei.

Rezolvare:

a) Pentru $u = 2$ şi $v = 1$ se obţine $x = 3$, $y = 1$, $z = 2 \Longrightarrow A(3,1,2)$.

Pentru $u = 1$ şi $v = 2$ obţinem $x = 3$, $y = -1$, $z = 2 \Longrightarrow B(3,-1,2)$.

b) $M \in (S) \Longleftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 2 \\ u \cdot v = 3. \end{cases}$ este compatibil. Adunând primele două ecuaţii obţinem $2u = 6 \Longrightarrow u = 3$. Se obţine $v = 1$ şi verificăm în cea de-a treia ecuaţie dacă $u \cdot v = 3 \Longleftrightarrow 3 \cdot 1 = 3$ ceea ce este adevărat, prin urmare $M \in (S)$.

$N \in (S) \Longleftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} u + v = 1 \\ u - v = 4 \\ u \cdot v = -2. \end{cases}$ este compatibil. Adunând primele două ecuaţii obţinem $2u = 5 \Longrightarrow u = \dfrac{5}{2}$. Se determină uşor $v = -\dfrac{3}{2}$. Verificăm în cea de-a treia ecuaţie $u \cdot v = \dfrac{5}{2} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{15}{4} \neq -2$, deci $N \notin (S)$.

c) Pentru a obţine ecuaţia implicită sau cea explicită a suprafeţei trebuie să eliminăm u şi v din ecuaţiile parametrice ale suprafeţei.

Adunând şi scăzând primele două ecuaţii se obţine că $x + y = 2u$ şi $x - y = 2v$. Înlocuind $u = \dfrac{x+y}{2}$ şi $v = \dfrac{x-y}{2}$ în cea de-a treia ecuaţie avem $z = \dfrac{(x+y)(x-y)}{4} \Longleftrightarrow 4z = x^2 - y^2$ care este ecuaţia unui paraboloid hiperbololic. Ecuaţia explicită a suprafeţei este

$$(S) : z(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2).$$

Problema 11.2. Fie $(S) : \begin{cases} x = ue^v \\ y = ue^{-v} \\ z = 4uv \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ o suprafaţă.

a) Determinaţi ecuaţia planului tangent la (S) în punctul $M(u = 2, v = 0)$.

b) Scrieţi ecuaţiile normalei în punctul M.

c) Determinaţi versorul normalei.

Rezolvare:

a) Coordonatele punctului M sunt $x = 2$, $y = 2$, $x = 0$, $M(2, 2, 0)$. Calculăm derivatele parţiale ale funcţiilor:

$$\begin{cases} x'_u(u, v) = e^v \\ y'_u(u, v) = e^{-v} \\ z'_u(u, v) = 4v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'_u(2, 0) = 1 \\ y'_u(2, 0) = 1 \\ z'_u(2, 0) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x'_v(u,v) = ue^v \\ y'_v(u,v) = -ue^{-v} \\ z'_v(u,v) = 4u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'_v(2,0) = 2 \\ y'_v(2,0) = -2 \\ z'_v(2,0) = 8 \end{cases}.$$

Ecuaţia planului tangent este

$$(P_{tg}) : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$(P_{tg}) : 2x - 2y - z = 0.$

b) Normala este perpendiculară pe planul tangent, deci direcţia normalei este $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}_{P_{tg}} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Ecuaţiile normalei sunt:

$n : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{-1}.$

c) Versorul normalei este $\overrightarrow{n} = \dfrac{2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}}{\|2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\|} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}).$

Problema 11.3. Scrieţi ecuaţia planului tangent în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la suprafaţa $(S) : z = e^{\frac{y}{x}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$.

Rezolvare:

Ecuaţia suprafeţei este dată în formă explicită. Calculăm:

$p = z'_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}.$

$q = z'_y(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}.$

Ecuaţia planului tangent este:

$(P_{tg}) : z - z_0 = -\dfrac{y_0}{x_0^2}e^{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0) + \dfrac{1}{x_0}e^{\frac{y_0}{x_0}}(y - y_0).$

Înmulţind ecuaţia prin x_0^2 şi ştiind că $z_0 = e^{\frac{y_0}{x_0}}$ obţinem:

$(P_{tg}) : x_0^2(z - z_0) = -y_0 z_0(x - x_0) + x_0 z_0(y - y_0).$

Problema 11.4. Determinaţi lungimea arcului de curbă $u = 0$ pe suprafaţa

$$(S) : \overrightarrow{r}(u,v) = (u^2 + v)\overrightarrow{i} + (u + v^2)\overrightarrow{j} + (u + v)\overrightarrow{k}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

între punctele $M_1(u = 0, v = 0)$ şi $M_2(u = 0, v = 1)$.

Rezolvare:

Calculăm derivatele parţiale ale funcţiilor

$x = x(u,v) = u^2 + v,$

$y = y(u,v) = u + v^2$ şi

$z = z(u,v) = u + v.$

$$\begin{cases} x'_u(u,v) = 2u \\ y'_u(u,v) = 1 \\ z'_u(u,v) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x'_v(u,v) = 1 \\ y'_v(u,v) = 2v \\ z'_v(u,v) = 1 \end{cases} .$$

$E = 4u^2 + 1 + 1 = 4u^2 + 2;$

$F = 2u + 2v + 1;$

$G = 1 + 4v^2 + 1 = 4v^2 + 2.$

$ds^2 = 2(2u^2 + 1)du^2 + 2(2(u + v) + 1)dudv + 2(2v^2 + 1)dv^2.$

Deoarece $u = 0 \Longrightarrow du = 0 \Longrightarrow ds^2 = 2(2v^2 + 1)dv^2.$

$$\begin{aligned} l(M_1M_2) = I &= \int_0^1 \sqrt{4v^2 + 2}dv = 2\int_0^1 \sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}dv = 2\int_0^1 v'\sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}dv \\ &= 2v\sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{v^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}}dv \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{2}} - 2I + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}}dv \\ &= \sqrt{6} - 2I + \ln\left(v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$3I = \sqrt{6} + \ln\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \ln\sqrt{\frac{1}{2}} \Longrightarrow$$

$$l(M_1M_2) = I = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

Problema 11.5. Determinaţi unghiul dintre curbele $v = 6u$ şi $v = -6u$ care se află pe cilindrul $(S) : x^2 + y^2 = 9$.

Rezolvare:

Parametrizarea cilindului este $(S) : \begin{cases} x = 3\cos v \\ y = 3\sin v \\ z = u \end{cases}$, $v \in [0, 2\pi], u \in \mathbb{R}$.

Derivatele parţiale ale funcţiilor x, y, z sunt:

$$\begin{cases} x'_u(u,v) = 0 \\ y'_u(u,v) = 0 \\ z'_u(u,v) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x'_v(u,v) = -3\sin v \\ y'_v(u,v) = 3\cos v \\ z'_v(u,v) = 0 \end{cases} .$$

$E = 1$; $F = 0$; $G = 9\sin^2 v + 9\cos^2 v = 9$.

Prima formă pătratică fundamentală este:

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = du^2 + 9dv^2$.

Punctul de intesecţie al curbelor este $\begin{cases} v = 6u \\ v = -6u \end{cases} \Longleftrightarrow u = v = 0 \Longrightarrow M(3, 0, 0)$.

Pentru $(\Gamma_1) :\ v = 6u \Longrightarrow dv = 6du$.

Pentru $(\Gamma_2) :\ v = -6u \Longrightarrow \delta v = -6\delta u$.

$$\begin{aligned}\cos \sphericalangle((\Gamma_1),(\Gamma_2)) &= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \\ &= \frac{1du\delta u + 0 + 9\cdot 6\cdot(-6)du\delta u}{\sqrt{du^2 + 9\cdot 36du^2}\cdot\sqrt{\delta u^2 + 9\cdot 36\delta u^2}} \\ &= -\frac{323du\delta u}{325du\delta u} = -\frac{323}{325} \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\sphericalangle((\Gamma_1),(\Gamma_2)) = \pi - \arccos\frac{323}{325}.$$

Problema 11.6. Arătaţi că curbele $(\Gamma_1) : u - e^v = 0$ şi $(\Gamma_2) : u^2 + u + 1 - e^{-v} = 0$ care se află pe suprafaţa $(S) : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u + v \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, sunt ortogonale.

Rezolvare:

Derivatele parţiale ale funcţiilor x, y, z sunt:

$$\begin{cases} x'_u(u,v) = \cos v \\ y'_u(u,v) = \sin v \\ z'_u(u,v) = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'_v(u,v) = -u \sin v \\ y'_v(u,v) = u \cos v \\ z'_v(u,v) = 1. \end{cases}$$

$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2.$

$F = -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v + 1 = 1.$

$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1.$

Prima formă pătratică fundamentală este:

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 2du^2 + 2dudv + (u^2 + 1)dv^2.$

Pentru $(\Gamma_1) :\ u = e^v \Longrightarrow du = e^v dv.$

Pentru $(\Gamma_2) :\ u^2+u+1 = e^{-v} \Longrightarrow (2u+1)\delta u = -e^{-v}\delta v \Longrightarrow \delta u = -\dfrac{1}{e^v(2e^v+1)}\delta v$, $G = u^2 + 1 = e^{-v} - u = e^{-v} - e^v.$

Curbele sunt ortogonale dacă

$$Ed u\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0 \Longleftrightarrow$$
$$2e^v dv\left(-\frac{1}{e^v(2e^v+1)}\delta v\right) + e^v dv\delta v - \frac{1}{e^v(2e^v+1)}\delta v dv + (e^{-v} - e^v)dv\delta v = 0 \Longleftrightarrow$$
$$dv\delta v\left(-\frac{2}{2e^v+1} + e^v - \frac{1}{e^v(2e^v+1)} + e^{-v} - e^v\right) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\frac{-2e^v}{e^v(2e^v+1)} - \frac{1}{e^v(2e^v+1)} + \frac{2e^v+1}{e^v(2e^v+1)} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\frac{-2e^v - 1 + 2e^v + 1}{e^v(2e^v+1)} = 0$$ ceea ce este adevărat, deci curbele sunt ortogonale.

Problema 11.7. Fie $(S):\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, o suprafaţă.

a) Scrieţi prima formă pătratică fundamentală a lui (S).

b) Determinaţi elementul de arc pentru curba $(\Gamma) : v = 2u$ care se află pe suprafaţă.

c) Determinaţi lungimea arcului M_1M_2 de pe curba (Γ) unde $M_1(u = 1)$, $M_2(u = 2)$.

d) Determinaţi elementul de arie al suprafeţei (S).

Rezolvare:

a) Derivatele parţiale ale funcţiilor x, y, z sunt:

$$\begin{cases} x'_u(u,v) = 2u \\ y'_u(u,v) = 2u \\ z'_u(u,v) = v \end{cases} ; \begin{cases} x'_v(u,v) = 2v \\ y'_v(u,v) = -2v \\ z'_v(u,v) = u \end{cases} .$$

$E = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2;$

$F = 4uv - 4uv + uv = uv;$

$G = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2.$

Prima formă fundamentală pătratică este:

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2.$

b) $(\Gamma) : v = 2u \Longrightarrow dv = 2du.$

$ds^2 = (8u^2 + 4u^2)du^2 + 2u2udu2du + (8 \cdot 4u^2 + u^2)4du^2 \Longrightarrow ds^2 = 152u^2du \Longrightarrow ds = \sqrt{152}udu.$

c) $l(M_1M_2) = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{152}u\,du = \sqrt{38}u^2\Big|_1^2 = \sqrt{38}(4-1) = 3\sqrt{38}.$

d) Elementul de arie este

$$\begin{aligned} d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv &= \sqrt{(8u^2+v^2)(8v^2+u^2) - u^2v^2}dudv \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{u^4 + 8u^2v^2 + v^4}dudv. \end{aligned}$$

11.6 Probleme propuse

Problema 11.8. Fie $(S): z = x^2 - y^2 + 2y - 4x + 5$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o suprafaţă. Determinaţi:

a) Ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul $M(1, -2, -6)$.

b) Prima formă fundamentală a suprafeţei (S).

c) Elementul de arie al suprafeţei (S).

Problema 11.9. Determinaţi lungimea arcului de curbă $v = \ln(u + \sqrt{u^2+9})$ de pe suprafaţa

$$(S): \overrightarrow{r}(u, v) = u\cos v\,\overrightarrow{i} + u\sin v\,\overrightarrow{j} + 3v\,\overrightarrow{k}, (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

între punctele $M_1(u = 1, v = 2)$ şi $M_2(u = 2, v = 3)$.

Problema 11.10. Determinaţi elementul de arie al suprafeţei

$$(S): \overrightarrow{r}(u, v) = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + uv\,\overrightarrow{k}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Problema 11.11. Determinaţi aria sferei.

Problema 11.12. Scrieţi ecuaţia carteziană a suprafeţei

$$(S): \overrightarrow{r}(u, v) = u^3\overrightarrow{i} + uv\,\overrightarrow{j} + (3u + v^2)\overrightarrow{k}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinaţi prima formă fundamentală a suprafeţei. Scrieţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa (S) în punctul $M(1, 0, 3)$.

Problema 11.13. Fie suprafaţa

$$(S): \overrightarrow{r}(u,v) = (u-v)\overrightarrow{i} + (u+v)\overrightarrow{j} + \frac{u^2+v^2}{2}\overrightarrow{k}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinaţi prima formă fundamentală a suprafeţei. Scrieţi integrala care determină lungimea curbei $(\Gamma): v = 1$ de pe suprafaţă de la $u = 1$ la $u = 2$.

Problema 11.14. Fie suprafaţa

$$(S): \overrightarrow{r}(u,v) = (2+u^2)\cos v\,\overrightarrow{i} + (2+u^2)\sin v\,\overrightarrow{j} + u\,\overrightarrow{k}, u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi].$$

Determinaţi prima formă fundamentală a suprafeţei. Scrieţi integrala care determină lungimea curbei $(\Gamma): v = 0$ de pe suprafaţă de la $u = -1$ la $u = 2$. Calculaţi cosinusul unghiului dintre curbele $(\Gamma_1): \begin{cases} u = 0 \\ v = t \end{cases}$ şi $(\Gamma_2): \begin{cases} u = 2t \\ v = t + \pi \end{cases}$ de pe suprafaţa (S) în punctul $M(u = 0, v = \pi)$.

Problema 11.15. Calculaţi prima formă fundamentală pentru următoarele suprafeţe:

a) paraboloidul eliptic $(S): \overrightarrow{r}(u,v) = au\cos v\,\overrightarrow{i} + bu\sin v\,\overrightarrow{j} + u^2\overrightarrow{k}$, $u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]$.

b) paraboloidul hiperbolic $(S): \overrightarrow{r}(u,v) = au\cosh v\,\overrightarrow{i} + bu\sinh v\,\overrightarrow{j} + u^2\overrightarrow{k}$, $u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]$.

Bibliografie

[1] M. Bercovici et.all, *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială*, Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[2] L. Blaga, *Theory and Applications on Algebra, analytic geometry, differential geometry*, Editura MEGA, 2013

[3] L. Bitay, *Culegere de probleme, algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Institutul Politehnic Cluj Napoca, 1977

[4] L. Brăescu, et. all, *Curs de geometrie*, Universitatea de Vest din Timişoara, 2007

[5] D. Câmpian, I. Raşa, D. Inoan, *An Invitation to Linear Algebra and Analytic Geometry*, Editura Mediamira, 2010

[6] M. Crâşmăreanu, Geometria curbelor şi suprafeţelor, 2014, `http://www.math.uaic.ro/~mcrasm/depozit/Geo2_BOOK.pdf`

[7] Gh. Ionescu et. all, *Probleme de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Institutul Politehnic Cluj Napoca, 1983

[8] P. Matei, Algebră liniară şi Geometrie analitică, Culegere de probleme, Matrixrom, Bucureşti, 2007

[9] G. Păltineanu, et. all. *Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Conspress, Bucureşti, 2011

[10] V. Pop, et.all, *Algebră. Geometrie. Ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme*, Editura Tehnică Cluj, 1995

[11] R. Peter, A. Viorel, S.C. Laszlo, *Elements of Linear Algebra*, UTPRESS, 2014 `http://users.utcluj.ro/~p.radu/Linkuri/Book_newformat.pdf`

[12] Gh. Teoader, S. Toader, T. Lazăr, *Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Editura UTPRESS, 2014

[13] https://math.libretexts.org/

[14] https://www.geogebra.org/3d

[15] https://mathworld.wolfram.com/

[16] https://en.wikipedia.org/