

Mircea ȘUȘCĂ

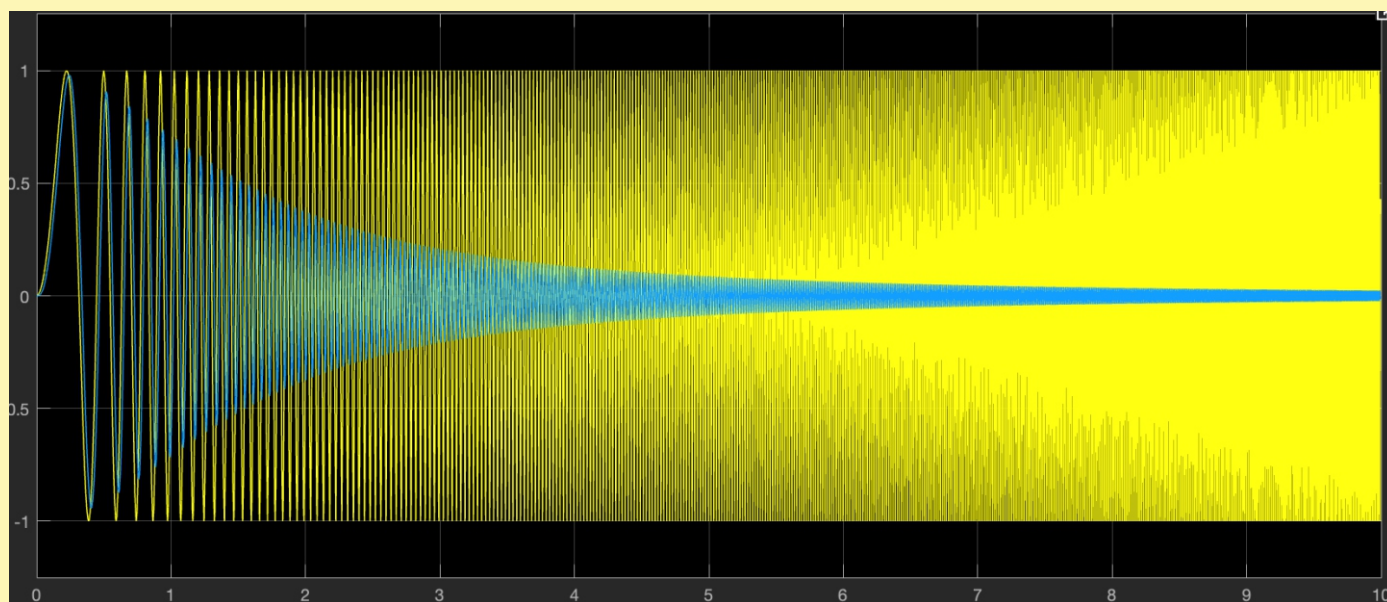
Vlad MIHALY

Dora MORAR

Mirela DOBRA

TEORIA SISTEMELOR 1

Îndrumar de Laborator



U.T.PRESS

Cluj-Napoca, 2025

ISBN 978-606-737-754-5

Mircea ȘUȘCĂ Vlad MIHALY Dora MORAR Mirela DOBRA

TEORIA SISTEMELOR 1

Îndrumar de Laborator



U.T.PRESS
Cluj - Napoca, 2025
SBN 978-606-737-754-5



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Conf.dr.ing. Paula Amalia Raica
Prof.dr.ing. Ioan Lucian Buşoniu

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2025 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-754-5

PREFAȚĂ

Acest îndrumar de laborator este elaborat cu rol de anexă pentru cursul *Teoria Sistemelor I*, predat la secția *Automatică și Informatică Aplicată* din cadrul Facultății de Automatică și Calculatoare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. Suplimentar, lucrarea poate fi parcursă și cu rol de îndrumător aplicativ pentru inginerii din domeniul reglării și folosit pentru consolidarea cunoștințelor teoretice elementare în vederea realizării cercetării în domeniu.

Îndrumarul este structurat în 5 părți. Partea I, intitulată “Preliminarii”, prezintă un sumar al conceptelor matematice și tehnice din cursul *Modelarea Proceselor* premergătoare înțelegerii conceptelor predate. Partea a II-a, intitulată “Modelarea sistemelor LTI”, prezintă conceptul de sistem liniar și invariant în timp, alături de metodele clasice de modelare ale acestora, cu precădere fiind realizarea de stare, pretabilă analizei în domeniul timp, și funcția de transfer, pretabilă domeniului frecvențial. Partea a III-a, intitulată “Analiza sistemelor LTI”, prezintă proprietățile esențiale ale sistemelor LTI, printre care se enumeră stabilitatea, răspunsurile lor la semnale de intrare standard, definirea și estimarea performanțelor, respectiv interconectarea sistemelor. Partea a IV-a, intitulată “Metoda locului rădăcinilor”, prezintă metoda omonimă, cu accent într-o primă etapă pe trasarea locului geometric al polilor sistemului în buclă închisă în funcție de un parametru pozitiv, iar ulterior, pe interpretarea proprietăților sistemului închis pe baza graficului rezultat: stabilitatea, regimurile de funcționare, performanțe. Partea a V-a, intitulată “Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare” prezintă modele de cerințe de evaluare pe baza materiei predate în cadrul laboratorului, cu posibilitatea de a aplica materia predată într-un mod organizat pe un sistem dinamic la alegere în scopul exersării.

Se lucrează în mediul MATLAB[®], respectiv vor fi necesare extensiile Simulink[®] și Control System Toolbox[™].

Autorii, Octombrie 2024.

CUPRINS

Prefață	3
Cuprins	5
Listă figuri	9
Listă tabele	11
I Preliminarii	13
1 Breviar matematic	15
1.1 Operatori	16
1.2 Numere complexe	16
1.3 Elemente de algebră liniară	18
1.4 Polinoame	19
2 Elemente de Modelarea Proceselor	21
2.1 Sisteme electrice	22
2.1.1 Elemente de fizică	22
2.1.2 Alegerea variabilelor de stare	22
2.1.3 Funcționarea unui amplificator operațional (AO)	23
2.2 Sisteme mecanice	23
2.2.1 Elemente de fizică	23
2.2.2 Alegerea variabilelor de stare	23
2.3 Modele matematice ale sistemelor	24
2.3.1 Modelul intrare-stare-ieșire	24
2.3.2 Modelul intrare-ieșire	25
2.4 Exemple rezolvate	25
2.5 Simularea unui sistem dinamic în mediul MATLAB	28
II Modelarea sistemelor LTI	31
3 Funcția de transfer. Analiza în domeniul frecvență	33
3.1 Funcția de transfer. Definiție și proprietăți	34
3.2 Determinarea funcției de transfer a unui circuit RLC	35
3.3 Analiza tipului filtrului	36
3.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB	37
3.5 Probleme propuse	39

4	Modele de tip spațiul stărilor. Analiza în domeniul timp	43
4.1	Spațiul stărilor. Definiție și proprietăți	44
4.2	Circuite cu amplificatoare operaționale cu reacție negativă	44
4.2.1	Exemplul 1	45
4.2.2	Exemplul 2	45
4.3	Simulare în MATLAB	46
4.4	Probleme propuse	48
5	Realizări de stare. Forme canonice	51
5.1	Forma Canonică de Control (FCC)	52
5.1.1	Prezentare teoretică	52
5.1.2	Implementare în MATLAB/Simulink	52
5.2	Forma Canonică de Observare (FCO)	52
5.2.1	Prezentare teoretică	52
5.2.2	Implementare în MATLAB/Simulink	53
5.3	Exemplu rezolvat. Realizarea de stare cu semnificație fizică	53
5.4	Probleme propuse	55
6	Forma minimală a unei funcții de transfer	57
6.1	Determinarea formei minimale	58
6.2	Exemplu rezolvat	59
6.3	Probleme propuse	60
III	Analiza sistemelor LTI	61
7	Stabilitatea sistemelor LTI	63
7.1	Stabilitatea internă și externă	64
7.1.1	Utilizând valorile proprii ale matricei de stare	64
7.1.2	Utilizând polii sistemului	64
7.2	Stabilitatea în sens Lyapunov	65
7.2.1	Metoda II a lui Lyapunov	65
7.3	Criteriul Routh-Hurwitz	66
7.4	Exemplu rezolvat	67
7.5	Moduri de oscilație	69
7.6	Probleme propuse	70
8	Răspunsurile sistemelor LTI la intrări polinomiale	75
8.1	Sistemele de ordin I	76
8.2	Sistemele de ordin II	77
8.2.1	Funcția pondere	77
8.2.2	Răspunsul indicial	78
8.2.3	Răspunsul la rampă	79
8.3	Sisteme de ordin n , $n \in \mathbb{N}$	80
8.4	Probleme propuse	80
8.5	Răspunsuri	80
9	Performanțele sistemelor LTI	83
9.1	Performanțele sistemelor LTI	84

9.1.1	Performanțe în regim tranzitoriu	84
9.1.2	Performanțe în regim staționar	86
9.2	Regimuri de funcționare și moduri de oscilație	86
9.3	Probleme propuse	87
10	Conexiunile sistemelor LTI	91
10.1	Conexiunile sistemelor LTI	92
10.2	Conceptualizarea metodei locului rădăcinilor	93
10.3	Probleme propuse	98
IV	Metoda locului rădăcinilor	101
11	Metoda locului rădăcinilor [I]	103
11.1	Reguli de trasare	104
11.2	Exemple	106
11.3	Soluții	106
11.4	Probleme propuse	109
12	Metoda locului rădăcinilor [II]	111
12.1	Reguli de trasare	112
12.2	Exemple	112
12.3	Soluții	113
12.4	Probleme propuse	116
13	Performanțele sistemelor cu reacție negativă	117
13.1	Breviar teoretic	118
13.2	Probleme propuse	120
V	Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare	123
14	Teste de autoevaluare	125
14.1	Capitolul II, Model 1, $m = 0, 1, n \geq 1$	126
14.2	Capitolul II, Model 2, $m = 0, 1, n \geq 1$	126
14.3	Capitolul III, Model 1, $m \in \{1, 2, 3\}, n \geq 1$	126
14.4	Capitolul III, Model 2, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	127
14.5	Capitolul IV, Model 1, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	127
14.6	Capitolul IV, Model 2, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	128
14.7	Test sumativ, Model 1, $n \geq 1$	129
15	Studiu de caz – Proiect de semestru	131
15.1	Cerințe	132
15.2	Documentație	134
16	Întrebări de autocontrol	137
16.1	Listă de întrebări	138
	Bibliografie	139

LISTĂ FIGURI

2.1	Circuit electric RLC.	25
2.2	Circuit electric cu AO.	26
2.3	Sistemul mecanic masă-resort-amortizor.	27
2.4	Sistem mecanic de rotație.	28
2.5	Exemplificarea integrării numerice a modelului circuitului RLC din Exemplul 1.	29
3.1	Reprezentarea unui circuit RLC paralel.	35
3.2	Divizorul de tensiune.	36
3.3	Stânga: patru conexiuni RLC serie. Dreapta: patru conexiuni RLC paralel.	37
3.4	Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului.	39
4.1	Filtru Sallen–Key de tip trece-jos	45
4.2	Circuit de ordin I cu amplificator operațional	46
4.3	Implementarea în Simulink a FTJ.	47
4.4	Răspunsul sistemului la intrare sinusoidală de frecvență variabilă – reiese caracteristica de FTJ.	48
4.5	Filtru Sallen–Key de tip trece-sus	49
4.6	Circuit electric cu două amplificatoare operaționale	49
4.7	Filtru Sallen–Key de tip <i>notch</i>	50
5.1	Filtru RLC de tip trece-jos de ordin 3	53
5.2	Implementarea FCC în Simulink	54
5.3	Implementarea FCO în Simulink	54
5.4	Realizarea de stare a filtrului RLC trece-jos	55
5.5	Rezultatele simulării circuitului la intrare de tip <i>Chirp</i>	56
5.6	Filtru Sallen–Key de tip <i>notch</i>	56
6.1	Filtru Sallen–Key de tip <i>notch</i>	60
7.1	Răspunsul sistemului din exemplu la intrare de tip treaptă unitară	69
7.2	Sistemul mecanic cu pendul inversat pe cărucior	72
7.3	Structura sistemului mecanic de suspensie a unui automobil	73
9.1	Performanțele unui sistem de ordinul I	85
9.2	Performanțele unui sistem oscilant de ordinul II	85
9.3	Calculul erorii staționare la poziție în cazul unui sistem LTI	86

9.4	Calculul erorii staționare la viteză în cazul unui sistem LTI	87
9.5	Regimurile și modurile de oscilație ale unui sistem de ordin II în funcție de poziția polilor în planul complex	89
10.1	Conexiunea serie a sistemelor LTI	92
10.2	Conexiunea în paralel a sistemelor LTI	92
10.3	Conexiunea cu reacție a sistemelor LTI	93
10.4	Sistem LTI cu interconexiuni	93
10.5	Schema de reglare tipică metodei locului rădăcinilor	94
10.6	Locul rădăcinilor pentru Exemplul 1	94
10.7	Locul rădăcinilor pentru Exemplul 2	95
10.8	Locul rădăcinilor pentru Exemplul 3	97
10.9	Locul rădăcinilor pentru exemplul 4	97
10.10	Structura unui regulator PI (proporțional-integrator).	99
10.11	Structura de reglare pentru Problema 3	99
10.12	Structura de reglare pentru Problema 3	100
10.13	Structura de reglare pentru Problema 3	100
10.14	Structura de reglare pentru Problema 4	100
10.15	Structura de reglare pentru Problema 5	100
11.1	Unghiurile singularităților față de axa reală pozitivă pentru un punct de test.	105
11.2	Exemplul a).	106
11.3	Exemplul b).	107
11.4	Exemplul c).	107
11.5	Exemplul d).	108
11.6	Exemplul e).	109
12.1	Exemplul a).	113
12.2	Exemplul b).	114
12.3	Exemplul c).	115
12.4	Exemplul d).	115
13.1	Sistem de reglare cu reacție negativă	118
13.2	Performanțele regimului tranzitoriu deduse pe baza locației polilor în planul complex.	119
14.1	Structura unui sistem cu reacție negativă	129
15.1	Structura unui sistem de reglare cu regulator proporțional	132
15.2	Structura unui sistem de reglare cu regulator de tip <i>Lead/Lag</i> (cu avans/în-târziere de fază)	133
15.3	Structura unui sistem de reglare cu regulator de tip proporțional-integrator (PI)	134

LISTĂ TABELE

1.1	Operatori matematici	16
1.2	Funcții trigonometrice	17
1.3	Funcții matematice de bază	18
1.4	Proprietățile unei matrice și operații pe matrice	18
1.5	Funcții pentru polinoame	19
2.1	Echivalența electric-mecanic	24
7.1	Tabelul Routh-Hurwitz pentru polinomul $P_c(s)$ din (7.4)	66
7.2	Parametrii sistemului cu pendul inversat pe cărucior	72
7.3	Parametrii sistemului de suspensie	73
8.1	Tabel de transformate Laplace	81

Partea I

Preliminarii

Lucrarea 1

Breviar matematic

1.1	Operatori	16
1.2	Numere complexe	16
1.3	Elemente de algebră liniară	18
1.4	Polinoame	19

Lucrarea de față prezintă un rezumat al conceptelor matematice necesare ca precondiții pentru studiul materialului curent, cu accent pe implementarea lor utilizând mediul MATLAB. Printre acestea, se enumeră elemente de algebră liniară, trigonometrie, analiză matematică și analiză complexă.

1.1 Operatori

Operatorii matematici uzuali pot fi folosiți în expresii iar ordinea operatorilor aritmetici poate fi modificată folosind paranteze rotunde. Cei mai folosiți operatori se găsesc în Tabelul 1.1.

Simbol	Rol	Simbol	Rol
+	Adunare	.*	Înmulțirea element cu element
-	Scădere	./	Împărțirea element cu element
*	Înmulțire	.^	Ridicarea la putere element cu element
/	Împărțirea	'	Transpusa
^	Ridicarea la putere	\	Împărțirea la stânga

Tabelul 1.1: Operatori matematici

1.2 Numere complexe

În MATLAB se poate opera cu numere complexe, cu parte reală și parte imaginară. Unitatea imaginară, al cărei patrat este -1 , este stocată în variabila i sau j . Aceste doua variabile pot fi suprascrise! Numărul complex $x = 2 + 3i$ și conjugatul său $y = 2 - 3i$ pot fi declarate astfel, folosind fie i , fie j .

```
>> x=2+3i % alternative: x=2+3i, x=2+3*1i, x=2+3*1j
x =
    2.0000 + 3.0000i
>> y=2-3j % alternative: y=2-3i, y=2-3*1i, y=2-3*1j
y =
    2.0000 - 3.0000i
```

În MATLAB sunt incluse funcții predefinite pentru multe operații matematice. Codul sursă al acestora nu este, de obicei, disponibil utilizatorului. Pentru a determina modul în care se folosește o anumită funcție, folosiți sintaxa `help nume_functie` sau `doc nume_functie`. *Help* afișează informațiile în linia de comandă, iar *doc* deschide o fereastră nouă în care se regăsește descrierea funcției, exemple de utilizare și alte informații.

```
>> help det
>> doc inv
```

Câteva funcții trigonometrice uzuale sunt prezentate în Tabelul 1.2. Atât paramtrii de intrare, cât și rezultatul funcției, se exprima în radiani. [Aceste funcții au și un echivalent care lucrează cu variabilele în grade, precum `sind`, `atand`, `atand2` etc., respectiv există funcțiile de conversie din radiani în grade și reciproc: `rad2deg`, `deg2rad`.](#)

Tabelul 1.2: Funcții trigonometrice

<code>sin(x)</code>	Sinusul elementelor din x (în radiani)
<code>cos(x)</code>	Cosinusul elementelor din vectorul x (în radiani)
<code>asin(x)</code>	Arcsinus pentru elementele din x (rezultatul în radiani)
<code>acos(x)</code>	Arccosinus pentru elementele din x (rezultatul în radiani)
<code>tan(x)</code>	Tangenta elementelor din vectorul x (în radiani)
<code>atan(x)</code>	Arctangenta elementelor din x (rezultatul în radiani)
<code>atan2(y,x)</code>	Argumentul în patru cadrane al numărului complex $z = x + jy \in \mathbb{C}$.

În exemplul de mai jos, se calculează sinusul unghiurilor 90° , 60° și 30° , unde pi este o constantă predefinită în MATLAB.

```
>> angles_degrees=[90 60 30]
angles_degrees =
    90    60    30
>> sin(angles_degrees*pi/180)
ans =
    1.0000    0.8660    0.5000
```

Pentru calculul corect al argumentului unui număr complex $z = x + jy$, se recomandă funcția `atan2(y,x)` (atenție la ordinea argumentelor!), care se definește pe baza cercului trigonometric în felul următor:

$$\angle z = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{if } x > 0 \text{ and } y \geq 0 \text{ (QI)}, \\ \pi - \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \text{ (QII)}, \\ \pi + \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \text{ (QIII)}, \\ 2\pi - \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{if } x > 0 \text{ and } y < 0 \text{ (QIV)}, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined}, & \text{if } x = y = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Numerele complexe pot fi descrise atât în formă algebrică, cât și formă trigonometrică echivalentă (utilizând **formula lui Euler**):

$$z = \text{Re}(z) + j \text{Im}(z) = |z|e^{j\angle z} = |z|(\cos(\angle z) + j \sin(\angle z)), \quad (1.2)$$

unde $\angle z = \arg(z)$ se numește **faza** sau **argumentul** numărului complex z . Argumentul complex are următoarea proprietate în funcție de produsul și raportul a două numere complexe:

$$\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2, \quad \angle\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \angle z_1 - \angle z_2. \quad (1.3)$$

În Tabelul 1.3 este dată o listă cu cele mai utilizate funcții matematice.

Tabelul 1.3: Funcții matematice de bază

$\text{abs}(x)$	Valoarea absolută a elementelor din x
$\text{sqrt}(x)$	Radical din x
$\text{imag}(x)$	Partea imaginară a lui x
$\text{real}(x)$	Partea reală a lui x
$\text{conj}(x)$	Conjugatul lui x
$\text{log}(x)$	Logaritm natural
$\text{log10}(x)$	Logaritm în baza 10
$\text{exp}(x)$	Funcția exponențială

1.3 Elemente de algebră liniară

În Tabelul 1.4 sunt date câteva funcții folosite pentru proprietățile unei matrice sau pentru construirea matricelor.

Tabelul 1.4: Proprietățile unei matrice și operații pe matrice

$\text{inv}(A)$	Inversa matricei A
$\text{eig}(A)$	Valorile proprii ale matricei A
$\text{det}(A)$	Determinantul matricei A
$\text{rank}(A)$	Rangul
eye	Creează o matrice unitate
ones, zeros	Creează o matrice compusă din unu sau zero
diag	Creează o matrice diagonală

Valorile proprii $\lambda_i \in \Lambda(A)$, $i = \overline{1, n}$ ale unei matrice pătratice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sunt soluțiile ecuației caracteristice:

$$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0, \quad (1.4)$$

unde $v \in \mathbb{C}^n$ se numește **vector propriu** aferent valorii proprii $\lambda \in \mathbb{C}$. Mulțimea $\Lambda(A)$ a valorilor proprii se numește **spectrul** matricei A .

Ele caracterizează direct comportamentul soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.5)$$

cu soluția în funcție de condiția inițială x_0 :

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0. \quad (1.6)$$

Pentru calculul determinantilor pe foaie, se amintesc: regula triunghiului, regula lui Sarrus, respectiv descompunerea în minori principali prin intermediul teoremei lui Laplace. O matrice pătratică $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este nenul, i.e. $\det(A) \neq 0$, fapt echivalent cu a avea rang maxim, i.e. $\text{rank}(A) = n$.

1.4 Polinoame

În MATLAB, **polinoamele** sunt reprezentate printr-un vector linie care conține coeficienții ordonați în ordinea descrescătoare a puterilor variabilei. Astfel, pentru un polinom de ordinul n , vom declara un vector de lungime $n + 1$. Polinoamele:

$$p(s) = s^4 + 2s^3 - 3s^2 + 4s - 5 \text{ și } q(s) = s^3 + 6,$$

sunt declarate ca vectori astfel:

```
>> p = [1 2 -3 4 -5];
>> q = [1 0 0 6];
```

Câteva funcții folosite pentru polinoame sunt date în Tabelul 1.5.

Tabelul 1.5: Funcții pentru polinoame

roots(p)	Rădăcinile polinomului p
polyval(p,v)	Polinomul p, evaluat în v
conv(p,q)	Înmulțirea polinoamelor
deconv(p,q)	Împărțirea polinoamelor
residue(b,a)	Reziduurile, polii și transferul direct pentru funcția rațională $b(s)/a(s)$

Printre conceptele esențiale în lucrul cu polinoame se enumeră teorema împărțirii cu rest, schema lui Horner, impunerea rădăcinilor multiple (prin anularea suplimentară a derivatelor).

O **funcție rațională** se definește ca raport de două polinoame $b(s)$ și $a(s)$:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (1.7)$$

Dacă rădăcinile de la numitor au multiplicitatea 1, atunci $H(s)$ admite o descompunere de forma:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \dots + \frac{r_2}{s - p_2} + \frac{r_1}{s - p_1} + k(s), \quad (1.8)$$

având **reziduurile** r_1, \dots, r_n , **polii** p_1, \dots, p_n și **transferul direct** $k(s)$.

Lucrarea 2

Elemente de Modelarea Proceselor

2.1	Sisteme electrice	22
2.2	Sisteme mecanice	23
2.3	Modele matematice ale sistemelor	24
2.4	Exemple rezolvate	25
2.5	Simularea unui sistem dinamic în mediul MATLAB	28

În această lucrare de laborator sunt prezentate principalele elemente de modelare a proceselor care vor fi utilizate în cadrul disciplinei Teoria Sistemelor. Lucrarea conține informații legate de alegerea variabilelor de stare în sisteme electrice și mecanice, alături de principalele elemente necesare pentru determinarea modelelor de tip spațiul stărilor (intrare-stare-ieșire) și a modelelor de tip intrare-ieșire.

2.1 Sisteme electrice

2.1.1 Elemente de fizică

Principalele elemente de fizică necesare pentru modelarea sistemelor electrice fără amplificatoare operaționale sunt legile lui Kirchhoff și legea lui Ohm.

Legea I a lui Kirchhoff: Suma intensităților curenților care intră într-un nod de rețea este egală cu suma intensităților curenților care ies din același nod de rețea.

Legea a II-a a lui Kirchhoff: Suma algebrică a tuturor căderilor de tensiune dintr-un ochi de rețea este egală cu zero.

Legea lui Ohm: Într-un circuit intensitatea (I) curentului electric este direct proporțională cu tensiunea aplicată și invers proporțională cu rezistența (R) din circuit:

$$I = \frac{U}{R}.$$

2.1.2 Alegerea variabilelor de stare

Variabila de stare este caracteristică unui element capabil să înmagazineze energie. Aceasta se alege în acord cu elementul care apare în expresia energiei înmagazinate.

- a) **Bobina** este caracterizată prin inductanța sa L ce se măsoară în $[H]$. Energia înmagazinată în bobină se poate exprima astfel:

$$E_L = \frac{1}{2}Li_L^2,$$

de unde putem deduce că **variabila de stare** caracteristică bobinei este **intensitatea curentului prin bobină** i_L . Căderea de tensiune pe bobină se poate exprima în funcție de variabila de stare:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int u_L(t)dt.$$

- b) **Condensatorul** este caracterizat prin capacitatea sa C ce se măsoară în $[F]$. Energia înmagazinată în condensator se poate exprima astfel:

$$E_C = \frac{1}{2}Cu_C^2,$$

de unde putem deduce că **variabila de stare** caracteristică condensatorului este **căderea de tensiune pe condensator** u_C . Intensitatea curentului prin condensator se poate exprima în funcție de variabila de stare:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_C = \frac{1}{C} \int i_C(t)dt.$$

- c) **Rezistorul** este caracterizat prin rezistența sa R ce se măsoară în $[\Omega]$. Rezistorul **nu** înmagazinează energie, deci **pentru rezistor nu se aleg variabile de stare**. Energia disipată de un rezistor este dată de:

$$E_R = \frac{1}{2}Ri_R^2 = \frac{1}{2R}u_R^2.$$

2.1.3 Funcționarea unui amplificator operațional (AO)

Pentru a modela circuitele active (cele în care avem amplificatoare operaționale), se consideră următoarele două ipoteze simplificatoare pentru modelarea unui AO:

- intensitatea curenților de intrare în AO este nulă: $i_+ = i_- = 0$;
- potențialele la bornele de intrare ale AO sunt egale: $V_+ = V_-$.

2.2 Sisteme mecanice

2.2.1 Elemente de fizică

Principalele elemente de fizică necesare pentru modelarea sistemelor mecanice sunt legile lui Newton.

Principiul I al mecanicii: Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte forțe sau suma forțelor care acționează asupra sa este nulă.

Principiul al II-lea al mecanicii: O forță care acționează asupra unui corp îi imprimă acestuia o accelerație, proporțională cu forța și invers proporțională cu masa corpului:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Principiul al III-lea al mecanicii: Când un corp acționează asupra altui corp cu o forță (numită forță de acțiune), cel de-al doilea corp acționează și el asupra primului cu o forță (numită forță de reacțiune) de aceeași mărime și de aceeași direcție, dar de sens contrar.

Principiul suprapunerii forțelor: Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui corp, fiecare va produce propria sa accelerație, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a acestora:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

2.2.2 Alegerea variabilelor de stare

Exact ca în cazul precedent, variabila de stare este caracteristică unui element capabil să înmagazineze energie. Aceasta se alege în acord cu elementul care apare în expresia energiei înmagazinate.

- a) **Masa** M se măsoară în $[kg]$. Energia înmagazinată este dată de energia cinetică și se poate exprima astfel:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2,$$

de unde putem deduce că **variabila de stare** caracteristică masei este **viteza de deplasare** v .

- b) **Resortul** este caracterizat prin constanta elastică k ce se măsoară în $[N/m]$. Energia înmagazinată în resort este energia de deformare și se poate exprima astfel:

$$E_k = \frac{1}{2}kx^2,$$

de unde putem deduce că **variabila de stare** caracteristică resortului este **alungirea acestuia** x . Forța este dată de legea lui Hooke:

$$F = kx.$$

- c) **Amortizorul** este caracterizat prin coeficientul de frecare B ce se măsoară în $[Ns/m]$. Amortizorul **nu** înmagazinează energie, deci **pentru amortizor nu se aleg variabile de stare**. Forța se poate exprima astfel:

$$F = Bv.$$

Remarcă: Se poate realiza o echivalență între elementele clasice din domeniul electric și cele din domeniul mecanic conform Tabelului 2.1:

Electric	Mecanic
C	M
1/L	K
1/R	B

Tabelul 2.1: Echivalența electric-mecanic

2.3 Modele matematice ale sistemelor

2.3.1 Modelul intrare-stare-ieșire

Un **model de tip spațiul stărilor** al unui sistem liniar și invariant în timp este un model de forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \end{cases}$$

unde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ este vectorul variabilelor de stare, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ este vectorul intrărilor, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ este vectorul ieșirilor, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este matricea de stare, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ este matricea de intrare, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ este matricea de ieșire, iar $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ este matricea transferului instantaneu.

Pentru modelare se consideră atâtea variabile de stare câte elemente capabile să înmagazineze energie avem în sistem. Numărul acestor variabile de stare constituie **ordinul sistemului**.

2.3.2 Modelul intrare-ieșire

Pentru sistemele liniare și invariate în timp, modelul intrare-ieșire este reprezentat de o [ecuație diferențială liniară](#), omogenă și cu coeficienți constanți:

$$b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) = a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t).$$

2.4 Exemple rezolvate

Să se deducă modelele intrare-stare-ieșire și intrare-ieșire ale următoarelor sisteme electrice și mecanice.

Exemplul 1 Se consideră circuitul electric din Figura 2.1. Avem două elemente care înmagazinează energie: bobina L și condensatorul C . Vectorul variabilelor de stare este:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_L \\ u_C \end{pmatrix}.$$

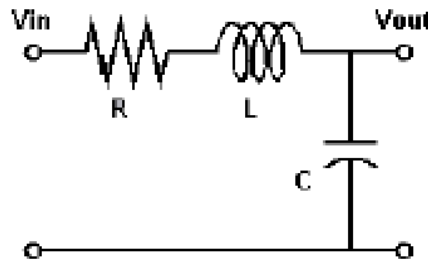


Figura 2.1: Circuit electric RLC.

Din legile lui Kirchhoff și legea lui Ohm putem deduce:

$$\begin{cases} i_R = i_L = i_C = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow x_1 = C \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1; \\ u_{in} = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u = R x_1 + L \dot{x}_1 + x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u, \end{cases}$$

iar pentru ecuația de ieșire avem $y = u_C = x_2$. Așadar, setul de ecuații diferențiale de stare, împreună cu ecuația liniară de ieșire, pot fi puse în formă matriceală astfel:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (2.1)$$

Pentru a determina modelul matematic intrare-ieșire, ne vom folosi de ochiul de circuit și avem:

$$u = u_R + u_L + u_C \Rightarrow u = R i_R + L \frac{di_L}{dt} + y.$$

Dar avem:

$$i_R = i_L = i_C = C\dot{y},$$

de unde rezultă că ecuația intrare-ieșire este:

$$u = RC\dot{y} + LC\ddot{y} + y.$$

Exemplul 2 Se consideră circuitul electric din Figura 2.2. Avem două elemente care înmagazinează energie: condensatoarele C_1 și C_2 . Vectorul variabilelor de stare este:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{pmatrix}.$$

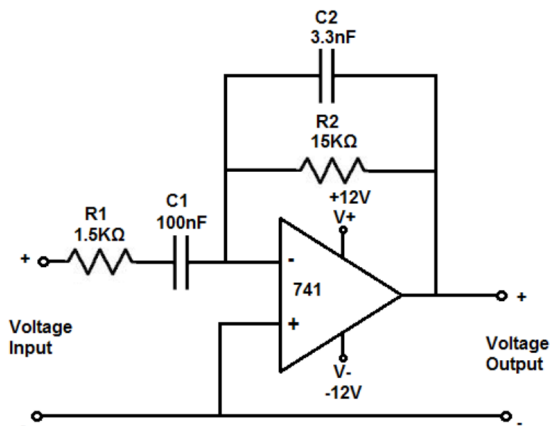


Figura 2.2: Circuit electric cu AO.

Deoarece borna pozitivă este legată la masă, potențialul bornei negative va fi $V_- = 0$. Aplicăm Kirchhoff pe acest ochi de circuit și avem:

$$u_{in} = u_{R_1} + u_{C_1} \Rightarrow u = R_1 C_1 \dot{x}_1 + x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u.$$

Apoi, deoarece intensitatea curenților de intrare în AO este 0, avem:

$$i_{C_1} = i_{C_2} + i_{R_2},$$

iar din aplicarea legii lui Kirchhoff pe ochiul de sus avem:

$$u_{C_2} = u_{R_2} \Rightarrow x_2 = R_2 (C_1 \dot{x}_1 - C_2 \dot{x}_2) \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{R_1 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{R_1 C_2} u.$$

Pentru ecuația de ieșire avem:

$$0 - y = u_{C_2} \Rightarrow y = -x_2.$$

Așadar, setul de ecuații diferențiale de stare, împreună cu ecuația liniară de ieșire, pot fi puse în formă matriceală astfel:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{R_1 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{R_1 C_2} u \\ y = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_1 C_2} \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Exemplul 3 Se consideră sistemul mecanic din Figura 2.3 asupra căruia acționăm cu o forță F în sus. Avem două elemente care înmagazinează energie: masa m și resortul k . Vectorul variabilelor de stare este:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

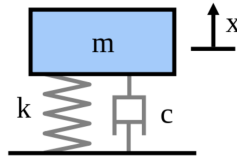


Figura 2.3: Sistemul mecanic masă-resort-amortizor.

În acest caz este mai simplu să scoatem direct modelul matematic intrare-ieșire:

$$F = m\ddot{x} + kx + c\dot{x}.$$

Dacă ne uităm la modul cum au fost alese variabilele de stare, obținem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ F = m\dot{x}_2 + kx_1 + cx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F \end{cases},$$

de unde putem deduce scrierea matriceală a modelului de tip spațiul-stărilor, considerând ieșirea ca fiind deplasarea x a corpului:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{1}{m} \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.2)$$

Exemplul 4 Se consideră sistemul mecanic de rotație din Figura 2.4. Avem trei elemente care înmagazinează energie: masele în rotație caracterizate prin inerțiile J_1 și J_2 și resortul K . Vectorul variabilelor de stare este:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

Scoatem din nou mai întâi modelul intrare-ieșire pentru fiecare subsistem:

$$\begin{cases} T = J_1\ddot{\theta}_1 + D_1\dot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) \\ K(\theta_1 - \theta_2) = J_2\ddot{\theta}_2 + D_2\dot{\theta}_2 \end{cases}.$$

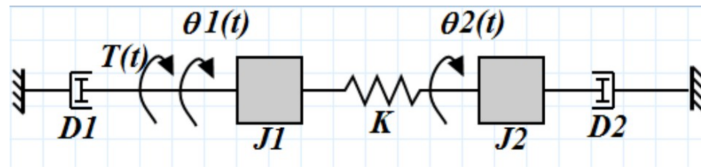


Figura 2.4: Sistem mecanic de rotație.

Dacă ne uităm la modul cum au fost alese variabilele de stare, obținem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ T = J_1 \dot{x}_2 + D_1 x_2 + K(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ K(x_1 - x_3) = J_2 \dot{x}_4 + D_2 x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{J_1} x_1 - \frac{D_1}{J_1} x_2 + \frac{K}{J_1} x_3 + \frac{1}{J_1} T \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{K}{J_2} x_1 - \frac{K}{J_2} x_3 - \frac{D_2}{J_2} x_4 \end{cases},$$

de unde putem deduce scrierea matriceală a modelului de tip spațiul-stărilor, considerând ieșirea ca fiind poziția unghiulară a corpului cu momentul de inerție J_2 :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{D_1}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0 & \frac{1}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K}{J_2} & 0 & -\frac{K}{J_2} & -\frac{D_2}{J_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.3)$$

2.5 Simularea unui sistem dinamic în mediul MATLAB

Pentru simularea sistemelor dinamice reprezentate prin modelul intrare/stare/ieșire se poate considera în MATLAB mecanismul `odexy` de integrare a ecuațiilor diferențiale ordinare (engl. *ordinary differential equations*). Există mai multe implementari ale algoritmilor de integrare numerică, iar acestea diferă prin precizia furnizată în comparație cu timpul de execuție necesar. Exemple de implementări în MATLAB sunt funcțiile `ode23`, `ode23tb`, `ode45`, `ode15s`, `ode15i`, `ode113`, `ode89`, printre altele.

Sintaxa apelării unei funcții de tip `odexy` este dată de:

$$[t, x] = \text{odexy}(\text{SYSFCN}, \text{TSPAN}, x_0), \quad (2.4)$$

unde `SYSFCN` referențiază funcția care precizează dinamica sistemului, având interfața $dx = \text{SYSFCN}(t, x) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(t, x(t))$, `TSPAN` este un vector care specifică intervalul de timp în care să se efectueze simularea, iar `x0` reprezintă vectorul condițiilor inițiale pentru variabilele de stare: $x(0) = x_0$. Funcția returnează vectorul de timp `t` și stările $x(t)$ ale sistemului simulat.

Spre exemplificare, pentru circuitul RLC din Exemplul 1 cu realizarea de stare (2.1), se definește dinamica de stare a sistemului prin funcția `sysRLC`, implementată astfel:

```

1 function dx = sysRLC(t,x)
2 R = 200; L = 3.3e-6; C = 4.7e-9;
3 A = [-R/L,-1/L;1/C,0]; B = [1/L;0];
4 u = 2; % intrare de tip treapta de 2[V]
5 dx = A*x+B*u;
6 end

```

Integrarea sistemului de ecuații diferențiale descris de funcția `sysRLC` se poate face precum în fișierul sursă următor, în care se afișează stările într-o subfigură, urmat de ieșirea sistemului în a doua subfigură, conform Figurii 2.5.

```

1 x0 = [2,5]; % 2[A], 5[V]
2 [t,x] = ode23(@sysRLC,[0,5e-6],x0);
3
4 subplot(2,1,1), plot(t,x,'linewidth',3), grid
5 legend('x1=iL','x2=uC')
6 xlabel('Timp [s]'); ylabel('x(t)'); title('Simulare ode23')
7
8 y = [0,1]*x'+[0]*2;
9 subplot(2,1,2), plot(t,y,'linewidth',3), grid
10 xlabel('Timp [s]'); ylabel('y(t)'); legend('y=x2')

```

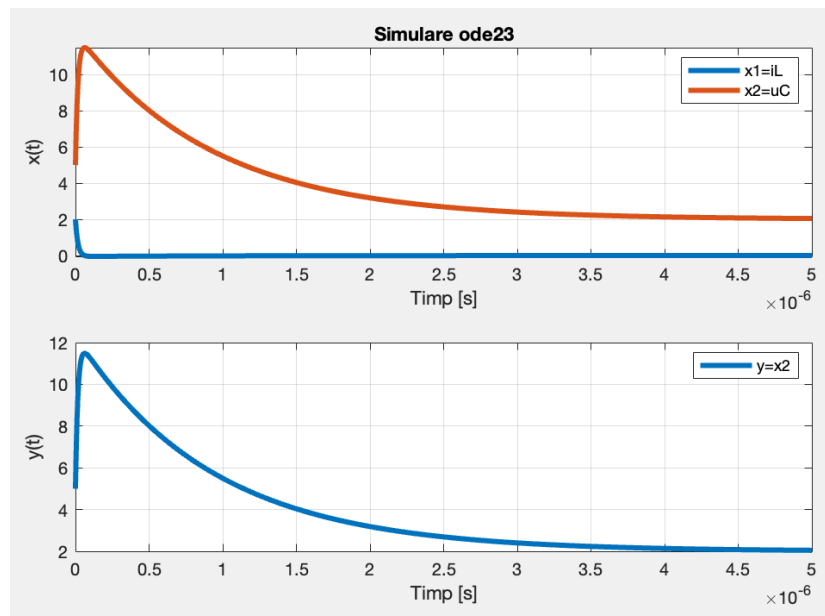


Figura 2.5: Exemplificarea integrării numerice a modelului circuitului RLC din Exemplul 1.

Partea II

Modelarea sistemelor LTI

Lucrarea 3

Funcția de transfer. Analiza în domeniul frecvență

3.1	Funcția de transfer. Definiție și proprietăți	34
3.2	Determinarea funcției de transfer a unui circuit RLC	35
3.3	Analiza tipului filtrului	36
3.4	Analiza tipului filtrului în MATLAB	37
3.5	Probleme propuse	39

În lucrarea de față se prezintă posibilitatea de a scrie modelul matematic de tip intrare-ieșire al unui sistem continuu, liniar și invariant în timp (engl. *Linear and Time-Invariant* – LTI) folosind transformata Laplace. De asemenea, se va prezenta o modalitate de a simula un sistem descris printr-o funcție de transfer în MATLAB și de a determina tipul filtrului.

3.1 Funcția de transfer. Definiție și proprietăți

În domeniul sistemelor de control (engl. *Control Systems*), sistemele liniare și invariante în timp (LTI) reprezintă o clasă de sisteme intens studiate. Astfel, un sistem este **liniar**, dacă acesta respectă **principiul superpoziției**, ceea ce înseamnă că are următoarele proprietăți:

- **aditivitatea**: dacă pentru intrarea $u_1(t)$ avem ieșirea $y_1(t)$, iar pentru intrarea $u_2(t)$ avem ieșirea $y_2(t)$, atunci pentru intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ avem ieșirea $y_1(t) + y_2(t)$;
- **omogenitatea**: dacă pentru intrarea $u(t)$ avem ieșirea $y(t)$, atunci pentru intrarea $\alpha \cdot u(t)$ avem ieșirea $\alpha \cdot y(t)$, oricare ar fi constanta α .

Un sistem este **invariant în timp** dacă are loc implicația: dacă pentru intrarea $u(t)$ avem ieșirea $y(t)$, atunci pentru intrarea $u(t - \tau)$ avem ieșirea $y(t - \tau)$, oricare ar fi durata τ .

Pentru un sistem cu o singură intrare și o singură ieșire (engl. *Single-Input Single-Output* – SISO), pornind de la ecuația diferențială intrare-ieșire:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \quad (3.1)$$

prin aplicarea transformatei Laplace, obținem:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s), \quad (3.2)$$

unde:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \quad \text{și} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s), \quad (3.3)$$

iar relația (3.2) se poate scrie:

$$H(s) = \left. \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}(s)}{\mathcal{L}\{u(t)\}(s)} \right|_{CI \equiv 0} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Astfel, funcția de transfer a unui sistem LTI se definește ca raportul dintre transformata Laplace a semnalului de intrare și transformata Laplace a semnalului de ieșire, în **condiții inițiale nule**. De asemenea, funcția de transfer se poate exprima ca un raport de două polinoame:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (3.4)$$

Avem trei categorii de sisteme: **propriu** ($m = n$), **strict propriu** ($m < n$) și **impropriu** ($m > n$).

Pentru reprezentarea funcției de transfer (3.4), rădăcinile polinomului de la numitor se numesc **polii** sistemului, iar rădăcinile polinomului de la numărător se numesc **zerourile** sistemului. Mulțimea polilor și a zerourilor formează **singularitățile** sistemului. Gradul polinomului de la numitor, adică numărul polilor, determină **ordinul sistemului**.

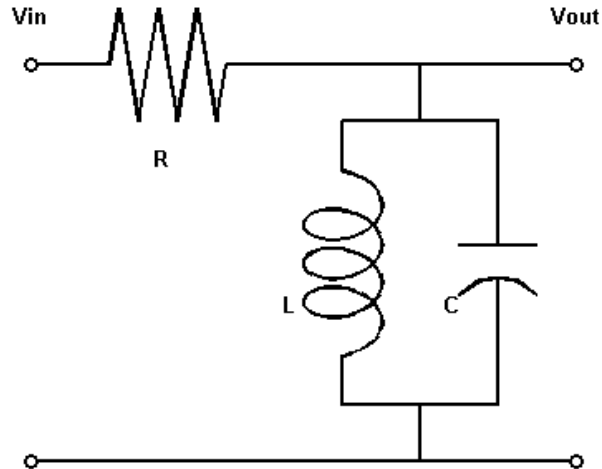


Figura 3.1: Reprezentarea unui circuit RLC paralel.

3.2 Determinarea funcției de transfer a unui circuit RLC

Se consideră circuitul RLC din Figura 3.1.

Prin aplicarea legilor lui Kirchoff și a legii lui Ohm, obținem ecuația diferențială ordinară care modelează dinamica circuitului din Figura 3.1:

$$RC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L} y(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.5)$$

Aplicând transformata Laplace ecuației diferențiale intrare-ieșire (3.5) în condiții inițiale nule, obținem funcția de transfer ca raport de două polinoame:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC} s}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}}. \quad (3.6)$$

O altă posibilitate de a obține funcția de transfer este să aplicăm regula divizorului de tensiune. Astfel, putem obține un circuit de tipul celui din Figura 3.2, iar funcția de transfer a acestuia este:

$$H(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (3.7)$$

Folosind această structură, pentru sistemul din Figura 3.1 obținem funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{Z_{L||C}(s)}{Z_R(s) + Z_{L||C}(s)} = \frac{\frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}}}{R + \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}}} = \frac{\frac{1}{RC} s}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}}. \quad (3.8)$$

Trebuie menționat faptul că funcția de transfer este unică, spre deosebire de modelele $u/\mathbf{x}/y$, care se pot exprima într-o infinitate de moduri. Acest lucru se poate observa comparând rezultatele obținute cu cele două metode în relațiile (3.5) și (3.8). În tabelul din Figura 3.3 sunt prezentate opt filtre RLC serie și paralel.

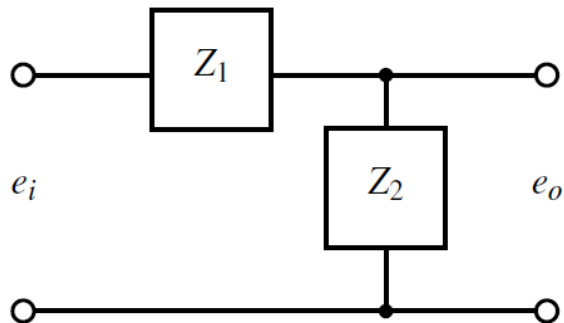


Figura 3.2: Divizorul de tensiune.

3.3 Analiza tipului filtrului

Pentru a analiza dacă o intrare armonică de pulsație dată ω_0 este tăiată sau este lăsată să treacă, putem apela la modelul de tip funcție de transfer. Astfel, putem compara raportul dintre amplitudinea semnalului de intrare și amplitudinea semnalului de ieșire cu valoarea $\sqrt{2}/2$, valoare care corespunde celor -3 [dB] din electronică, i.e. energia semnalului de ieșire este la jumătate din cea a intrării. Așadar:

- dacă $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci semnalul $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ este considerat **trecut**;
- dacă $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci semnalul $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ este considerat **tăiat**.

Pentru a determina tipul filtrului, putem studia comportamentul în zona frecvențelor joase, în zona frecvențelor înalte și, la nevoie, în zona frecvențelor medii. Astfel:

- în zona frecvențelor joase avem: $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$, cantitate ce trebuie comparată cu $\sqrt{2}/2$;
- în zona frecvențelor înalte avem: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)|$, cantitate ce trebuie comparată cu $\sqrt{2}/2$.

Dacă una dintre limite este peste valoarea de prag, iar cealaltă sub valoarea de prag, atunci natura filtrului poate fi determinată doar pe baza acestora, fiind filtru trece jos (FTJ) sau filtru trece sus (FTS).

În cazul circuitului prezentat în secțiunea anterioară avem:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = 0, \quad (3.9)$$

ceea ce înseamnă că filtrul ar putea trece doar frecvențe medii. Pentru a verifica dacă acest lucru este posibil, încercăm frecvențele deduse pe baza termenului liber. Astfel, dacă ne uităm la un semnal de pulsație:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |H(j\omega)| = 1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3.10)$$

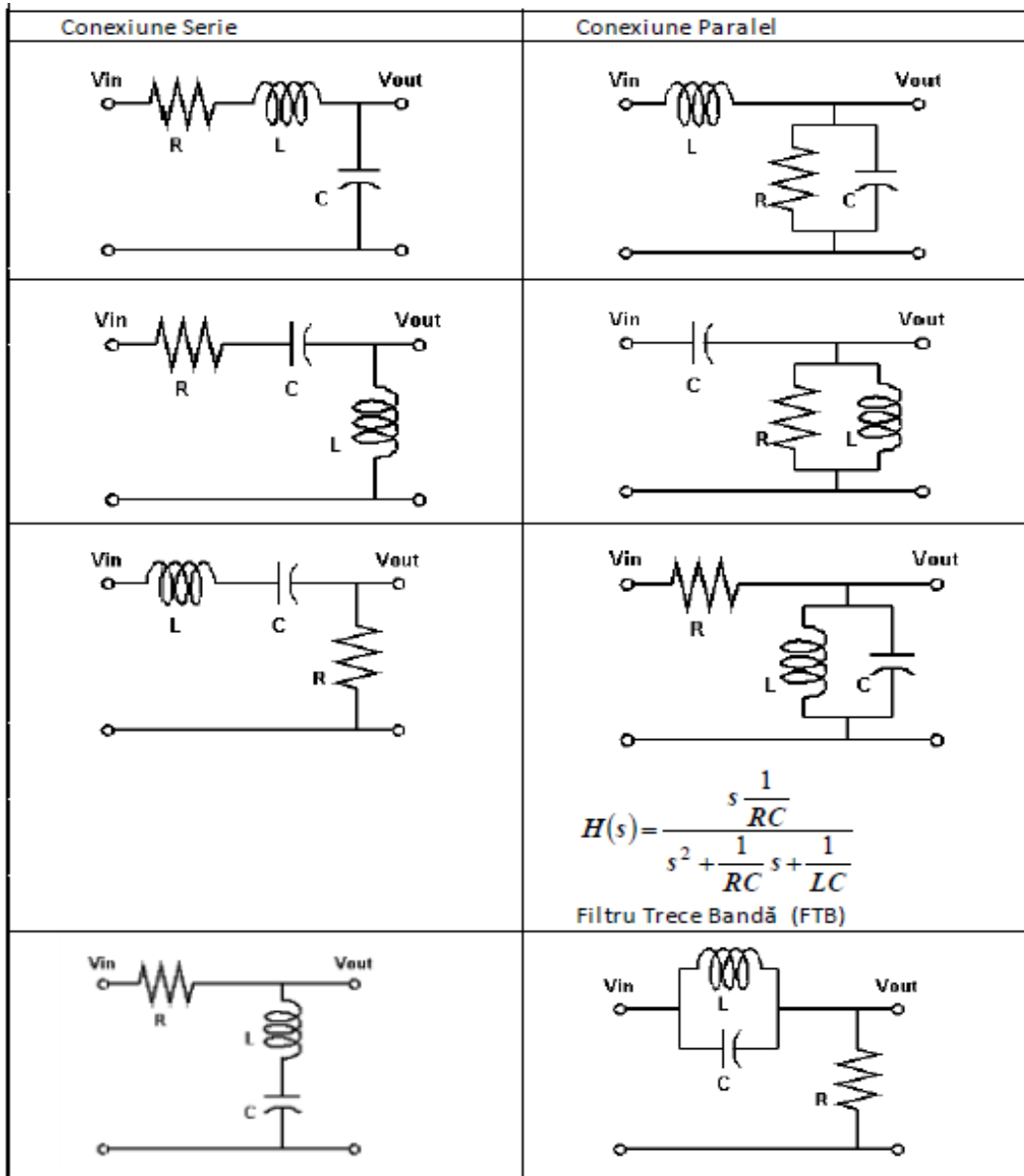


Figura 3.3: Stânga: patru conexiuni RLC serie. Dreapta: patru conexiuni RLC paralel.

cea ce înseamnă că semnalele cu pulsații cuprinse în jurul acestei valori vor fi trecute, și putem concluziona că avem un filtru trece bandă (FTB). Dar, analiza propusă este una succintă și incompletă. Trataterea adecvată a acestei probleme se poate realiza prin reprezentări grafice în frecvență.

3.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB

Pentru a analiza tipul filtrului în MATLAB pornind de la relația intrare-ieșire putem utiliza rutina `tf`, pentru a ne declara funcția de transfer în MATLAB, și putem utiliza rutina `lsim` pentru a simula răspunsul sistemului la o intrare dată. Aceste funcții se apelează astfel:

- $H = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$, unde num și den sunt numărătorul și, respectiv, numitorul funcției de transfer;
- $y = \text{lsim}(H, u, t)$, unde H este un obiect de tip funcție de transfer, u este semnalul de intrare și t este timpul de simulare.

În cazul sistemului din Figura 3.1 considerăm un rezistor având rezistența $R = 2.2[\Omega]$, o bobină având impedanța $L = 0.1[mH]$ și un condensator având capacitatea $C = 4.7[\mu F]$. Folosind fișierul sursă descris mai jos, putem obține răspunsul la intrare sinusoidală pentru trei pulsații relevante: pulsația medie ω_0 , împreună cu o decadă în stânga și una în dreapta acestei pulsații. Răspunsurile sistemului la intrările descrise sunt reprezentate pe 10 perioade în Figura 3.4.

```

1 R = 2.2;
2 L = 1e-4;
3 C = 4.7e-6;
4
5 % declararea functiei de transfer
6 H = tf([1/R/C 0],[1 1/R/C 1/L/C]);
7
8 % valoarea pulsatiei medii
9 w0 = 1/sqrt(L*C);
10
11 % raspunsul sistemului la intrare sinusoidală de pulsatie w0/10,
    w0 si
12 % w0*10 (o decada in stanga si o decada in dreapta pulsatiei
    centrale)
13
14 % simulare pe 10 perioade
15 T1 = 2*pi/(w0/10);
16 t1 = 0:T1/100:10*T1;
17 u1 = sin(w0/10*t1);
18 y1 = lsim(H, u1, t1);
19
20 T2 = 2*pi/w0;
21 t2 = 0:T2/100:10*T2;
22 u2 = sin(w0*t2);
23 y2 = lsim(H, u2, t2);
24
25 T3 = 2*pi/(10*w0);
26 t3 = 0:T3/100:10*T3;
27 u3 = sin(w0*10*t3);
28 y3 = lsim(H, u3, t3);
29
30 figure
31 subplot(311); plot(t1, y1);

```

```

32 subplot(312); plot(t2,y2);
33 subplot(313); plot(t3,y3);

```

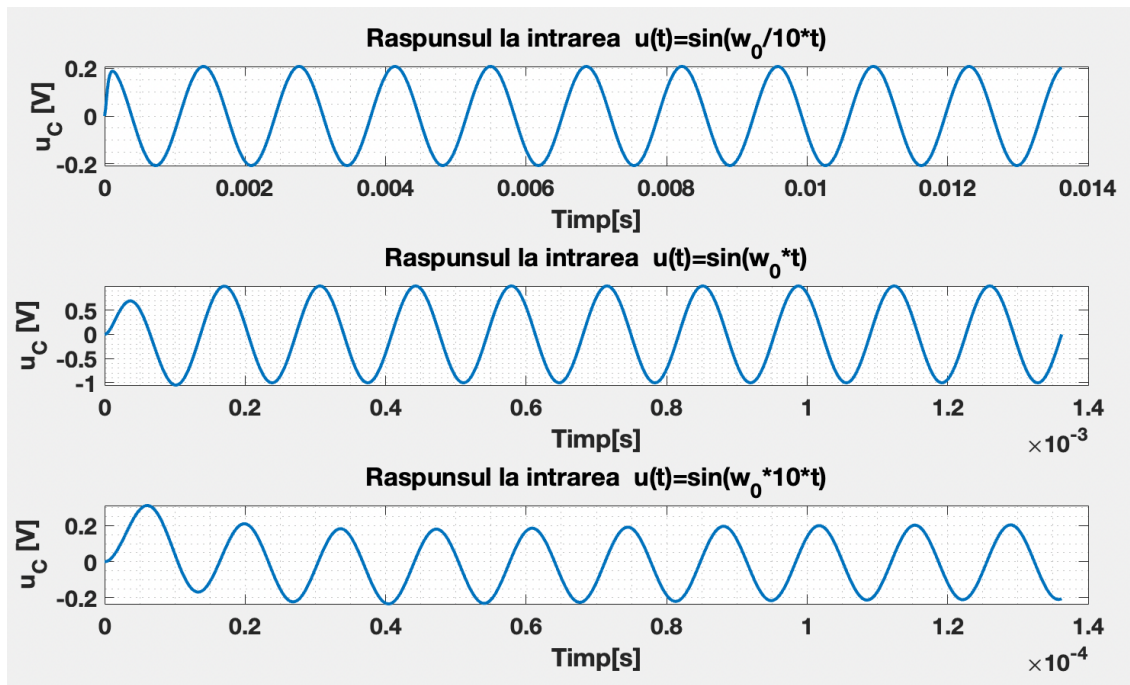


Figura 3.4: Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului.

Alte funcții MATLAB utile:

- `pole(H)` – returnează polii sistemului descris prin funcția de transfer H ;
- `zero(H)` – returnează zerourile sistemului descris prin funcția de transfer H ;
- `zpk(z,p,k)` – creează un sistem având zerourile $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$, polii $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ și *gain*-ul k , rezultatul fiind:

$$H(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}.$$

- `zpk(H)` pune în evidență zerourile, polii și *gain*-ul funcției de transfer H .

3.5 Probleme propuse

Exercițiul 1. Să se determine funcția de transfer a următoarelor sisteme descrise prin poli, zerouri și factor de amplificare:

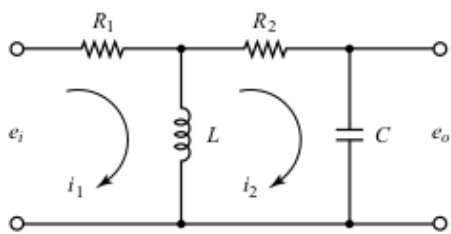
- $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = -1, \hat{s}_1 = 0, \hat{s}_2 = -2, \hat{s}_3 = -5, K = 10;$
- $\hat{s}_1 = 1, \hat{s}_{1,2} = 0, \hat{s}_3 = -7, K = -2;$

- c) $\hat{s}_{1,2} = -2 \pm 7j$, $\hat{s}_3 = -10$, $K = 100$;
d) $\hat{s}_{1,2} = -5 \pm 10j$, $\hat{s}_1 = -8 \pm 3j$, $K = 2$;
e) $\hat{s}_{1,2} = 0$, $\hat{s}_1 = -8$, $\hat{s}_2 = -1$, $\hat{s}_3 = -2$, $\hat{s}_4 = -10$, $K = 2$.

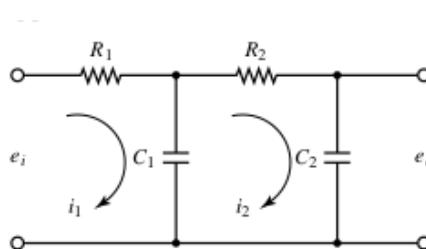
Exercițiul 2. Să se determine funcția de transfer a următoarelor sisteme descrise prin ecuația diferențială intrare-ieșire. Să se determine polii, zerourile și factorul de amplificare pentru fiecare dintre aceste sisteme.

- a) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} = 10\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 20\frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$;
b) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -2\frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$;
c) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 14\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 72\frac{dy(t)}{dt} + 320y(t) = 100u(t)$;
d) $2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 32\frac{dy(t)}{dt} + 146y(t) = 4\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 40\frac{du(t)}{dt} + 500u(t)$;
e) $\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 21\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 136\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 276\frac{dy(t)}{dt} + 160y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2}$.

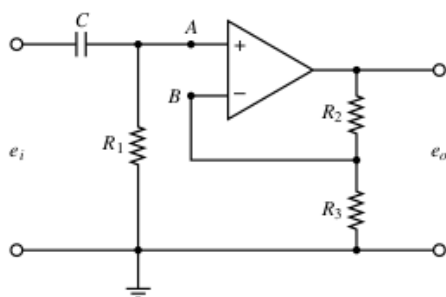
Exercițiul 3. Să se determine modelul matematic intrare-ieșire și apoi să se deducă funcția de transfer pentru fiecare dintre următoarele sisteme. Determinați tipul filtrului în fiecare caz.



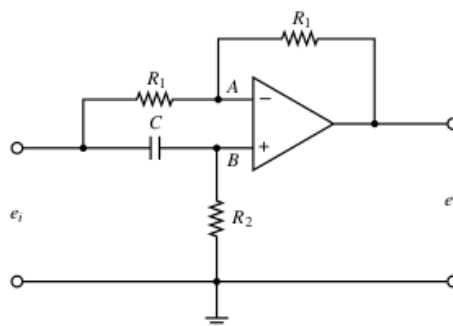
(a) Problema 3(a)



(b) Problema 3(b)

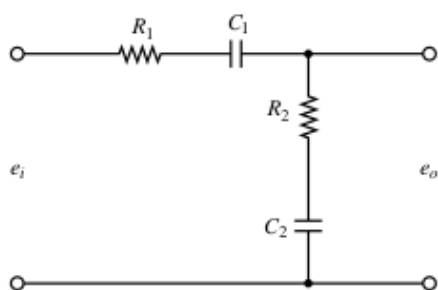


(c) Problema 3(c)

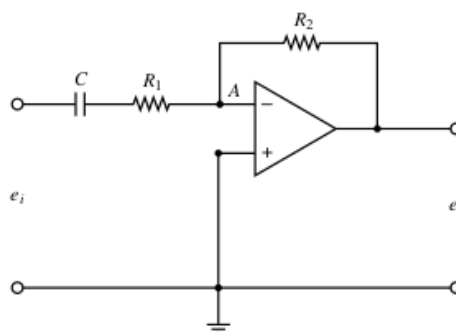


(d) Problema 3(d)

Exercițiul 4. Să se deducă funcția de transfer a sistemelor de mai jos pe baza raportului de impedanțe și să se deducă tipul filtrului.



(a) Problema 4(a)



(b) Problema 4(b)

Lucrarea 4

Modele de tip spațiul stărilor. Analiza în domeniul timp

4.1	Spațiul stărilor. Definiție și proprietăți	44
4.2	Circuite cu amplificatoare operaționale cu reacție negativă	44
4.3	Simulare în MATLAB	46
4.4	Probleme propuse	48

Lucrarea curentă se ocupă cu studiul următoarelor aspecte:

- determinarea modelelor în spațiul stărilor ale sistemelor liniare și invariante în timp (LTI);
- legătura dintre modelele în spațiul stărilor și funcția de transfer;
- simularea sistemelor la intrări standard (impuls Dirac, treaptă unitate) respectiv la intrări arbitrare din condiții inițiale nenule;
- utilizarea mediului MATLAB/Simulink cu componentele din biblioteca de bază (*Simulink library*).

4.1 Spațiul stărilor. Definiție și proprietăți

Un sistem LTI are următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad \text{cu } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}, \quad (4.1)$$

având numărul de **stări** $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (**ordinul sistemului**), numărul de **intrări** $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, respectiv numărul de **ieșiri** $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.

În funcție de numărul de intrări și ieșiri, sistemele se clasifică în:

- **SISO** (*Single Input, Single Output*): $m = p = 1$;
- **MISO** (*Multi-Input, Single Output*): $m > 1, p = 1$;
- **SIMO** (*Single Input, Multi-Output*): $m = 1, p > 1$;
- **MIMO** (*Multi-Input, Multi-Output*): $m > 1, p > 1$.

Trecerea din spațiul stărilor la funcția de transfer echivalentă în cazul sistemelor SISO se face prin aplicarea transformatei Laplace în condiții inițiale nule:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \mid_{\mathcal{L}}, \mathbf{CI} = 0 \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \mid_{\mathcal{L}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s); \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases} \quad (4.2)$$

Prin eliminarea termenului $X(s)$ se obține relația de legătură între $U(s)$ și $Y(s)$ astfel:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \Rightarrow Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) \Rightarrow \quad (4.3)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D.} \quad (4.4)$$

4.2 Circuite cu amplificatoare operaționale cu reacție negativă

În cazul circuitelor cu AO, se recomandă lucrul cu potențiale electrice în favoarea tensiunilor electrice. Conexiunea cu reacție negativă prezintă următoarele consecințe pentru determinarea modelului matematic:

- potențialele electrice ale celor două borne se consideră identice;
- curenții care intră în amplificator se consideră nuli.

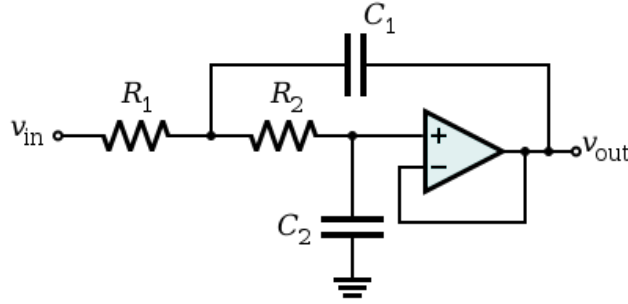


Figura 4.1: Filtru Sallen–Key de tip trece-jos

4.2.1 Exemplul 1

Se consideră circuitul cu AO din Figura 4.1. Se vor nota prin convenție tensiunile de intrare, respectiv ieșire ca fiind: $u(t) = v_{in}(t)$, $y(t) = v_{out}(t)$. Se vor considera variabilele de stare $x_1(t) = u_{C_1}(t)$ (de la nodul dintre rezistențe spre ieșirea $y(t)$), respectiv $x_2(t) = u_{C_2}(t)$ (de la nodul intrării pozitive spre GND).

Prin aplicarea legilor lui Kirchhoff, alături de observațiile făcute mai sus, se pot deduce relațiile:

$$u = R_1 i_{R_1} + R_2 i_{R_2} + u_{C_2}; \quad i_{R_1} = i_{R_2} + C_1 \frac{du_{C_1}}{dt}; \quad R_2 i_{R_2} = u_{C_1}; \quad i_{R_2} = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}, \quad (4.5)$$

de unde rezultă realizarea de stare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

Funcția de transfer se obține pe baza formulei (4.4):

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}. \quad (4.7)$$

4.2.2 Exemplul 2

Se consideră circuitul cu AO din Figura 4.2–a. În acest caz, se poate determina funcția de transfer pe baza structurii standard din Figura 4.2–b, în care semnalele se prezintă după aplicarea transformatei Laplace, astfel:

$$\frac{E'(s) - E_i(s)}{Z_1(s)} = \frac{E_o(s) - E'(s)}{Z_2(s)}. \quad (4.8)$$

Deoarece potențialele celor două borne de intrare coincid rezultă că $E'(s) = 0$ și deci:

$$H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}. \quad (4.9)$$

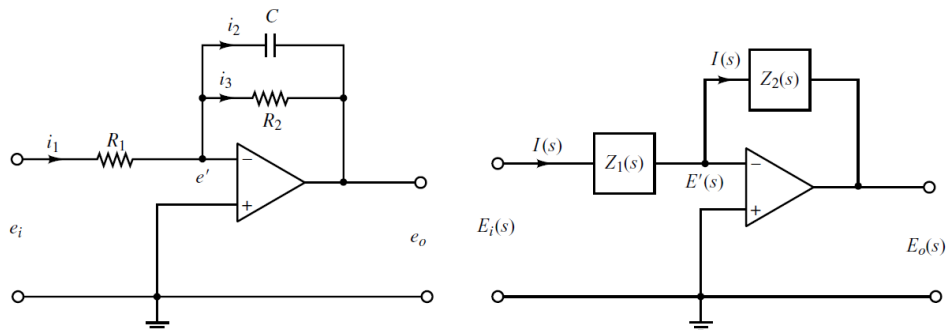


Figura 4.2: Circuit de ordin I cu amplificator operațional

Concret, pentru circuitul inițial rezultă:

$$Z_1(s) = R_1; \quad Z_2(s) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{R_2Cs + 1} \Rightarrow \quad (4.10)$$

$$H(s) = -\frac{\frac{R_2}{R_2Cs + 1}}{R_1} = -\frac{R_2/R_1}{R_2Cs + 1}. \quad (4.11)$$

4.3 Simulare în MATLAB

Declararea unui model în spațiul stărilor se poate face în MATLAB utilizând funcția `ss`. Simularea răspunsului sistemului $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$ la intrarea de tip impuls Dirac ($U(s) = 1$) se poate face prin funcția `impulse`, respectiv la intrarea de tip treaptă unitate ($U(s) = \frac{1}{s}$) se poate face prin funcția `step`, precum în următoarea secvență:

```

1 R1 = 47e3; C1 = 220e-9;
2 R2 = 47e3; C2 = 220e-9;
3 %
4 A = [-(1/R1+1/R2)/C1, -1/R1/C1;
5       1/R2/C2, 0];
6 B = [1/R1/C1; 0];
7 C = [0, 1];
8 D = 0;
9 %
10 sys = ss(A,B,C,D)
11 %
12 subplot(121), impulse(A,B,C,D)
13 subplot(122), step(sys)

```

Un avantaj important al simulării modelelor de tip spațiul stărilor față de funcțiile de transfer este posibilitatea simulării din **condiții inițiale nenule**. Secvența de cod care realizează simularea pentru o intrare sinusoidală se bazează pe funcția `lsim` căreia i se precizează ca argument de intrare și vectorul condițiilor inițiale:

```

1 x0 = [-1.5,2]; % conditii initiale: x1(0) = -1.5 [V], x2(0) = 2 [
    V];
2 %
3 T = 0.1; % perioada semnalului sinus de la intrare in secunde
4 t = 0:T/100:10*T;
5 u = sin(2*pi/T*t);
6 %
7 [y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0);
8 %
9 figure
10 plot(t,x), grid, shg
11 legend('x_1(t)', 'x_2(t)')
12 xlabel('Timp [s]'); ylabel('Tensiunile pe condensatoare [V]');
13 title('Simularea circuitului din conditii initiale nenule');

```

Pentru a implementa ecuațiile diferențiale de stare într-un model Simulink vom obține un model având schema bloc din Figura 4.3.

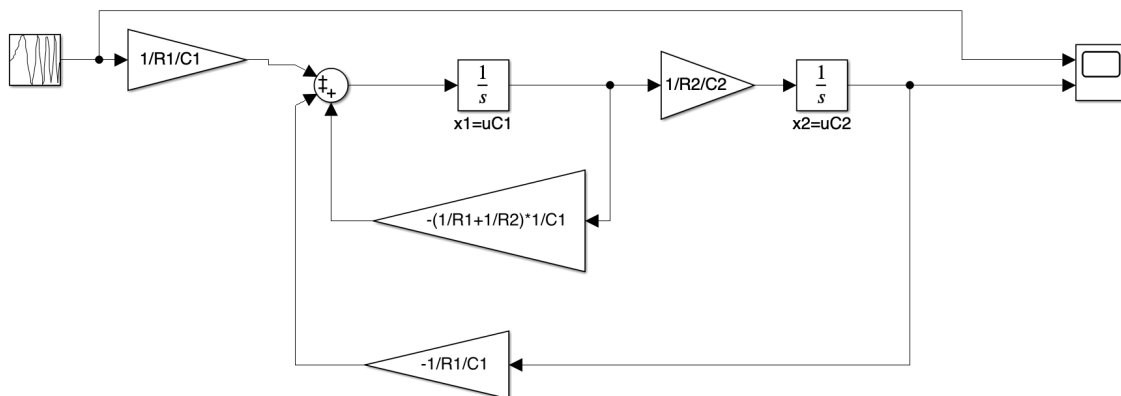


Figura 4.3: Implementarea in Simulink a FTJ.

Pentru a determina tipul filtrului vom folosi o intrare de tip **Chirp** care este un semnal sinusoidal a cărui frecvență variază (liniar) în timp. Pentru a calibra blocul de intrare, vom considera frecvența minimă a semnalului de intrare (**Initial frequency**) $0.01[Hz]$, valoarea maximă a frecvenței (**Frequency at target time**) $10[Hz]$ și timpul de simulare (**Target time**) $10[s]$. De asemenea, vom seta următorii parametri pentru a configura simularea: integrarea numerică se va realiza cu pas fix (**Variable Step** → **Fixed Step**), pasul de integrare fiind $1e-5[s]$ (**Fixed Step Size**). Răspunsul sistemului la intrarea configurată anterior este prezentat în Figura 4.4, de unde reiese comportamentul de tip trece-jos al filtrului.

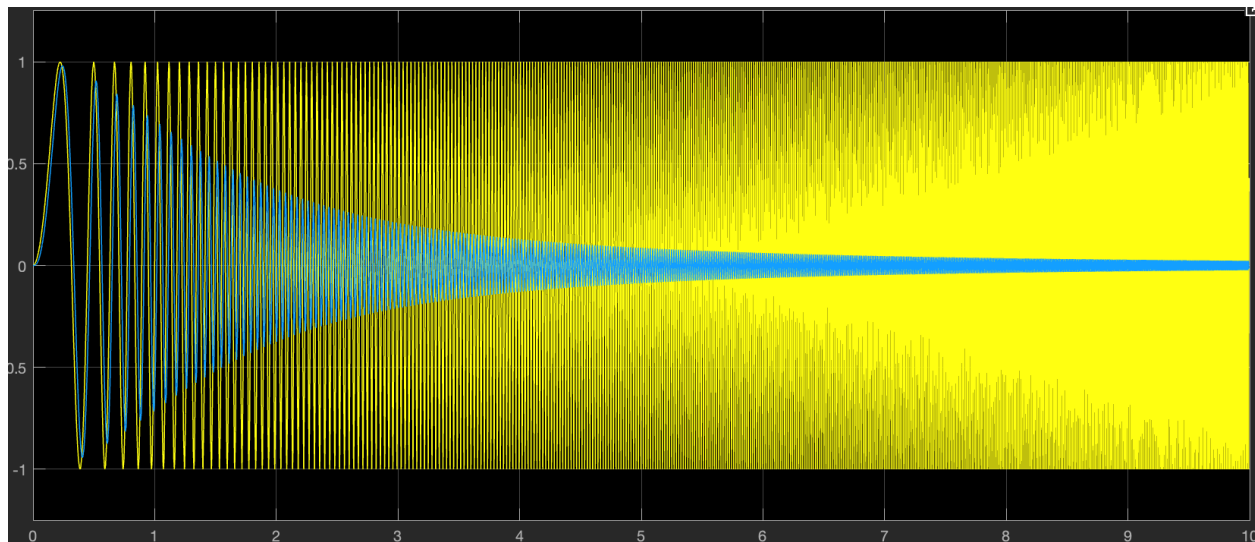


Figura 4.4: Răspunsul sistemului la intrare sinusoidală de frecvență variabilă – reiese caracteristica de FTJ.

4.4 Probleme propuse

Exercițiul 1 Să se determine funcția de transfer a sistemului descris în spațiul stărilor. Precizați singularitățile sistemului.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = -6x_2 + u; \\ y = 2x_1 + 6x_2. \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2; \\ y = 2x_1 + 6x_2 + u; \end{cases} \\
 \text{b)} \begin{cases} \dot{x}_1 = u; \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 3x_3 + 2u; \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 7x_2 - 3x_3; \\ y = x_1 + 0.5x_2 - x_3 - u. \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = x_1; \\ \dot{x}_3 = x_2; \\ y = 100x_1 + 300x_2 + 200x_3. \end{cases}
 \end{array}$$

Exercițiul 2 Să se determine funcția de transfer a sistemului care realizează următoarea corespondență între semnalul de intrare și semnalul de ieșire (utilizați tabelul de transformate Laplace). Precizați singularitățile sistemului.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} u(t) = t + t^2 \text{ și } y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{7}e^{-2t}; & y(t) = 200t + 10e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right); \\
 \text{b)} u(t) = e^{-t} + \sin(t) \text{ și} & \text{e)} u(t) = 1 \text{ și } y(t) = 1 + e^{-5t} + e^{-7t} + e^{-9t}; \\
 y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \sin(t) + 3e^{-t} + 5\sin(t); & \text{f)} u(t) = e^t \sin(t) \text{ și} \\
 \text{c)} u(t) = 3t + 1 \text{ și } y(t) = 7t^2 + 8t + 9 + & y(t) = 0.5e^t \sin(t) + 0.75e^{-t} \sin(t); \\
 10e^{-5t}; & \text{g)} u(t) = \delta(t) + 5 \text{ și} \\
 \text{d)} u(t) = 100t + 5e^{-t} \sin(t) \text{ și} & y(t) = 10 + e^{-10t} \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right);
 \end{array}$$

- h) $u(t) = \sin(t) + \cos(t)$ și $y(t) = \frac{1}{2}t + 10\sin(t) + 7e^{-2t} - 5e^{-10t}$; j) $u(t) = 3$ și $y(t) = 5t + e^{-3t}\sin(5t) + e^{-7t}\sin(10t)$.
- i) $u(t) = 3t$ și $y(t) = 12t + 7e^{-3t} + 5e^{-5t} - e^{-10t}$;

Exercițiul 3 Să se determine răspunsul la intrarea precizată pentru următoarele sisteme. Validați rezultatele obținute în MATLAB. Corelați răspunsurile obținute cu structura semnalului de intrare, respectiv cea a sistemului.

- a) $u(t) = 2\delta(t)$ și $H(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$; f) $u(t) = \delta(t)$ și $H(s) = \frac{2}{s^2+5}$;
- b) $u(t) = 3$ și $H(s) = \frac{s}{(s+2)(s+4)}$; g) $u(t) = 2$ și $H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+3)}$;
- c) $u(t) = 2 + \delta(t)$ și $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$; h) $u(t) = t^2$ și $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$;
- d) $u(t) = 1 + 2\delta(t)$ și $H(s) = \frac{s+8}{s^2-2s+5}$; i) $u(t) = 2\delta(t)$ și $H(s) = \frac{s-5}{(s+1)^3}$;
- e) $u(t) = 2t$ și $H(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$; j) $u(t) = t - 5$ și $H(s) = \frac{5}{s(s^2+s+1)}$.

Exercițiul 4 Deduceți un model în spațiul stărilor, respectiv funcția de transfer pentru circuitul din Figura 4.5. Determinați tipul filtrului. Realizați un model Simulink al circuitului (spațiul stărilor cu integroare) și simulați-l la o intrare de tip *chirp* pentru a evidenția tipul filtrului.

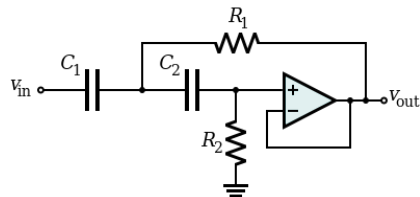


Figura 4.5: Filtru Sallen–Key de tip trece–sus

Exercițiul 5 Deduceți un model în spațiul stărilor, respectiv funcția de transfer pentru circuitul din Figura 4.6. Determinați tipul filtrului. Realizați un model Simulink al circuitului (spațiul stărilor cu integroare) și simulați-l la o intrare de tip *chirp* pentru a evidenția tipul filtrului.

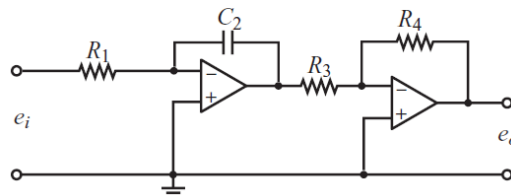


Figura 4.6: Circuit electric cu două amplificatoare operaționale

Exercițiul 6 Deduceți un model în spațiul stărilor, respectiv funcția de transfer pentru circuitul din Figura 4.7. Considerați $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = R/2$, $C_1 = C_2 = C$, $C_3 = 2C$, $R = 3.3 [k\Omega]$, $C = 100 [nF]$. Precizați singularitățile sistemului. Simulați răspunsul în frecvență al sistemului pentru a evidenția tipul filtrului.

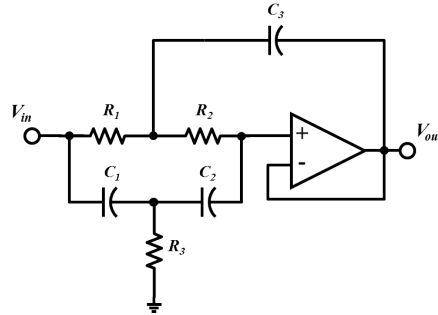


Figura 4.7: Filtru Sallen–Key de tip *notch*

Lucrarea 5

Realizări de stare. Forme canonice

5.1	Forma Canonică de Control (FCC)	52
5.2	Forma Canonică de Observare (FCO)	52
5.3	Exemplu rezolvat. Realizarea de stare cu semnificație fizică	53
5.4	Probleme propuse	55

Lucrarea de față prezintă modalități de a obține realizări de stare ale sistemelor LTI pornind de la funcția de transfer a acestora. În aceste cazuri, stările nu au obligatoriu semnificație fizică. Se descriu următoarele forme canonice:

- Forma canonică de control – **FCC**;
- Forma canonică de observare – **FCO**.

5.1 Forma Canonică de Control (FCC)

5.1.1 Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Forma canonică de control este:

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{FCC}}{C_{FCC}} & \frac{B_{FCC}}{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & d \end{array} \right).$$

5.1.2 Implementare în MATLAB/Simulink

Pentru a ajunge de la funcția de transfer la modelul în spațiul stărilor, în MATLAB se poate utiliza funcția `tf2ss`. Aceasta ne va returna realizarea de stare FCC. Pentru sisteme de ordin $n = 3$, fără transfer instantaneu, modelul Simulink al FCC este cel din Figura 5.2.

Exemplu de determinare a formei canonice de control utilizând mediul MATLAB:

```

1 num=[1, 11, 30]; den=[1, 9, 26, 24];
2 b2=1; b1=11; b0=30;
3 a2=9; a1=26; a0=24;
4 [A,b,c,d] = tf2ss(num,den); % obtinerea FCC
5 %
6 sistem=ss(A,b,c,d);
7 x0=[0,0,0]; % conditii initiale
8 t=0:0.01:5; u=ones(1,length(t)); % semnal treapta
9 [y,t,x]=lsim(sistem,u,t,x0); % raspunsul sistemului afisat grafic
10 %
11 subplot(121);plot(t,y); legend('y');grid;
12 subplot(122);plot(t,x); legend('x_1','x_2','x_3');grid

```

5.2 Forma Canonică de Observare (FCO)

5.2.1 Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Forma canonică de observare este:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{array} \right).$$

5.2.2 Implementare în MATLAB/Simulink

Pentru a obține FCO, se realizează conversia din funcția de transfer în FCC prin `tf2ss` și apoi se folosește **proprietatea de dualitate** a celor două forme canonice:

$$A_{FCO} = A_{FCC}^T, \quad B_{FCO} = C_{FCC}^T, \quad C_{FCO} = B_{FCC}^T.$$

Pentru sisteme de ordin $n = 3$, fără transfer instantaneu, modelul Simulink al FCO este cel din Figura 5.3.

5.3 Exemplu rezolvat. Realizarea de stare cu semnificație fizică

Se consideră filtrul de tip trece-jos din Figura 5.1, cu $L_1 = 10$ [mH], $L_2 = 3.3$ [mH], $C_1 = 500$ [μ F], $R = 4$ [Ω].

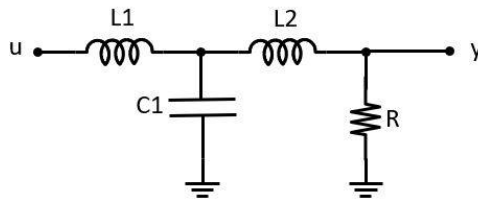


Figura 5.1: Fitru RLC de tip trece-jos de ordin 3

Considerând $\mathbf{x} = (i_{L_1}, i_{L_2}, u_{C_1})^T$, pe baza legilor lui Kirchhoff se pot deduce următoarele relații:

$$i_{L_1} = i_{C_1} + i_{L_2}; \quad i_{L_2} = i_R; \quad u = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + u_{C_1}; \quad u_{C_1} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + Ri_{L_2}; \quad y = Ri_{L_2}. \quad (5.1)$$

Realizarea de stare corespunzătoare este:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & R & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

Funcția de transfer a circuitului este:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\frac{R}{L_1 L_2 C_1}}{s^3 + \frac{R}{L_2} s^2 + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) s + \frac{R}{L_1 L_2 C_1}}. \quad (5.3)$$

Numeric, se poate determina în MATLAB utilizând funcția `[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)`.

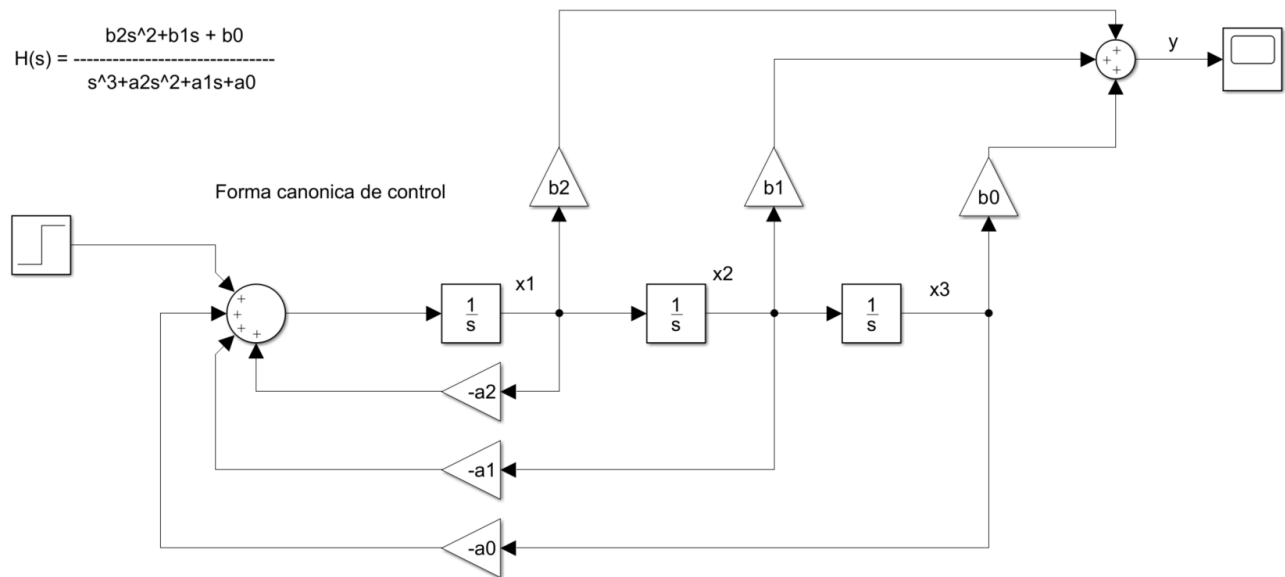


Figura 5.2: Implementarea FCC în Simulink

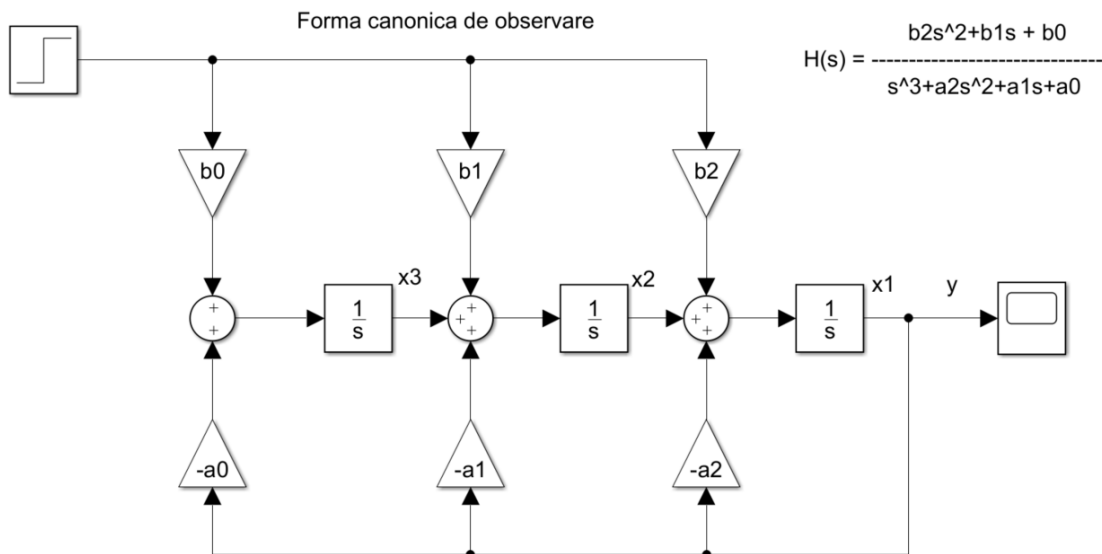


Figura 5.3: Implementarea FCO în Simulink

Realizarea de stare (5.2) bazată pe integratoare implementată în Simulink este ilustrată în Figura 5.4. Se folosesc blocuri din biblioteca standard Simulink, precum: Sum, Gain, Integrator, Mux, Scope, State-Space.

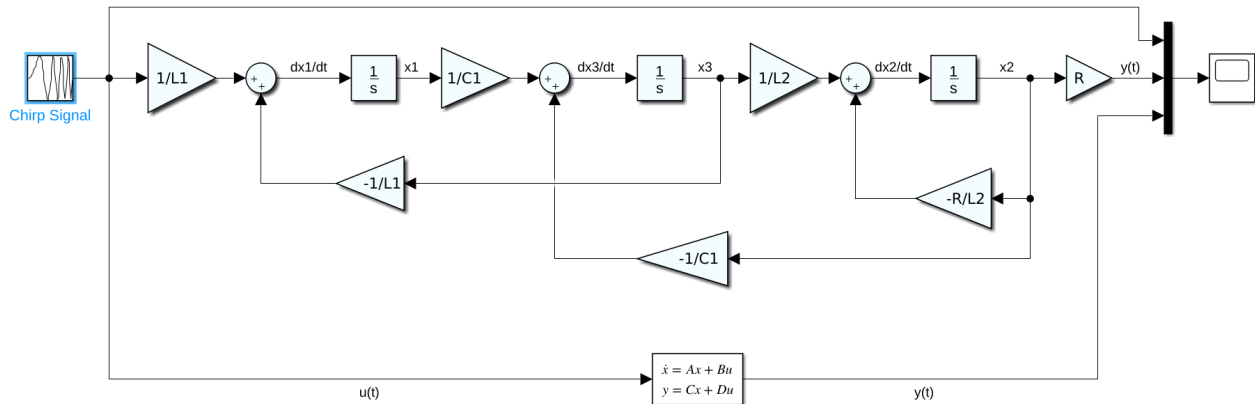


Figura 5.4: Realizarea de stare a filtrului RLC trece-jos

Pentru testarea comportamentului unui filtru se poate utiliza un semnal de tip *Chirp*, bazat pe principiul unui oscilator comandat în tensiune (engl. *Voltage Controlled Oscillator*). Acest semnal se poate genera utilizând blocul *Chirp Signal*, configurat concret pentru exemplul considerat:

- Initial frequency (Hz): 0.1;
- Target time (s): 5;
- Frequency at target time (Hz): 500.

Pentru integrarea numerică a modelului se pot face următoarele setări în *Model Configuration Parameters*:

- Start time: 0.0, Stop time: 5.0;
- Solver type: Variable-step;
- Solver: ode15s (stiff/NDF);
- Relative tolerance: 1e-4.

Rezultatele rulării modelului se prezintă în Figura 5.5.

5.4 Probleme propuse

Problema 1. Să se determine realizările de stare corespunzătoare formelor canonice de control și de observare ale următoarelor sisteme descrise prin funcția de transfer:

a) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+8}$;

c) $H(s) = \frac{2s^2+2s+2}{s^2+4s+4}$;

b) $H(s) = \frac{3}{s^3+7s+2}$;

d) $H(s) = \frac{2s^2+4}{s^3+1}$;

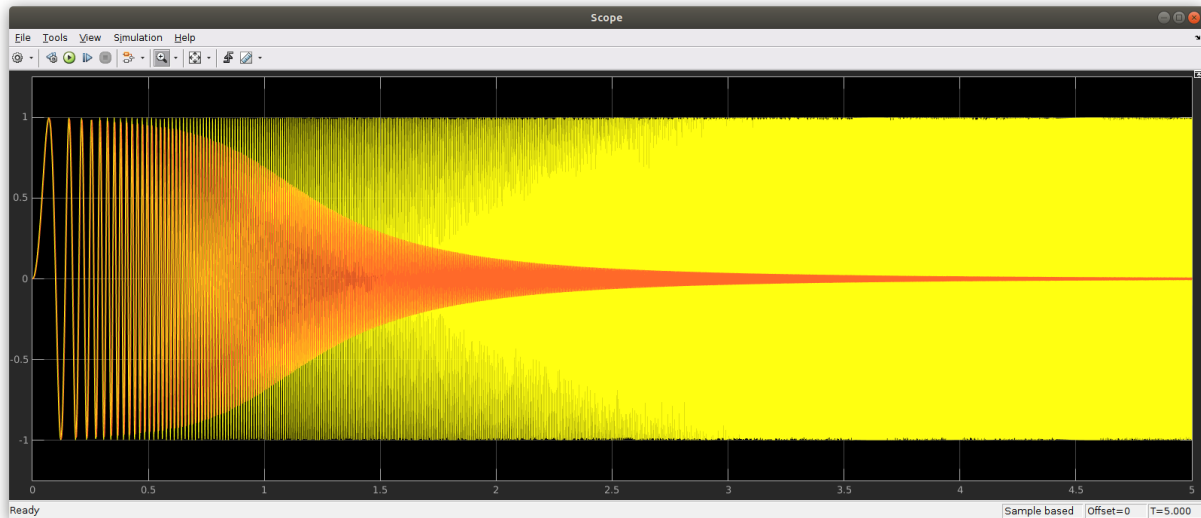


Figura 5.5: Rezultatele simulării circuitului la intrare de tip *Chirp*

e) $H(s) = \frac{1}{s^2+s}$;

f) $H(s) = \frac{2s+6}{s^3+2s^2+4s+5}$.

Problema 2. a) Pentru circuitul din Figura 5.6 determinați modelul matematic intrare-stare-ieșire al sistemului de mai jos astfel încât variabilele de stare să aibă semnificație fizică și apoi deduceți modelul matematic intrare-ieșire. Realizați schema Simulink a realizării de stare deduse.

b) Pentru calibrarea $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = R/2$, $C_1 = C_2 = C$, $C_3 = 2C$, cu $R = 3.3 [k\Omega]$ și $C = 100 [nF]$, determinați modelele de tip spațiul-stărilor corespunzătoare formelor canonice de control (FCC) și de observare (FCO) ale funcției de transfer și realizați schema Simulink a celor două forme canonice. Comparați rezultatele cu modelul obținut la punctul a).

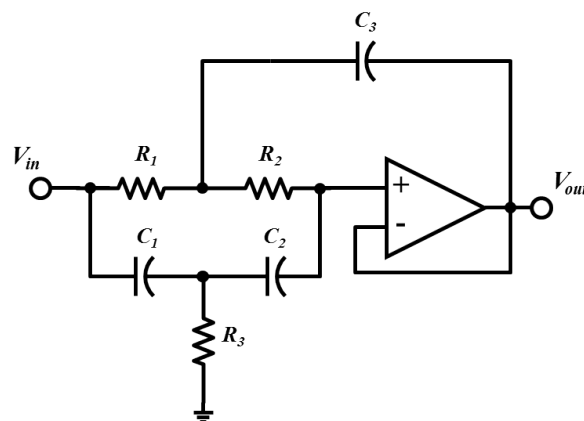


Figura 5.6: Filtru Sallen–Key de tip *notch*

Lucrarea 6

Forma minimală a unei funcții de transfer

6.1	Determinarea formei minimale	58
6.2	Exemplu rezolvat	59
6.3	Probleme propuse	60

În lucrarea de față se prezintă metoda de determinare a funcției de transfer în formă minimală folosind parametrii Markov.

6.1 Determinarea formei minimale

Funcția de transfer se poate exprima ca un raport de două polinoame:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \sum_{k \geq 0} \gamma_k s^{-k}, \quad m \leq n, \quad (6.1)$$

unde γ_k sunt **parametrii Markov**. Nu toți parametrii sunt liniar independenți. Relația (6.1) se poate scrie:

$$b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)(\gamma_0 + \gamma_1 s^{-1} + \gamma_2 s^{-2} + \dots), \quad (6.2)$$

de unde, prin identificarea coeficienților lui s^k , $k = \overline{0, n}$, avem:

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

prin identificarea coeficienților lui s^{-k} , $k = \overline{1, n}$, avem:

$$-\begin{pmatrix} \gamma_{n+1} \\ \gamma_{n+2} \\ \vdots \\ \gamma_{2n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+1} & \dots & \gamma_{2n-1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{n,n}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

unde $\mathcal{H}_{n,n}$ este **matricea Hankel**.

Un sistem SISO este în **formă minimală** dacă nu mai există simplificări poli-zero-uri în expresia funcției sale de transfer. Altfel spus, dinamica intrare-ieșire se poate implementa cu un număr minim de integroare.

Teorema 6.1.1: Forma minimală a unei funcții de transfer

Funcția de transfer $H(s)$ din (6.1) este în formă minimală dacă și numai dacă $\text{rang}(\mathcal{H}_{n,n}) = n$.

Pașii algoritmului pentru determinarea formei minimale sunt prezentați în continuare.

1. Se determină parametrii Markov $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2n-1}$.
2. Se formează matricea Hankel $\mathcal{H}_{n,n}$.
3. Se calculează $n' = \text{rang}(\mathcal{H}_{n,n})$. Dacă $n' = n$, atunci funcția de transfer este în formă minimală, altfel se continuă algoritmul.

4. Se rezolvă un sistem de forma (6.4) redus la primele n' ecuații:

$$-\begin{pmatrix} \gamma_{n'+1} \\ \gamma_{n'+2} \\ \vdots \\ \gamma_{2n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n'} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n'+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n'} & \gamma_{n'+1} & \cdots & \gamma_{2n'-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n'-1} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

de unde obținem polinomul $\alpha'(s) = s^{n'} + a_{n'-1}s^{n'-1} + \cdots + a_1s + a_0$.

5. Se rescrie sistemul (6.3) pentru n' și se obține $\beta'(s) = b_{n'}s^{n'} + \cdots + b_1s + b_0$.

6. Funcția de transfer în formă minimală este $H_m(s) = \frac{\beta'(s)}{\alpha'(s)}$.

6.2 Exemplu rezolvat

Se consideră sistemul descris prin modelul de tip spațiul stărilor:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2.5 & -2.5 & -1.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3.5 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Funcția de transfer este:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s^2 + 3.5s + 3}{s^3 + 2.5s^2 + 2.5s + 1.5}.$$

Parametrii Markov sunt: $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = -2, \gamma_4 = 1, \gamma_5 = 1$. Matricea Hankel este:

$$\mathcal{H}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\mathcal{H}_{3,3}) = 2 = n'.$$

Polinomul de la numitor este:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha'(s) = s^2 + s + 1.$$

Acum se poate calcula polinomul de la numărător:

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta'(s) = s + 2,$$

de unde obținem forma minimală:

$$H_m(s) = \frac{s + 2}{s^2 + s + 1}.$$

Pentru a realiza împărțirea polinoamelor se poate utiliza funcția MATLAB **deconv**.

6.3 Probleme propuse

Problema 1 Pe baza modelului matematic de tip funcție de transfer al circuitului de mai jos dedus anterior, determinați expresiile simbolice ale parametrilor Markov necesari determinării funcției de transfer în formă minimală și apoi determinați forma minimală a funcției de transfer a sistemului (simbolic). Considerați următoarea calibrare pentru această analiză: $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = R/2$, $C_1 = C_2 = C$, $C_3 = 2C$.

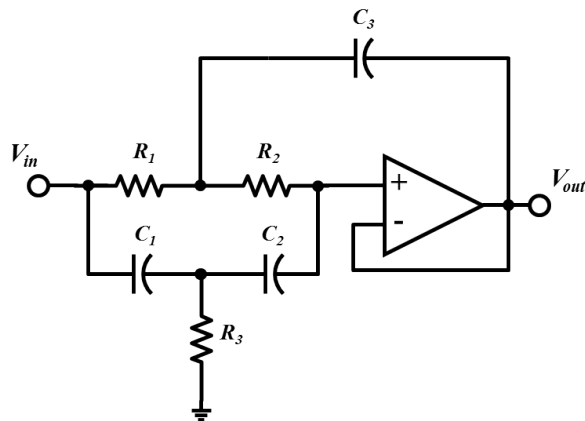


Figura 6.1: Filtru Sallen–Key de tip *notch*

Problema 2 Să se deducă forma minimală a sistemelor de mai jos prin anularea pol-zero.

a) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$;

c) $H(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+2s+1}$;

b) $H(s) = \frac{s^2+2s}{s^3+3s^2+2s}$;

d) $H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$.

Problema 3 Să se deducă forma minimală a sistemelor de mai jos folosind parametrii Markov.

a) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$;

c) $H(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+2s+1}$;

b) $H(s) = \frac{s^2+s}{s^3+3s^2+2s}$;

d) $H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$.

Problema 4 Se consideră un sistem de ordin 2 care are parametrii Markov $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3$, $\gamma_3 = 11$, $\gamma_4 = -43$. Determinați γ_k , $k = \bar{5}, \bar{10}$.

Partea III

Analiza sistemelor LTI

Lucrarea 7

Stabilitatea sistemelor LTI

7.1	Stabilitatea internă și externă	64
7.2	Stabilitatea în sens Lyapunov	65
7.3	Criteriul Routh-Hurwitz . . .	66
7.4	Exemplu rezolvat	67
7.5	Moduri de oscilație	69
7.6	Probleme propuse	70

Lucrarea de față prezintă metode de analiză și determinare a stabilității sistemelor LTI, considerând următoarele cazuri:

- stabilitatea internă prin analiza valorilor proprii ale matricei de stare;
- stabilitatea internă prin aplicarea metodei II a lui Lyapunov;
- stabilitatea externă (în sens intrare mărginită, ieșire mărginită) prin analiza polilor funcției de transfer.

7.1 Stabilitatea internă și externă

7.1.1 Utilizând valorile proprii ale matricei de stare

Se consideră sistemul în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (7.1)$$

Considerăm intrarea sistemului $\mathbf{u} \equiv 0$, i.e. **sistemul autonom**. Soluția ecuației diferențiale de stare este

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0).$$

Aplicând transformata Laplace, obținem:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}.$$

Impunem $\det(sI - A) = 0$ și obținem valorile proprii ale matricei A ca fiind soluțiile acestei ecuații. Pentru ca sistemul să fie **intern asimptotic stabil**, trebuie ca toate valorile proprii să fie în semiplanul stâng:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \forall \lambda_i \in \Lambda(A). \quad (7.2)$$

Sistemul se numește **intern simplu stabil** dacă, suplimentar, are valori proprii cu partea reală zero, cu multiplicitate cel mult 1. Pentru multiplicitate mai mare strict decât 1 a valorilor proprii de pe axa imaginară sau pentru cel puțin o valoare proprie în semiplanul drept, sistemul este **intern instabil**.

În limbajul MATLAB, valorile proprii se pot determina utilizând funcția `eig`:

```
1 eig(A)
```

7.1.2 Utilizând polii sistemului

Pentru a defini relația intrare-ieșire a unui sistem LTI ne vom folosi de funcția de transfer:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Polii sistemului sunt dați de rădăcinile polinomului $\alpha(s)$. Pentru ca sistemul să fie **extern stabil**, trebuie ca toți polii funcției de transfer **în formă minimală** să fie în semiplanul stâng:

$$\operatorname{Re}\{\hat{s}_i\} < 0, \forall \hat{s}_i \in \{s \mid \alpha(s) = 0\}. \quad (7.3)$$

Se regăsește aceeași discuție ca mai sus în cazul polilor de pe axa imaginară, existând astfel conceptele de sistem **extern simplu stabil**, respectiv sistem **extern instabil**.

Observație: Stabilitatea internă este mai generală și implică stabilitatea externă, deoarece mulțimea polilor funcției de transfer $H(s)$ este inclusă în mulțimea valorilor proprii ale matricei de stare A . Cu alte cuvinte, dacă un sistem este intern stabil, va fi și extern stabil, în timp ce un sistem extern stabil nu este obligatoriu și intern stabil. Reciproc, dacă un sistem este extern instabil atunci este implicit și intern instabil.

- 1 `[num, den] = ss2tf(A,B,C,D);`
- 2 `r = roots(den)`

7.2 Stabilitatea în sens Lyapunov

7.2.1 Metoda II a lui Lyapunov

Se consideră sistemul autonom descris prin ecuația de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Conform teoriei lui Lyapunov, se caută o funcție scalară de tip “energie” pozitiv definită, având derivata negativă, ceea ce semnifică un caracter disipativ al sistemului stabil:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad P = P^T > 0 \Rightarrow$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T A^T) P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P (A \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} < 0.$$

Astfel, sistemul LTI este stabil dacă și numai dacă:

$$A^T P + P A < 0,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$A^T P + P A = -Q, \quad Q = Q^T > 0.$$

O metodă algoritmică de a verifica stabilitatea sistemului este de a considera, prin încercări, o matrice pozitiv definită $Q = Q^T > 0$ și de a determina matricea $P = P^T > 0$ prin rezolvarea ecuației Lyapunov atașată:

$$A^T P + P A = -Q.$$

Dacă matricea P are toate valorile proprii pozitive atunci sistemul este **intern asimptotic stabil**. Un exemplu de aplicare a metodei Lyapunov utilizând limbajul MATLAB, pornind cu matricea Q definită de matricea unitate, este:

- 1 `Q = eye(length(A));`
- 2 `P = lyap(A',Q);`
- 3 `eig(P)`

Observație: În funcția `lyap` din MATLAB, ecuația matricială este de forma $AX + XA^T + Q = 0$. De aceea, este necesar apelul funcției `lyap` cu matricea A transpusă.

Metoda prezintă condiția necesară și suficientă de determinare a stabilității interne (în sens Lyapunov) valabilă în cazul sistemelor LTI. În cazul mai general al sistemelor neliniare, metoda prezintă doar condiții suficiente.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	m_1	0	0	\dots

Tabelul 7.1: Tabelul Routh-Hurwitz pentru polinomul $P_c(s)$ din (7.4)

7.3 Criteriul Routh-Hurwitz

Pentru a determina numărul rădăcinilor din semiplanul drept ale unui polinom

$$P_c(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad (7.4)$$

construim tabelul Routh-Hurwitz conform Tabelului 7.1.

Reguli de completare:

- dacă nu există suficienți coeficienți pentru a completa o linie, aceasta se completează cu 0;
- linia a treia se completează astfel:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

- linia a patra se completează astfel:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \dots$$

- algoritmul continuă până se calculează m_1 corespunzător liniei s^0 ;
- dacă o linie este formată doar din elemente egale cu 0, aceasta se înlocuiește cu derivata liniei anterioare (a se vedea exemplul numeric de mai jos);
- dacă primul element al unei linii este 0, acesta se înlocuiește cu o valoare foarte mică ε și se continuă calculele.

Teorema 7.3.1: Criteriul Routh-Hurwitz

Polinomul caracteristic $P_c(s)$ din (7.4) are toate rădăcinile în semiplanul stâng dacă și numai dacă pe prima coloană a tabelului Routh-Hurwitz nu există nicio schimbare de semn. Numărul schimbărilor de semn coincide cu numărul rădăcinilor din semiplanul drept.

Observație: Criteriul Routh-Hurwitz este o unealtă pur matematică și indică apartenența rădăcinilor unui polinom în cele două semiplane complexe. Este suplimentar invocat ca un corolar pentru stabilitatea sistemelor LTI fiindcă se pretează întocmai pe acea problemă, dar nu este un scop propriu-zis al criteriului.

7.4 Exemplu rezolvat

Se consideră sistemul al cărui model de tip spațiul stărilor este:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

- Studiați stabilitatea internă a sistemului;
- Determinați funcția de transfer în formă minimală;
- Studiați stabilitatea externă a sistemului.

Rezolvări: a) Pentru a studia stabilitatea internă trebuie să verificăm dacă matricea de stare are valori proprii cu partea reală pozitivă.

Metoda I. Calculăm valorile proprii ale matricei de stare:

$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16} = 0.$$

În cazul acesta putem calcula valorile proprii:

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{ și } \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2},$$

iar cum $\lambda_{1,2} > 0$, sistemul este intern instabil.

Metoda II. Folosim tabelul Routh-Hurwitz pentru polinomul caracteristic $P_c(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}$. Deoarece pe prima coloană apar două schimbări de semn, matricea de stare are două valori proprii în semiplanul drept, deci sistemul este intern instabil.

λ^4	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
λ^3	0	0	0
λ^3	4	-1	0
λ^2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0
λ^1	0	0	0
λ^1	$-\frac{1}{2}$	0	0
λ^0	$\frac{1}{16}$	0	0

Observație: A doua linie a tabelului ar fi trebuit să fie zero. În acest caz, linia anterioară avea polinomul $P_1(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}$, deci $P_1'(\lambda) = 4\lambda^3 - \lambda$, adică a doua linie este $(4 \quad -1)$, care se completează apoi cu elemente egale cu 0. b) Observăm că sistemul este în FCC, deci avem funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s^2 - s + \frac{1}{4}}{s^4 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{16}}.$$

Parametrii Markov necesari sunt:

$$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = -1, \gamma_4 = 0.75, \gamma_5 = -0.5, \gamma_6 = 0.3125, \gamma_7 = -0.1875,$$

de unde obținem matricea Hankel:

$$\mathcal{H}_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0.75 \\ 1 & -1 & 0.75 & -0.5 \\ -1 & 0.75 & -0.5 & 0.3125 \\ 0.75 & -0.5 & 0.3125 & -0.1875 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\mathcal{H}_{4,4}) = 2 < 4,$$

deci funcția de transfer nu este în formă minimală. Sistemul redus pentru polinomul de la numitor este:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0.75 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha'(s) = s^2 + s + \frac{1}{4},$$

iar polinomul de la numărător se determină astfel:

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \beta'(s) = 1,$$

iar forma minimală este:

$$H_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{4}}.$$

Observație: În acest caz se putea observa că:

$$H(s) = \frac{(s - \frac{1}{2})^2}{(s - \frac{1}{2})^2 (s + \frac{1}{2})^2} \Rightarrow H_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{4}}.$$

c) Pentru a studia stabilitatea externă trebuie să determinăm dacă există poli ai funcției de transfer **în formă minimală** în semiplanul stâng. Pentru a determina polii:

$$s^2 + s + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \hat{s}_{1,2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

deci sistemul este strict stabil extern.

Observație: Pentru sisteme mai complexe se poate utiliza tabelul Routh-Hurwitz pentru a determina numărul polilor din semiplanul drept.

Cu ajutorul unei simulări în MATLAB utilizând funcția `lsim` se poate constata conform Figurii 7.1 că, într-adevăr, stările sistemului sunt instabile, iar ieșirea sistemului, care este o combinație liniară a acestor stări, este stabilă. În practică, acest fenomen de anulare a exponențialelor instabile este greu de realizat, datorită incertitudinilor, a erorilor de calcul, respectiv a zgomotelor și neliniarităților inerente. De aceea, se preferă alte metode de reglare decât compensarea unui pol instabil cu un zero instabil.

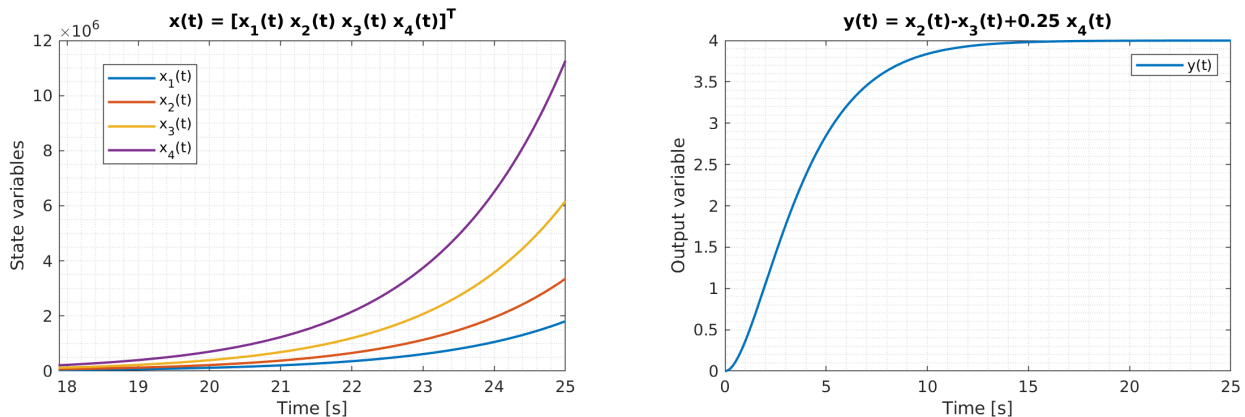


Figura 7.1: Răspunsul sistemului din exemplu la intrare de tip treaptă unitară

În MATLAB există funcții utile predefinite pentru deducerea stabilității unui sistem `sys`, descris printr-un obiect de tip spațiul stărilor sau funcție de transfer:

- `eig(sys)`: returnează valorile proprii ale matricei de stare și, eventual, vectorii proprii;
- `lyap(A,Q)`: rezolvă ecuația algebrică Lyapunov $AX + XA^T + Q = 0$;
- `roots(P)`: calculează rădăcinile unui polinom;
- `pole(sys)`: returnează poli sistemului;
- `zero(sys)`: returnează zerourile sistemului;
- `zpk(sys)`: factorizează funcția de transfer a sistemului după poli, zerouri și factor de proporționalitate;
- `minreal(sys)`: returnează sistemul în formă minimală.

7.5 Moduri de oscilație

Modurile de oscilație sunt componentele dinamice care apar în structura răspunsului unui sistem la o intrare arbitrară. Ele sunt date de către poli sistemului și de intrările aplicate asupra acestuia.

Modurile (de oscilație ale) sistemului sunt componentele dinamice proprii care apar în structura răspunsului acestuia la o intrare de tip impuls Dirac. Ele sunt date **doar de către poli sistemului**, deoarece zerourile nu introduc moduri suplimentare de oscilație, ci ponderează modurile polilor.

- Exemplul 1:

$$H(s) = \frac{5}{(3s+1)(4s+1)}, \quad U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \quad (7.5)$$

$$y(t) = 5 \left(1(t) + 3e^{-\frac{t}{3}} - 4e^{-\frac{t}{4}} \right) \Rightarrow \quad (7.6)$$

Modurile sistemului sunt: $e^{-\frac{t}{3}}, e^{-\frac{t}{4}}$. Modul $e^{0t} = 1(t)$ ține de intrare.

- Exemplul 2:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+1}, \quad U(s) = \frac{10}{s^2+10^2} \text{ (intrare armonică, } \omega = 10[\text{rad/s}] \text{)} \Rightarrow$$

$$\text{Răspunsul sistemului este: } y(t) = \frac{10}{99} (\cos t - \sin t) + \frac{10}{99} (\cos(10t) - 0.1 \sin(10t)); \quad (7.7)$$

$\hat{s}_{1,2} = \pm j \Rightarrow$ **Modul sistemului** este: $e^{0t} \sin t$. Modul $\sin(10t)$ ține de intrare.

- Exemplul 3:

$$H(s) = \frac{s+2}{s-1} = 1 + \frac{3}{s-1}, \quad U(s) = \delta(t) \text{ (impulsul Dirac)} \Rightarrow$$

$$\text{Funcția pondere este: } h(t) = \delta(t) + e^t; \quad (7.8)$$

$\hat{s}_1 = 1 \Rightarrow$ **Modul sistemului** este: e^{1t} . Modul $\delta(t)$ ține de intrare.

- Exemplul 4:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+8s+20} = \frac{1}{(s+4)^2+2^2}, \quad U(s) = \delta(t) \text{ (impulsul Dirac)} \Rightarrow$$

$$\text{Funcția pondere este: } h(t) = e^{-4t} \sin(2t); \quad (7.9)$$

$\hat{s}_{1,2} = -4 \pm 2j \Rightarrow$ **Modul sistemului** este: $e^{-2t} \sin(2t)$.

7.6 Probleme propuse

Problema 1 Se consideră următoarele sisteme. Să se studieze stabilitatea internă și stabilitatea externă, efectuând corelația dintre răspunsul pondere și poziția polilor în planul complex, i.e. pe baza modurilor sistemului. **Menționați dacă sistemele sunt asimptotic stabile, simplu stabile (la limita de stabilitate), instabile.**

a) $H(s) = \frac{K}{s^n}, K \neq 0, n \geq 1;$

f) $H(s) = \frac{s+250}{s^2-2s+16};$

b) $H(s) = \frac{4}{s+5};$

g) $H(s) = \frac{s-400}{(s+50)(s+100)};$

c) $H(s) = \frac{4}{s-5};$

h) $H(s) = \frac{s+20}{s(s+10)(s+100)};$

d) $H(s) = \frac{10}{s^2+6s+9};$

i) $H(s) = \frac{s+10}{s^2+400};$

e) $H(s) = \frac{s-3}{(s-3)(s^2+s+4)};$

j) $H(s) = \frac{s+1}{(s^2+4)^2};$

$$k) H(s) = -\frac{s+2}{s+1};$$

$$l) H(s) = \frac{s-10.01}{(s-10)(s+9)}.$$

Problema 2 Se consideră sistemele în timp continuu descrise prin realizările de stare ce urmează. Studiați pe foaie stabilitatea internă utilizând valorile proprii și criteriul Routh-Hurwitz, respectiv stabilitatea externă utilizând polii funcției de transfer. Validați rezultatul utilizând funcțiile MATLAB `eig` și `roots/pole`. Se află în formă minimală? Efectuați corelația dintre răspunsul pondere și poziția valorilor proprii și a polilor în planul complex, i.e. pe baza modurilor sistemului.

(a)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -10 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -486 \\ 1 & 0 & -189 \\ 0 & 1 & -24 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 99 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -32 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -11 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Problema 3 Să se studieze în MATLAB stabilitatea internă și externă a sistemului SIMO al unui pendul inversat pe un cărucior, precum în Figura 7.2, pe baza metodelor descrise în paragrafele 7.1.1, 7.1.2 și 7.2.1.

Deduceți pe foaie realizarea de stare cu variabilele $\mathbf{x}(t) = [x(t), \dot{x}(t), \phi(t), \dot{\phi}(t)]^T$, respectiv ieșirile $\mathbf{y}(t) = [x(t), \phi(t)]$. În cazul stabilității externe, considerați separat ambele ieșiri: funcția de transfer de la intrarea de tip forță ($u = F$) la unghiul pendulului $H_{\phi,u}(s)$, respectiv de la intrare la poziția căruciorului $H_{x,u}(s)$.

Pentru sistemul liniarizat, se consideră ecuațiile diferențiale:

$$(I + ml^2)\ddot{\phi}(t) - mgl\phi(t) = ml\ddot{x}(t); \quad (7.10)$$

$$(M + m)\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - ml\ddot{\phi}(t) = u(t), \quad (7.11)$$

unde $\phi = \theta - \pi$.

Studiați, utilizând MATLAB, stabilitatea internă a sistemului atât pe baza valorilor proprii ale matricei de stare, cât și prin metoda a II-a a lui Lyapunov, respectiv stabilitatea externă. Rezultatele se vor marca în comentarii în codul sursă.

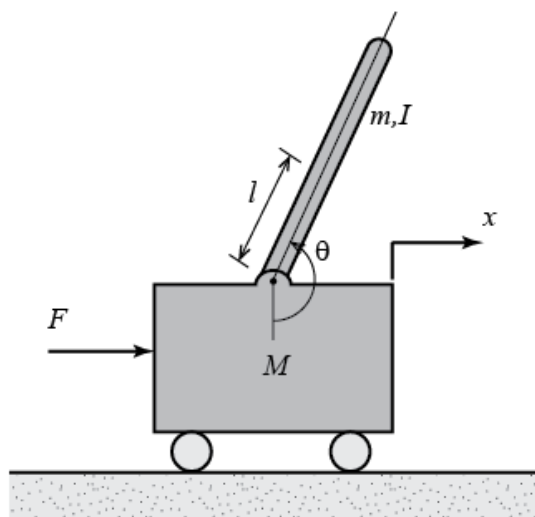


Figura 7.2: Sistemul mecanic cu pendul inversat pe cărucior

Un exemplu numeric este ilustrat în tabelul 7.2.

Tabelul 7.2: Parametrii sistemului cu pendul inversat pe cărucior

Parametru	Valoare	Unitate de măsură
M	0.5	kg
m	0.2	kg
b	0.1	Ns/m
l	0.3	m
I	0.006	$kg \cdot m^2$

Problema 4 Se consideră sistemul mecanic de suspensie activă al unui automobil prezentat în Figura 7.3, corespunzător unei singure roți. Ecuțiile diferențiale care guvernează sistemul

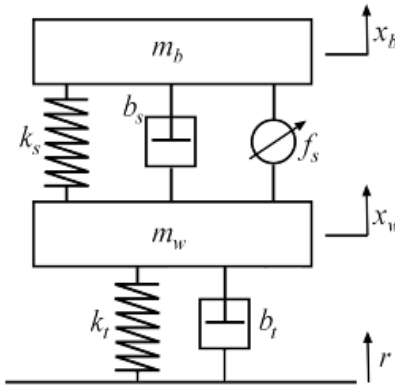


Figura 7.3: Structura sistemului mecanic de suspensie a unui automobil

sunt:

$$m_b \frac{d^2 x_b}{dt^2} + b_s \frac{dx_b}{dt} + k_s x_b = b_s \frac{dx_w}{dt} + k_s x_w + f_s;$$

$$m_w \frac{d^2 x_w}{dt^2} + (b_s + b_t) \frac{dx_w}{dt} + (k_s + k_t) x_w = b_s \frac{dx_b}{dt} + k_s x_b + b_t \frac{dr}{dt} + k_t r - f_s.$$

Dacă forța actuatorului hidraulic se consideră nulă ($f_s = 0$) se obține un sistem de suspensie pasivă. Variabilele de stare se vor alege ca fiind pozițiile și vitezele maselor șasiului, respectiv a roții: $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_b, \dot{x}_b, x_w, \dot{x}_w)^T$. Pentru a nu considera o stare suplimentară corespunzătoare derivatei intrării $r(t)$, se consideră parametrul $b_t = 0$. Un exemplu de alegere a parametrilor sistemului de suspensie este ilustrat în tabelul 7.3.

Studiați, utilizând MATLAB, stabilitatea internă a sistemului atât pe baza valorilor proprii ale matricei de stare, cât și prin metoda a II-a a lui Lyapunov, respectiv stabilitatea externă. Rezultatele se vor marca în comentarii în codul sursă.

Tabelul 7.3: Parametrii sistemului de suspensie

Parametru	Valoare	Unitate de măsură
m_b	300	kg
m_w	60	kg
b_s	1000	Ns/m
b_t	0	Ns/m
k_s	16000	N/m
k_t	190000	N/m

Lucrarea 8

Răspunsurile sistemelor LTI la intrări polinomiale

8.1	Sistemele de ordin I	76
8.2	Sistemele de ordin II	77
8.3	Sisteme de ordin n , $n \in \mathbb{N}$	80
8.4	Probleme propuse	80
8.5	Răspunsuri	80

În lucrarea de față sunt prezentate răspunsurile sistemelor de ordin I și II la intrările de tip impuls, de tip treaptă și de tip rampă, cu aplicații pe structuri tipice de procese care apar în domeniul de control, reductibile la combinații de răspunsuri de ordin I și II. Pentru o intrare arbitrară $U(s)$, răspunsul unui sistem descris prin funcția de transfer $H(s)$ este dat de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$. În particular, obținem că:

- răspunsul la impuls al unui sistem este dat de $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ (numit și **funcția pondere**);
- răspunsul la treaptă al unui sistem este dat de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\frac{1}{s}\}$ (numit și **răspuns indicial**);
- răspunsul la rampă al unui sistem este dat de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\frac{1}{s^2}\}$.

8.1 Sistemele de ordin I

O structură tipică de sistem de ordin I este:

$$H_1(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad (8.1)$$

unde K este **factorul de proporționalitate**, iar T este **constanta de timp**. Funcția pondere este:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0, \quad (8.2)$$

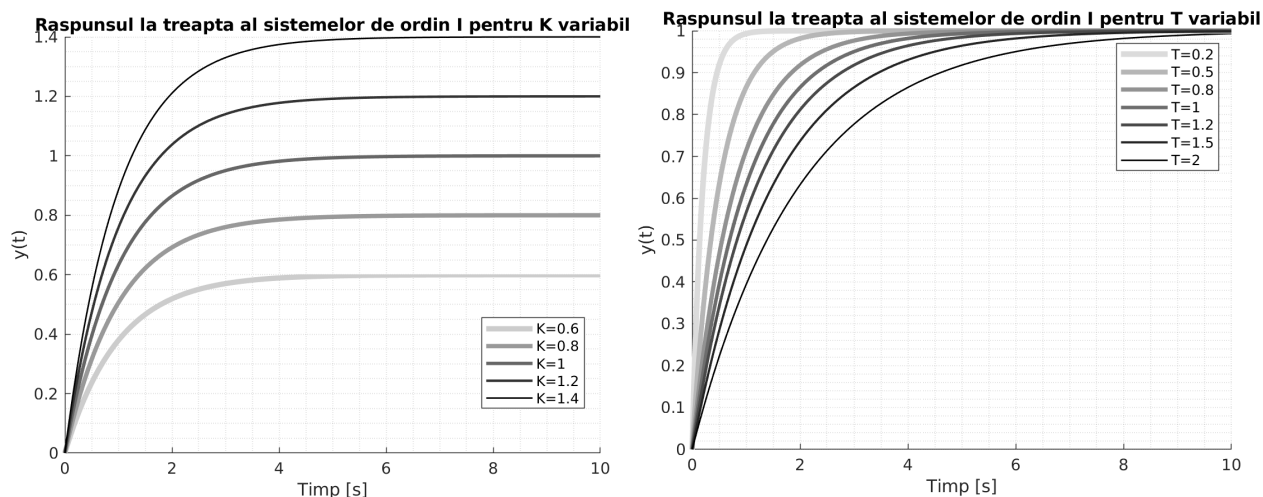
iar răspunsul indicial este:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}} \right\} = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0, \quad (8.3)$$

unde cu $1(t)$ s-a notat intrarea de tip treaptă. Răspunsul la intrare de tip rampă unitate descrisă prin $v(t) = t \cdot 1(t)$ este:

$$y_{1v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} - \frac{KT}{s} + \frac{KT}{s + \frac{1}{T}} \right\} = K \left(t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0. \quad (8.4)$$

În Figura 8.1a se observă influența variației factorului de proporționalitate în răspunsul indicial, unde se poate constata că valoarea la care se stabilizează ieșirea sistemului este egală cu valoarea lui K . În același timp, Figura 8.1b ilustrează influența variației constantei de timp asupra răspunsului indicial – putem observa că o valoare mai mică a parametrului T duce la o stabilizare mai rapidă a răspunsului.



(a) Variația factorului de proporționalitate

(b) Variația constantei de timp

Alte două structuri de ordin I mai des întâlnite sunt integratorul și derivatorul cu filtru:

$$H_2(s) = \frac{K}{s}, \quad H_3(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}, \quad (8.5)$$

având funcțiile pondere:

$$h_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \right\} = K, \quad t \geq 0, \quad (8.6)$$

respectiv:

$$h_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ks}{Ts+1} \right\} = \frac{K}{T} \mathcal{L}^{-1} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \right\} = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0, \quad (8.7)$$

unde $\delta(t)$ este impulsul Dirac. Răspunsurile indiciale sunt date de:

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{s} \right\} = K \cdot t, \quad t \geq 0, \quad (8.8)$$

respectiv:

$$y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ks}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0. \quad (8.9)$$

Răspunsurile la rampă unitate sunt:

$$y_{2v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{K}{2} t^2, \quad t \geq 0, \quad (8.10)$$

respectiv:

$$y_{3v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ks}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts+1)} \right\} = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0. \quad (8.11)$$

8.2 Sistemele de ordin II

Vom analiza trei structuri tipice de sisteme de ordin II:

$$H_4(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad H_5(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad H_6(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \quad (8.12)$$

unde K este **factorul de proporționalitate**, T, T_1, T_2 sunt constantele de timp, ζ se numește **factor de amortizare**, iar ω_n este **pulsăția naturală de oscilație**.

8.2.1 Funcția pondere

Funcțiile pondere sunt date de:

$$\begin{aligned} h_4(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{KT_1}{T_1-T_2}}{T_1s+1} + \frac{\frac{KT_2}{T_2-T_1}}{T_2s+1} \right\} = \\ &= \frac{K}{T_1-T_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \right\} = \frac{K}{T_1-T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0, \quad \text{cu } T_1 \neq T_2, \quad (8.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_5(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = K\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \right\} = \\
&= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \right\} = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t), \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{8.14}$$

cu $-1 < \zeta < 1$, respectiv:

$$h_6(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts + 1)} \right\} = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0. \tag{8.15}$$

8.2.2 Răspunsul indicial

Răspunsul indicial al fiecărui sistem descris mai sus este dat de:

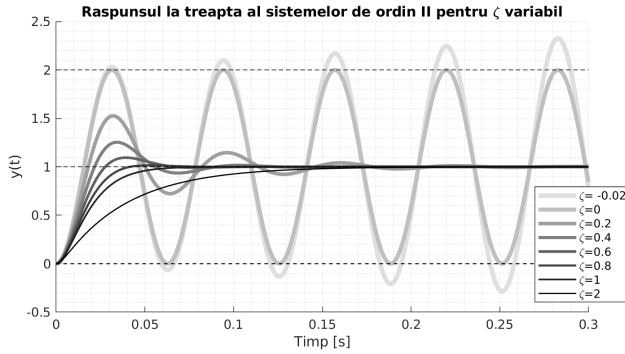
$$\begin{aligned}
y_4(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{KT_1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{KT_2}{s + \frac{1}{T_2}} \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow y_4(t) &= K \left(1(t) + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0, \quad \text{cu } T_1 \neq T_2,
\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned}
y_5(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} - \frac{K\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \right\} = \\
&= K \left(1(t) - e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) - \frac{\zeta e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow y_5(t) &= K \left(1(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t + \phi) \right), \quad t \geq 0, \quad \text{cu } -1 < \zeta < 1,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

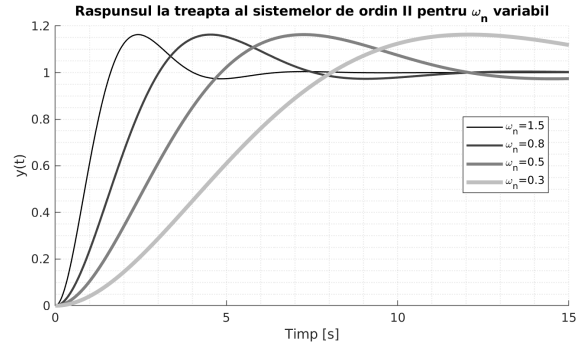
unde $\phi = \arccos(\zeta)$, respectiv:

$$y_6(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts + 1)} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} - \frac{KT}{s} + \frac{KT}{s + \frac{1}{T}} \right\} = K \left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0.$$

Structura $H_4(s)$ este inclusă în structura $H_5(s)$ pentru $|\zeta| \geq 1$, dar pentru a ilustra mai bine diferența dintre cele două moduri de funcționare s-a realizat această distincție. De asemenea, influența factorului de amplificare este aceeași ca în cazul anterior. În Figura 8.2a este prezentată influența variației factorului de amortizare în răspunsul indicial: pentru ζ negativ avem un sistem instabil, pentru $\zeta \in [0, 1)$ avem un răspuns oscilant, cu oscilații mai amorțzate pentru valori mai mari, respectiv apariția regimului aperiodic pentru $\zeta \geq 1$. De asemenea, în Figura 8.2b este ilustrată influența pulsației naturale asupra răspunsului indicial: cu cât ω_n scade, cu atât valoarea maximă se atinge la un moment de timp mai îndepărtat.



(a) Variația factorului de amortizare



(b) Variația pulsației naturale

8.2.3 Răspunsul la rampă

Pentru răspunsul la rampă avem:

$$y_{4v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} - \frac{K(T_1 + T_2)}{s} + \frac{KT_1^3}{T_1 - T_2} + \frac{KT_2^3}{T_2 - T_1} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{4v}(t) = K \left(t - (T_1 + T_2) + \frac{T_1^2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0, \text{ cu } T_1 \neq T_2, \quad (8.18)$$

$$y_{5v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} - \frac{2K\zeta}{\omega_n s} + \frac{2K\zeta(s + \zeta\omega_n) + 2\zeta^2 - 1}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{5v}(t) = K \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + \frac{(2\zeta^2 - 1)e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) \right), \quad t \geq 0, \quad (8.19)$$

cu $-1 < \zeta < 1$, respectiv:

$$y_{6v}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts + 1)} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^3} - \frac{KT}{s^2} + \frac{KT^2}{s} - \frac{KT^3}{Ts + 1} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{6v}(t) = K \left(\frac{1}{2}t^2 - T \cdot t + T^2 - T^2 e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0. \quad (8.20)$$

Observație: În MATLAB există funcții utile predefinite pentru determinarea răspunsului unui sistem LTI descris printr-un obiect de tip spațiul stărilor, funcție de transfer sau zero-pole-gain:

- `impulse(sys)`: calculează răspunsul la impuls Dirac al sistemului;
- `step(sys)`: calculează răspunsul la treaptă unitate (Heaviside) al sistemului;
- `lsim(sys,u,t)`: calculează răspunsul la intrări arbitrare $u(t)$ date sistemului.

8.3 Sisteme de ordin n , $n \in \mathbb{N}$

Orice funcție de transfer poate fi scrisă ca raport de polinoame date sub formă de produse de termeni de gradul I sau II cu poli complex conjugați. Se evidențiază astfel singularitățile reale, respectiv complex conjugate, utilizând parametri cu semnificație fizică:

$$H(s) = \frac{K}{s^p} \cdot \frac{\prod \left(\overset{\circ}{T}_i s + 1 \right) \prod \left(\left(\frac{s}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\overset{\circ}{\zeta}_i}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} s + 1 \right)}{\prod \left(\hat{T}_j s + 1 \right) \prod \left(\left(\frac{s}{\overset{\wedge}{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\overset{\wedge}{\zeta}_j}{\overset{\wedge}{\omega}_{n,j}} s + 1 \right)}. \quad (8.21)$$

8.4 Probleme propuse

Să se calculeze pe foaie răspunsul la intrarea de tip impuls, treaptă, respectiv rampă și să se verifice rezultatul obținut în MATLAB pentru fiecare dintre următoarele sisteme. De asemenea, să se determine polii, zerourile, factorul de proporționalitate și să se evidențieze după caz constanta de timp, factorul de amortizare și pulsația naturală de oscilație.

a) $H(s) = \frac{3}{s+5};$

g) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+1};$

b) $H(s) = \frac{1}{s(s+2)};$

h) $H(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2};$

c) $H(s) = \frac{40(s+1)}{s+10};$

i) $H(s) = \frac{2s}{s^2-4};$

d) $H(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)};$

j) $H(s) = \frac{100}{(s+10)(s+20)(10s+1)};$

e) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2};$

k) $H(s) = \frac{1-2s}{(s+1)^3};$

f) $H(s) = \frac{1}{s^2+s+1};$

l) $H(s) = \frac{10}{s+10} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right).$

8.5 Răspunsuri

a1) $h(t) = 3e^{-5t}$

a2) $y(t) = \frac{3}{5}(1 - e^{-5t})$

a3) $y_v(t) = \frac{3}{5}t - \frac{3}{25} + \frac{3}{25}e^{-5t}$

b1) $h(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$

b2) $y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$

b3) $y_v(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}$

c1) $h(t) = 40(\delta(t) - 9e^{-10t})$

c2) $y(t) = 4(1 + 9e^{-10t})$

c3) $y_v(t) = 4t + \frac{36}{10} - \frac{36}{10}e^{-10t}$

d1) $h(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$
 $3e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$

d2) $y(t) = \frac{3}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$

d3) $y_v(t) = \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} +$

e1) $h(t) = te^{-t}$

e2) $y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$

e3) $y_v(t) = t - 2 + 2e^{-t} + te^{-t}$

f1) $h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

f2) $y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{\frac{1}{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$

f3) $y_v(t) = t - 1 + e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$

g1) $h(t) = \cos t + \sin t$

g2) $y(t) = 1 - \cos t + \sin t$

g3) $y_v(t) = t + 1 - \cos t - \sin t$

h1) $h(t) = e^{-t}(\cos t + 2 \sin t)$ h2) $y(t) = \frac{3}{2} - e^{-t}(\frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{3} \sin t)$ h3) $y_v(t) = \frac{3}{2}t - 1 + e^{-t}(\cos t - \frac{1}{2} \sin t)$

i1) $h(t) = e^{-2t} + e^{2t}$

i2) $y(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})$

i3) $y_v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$

j1) $h(t) = -0.101e^{-10t} + 0.05e^{-20t} + 0.05e^{-0.1t}$

j2) $y(t) = \frac{1}{2}0.01e^{-10t} - 0.0025e^{-20t} - 0.5e^{-0.1t}$

j3) $y_v(t) = \frac{1}{2}t - 5.07 - 0.001e^{-10t} + 0.0001e^{-20t} + 5.07e^{-0.1t}$

k1) $h(t) = -2 \left(te^{-t} - \frac{3}{4}t^2e^{-t} \right)$ k2) $y(t) = 1 - e^{-t} \left(1 + t + \frac{3}{2}t^2 \right)$ k3) $y_v(t) = t - 5 + 5e^{-t} + 4te^{-t} + 1.5t^2e^{-t}$

l1) $h(t) = -1.61e^{-10t} + 1.1e^{-t} + 0.5e^{-0.05t}$

l2) $y(t) = 11 + 0.16e^{-10t} + 1.11e^{-t} - 10.05e^{-0.5t}$

l3) $y_v(t) = 11t - 202.122 + 1.11e^{-t} + 201.005e^{-0.05t} - 0.0161e^{-10t}$

Tabelul 8.1: Tabel de transformate Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$(1 - e^{-\alpha t})1(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$
$\sin(\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot e^{-\alpha t}1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot e^{-\alpha t}1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Lucrarea 9

Performanțele sistemelor LTI

9.1	Performanțele sistemelor LTI	84
9.2	Regimuri de funcționare și moduri de oscilație	86
9.3	Probleme propuse	87

În lucrarea de față sunt prezentați parametrii des utilizați în practică pentru analiza performanțelor regimurilor tranzitoriu și staționar ale răspunsurilor sistemelor LTI, cu accent deosebit pe studiul sistemelor de ordin I și II. Suplimentar, se prezintă tipurile de regimuri de funcționare și modurile de oscilație care le determină.

9.1 Performanțele sistemelor LTI

Răspunsul unui sistem LTI descris prin funcția de transfer $H(s)$ la o intrare $u(t)$ se calculează astfel:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s) \cdot U(s)\} = y_\ell(t) + y_p(t), \quad (9.1)$$

unde $y_\ell(t)$ este **componenta liberă sau tranzitorie**, proprie sistemului (conține modurile acestuia), iar $y_p(t)$ este **componenta permanentă sau răspunsul forțat**, direct dependentă de intrare.

9.1.1 Performanțe în regim tranzitoriu

Definiții generale, considerând valorile staționară și inițială a ieșirii notate y_{st} și y_0 :

- **timpul de răspuns** (engl. *settling time*), definit ca soluția t_r a ecuației:

$$\min_{t_r > 0} |y(t) - y_{st}| \leq 2\% \cdot |y_{st} - y_0|, \quad \forall t \geq t_r. \quad (9.2)$$

- **timpul de urcare** (sau creștere, engl. *rise time*), definit ca diferența dintre timpii de 90% și 10% corespunzători valorilor semnalelor de ieșire față de valoarea staționară y_{st} :

$$t_u = t_{90\%} - t_{10\%}, \quad (9.3)$$

- **suprareglajul** (engl. *overshoot*), definit ca valoarea relativă maximă a răspunsului indicial:

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{st}}{y_{st} - y_0} \cdot 100[\%]. \quad (9.4)$$

Particularizări utile pentru sisteme de ordin I

Pentru procesul tipic de ordin I descris prin funcția de transfer:

$$H_1(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad (9.5)$$

se disting următorii parametri de performanță în regim tranzitoriu, ilustrați în figura 9.1:

- **timpul de răspuns:** $t_r \approx 4T = \frac{4}{\frac{1}{T}} = \frac{4}{|\operatorname{Re}\{\hat{s}_1\}|}$;
- **timpul de 63%** din răspunsul indicial, egal cu o constantă de timp: $y(T) = K \cdot (1 - \frac{1}{e}) \approx 0.63 \cdot K$.

Observație: Distincția clară între răspunsul unui sistem de ordin I și cel al unui sistem de ordin mai mare decât 1 se poate face prin panta de pornire nenulă în cazul sistemului de ordin I, respectiv prin pornirea tangentă la axa absciselor în cazul sistemelor de ordin superior.

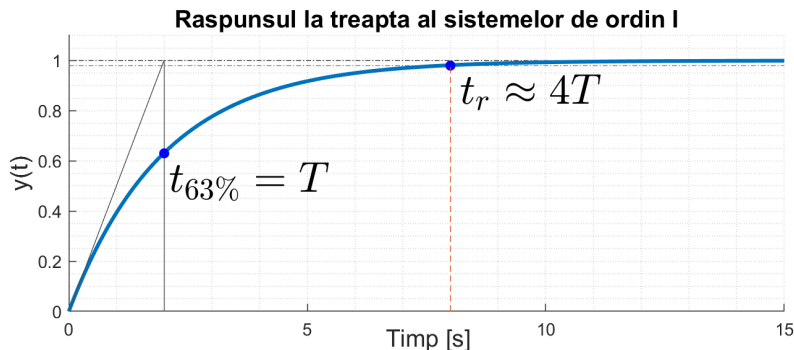


Figura 9.1: Performanțele unui sistem de ordinul I

Particularizări utile pentru sisteme de ordin II

Pentru procesul tipic de ordin II descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (9.6)$$

se disting următorii parametri de performanță în regim tranzitoriu, ilustrați în figura 9.2:

- **timpul de răspuns:**

$$t_r \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{|\operatorname{Re}\{\hat{s}_{1,2}\}|}; \quad (9.7)$$

- **suprareglajul**, corespunzător timpului primului maxim calculabil la $t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$:

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \in [0, 1]; \quad (9.8)$$

- **pulsația de oscilație:**

$$\omega_{osc} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \operatorname{Im}\{\hat{s}_{1,2}\}. \quad (9.9)$$

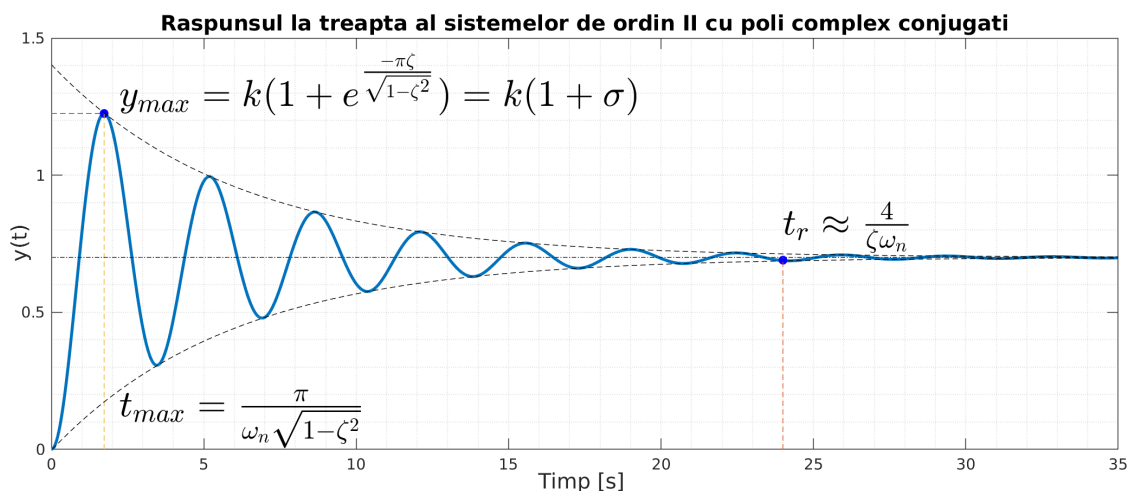


Figura 9.2: Performanțele unui sistem oscilant de ordinul II

9.1.2 Performanțe în regim staționar

Componenta permanentă a unui sistem LTI este de natura semnalului de intrare. Spre exemplu, dacă intrarea $u(t)$ este de tip polinomial, componenta permanentă este tot de tip polinomial și de același ordin.

În funcție de semnalul considerat la intrare, se poate măsura capacitatea sistemului de reglare de a urmări acel semnal prin **eroarea staționară** ε_{ss} (engl. *steady-state error*, cu notația alternativă ε_{st}), definită prin:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} s (U(s) - Y(s)). \quad (9.10)$$

În ultima egalitate s-a utilizat teorema valorii finale din analiza complexă. În ordinea utilizării în practică, se disting următoarele tipuri de erori staționare:

- **eroarea staționară la poziție:** $\varepsilon_{ssp} [= \varepsilon_{stp}] = 1 - H(0)$, ceea ce semnifică abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip treaptă unitară, deci $u(t) = 1(t) \Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$, precum în figura 9.3;
- **eroarea staționară la viteză:** $\varepsilon_{ssv} [= \varepsilon_{stv}]$, descrie abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip rampă unitară $u(t) = t \Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$; este finită numai în cazul în care sistemul are $\varepsilon_{ssp} = 0$; diferența dintre un sistem cu eroarea staționară la viteză finită, respectiv infinită este ilustrată în figura 9.4;
- **eroarea staționară la accelerație:** $\varepsilon_{ssa} [= \varepsilon_{sta}]$, care descrie abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip parabolă unitară, deci $u(t) = t^2 \Leftrightarrow U(s) = \frac{2}{s^3}$; este finită doar dacă sistemul are $\varepsilon_{ssv} = 0$.

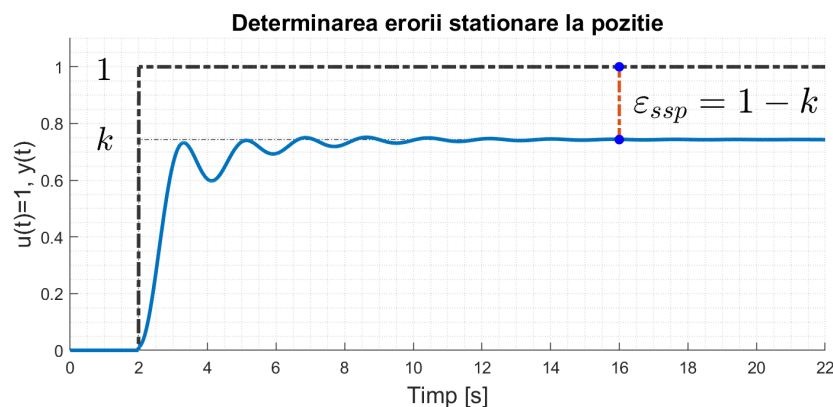


Figura 9.3: Calculul erorii staționare la poziție în cazul unui sistem LTI

9.2 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație

Regimul de funcționare prezintă caracterul general al regimului tranzitoriu al unui sistem LTI. Acesta este determinat de modurile de oscilație dominante ale componentei tranzitorii.

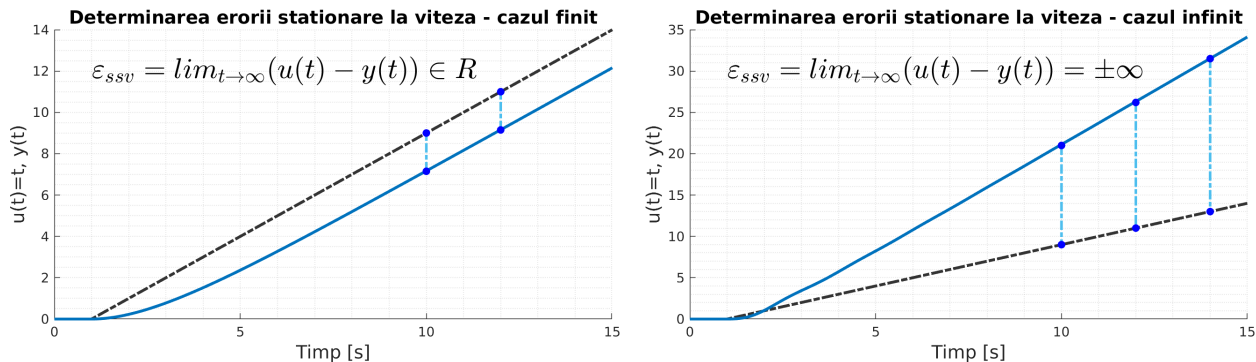


Figura 9.4: Calculul erorii staționare la viteză în cazul unui sistem LTI

Polii dominanți se află în dreapta planului complex. În cazul polilor stabili, polii dominanți sunt cei apropiați de axa imaginară.

Modurile de oscilație sunt determinate de polii sistemului LTI, respectiv pot fi de următoarele tipuri, ilustrate grafic în cazul sistemelor de ordin II în figura 9.5:

- în cazul polilor reali de multiplicitate n : $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\hat{s}t}$;
- în cazul perechilor de poli complex conjugați de multiplicitate n : $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\text{Re}\{\hat{s}\}t} \sin(\text{Im}\{\hat{s}\}t)$.

9.3 Probleme propuse

Exercițiul 4.1

Pentru fiecare din următoarele sisteme să se determine polii, zerourile, factorul de proporționalitate și să se evedențieze, după caz, constanta de timp, factorul de amortizare și pulsația naturală de oscilație. De asemenea, să se calculeze, după caz, timpul de răspuns, suprareglajul, pulsația oscilațiilor, eroarea staționară la poziție și eroarea staționară la viteză. Să se precizeze modurile sistemului și regimul de funcționare.

a) $H(s) = \frac{1}{s(s+10)}$;

f) $H(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+2}$;

b) $H(s) = \frac{3}{(s+1)(s+5)}$;

g) $H(s) = \frac{2s}{s^2-4}$;

c) $H(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$;

h) $H(s) = \frac{100}{(s+10)(s+20)(10s+1)}$;

d) $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$;

i) $H(s) = \frac{1-2s}{(s+1)^3}$;

e) $H(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$;

j) $H(s) = \frac{10}{s+10} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right)$.

Exercițiul 4.2

Aceeași cerință ca la Exercițiul 4.1 pentru următoarele clase de procese industriale. Analizați influența parametrilor indicați asupra răspunsurilor sistemelor la intrare de tip treaptă unitară.

a) sistem cu integratoare:

$$H(s) = \frac{K}{s^n}, \quad K \neq 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

b) sistem cu poli multipli egali:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$$

c) sistem de ordinul 4 cu poli în progresie:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(\alpha s+1)(\alpha^2 s+1)(\alpha^3 s+1)}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\};$$

d) sistem cu zero de fază neminimă:

$$H(s) = \frac{-\alpha s + 1}{(s+1)^3}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\};$$

e) sistem oscilant:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad \zeta \in \{0, 0.1, 0.5, 0.8\}, \quad \omega_n \in \{1, 2, 5, 10\};$$

f) sistem condiționabil stabil:

$$H(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)};$$

g) sistem cu moduri rapide și lente:

$$H(s) = \frac{100}{(s+10)^2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right);$$

h) sistem instabil:

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(Ts+1)}, \quad T \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100\}.$$

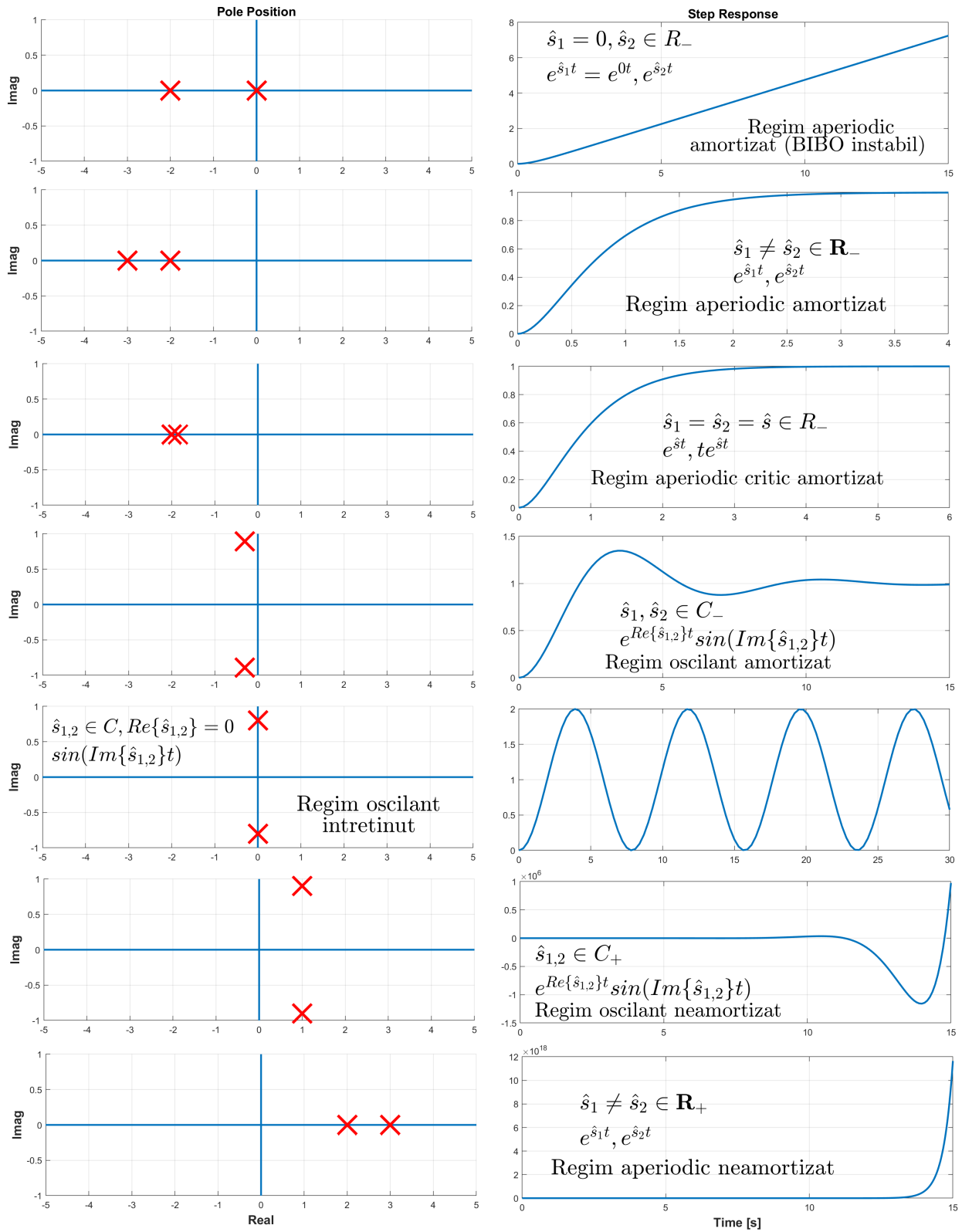


Figura 9.5: Regimurile și modurile de oscilație ale unui sistem de ordin II în funcție de poziția polilor în planul complex

Lucrarea 10

Conexiunile sistemelor LTI

10.1 Conexiunile sistemelor LTI . .	92
10.2 Conceptualizarea metodei locului rădăcinilor	93
10.3 Probleme propuse	98

În această lucrare se prezintă interconexiunile tipice ale sistemelor de reglare, cu accent deosebit pe conexiunea cu reacție negativă. Suplimentar, se utilizează metoda locului rădăcinilor pentru analiza influenței unui parametru variabil asupra polilor unui sistem, cu trasare în mediul MATLAB și interpretarea rezultatelor: analiza stabilității sistemului, a regimurilor de funcționare, respectiv a modurilor de oscilație.

10.1 Conexiunile sistemelor LTI

Cele trei tipuri de conexiuni de bază ale sistemelor LTI sunt:

- **conexiunea în serie**, având funcția de transfer echivalentă:

$$H_{serie} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{R_2(s)} \cdot \frac{R_2(s)}{R_1(s)} = H_2(s) \cdot H_1(s); \quad (10.1)$$

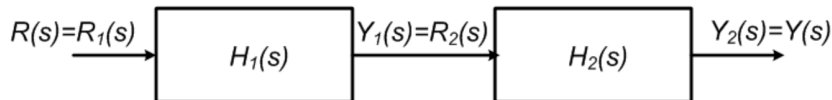


Figura 10.1: Conexiunea serie a sistemelor LTI

- **conexiunea în paralel**, având funcția de transfer echivalentă:

$$H_{paralel}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \pm H_1(s) \pm H_2(s); \quad (10.2)$$

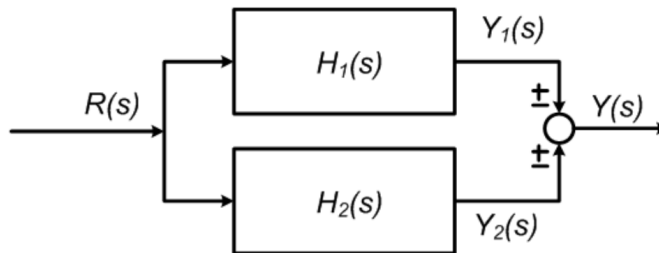


Figura 10.2: Conexiunea în paralel a sistemelor LTI

- **conexiunea cu reacție (pozitivă sau negativă)**, având funcția de transfer echivalentă:

$$H_{reactie}(s) = H_0(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_d(s)}{1 \mp H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 \mp H_{des}(s)}, \quad (10.3)$$

unde:

- $H_d(s)$: este funcția de transfer pe calea directă;
- $H_r(s)$: este funcția de transfer pe calea de reacție;
- $H_{des}(s)$: este funcția de transfer în buclă deschisă;
- $H_0(s)$: este funcția de transfer în buclă închisă.

La numitor este semnul – pentru reacție pozitivă și + pentru reacție negativă.

În MATLAB există funcțiile `series`, `parallel` și `feedback` pentru implementarea celor trei conexiuni.

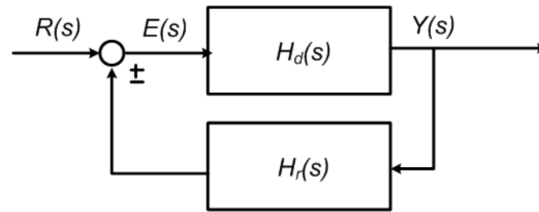


Figura 10.3: Conexiunea cu reacție a sistemelor LTI

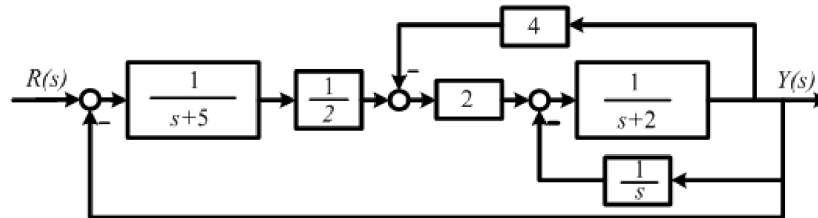


Figura 10.4: Sistem LTI cu interconexiuni

Exemplu: Calculați funcția de transfer a sistemului echivalent din Figura 10.4.
Răspunsul final este:

$$H_{echivalent}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s}{s^3 + 15s^2 + 52s + 5}. \quad (10.4)$$

10.2 Conceptualizarea metodei locului rădăcinilor

Se consideră sistemul cu reacție negativă din Figura 10.3. Orice astfel de sistem poate fi rearanjat încât blocul $H_r(s)$ să devină unitar. În acest caz, sistemul se numește cu **reacție negativă (RN) rigidă sau unitară**.

Astfel, rezultă sistemul ilustrat în Figura 10.5, unde:

$$H_d(s) = k \cdot H(s), \quad H_r(s) = 1, \quad H_{des}(s) = k \cdot H(s), \quad (10.5)$$

$$H_0(s) = \frac{k \cdot H(s)}{1 + k \cdot H(s)}. \quad (10.6)$$

Polii sistemului în buclă închisă sunt determinați de ecuația caracteristică:

$$P_c(s) = 1 + k \cdot H(s) \equiv 0. \quad (10.7)$$

Pentru $H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ rezultă:

$$1 + k \cdot H(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) + k \cdot \beta(s) = 0. \quad (10.8)$$

Astfel, pentru $k \rightarrow 0$, polii sistemului închis sunt dați de rădăcinile polinomului de la numitor, $\alpha(s) = 0$, iar pentru $k \rightarrow \infty$, polii sistemului închis tind la rădăcinile polinomului de la

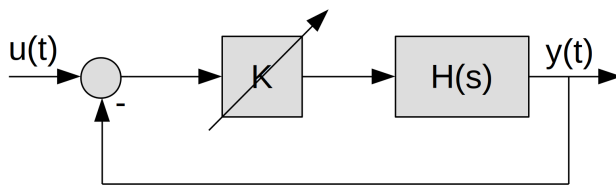


Figura 10.5: Schema de reglare tipică metodei locului rădăcinilor

numărător: $\frac{1}{k}\alpha(s) + \beta(s) = 0$. În concluzie, polii sistemului închis pornesc din polii sistemului deschis, respectiv tind la zerourile sistemului deschis, pentru $k \in [0, \infty)$.

Se poate constata că, dacă sistemul inițial în buclă deschisă descris prin $H(s)$ are ordinul n , echivalent cu a avea n poli, atunci și sistemul rezultat în urma închiderii buclei are tot ordin n , în cazul în care nu există simplificări între poli și zerouri. **Locul geometric al rădăcinilor sistemului în buclă închisă**, ca funcție de parametrul k , va avea atunci n ramuri.

Locul rădăcinilor se poate trasa utilizând funcția `rlocus` din mediul MATLAB, care primește ca argument principal funcția de transfer $H(s)$ din ecuația caracteristică. Similar, se poate folosi funcția `rlocus` din MATLAB, utilă în cazul proiectării reguletoarelor.

Să se trateze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru următoarele cazuri:

Exemplul 1 Analiza sistemului în buclă închisă conform structurii cu reacție negativă unitară din Figura 10.5, în care:

$$H_d(s) = k \cdot \frac{s + 5}{(s + 2)(s + 3)}, \quad k > 0. \quad (10.9)$$

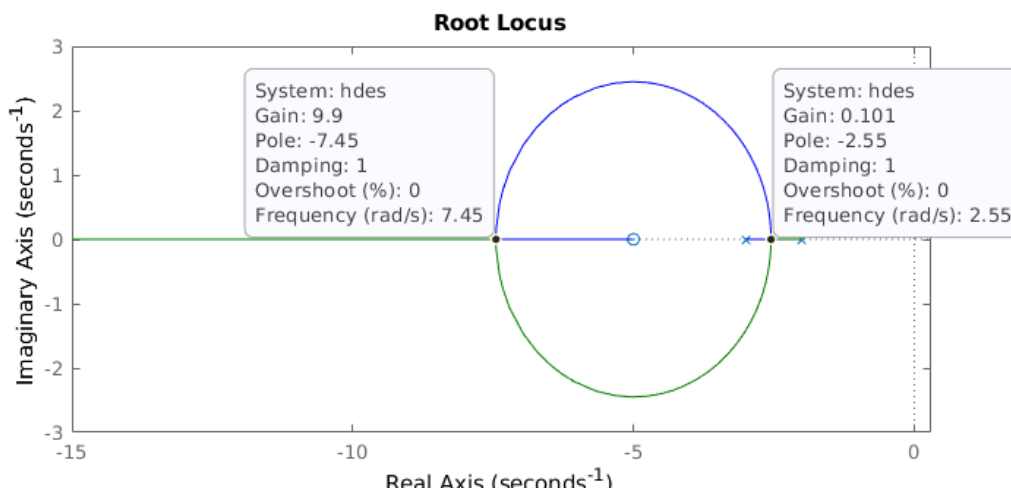


Figura 10.6: Locul rădăcinilor pentru Exemplul 1

Rezolvare În acest caz:

$$H_0(s) = \frac{k \cdot H(s)}{1 + k \cdot H(s)} = \frac{k \cdot \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}}{1 + k \cdot \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}}, \quad (10.10)$$

deci funcția `rlocus` trebuie apelată cu funcția de transfer $H(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$, de unde rezultă locul geometric din Figura 10.6.

Deoarece ambele traiectorii se află în semiplanul stâng, rezultă că sistemul închis este **extern stabil** indiferent de $k > 0$. În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 0.101)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}$, $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-, \hat{s}_1 \neq \hat{s}_2$;
- $k = 0.101$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s} t}, t e^{\hat{s} t}$, $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$;
- $k \in (0.101, 9.9)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{\text{Re}(\hat{s}_{1,2}) t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{1,2}) t)$, $\hat{s}_{1,2} = \alpha \pm \beta j, \alpha \in \mathbb{R}_-$;
- $k = 9.9$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s} t}, t e^{\hat{s} t}$, $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$;
- $k \in (9.9, \infty)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}$, $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-, \hat{s}_1 \neq \hat{s}_2$.

Exemplul 2 Analiza sistemului în buclă închisă conform structurii cu reacție negativă unitară din Figura 10.5, în care:

$$H_d(s) = k \cdot \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}, \quad k > 0. \quad (10.11)$$

Rezolvare În acest caz:

$$H_0(s) = \frac{k \cdot H(s)}{1 + k \cdot H(s)} = \frac{k \cdot \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}}{1 + k \cdot \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}}, \quad (10.12)$$

deci funcția `rlocus` trebuie apelată cu funcția de transfer $H(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}$, de unde rezultă locul geometric din Figura 10.7.

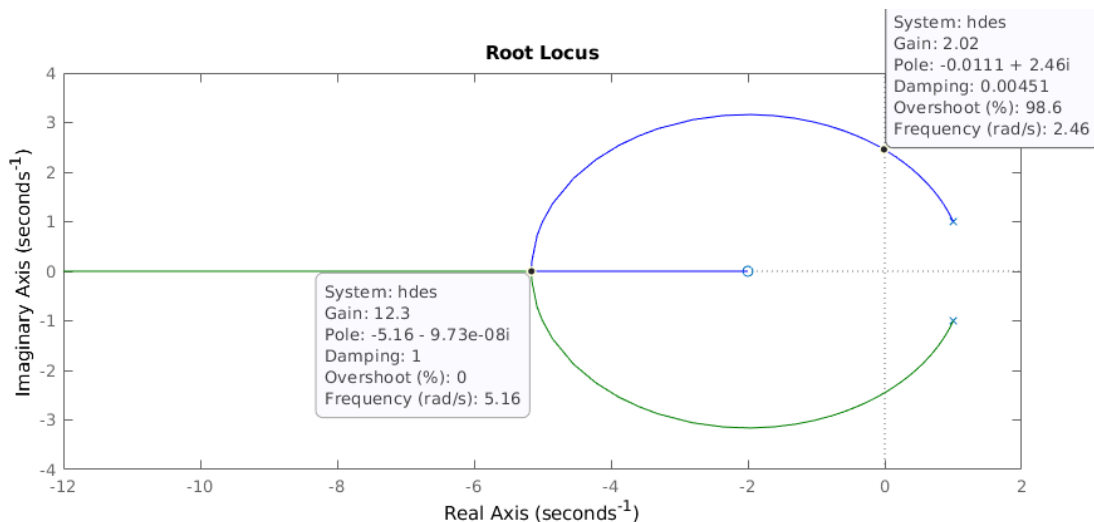


Figura 10.7: Locul rădăcinilor pentru Exemplul 2

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k \geq 2$. În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 2)$: regim oscilant neamortizat, cu modul $e^{\operatorname{Re}(\hat{s}_{1,2})t} \sin(\operatorname{Im}(\hat{s}_{1,2})t)$, $\hat{s}_{1,2} = \alpha \pm \beta j$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$;
- $k = 2$: regim oscilant întreținut, cu modul $\sin(\operatorname{Im}(\hat{s}_{1,2})t)$, $\hat{s}_{1,2} = \pm \beta j$, $\beta > 0$;
- $k \in (2, 12.3)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{\operatorname{Re}(\hat{s}_{1,2})t} \sin(\operatorname{Im}(\hat{s}_{1,2})t)$, $\hat{s}_{1,2} = \alpha \pm \beta j$, $\alpha \in \mathbb{R}_-$;
- $k = 12.3$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}t}$, $te^{\hat{s}t}$, $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$;
- $k \in (12.3, \infty)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}$, $e^{\hat{s}_2 t}$, $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-$, $\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2$.

Exemplul 3 Analiza sistemului în buclă închisă conform structurii cu reacție negativă din Figura 10.3, în care funcția de transfer pe calea directă este formată dintr-un regulator proporțional-integrator (PI) inseriat cu procesul de controlat:

$$H_d(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \cdot \frac{3}{s+5}, \quad H_r(s) = 1 \text{ (RNU)}. \quad (10.13)$$

Factorul proporțional al regulatorului se consideră $K_p = 1$, iar constanta de integrare este variabilă pe domeniul $T_i \in (0, \infty)$.

Rezolvare Pentru a putea fi aplicată metoda locului rădăcinilor în funcție de T_i , trebuie adaptată ecuația caracteristică conform structurii din Figura 10.5, respectiv a ecuației (10.7).

$$H_0(s) = \frac{\frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \cdot \frac{3}{s+5}}{1 + \frac{K_p T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{3}{s+5}} = \frac{3(K_p T_i s + K_p)}{T_i s^2 + 5T_i s + 3K_p T_i s + 3K_p} \Leftrightarrow \quad (10.14)$$

$$H_0(s) = \frac{3(K_p T_i s + K_p)}{T_i (s^2 + 5s + 3K_p s) + 3K_p} = \frac{\dots}{1 + \frac{1}{T_i} \frac{3K_p}{s^2 + 5s + 3K_p s}}. \quad (10.15)$$

Astfel, funcția *rlocus* trebuie apelată cu $H(s) = \frac{3K_p}{s^2 + 5s + 3K_p s}$, cu observația că valorile din MATLAB pentru *Gain* corespund, de fapt, la $Gain = \frac{1}{T_i}$.

Deoarece ambele traiectorii se află în semiplanul stâng, rezultă că sistemul închis este **extern stabil** indiferent de $T_i > 0$. În funcție de valorile lui T_i se disting următoarele regimuri:

- $\frac{1}{T_i} \in (0, 5.33)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}$, $e^{\hat{s}_2 t}$, $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-$, $\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2$;
- $T_i = \frac{1}{5.33}$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}t}$, $te^{\hat{s}t}$, $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$;
- $\frac{1}{T_i} \in (5.33, \infty)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{\operatorname{Re}(\hat{s}_{1,2})t} \sin(\operatorname{Im}(\hat{s}_{1,2})t)$, $\hat{s}_{1,2} = \alpha \pm \beta j$, $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

Exemplul 4 Analiza variației polilor sistemului de ordin doi cu poli complex conjugați în funcție de factorul de amortizare $\zeta \in [0, 1]$:

$$H_0(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (10.16)$$

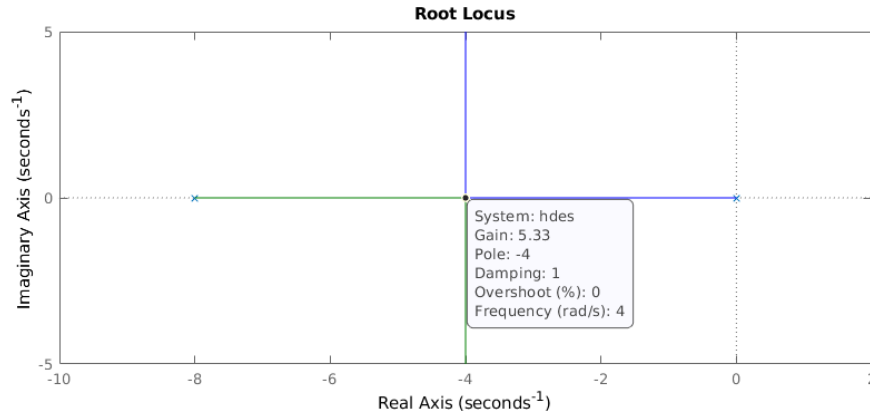


Figura 10.8: Locul rădăcinilor pentru Exemplul 3

Rezolvare Precum în exemplul precedent, pentru a putea fi aplicată metoda locului rădăcinilor în funcție de parametrul ζ , trebuie adaptată ecuația caracteristică conform structurii din Figura 10.5, respectiv a ecuației (10.7). Astfel:

$$H_0(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2 + \zeta \cdot 2\omega_n s} = \frac{K\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2) \left(1 + \zeta \frac{2\omega_n s}{s^2 + \omega_n^2}\right)} = \frac{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}}{1 + \zeta \frac{2\omega_n s}{s^2 + \omega_n^2}}. \quad (10.17)$$

Astfel, funcția `rlocus` trebuie apelată cu funcția de transfer $H(s) = \frac{2\omega_n s}{s^2 + \omega_n^2}$, cu mențiunea de a specifica domeniul de variație al *Gain*-ului în intervalul $[0, 1]$, prin urmare `rlocus(H, 0:0.01:1)`.

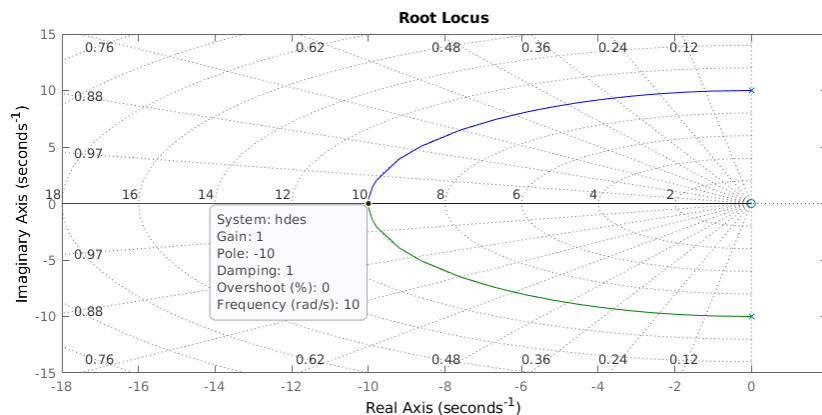


Figura 10.9: Locul rădăcinilor pentru exemplul 4

Deoarece traiectoriile se află în semiplanul stâng, rezultă că sistemul închis este **extern stabil** indiferent de $\zeta \in [0, 1]$. În funcție de valorile lui ζ se disting următoarele regimuri:

- $\zeta = 0$: regim oscilant întreținut, cu modul $\sin(\omega_n t)$, $\hat{s}_{1,2} = \pm j\omega_n$, $\omega_n > 0$;
- $\zeta \in (0, 1)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$, $\hat{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.
- $\zeta = 1$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}t}$, $te^{\hat{s}t}$, $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = -\omega_n \in \mathbb{R}_-$.

10.3 Probleme propuse

Problema 1 Să se traseze locul rădăcinilor și să se interpreteze stabilitatea după parametrul specificat (pe foaie utilizând criteriul Routh-Hurwitz și cu validare în MATLAB folosind funcția `rlocus`) pentru următoarele configurații.

- a) sistem cu reacție negativă unitară care are funcția de transfer în buclă deschisă:

$$H_{des}(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)}, \quad k \geq 0. \quad (10.18)$$

- b) sistem cu reacție negativă unitară (RNU) care are pe calea directă un regulator $H_R(s)$ înseriat cu un proces $H(s)$:

$$H_R(s) = \frac{s+z}{s}, \quad H(s) = \frac{5}{s+10}, \quad z \geq 0. \quad (10.19)$$

- c) sistem cu reacție negativă care are pe calea directă procesul $H(s)$ și pe calea de reacție componenta $H_r(s) = k$, $k \geq 0$:

$$H(s) = 4 \frac{(s+2)(s+3)}{(s-1)(s-2)}. \quad (10.20)$$

- d) sistem în buclă închisă cu polinomul caracteristic:

$$1 + \frac{s^2 - 8s + 2}{(Ts + 1)(s^2 + 4s + 20)} = 0, \quad T \geq 0. \quad (10.21)$$

- e) sistem în buclă închisă cu polinomul caracteristic:

$$1 + \frac{s^2 + ps + 4}{s^2 + 4s + 16} = 0, \quad p \geq 0. \quad (10.22)$$

- f) sistem în buclă închisă cu polinomul caracteristic:

$$1 + k \frac{s+2}{s^2} = 0, \quad k \geq 0. \quad (10.23)$$

- g) sistem în buclă închisă cu polinomul caracteristic:

$$1 + \frac{2s-1}{s^2 + 7s + w^2} = 0, \quad w \geq 0. \quad (10.24)$$

- h) sistem în buclă închisă cu polinomul caracteristic:

$$1 + \frac{s^2 - q}{s^2 + 3s + 2} = 0, \quad q \geq 0. \quad (10.25)$$

Problema 2 Se consideră sistemul de reglare din Figura 10.3 în care $H_d(s) = H_{PI}(s) \cdot H_f(s)$ și $H_r(s) = 1$ (RNU), unde $H_{PI}(s)$ este regulatorul PI din Figura 10.10, iar procesul este $H_f(s) = \frac{10}{s+2}$. Să se determine funcția de transfer a sistemului închis dependentă de parametrii R_1, R_2, R_3, R_4 și C , respectiv să se traseze în MATLAB și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut în următoarele situații:

- a) R_1 variabil, $R_2 = 2.2[k\Omega]$, $R_3 = R_4 = 4.7[k\Omega]$ și $C = 100[nF]$;
- b) R_2 variabil, $R_1 = 10[k\Omega]$, $R_3 = R_4 = 4.7[k\Omega]$ și $C = 100[nF]$;
- c) C variabil, $R_1 = 10[k\Omega]$, $R_2 = 2.2[k\Omega]$ și $R_3 = R_4 = 4.7[k\Omega]$.

Interpretarea trebuie să conțină: analiza stabilității, regimurile de funcționare și modurile sistemului.

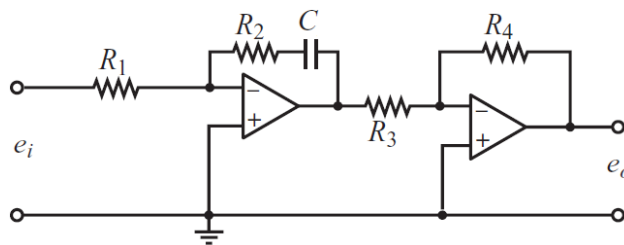


Figura 10.10: Structura unui regulator PI (proporțional-integrator).

Problema 3 Se consideră sistemele descrise de schemele bloc din figurile 10.11, 10.12, 10.13. Determinați funcția de transfer echivalentă pentru fiecare sistem. Validați rezultatele obținute în Simulink.

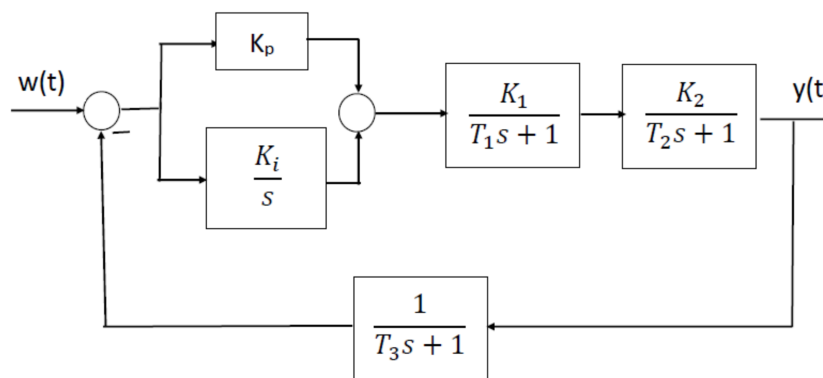


Figura 10.11: Structura de reglare pentru Problema 3

Problema 4 Se consideră sistemul cu reacție negativă unitară din Figura 10.14. Determinați condițiile pentru parametrii $k, p \in \mathbb{R}^+$ astfel încât sistemul închis să fie stabil.

Problema 5 Pentru sistemul din Figura 10.15, determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{R}^+$ pentru care sistemul închis este stabil.

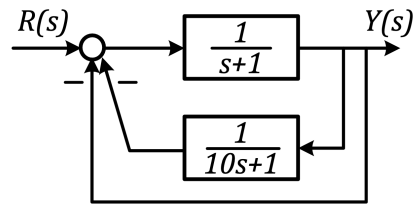


Figura 10.12: Structura de reglare pentru Problema 3

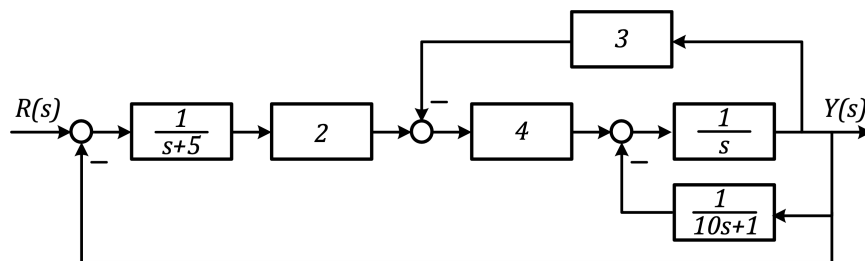


Figura 10.13: Structura de reglare pentru Problema 3

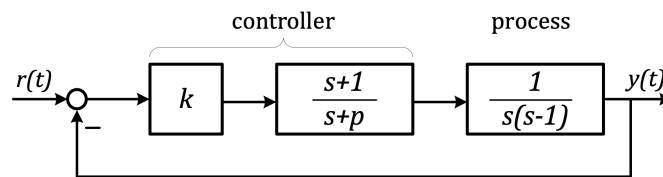


Figura 10.14: Structura de reglare pentru Problema 4

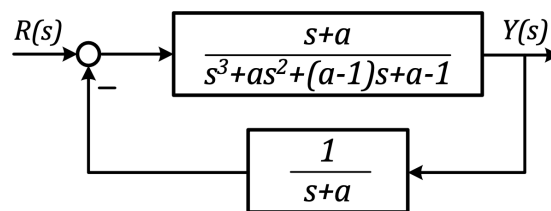


Figura 10.15: Structura de reglare pentru Problema 5

Partea IV

Metoda locului rădăcinilor

Lucrarea 11

Metoda locului rădăcinilor [I]

11.1 Reguli de trasare	104
11.2 Exemple	106
11.3 Soluții	106
11.4 Probleme propuse	109

În această lucrare sunt prezentate principalele reguli de trasare al locului rădăcinilor aplicate pe câteva exemple sugestive. În acest fel, este posibilă studierea comportamentului sistemului în buclă închisă pentru toate valorile posibile ale parametrului $k \in (0, \infty)$. Astfel, se poate deduce **stabilitatea sistemului în buclă închisă, împreună cu regimurile de funcționare posibile, modurile sale de oscilație și sensibilitatea locului rădăcinilor în funcție de parametrul k .**

11.1 Reguli de trasare

Regulile de trasare al locului rădăcinilor în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$, care se aplică pentru ecuația caracteristică:

$$1 + kH'_{des}(s) \equiv 0, \text{ cu } H'_{des}(s) = k' \frac{\prod_{i=1}^m (s - \hat{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \hat{s}_i)}, \quad (11.1)$$

sunt următoarele:

1. Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală.
2. Se marchează cu \mathbf{x} în planul complex poziția polilor în buclă deschisă. Cele n ramuri ale locului rădăcinilor pleacă din polii sistemului deschis.
3. Se marchează cu \mathbf{o} în planul complex poziția zeroului în buclă deschisă. m ramuri ale locului rădăcinilor ajung în zerourile sistemului deschis, iar celelalte $n - m$ ramuri vor tinde asimptotic spre infinit.
4. Asimptotele se vor intersecta în centrul de greutate al locului rădăcinilor situat pe axa reală și calculat cu ajutorul formulei:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\hat{s}_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\hat{s}_i)}{n - m}, \quad (11.2)$$

iar unghiurile de plecare sunt:

$$\Phi_{a_i} = \frac{(2i - 1)\pi}{n - m}, \quad i = \overline{1, n - m}. \quad (11.3)$$

5. Un punct s_x de pe axa reală aparține locului rădăcinilor dacă este respectată condiția de fază:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_x - \hat{s}_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_x - \hat{s}_i) = \angle\left(\frac{-1}{k \cdot k'}\right). \quad (11.4)$$

Astfel:

- pentru $k' > 0$, atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr impar de singularități;
 - pentru $k' < 0$, atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr par de singularități.
6. Unghiurile de plecare din poli se calculează astfel:

- pentru $k' > 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - (2l + 1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad (11.5)$$

– pentru $k' < 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (11.6)$$

7. Unghiurile de sosire în zerouri se calculează astfel:

– pentru $k' > 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + (2l + 1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad (11.7)$$

– pentru $k' < 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (11.8)$$

8. Intersecția ramurilor locului rădăcinilor cu axa imaginară se calculează cu ajutorul tabelului Routh-Hurwitz aplicat pentru ecuația caracteristică $1 + kH'_{des}(s) = 0$.

9. Punctele de desprindere de pe axa reală sau de revenire pe axa reală se calculează rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 1 + kH'_{des}(s) = 0 \\ \frac{dH'_{des}(s)}{ds} = 0 \end{cases}. \quad (11.9)$$

Acele soluții ale sistemului (11.9) care aparțin axei reale unde se poate afla locul rădăcinilor vor fi puncte de desprindere sau de apropiere, iar valoarea lui k corespunzătoare unei soluții s_x este:

$$k_x = \frac{-1}{H_{des}(s_x)}. \quad (11.10)$$

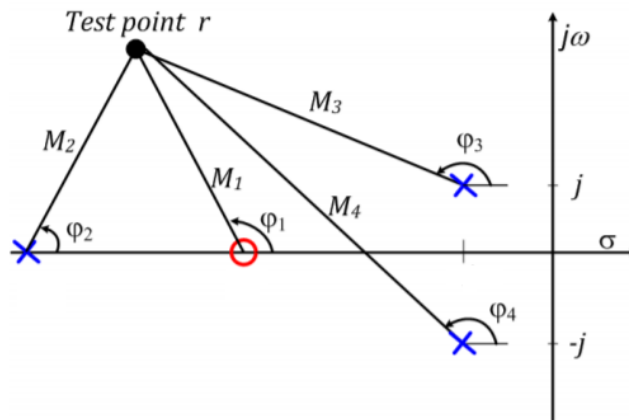


Figura 11.1: Unghiurile singularităților față de axa reală pozitivă pentru un punct de test.

11.2 Exemple

Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut pentru sistemul în buclă deschisă descris prin funcția de transfer:

a) $H_{des}(s) = \frac{3}{s+2}$;

b) $H_{des}(s) = \frac{s+5}{s-2}$;

c) $H_{des}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$;

d) $H_{des}(s) = \frac{s+3}{s^2-4s+3}$;

e) $H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$.

11.3 Soluții

- a) Nu există puncte de desprindere/apropiere și nici K_{critic} .

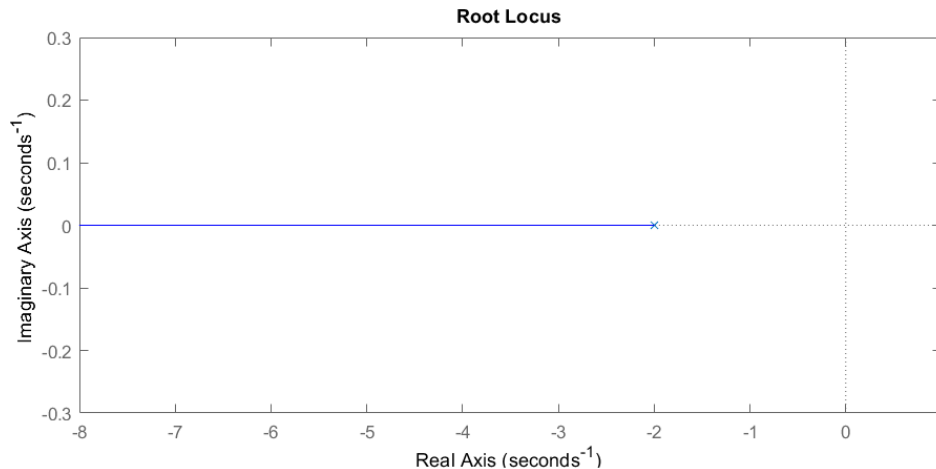


Figura 11.2: Exemplul a).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru orice $k > 0$.

De asemenea, pentru $k > 0$ avem regimul aperiodic amortizat cu modul $e^{\hat{s}_{o1}t}$.

- b) – nu există puncte de desprindere/apropiere;
– $K_{critic} = 0.4$.

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k > 0.4$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 0.4)$: regim aperiodic neamortizat, cu modul $e^{\hat{s}_{o1}t}$;
- $k = 0.4$: regim aperiodic amortizat (BIBO instabil), cu modul e^{0t} ;

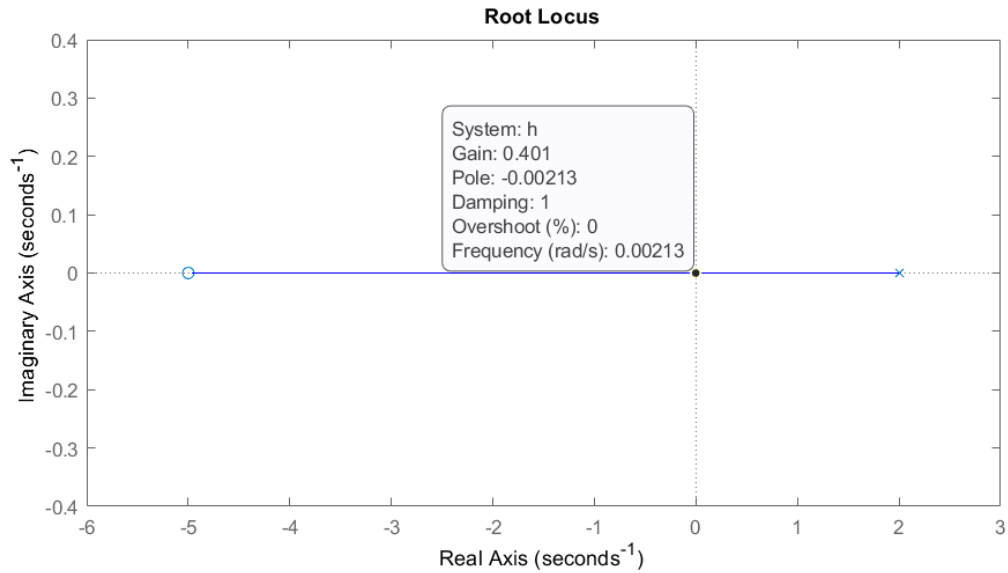


Figura 11.3: Exemplul b).

- $k \in (0.4, \infty)$: regim aperiodic amortizat, cu modul $e^{\hat{s}_{o1}t}$.
- c) – avem un punct de apropiere $K_{apr} = 2$;
- nu există K_{critic} .

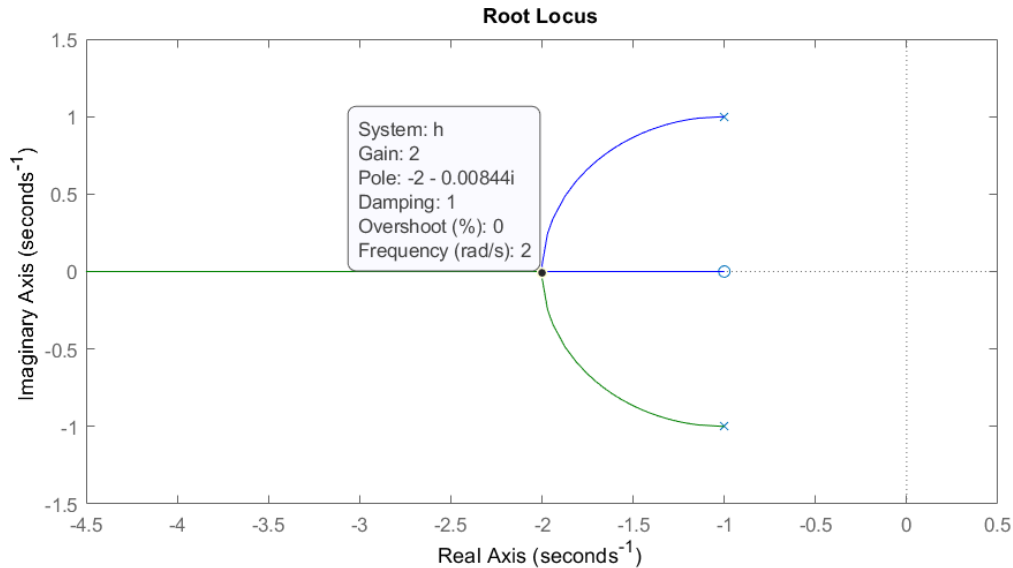


Figura 11.4: Exemplul c).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru orice $k > 0$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 2)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1,o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t)$;
- $k = 2$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile e^{-2t} , te^{-2t} ;

- $k \in (2, \infty)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}$.
- d) – avem un punct de desprindere $K_{despr} \approx 0.2$ și un punct de apropiere $K_{apr} \approx 19.8$;
- $K_{critic} = 4$.

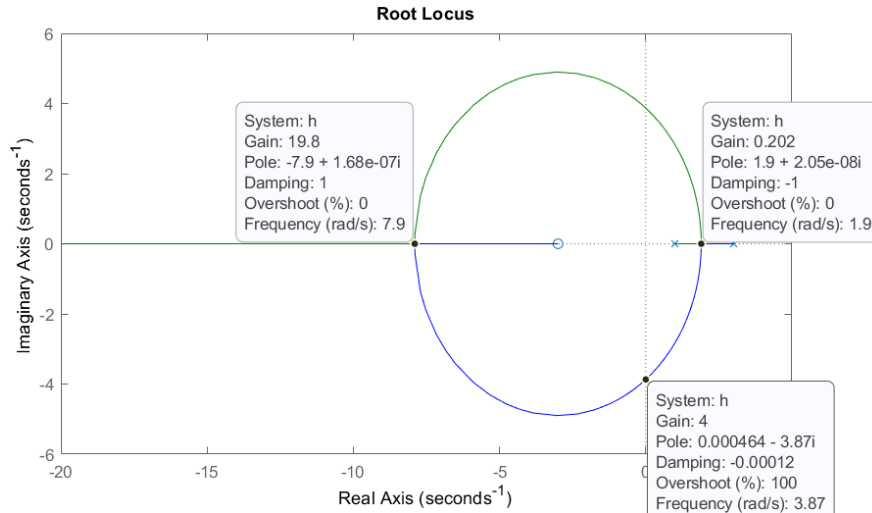


Figura 11.5: Exemplul d).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k \geq 4$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 0.2)$: regim aperiodic neamortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}$;
 - $k = 0.2$: regim aperiodic critic neamortizat, cu modurile $e^{1.9t}, te^{1.9t}$;
 - $k \in (0.2, 4)$: regim oscilant neamortizat, cu modul $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1,o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t)$;
 - $k = 4$: regim oscilant întreținut, cu modul $\sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t)$;
 - $k \in (4, 19.8)$: regim oscilant amortizat, cu modul $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1,o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t)$;
 - $k = 19.8$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile: $e^{-7.9t}, te^{-7.9t}$;
 - $k \in (19.8, \infty)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}$.
- e) – avem un punct de desprindere $K_{despr} \approx 3.1$;
- $K_{critic} = 48$.

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k \in (0, 48)$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 3.1)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 3.1$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{-0.84t}, te^{-0.84t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (3.1, 48)$: regim oscilant amortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1,o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 48$: regim oscilant întreținut, cu modurile $\sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (48, \infty)$: regim oscilant neamortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1,o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1,o2})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$.

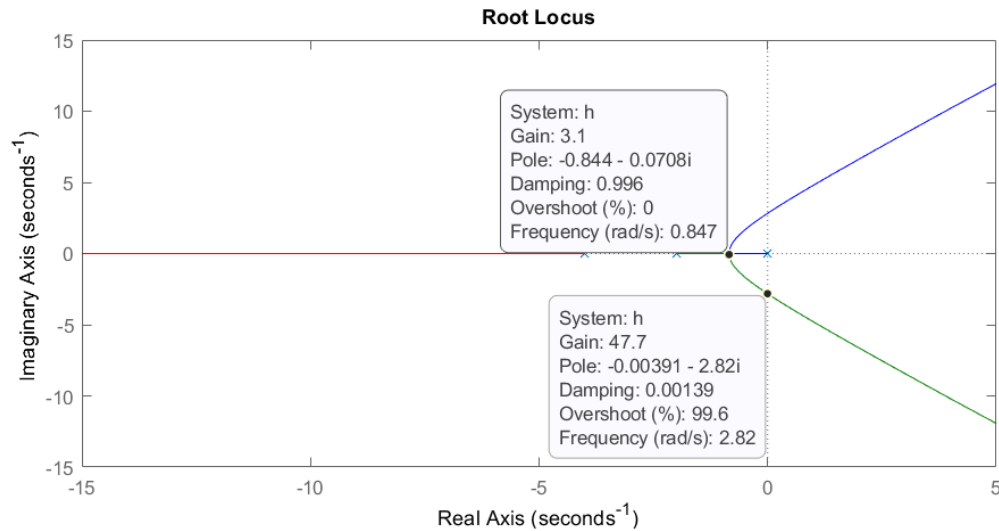


Figura 11.6: Exemplul e).

11.4 Probleme propuse

Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut pentru sistemul în buclă deschisă descris prin funcția de transfer de mai jos. Interpretarea trebuie să conțină: analiza stabilității, regimurile de funcționare, modurile de oscilație și analiza sensibilității în funcție de parametrul $k > 0$.

$$a) H_{des}(s) = \frac{s+2}{s^3+7s^2+12s+10};$$

$$b) H_{des}(s) = \frac{3s^2-6s+6}{s^2+4s+3};$$

$$c) H_{des}(s) = \frac{10s+20}{s^2};$$

$$d) H_{des}(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2-s+1};$$

$$e) H_{des}(s) = \frac{2}{s^4+5s^3+12s^2+8s};$$

$$f) H_{des}(s) = \frac{s^3+7.5s^2+32}{s^3+4s^2+8s+8}.$$

Lucrarea 12

Metoda locului rădăcinilor [II]

12.1 Reguli de trasare	112
12.2 Exemple	112
12.3 Soluții	113
12.4 Probleme propuse	116

În această lucrare sunt prezentate principalele reguli de trasare al locului rădăcinilor aplicate **în cazul în care factorul de proporționalitate al sistemului este negativ**. Se va interpreta locul geometric obținut privind: stabilitatea sistemului în buclă închisă, regimurile de funcționare posibile, modurile sale de oscilație și sensibilitatea locului rădăcinilor în funcție de parametrul k .

12.1 Reguli de trasare

Regulile de trasare a locului rădăcinilor în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$, care se aplică pentru ecuația caracteristică:

$$1 + kH'_{des}(s) \equiv 0, \text{ cu } H'_{des}(s) = k' \frac{\prod_{i=1}^m (s - \hat{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \hat{s}_i)}, \quad k' < 0, \quad (12.1)$$

sunt în mare parte similare cu cele prezentate în lucrarea anterioară. Regulile care se schimbă sunt următoarele:

- 4'. Asimptotele se vor intersecta în centrul de greutate al locului rădăcinilor situat pe axa reală și calculat cu ajutorul formulei:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\hat{s}_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\hat{s}_i)}{n - m}, \quad (12.2)$$

iar unghiurile de plecare sunt:

$$\Phi_{a_i} = \frac{2i\pi}{n - m}, \quad i = \overline{1, n - m}. \quad (12.3)$$

- 5'. Un punct s_x de pe axa reală aparține locului rădăcinilor dacă este respectată condiția de fază:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_x - \hat{s}_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_x - \hat{s}_i) = \angle\left(\frac{-1}{k \cdot k'}\right). \quad (12.4)$$

Astfel, pentru $k' < 0$, un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă **în partea dreaptă există un număr par de singularități**.

- 6'. Unghiurile de plecare din poli pentru $k' < 0$ se calculează astfel:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (12.5)$$

- 7'. Unghiurile de sosire în zerouri pentru $k' < 0$ se calculează astfel:

$$\phi_{\hat{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (12.6)$$

12.2 Exemple

Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut pentru sistemul în buclă deschisă descris prin funcțiile de transfer de mai jos. Interpretarea trebuie să conțină stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile și sensibilitatea.

a) $H'_{des}(s) = \frac{-s+2}{(s^2+4s+3)(s+5)}$;

$$\text{b) } H'_{des}(s) = \frac{s+2}{(s^2-2s+1)(s+5)};$$

$$\text{c) } H'_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)};$$

$$\text{d) } H'_{des}(s) = \frac{-1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)};$$

12.3 Soluții

- a) – $K_{despr} \approx 0.8$ și $K_{apr} \approx 156$;
– $K_{critic} \approx 17.5$.

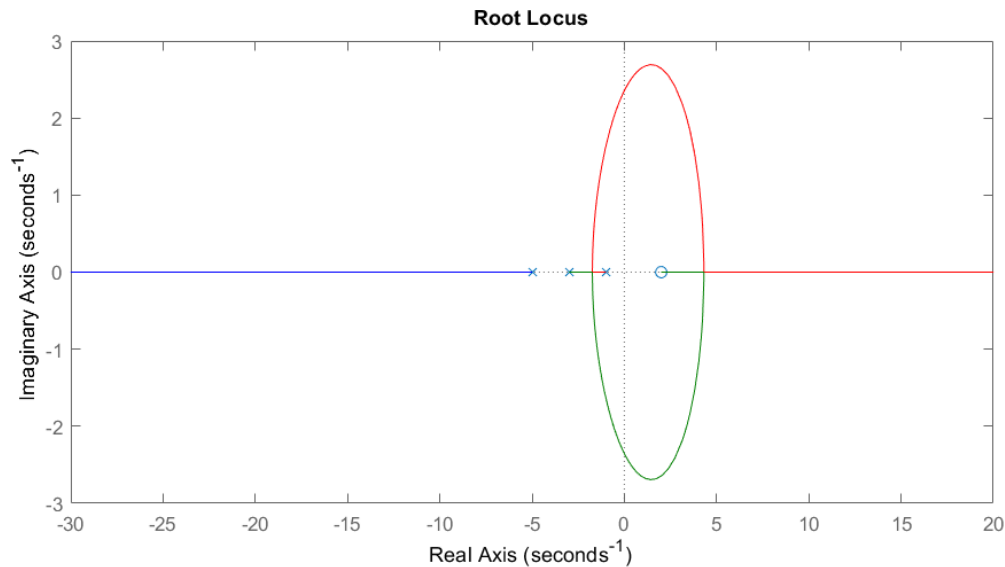


Figura 12.1: Exemplul a).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru orice $k \in (0, 17.5)$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri de funcționare:

- $k \in (0, 0.8)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 0.8$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, te^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (0.8, 17.5)$: regim oscilant amortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 17.5$: regim oscilant întreținut, cu modurile $\sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (17.5, 156)$: regim oscilant neamortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t), e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 156$: regim aperiodic critic neamortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, te^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (156, \infty)$: regim aperiodic neamortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}$.

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul își pierde stabilitatea pentru $k > 17.5$, iar regimurile de funcționare variază.

- b) – punctul de desprindere teoretic $K_{despr} = 0$;
 – $K_{critic} = 32$.

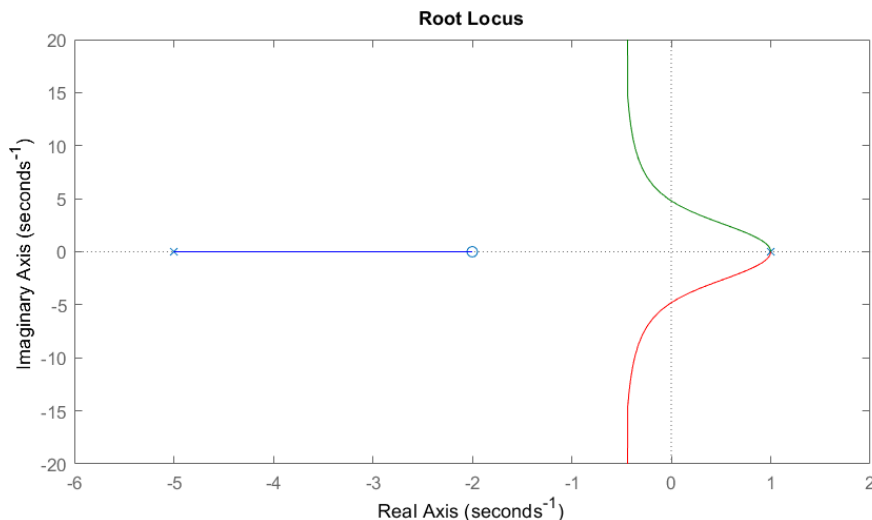


Figura 12.2: Exemplul b).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k > 32$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri de funcționare:

- $k \in (0, 32)$: regim oscilant neamortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k = 32$: regim oscilant întreținut, cu modurile $\sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (32, \infty)$: regim oscilant amortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$.

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul este stabil pentru $k > k_{cr}$. De asemenea, ramurile dominante tind asimptotic spre infinit.

- c) – avem un punct de desprindere $K_{despr} = 1$;
 – $K_{critic} = 126$.

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru orice $k \in (0, 126)$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 1)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}$, $e^{\hat{s}_{o2}t}$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$, $e^{\hat{s}_{o4}t}$;
- $k = 1$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}$, $te^{\hat{s}_{o1}t}$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$, $te^{\hat{s}_{o3}t}$;
- $k \in (1, 126)$: regim oscilant amortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o3})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o3}t))$;
- $k = 126$: regim oscilant întreținut, cu modurile $\sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o3})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o3}t))$;
- $k \in (126, \infty)$: regim oscilant neamortizat, cu modurile $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o1})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o1})t)$, $e^{\text{Re}(\hat{s}_{o3})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o3}t))$.

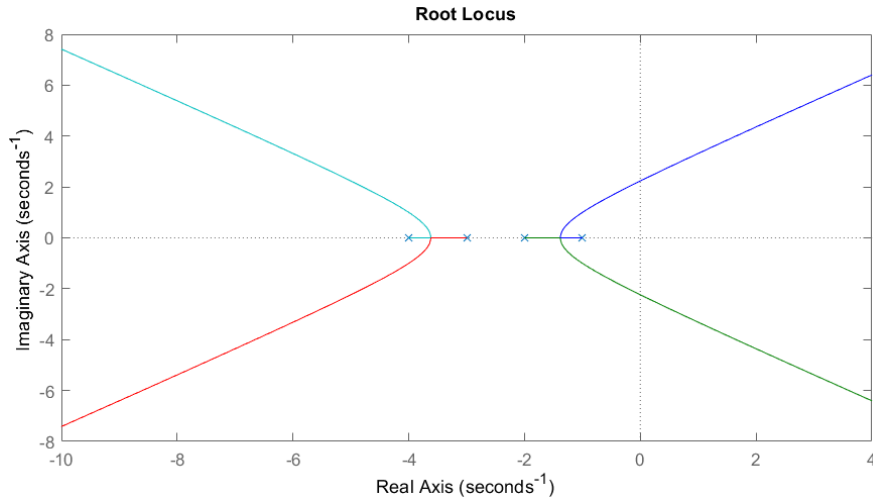


Figura 12.3: Exemplul c).

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul își pierde stabilitatea pentru $k > 126$, iar ramurile dominante tind asimptotic la infinit.

- d) – avem un punct de desprindere $K_{despr} \approx 0.56$;
 – $K_{critic} = 24$.

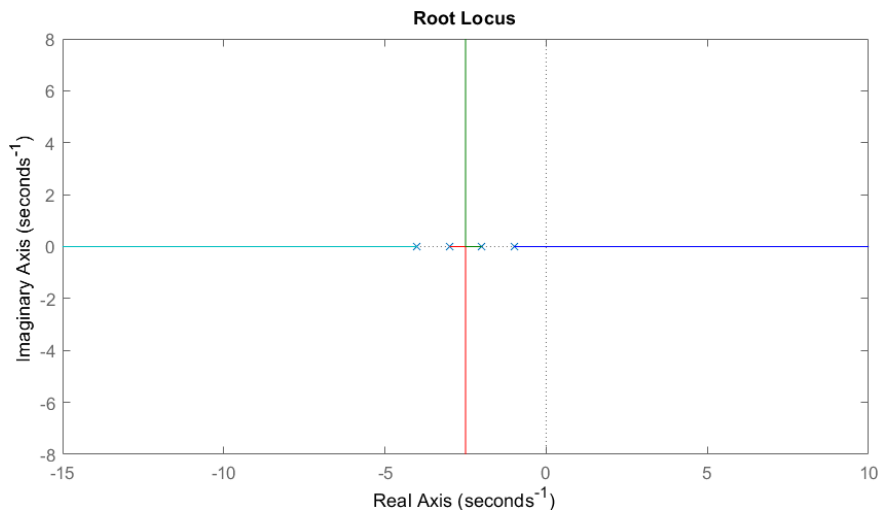


Figura 12.4: Exemplul d).

Se observă că sistemul închis este **extern stabil** pentru $k \in (0, 23)$.

În funcție de valorile lui k se disting următoarele regimuri:

- $k \in (0, 0.56)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}, e^{\hat{s}_{o3}t}, e^{\hat{s}_{o4}t}$;
- $k = 0.56$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\hat{s}_{o2}t}, te^{\hat{s}_{o2}t}, e^{\hat{s}_{o4}t}$;
- $k \in (0.56, 24)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}, e^{\text{Re}(\hat{s}_{o2})t} \sin(\text{Im}(\hat{s}_{o2})t), e^{\hat{s}_{o4}t}$;

- $k = 24$: regim aperiodic amortizat BIBO instabil, cu modurile e^{0t} , $e^{\hat{s}_{o2}t}$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$, $e^{\hat{s}_{o4}t}$;
- $k \in (24, \infty)$: regim aperiodic neamortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_{o1}t}$, $e^{\hat{s}_{o2}t}$, $e^{\hat{s}_{o3}t}$, $e^{\hat{s}_{o4}t}$.

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul își pierde stabilitatea pentru $k > 24$, iar ramura dominantă tinde asimptotic la infinit.

12.4 Probleme propuse

Problema 1. Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut pentru sistemul în buclă deschisă descris prin funcțiile de transfer de mai jos. Interpretarea trebuie să conțină stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile și sensibilitatea în raport cu parametrul $k > 0$.

$$\text{a) } H'_{des}(s) = \frac{-s-2}{s^3+7s^2+12s+10};$$

$$\text{b) } H'_{des}(s) = \frac{-3s^2+6s-6}{s^2+4s+3};$$

$$\text{c) } H'_{des}(s) = \frac{-10s-20}{s^2};$$

$$\text{d) } H'_{des}(s) = \frac{-s^2-s-1}{s^2-s+1};$$

$$\text{e) } H'_{des}(s) = \frac{-2}{s^4+5s^3+12s^2+8s};$$

$$\text{f)* } H'_{des}(s) = \frac{-s^3-7.5s^2-32}{s^3+4s^2+8s+8}$$

$$\text{g) } H'_{des}(s) = \frac{-s^2-6s-13}{(s^2+2s+1)(s-0.5)};$$

$$\text{h) } H'_{des}(s) = \frac{-s-5}{s^2+4s+8};$$

$$\text{i)* } H'_{des}(s) = \frac{-s^2-2s-2}{s^2+s+1}.$$

Problema 2. Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor obținut pentru sistemul în buclă deschisă descris prin funcțiile de transfer de mai jos. Interpretarea trebuie să conțină stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile și sensibilitatea în raport cu parametrul $k \in (-\infty, \infty)$.

$$\text{a) } H'_{des}(s) = \frac{s^2+4s+13}{s^2+2s+2};$$

$$\text{b) } H'_{des}(s) = \frac{-s-5}{(s+1)^3}.$$

Lucrarea 13

Performanțele sistemelor cu reacție negativă

13.1 Breviar teoretic	118
13.2 Probleme propuse	120

În această lucrare se prezintă diverse moduri de a utiliza metoda locului rădăcinilor pentru analiza și proiectarea sistemelor de reglare. Problemele propuse ilustrează analiza sistemului în buclă închisă pentru diverse valori ale parametrului proporțional $k > 0$, respectiv modul de a impune parametrul k pentru îndeplinirea performanțelor comune găsite în specificarea sistemelor de reglare precum: stabilitatea, timpul de răspuns, suprareglajul, pulsația oscilațiilor, erorile staționare.

13.1 Breviar teoretic

Contextul lucrării de față este cel al structurii cu reacție negativă din Figura 13.1, având procesul $H_f(s)$, traductorul $H_r(s)$, respectiv regulatorul (engl. *controller*) $H_c(s)$. Stabilitatea sistemului în buclă închisă, notat $H_0(s)$, se determină prin analiza ecuației caracteristice:

$$P_c(s) = 1 + H_{des}(s) = 1 + H_c(s) \cdot H_f(s) \cdot H_r(s) = 0, \quad (13.1)$$

$$H_0(s) = \frac{H_c(s)H_f(s)}{1 + H_c(s)H_f(s)H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_{des}(s)}. \quad (13.2)$$

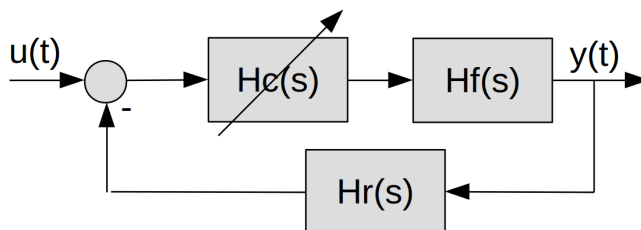


Figura 13.1: Sistem de reglare cu reacție negativă

Deducerea regimurilor de funcționare în mod calitativ se poate face utilizând funcțiile `rlocus` și `rltool` din MATLAB. Validarea se face utilizând sistemul în buclă închisă rezultat pentru configurația propusă a funcțiilor de transfer $H_c(s)$, $H_f(s)$, $H_r(s)$ analizând polii, răspunsul indicial sau alți indicatori:

```
>> rlocus(Hdes), sgrid
>> H0 = feedback(series(Hc,Hf),Hr)
>> pole(H0)
>> zpk(H0)
>> step(H0)
```

Performanțele de interes vor fi evidențiate, după caz, în situația în care polul dominant al sistemului în buclă închisă este real, i.e. $\hat{s}_0 = -\frac{1}{T}$, respectiv polii dominanți sunt o pereche complex conjugată, i.e. $\hat{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \cdot j$. Performanțele se pot deduce pe baza amplasamentului polilor în planul complex, **în cazul în care sistemul în buclă închisă este stabil**, astfel:

1. **timpul de răspuns** este constant pentru polii aflați pe aceeași dreaptă verticală în planul complex (cu partea reală fixă):

$$t_r \approx \frac{4}{|\operatorname{Re}\{\hat{s}\}|} = 4 \cdot T = \frac{4}{\zeta\omega_n}; \quad (13.3)$$

2. **suprareglajul** este constant pentru polii aflați pe dreapta de o înclinație dată:

$$\theta = \arccos(\zeta) \Rightarrow \sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}; \quad (13.4)$$

3. **pulsația de oscilație** este constantă pentru orice semidreaptă orizontală (cu partea imaginară fixă):

$$\omega_{osc} = \text{Im} \{ \hat{s}_{1,2} \} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (13.5)$$

4. **pulsația naturală** este constantă pentru orice semicerc cu centrul în origine:

$$\omega_n = \sqrt{\text{Re} \{ \hat{s}_{1,2} \}^2 + \text{Im} \{ \hat{s}_{1,2} \}^2}. \quad (13.6)$$

5. **eroarea staționară** a sistemului în buclă închisă se calculează pentru o intrare arbitrară $u(t)$, $t \geq 0$:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) (1 - H_0(s)). \quad (13.7)$$

Aceste performanțe sunt sintetizate în Figura 13.2.

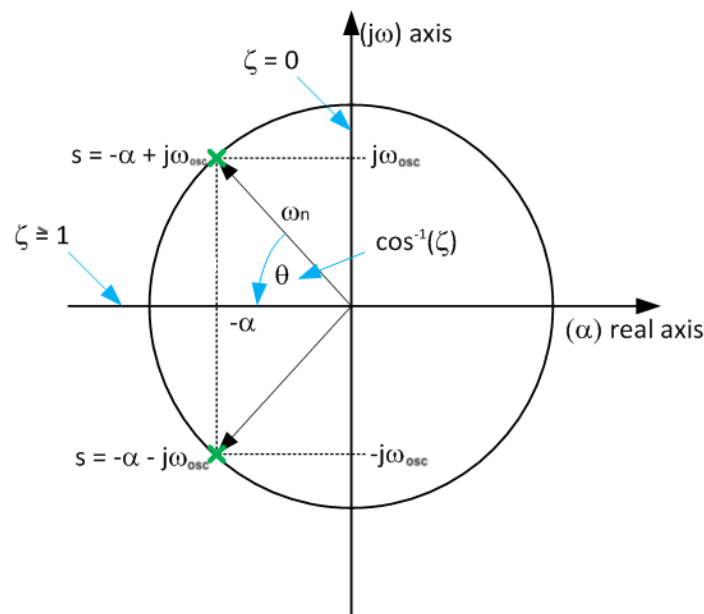


Figura 13.2: Performanțele regimului tranzitoriu deduse pe baza locației polilor în planul complex.

Observația 1. Adesea, estimările nu corespund cu exactitate realității, deoarece estimările se fac în baza polilor dominanți, ignorând polii nedominanți, respectiv existența zerourilor. De aceea, se recomandă validarea performanțelor citite pe procesul concret în buclă închisă.

Performanțele regimului tranzitoriu în scopul proiectării se pot estima și utilizând *grid*-ul din funcția `rlocus` (`sgrid`). Acestea se pot impune suplimentar prin funcționalitățile `Edit Compensator` și `Design Requirements` din funcția `rltool`.

13.2 Probleme propuse

Problema 1 Se consideră sistemul de reglare din Figura 13.1, unde:

$$H_c(s) = k \frac{s+8}{s}, \quad H_f(s) = \frac{2}{s+5}, \quad H_r(s) = 1 \text{ (RNU)}. \quad (13.8)$$

- Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din figură în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$. Interpretarea trebuie să cuprindă stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile de oscilație ale sistemului închis și sensibilitatea polilor în raport cu parametrul k .
- Să se determine valoarea lui k , respectiv a polilor lui $H_0(s)$ astfel încât sistemul să fie în regim aperiodic critic amortizat cu timp de răspuns minim.
- Să se determine valoarea lui k pentru care sistemul are factorul de amortizare minim.
- Să se determine valoarea lui k astfel încât pulsația oscilațiilor să fie maximă.
- Să se calculeze eroarea staționară la poziție a sistemului de reglare în funcție de k . Ce efect are integratorul asupra sistemului în buclă închisă?
- Să se calculeze eroarea staționară la viteză a sistemului de reglare în funcție de k . Interpretați rezultatul.

Problema 2 Se consideră sistemul de reglare din Figura 13.1, unde:

$$H_c(s) = k \left(1 + \frac{2}{s}\right), \quad H_f(s) = \frac{1}{s(s+4)}, \quad H_r(s) = 1 \text{ (RNU)}. \quad (13.9)$$

- Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din figură în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$. Interpretarea trebuie să cuprindă stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile de oscilație ale sistemului închis și sensibilitatea polilor în raport cu parametrul k .
- Să se calculeze eroarea staționară la poziție a sistemului de reglare în funcție de k . Interpretați rezultatul.
- Să se calculeze eroarea staționară la viteză a sistemului de reglare în funcție de k . Ce efect au integratoarele asupra sistemului în buclă închisă?
- Să se determine valoarea lui k și a polilor sistemului închis astfel încât timpul de răspuns să fie $t_r \approx 8$ secunde.
- Să se determine valoarea lui k , pulsația naturală de oscilație și factorul de amortizare corespunzător astfel încât sistemul de reglare să aibă pulsația oscilațiilor $\omega_{osc} = 2$ [rad/s].
- Să se determine valoarea lui k astfel încât sistemul de reglare să aibă suprareglaj minim. Determinați suprareglajul corespunzător.

Problema 3 Se consideră sistemul de reglare din Figura 13.1, unde:

$$H_c(s) = k, \quad H_f(s) = \frac{s^2 - 2s + 5}{(s + 1)(s + 3)}, \quad H_r(s) = 1 \text{ (RNU)}. \quad (13.10)$$

- Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din figură în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$. Interpretarea trebuie să cuprindă stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile de oscilație ale sistemului închis și sensibilitatea polilor în raport cu parametrul k .
- Să se determine valorile lui k astfel încât eroarea staționară la poziție să fie sub 0.5.
- Să se calculeze eroarea staționară la viteză a sistemului de reglare în funcție de k .
- Să se determine valoarea lui k astfel încât timpul de răspuns să fie minim. Calculați timpul de răspuns corespunzător.
- Să se calculeze și să se schițeze răspunsul indicial al sistemului pentru $k = 2$. Precizați polii, zerourile și factorul de proporționalitate.
- Calculați valoarea lui k astfel încât factorul de amortizare al sistemului să fie 0.5.

Problema 4 Se consideră sistemul de reglare din Figura 13.1, unde:

$$H_c(s) = k \frac{s + 1}{s + 4}, \quad H_f(s) = \frac{s^2 + 8s + 20}{s^2 - 2s + 2}, \quad H_r(s) = 1 \text{ (RNU)}. \quad (13.11)$$

- Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din figură în funcție de parametrul $k \in (0, \infty)$. Interpretarea trebuie să cuprindă stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile de oscilație ale sistemului închis și sensibilitatea polilor în raport cu parametrul k .
- Determinați polii, zerourile și factorul de proporționalitate pentru sistemul în buclă închisă atunci când regimul este oscilant întretinut.
- Să se determine valorile lui k astfel încât eroarea staționară la poziție să fie sub 0.2.
- Să se calculeze eroarea staționară la viteză a sistemului de reglare în funcție de k .
- Determinați valoarea lui k astfel încât timpul de răspuns al sistemului să fie de ≈ 16 secunde. Schițați răspunsul indicial al sistemului.
- Determinați valorile lui k pentru care suprareglajul sistemului se află în intervalul $[25, 35]\%$.
- Determinați valoarea lui k astfel încât pulsația oscilațiilor să fie minimă. Calculați pulsația naturală de oscilație și factorul de amortizare corespunzător.

Partea V

Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare

Lucrarea 14

Teste de autoevaluare

14.1	Capitolul II, Model 1, $m = 0, 1, n \geq 1$	126	Lucrarea curentă prezintă exemple de teste de autoevaluare din capitolele principale ale îndrumarului.
14.2	Capitolul II, Model 2, $m = 0, 1, n \geq 1$	126	
14.3	Capitolul III, Model 1, $m \in \{1, 2, 3\}, n \geq 1$	126	
14.4	Capitolul III, Model 2, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	127	
14.5	Capitolul IV, Model 1, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	127	
14.6	Capitolul IV, Model 2, $m \in \{1, 2\}, n \geq 1$	128	
14.7	Test sumativ, Model 1, $n \geq 1$	129	

14.1 Capitolul II, Model 1, $m = 0, 1, n \geq 1$

Se consideră sistemul având realizarea de stare de mai jos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(m+n+1)x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -(mn+m+n)x_1 + x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -mnx_1 + nu; \\ y = x_1 + nu. \end{cases}$$

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Determinați funcția de transfer $H(s)$ a sistemului dat; **[1p]**
- Determinați singularitățile sistemului; **[0.75p]**
- Determinați forma minimală a sistemului. **[0.75p]**

14.2 Capitolul II, Model 2, $m = 0, 1, n \geq 1$

Se consideră sistemul descris prin ecuația diferențială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + n\frac{dy(t)}{dt} + n^2y(t) = m\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (1-m)n\frac{du(t)}{dt} + mn^2u(t).$$

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Determinați funcția de transfer $H(s)$ a sistemului dat; **[0.75p]**
- Determinați singularitățile sistemului și precizați dacă sistemul este în formă minimală; **[0.75p]**
- Determinați natura filtrului având funcția de transfer $H(s)$ de la a). **[1p]**

14.3 Capitolul III, Model 1, $m \in \{1, 2, 3\}, n \geq 1$

Problema 1. Se consideră sistemul având funcția de transfer de mai jos:

$$H_1(s) = \frac{10s}{s^3 + (2n-3m)s^2 + n(2n-3m)s + n^2(n-3m)}.$$

Să se studieze **pe foaie** stabilitatea externă a sistemului. **[0.75p]**

Problema 2. Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H_2(s) = \frac{2n^2s + 2n^2}{s^2 + [-1 + (-1)^m]ms + m^2 + 9n^2}.$$

- a) Calculați **pe foaie** răspunsul la impuls al sistemului $H_2(s)$ și precizați regimul de funcționare al sistemului pe baza modurilor de oscilație; [0.75p]
- b) Precizați parametrii cu semnificație fizică (factorul de proporționalitate, constante de timp, factor de amortizare, pulsație naturală) și determinați pulsația de oscilație a sistemului $H_2(s)$. Schițați pe foaie răspunsul corespunzător obținut în MATLAB și marcați în grafic pulsația dedusă. [0.75p]

Hint: Impuneți răspunsul simulat în MATLAB pe un interval redus de timp.

14.4 Capitolul III, Model 2, $m \in \{1, 2\}$, $n \geq 1$

Problema 1. Se consideră sistemul având realizarea de stare de mai jos:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6n \\ 1 & 0 & -(2m^2 + n) \\ 0 & 1 & -3m \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea internă a sistemului folosind metoda Lyapunov. Precizați pe foaie ecuația algebrică pe care o rezolvați, soluția acesteia și comentați stabilitatea internă. [0.75p]

Problema 2. Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{2m(s + 0.1 \cdot m)}{s^2 + 2n \cdot s + 4n^2}.$$

- a) Calculați **pe foaie** funcția pondere a sistemului $H(s)$, precizați regimul de funcționare și modul de oscilație al sistemului. [0.75p]
- b) Precizați parametrii cu semnificație fizică (factorul de proporționalitate, constante de timp, factor de amortizare, pulsație naturală). Determinați suprapreglajul și comparați valoarea acestuia cu cea care se obține dacă am considera formula suprapreglajului unui sistem de ordin doi cu poli complex-conjugați

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

Schițați pe foaie răspunsul obținut în MATLAB și marcați în grafic suprapreglajul. De ce apar eventualele diferențe între cele două valori ale suprapreglajului? [1p]

14.5 Capitolul IV, Model 1, $m \in \{1, 2\}$, $n \geq 1$

Problema 1. Se consideră ecuația caracteristică de mai jos:

$$1 + k \frac{-s + n(-1)^m}{(s + 2n)(s^2 + 4n + 5n^2)} = 0.$$

- Să se traseze locul rădăcinilor cu ajutorul mediului MATLAB. [0.25p]
- Să se calculeze unghiurile de pornire din polii complex conjugați și să se figureze pe locul rădăcinilor de la subpunctul anterior. [0.5p]
- Să se interpreteze comportamentul sistemului închis în raport cu parametrul $k > 0$. Interpretarea trebuie să conțină: stabilitatea, sensibilitatea, regimurile de funcționare și modurile de oscilație. [1p]

Problema 2. Se consideră sistemul având calea directă $H_d(s)$ și calea de reacție $H_r(s)$:

$$H_d(s) = \frac{s + 5n}{(Ts + 1)(s + m)}, \quad H_r(s) = \frac{1}{s}.$$

- Să se determine sistemul $H'_{des}(s)$ pentru care trebuie trasat locul rădăcinilor în raport cu parametrul $T > 0$; [0.5p]
- Determinați valoarea lui T pentru care pulsația oscilațiilor sistemului în buclă închisă este maximă. Pentru această valoare a lui T precizați singularitățile sistemului în buclă închisă. [0.75p]

14.6 Capitolul IV, Model 2, $m \in \{1, 2\}$, $n \geq 1$

Problema 1. Se consideră ecuația caracteristică de mai jos:

$$1 + k \frac{(s + 2n)^2 + m^2(-1)^m}{(s + n)^2 + m^2(-1)^{m+1}} = 0.$$

- Să se traseze locul rădăcinilor cu ajutorul mediului MATLAB. [0.25p]
- Să se calculeze punctele de apropiere/desprindere (polii și k_{apr}/k_{despr}). Pentru aceste valori ale lui k , precizați singularitățile sistemului în buclă închisă. [0.5p]
- Să se interpreteze comportamentul sistemului închis în raport cu parametrul $k > 0$. Interpretarea trebuie să conțină regimurile de funcționare și modurile de oscilație. [0.5p]

Problema 2. Se consideră sistemul având calea directă $H_d(s)$ și calea de reacție $H_r(s)$:

$$H_d(s) = \frac{s - \frac{m}{2}}{(s + n)(s + n^2)}, \quad H_r(s) = \frac{1}{ps}.$$

- Să se determine sistemul $H'_{des}(s)$ pentru care trebuie trasat locul rădăcinilor în raport cu parametrul $p < 0$; [0.5p]
- Schițați (într-un desen separat) ramurile locului rădăcinilor pentru $p \approx \frac{-1}{n+1}$ [0.25p];
- Determinați valoarea lui $p < 0$ pentru care factorul de amortizare al sistemului în buclă închisă este $\zeta = 0$. Pentru această valoare a lui p precizați singularitățile sistemului în buclă închisă și schițați răspunsul la treaptă unitară. [1p]

14.7 Test sumativ, Model 1, $n \geq 1$

Se consideră sistemul $H(s)$ ale cărui singularități sunt $\hat{s}_1 = -n$, $\hat{s}_2 = -2n$, $\hat{s}_3 = -3n$, $\hat{s}_4 = -10n$, având un factor de amplificare $K = (-1)^n$. Să se rezolve următoarele cerințe:

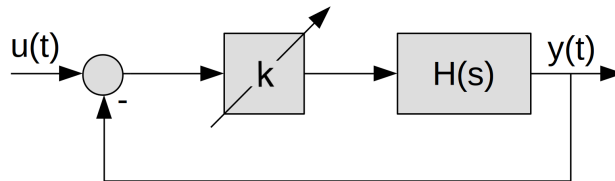


Figura 14.1: Structura unui sistem cu reacție negativă

- 1) Să se determine funcția de transfer $H(s)$; [1p]
- 2) Să se traseze locul rădăcinilor sistemului în buclă închisă în funcție de parametrul $k > 0$. Să se calculeze și să se figureze asimptotele ramurilor locului rădăcinilor; [1p]
- 3) Studiați **pe foaie** stabilitatea sistemului din figură în funcție de parametrul $k > 0$; [1p]
- 4) Determinanți regimurile de funcționare și modurile sistemului în funcție de parametrul $k > 0$ și analizați sensibilitatea sistemului; [1p]
- 5) Pentru $k = n$ să se determine realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control a sistemului din figură; [1p]
- 6) Să se studieze stabilitatea internă a realizării de stare dedusă la punctul 5); [1p]
- 7) Pentru $k = k_{\text{desprindere}}$ să se studieze performanțele sistemului din figură; [1p]
- 8) Pentru $k = k_{\text{desprindere}}$ să se calculeze și să se schițeze funcția pondere a sistemului din figură; [1p]
- 9) Deduceți valoarea parametrului $k > 0$ pentru care sistemul din figură are suprareglajul maxim. [1p]

Oficiu: [1p]

Lucrarea 15

Studiu de caz – Proiect de semestru

15.1 Cerințe	132
15.2 Documentație	134

Această lucrare prezintă o serie de cerințe pe baza materiei cuprinse în îndrumar, cu scopul efectuării unui studiu de caz complet pe un model de sistem dinamic la alegere din literatură. Cerințele au fost elaborate în scopul studiului individual pe parcursul unui semestru, cu finalizare printr-o documentație redactată în mediile Word sau \LaTeX .

15.1 Cerințe

Alegeți un model de sistem dinamic din literatură de ordin între 2 și 4. Să se rezolve pe foaie și în mediul MATLAB următoarele cerințe pe baza lucrărilor de laborator.

1. (L1/2) Să se obțină modelul matematic $u/x/y$ al sistemului ales;
2. (L3/4) Să se determine modelul intrare-ieșire și să se deducă funcția de transfer. Să se verifice rezultatul obținut prin intermediul relației dintre spațiul stărilor și funcția de transfer;
3. (L3) Să se evidențieze simbolic singularitățile sistemului, apoi să se particularizeze pentru valorile fiecărui student și să se figureze singularitățile în planul complex;
4. (L5) Să se determine realizările de stare corespunzătoare formelor canonice de control (FCC) și de observare (FCO). Să se realizeze o schemă Simulink în care să se implementeze aceste realizări de stare;
5. (L6) Să se determine funcția de transfer în formă minimală;
6. (L7) Să se studieze stabilitatea internă și stabilitatea externă;
7. (L7) Să se determine o funcție-candidat Lyapunov pentru a studia stabilitatea internă a sistemului și să se prezinte o simulare în timp a funcției de energie alese pentru un set de condiții inițiale adecvate.
8. (L8) Să se determine expresia analitică (**doar numeric**) și apoi să se reprezinte funcția pondere, răspunsul indicial și răspunsul la rampă ale sistemului ales. Să se comenteze rezultatele obținute.
9. (L9) Să se evidențieze, după caz, constanta de timp, factorul de amortizare, pulsația naturală a oscilațiilor și factorul de proporționalitate. Să se prezinte performanțele sistemului: timpul de răspuns, suprareglajul, pulsația oscilațiilor, erorile staționare la poziție/viteză.
10. (L10–13) Se consideră structura de reglare în buclă închisă din Figura 15.1.

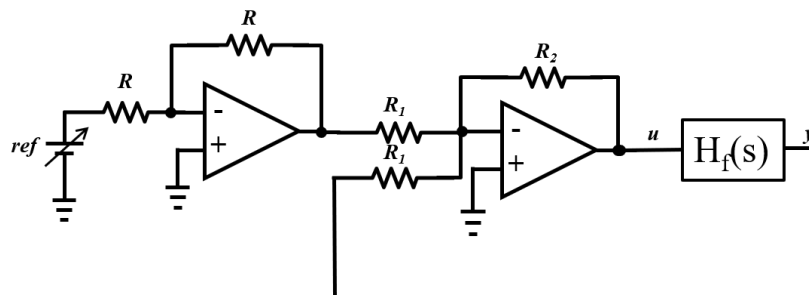


Figura 15.1: Structura unui sistem de reglare cu regulator proporțional

- a) Să se determine funcția de transfer a sistemului în buclă închisă, unde $H_f(s)$ reprezintă modelul matematic al procesului cu o intrare și o ieșire ales la cerințele anterioare.
- b) Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din Figura 15.1 în funcție de raportul $\frac{R_2}{R_1} \in (0, \infty)$.
- c) [Două cerințe la alegere]: Să se determine $\frac{R_2}{R_1}$ astfel încât sistemul de reglare:
 - c₁) să aibă suprareglaj minim;
 - c₂) să aibă cel mai mic timp de răspuns sau timp de urcare posibil;
 - c₃) să aibă suprareglaj nul și timp de răspuns cu 25% mai mic;

11 (L10–13) Se consideră structurile de reglare în buclă închisă din Figurile 15.2 și 15.3.

[Una dintre cerințele 11.A sau 11.B la alegere]

11.A Pentru structura de reglare din Figura 15.2, având un regulator de tip *Lead/Lag*, iar $H_f(s)$ reprezintă modelul matematic al procesului cu o intrare și o ieșire ales la cerințele anterioare:

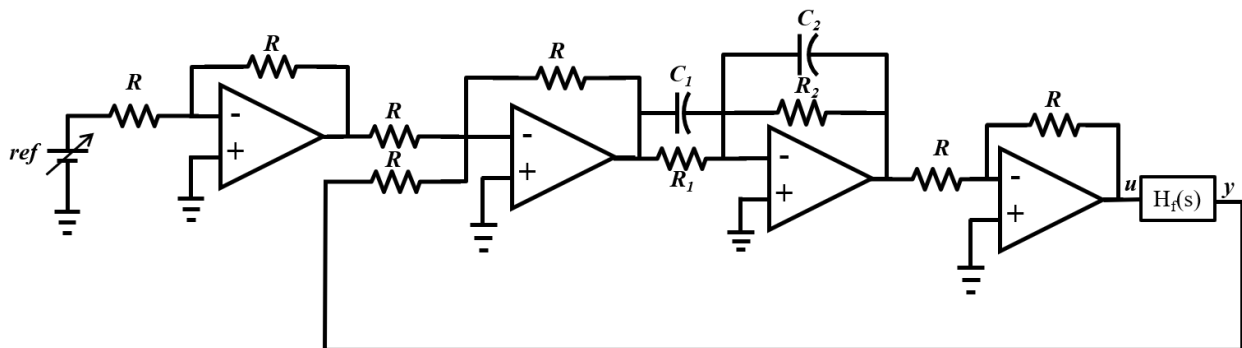


Figura 15.2: Structura unui sistem de reglare cu regulator de tip *Lead/Lag* (cu avans/întârziere de fază)

- 11.A.a) Să se determine funcția de transfer a regulatorului cu avans/întârziere de fază în funcție de componentele electrice. Va trebui să aibă următoarea structură:

$$H_R(s) = K \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$
- 11.A.b) Să se determine funcția de transfer a sistemului din Figura 15.2.
- 11.A.c) Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din Figura 15.2 în funcție de una dintre constantele de timp ale regulatorului: $T_1 \in (0, \infty)$, $T_2 \in (0, \infty)$. Pentru ceilalți parametri să se aleagă valori adecvate care vor rămâne constante pentru restul cerințelor.
- 11.A.d) [Două cerințe la alegere]: Să se determine constanta de timp a regulatorului considerată anterior astfel încât sistemul în buclă închisă:
 - d₁) să aibă pulsația de oscilație maximă;

- d₂) să aibă pulsația naturală maximă;
- d₃) să fie la limita de stabilitate.

11.B Pentru structura de reglare din Figura 15.3, având un regulator de tip proporțional-integrator (PI), iar $H_f(s)$ reprezintă modelul matematic al procesului cu o intrare și o ieșire ales la cerințele anterioare:

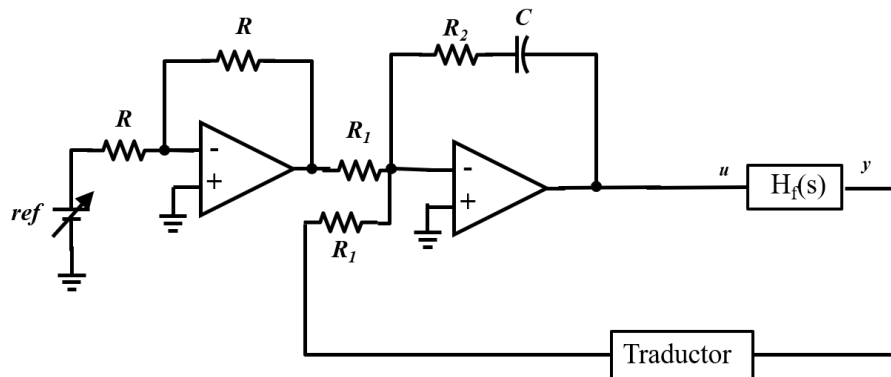


Figura 15.3: Structura unui sistem de reglare cu regulator de tip proporțional-integrator (PI)

- 11.B.a) Să se determine funcția de transfer a regulatorului PI în funcție de componentele electrice. Va trebui să aibă următoarea structură: $H_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$.
- 11.B.b) Să se determine funcția de transfer a sistemului din Figura 15.3, unde traductorul va fi modelat prin $H_T(s) = \frac{1}{T_s s + 1}$, având constanta de timp calibrată încât traductorul să aibă dinamica mai rapidă decât cea a procesului.
- 11.B.c) Să se traseze și să se interpreteze locul rădăcinilor pentru sistemul din Figura 15.3 în funcție constanta de timp a regulatorului: $T_i \in (0, \infty)$. Pentru ceilalți parametri să se aleagă valori adecvate care vor rămâne constante pentru restul cerințelor.
- 11.B.d) [**Două cerințe la alegere**]: Să se determine constanta de timp a regulatorului astfel încât sistemul în buclă închisă:
 - d₁) să aibă pulsația de oscilație maximă/minimă;
 - d₂) să aibă pulsația naturală maximă/minimă;
 - d₃) să fie la limita de stabilitate.

15.2 Documentație

Se poate rezuma activitatea anterioară într-un raport în format electronic care să conțină:

- 1a). O schemă a procesului ales, împreună cu o scurtă prezentare a acestuia: componentele, mărimile implicate, semnalele de intrare și de ieșire, valorile numerice.

- 1b). Variabilele de stare alese, ecuațiile diferențiale de stare (inclusiv deducerea pas cu pas) și ecuația de ieșire; la final se va prezenta realizarea de stare în formă compactă (reprezentare matriceală simbolică și numerică).
- 2a) Ecuația diferențială intrare-ieșire, pe baza ecuațiilor diferențiale deduse anterior, și apoi să se prezinte simbolic modelul matematic de tip funcție de transfer.
- 2b) Funcția de transfer prin intermediul relației dintre aceasta și realizarea de stare; se vor prezenta atât rezultatul simbolic, cât și rezultatul numeric.
3. Singularitățile (simbolic și numeric), împreună cu reprezentarea acestora în planul complex.
4. Realizările de stare (simbolic și numeric) corespunzătoare FCC și FCO; schemele bloc ale acestora și simulări relevante pentru a descrie funcționalitatea sistemului ales.
5. Determinarea pas cu pas a funcției de transfer în formă minimală;
6. Determinarea pas cu pas a stabilității interne și a stabilității externe, folosind tabelul Routh-Hurwitz;
7. Determinarea stabilității interne a sistemului prin rezolvarea numerică a ecuației algebrice Lyapunov, extragerea funcției-candidat și prezentarea unui grafic al evoluției acesteia în timp.
8. Determinarea expresiilor analitice ale răspunsurilor cerute (**doar numeric**), evidențierea modurilor, a componentei tranzitorii și a celei staționare; prezentarea unor grafice sugestive pentru validarea rezultatelor.
9. Determinarea performanțelor cerute și evidențierea acestora prin grafice sugestive.
10. Aplicarea completă a algoritmului de trasare a locului rădăcinilor, cu posibilitatea utilizării MATLAB-ului pentru calcule auxiliare. Deducerea performanțelor impuse și ilustrarea acestora prin grafice adecvate pentru sistemul în buclă închisă.
11. Evidențierea funcției de transfer în buclă deschisă pentru care se va aplica metoda locului rădăcinilor. Aplicarea completă a algoritmului de trasare a locului rădăcinilor, cu posibilitatea utilizării MATLAB-ului pentru calcule auxiliare. Deducerea performanțelor impuse și ilustrarea acestora prin grafice adecvate pentru sistemul în buclă închisă.

Lucrarea 16

Întrebări de autocontrol

16.1 Listă de întrebări 138

Lucrarea de față prezintă o serie de întrebări de autocontrol cu rolul de a sintetiza esența teoretică disciplinei și de a deschide calea spre aplicarea practică a conceptelor studiate.

16.1 Listă de întrebări

1. Ce legătură este între funcțiile `odexy` și `lsim` din mediul MATLAB? Care dintre ele este mai generală și de ce?
2. Ce reprezintă semnalele $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ din modelul de tip spațiul stărilor? Găsiți exemple concrete pentru diverse sisteme.
3. Prezentați asemănări/deosebiri, respectiv avantaje/dezavantaje între modelele de tip spațiul stărilor și funcție de transfer.
4. Cum se poate verifica experimental că un sistem are un pol în valoarea $\hat{s} = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ aplicând un semnal intrare $u(t)$ adecvat? Dar în cazul unui zero în valoarea $\hat{s} = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$?
5. Ce unități de măsură au parametrii cu semnificație fizică dintr-o funcție de transfer: factorul de proporționalitate, constantele de timp, factorii de amortizare, pulsațiile naturale de oscilație?
6. De ce stabilitatea internă este o proprietate mai puternică decât stabilitatea externă? În ce caz cele două proprietăți coincid?
7. De ce funcția pondere a unui sistem LTI permite inferența comportamentului acestuia la orice intrare arbitrară $u(t)$, $t \geq 0$?
8. Cum se poate simula cu exactitate răspunsul unui sistem LTI la intrarea $u(t) = 1(t) + \delta(t - 10)$ utilizând mediul MATLAB?
9. Cum se poate aproxima timpul de răspuns al unui sistem LTI în cazul în care acesta are 3 constante de timp? Discuție.
10. Care indice de performanță variază continuu odată cu schimbarea parametrilor sistemului (K , T , ζ , ω_n): timpul de răspuns sau timpul de urcare? Justificați răspunsul.
11. Ce elemente structurale pot cauza un suprareglaj mai mare decât 100% într-un sistem LTI?
12. De ce un sistem de reglare în buclă închisă se comportă (respectiv se dorește prin proiectare să se comporte) precum un filtru trece-jos?
13. Găsiți exemple de sisteme fizice/biologice/economice/etc. ce prezintă inerent reacții pozitive și negative.
14. Un sistem LTI are trei poli (unul real și o pereche complex conjugată) situați pe aceeași verticală în planul complex. Ce regim are sistemul?
15. Ce dificultăți tehnice aduce impunerea unei erori staționare la accelerație nulă?
16. De ce în practică este nefezabil un regulator care anulează un pol instabil al procesului cu un zero în semiplanul drept?

BIBLIOGRAFIE

Anderson et al.: Network Analysis and Synthesis **Anderson1973**

B.D.O. Anderson și S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis. A Modern Systems Theory Approach*, Prentice-Hall Inc., 1973.

Brockett: Finite Dimensional Linear Systems **Brockett1970**

R.W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley și Sons, Inc., 1970.

Chen: Linear System Theory and Design **Chen1999**

C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, a 3-a ed., Oxford University Press, 1999.

P. Dobra: Teoria Sistemelor, Realizări de stare **Dobra2002**

P. Dobra, *Teoria Sistemelor, Realizări de stare*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2002.

P. Dobra et al.: Teoria Sistemelor **Dobra2014**

P. Dobra și M. Dobra, *Teoria Sistemelor*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2014.

Dorf et al.: Modern Control Systems **Dorf2011**

R.C. Dorf și R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, a 12-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2011.

Ionescu: Teoria Sistemelor **Ionescu1985**

V. Ionescu, *Teoria Sistemelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.

Khalil: Nonlinear Systems **Khalil1996**

H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, a 3-a ed., Prentice Hall, 1996.

Levine: The Control Handbook: Control System Fundamentals **Levine2011V1**

W.S. Levine, *The Control Handbook: Control System Fundamentals*, a 2-a ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.

MATLAB[®] Control System Toolbox[™] User's Guide**MatlabCST2024**

MATLAB[®] Control System Toolbox[™] User's Guide, <https://www.mathworks.com/help/control/>, Accesat: 2024-10-24.

Nise: Control Systems Engineering**Nise2015**

N.S. Nise, *Control Systems Engineering*, a 7-a ed., Wiley, 2015.

Ogata: Modern Control Engineering**Ogata2010**

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, a 5-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2010.

Voicu: Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate**Voicu1986**

M. Voicu, *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1986.