Aurora Felicia CRISTEA
Ovidiu-Aurelian DETEȘAN
Viorel ISPAS

MECANICĂ TEORETICĂ
Statică. Cinematică. Dinamică

U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2025
ISBN 978-606-737-762-0

Aurora-Felicia CRISTEA
Ovidiu-Aurelian DETEŞAN
Viorel ISPAS

MECANICĂ TEORETICĂ

Statică. Cinematică. Dinamică

U.T. PRESS
Cluj-Napoca, 2025
ISBN 978-606-737-762-0

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Conf.dr. ing. Claudiu Schonstein
Șf.l.dr.ing. Gabriel Fodor

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

ISBN 978-606-737-762-0

PREFAŢĂ

Cartea numită „**Mecanică Teoretică – Statică. Cinematică. Dinamică**” a apărut ca o necesitate în ceea ce priveşte tipărirea cursurilor şi a aplicaţiilor de mecanică pentru studenţii din anii 1 şi 2 de studiu cu specializările în inginerie mecanică, inginerie industrială, inginerie economică dar nu numai, fiind utilă tuturor acelora care doresc să înţeleagă noţiuni de mecanică și apoi să le aplice practic.

Se observă o curbă ascendentă a educaţiei în învăţământul tehnic românesc, iar economia are cerințe mari privind tinerii absolvenți în inginerie pentru multitudinea domeniilor de specializare. Aceste cerințe impun ingineri calificați în toate specializările ingineriei mecanice și nu numai. Formarea de ingineri revine universităţilor tehnice, fapt care atrage tot mai mulţi tineri în acest domeniu.

Cursul de mecanică cuprins în această lucrare este elaborat de către Conf. Dr. Ing. Aurora-Felicia Cristea, Conf. Dr. Ing. Ovidiu-Aurelian Deteşan şi cu contribuția mentorului nostru, a domnului Prof. Univ. Dr. Ing. Viorel Ispas și este o continuare a colaborărilor dintre aceștia.

Lucrarea cuprinde toate cele trei părți ale mecanicii teoretice (Statică, Cinematică și Dinamică, ultima parte completează contribuțiile anterioare ale autorilor). Ea cuprinde *nouăsprezece capitole* conținând noțiuni teoretice și aferent acestora, probleme de *statică* (capitolele 1÷8), probleme de *cinematică* (capitolele 9÷14), respectiv noțiuni de teorie și probleme de dinamică (capitolele 15÷19). *Partea aplicativă* pentru statică conține probleme de calcul vectorial, de reducere a sistemelor de forţe, de determinare a centrelor de masă şi a momentelor de inerţie, de echilibru a punctului material, a solidului rigid, precum şi de echilibru a sistemelor de solide rigide, probleme de cinematică etc. Partea de aplicații în cinematică conține probleme de cinematica punctului, de cinematica solidului rigid, de cinematica mişcării relative a punctului şi a solidului rigid. Partea de aplicații în dinamică include probleme de dinamica punctului material, de mișcarea relativă a acestuia, problemele și teoremele fundamentale ale dinamicii, probleme de ciocniri şi mecanică analitică.

Fiecare capitol din lucrare conţine două părți: considerații teoretice și aplicații aferente fiecărui capitol, fiind prezentate ca probleme rezolvate și probleme propuse.

Lucrarea se încheie cu anexele privind geometria maselor: centre de masă, momente de inerţie geometrice şi mecanice ale liniilor (barelor), suprafețelor (plăcilor) și a corpurilor cu geometrie cunoscută, bibliografia şi cuprinsul.

În *primul capitol* al părţii întâi a acestei lucrări, intitulată *Statica*, după prezentarea generală a noţiunilor despre vectori şi a unor operaţii cu mărimi vectoriale, sunt trecute în revistă câteva aplicaţii care acoperă toată gama de noţiuni şi operaţii cu vectori necesare în capitolele următoare.

Capitolul al doilea este destinat noțiunilor de reducere a sistemelor de forțe. Sunt prezentate astfel noțiunile de moment polar, moment axial, torsor de reducere într-un punct, torsor minimal, axă centrală și aplicațiile aferente acestora. În urma parcurgerii acestui capitol, studenţii se familiarizează cu noţiunile de reducere a sistemelor de forţe. Percepţia lor asupra sistemelor de forţe va fi alta după rezolvarea câtorva probleme de reducere. Astfel, se pleacă de la un sistem oarecare de forţe care acționează arbitrar, se trece prin aplicaţiile propuse la sistemele echivalente de una sau două elemente (forţă, moment), aplicate într-un punct sau pe axa centrală, aplicații care permit să se tragă concluzii asupra efectului sistemului de forţe aplicate solidului rigid aflat sub acţiunea acestor forţe.

În *capitolul al treilea* sunt prezentate noțiuni teoretice și aplicaţii pentru determinarea poziţiei centrului de masă pentru linii (bare), suprafeţe (plăci) şi corpuri omogene simple şi/sau compuse. Sunt prezentate de asemenea, aplicaţii pentru determinarea momentelor de inerţie geometrice şi mecanice pentru linii, suprafeţe şi corpuri omogene. În câteva cazuri sunt determinate şi elipsele de inerţie corespunzătoare unor puncte bine definite cum ar fi: centrul de masă sau originea sistemului de referinţă ales.

Capitolul al patrulea este destinat echilibrului punctului material. Astfel, se studiază echilibrul punctului pe o suprafaţă şi pe o curbă cu şi fără frecare, definindu-se şi conul frecării cu această ocazie. Echilibrul cu frecare al punctului se studiază sub aspect fizic şi sub aspect geometric.

În *capitolul al cincilea* sunt prezentate considerații teoretice și aplicaţii corespunzătoare pentru echilibrul solidului rigid supus la legături lucii şi aspre. Studenţii se vor familiariza astfel cu legăturile solidului rigid şi vor învăța introducerea corectă a forţele de legătură prin suprimarea legăturilor rigidului, se vor familiariza cu scrierea ecuaţiilor de proiecţii pentru forțe şi momente prin rezolvarea acestora, precum şi cu interpretarea rezultatele obţinute.

Capitolul al şaselea conţine considerațiile teoretice și aplicațiile referitoare la echilibrul sistemelor de solide rigide supuse la legături interioare şi exterioare cu sau fără frecare. Prin metodele folosite în acest capitol, studenţii vor învăţa să studieze echilibrul sistemelor, ajungând la concluzia că astfel de probleme, aparent dificile, se pot rezolva uşor.

Capitolele al şaptelea şi al optulea conţin noțiuni teoretice și probleme privind calculul firelor aeriene, precum și aplicațiile mecanismelor simple date de pârghii și scripeți. În capitolul șapte se prezintă ecuaţia generală a firelor şi ecuaţiile diferenţiale ale firelor în sisteme de coordonate carteziene şi intrinseci, necesare pentru rezolvarea problemelor de calcul al firelor acţionate de greutatea proprie şi a probleme legate de frecarea firelor.

Capitolul al nouălea este capitolul de introducere al părţii a doua a acestei lucrări şi anume *Cinematica* şi se referă la cinematica punctului material. Astfel, se tratează noţiuni teoretice legate de mişcarea punctului (traiectorie, ecuaţii de mişcare, viteză instantanee, acceleraţie instantanee, componente de viteză şi acceleraţie în diferite sisteme de referinţă) şi sunt prezentate aplicaţii ale acestora alese astfel încât, să se acopere toate noţiunile de cinematică a punctului. Unele dintre aceste aplicaţii se referă la mişcarea punctului pe curbe tehnice.

Capitolul al zecelea este destinat mişcărilor de translaţie, de rotaţie în jurul unui ax fix şi de roto-translaţie ale solidului rigid. Noţiunile teoretice prezentate în acest capitol se referă la studiul geometric, la distribuţia de viteze şi la distribuţia de acceleraţii ale rigidului. Ca aplicaţii au fost alese probleme cât mai sugestive care să pună în evidenţă mişcările respective.

În *capitolul al unsprezecelea* este prezentată mişcarea plan-paralelă a solidului rigid. Se prezintă succesiv studiul geometric, distribuţia de viteze şi distribuţia de acceleraţii a mişcării plan-paralele a rigidului. În aplicaţiile din acest capitol se determină centroidele mişcării plane (baza şi rostogolitoarea) şi distribuţiile de viteze şi acceleraţii prin diferite metode.

În *capitolul al doisprezecelea* sunt prezentate consideraţiile teoretice şi aplicaţiile în mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul unui punct fix (mișcarea sferică). La început se prezintă studiul geometric al mişcării, apoi distribuţiile de viteze şi de acceleraţii. În aplicaţii se determină, în general, axa instantanee de rotaţie, vitezele şi acceleraţiile instantanee pentru diferite puncte aparţinând rigidului aflat în mișcare sferică.

Capitolul al treisprezecelea cuprinde consideraţii teoretice şi aplicaţii la mişcarea generală a solidului rigid.

În *capitolul al paisprezecelea*, după prezentarea consideraţiilor teoretice corespunzătoare mişcării relative a punctului şi a solidului rigid, sunt prezentate aplicaţii diverse care conţin noţiunile specifice mişcării relative, precum vitezele şi acceleraţiile relative, de transport şi absolută, cu referire şi la acceleraţia Coriolis etc.

Partea a treia a Mecanicii Teoretice respectiv, *Dinamica* prezentată începând cu *capitolul cincisprezece* în care se face referire la noțiunile din dinamica punctului material şi a sistemelor de puncte materiale, parte care se încheie cu soluționarea analitică a aplicaţiilor.

Capitolul al şaisprezecelea al lucrării prezintă principalele noţiuni fundamentale şi teoremele fundamentale ale dinamicii, plecând de la impuls, moment cinetic, energie cinetică, putere și randament, încheindu-se cu partea de aplicaţii.

Capitolul al şaptesprezecelea prezintă noţiuni complexe privind dinamica rigidului începând cu mişcările particulare ale acestuia, ca de exemplu mişcarea de translaţie, rotaţie, mişcarea plan-paralelă, încheindu-se cu mişcarea generală şi aplicaţii.

Capitolul al optsprezecelea prezintă noţiuni de mecanică analitică, începând cu deplasările virtuale, lucrul mecanic virtual, principiul lui D'Alembert, încheindu-se cu ecuaţiile lui Lagrange şi ecuaţiile în formă canonică ale lui Hamilton.

Capitolul al nouăsprezecelea se referă la toate noţiunile şi teoremele din dinamică aplicate în cazul ciocnirilor şi a percuţiilor.

În concluzie, lucrarea de faţă a fost gândită cu o mare atenție privind partea teoretică, ea este ilustrată din punct de vedere grafic cât mai sugestiv. Autorii au prezentat aplicaţiile sub formă de probleme rezolvate și problemele propuse pentru fiecare capitol astfel încât, acestea să acopere toate noțiunile introduse în capitolul respectiv. De asemenea, se menționează că diversitatea problemelor prezentate uşurează înţelegerea noţiunilor şi metodelor generale ale Mecanicii Teoretice cuprinse în această lucrare.

Autorii doresc succes tuturor acelora care parcurg această lucrare şi speră într-o înțelegere cât mai facilă a noțiunilor și aplicațiilor prezentate.

Cluj-Napoca, Autorii,

CUPRINS

PREFAŢĂ 4
CUPRINS...7
I. STATICĂ
1. ***NOŢIUNI DE CALCUL VECTORIAL*** *17*
1.1 Consideraţii teoretice...17
1.1.1 *Operaţii cu vectori*.. 17
1.1.2 *Expresii analitice*..20
1.1.3 *Scrierea matriceală a relaţiilor vectoriale* 22
1.2 Probleme rezolvate... 23
1.3 Probleme propuse... 34
2. ***REDUCEREA SISTEMELOR DE FORŢE***.. *36*
2.1 Consideraţii teoretice.. 36
2.1.1 *Momentul unei forţe în raport cu un punct (momentul polar)*............36
2.1.2 *Momentul unei forţe în raport cu o axă (momentul axial)* 37
2.1.3 *Cuplu de forţe*..38
2.1.4 *Operaţii elementare de echivalenţă* 39
2.1.5 *Reducerea sistemelor de forţe oarecare* 39
2.1.6 *Reducerea sistemelor particulare de forţe* 43
2.2 Probleme rezolvate... 47
2.3 Probleme propuse... 90
3. ***GEOMETRIA MASELOR*** *96*
3.1 Consideraţii teoretice.. 96
3.1.1 *Centrul de greutate (centrul maselor) al unui sistem de puncte materiale*...96

3.1.1.1 Centrul de greutate (centrul masă) al unui continuum material 98
3.1.1.2 Masă specifică...100
3.1.1.3 Centre de masă geometrice..101
3.1.1.4 Proprietăţile centrelor de greutate..................................101
3.1.2 *Moment de masă*...102
3.1.3 *Momente statice* 103
3.1.4 *Momente de inerţie mecanice* 104
3.1.5 *Momente de inerţie geometrice*...105
3.1.6 *Raza de giraţie* 106
3.1.7 *Proprietăţi ale momentelor de inerţie* 106
3.1.8 *Variaţia momentelor de inerţie* 107
3.2 Probleme rezolvate...111
3.3 Probleme propuse...148
4. ***STATICA PUNCTULUI MATERIAL***...*153*
4.1 Consideraţii teoretice..153
4.1.1 *Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare*...............153
4.1.2 *Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare* 157
4.2 Probleme rezolvate...160
4.3 Probleme propuse...178
5. ***ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID***...*183*
5.1 Consideraţii teoretice..183
5.1.1 *Echilibrul solidului rigid liber* 183
5.1.2 *Echilibrul solidului rigid supus la legături* 184
5.1.2.1 Reazemul simplu (simpla rezemare)................................185
5.1.2.2 Articulaţia cilindrică..186
5.1.2.3 Articulaţia sferică..186

5.1.2.4 Încastrarea.. 187

5.1.2.5 Echilibrul solidului rigid supus la legături cu frecare 189

5.2 Probleme rezolvate.. 191

5.3 Probleme propuse.. 225

6. ***ECHILIBRUL SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE***....................... *229*

6.1 Consideraţii teoretice... 229

6.1.1 *Introducere*... 229

6.1.2 *Condiţii de echilibru*.. 229

6.1.3 *Teoreme utilizate în probleme de echilibru a sistemelor* 230

6.2 Probleme rezolvate.. 231

6.3 Probleme propuse.. 260

7. ***CALCULUL FIRELOR AERIENE*** *265*

7.1 Consideraţii teoretice... 265

7.1.1 *Ecuaţia generală a firelor* 266

7.1.2 *Ecuaţiile diferenţiale ale firelor în sistemul cartezian de coordonate* 266

7.1.3 *Ecuaţiile diferenţiale ale firelor în coordonate intrinseci* 267

7.1.4 *Fir acţionat exclusiv de greutatea proprie* 267

7.1.5 *Frecarea firelor*... 269

7.2 Probleme rezolvate.. 270

7.3 Probleme propuse.. 279

8. ***MECANISME SIMPLE***... *281*

SCRIPEȚI

8.1 Consideraţii teoretice... 281

8.1.1 *Randamentul scripeților* 283

8.2 Sisteme de scripeți 284

PÂRGHII

8.3 Considerații teoretice 286

8.4 Probleme rezolvate 289
8.5 Probleme propuse 291
II. CINEMATICĂ
A. MIŞCAREA ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINŢĂ FIX... *292*
9. ***CINEMATICA PUNCTULUI*** *292*
9.1 Consideraţii teoretice... 292
9.1.1 *Introducere*..292
9.1.2 *Traiectoria mişcării*...292
9.1.2.1 Sistemul de coordonate carteziene....................................293
9.1.2.2 Sistemul de coordonate cilindrice.....................................293
9.1.2.3 Ecuaţia orară a mişcării 294
9.1.3 *Viteza* 295
9.1.4 *Acceleraţia* 297
9.1.5 *Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate carteziene la mişcarea curbilinie*...298
9.1.6 *Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate polare la mişcarea curbilinie* 300
9.1.7 *Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate cilindrice la mişcarea curbilinie*...302
9.1.8 *Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee pe axele triedrului Frenét la mişcarea curbilinie* 303
9.1.9 *Viteza şi acceleraţia areolară*..306
9.1.10 *Mişcarea circulară* 307
9.1.11 *Mişcări particulare ale punctului* 311
9.1.11.1 Mişcarea rectilinie..311
9.1.11.1.1 Mişcarea rectilinie şi uniformă 311
9.1.11.1.2 Mişcarea rectilinie şi uniform variată..........................312

9.1.11.1.3 Mişcarea oscilatorie armonică 313
9.2 Probleme rezolvate 314
9.3 Probleme propuse 340
10. ***MIŞCĂRILE DE TRANSLAŢIE, DE ROTAŢIE ÎN JURUL UNUI AX FIX ŞI DE ROTO-TRANSLAŢIE ALE UNUI SOLID RIGID*** *345*
10.1 Consideraţii teoretice 345
10.1.1 *Introducere* 345
10.1.2 *Mişcarea de translaţie a rigidului* 345
10.1.2.1 Studiul geometric al mişcării 345
10.1.2.2 Distribuţia de viteze 347
10.1.2.3 Distribuţia de acceleraţii 347
10.1.3 *Mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul unui ax fix* 348
10.1.3.1 Studiul geometric al mişcării 348
10.1.3.2 Distribuţia de viteze 350
10.1.3.3 Distribuţia de acceleraţii 352
10.1.4 *Mişcarea de roto-translaţie a rigidului* 355
10.1.4.1 Studiul geometric al mişcării 355
10.1.4.2 Distribuţia de viteze 357
10.1.4.3 Distribuţia de acceleraţii 359
10.1.4.4 Mişcarea de şurub 360
10.2 Probleme rezolvate 361
10.3 Probleme propuse 384
11. ***MIŞCAREA PLAN-PARALELĂ A SOLIDULUI RIGID*** *386*
11 Consideraţii teoretice 386
11.1.1 *Studiul geometric al mişcării* 386
11.1.2 *Distribuţia de viteze* 388

11.1.2.1 Metode pentru determinarea distribuţiei de viteze în mişcarea plan-paralelă 392
11.1.3 *Distribuţia de acceleraţii* 399
11.1.3.1 Metode pentru determinarea distribuţiei de acceleraţii în mişcarea plan-paralelă 404
11.2 Probleme rezolvate 411
11.3 Probleme propuse 456
12. ***MIŞCAREA DE ROTAŢIE A RIGIDULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX*** *457*
12.1 Consideraţii teoretice 457
12.1.1 *Studiul geometric al mişcării* 457
12.1.2 *Distribuţia de viteze* 460
12.1.3 *Distribuţia de acceleraţii* 464
12.2 Probleme rezolvate 466
12.3 Probleme propuse 489
13. ***MIŞCAREA GENERALĂ A SOLIDULUI RIGID*** *494*
13.1 Consideraţii teoretice 494
13.1.1 *Studiul geometric al mişcării* 494
13.1.2 *Distribuţia vitezelor. Axoidele mişcării. Torsorul cinematic* 485
13.1.3 *Distribuţia acceleraţiilor. Polul acceleraţiilor* 499
13.2 Probleme rezolvate 502
13.3 Probleme propuse 513
B. MIŞCAREA ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINŢĂ MOBIL *515*
14. ***MIŞCAREA RELATIVĂ*** *515*
14.1 Mişcarea relativă a punctului 515
14.1.1 Consideraţii teoretice 515

14.1.1.1 Introducere. Definiţii 515
14.1.1.2 Compunerea vitezelor... 518
14.1.1.3 Compunerea acceleraţiilor... 519
14.2 Mişcarea relativă a solidului rigid.. 520
14.2.1 *Consideraţii teoretice* 520
14.2.2 *Compunerea vitezelor* 522
14.2.3 *Compunerea acceleraţiilor* 524
14.3 Probleme rezolvate 527
14.4 Probleme propuse 562

III. DINAMICĂ

15. ***DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL*** …………...……............…*566*
15.1 Principiile mecanicii newtoniene ……………………………………...566
15.1.1 *Noţiuni introductive* 566
15.1.2 *Principiile dinamicii* 567
15.2 Dinamica punctului material liber... 568
15.3 Dinamica punctului material sub acţiunea forţei centrale 573
15.3.1 *Proprietățile punctului material aflat în mișcare centrală* ………..574
15.4 Dinamica punctului material supus la legături…………………………………………………………..... 580
15.4.1 *Mişcarea punctului material pe o suprafaţă aspră* 581
15.4.2 *Mişcarea punctului material pe o curbă* 582
15.5 Pendulul simplu 583
15.6 Dinamica mişcării relative a punctului material ……..………..…......587
15.7 Probleme rezolvate 591
15.8 Probleme propuse 595

16. ***Noţiunile fundamentale şi teoremele fundamentale ale dinamicii*** ....***Error! Bookmark not defined.***
16.1 Lucrul mecanic ………………………………………………..……..…597
16.1.1 *Lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material* 597
16.1.2 *Lucrul mecanic al forţelor conservative*....................................... 600
16.1.3 *Lucrul mecanic al unei forţe elastice* 602
16.1.4 *Lucrul mecanic al forţelor interioare*... 603
16.1.5 *Lucrul mecanic al unui sistem de forţe care acţionează asupra unui solid rigid*.. 604
16.2 Puterea mecanică ……………………..……………………..……….606
16.3 Randamentul mecanic ………….……….…………………...……..607
16.4 Energia cinetică ……………………………………..………..….609
16.4.1 *Definiţii* 609
16.4.2 *Teorema lui König pentru energie cinetică* 610
16.4.3 *Energia cinetică în cazul unor mişcări particulare ale solidului rigid* 612
16.5 Impuls ………..………………………………….……................617
16.6 Moment cinetic …….………………...…………………..………....620
16.6.1 *Definiţii* 620
16.6.2 *Momentul cinetic în cazul unor mişcări particulare ale solidului rigid* 624
16.6.3 *Teorema lui König pentru momentul cinetic* 629
16.7 Teoremele fundamentale ale dinamicii ……………………...…...631
16.7.1 *Teorema de variație a energiei cinetice*……………………….……..631
16.7.2 *Teorema impulsului* ……………………………………….……..634

16.7.3 *Teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu punct fix* ………………………………………….………………………………...637
16.7.3.1 Teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu centrul maselor ………………………………….………………………….…….639
16.8 Probleme rezolvate…………..……………………………………...642
16.9 Probleme propuse…….……………………………………………656

17. ***Dinamica solidului rigid***... *657*
17.1 Dinamica rigidului liber şi a rigidului supus la legături 660
17.2 Dinamica solidului rigid aflat în mişcare de translație 662
17.3 Dinamica rigidului aflat în mişcare de rotație în jurul unui ax fix ……….……………………...………………………………...666
17.4 Dinamica rigidului în mişcare de roto-translație. Mișcarea de șurub ………..……………….…………………………..………………... 669
17.5 Dinamica mişcării plan-paralele a rigidului………..………..………674
17.6 Dinamica mișcării sferice a solidului rigid …………………….……676
17.6.1 *Ecuațiile diferențiale ale mişcării sferice* ………………..….…..…676
17.6.2 *Ecuaţiile dinamice ale lui Euler*.. 678
17.6.3 *Mişcarea de precesie regulată*.. 682
17.7 Probleme rezolvate …………………………………..……….....684
17.7.1 Giroscopul... 684
18. ***Mecanica analitică***.. *697*
18.1 Generalități... 697
18.1.1 *Legături*.. 698
18.2 Principiul lui d'Alembert ……………………..……………….…….....701
18.2.1 *Forţă de inerţie. Torsorul forțelor de inerţie*................................ 701
18.2.2 *Principiul lui D'Alembert. Metoda cineto-statică*......................... 704

18.3 Principiul lucrului mecanic virtual …………………………….........705
18.4 Ecuaţiile lui Lagrange …….…………….…….……………………......709
18.4.1 *Ecuaţiile lui Lagrange de speţa I* 709
18.4.2 *Ecuaţiile lui Lagrange de speţa II*.. 711
18.4.3 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa II în cazul forţelor conservative….………………………….….…………………..…714
18.5 Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton ……………………....……..715
18.6 Probleme rezolvate ……..……………….………..……….,......718
18.7 Probleme propuse ……..………..………………….....………....722
19. ***Ciocniri şi percuţii***…..…...........…………….........…......….........*724*
19.1 Forţă de percuţie. Percuţie 725
19.2 Ipoteze simplificatoare aplicate în cazul ciocnirilor ……..………..…726
19.3 Teoremele fundamentale în cazul ciocnirilor ……………….……729
19.4 Ciocnirea unui corp cu un solid rigid aflat în mişcare de rotație în jurul unui ax fix şi supus unei percuţii exterioare. Centru de percuţie.…………..………………..……………………………… 735
19.5 Probleme rezolvate …………..…………………….……………......739
19.6 Probleme propuse …………..……………………...……..………746
ANEXA 1. Tabel cu centrele de greutate ale diferitelor figuri şi corpuri geometrice 747
ANEXA 2. Tabel cu momentele de inerţie ale diferitelor figuri şi corpuri geometrice 756
BIBLIOGRAFIE... 766

I. STATICĂ

1. NOŢIUNI DE CALCUL VECTORIAL [10]

1.1 Consideraţii teoretice

1.1.1 Operaţii cu vectori

Mărimile fizice pot fi clasificate în:

- scalari (mărimi fizice scalare), caracterizaţi prin valoare numerică şi unitate de măsură;
- vectori (mărimi fizice vectoriale), caracterizaţi prin punct de aplicaţie, modul (valoare absolută, magnitudine), direcţie şi sens; în funcţie de poziţia punctului de aplicaţie aceştia pot fi: liberi, legaţi (aplicaţi) sau alunecători (glisanţi).

În cele ce urmează se vor analiza succint operaţiile ce pot fi aplicate asupra mărimilor fizice vectoriale.

a) Suma (compunerea) vectorilor liberi

Suma a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se poate nota astfel:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} \ . \tag{1.1}$$

Metoda grafică utilizată pentru compunerea a doi vectori liberi se numeşte *regula paralelogramului* (fig. 1.1).

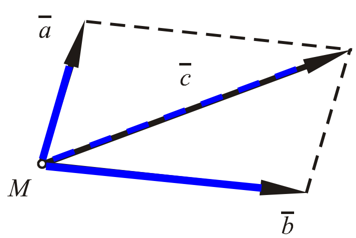


Fig. 1.1

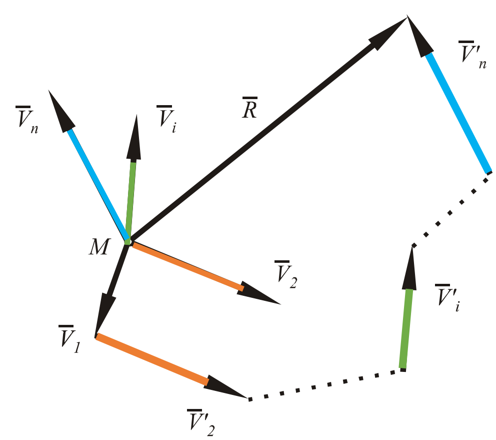


Fig. 1.2

[10] Ispas, V. și alții, 2010

În cazul a n vectori liberi $\overline{\mathrm{v}}_i$, $i=\overline{1,n}$, se poate scrie:

$$\overline{R}=\overline{\mathrm{v}}_1+\overline{\mathrm{v}}_2+...+\overline{\mathrm{v}}_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{v}}_i\ . \tag{1.2}$$

Ca şi metodă grafică, pentru compunerea a n vectori se utilizează *metoda poligonului vectorilor* (fig. 1.2).

b) Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este o mărime scalară, se notează:

$$c=\overline{a}\cdot\overline{b} \tag{1.3}$$

şi are expresia:

$$c=|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|\cos\alpha \tag{1.4}$$

Proprietăţile produsului scalar:

- comutativitatea:

$$\overline{b}\cdot\overline{a}=\left|\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos(-\alpha)=\left|\overline{b}\right|\cdot\left|a\right|\cos\alpha=\overline{a}\cdot\overline{b}$$

- condiţia de ortogonalitate: $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ $\quad\left(\overline{a},\overline{b}\neq 0\right)$
- proiecţia unui vector $\overline{a}$ pe o axă (Δ) este egală cu produsul scalar dintre vector şi versorul $\overline{u}$ al axei: $pr_{\Delta}\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{u}$
- distributivitatea faţă de adunare: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$

c) Produsul vectorial a doi vectori

Produsul vectorial a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este o mărime vectorială şi se notează astfel:

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b} \tag{1.5}$$

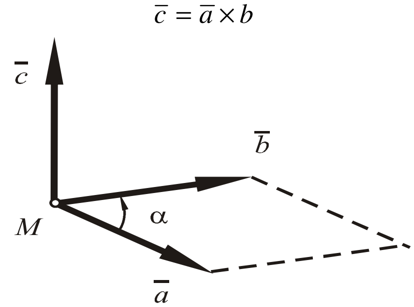


Fig. 1.3

Proprietăţile produsului vectorial:

- modulul are expresia $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\alpha$ şi este egal cu *aria paralelogramului* delimitat de cei doi vectori (fig. 1.3), direcţia este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori, iar sensul se determină prin regula burghiului;

- anticomutativitatea: $\bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b}$
- condiţia de coliniaritate: $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \qquad (\bar{a}, \bar{b} \neq 0)$
- distributivitatea faţă de adunare: $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$.

d) Produsul mixt a trei vectori

Produsul mixt a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ este o mărime scalară notată astfel:

$$d = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \tag{1.6}$$

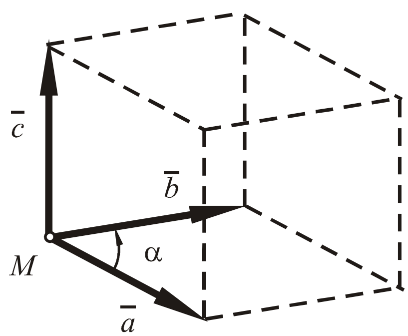


Fig. 1.4

Proprietăţile produsului mixt:

- produsul mixt este egal cu *volumul paralelipipedului* construit cu vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (fig. 1.4)
- este nul când vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt coplanari
- este constant la permutare circulară:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

e) Dublul produs vectorial a trei vectori

Dublul produs vectorial a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sau produsul vectorial a lui Gibbs este o mărime fizică vectorială, având notaţia:

$$\bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \tag{1.7}$$

Proprietățile dublului produs vectorial:

- vectorul $\bar{d}$ este inclus în planul vectorilor $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ şi mai poate fi scris:

$\bar{d} = \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\cdot\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}$;

$\bar{d} = (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{b}\cdot\bar{c})\cdot\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{c})\cdot\bar{b}$.

- suma permutărilor circulare se anulează:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) + \bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a}) + \bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b}) = 0 .$$

1.1.2 Expresii analitice

Proiecţiile vectorului $\bar{v}$, conform figurii 1.5, sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= |\bar{v}|\cos\alpha \\ v_y &= |\bar{v}|\cos\beta \\ v_z &= |\bar{v}|\cos\gamma, \end{aligned} \tag{1.8}$$

unde α, β, γ reprezintă unghiurile dintre vectorul $\bar{v}$ şi cele trei axe ale sistemului de coordonate cartezian *Oxyz*.

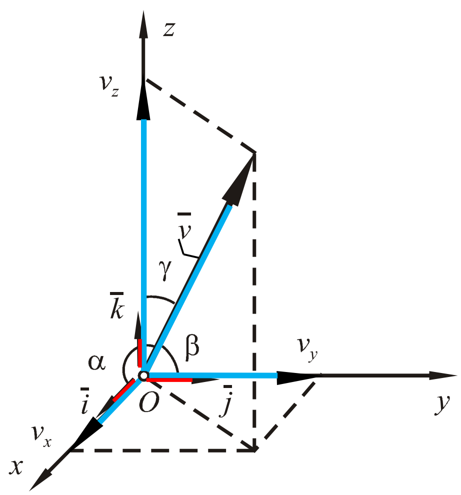


Fig. 1.5

Expresia analitică a vectorului $\bar{v}$ se scrie astfel:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \ , \tag{1.9}$$

unde $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ reprezintă versorii axelor sistemului *Oxyz*.

Dacă se notează cu $\overline{R}$ vectorul rezultant al unui sistem de vectori liberi $\overline{\mathrm{v}}_i$, expresia analitică a acestuia este:

$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k} \tag{1.10}$$

iar componentele sale carteziene sunt egale cu:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_{ix},\ R_y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_{iy},\ R_z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_{iz} \tag{1.11}$$

Modulul vectorului rezultant este:

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2} \tag{1.12}$$

Cosinusurile directoare ale vectorului $\overline{R}$ au expresiile:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R_x}{\sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}} \\ \cos\beta &= \frac{R_y}{\sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{R_z}{\sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dacă se notează prin $\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2, \overline{\mathrm{v}}_3$ trei vectori, operațiile de mai sus pot fi exprimate analitic astfel:

- Produsul scalar:

$$\overline{\mathrm{v}}_1 \cdot \overline{\mathrm{v}}_2 = \mathrm{v}_{1x}\mathrm{v}_{2x} + \mathrm{v}_{1y}\mathrm{v}_{2y} + \mathrm{v}_{1z}\mathrm{v}_{2z} \tag{1.14}$$

- Produsul vectorial:

$$\overline{\mathrm{v}}_1 \times \overline{\mathrm{v}}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \mathrm{v}_{1x} & \mathrm{v}_{1y} & \mathrm{v}_{1z} \\ \mathrm{v}_{2x} & \mathrm{v}_{2y} & \mathrm{v}_{2z} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

- Produsul mixt:

$$\left(\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2, \overline{\mathrm{v}}_3\right) = \begin{vmatrix} \mathrm{v}_{1\mathrm{x}} & \mathrm{v}_{1\mathrm{y}} & \mathrm{v}_{1\mathrm{z}} \\ \mathrm{v}_{2\mathrm{x}} & \mathrm{v}_{2\mathrm{y}} & \mathrm{v}_{2\mathrm{z}} \\ \mathrm{v}_{3\mathrm{x}} & \mathrm{v}_{3\mathrm{y}} & \mathrm{v}_{3\mathrm{z}} \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

1.1.3 Scrierea matriceală a relaţiilor vectoriale

Fiind daţi doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, *produsul lor scalar* se scrie sub forma:

$$\{a\}^T \cdot \{b\} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1.17)$$

unde prin {a}, respectiv {b}, s-au notat matricele coloană corespunzătoare vectorilor daţi.

Fiind daţi doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, *produsul lor vectorial* se exprimă prin produsul dintre matricea antisimetrică asociată primului vector, notată cu $[\hat{a}]$ şi matricea coloană {b}:

$$[\hat{a}] \cdot \{b\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \qquad (1.18)$$

Se poate verifica uşor anticomutativitatea acestui produs:

$$[\hat{a}] \cdot \{b\} = -[\hat{b}] \cdot \{a\} = [\hat{b}]^T \cdot \{a\} \qquad (1.19)$$

cunoscând următoarea proprietate a matricelor antisimetrice:

$$-[\hat{b}] = [\hat{b}]^T \qquad (1.20)$$

1.2 Probleme rezolvate [10]

1.2.1. Se dau vectorii: $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}, \quad \overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$. Să se calculeze produsul scalar $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Soluţie:

Calculând produsul scalar pe baza expresiilor analitice, se poate scrie:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 + 6 - 8 = 0$$

Se observă că vectorii sunt perpendiculari.

1.2.2. Să se simplifice expresia:

$$\overline{E} = (\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} + \overline{c}) + (\overline{b} + \overline{c}) \times (\overline{b} + \overline{a}) + (\overline{c} + \overline{a}) \times (\overline{c} + \overline{b}).$$

Soluţie:

Potrivit proprietăţii de distributivitate a produsului vectorial faţă de adunare, se desfac parantezele, se reduc termenii asemenea şi se obţine:

$$\overline{E} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{a} + \overline{c} \times \overline{b}.$$

1.2.3. Să se calculeze produsul mixt $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$ pentru vectorii:

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}, \quad \overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}, \quad \overline{c} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}.$$

Soluţie:

Dezvoltând produsul mixt sub formă de determinant, se obţine:

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Rezultatul se explică prin faptul că vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari. Într-adevăr, se observă că:

$$\overline{c} = -\overline{a} + 2\overline{b} \qquad (2)$$

[10] Ispas, V. și alții, 2010

1.2.4. Se dau vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ orientaţi după muchiile *VA, VB, VC* ale unui tetraedru regulat *VABC,* având lungimea muchiei egală cu *l*. Să se arate că dublul produs vectorial $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ este un vector paralel cu BC.

Soluţie:

Se notează:

$$\bar{a} = \lambda_1 \overline{VA}, \quad \bar{b} = \lambda_2 \overline{VB}, \quad \bar{c} = \lambda_3 \overline{VC}. \tag{1}$$

Dublul produs vectorial $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ are expresia:

$$\bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\bar{c} = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2} l^2 \overline{VB} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2} l^2 \overline{VC} \tag{2}$$

adică,

$$\bar{d} = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2} (\overline{VB} - \overline{VC}) = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2} \overline{CB}. \tag{3}$$

Rezultă că vectorii $\bar{d}$ şi $\overline{CB}$ sunt paraleli, iar

$$|\bar{d}| = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2} = \frac{abc}{2}. \tag{4}$$

1.2.5. Să se simplifice expresia:

$$E = (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{c}) + (\bar{b} - \bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{c} - \bar{a}) \cdot (\bar{c} - \bar{b})$$

Soluţie:

Potrivit proprietăţii de distributivitate a produsului scalar faţă de adunare, se desfac parantezele, se reduc termenii asemenea şi se obţine:

$$E = a^2 + b^2 + c^2 - (\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a}).$$

1.2.6. Se dau vectorii:

$$\bar{a} = \bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}, \quad \bar{b} = -15\bar{i} + 25\bar{j} + 30\bar{k}, \quad \bar{c} = 8\bar{i} - 20\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Să se calculeze produsele vectoriale $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$ şi să se arate că vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt coplanari.

Soluţie:

Analitic, produsele vectoriale se dezvoltă sub formă de determinant simbolic. Astfel,

$$\bar{v}_1 = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -5 & 9 \\ -15 & 25 & 30 \end{vmatrix} = -375\bar{i} - 165\bar{j} - 50\bar{k}. \tag{1}$$

Analog, se obţin:

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{b} \times \bar{c} = -750\bar{i} + 330\bar{j} + 100\bar{k}, \\ \bar{v}_3 &= \bar{c} \times \bar{a} = -150\bar{i} - 66\bar{j} - 20\bar{k}. \end{aligned} \tag{2}$$

Se observă că:

$$\frac{\bar{v}_1}{5} = -\frac{\bar{v}_2}{10} = \frac{\bar{v}_3}{2} \tag{3}$$

şi, în concluzie, vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_2$, şi $\bar{v}_3$ sunt paraleli, iar $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt coplanari.

1.2.7. Să se determine modulul şi poziţia vectorilor $\bar{v}_1(1,-2,3)$ şi $\bar{v}_2(-2,4,-6)$ în sistemul de referinţă cartezian *Oxyz*. Să se calculeze expresiile:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 \times \bar{v}_2.$$

Soluţie:

Vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ se exprimă în sistemul *Oxyz* sub forma:

$$\bar{v}_1 = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k} \tag{1}$$

$$\bar{v}_2 = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k} = -2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) se observă că vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coliniari şi de semne opuse, iar între modulele lor există relaţia:

$$|\bar{v}_2| = 2|\bar{v}_1| = 2\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}. \tag{3}$$

Unghiurile dintre vectori şi axele sistemului de referinţă sunt calculate prin cosinusurile directoare:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}, \tag{4}$$

respectiv,

$$\cos\alpha_2 = \frac{-2}{2\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta_2 = \frac{2\cdot 2}{2\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{-2\cdot 3}{2\sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}. \tag{5}$$

Expresiile cerute se calculează astfel:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) - 2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{j}) = -(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) \tag{6}$$

Vectorul sumă $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ este un vector coliniar cu vectorul $\bar{v}_1$, egal în mărime cu acesta, dar de semn opus.

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) + 2\left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) = 3\left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) \tag{7}$$

Vectorul diferenţă $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ este un vector coliniar cu vectorul $\bar{v}_1$ având modulul de trei ori mai mare decât acesta:

$$\left|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right| = 3\left|\bar{v}_1\right| = 3\sqrt{14}. \tag{8}$$

Produsul scalar $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$ se determină astfel:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) \cdot \left[-2\left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right)\right] = -2 - 8 - 18 = -28 \tag{9}$$

Produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ se anulează, deoarece cei doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coliniari.

1.2.8. Fiind daţi vectorii: $\bar{v}_1 = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{v}_2 = -4\bar{j}$, $\bar{v}_3 = -5\bar{k}$, $\bar{v}_4 = -6\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k}$, să se calculeze expresiile:

$$E_1 = \left(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2\right)\left(\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_4\right), \qquad \bar{E}_2 = \left(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2\right)\left(\bar{v}_3 \times \bar{v}_4\right)$$

$$\bar{E}_3 = \left(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right)\left(\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_4\right) \qquad E_4 = \left(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right) \cdot \left(\bar{v}_3 \times \bar{v}_4\right)$$

$$\bar{E}_5 = \left(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right) \times \left(\bar{v}_3 \times \bar{v}_4\right)$$

Soluţie:

În urma efectuării calculelor rezultă expresiile:

$$E_1 = \left[\left(-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}\right) \cdot \left(-4\bar{j}\right)\right] \cdot \left[-5\bar{k}\left(-6\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k}\right)\right] = -8 \cdot 40 = -320$$

$$\bar{E}_2 = -8\left[-5\bar{k} \times \left(-6\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k}\right)\right] = 40\left(-6\bar{j} - 7\bar{i}\right) = -40\left(7\bar{i} + 6\bar{j}\right)$$

$$\bar{E}_3 = \left(-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}\right) \times \left(-4\bar{j}\right) 40 = 160\left(\bar{k} - 3\bar{i}\right) = 160\left(-3\bar{i} + \bar{k}\right)$$

$$E_4 = 4\left(-3\bar{i} + \bar{k}\right) \cdot 5\left(7\bar{i} + 6\bar{j}\right) = 20(-21) = -420$$

$$\bar{E}_5 = 4\left(-3\bar{i} + \bar{k}\right) \times 5\left(7\bar{i} + 6\bar{j}\right) = 20\left(7\bar{j} - 18\bar{k} - 6\bar{i}\right) = 20\left(-6\bar{i} + 7\bar{j} - 18\bar{k}\right).$$

Se observă că vectorul $\bar{E}_2$ se află în planul orizontal *xOy*, iar vectorul $\bar{E}_3$ în planul vertical *xOz*.

1.2.9. Să se determine vectorul $\bar{v}$ care satisface sistemul de ecuaţii vectoriale: $\begin{cases} \bar{v} \cdot \bar{a} = m \\ \bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}, \end{cases}$ unde $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt doi vectori perpendiculari.

Soluţie:

Din relaţiile date se constată că vectorul $\overline{v}$ se află în acelaşi plan cu $\overline{a}$ (plan perpendicular pe $\overline{b}$, fig.1.6).

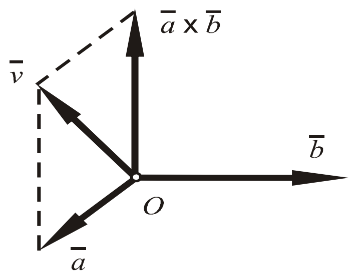


Fig. 1.6

În acelaşi plan cu $\overline{a}$ şi $\overline{v}$ se găseşte şi $\overline{a} \times \overline{b}$, deci există relaţia:

$$\overline{v} = \lambda \overline{a} + \mu\left(\overline{a} \times \overline{b}\right), \tag{1}$$

în care trebuie determinaţi parametri scalari λ şi μ.

Introducând (1) în sistem, se obţine succesiv:

$$\left[\lambda \overline{a} + \mu\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\right] \cdot \overline{a} = m \qquad \Rightarrow \lambda a^2 = m \tag{2}$$

$$\left[\lambda \overline{a} + \mu\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\right] \times \overline{a} = \overline{b} \qquad \Rightarrow \mu\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{a} = \overline{b}\,. \tag{3}$$

Din relaţia (2) rezultă:

$$\lambda = \frac{m}{a^2} \tag{4}$$

şi din (3), dezvoltând după regula lui Gibbs, rezultă:

$$\mu \overline{b}\left(\overline{a} \cdot \overline{a}\right) = \overline{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{1}{a^2}\,. \tag{5}$$

Astfel, vectorul $\overline{v}$ devine:

$$\overline{v} = \frac{m}{a^2}\overline{a} + \frac{1}{a^2}\left(\overline{a} \times \overline{b}\right). \tag{6}$$

Acelaşi rezultat se putea obţine înmulţind vectorial cu $\overline{a}$ relaţia a doua din enunţul problemei.

1.2.10. Se dă sistemul de ecuaţii vectoriale: $\begin{cases} \overline{x}+\overline{y}=\overline{a} \\ \overline{x}+\overline{z}=\overline{b} \\ (\overline{x}\times\overline{y})\cdot\overline{z}=\overline{v} \end{cases}$. Dacă se cunosc vectorii $\{\overline{a},\overline{b},\overline{v}\}$, să se determine vectorii $\{\overline{x},\overline{y},\overline{z}\}$.

Soluţie:

Din primele două ecuaţii ale sistemului dat rezultă:

$$\begin{cases} \overline{y}=\overline{a}-\overline{x} \\ \overline{z}=\overline{b}-\overline{x} \end{cases} \tag{1}$$

Înlocuind (1) în ecuaţia a treia a sistemului iniţial, se obţine succesiv:

$$\begin{aligned} &[\overline{x}\times(\overline{a}-\overline{x})]\cdot(\overline{b}-\overline{x})=\overline{v}, \\ &(\overline{x}\times\overline{a}-\overline{x}\times\overline{x})\cdot(\overline{b}-\overline{x})=\overline{v}, \\ &(\overline{x}\times\overline{a})\cdot\overline{b}-(\overline{x}\times\overline{a})\cdot\overline{x}=\overline{v}, \\ &(\overline{x}\times\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{v}, \end{aligned} \tag{2}$$

întrucât, $\overline{x}\times\overline{x}=0$, $(\overline{x}\times\overline{a})\cdot\overline{x}=0$.

Efectuând permutări circulare în relaţia (2), se obţine:

$$\overline{x}=\frac{\overline{v}}{\overline{a}\times\overline{b}}. \tag{3}$$

Înlocuind (3) în relaţiile (1), se obţin vectorii $\overline{y}$ şi $\overline{z}$. Astfel:

$$\overline{y}=\overline{a}-\frac{\overline{v}}{\overline{a}\times\overline{b}},\quad \overline{z}=\overline{b}-\frac{\overline{v}}{\overline{a}\times\overline{b}}. \tag{4}$$

1.2.11. Să se demonstreze relaţia următoare:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{a}\times\overline{b})+(\overline{a}\cdot\overline{b})^2=a^2b^2 \ .$$

Soluţie:

Se cunosc relaţiile următoare:

$$|\overline{a}\times\overline{b}|=ab\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) \tag{1}$$

şi

$$\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\right| = ab\cos\left(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b}\right) \tag{2}$$

Primul termen din relaţia dată se transformă succesiv, astfel:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|^2 = a^2b^2\sin^2\left(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b}\right). \tag{3}$$

Al doilea termen din relaţia dată, conform cu (2), devine:

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)^2 = a^2b^2\cos^2\left(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b}\right). \tag{4}$$

Introducând (3) şi (4) în relaţia din enunţul problemei şi având în vedere că:

$$\sin^2\left(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b}\right) + \cos^2\left(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b}\right) = 1 \tag{5}$$

se obţine:

$$a^2b^2 = a^2b^2. \tag{6}$$

1.2.12. Să se descompună o forţă $\overline{P}$ în două componente $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$ astfel ca $F_1 = 2F_2$. Să se afle locul geometric al extremităţii forţei mai mari.

Soluţie:

Considerând o descompunere arbitrară, care respectă condiţia pusă în problemă, se formează un triunghi oarecare (fig. 1.7).

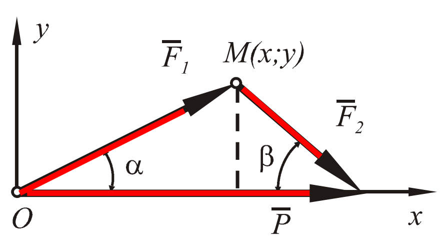


Fig. 1.7

Locul geometric al punctului M (extremitatea forţei $\overline{F_1}$) va fi o funcţie implicită de *x* şi *y*.

Se pot scrie următoarele relaţii:

$$y^2 + (P - x)^2 = F_2^2 \tag{1}$$

şi
$$F_2^2 = F_1^2 + P^2 - 2F_1 P \cos\alpha \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{F_1} \quad \text{şi} \quad F_1 = 2F_2 \tag{3}$$

astfel că:

$$F_2^2 = 4F_2^2 + P^2 - 2Px \tag{4}$$

$$3F_2^2 = 2Px - P^2 \tag{5}$$

$$F_2^2 = \frac{2}{3}Px - \frac{P^2}{3} \tag{6}$$

Înlocuind (6) în (1), rezultă:

$$y^2 + (P - x)^2 = \frac{2}{3}Px - \frac{P^2}{3} \tag{7}$$

Dezvoltând şi ordonând termenii ecuaţiei se obţine:

$$y^2 + P^2 - 2Px + x^2 - \frac{2}{3}Px + \frac{P^2}{3} = 0 \tag{8}$$

sau:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 - \frac{8P}{3}x + \frac{4P^2}{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Astfel, locul geometric al punctului M este un cerc având centrul pe axa Ox (pentru că lipseşte coeficientul lui y) la distanţa:

$$a = \frac{4P}{3} \tag{10}$$

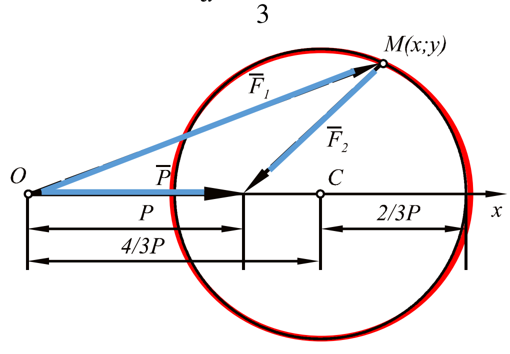


Fig. 1.8

şi raza

$$R=\sqrt{a^2-c}=\sqrt{\frac{16P^2}{9}-\frac{4P^2}{3}}=\frac{2}{3}P \tag{11}$$

ceea ce se verifică grafic, conform figurii 1.8.

1.2.13. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\bar{v}_1(2,-4,4)$ şi $\bar{v}_2(4,6,4)$, precum şi produsele $\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_1\times\bar{v}_2$.

Soluţie:

Vectorii consideraţi pot fi scrişi utilizând componentele lor carteziene sub forma:

$$\bar{v}_1=2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k},\quad \bar{v}_2=4\bar{i}+6\bar{j}+4\bar{k} \tag{1}$$

iar modulele lor sunt:

$$|\bar{v}_1|=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36},\quad |\bar{v}_2|=\sqrt{16+36+16}=\sqrt{68}. \tag{2}$$

Cosinusul unghiului dintre cei doi vectori are expresia:

$$\begin{aligned}\cos(\bar{v}_1,\bar{v}_2)&=\frac{\bar{v}_1\bar{v}_2}{|\bar{v}_1||\bar{v}_2|}=\frac{v_{1x}v_{2x}+v_{1y}v_{2y}+v_{1z}v_{2z}}{\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2+v_{1z}^2}\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2+v_{2z}^2}}=\\&=\frac{8-24+16}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{16+36+16}}=0,\end{aligned} \tag{3}$$

ceea ce înseamnă că între aceştia există un unghi de $\pi/2$, adică, conform condiţiei de ortogonalitate,

$$\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2=0. \tag{4}$$

Produsul vectorial $\bar{v}_1\times\bar{v}_2$ se calculează prin determinantul simbolic:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1\times\bar{v}_2&=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\2&-4&4\\4&6&4\end{vmatrix}=\bar{i}(-16-24)+\bar{j}(16-8)+\bar{k}(12+16)=\\&=4(-10\bar{i}+2\bar{j}+7\bar{k})\end{aligned} \tag{5}$$

şi are modulul:

$$|\bar{v}_1\times\bar{v}_2|=4\sqrt{100+4+49}=4\sqrt{153} \tag{6}$$

[10] Ispas, V. și alții, 2010

1.2.14. Să se calculeze produsul mixt al vectorilor $\overline{v}_1(2,4,6)$, $\overline{v}_2(1,3,5)$ şi $\overline{v}_3(-2,0,2)$ şi să se interpreteze rezultatul.

Soluţie:

Folosind relaţia (1.16), se poate scrie:

$$\overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Produsul mixt $\overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$ fiind nul, rezultă că vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt coplanari; $\overline{v}_3$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$:

$$\overline{v}_3 = -3\overline{v}_1 + 4\overline{v}_2 \qquad (2)$$

1.2.15. Coardele APB şi CPD ale unui cerc cu centrul în O se intersectează ortogonal în punctul P (fig. 1.9). Să se demonstreze egalitatea:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PO}$$

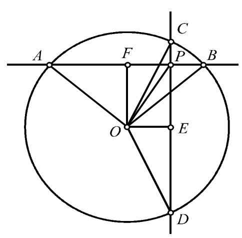


Fig. 1.9

Soluţie:

Din figura 1.9 se desprind următoarele relaţii vectoriale:

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{PO} + \overline{OA} \\ \overline{PB} &= \overline{PO} + \overline{OB} \\ \overline{PC} &= \overline{PO} + \overline{OC} \\ \overline{PD} &= \overline{PO} + \overline{OD}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Prin însumarea vectorială a relaţiilor de mai sus, rezultă:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \qquad (2)$$

Dar se observă că:

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OF} \qquad (3)$$

$$\overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{OE} \tag{4}$$

Însumând vectorial relaţiile (3) şi (4), rezultă:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 2\left(\overline{OF} + \overline{OE}\right) = 2\overline{OP} \tag{5}$$

Prin urmare, din relaţiile (2) şi (5) se obţine:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PO} + 2\overline{OP} = 2\overline{PO} \tag{6}$$

1.2.16. Să se demonstreze că cele trei înălţimi ale unui triunghi sunt concurente (fig. 1.10).

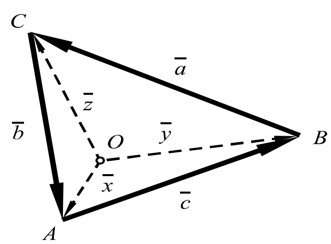


Fig. 1.10

Soluţie:

Presupunând că O este punctul de intersecţie al înălţimilor coborâte din A şi B, se fac următoarele notaţii:

$$\overline{OA} = \overline{x}, \quad \overline{OB} = \overline{y}, \quad \overline{OC} = \overline{z} \tag{1}$$

Conform figurii 1.10, au loc următoarele relaţii vectoriale:

$$\overline{a} = \overline{z} - \overline{y}, \quad \overline{b} = \overline{x} - \overline{z}, \quad \overline{c} = \overline{y} - \overline{x} \tag{2}$$

Condiţia de ortogonalitate dintre $\overline{OA}$ şi $\overline{BC}$, respectiv $\overline{OB}$ şi $\overline{AC}$, este:

$$\begin{aligned} \overline{x} \cdot \overline{a} = \overline{x} \cdot (\overline{z} - \overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{z} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 0, \\ \overline{y} \cdot \overline{b} = \overline{y} \cdot (\overline{x} - \overline{z}) = \overline{y} \cdot \overline{x} - \overline{y} \cdot \overline{z} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Adunând cele două relaţii (3), rezultă:

$$\overline{x} \cdot \overline{z} - \overline{y} \cdot \overline{z} = (\overline{x} - \overline{y}) \cdot \overline{z} = -\overline{c} \cdot \overline{z} = 0, \tag{4}$$

cu alte cuvinte, $\overline{OC}$ este perpendicular pe $\overline{AB}$ şi, prin urmare, punctul O este situat pe înălţimea care porneşte din punctul C.

1.3 Probleme propuse

1.3.1. Să se determine modulul şi direcţia vectorilor:

$$\bar{v}_1(-3,4,-3), \qquad \bar{v}_2(3,0,3), \qquad \bar{v}_3(1,2,3).$$

Să se calculeze apoi expresiile

$$\bar{E}_1 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \quad \bar{E}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \quad E_3 = (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_3, \quad \bar{E}_4 = (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \times \bar{v}_3 .$$

Răspuns:

$$\bar{E}_1 = \bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{E}_2 = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \quad E_3 = -24, \quad \bar{E}_4 = -24(\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}).$$

1.3.2. Să se demonstreze relaţia:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) - -2(\bar{a} \times \bar{b}).$$

1.3.3. Să se demonstreze formulele:

$$\bar{a} \times [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})] = (\bar{b} \cdot \bar{d})(\bar{a} \times \bar{c}) - (\bar{b} \cdot \bar{c})(\bar{a} \times \bar{d})$$
$$\bar{a} \times [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})] = [\bar{a} \cdot (\bar{c} \times \bar{d})]\bar{b} - (\bar{a}\bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}).$$

1.3.4. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = \bar{a} \\ \bar{x} \times \bar{y} = \bar{b}, \end{cases}$ la care $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt doi vectori daţi. Să se interpreteze rezultatul.

Răspuns: problema este posibilă dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt perpendiculari.

1.3.5. O forţă $\bar{F}$ având un modul de *100 N* este aplicată unei console fixe, ca în figura 1.11. Să se determine:

a) mărimea componentelor rectangulare ale forţei $\bar{F}$ pe axele sistemului de referinţă *Ox* şi *Oy*;

b) mărimea componentelor rectangulare pe axele Ox' şi Oy';

c) mărimea componentelor vectoriale pe axele Ox' şi Oy'.

Răspuns:

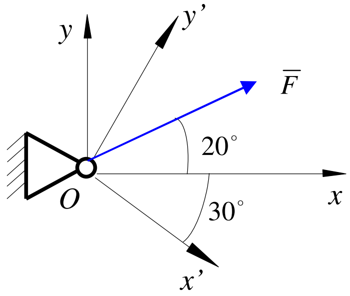


Fig. 1.11

a) $\begin{cases} F_x = 94 \quad N \\ F_y = 34.2\, N \end{cases}$; b) $\begin{cases} F_x{}' = 64.3\ N \\ F_y{}' = 76.6\ N \end{cases}$;

c) $\begin{cases} F_x{}' = 108.5\, N \\ F_y = \ 88.5\, N \end{cases}$.

2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORŢE [10]

2.1 Consideraţii teoretice

A reduce un sistem de forţe într-un punct, înseamnă a înlocui în acel punct sistemul de forţe cu un sistem mecanic echivalent de doi vectori: unul numit vector (forţă) rezultant(ă), notat cu $\overline{R}$, celălalt numit moment rezultant notat cu $\overline{M}_O$.

Reducerea unui sistem de forţe presupune cunoscute noţiunile: *moment polar, moment axial, cuplu de forţe, operaţii elementare de echivalenţă*.

2.1.1 Momentul unei forţe în raport cu un punct (momentul polar)

Prin definiţie, momentul unei forţe în raport cu un punct O numit şi ***moment polar*** este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\overline{r}$ al punctului de aplicaţie A (care apartine rigidului (C)) al unei forţei în raport cu punctul O şi forţa $\overline{F}$ (fig. 2.1). Momentul polar se notează cu $\overline{M}_O$ şi are expresia:

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F} \tag{2.1}$$

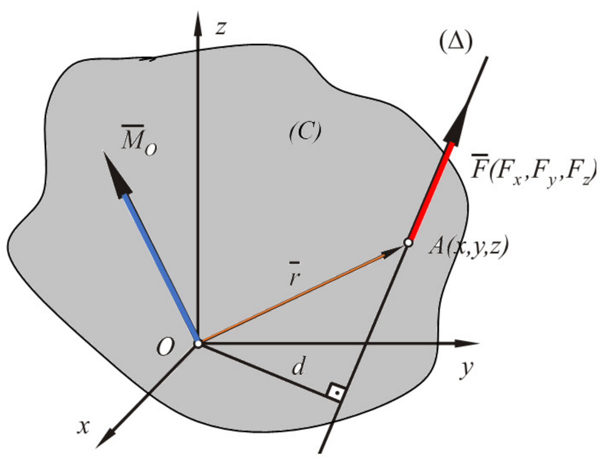


Fig. 2.1

[10] Ispas, V. și alții, 2010

Caracteristicile vectorului moment polar sunt:

- *punctul de aplicaţie*: polul O
- *direcţia*: este perpendiculară pe planul definit de vectorii $\overline{r}$ şi $\overline{F}$
- *sensul*: este dat de regula burghiului
- *modulul*: este egal cu produsul dintre modulul F al forţei şi braţul său d (distanţa de la polul O la suportul (Δ) al forţei), adică

$$M_O = Fd \tag{2.2}$$

Componentele M_x, M_y, M_z ale vectorului moment polar pe axele unui sistem cartezian de referinţă $Oxyz$ (fig. 2.1) sunt:

$$M_x = yF_z - zF_y, M_y = zF_x - xF_z, M_z = xF_y - yF_x. \tag{2.3}$$

Având în vedere (2.3), modulul momentului polar este:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{2.4}$$

iar direcţia vectorului moment polar se obţine din expresiile *cosinusurilor directoare*:

$$\cos(\widehat{\overline{M}_O, O_x}) = \frac{M_x}{M_O}, \; \cos(\widehat{\overline{M}_O, O_y}) = \frac{M_y}{M_O}, \; \cos(\widehat{\overline{M}_O, O_z}) = \frac{M_z}{M_O} \tag{2.5}$$

2.1.2 Momentul unei forţe în raport cu o axă (momentul axial)

Momentul unei forţe $\overline{F}$ (având ca punct de aplicaţie A şi care aparţine unui solid rigid (C)), în raport cu o axă (Δ) este numit şi *moment axial* şi se defineşte ca proiecţia pe axa (Δ) a momentului polar al forţei determinat în raport cu un punct oarecare O de pe axă (fig. 2.2). Notând cu $\overline{u}$ versorul axei (Δ) se poate scrie:

$$M_\Delta = \overline{M}_O \cdot \overline{u} = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}. \tag{2.6}$$

Descompunând forţa $\overline{F}$ în două componente: $\overline{F_1}$ paralelă cu axa (Δ), $\overline{F_2}$ după urma lăsată în planul (π), dus perpendicular în O pe axa (Δ), de către planul (P) definit de forţele concurente în A, $\overline{F}$ şi $\overline{F_1}$, se poate da o nouă exprimare momentului axial şi anume:

$$M_\Delta = (\overline{r_1} \times \overline{F_2}) \cdot \overline{u}\ . \tag{2.7}$$

În conformitate cu (2.7), momentul axial al unei forţe este egal cu valoarea algebrică a momentului polar al proiecţiei $\overline{F_2}$ a forţei $\overline{F}$ în planul (π) normal pe axa (Δ), determinat în raport cu punctul în care axa (Δ) intersectează acest plan.

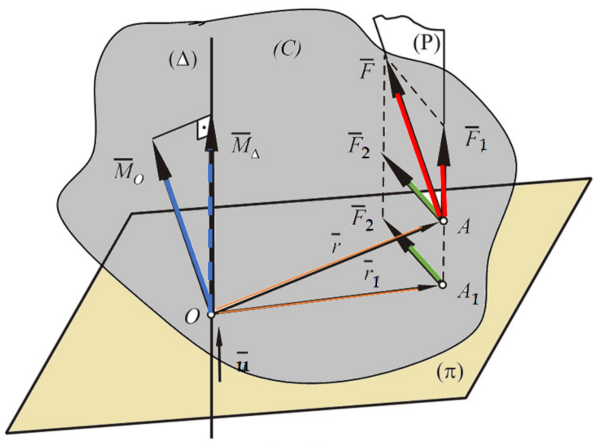


Fig. 2.2

Momentul axial se anulează dacă forţa $\overline{F}$ şi axa (Δ) sunt coplanare (în acelaşi plan), de unde rezultă următoarea *proprietate*: dacă o forţă este paralelă cu o axă sau o intersectează, atunci momentul forţei respective în raport cu acea axa este nul.

2.1.3 Cuplu de forţe

Un cuplu de forţe este un ansamblu de două forţe egale în modulul *F* şi *-F*, de sensuri contrare şi plasate pe suporturi paralele (fig. 2.3), având ca puncte de aplicație *A* şi *B* care aparţin rigidului (*C*).

Un cuplu de forţe este echivalent cu un moment al cuplului, dirijat după o direcţie normală pe planul (π) al cuplului şi având sensul determinat de sensul de rotire imprimat de cuplul de forţe. Momentul cuplului este invariant la alegerea polului *O*, astfel:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_A = \overline{M}_B = \overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}. \tag{2.8}$$

Modulul ***momentului cuplului de forţe*** se determină ca produsul dintre modulul *F* al unei forţe a cuplului şi braţul *d* al acestuia, adică:

$$M = Fd \tag{2.9}$$

Braţul se măsoară pe perpendiculara comună dusă pe suporturile celor două forţe.

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

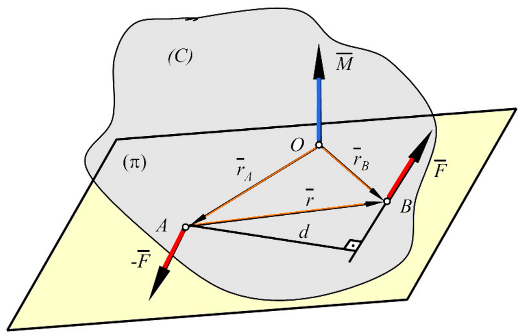


Fig. 2.3

2.1.4 Operaţii elementare de echivalenţă

Două sisteme de forţe sunt echivalente dacă aplicate succesiv aceluiaşi solid rigid produc acelaşi efect mecanic.

Operaţiile prin care un sistem de forţe se transformă într-un sistem echivalent lui poartă numele de *operaţii elementare de echivalenţă*.

Se pot enumera ***patru operaţii elementare de echivalenţă***:

1° O forţă poate aluneca pe suportul său datorită caracterului de vector alunecător.

2° Adăugarea sau suprimarea perechii de forţe egale şi de sens contrar plasate pe acelaşi suport, în conformitate cu primul principiu al Staticii.

3° Înlocuirea unei forţe cu două forţe concurente şi coplanare cu ea, prin aplicarea principiului paralelogramului.

4° Înlocuirea unui sistem de forţe concurente într-un punct printr-o rezultantă a sistemului, aplicând succesiv regula triunghiului.

2.1.5 Reducerea sistemelor de forţe oarecare

Sistemul mecanic echivalent de doi vectori (un vector rezultant $\overline{R}$ şi un moment rezultant $\overline{M}_O$) cu care se înlocuieşte într-un punct un sistem de forţe oarecare, poartă numele de ***torsor de reducere*** şi se notează cu $\tau_O(\overline{R}, \overline{M}_O)$.

Dacă asupra unui solid rigid (*C*) (fig. 2.4) acţionează un sistem de forţe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_i, ..., \overline{F}_n$ în punctele $A_1, A_2, ..., A_1, ..., A_n$ determinate de vectorii de poziţie $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_i, ..., \overline{r}_n$, elementele torsorului de reducere a sistemului de forţe în raport cu un pol arbitrar *O* se determină cu relaţiile vectoriale:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i, \ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i \tag{2.10}$$

şi poartă numele de: $\overline{R}$ - *vector rezultant*, $\overline{M}_O$ - *moment rezultant*.

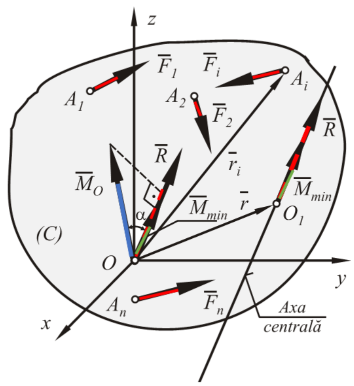


Fig. 2.4

Cunoscând forţele sistemului prin proiecţiile carteziene F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, $(i = 1 \div n)$, pe axele unui sistem cartezian *Oxyz* cu originea în punctul de reducere *O*, precum şi coordonatele $x_i, y_i, z_i, (i = 1 \div n)$ ale punctelor A_i de aplicaţie ale forţelor, se pot determina elementele torsorului de reducere prin componentele lor carteziene astfel:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \\ M_y &= \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Modulul vectorului rezultant se determină cu relaţia:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{2.13}$$

Direcţia vectorului rezultant se determină prin unghiurile formate cu axele sistemului cartezian *Oxyz*, care se pot deduce din expresiile cosinusurilor directoare:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\left(\overline{R},\hat{O}x\right) = \frac{R_x}{R}, \\ \cos\beta &= \cos\left(\overline{R},\hat{O}y\right) = \frac{R_y}{R}, \\ \cos\gamma &= \cos\left(\overline{R},\hat{O}z\right) = \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Modulul momentului rezultant se determină cu relaţia:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{2.15}$$

Direcţia momentului rezultant este definită de unghiurile formate cu axele sistemului cartezian *Oxyz*, deduse din expresiile cosinusurilor directoare:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\left(\overline{M}_O\hat{,}Ox\right) = \frac{M_x}{M_O}, \\ \cos\beta_1 &= \cos\left(\overline{M}_O\hat{,}Oy\right) = \frac{M_y}{M_O}, \\ \cos\gamma_1 &= \cos\left(\overline{M}_O\hat{,}Oz\right) = \frac{M_z}{M_O}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Momentul minim $\overline{M}_{\min}$ reprezintă proiecţia vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$ pe direcţia vectorului rezultant $\overline{R}$ şi se exprimă prin una din relaţiile:

$$\begin{aligned} M_{\min} &= \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R} = \frac{R_xM_x + R_yM_y + R_zM_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}, \\ \overline{M}_{\min} &= \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R^2}\overline{R} = \frac{R_xM_x + R_yM_y + R_zM_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}(R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Locul geometric al punctelor de reducere în care se obține un torsor minim este o dreapta paralelă cu vectorul şi numită **axă centrală**.

Reducerea sistemului de forţe în raport cu punctele axei centrale poartă numele de *reducere canonică*. În acest caz, torsorul de reducere devine *torsor minim* $\tau_{\min}(\overline{R},\overline{M}_{\min})$, ale cărui elemente sunt vectorul rezultant $\overline{R}$ şi momentul minim $\overline{M}_{\min}$.

Sau, locul geometric al punctelor de reducere în raport cu care se obţine un torsor de reducere minim, $\tau_{\min}\left(\overline{R},\overline{M}_{\min}\right)$, este o dreaptă paralelă cu vectorul rezultat $\overline{R}$, numită ***axă centrală*** a sistemului de forţe.

Ecuaţiile vectoriale şi scalare ale axei centrale sunt:

$$\overline{M}_O - \overline{r} \times \overline{R} = \lambda \overline{R} \tag{2.18}$$

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \tag{2.19}$$

$$\overline{r} - \frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = \lambda \overline{R} \tag{2.20}$$

$$\frac{x - \dfrac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2}}{R_x} = \frac{y - \dfrac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2}}{R_y} = \frac{z - \dfrac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}}{R_z}. \tag{2.21}$$

La *reducerea unui sistem de forţe oarecare* pot apărea următoarele ***cazuri de reducere***:

1° $\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O = 0,$ caz în care sistemul de forţe se reduce în raport cu polul O la o rezultantă $\overline{R}$ (de exemplu: sistem de forţe concurente).

2° $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0,$ caz în care sistemul de forţe se reduce la un cuplu de forţe $\overline{F}$ şi $-\overline{F}$, aflat într-un plan normal pe vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$.

3° $\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O \neq 0$

a) $\overline{R} \perp \overline{M}_O, \overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0 \Leftrightarrow R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$, caz în care sistemul de forţe se reduce în raport cu un pol arbitrar O la un torsor de reducere ale cărui elemente sunt perpendiculare (fig. 2.5). Efectuând reducerea în raport cu punctele axei centrale se obţine o *rezultantă unică* a sistemului, deoarece momentul minim este nul, $M_{\min} = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R} = 0$. În acest caz, se poate aplica *teorema lui Varignon*: momentul rezultant al unui sistem de forţe este egal cu momentul rezultantei sistemului de forţe, cele două momente (fig. 2.5) fiind determinate în raport cu acelaşi pol O adică:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{r} \times \overline{R}. \tag{2.22}$$

Sub formă scalară teorema lui Varignon se poate scrie astfel:

$M_O = R\,d$, unde d fiind distanța de la O la axa centrală (2.23)

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

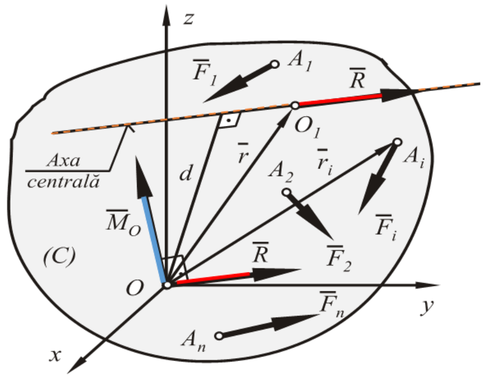


Fig. 2.5

relaţie în care d reprezintă braţul rezultantei unice a sistemului de forţe în raport cu polul O, măsurat ca distanţa de la O la suportul rezultantei.

b) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$, caz în care sistemul de forţe se reduce în raport cu polul O la un ***torsor de reducere*** ale cărui elemente nu sunt perpendiculare între ele. Efectuând reducerea în raport cu punctele axei centrale, se obţine un torsor minim format din vectori $\overline{R}$ *şi* $\overline{M}_{\min}$ coliniari (fig. 2.4).

4° $\overline{R} = 0, \overline{M}_O = 0,$ caz în care sistemul de forţe se află în echilibru.

2.1.6 Reducerea sistemelor particulare de forţe

a) Sistem de forţe paralele. Centrul forţelor paralele

În cazul unui sistem de forţe paralele, notând cu $\overline{u}$ versorul direcţiei comune a forţelor, se poate scrie:

$$\overline{F}_i = F_i \overline{u}, \ (i = 1 \div n). \tag{2.24}$$

Având în vedere (2.10) şi figura 2.6, elementele torsorului de reducere în raport cu un pol arbitrar O au expresiile:

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = (\sum_{i=1}^{n} F_i)\overline{u} \\ \overline{M}_O &= \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (F_i \overline{r}_i) \times \overline{u}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

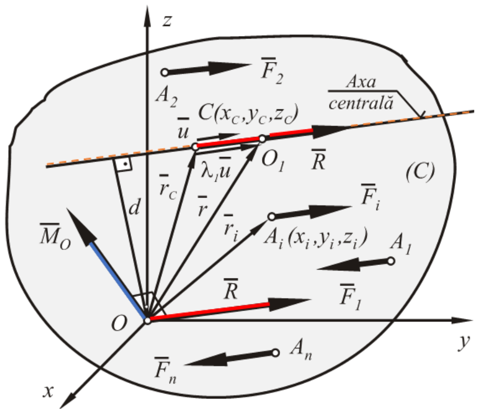


Fig. 2.6

Ecuaţia vectorială a axei centrale, având în vedere figura 2.6, este:

$$\overline{r} = \overline{r}_c + \lambda_1 \overline{u}, \quad \overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \quad \lambda_1 = -\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{2.26}$$

Vectorul de poziţie al *centrului forţelor paralele* are expresia:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{2.27}$$

Coordonatele centrului forţelor paralele se obţin proiectând (2.27) pe axele sistemului cartezian de referinţă *Oxyz*. Astfel:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{2.28}$$

În conformitate cu (2.25), $\overline{R} \perp \overline{M}_O$, astfel că, $M_{\min} = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R} = 0$. În consecinţă, sistemul de forţe paralele se reduce în raport cu punctele axei centrale la o *rezultantă unică*. Se poate aplica astfel, teorema lui Varignon $\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{R}$, din care se obţine distanţa *d* de la polul *O,* la axa centrală:

$$d = \frac{M_O}{R} \tag{2.29}$$

b) Sistem de forţe concurente

Rezultanta $\overline{R}$ a unui sistem de forţe concurente $\overline{F_i}, (i = 1 \div n)$, (fig. 2.7) se poate determina grafic prin aplicarea succesivă a regulii triunghiului, construind astfel poligonul forţelor sau prin calcul analitic cu relaţiile:

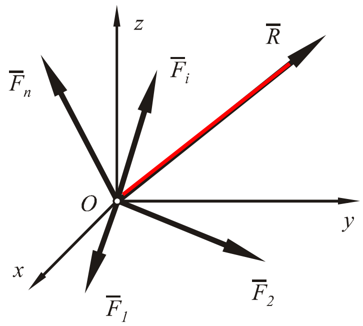


Fig. 2.7

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$$
$$R_x = \sum^{n} F_{ix},\ R_y = \sum^{n} F_{iy},\ R_z = \sum^{n} F_{iz}. \tag{2.30}$$

Modulul şi direcţia rezultantei sistemului de forţe concurente se determină astfel:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$\cos(\widehat{\overline{R}, Ox}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, Oy}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, Oz}) = \frac{R_z}{R}. \tag{2.31}$$

c) Sistem de forţe coplanare

Fie sistemul de forţe coplanare $\overline{F_i}, (i = 1 \div n)$, situate în planul *Oxy* (fig. 2.8). În acest caz, elementele torsorului de reducere în raport cu un pol *O* arbitrar ales în planul forţelor, au componentele pe axele sistemului cartezian de referinţă *Oxyz*:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$
$$M_O = M_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \tag{2.32}$$

Modulele şi direcţiile vectorilor $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ sunt determinate astfel:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, Ox}) = \frac{R_x}{R},$$
$$M_O = M_z. \tag{2.33}$$

Momentul rezultant $\overline{M}_O$ este orientat după axa *Oz*.

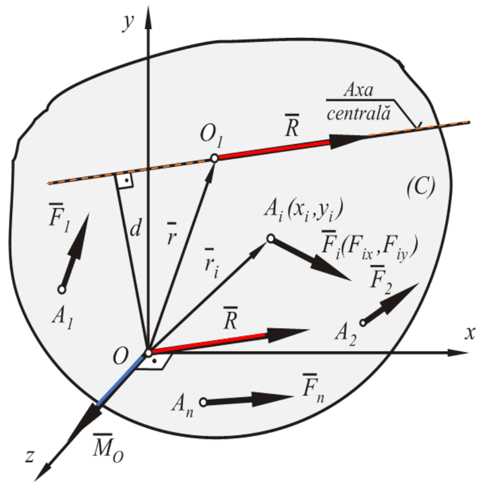


Fig. 2.8

Având în vedere (2.32), $\overline{R} \perp \overline{M}_O$, astfel că $M_{\min} = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R} = 0$. Sistemul de forţe coplanare se reduce la o *rezultantă unică* în raport cu punctele axei centrale. Se poate determina astfel, din teorema lui Varignon, distanţa *d* de la polul *O* la axa centrală cu relaţia:

$$d = \frac{M_z}{R}. \tag{2.34}$$

În cazul sistemului de forţe coplanare, ecuaţiile axei centrale sunt:

$$M_z - xR_y + yR_x = 0, \;\; z = 0. \tag{2.35}$$

2.2 Probleme rezolvate [10]

2.2.1. O forţă de mărime F = 100 N este orientată ascendent de-a lungul unei drepte dată prin ecuaţia $3x + 4y - 10 = 0$ (fig. 2.9). Să se determine momentul forţei în raport cu originea O.

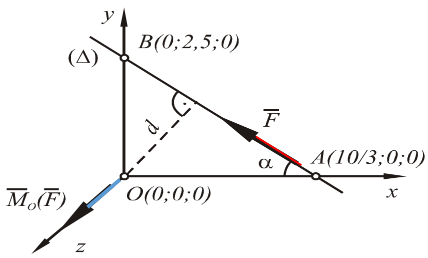


Fig. 2.9

Soluţie:

Având în vedere ecuaţia

$$3x + 4y - 10 = 0$$

se obţin coordonatele punctelor A şi B:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2{,}5 \\ y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Modulul momentului polar este:

$$M_0 = F \cdot d. \tag{1}$$

Având în vedere relaţia

$$\sin\alpha = \frac{d}{OA} = \frac{OB}{AB},$$

se obţine distanţa d de la punctul O la dreapta (Δ)

$$d = \frac{OA \cdot OB}{AB} = 2\,\text{m}. \tag{2}$$

Astfel, momentul polar are valoarea:

$$M_O = 200 \text{ N m} \tag{3}$$

sau:

$$M_0 = \left|\overline{OA}\right| F \sin\alpha = \left|\overline{OB}\right| F \cos\alpha = F \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}. \tag{4}$$

2.2.2. La strunjirea longitudinală a unei piese forţa $\overline{F}$ care solicită cuţitul se presupune concentrată în punctul A de pe tăişul cuţitului. Cunoscând componentele $F_x = 300\,N$, $F_y = 150\,N$, $F_z = 800\,N$ şi cotele de pe schiţă, să se determine momentul forţei aşchietoare în raport cu centrul O al secţiunii de încastrare a cuţitului în suportul acestuia (fig. 2.10).

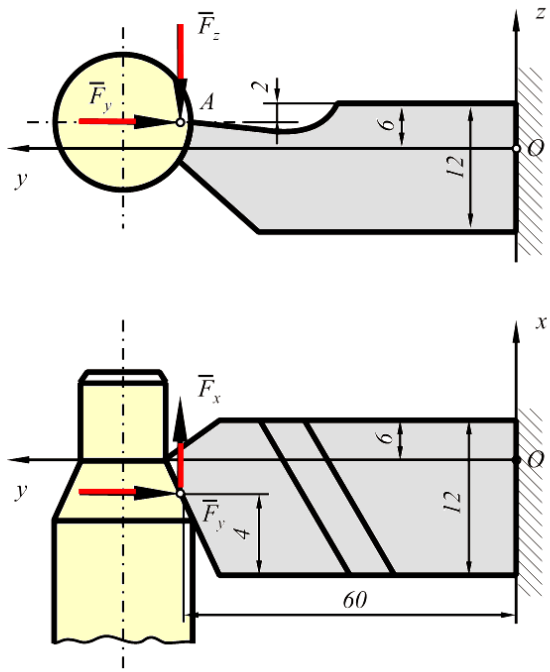


Fig. 2.10

Soluţie:

În conformitate cu (2.3), expresiile analitice ale momentului polar sunt:

$$M_x = yF_z - zF_y;\ M_x = -0{,}6 \cdot 800 + 0{,}04 \cdot 150 = 474\,N \cdot m$$

$$M_y = zF_x - xF_z;\ My = 0{,}04 \cdot 300 - 0{,}02 \cdot 800 = -4\,N \cdot m \qquad (1)$$

$$M_z = xF_y - yF_x;\ M_z = 0{,}02 \cdot 150 - 0{,}6 \cdot 300 = -177\,N \cdot m.$$

Modulul momentului polar se exprimă astfel:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{474^2 + 4^2 + 177^2} = 507{,}5\,N \cdot m. \qquad (2)$$

Direcţia momentului polar se determină prin:

$$\cos(\overline{M}_O \hat{,} Ox) = \frac{M_x}{M_O} = -\frac{474}{507{,}5} = -0{,}93399, \qquad (3)$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

din care rezultă:

$$\overline{M}_O \hat{,} Ox = 159°3'58'';$$

$$\cos(\overline{M}_O \hat{,} Oy) = \frac{M_y}{M_O} = -\frac{4}{507{,}5} = -0{,}00788; \tag{4}$$

$$\overline{M}_O \hat{,} Oy = 90°27'6'';$$

$$\cos\left(\overline{M}_O \hat{,} Oz\right) = \frac{M_z}{M_O} = -\frac{177}{507{,}5} = -0{,}34876, \tag{5}$$

$$\overline{M}_O \hat{,} Oy = 110°27'43''. \tag{6}$$

2.2.3. Se dă un paralelipiped dreptunghic cu laturile 40, 120, 60 cm. De-a lungul dreptei *AH* se află forţa $\overline{F}$, de modulul *m*, *H* fiind mijlocul lui *CD*. Să se determine momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu punctul *P*, situat în centrul dreptunghiului *DFEG* (fig. 2.11).

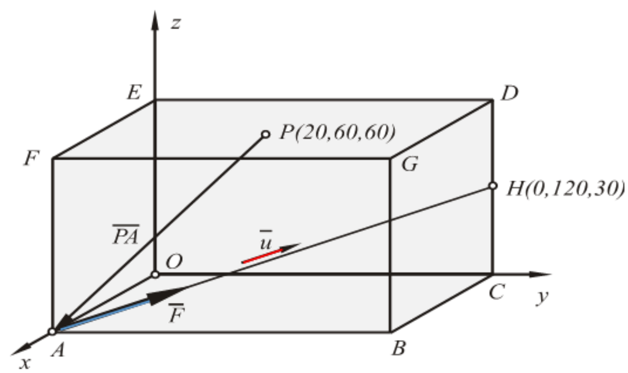


Fig. 2.11

Soluţie:

Momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu *P* are expresia:

$$\overline{M}_P = \overline{r} \times F\,, \tag{1}$$

în care: $\overline{r} = \overline{PA}$, $\overline{F} = m\overline{u}$,

$\overline{u} = \dfrac{\overline{AH}}{\left|\overline{AH}\right|}$ fiind versorul direcţiei $\overline{AH}$.

Se determină vectorii:

$$\overline{PA} = (x_A - x_P)\,\bar{i} + (y_A - y_P)\,\bar{j} + (z_A - z_P)\,\bar{k} = 20\,\bar{i} - 60\,\bar{j} - 60\,\bar{k} \qquad (2)$$

$$\bar{u} = \frac{\overline{AH}}{\left|\overline{AH}\right|} = \frac{(0-40)\bar{i} + (120-0)\,\bar{j} + (30-0)\bar{k}}{\sqrt{40^2 + 120^2 + 30^2}} = \frac{-4\bar{i} + 12\bar{j} + 3\bar{k}}{13}. \qquad (3)$$

Având în vedere (1), (2) şi (3), se poate scrie succesiv:

$$\overline{M}_P = \frac{m}{13}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 20 & -60 & -60 \\ -4 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \frac{180\,m}{13}(3\bar{i} + \bar{j}). \qquad (4)$$

Modulul momentul polar $\overline{M}_P$ are expresia:

$$M_P = \sqrt{M_X^2 + M_y^2 + M_z^2} = \frac{180\sqrt{10}}{13}m = 43{,}78\,m. \qquad (5)$$

Direcţia vectorului moment polar $\overline{M}_P$ se determină prin cosinusurile directoare:

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_P} = 0{,}3\sqrt{10} = 0{,}948$$

$$\cos\beta = \frac{M_y}{M_P} = 0 \qquad (6)$$

$$\cos\gamma = \frac{M_z}{M_P} = 0{,}1\sqrt{10} = 0{,}316.$$

2.2.4. Pentru a deschide o uşă de lăţime *a* se acţionează asupra mânerului *C* cu o forţă $\overline{F}$ care face cu planul orizontal unghiul β. Planul vertical al forţei $\overline{F}$ face cu planul uşii unghiul α (fig. 2.12).

Să se determine momentul forţei care produce deschiderea uşii.

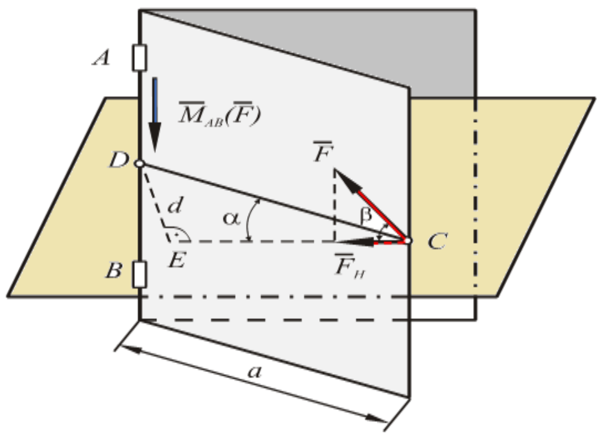


Fig. 2.12

Soluţie:

Având în vedere (2.2), se poate scrie:

$$M_{AB} = M_D = F_H \cdot d\ , \tag{1}$$

în care:

$$F_H = F\cos\beta \tag{2}$$

$$d = a\sin\alpha\ . \tag{3}$$

Astfel,

$$M_{AB} = Fa\cos\beta\sin\alpha. \tag{4}$$

2.2.5. Înşurubarea unui bulon se face cu ajutorul unei chei de lungime 24 cm, la capătul căreia acţionează forţa $F = 60N$, înclinată faţă de planul orizontal cu unghiul $\beta = 45°$. Proiecţia orizontală a forţei $\overline{F}$ formează cu axa de simetrie a cheii unghiul $\alpha = 30°$ (fig. 2.13).

Să se determine momentul care produce răsucirea bulonului.

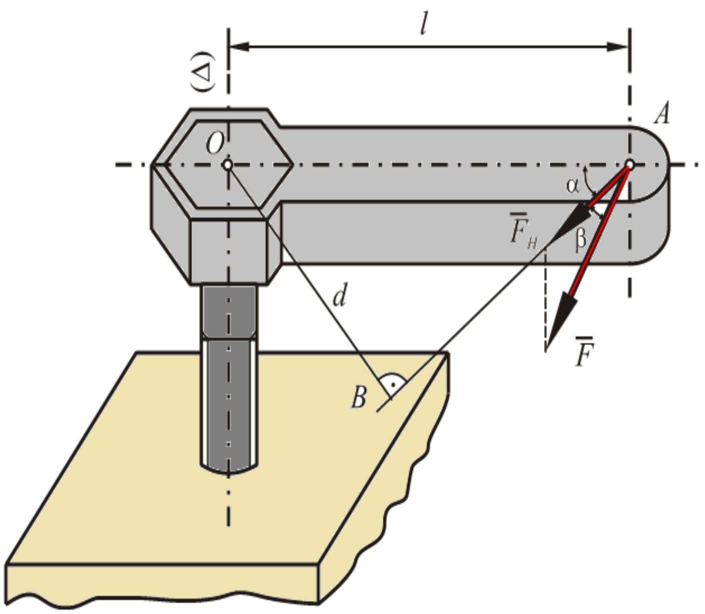


Fig. 2.13

Soluţie:

Având în vedere figura 2.13, se poate scrie:

$$M_O = F_H \cdot |OB| = F_H \cdot d, \tag{1}$$

în care

$$F_H = F\cos\beta;\ d = l\sin\alpha. \tag{2}$$

Astfel,

$$M_O = F \cdot l \cdot \sin\alpha\cos\beta\,. \tag{3}$$

Având în vedere valorile numerice din enunţ, se obţine:

$$M_0 = 14{,}4\, N \cdot m\,. \tag{4}$$

2.2.6. Asupra originii O a sistemului de referinţă $Oxyz$ acţionează un sistem de două forţe $\overline{F}_1 = 3\bar{i}$ şi $\overline{F}_2 = -7\bar{i}$. Să se determine momentele polare ale celor două forţe în raport cu punctul A (0, 0, 1) (fig. 2.14).

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

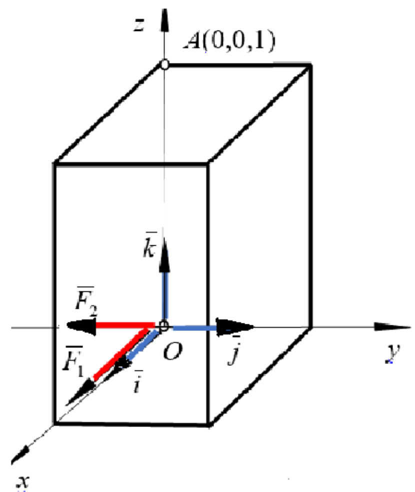


Fig. 2.14

Soluţie:

Momentul polar al unei forţe în raport cu un punct este conform cu (2.1), dat de produsul vectorial:

$$\overline{M}_0 = \bar{r} \times \overline{F} \tag{1}$$

iar modulul acestuia, conform cu (2.2), este:

$$M_0 = F \cdot d\,, \tag{2}$$

unde:

- F este modulul forţei,
- d este braţul forţei, adică lungimea perpendicularei coborâtă din polul O pe suportul forţei $\overline{F}$.

Astfel, momentele polare ale forţelor $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ se pot determina, conform cu (1) şi (2), cu relaţiile:

$$\overline{M}_1 = \overline{AO} \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\bar{j}\,. \tag{3}$$

$$\overline{M}_2 = \overline{AO} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -7\bar{i}\,. \tag{4}$$

$$M_1 = F_1 \cdot AO = 3 \cdot 1 = 3\,. \tag{5}$$

$$M_2 = F_2 \cdot AO = 7 \cdot 1 = 7\,. \tag{6}$$

Se observă că modulele momentelor polare ale forţelor date sunt aceleaşi indiferent de metoda de calcul aleasă.

2.2.7. Sistemul de forţe, de module: $P_1 = 4,\ P_2 = 6,\ P_3 = 3,\ P_4 = 2,$ $P_5 = 6,\ P_6 = 8$, este dirijat ca în figură, după muchiile unui paralelipiped dreptunghic la care se cunosc $OA = 10,\ OB = 4,\ OC = 5$ (fig. 2.15). Să se facă reducerea canonică a sistemului. Dimensiunile forţelor sunt date în *N*, iar ale muchiilor în *cm*.

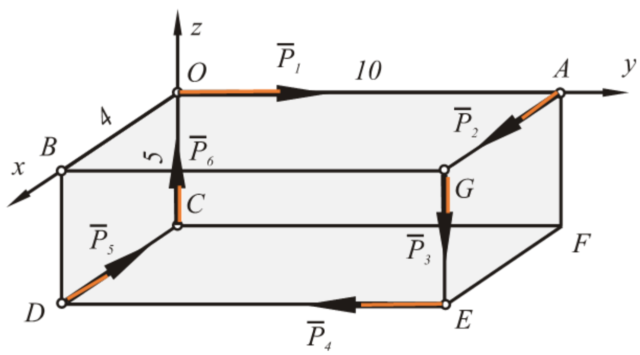


Fig. 2.15

Soluţie:

Reducerea canonică este reducerea făcută în raport cu un punct de pe axa centrală, torsorul de reducere fiind torsorul minim format din $\overline{R}$ şi $\overline{M}_{\min} = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R}\overline{u}$ ($\overline{u}$ - versorul axei centrale).

Pentru determinarea componentelor M_x, M_y, M_z ale momentului rezultant se aplică următoarea proprietate: dacă o forţă este paralelă cu o axă sau o intersectează, nu dă moment în raport cu axa respectivă. Se observă că pentru determinarea axei centrale trebuie determinate elementele $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ ale torsorului de reducere. Astfel,

- Vectorul rezultant:

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

$$R_x = \sum_{i=1}^{6} P_{ix} = -P_5 + P_2 = -6 + 6 = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{6} P_{iy} = -P_4 + P_1 = -2 + 4 = 2\,\text{N} \qquad (1)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{6} P_{iz} = -P_3 + P_6 = -3 + 8 = 5\,\text{N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5{,}38\,\text{Ncm}\,. \qquad (2)$$

- *Momentul rezultant*:

Proiecţiile lui $\overline{M}_O$ pe axele de coordonate sunt egale cu suma momentelor forţelor determinate în raport cu axele de coordonate, astfel:

$$M_x = \sum_{i=1}^{6} M_x(P_i) = -P_3 \cdot 10 - P_4 \cdot 5 = -40\,\text{Ncm}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{6} M_y(P_i) = P_5 \cdot 5 + P_3 \cdot 4 = 42\ \text{Ncm} \qquad (3)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{6} M_z(P_i) = -P_2 \cdot 10 - P_4 \cdot 4 = -68\ \text{Ncm}$$

$$\overline{M}_O = -40\bar{i} + 42\bar{j} - 68\bar{k}. \qquad (5)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 89{,}37\ \text{Ncm}\,. \qquad (4)$$

- *Ecuaţiile axei centrale*:

Având în vedere (2.20), se determină vectorii:

$$\overline{R} \times \overline{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ -40 & 42 & -68 \end{vmatrix} = -346\,\bar{i} - 200\,\bar{j} + 80\,\bar{k} \qquad (6)$$

$$\frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = -11{,}93\,\bar{i} - 6{,}9\,\bar{j} + 2{,}76\,\bar{k}, \qquad (7)$$

care introduşi în ecuaţiile axei centrale, conduc la:

$$\frac{x + 11{,}93}{0} = \frac{y + 6{,}9}{2} = \frac{z - 2{,}76}{5},$$

sau

$$\begin{aligned} &x = -11{,}93 \\ &5y - 2z = -40. \end{aligned} \tag{8}$$

- Torsorul minim $\tau_{\min}(\overline{R}, \overline{M}_{\min})$

$$\overline{R} = 2\overline{j} + 5\overline{k} \tag{9}$$

$$M_{\min} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{R} = \frac{-40 \cdot 0 + 42 \cdot 2 - 68 \cdot 5}{\sqrt{29}} = -47{,}54 \text{ Ncm}. \tag{10}$$

$\overline{M}_{\min} = M_{\min} \dfrac{\overline{R}}{R}$, pentru că momentul minim este coliniar cu vectorul rezultant, $\overline{u} = \dfrac{\overline{R}}{R}$ fiind versorul lui $\overline{R}$.

Se obţine astfel:

$$\overline{M}_{\min} = -47{,}54 \frac{2\overline{j} + 5\overline{k}}{\sqrt{29}} = -8{,}82 \cdot (2\overline{j} + 5\overline{k}). \tag{11}$$

Altă metodă pentru determinarea momentului rezultant

În conformitate cu (2.10), se poate scrie

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{6} \overline{M}_O(\overline{P}_i) = \sum_{i=1}^{6} \overline{r}_i \times \overline{P}_i = \sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ P_{ix} & P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

în care x_i, y_i, z_i reprezintă coordonatele unui punct arbitrar, de pe suportul forţei $\overline{P}_i$. Se determină succesiv:

$$\overline{M}_O(\overline{P}_1) = 0$$

$$\overline{M}_O(\overline{P}_2) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -60\overline{k}$$

$$\overline{M}_O(\overline{P}_3) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -30\overline{i} + 12\overline{j} \tag{13}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

$$\overline{M}_O(\overline{P}_4)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 0 & -5\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=-10\bar{i}-8\bar{k}$$

$$\overline{M}_O(\overline{P}_5)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & -5\\ -6 & 0 & 0\end{vmatrix}=30\bar{j}$$

$$\overline{M}_O(\overline{P}_6)=0.$$

Prin însumare, se obţine:

$$\overline{M}_O=-40\bar{i}+42\bar{j}-68\bar{k}\ . \tag{14}$$

2.2.8. Trei forţe de module egale cu P sunt paralele cu axele unui sistem cartezian triortogonal şi se află în planele de coordonate la distanţele a, b, c, pe axe (fig. 2.16). Ce relaţie trebuie să existe între a, b şi c pentru ca sistemul de forţe să fie echivalent cu o rezultantă unică? Să se determine, în acest caz, mărimea, direcţia şi suportul acestei forţe.

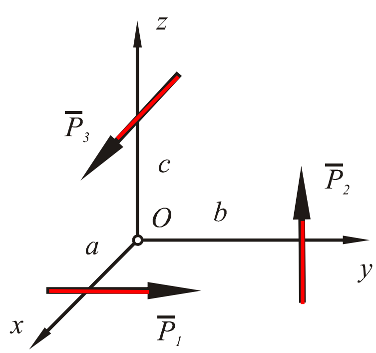


Fig. 2.16

Soluţie:

Se efectuează reducerea sistemului de forţe în raport cu polul O. Elementele torsorului de reducere sunt:

- Vectorul rezultant, având în vedere (2.11) şi (2.13), este:

$$R_x=P_3=P;\quad R_y=P_1=P;\quad R_z=P_2=P;\quad \overline{R}=P\left(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}\right)$$

$$R=P\sqrt{3}\ . \tag{1}$$

- Momentul rezultant, conform cu (2.12), este:

$$M_x = bP_2 = bP;\ M_y = cP_3 = cP;\ M_z = aP_1 = aP$$

$$\overline{M}_O = P\left(b\bar{i} + c\bar{j} + a\bar{k}\right). \tag{2}$$

Pentru ca sistemul de forţe să fie echivalent cu o rezultantă unică trebuie ca $\overline{M}_{\min} = 0$:

$$M_{\min} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{R} = \frac{P^2\left(b + c + a\right)}{P\sqrt{3}} = 0, \tag{3}$$

adică:

$$a + b + c = 0. \tag{4}$$

Ecuaţia axei centrale, în conformitate cu (2.20), are forma:

$$\bar{r} - \frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = \lambda\overline{R}, \tag{5}$$

în care:

$$\overline{R} \times \overline{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & P & P \\ Pb & Pc & Pa \end{vmatrix} = P^2\left[\left(a - c\right)\bar{i} + \left(b - a\right)\bar{j} + \left(c - b\right)\bar{k}\right] \tag{6}$$

$$\frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = \frac{\left[\left(a - c\right)\bar{i} + \left(b - a\right)\bar{j} + \left(c - b\right)\bar{k}\right]}{3}. \tag{7}$$

Scrisă scalar, ecuaţia vectorială (5), având în vedere (1) şi (7), devine:

$$x - \frac{a - c}{3} = y - \frac{b - a}{3} = z - \frac{c - b}{3}. \tag{8}$$

În concluzie, vectorul $\overline{R}$ are ca suport dreapta de ecuaţii (8) care trece prin punctul de coordonate:

$$\left[x = \frac{a - c}{3};\ y = \frac{b - a}{3};\ z = \frac{c - b}{3}\right].$$

Dacă axa centrală ar trece prin originea *O* a sistemului de axe, atunci $x = y = z = 0$. În acest caz, între distanţele *a*, *b* şi *c* există relaţia:

$$a = b = c. \tag{9}$$

2.2.9. Să se scrie momentul vectorului forţă $\overline{F}$ (3,4,-2) aplicat în punctul *A*(2,0,1) faţă de punctul *P*(-1,2,0), spaţiul fiind raportat la un sistem de referinţă triortogonal *Oxyz*. Să se scrie momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu axa orientată de la punctul *P* spre punctul P_1(5,3,4) (fig. 2.17). Dimensiunile forţei $\overline{F}$ sunt date în *N*, iar coordonatele punctelor sunt date în *cm*.

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

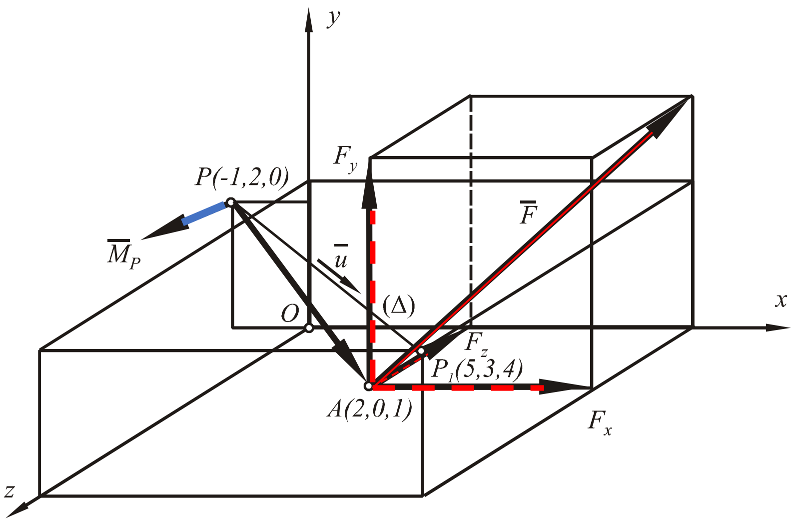


Fig. 2.17

Soluţie:

Având în vedere (2.1) şi figura 2.17, se poate scrie:

$$\overline{M}_P = \overline{PA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 9\,\overline{j} + 18\,\overline{k}. \tag{1}$$

Luând în considerare datele numerice, modulul vectorul $\overline{M}_P$ este

$$M_P = 20{,}2 \text{ Ncm}\ . \tag{2}$$

Momentul axial al forţei $\overline{F}$ în raport cu axa PP_1 este:

$$M_\Delta = \overline{M}_P \cdot \overline{u}\ , \tag{3}$$

unde $\overline{u}$ este versorul axei $\overline{PP_1}$ şi are expresia:

$$\overline{u} = \frac{\overline{PP}_1}{\left|\overline{PP}_1\right|} = \frac{(x_{p1} - x_p)\,\overline{i} + (y_{p1} - y_p)\,\overline{j} + (z_{p1} - z_p)\,\overline{k}}{\sqrt{(x_{p1} - x_p)^2 + (y_{p1} - y_p)^2 + (z_{p1} - z_p)^2}}$$

$$\overline{u} = \frac{6\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}}{\sqrt{53}}\ . \tag{4}$$

Astfel:

$$M_\Delta = \overline{M}_p \cdot \overline{u} = \frac{1}{\sqrt{53}}\left(0 \cdot 6 + 9 \cdot 1 + 18 \cdot 4\right) = 11{,}1 \ \text{N·cm} \tag{5}$$

2.2.10. Fiind dat un tetraedru $SABC$ în care muchiile $SA = SB = SC = a$ sunt perpendiculare două câte două, să se reducă sistemul de forţe: $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{AB}$, $\overline{BC}, \overline{CA}$ în raport cu S (fig. 2.18). Să se arate că S aparţine axei centrale a sistemului dat.

Soluţie:

Elementele torsorului de reducere în raport cu punctul S sunt:

- Vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k} \ . \tag{1}$$

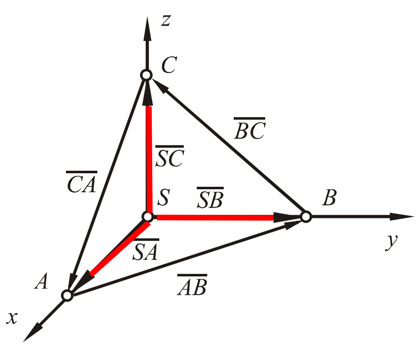


Fig. 2.18

Dar:

$$\begin{aligned} R_x &= SA + CA\frac{\sqrt{2}}{2} - AB\frac{\sqrt{2}}{2} = a \\ R_y &= SB + AB\frac{\sqrt{2}}{2} - BC\frac{\sqrt{2}}{2} = a \\ R_z &= SC + BC\frac{\sqrt{2}}{2} - CA\frac{\sqrt{2}}{2} = a, \end{aligned} \tag{2}$$

astfel că:

$$\overline{R} = a(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) \ . \tag{3}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_S = \overline{SA}\times\overline{AB} + \overline{SB}\times\overline{BC} + \overline{SC}\times\overline{CA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_S = a^2(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}). \tag{4}$$

Axa centrală a sistemului de forţe, în conformitate cu (2.20), are ecuaţia:

$$\bar{r} - \frac{\overline{R}\times\overline{M}_S}{R^2} = \lambda\overline{R} \tag{5}$$

Ţinând cont de (3) şi (4), se obţine:

$$\overline{R}\times\overline{M}_S = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

iar (5) devine:

$$\bar{r} = \lambda\overline{R} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z}. \tag{6}$$

adică

$$x = y = z. \tag{7}$$

Expresia (7) reprezintă o dreaptă ce trece prin originea *S* a sistemului *Sxyz*, astfel că punctul *S* se află pe axa centrală.

2.2.11. Pe muchiile şi diagonala unei prisme drepte cu baza un pătrat de latură $l = 6\ m$ şi înălţimea $h = 8\ m$, este dirijat ca în figură un sistem de forţe de module $P_1 = 2\,N,\ P_2 = 3\,N,\ P_3 = 10\,N,\ P_4 = 6\,N,\ P_5 = 5\,N$ (fig. 2.19).

Să se efectueze reducerea canonică a sistemului de forţe.

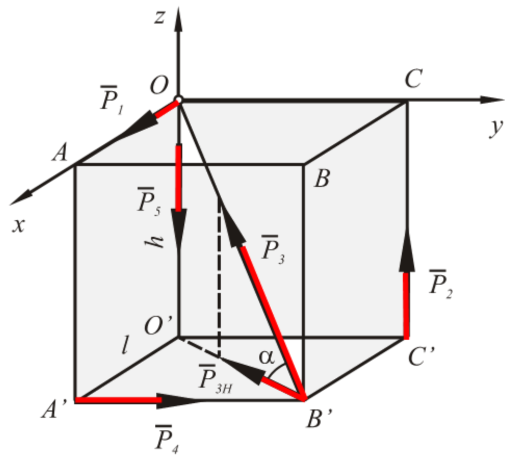


Fig. 2.19

Soluţie:

Din $\Delta O'B'C'$ şi $\Delta OO'B'$ se obţin:

$$O'B' = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ m$$

$$OB' = \sqrt{O'B'^2 + O'O^2} = \sqrt{2\cdot 36 + 64} = 11{,}69\,m.$$

Elementele torsorului de reducere în raport cu O sunt :

- Vectorul rezultant:

$$R = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}, \tag{1}$$

unde:

$$R_x = P_1 - P_{3H}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dar

$$P_{3H} = P_3\cos\alpha = 10\frac{6\sqrt{2}}{11{,}69} = 7{,}25\,N$$

astfel că:

$$R_x = 2 - 7{,}25\frac{\sqrt{2}}{2} = -3{,}145\,N\ ;$$

$$R_y = P_4 - P_{3H}\frac{\sqrt{2}}{2} = 6 - 7{,}25\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}855\,N\ ;$$

$$R_z = P_2 - P_5 + P_3 \sin\alpha = 3 - 5 + 10\frac{8}{11{,}69} = 4{,}861\,N\,.$$

Relația (1) devine astfel:

$$\overline{R} = 3{,}145\,\overline{i} + 0{,}855\,\overline{j} + 4{,}861\,\overline{k}. \qquad (2)$$

Modulul forţei rezultante este:

$$R = \sqrt{3{,}145^2 + 0{,}855^2 + 4{,}461^2} = 5{,}85N\,. \qquad (3)$$

- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_O = \overline{OC}\times\overline{P}_2 + \overline{OA}\times\overline{P}_4 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 6 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 66\overline{i} + 36\overline{k}. \qquad (4)$$

În conformitate cu (2.20), axa centrală a sistemului de forţe are ecuaţia:

$$\overline{r} - \frac{\overline{R}\times\overline{M}_O}{R^2} = \lambda\overline{R}, \qquad (5)$$

în care:

$$\frac{\overline{R}\times\overline{M}_O}{R^2} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3{,}145 & 0{,}855 & 4{,}861 \\ 66 & 0 & 36 \end{vmatrix}}{5{,}85^2} = 0{,}902\,\overline{i} - 12{,}7\,\overline{j} + 1{,}65\,\overline{k}\ . \qquad (6)$$

Ecuaţia vectorială (5) se poate scrie, ţinând cont de (2), (3) şi (6), sub formă scalară:

$$\frac{x - 0{,}902}{-3{,}145} = \frac{y + 12{,}7}{0{,}855} = \frac{z - 1{,}65}{4{,}861}. \qquad (7)$$

Punctul în care axa centrală intersectează planul xOy are coordonatele:

$$x = 1{,}977 \text{ m};\ \ y = -12{,}99 \text{ m}\,. \qquad (8)$$

Elementele torsorului minim sunt:

- rezultanta sistemului:

$$\overline{R} = -3{,}145\overline{i} + 0{,}855\overline{j} + 4{,}861\overline{k}; \qquad (9)$$

- momentul minim:

$$\overline{M}_{\min} = \frac{\overline{M}_O\cdot\overline{R}}{R^2}\cdot\overline{R} = \frac{-3{,}145\cdot 66 + 4{,}861\cdot 36}{5{,}85^2}(-3{,}145\,\overline{i} + 0{,}855\,\overline{j} + 4{,}861\,\overline{k}),$$

$$\overline{M}_{\min} = 3{,}05\,\bar{i} - 0{,}83\,\bar{j} - 4{,}73\,\bar{k}. \tag{10}$$

2.2.12. Se consideră un con circular drept având raza cercului de bază r şi unghiul la vârf 2α. Asupra conului acţionează forţele $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$ ca în figura 2.20. Să se efectueze reducerea canonică a acestui sistem de forţe. Modulele forţelor au valoarea F.

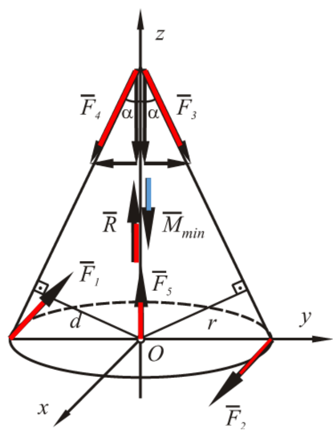


Fig. 2.20

Soluţie:

Întrucât prin reducere canonică se înţelege reducere în raport cu punctele axei centrale, se determină torsorul de reducere al sistemului de cinci forţe în raport cu polul O, apoi torsorul minim şi ecuaţiile axei centrale.

Elementele torsorului de reducere în raport cu punctul O sunt:

- vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}, \tag{1}$$

relaţie în care:

$$R_x = \sum_{i=1}^{5} F_{ix} = F_2 - F_1 = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = F_3 \sin\alpha - F_4 \sin\alpha = 0 \tag{2}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{5} F_{iz} = F_5 - F_3 \cos\alpha - F_4 \cos\alpha = F(1-2\cos\alpha)\,.$$

Modulul vectorului rezultant este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = F(1-2\cos\alpha)\,. \tag{3}$$

- momentul rezultant:

Pentru determinarea componentelor carteziene ale momentului rezultant $\overline{M}_O$ se aplică următoarea proprietate: dacă o forţă este paralelă cu o axă sau o intersectează, nu dă moment în raport cu acea axă. Astfel:

$$\overline{M}_O = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} \tag{4}$$

unde:

$$M_x = F_4 d - F_3 d = 0$$
$$M_y = 0 \tag{5}$$
$$M_z = -2rF_1 = -2rF$$

Modulul momentului rezultant este:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 2rF\,. \tag{6}$$

Axa centrală a sistemului de forţe, în conformitate cu (2.19), are ecuaţia:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}\,. \tag{7}$$

Înlocuind (2) şi (4) în (7), se obţine:

$$x = y = 0;\;\; z = z\,, \tag{8}$$

adică axa centrală este axa Oz, care constituie suportul elementelor torsorului minim, $\overline{R}$ şi $\overline{M}_{\min}$.

Momentul minim, conform cu (2.17), are valoarea:

$$M_{\min} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = -2rF. \tag{9}$$

Analizând rezultatele, se constată că sistemul iniţial de cinci forţe se reduce la un vector rezultant $\overline{R}$ şi la un moment rezultant minim, vectori plasaţi pe axa Oz având sensuri contrare datorită semnului „–“ al momentului minim.

Dacă $1-2\cos\alpha > 0$, vectorul rezultant este în sensul pozitiv al axei Oz.

Dacă $1-2\cos\alpha < 0$, vectorul rezultant este în sens invers sensului axei Oz.

2.2.13. Să se determine elementele torsorului de reducere în raport cu polul O, momentul minim şi ecuaţiile axei centrale pentru sistemul de şapte forţe $\overline{F}_i,\ i = 1 \div 7$, care acţionează asupra unui corp sferic de rază r, ştiind că modulele forţelor au aceeaşi valoare F (fig. 2.21).

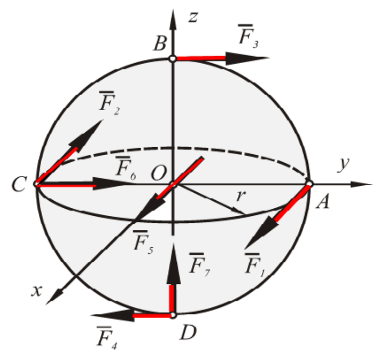


Fig. 2.21

Soluţie:

Elementele torsorului de reducere în raport cu punctul O sunt:

- vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k}\ , \tag{1}$$

în care:

$$R_x = \sum_{i=1}^{7} F_{ix} = F_5 = F$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{7} F_{iy} = F_6 = F \tag{2}$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{7} F_{iz} = F_7 = F\ .$$

Modulul vectorului rezultant are valoarea:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = F\sqrt{3}\ . \tag{3}$$

- momentul rezultant: la determinarea acestui moment se are în vedere că forţele $\overline{F}_1, \overline{F}_2;\ \overline{F}_3, \overline{F}_4$ formează cupluri, iar forţele $\overline{F}_5, \overline{F}_6, \overline{F}_7$, trecând prin O, nu dau moment în raport cu acest punct. Astfel:

$$M_x = -2rF_3 = -2rF;\quad M_y = 0;\quad M_z = -2rF_1 = -2rF\ . \tag{4}$$

Modulul momentului rezultant este:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 2\sqrt{2}rF\ . \tag{5}$$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

Momentul minim, în conformitate cu (2.17) are expresia:

$$M_{\min}=\frac{R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}}=\frac{F\cdot(-2rF)+F\cdot 0+F(-2rF)}{F\sqrt{3}}=-\frac{4r}{\sqrt{3}}F\,. \qquad (6)$$

Ecuaţiile axei centrale, conform cu (2.19), sunt:

$$\frac{M_x-yR_z+zR_y}{R_x}=\frac{M_y-zR_x+xR_z}{R_y}=\frac{M_z-xR_y+yR_x}{R_z}\,, \qquad (7)$$

care, având în vedere (2) şi (4), devin succesiv:

$$\frac{-2rF-F\cdot y+F\cdot z}{F}=\frac{0-F\cdot z+F\cdot x}{F}=\frac{-2rF-F\cdot x+F\cdot y}{F}$$

$$z-y-2r=x-z=y-x-2r\,. \qquad (8)$$

2.2.14. În vârfurile unei plăci orizontale pătrate *OABC* de latura a şi de greutate neglijabilă, acţionează forţele verticale $\overline{F}$, $2\overline{F}$, $3\overline{F}$, $4\overline{F}$.

Să se determine valoarea tensiunii $\overline{S}$ din firul de suspensie *DM* şi poziţia punctului *D* astfel ca placa suspendată în *D* să rămână în echilibru (fig. 2.22).

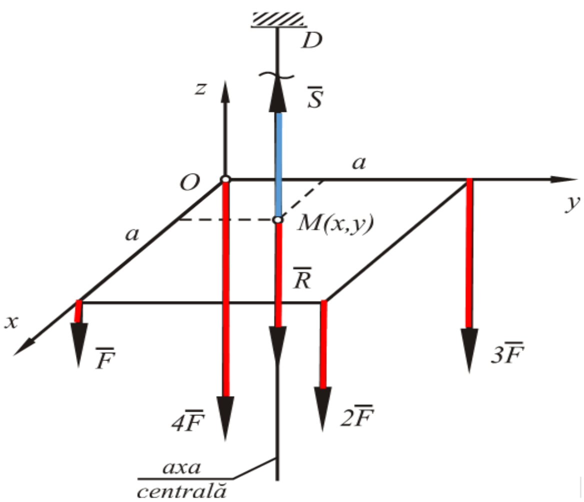


Fig. 2.22

Soluţie:

Sistemul de patru forţe care acţionează asupra plăcii *OABC* este un sistem de forţe paralele, care se reduce la o rezultantă unică în raport cu punctele axei centrale.

Cum placa trebuie să stea în echilibru suspendată prin firul *DM*, acesta se suprapune peste axa centrală a sistemului de forţe. Tensiunea $\overline{S}$ din fir trebuie să echilibreze pe axa centrală rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forţe, adică $\overline{S} = -\overline{R}$. În consecinţă, se reduce sistemul de patru forţe în raport cu *O* şi în raport cu punctele axei centrale, apoi se impune condiţia ca axa centrală să treacă prin punctul *D*(*x*, *y*).

Elementele torsorului de reducere în raport cu polul *O* sunt:

- Vectorul (forţa) rezultant(ă):

$$\overline{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \tag{1}$$

şi are componentele:

$$R_x = \sum_{i=1}^{4} F_{i\,x} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^{4} F_{i\,y} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^{4} F_{i\,z} = -10F\,. \tag{2}$$

Modulul vectorului rezultant are valoarea:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 10F\,. \tag{3}$$

- Momentul rezultant: Pentru determinarea momentului rezultant se aplică proprietatea conform căreia, dacă o forţă este paralelă cu o axă sau o intersectează, nu dă moment în raport cu axa respectivă. Rezultă astfel,

$$M_x = -5aF, \quad M_y = 3aF, \quad M_z = 0\,. \tag{4}$$

Modulul momentului rezultant are valoarea:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = a\sqrt{34}F\,. \tag{5}$$

Momentul minim are valoarea nulă, forţele sistemului fiind paralele. Axa centrală, în conformitate cu (2.21), are ecuaţiile:

$$\frac{x - \dfrac{R_yM_z - R_zM_y}{R^2}}{R_x} = \frac{y - \dfrac{R_zM_x - R_xM_z}{R^2}}{R_y} = \frac{z - \dfrac{R_xM_y - R_yM_x}{R^2}}{R_z}\;, \tag{6}$$

care, având în vedere (2) şi (4) şi impunând condiţia ca axa să treacă prin punctul $M(x, y)$, adică $z = 0$, ajung la forma:

$$\frac{x-\dfrac{0+10F\cdot 3aF}{100F^2}}{0}=\frac{y-\dfrac{-10F(-5aF)-0}{100F^2}}{0},$$

din care se obţin coordonatele x şi y ale punctului M:

$$x=\frac{3a}{10},\quad y=\frac{a}{2}. \tag{7}$$

Tensiunea $\overline{S}$ din firul de suspensie DM are valoarea $S = 10F$.

2.2.15. Asupra unei prisme drepte acţionează sistemul celor trei forţe arătat în fig.2.23. Să se reducă sistemul de forţe în raport cu vârful O şi să se determine coordonatele punctului în care axa centrală intersectează planul forţei orizontale $OABC$.

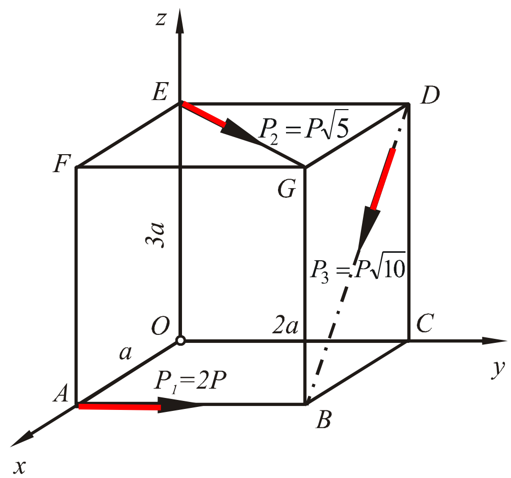


Fig. 2.23

Soluţie:

Elementele torsorului de reducere în raport cu O sunt:

- vectorul rezultant:

$$\overline{R}=R_x\overline{i}+R_y\overline{j}+R_z\overline{k}, \tag{1}$$

unde:

$$R_x=P\sqrt{5}\frac{EF}{EG}+P\sqrt{10}\frac{BC}{BD}$$

$$R_x=P\sqrt{5}\frac{a}{a\sqrt{5}}+P\sqrt{10}\frac{a}{a\sqrt{10}}=2P$$

$$R_y = 2P + P\sqrt{5}\,\frac{ED}{EG}$$

$$R_y = 2P + P\sqrt{5}\,\frac{2a}{a\sqrt{5}} = 4P$$

$$R_z = -P\sqrt{10}\,\frac{DC}{BD} = -P\sqrt{10}\,\frac{3a}{a\sqrt{10}} = -3P,$$

astfel că (1) ajunge la forma:

$$\overline{R} = P(2\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}\,)\,. \tag{2}$$

- momentul rezultant:

$$\overline{M}_O = \overline{OA} \times \overline{P}_1 + \overline{OE} \times \overline{P}_2 + \overline{OB} \times \overline{P}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2P & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 3a \\ P & 2P & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 2a & 0 \\ P & 0 & -3P \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_O = -12aP\overline{i} + 6aP\overline{j}. \tag{3}$$

Ecuaţia vectorială a axei centrale este:

$$\overline{r} - \frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = \lambda \overline{R}, \tag{4}$$

în care:

$$\frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{R^2} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2P & 4P & -3P \\ -12aP & 6aP & 0 \end{vmatrix}}{29P^2} = \frac{6a}{29}(3\overline{i} + 6\overline{j} + 10\overline{k}). \tag{5}$$

Ecuaţia (4), ţinând cont de (2) şi (5), se poate scrie:

$$\frac{x - \dfrac{18a}{29}}{2P} = \frac{y - \dfrac{36a}{29}}{4P} = \frac{z - \dfrac{60a}{29}}{3P}$$

sau:

$$2x - y = 0\ ,\quad 3x + 2z - \frac{174a}{29} = 0. \tag{6}$$

Coordonatele punctului în care axa centrală intersectează planul xOy sunt:

$$x = \frac{58a}{29,}\,,\quad y = \frac{116a}{29}\,,\quad z = 0. \tag{7}$$

2.2.16. Să se arate că orice vector alunecător $\overline{v}$ este echivalent în mod unic cu un sistem de şase vectori dirijaţi după muchile unui tetraedru orientat *SABC* (muchiile sunt orientate în sensul *SA, SB, SC, AB, BC, CA,* iar conturul *ABC* se vede din *S*, parcurs în sens orar). Dacă mărimile algebrice ale acestor vectori sunt $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma'$ (fig. 2.24), să se arate că:

$$\frac{\alpha\alpha'}{aa'} + \frac{\beta\beta'}{bb'} + \frac{\gamma\gamma'}{cc'} = 0.$$

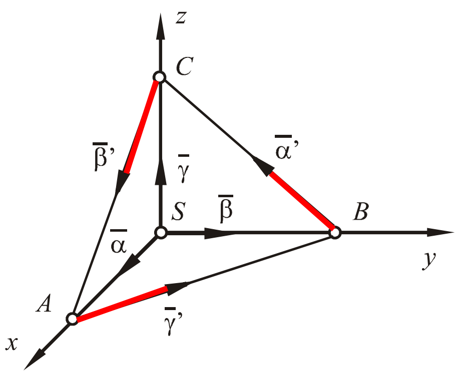


Fig. 2.24

Soluţie:

Pentru ca două sisteme de vectori să fie echivalente este necesar şi suficient ca torsorul de reducere al acestor sisteme într-un punct să fie acelaşi. Sistemul dat poate fi redus în raport cu *S* şi pentru a fi echivalent în mod unic cu vectorul $\overline{v}$, trebuie ca invariantul scalar $J = \overline{R} \cdot \overline{M}_S = 0$.

Se notează:

$$SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c,$$
$$BC = a', \quad CA = b', \quad AB = c'.$$

Elementele torsorului de reducere în raport cu *S* sunt:

- Vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}\ , \tag{1}$$

unde:

$$\begin{aligned} R_x &= \alpha - \gamma'\frac{a}{c'} + \beta'\frac{a}{b'} \\ R_y &= \beta - \alpha'\frac{b}{a'} + \gamma'\frac{b}{c'} \\ R_z &= \gamma - \beta'\frac{c}{b'} + \alpha'\frac{c}{a'}. \end{aligned} \tag{2}$$

- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_S = \overline{SA}\times\overline{\gamma}'+\overline{SB}\times\overline{\alpha}'+\overline{SC}\times\beta'$$

$$\overline{M}_S = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ -\gamma'\frac{a}{c'} & \gamma'\frac{b}{c'} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & -\alpha'\frac{b}{a'} & \alpha'\frac{c}{a'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & c \\ \beta'\frac{a}{b'} & 0 & -\beta'\frac{c}{b'} \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_S = \frac{bc}{a'}\alpha'\bar{i} + \frac{ca}{b'}\beta'\bar{j} + \frac{ab}{c'}\gamma'\bar{k} \quad . \tag{3}$$

Astfel,

$$J = \overline{R}\cdot\overline{M}_S = \left(\alpha - \gamma'\frac{a}{c'} + \beta'\frac{a}{b'}\right)\frac{bc}{a'}\alpha' + \left(\beta - \frac{b}{a'} + \gamma'\frac{b}{c'}\right)\frac{ca}{b'}\beta' +$$

$$+\left(\gamma - \beta'\frac{c}{b'} + \alpha'\frac{c}{a'}\right)\frac{ab}{c'}\gamma'$$

$$J = abc\left(\frac{\alpha\alpha'}{aa'} + \frac{\beta\beta'}{bb'} + \frac{\gamma\gamma'}{cc'}\right) = 0\,. \tag{4}$$

Condiţia ca sistemul de vectori dat să fie echivalent în mod unic cu vectorul $\bar{v}$ este:

$$\frac{\alpha\alpha'}{aa'} + \frac{\beta\beta'}{bb'} + \frac{\gamma\gamma'}{cc'} = 0. \tag{5}$$

2.2.17. Asupra unui paralelipiped cu laturile de 2, 3, 4 *dm* acţionează trei forţe ale căror module sunt: $F_1 = 110\,N$, $F_2 = 100\,N$, $F_3 = 60\,N$ (fig. 2.25). Să se reducă sistemul de forţe în raport cu punctul O şi să se determine momentul minim şi axa centrală.

Soluţie:

Elementele torsorului de reducere în raport cu punctul O sunt:

- Vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}, \tag{1}$$

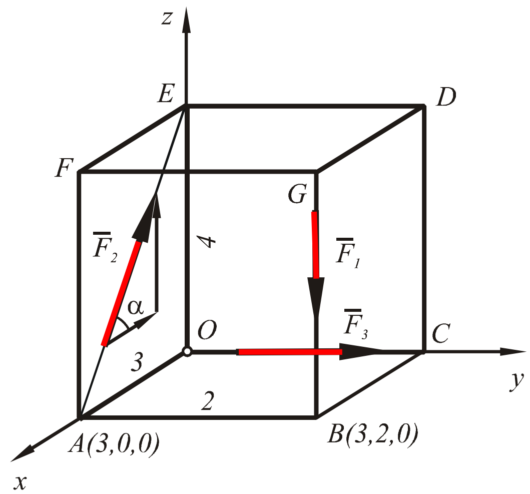


Fig. 2.25

în care:

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} F_{i\,x} = 0 - F_2 \cos\alpha + 0 = -100\frac{3}{5} = -60N$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} F_{i\,y} = 0 + F_3 + 0 = 60N \qquad (2)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{3} F_{i\,z} = -F_1 + F_2 \sin\alpha + 0 = -110 + 100\frac{4}{5} = -30N\,.$$

Modulul vectorului rezultant are valoarea:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 90N\,. \qquad (3)$$

- Momentul rezultant: pentru determinarea componentelor M_x, M_y, M_z ale momentului rezultant pe axele sistemului cartezian *Oxyz* se folosesc relaţiile (2.12) şi tabelul 2.1, cu observaţia că forţa $\overline{F}_3$, trecând prin *O*, nu dă moment în raport cu acest punct. Astfel,

$$M_x=\sum_{i=1}^{2}\left(y_iF_{iz}-z_iF_{iy}\right)=2\cdot(-110)+0\cdot80-0\cdot0-0\cdot0=-220Ndm$$

$$M_y=\sum_{i=1}^{2}\left(z_iF_{ix}-x_iF_{iz}\right)=0\cdot0+0\cdot(-60)-3\cdot(-110)-3\cdot80=90Ndm \qquad (4)$$

$$M_z=\sum_{i=1}^{2}\left(x_iF_{iy}-y_iF_{ix}\right)=3\cdot0+3\cdot0-2\cdot0-0\cdot(-60)=0.$$

Tabelul 2.1

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$
Ox	0	-60
Oy	0	0
Oz	-110	80
x	3	3
y	2	0
z	0	0

Modulul momentului rezultant este:

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=237{,}70\,Ndm\,. \qquad (5)$$

Momentul minim are valoarea:

$$M_{\min}=\frac{R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}}=\frac{60\cdot220+60\cdot90-30\cdot0}{90}=206{,}66\,Ndm\,. \qquad (6)$$

În conformitate cu (2.19), ecuaţiile axei centrale sunt:

$$\frac{M_x-yR_z+zR_y}{R_x}=\frac{M_y-zR_x+xR_z}{R_y}=\frac{M_z-xR_y+yR_x}{R_z}. \qquad (7)$$

Introducând (2) şi (4) în (7), se obţine:

$$-1{,}5y-3z+11=-1{,}5x+3z+4{,}5=6x+6y\,. \qquad (8)$$

2.2.18. Asupra unei prisme triunghiulare, regulate, de latură *a* şi înălţime *2a* acţionează un sistem de cinci forţe $F_1=F_2=F_3=F_4=P,\ F_5=P\sqrt{2}$ (fig. 2.26). Se cere să se reducă sistemul de forţe în punctul *O*, să se determine momentul minim şi axa centrală.

Soluţie:

Se alege un sistem de referinţă *Oxyz* care să coincidă cu muchiile prismei (fig. 2.26).

Se proiectează apoi forţele şi momentele forţelor pe axele sistemului de referinţă, determinându-se componentele scalare ale vectorului rezultant $\overline{R}$ şi ale vectorului moment rezultant $\overline{M}_0$. Astfel,

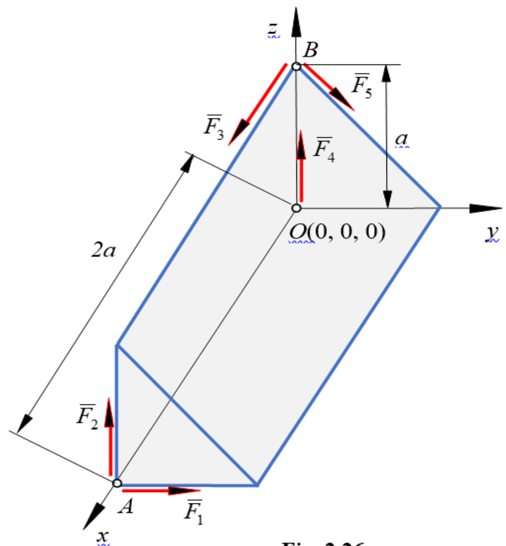


Fig. 2.26

Vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k} \ . \tag{1}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = F_3 = P$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = F_1 + F_5 \sin 45^\circ = 2P \tag{2}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i_z} = F_2 + F_4 - F_5 \cos 45^\circ = P \ .$$

Modulul vectorului rezultant este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = P\sqrt{6} \, , \tag{3}$$

iar direcţia este dată de cosinusurile directoare pe care le face vectorul rezultant al sistemului de forţe cu axele sistemului de referinţă *Oxyz,* adică:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{4}$$

Momentul rezultant:

$$\overline{M}_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}. \tag{5}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{i_x} = -aP; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{i_y} = -aP; \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{i_z} = 2aP. \tag{6}$$

Modulul lui $\overline{M}_0$ este dat de:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = aP\sqrt{6}. \tag{7}$$

Direcţiile pe care le face momentul rezultant $\overline{M}_0$ cu axele sistemului de referinţă sunt date de următoarele cosinusuri directoare:

$$\cos\alpha' = \frac{M_x}{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\beta' = \frac{M_y}{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\gamma' = \frac{M_z}{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \tag{8}$$

Pentru determinarea momentului minim se aplică prima relaţie (2.17). Astfel,

$$M_{\min} = \frac{\overline{M}_0 \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \frac{-aP}{\sqrt{6}}. \tag{9}$$

Ecuaţiile scalare ale axei centrale sunt date de relaţiile (2.19).

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}. \tag{10}$$

Înlocuind în relaţia (10) valorile scalare ale vectorului rezultant şi ale momentului rezultant, ecuaţiile axei centrale devin:

$$\frac{-aP - yP_z + z2P}{P} = \frac{-aP - zP + xP}{2P} = \frac{2aP - x2P + yP}{P}, \tag{11}$$

respectiv,

$$\begin{aligned} x + y - 3z = 0 \\ 5x - 2y - z = 5a \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru z = 0, ecuaţiile axei centrale devin:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x - 2y = 5a \end{cases} \tag{13}$$

Axa centrală intersectează planul xOy în punctul de coordonate $\left(x = \frac{5}{7}a;\ y = -x = -\frac{5}{7}a \right)$, valori ce rezultă prin rezolvarea sistemului (13).

2.2.19. Se dau forţele $F_i = iF$, unde $\left|\overline{F}_i\right| = a$, $i = 1 \div 3$ şi punctul A (a, a, a) (fig. 2.27). Să se determine torsorul de reducere în raport cu polul O, trinomul invariant $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$, momentul minim, axa centrală, precum şi punctul de intersecţie al acesteia cu planul de coordonate xOy.

Soluţie:

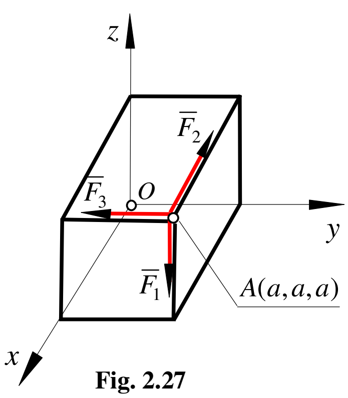


Fig. 2.27

Din enunţ se cunoaşte că: $F_1 = F$, $F_2 = 2F$, $F_3 = 3F$. Astfel, vectorul rezultant are componentele pe axele sistemului de referinţă $Oxyz$:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = -F_2 = -2F$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = -F_3 = -3F \tag{1}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i_z} = -F_1 = -F \ .$$

Modulul lui R este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = F\sqrt{14} . \tag{2}$$

Cosinusurile unghiurilor pe care le închide vectorul rezultant al sistemului de forţe cu axele sistemului de referinţă $Oxyz$, sunt:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-2}{\sqrt{14}}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{-3}{\sqrt{14}}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{-1}{\sqrt{14}}. \tag{3}$$

Momentul rezultant se determină astfel:

$$\overline{M}_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} . \tag{4}$$

unde:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{i_x} = F_3 a - F_1 a = 2Fa;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{i_y} = F_1 a - F_2 a = -Fa; \tag{5}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{i_z} = -F_3 a + F_2 a = -Fa \ .$$

Modulul lui $\overline{M}_0$ este dat de relaţia:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = Fa\sqrt{6} . \tag{6}$$

Direcţia momentului rezultant este dată de următoarele cosinusuri directoare:

$$\cos\alpha' = \frac{M_x}{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos\beta' = \frac{M_y}{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\gamma' = \frac{M_z}{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{7}$$

[10] Ispas, V. și alții, 2010

Pentru determinarea momentului minim se aplică relaţia (2.17), în care se înlocuiesc valorile proiecţiilor vectorului rezultant şi ale momentului rezultant calculate anterior. Astfel,

$$M_{\min} = \frac{\overline{M}_0 \cdot \overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \frac{0}{F\sqrt{14}} = 0. \qquad (8)$$

Ecuaţiile scalare ale axei centrale sunt date de relaţiile (2.19):

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}. \qquad (9)$$

Prin înlocuire în relaţia (9) a valorilor scalare ale vectorului rezultant şi ale momentului rezultant, ecuaţiile axei centrale devin:

$$\frac{2Fa - y(-F) + z(-3F)}{-2F} = \frac{-Fa - z(-2F) + x(-F)}{-3F} = \frac{-Fa - x(-3F) + y(-2F)}{-F}, \qquad (10)$$

respectiv,

$$\begin{aligned} -2x - 3y + 4z &= 8a \\ 6x - 5y + 3z &= 4a \end{aligned} \quad . \qquad (11)$$

Se poate găsi punctul în care *Axa Centrală* intersectează planul *xOy* (z = 0). În acest caz, ecuaţiile axei centrale devin:

$$\begin{cases} -2x - 3y = 8a \\ 6x - 5y = 4a \end{cases} . \qquad (12)$$

Axa centrală intersectează planul *xOy* în punctul de coordonate $(x = -a;\ y = -2a)$, valori ce rezultă prin rezolvarea sistemului (12).

2.2.20. Să se reducă următorul sistem de forţe paralele date prin valorile algebrice F_i şi coordonatele punctelor de aplicaţie A_i, i = 1 ÷ 5:

$$F_1 = 10, \quad F_2 = F_4 = 15, \quad F_3 = 30, \quad F_5 = -10$$

$$A_1(1,4,3),\ A_2(2,3,1),\ A_3(3,1,2),\ A_4(0,1,1),\ A_5(1,1,0).$$

Să se găsească relaţiile care trebuie să existe între cosinusurile directoare ale direcţiei forţelor paralele astfel încât suportul rezultantei să treacă prin originea O a sistemului de referinţă.

Soluţie:

Elementele torsorului de reducere în raport cu O sunt:

- Vectorul rezulant:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{5} \overline{F}_i = \overline{\rho} \sum_{i=1}^{5} F_i = \overline{\rho}(10 + 15 + 30 + 15 - 10) = 60\overline{\rho} = 60(\alpha \overline{i} + \beta \overline{j} + \gamma \overline{k}), \quad (1)$$

unde:

$\overline{\rho} = \alpha \overline{i} + \beta \overline{j} + \gamma \overline{k}$ este versorul direcţiei comune a forţelor.

Centrul forţelor paralele este definit de relaţia (2.17), adică:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{5} \overline{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{5} F_i} \quad (2)$$

sau de relaţiile (2.28) aplicate astfel:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{5} F_i} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 30 + 0 \cdot 15 + 1 \cdot 10}{10 + 15 + 30 + 15 - 10} = 2$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{5} F_i} = \frac{4 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 15 - 1 \cdot 10}{60} = 2 \quad (3)$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{5} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{5} F_i} = \frac{3\cdot 10 + 1\cdot 15 + 2\cdot 30 + 1\cdot 15 + 0}{60} = 2\,.$$

- Momentul rezultant se determină aplicând teorema lui Varignon (2.22)

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= \sum_{i=1}^{5} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{r}_C \times \overline{R} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ R\alpha & R\beta & R\gamma \end{vmatrix} = \\ &= 2R\left[(\gamma-\beta)\bar{i} + (\alpha-\gamma)\bar{j} + (\beta-\alpha)\bar{k}\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Dacă axa centrală trece prin origine, $\overline{M}_O = 0$. În acest caz, din (4) se obţin cosinusurile directoare ale rezultantei sistemului de forţe şi anume:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}\,. \tag{5}$$

Ecuaţiile axei centrale sunt:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z} \text{ sau, în conformitate cu (1), devin } x = y = z. \tag{6}$$

2.2.21. În două vârfuri ale unui triunghi ABC se aplică vectorii paraleli de mărime algebrică α şi β, iar în al treilea vârf vectorii de sumă nulă $\overline{\gamma}$ şi $(-\overline{\gamma})$, paraleli cu primii doi (fig. 2.28).

Reducând acest sistem de vectori, să se deducă teorema lui Menelaus: dacă punctele M, N, P, situate respectiv pe BC, CA, AB, sunt coliniare, atunci:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB} = 1\,.$$

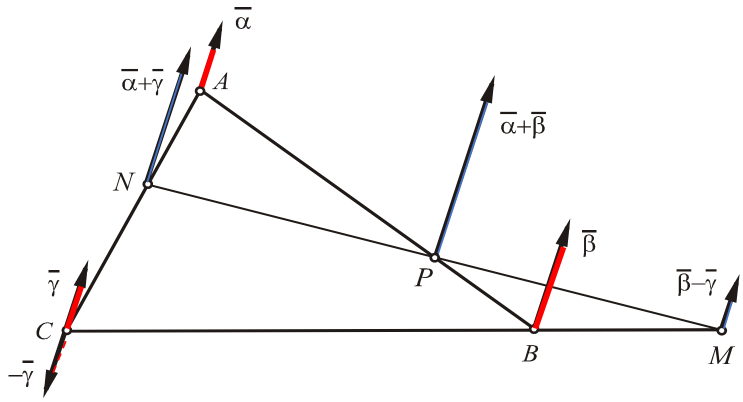


Fig. 2.28

Soluţie:

Se compun vectorii $(\overline{\beta})$ şi $(-\overline{\gamma})$ şi se obţine în M vectorul $(\overline{\beta}-\overline{\gamma})$, apoi vectorii $(\overline{\alpha})$ şi $(+\overline{\gamma})$ şi se obţine vectorul $(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})$ în punctul N.

Vectorul $(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})$ compus cu vectorul $(\overline{\beta}-\overline{\gamma})$ conduce la vectorul $(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$ aplicat în P.

Aplicând relaţiile cunoscute pentru determinarea punctului pe unde trece rezultanta a doi vectori paraleli, se obţine succesiv:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{\gamma}{\beta} \tag{1}$$

$$-\frac{NC}{NA}=\frac{\alpha}{\gamma} \tag{2}$$

$$-\frac{PA}{PB}=\frac{\beta}{\alpha}. \tag{3}$$

Relaţiile (1), (2) şi (3) înmulţite membru cu membru, conduc la expresia:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1. \tag{4}$$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

2.2.22. Se consideră un cub $O\,A\,B\,C\,O'\,A'\,B'\,C'$ de latură a şi mijloacele $M, N, P,$ ale muchiilor $CB, BB', B'A'$. Să se determine rezultanta vectorilor $\overline{OA}, \overline{OM}, \overline{ON}, \quad \overline{OP}$. (fig. 2.29).

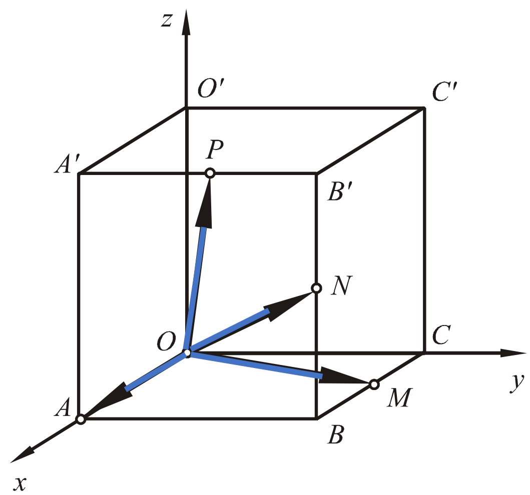


Fig. 2.29

Soluţie:

Coordonatele punctelor A, M, N, P sunt:

$$A(a,0,0),\; M\left(\frac{a}{2}, a, 0\right),\; N\left(a, a, \frac{a}{2}\right),\; P\left(a, \frac{a}{2}, a\right).$$

Aceste coordonate coincid cu proiecţiile vectorilor $\overline{OA}, \overline{OM}, \overline{ON}, \overline{OP}$ pe axele sistemului Oxyz. Astfel, se poate determina rezultanta $\overline{R}$ prin proiecţiile ei pe axele sistemului cartezian.

$$R_x = a + \frac{a}{2} + a + a = 3{,}5a$$
$$R_y = a + a + \frac{a}{2} = 2{,}5a \tag{1}$$
$$R_z = \frac{a}{2} + a = 1{,}5a.$$

Modulul rezultantei este:

$$R = 4{,}55a \tag{2}$$

iar direcţia se determină prin cosinusurile directoare:

$$\cos\left(\overline{R},\widehat{\ }Ox\right)=\frac{R_x}{R}=\frac{7}{\sqrt{83}}=0{,}76$$
$$\cos\left(\overline{R},\widehat{\ }Oy\right)=\frac{R_y}{R}=\frac{5}{\sqrt{83}}=0{,}54 \tag{3}$$
$$\cos\left(\overline{R},\widehat{\ }Oz\right)=\frac{R_z}{R}=\frac{3}{\sqrt{83}}=0{,}32.$$

2.2.23. Să se reducă următorul sistem de vectori coplanari dat prin coordonatele punctelor de aplicaţie A_i şi proiecţiile vectorilor corespunzători $\overline{a}_i$, i = 1 ÷ 4, într-un sistem rectangular Oxy:

$$A_1(2,3) \qquad \overline{a}_1(3,-4)$$
$$A_2(-1,0) \qquad \overline{a}_2(-7,1)$$
$$A_3(4,2) \qquad \overline{a}_3(2,-2)$$
$$A_4(-5,1) \qquad \overline{a}_4(1,2).$$

Soluţie:

- Vectorul rezultant:

$$R_x=\sum_{i=1}^{4}a_{ix}=3-7+2+1=-1$$
$$R_y=\sum_{i=1}^{4}a_{iy}=-4+1-2+2=-3 \tag{1}$$

$$R=\sqrt{10}; \qquad tg\left(\overline{R},\widehat{\ }Ox\right)=\frac{R_y}{R_x}=3\ . \tag{2}$$

- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_O=\sum_{i=1}^{4}\overline{r}_i\times\overline{a}_i=\sum_{i=1}^{4}\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_i & y_i & 0\\ a_{ix} & a_{iy} & 0\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{4}\left[\left(x_i\cdot a_{iy}-y_i\cdot a_{ix}\right)\right]\overline{k}, \tag{3}$$

astfel că:

$$M_z=2(-4)-3\cdot3+(-1)\cdot1-0\cdot(-7)+4(-2)-2+(-5)\cdot2-1\cdot1=-41. \tag{4}$$

- Ecuaţia axei centrale:

În conformitate cu (2.35), se poate scrie succesiv:

$$xR_y-yR_x=M_z \tag{5}$$
$$-3x+y=-41\,. \tag{6}$$

Axa centrală este în planul vectorilor şi cum M_z este perpendicular pe acest plan, rezultă $\overline{M}_{\min} = 0$, adică sistemul de vectori este echivalent cu rezultanta $\overline{R}$ aplicată pe axa centrală.

2.2.24. Să se reducă următorul sistem de vectori coplanari, dat prin modulele vectorilor, unghiurile acestora cu axa Ox a unui sistem cartezian rectangular şi un punct al suportului lor (fig. 2.30).

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 4 & \alpha_1 = 120° & A_1(2,1) \\
a_2 = 3 & \alpha_2 = 180° & A_2(0,2) \\
a_3 = 2 & \alpha_3 = 45° & A_3(-1,0) \\
a_4 = 5 & \alpha_4 = 90° & A_4(-3,0) \\
a_5 = 8 & \alpha_5 = -30° & A_5\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right).
\end{array}
$$

Soluţie:

- Vectorul rezultant: proiecţiile vectorului rezultant pe axele sistemului de coordonate sunt:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{i=1}^{5} a_i \cos \alpha_i = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3(-1) + 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
R_x &= 3{,}342 \\
R_y &= \sum_{i=1}^{5} a_i \sin \alpha_i = 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 0 + 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 1 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) \\
R_y &= 5{,}878
\end{aligned} \tag{1}
$$

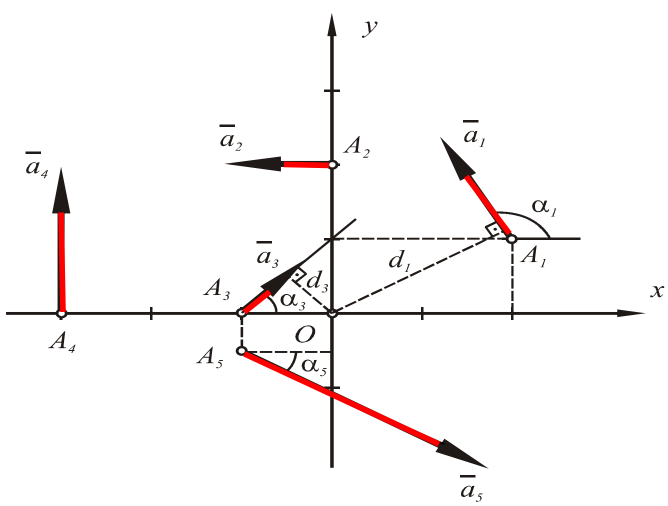


Fig. 2.30

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=6{,}76\ . \tag{2}$$

- Momentul rezultant

$$M_z=\sum_{i=1}^{5}d_i a_i\ . \tag{3}$$

Se calculează distanţele de la origine la suporturile vectorilor, ecuaţiile suporturilor fiind de forma:

$$ax+by+c=0\text{, iar } d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Suportul lui $\overline{a}_1$:

$$y-1=tg120°(x-2)$$

$$x\sqrt{3}+y-1-2\sqrt{3}=0$$

$$d_1=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}=2{,}232\ . \tag{4}$$

Suportul lui $\overline{a}_5$ este dat de relația:

$$x+\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$$

$$d_5=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}=0{,}933\ . \tag{5}$$

Distanţele d_2, d_3, d_4 sunt:

$$d_2=2,\ \ d_3=0{,}707,\ \ d_4=3\ . \tag{6}$$

Momentul rezultant, în conformitate cu (3) - (6), este:

$$M_z=d_1a_1+d_2a_2-d_3a_3-d_4a_4+d_5a_5=5{,}978\ . \tag{7}$$

Ecuaţia axei centrale, în conformitate cu (2.35), este:

$$xR_y-yR_x=M_z\ ,$$

adică

$$5{,}878\,x-3{,}342\,y=5{,}978\ . \tag{8}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

2.2.25. Reducând trei vectori paraleli de mărimi algebrice α, β, γ, aplicaţi în vârfurile unui triunghi *ABC* (fig. 2.31), să se deducă teorema lui Ceva: fiind date punctele M, N, P, respectiv pe BC, CA, AB, dacă dreptele AM, BN, CP sunt concurente, atunci:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1 .$$

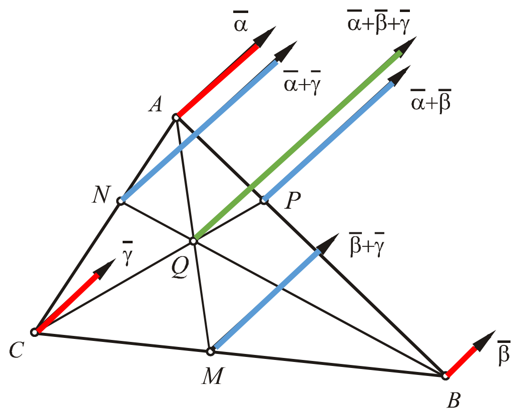


Fig. 2.31

Soluţie:

Se reduc vectorii combinând câte unul cu rezultanta celorlalţi doi, astfel:

$$\overline{R} = (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \overline{\gamma} = (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) + \overline{\alpha} = (\overline{\gamma} + \overline{\alpha}) + \overline{\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} .$$

Rezultanta vectorilor $\overline{\alpha}$ şi $\overline{\beta}$ acţionează în punctul P. Cum momentul în raport cu P al acestor vectori este nul (punctul P este pe axa centrală), se obţine:

$$-\frac{PA}{\beta} = \frac{PB}{\alpha}, \quad -\frac{PA}{PB} = \frac{\beta}{\alpha} . \tag{1}$$

Procedând analog pentru $(\overline{\beta} + \overline{\gamma})$ care acţionează în punctul M şi $(\overline{\alpha} + \overline{\gamma})$ care acţionează în N, se obţine:

$$-\frac{MB}{MC} = \frac{\gamma}{\beta}, \ -\frac{NC}{NA} = \frac{\alpha}{\gamma} . \tag{2}$$

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) membru cu membru, rezultă:

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{PA}{PB}=-1\,.$$

Observaţie: semnul (-) apare la rapoartele respective datorită orientării diferite a segmentelor.

2.2.26. Să se reducă sistemul de forţe de module $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ aplicate în vârfurile unui triunghi echilateral ABC şi dirijate perpendicular pe laturile triunghiului, ştiind că latura triunghiului este l (fig. 2.32).

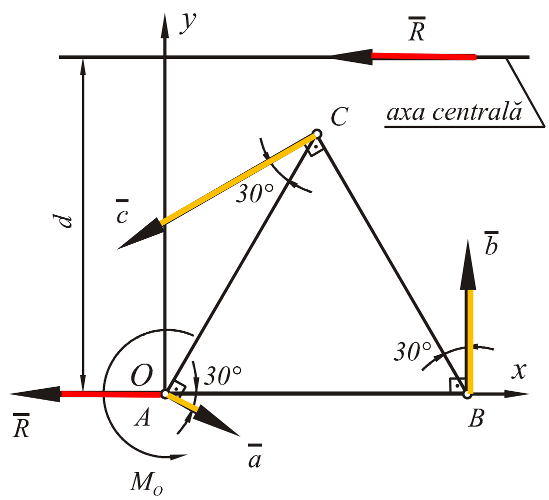


Fig. 2.32

Soluţie:

Se alege un sistem de referinţă xOy, cu axa Ox orientată după AB şi Oy perpendiculară în A pe AB.

Elementele torsorului de reducere în raport cu O sunt:

- Vectorul rezultant:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} \tag{1}$$

$$R_x = a\cos 30° - c\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$R_y = -a\sin 30° + b - c\sin 30° = -\frac{1}{2} + 2 - 3\frac{1}{2} = 0\,.$$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

astfel că (1) devine:

$$\overline{R} = -\sqrt{3}\,\overline{i}\,, \tag{2}$$

deci axa centrală este paralelă cu AB.

- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_O = M_z \cdot \overline{k} = (b\,l + c\,l\cos 60°)\,\overline{k} = \left(b + \frac{c}{2}\right) l\,\overline{k} = 3{,}5\,l\,\overline{k}. \tag{3}$$

Ecuaţia axei centrale este:

$$xR_y - yR_x = M_z \tag{4}$$

$$x \cdot 0 + \sqrt{3}\,y = 3{,}5\,l$$

$$y = 3{,}5\frac{\sqrt{3}}{3}\,l = 2{,}02\,l\,. \tag{5}$$

Observaţie: având în vedere expresia vectorului rezultant $\overline{R}$ şi teorema lui Varignon, este uşor a remarca că axa centrală este o dreaptă paralelă cu *Ox* la distanţa $d = \frac{M_O}{R} = 2{,}02\,l$.

2.3 Probleme propuse

2.3.1. Să se determine elementele torsorului de reducere în O, momentul minim şi ecuaţiile axei centrale pentru sistemele de forţe din figurile de mai jos.

Pentru sistemul din figura 2.37 să se găsească condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească valorile forţelor F_1 şi F_2 şi abscisa a, astfel încât axa centrală a sistemului să treacă prin punctul dat: $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

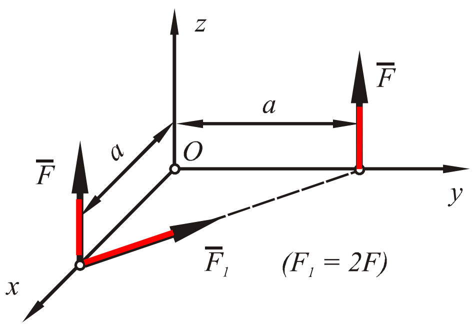


Fig. 2.33

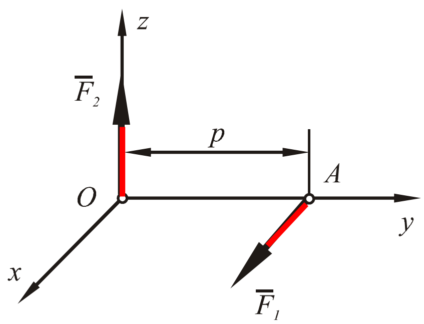


Fig. 2.34

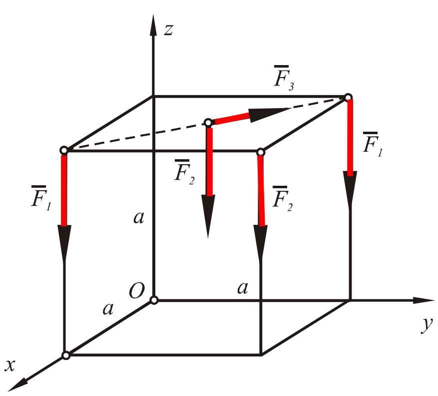


Fig. 2.35

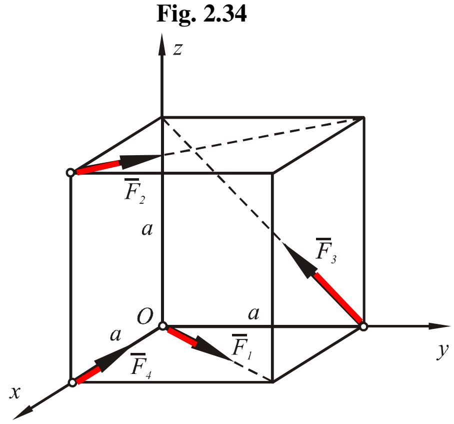


Fig. 2.36

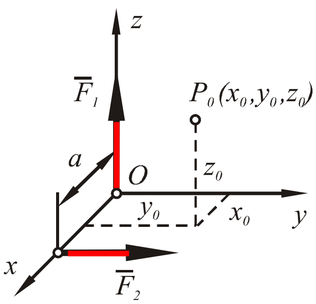


Fig. 2.37

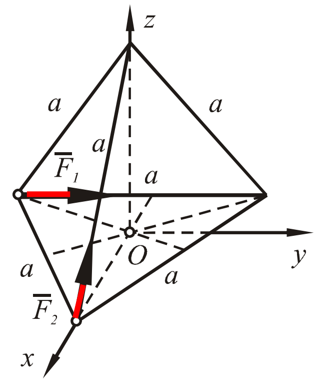


Fig. 2.38

Răspunsuri:

2.33. $R = 2\sqrt{2}F, \quad M_O = 2aF; \quad M_{\min} = 0, \quad x - y + z\sqrt{2} = 0; \quad x + y = a.$

2.34. $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad M_O = pF_1; \quad M_{\min} = \dfrac{pF_1F_2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}, \; z = \dfrac{F_2}{F_1}x; \quad y = \dfrac{pF_1^2}{F_1^2 + F_2^2}.$

2.35. $R = \sqrt{4(F_1 + F_2)^2 + F_3^2}, \quad M_{\min} = aF_2F_3 \big/ \sqrt{2} \cdot \sqrt{4(F_1 + F_2)^2 + F_3^2}\;.$

2.36. $R = 2F; \quad M_O = 2aF; \quad x = a; \quad y = z.$

2.37. $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{z_0}{y_0}; \quad a = x_0\,\dfrac{y_0^2 + z_0^2}{y_0^2}.$

2.38. $R_x = -\dfrac{F_2}{\sqrt{3}}; \quad R_y = F_1; \quad R_z = F_2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \quad M_x = 0; \quad M_y = -aF_2\,\dfrac{\sqrt{2}}{3};$

$M_z = -aF_1 / 2\sqrt{3}.$

2.3.2. Patru forţe având aceeaşi valoare $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$ sunt dirijate după patru muchii ale unei piramide pentagonale drepte (fig. 2.39). Să se determine rezultanta lor şi punctul în care suportul rezultantei înţeapă planul bazei piramidei.

Răspuns:

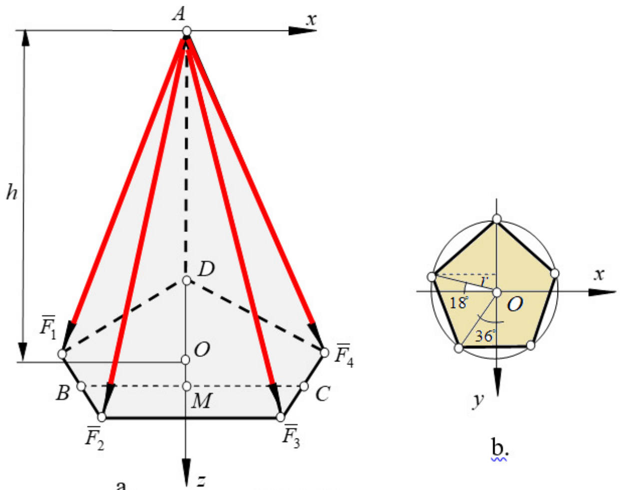


Fig. 2.39

$$R=\sqrt{r^2+16h^2}\,.$$

$$x=0\ ;\ \ y=\frac{r}{4}\,.$$

2.3.3. Să se descompună forţa $\overline{R}$ în două componente normale între ele (fig. 2.40), astfel ca raportul valorilor lor să satisfacă relaţia: $\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{m}{n}$.

Răspuns:

Sugestie:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\,.$$

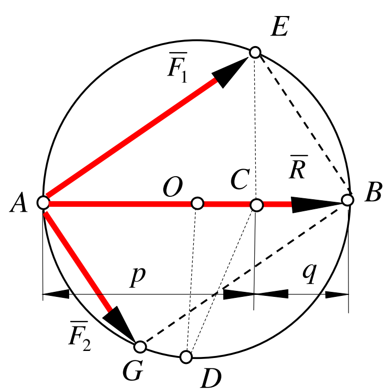


Fig. 2.40

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\ ;\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{m}{n}\ ;\quad F_1=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}R\ ;\quad F_2=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}R\ .$$

2.3.4. Un panou omogen având dimensiunile din figura 2.41 este manevrat de patru muncitori care aplică în punctele A, B, C, D, forţele $F_A = F_B = 500\,N$ şi $F_C = F_D = 1200\,N$ înclinate faţă de verticală cu unghiul $\alpha = 30°$. Să se analizeze efectul pe care-l produce asupra panoului acţiunea simultană a muncitorilor, dacă greutatea panoului este de $1200\sqrt{3}\,N$.

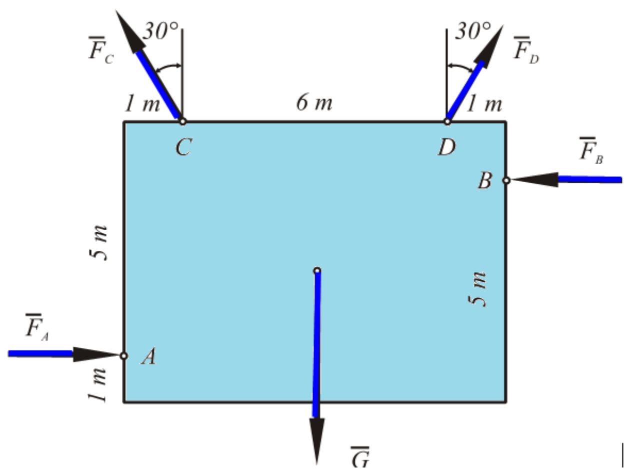


Fig. 2.41

Răspuns: sistemul de forţe dat se reduce la un cuplu, de moment *M* = 2000 *Nm*, care produce rotirea panoului, în planul său vertical, în sens antiorar.

2.3.5. O placă omogenă ABCD de greutate $\overline{G} = 8\overline{F}$, este solicitată în planul vertical de forţele reprezentate în figură ($F_1 = F$). Să se determine forţa capabilă să echilibreze sistemul şi distanţa la care suportul acesteia intersectează placa (fig. 2.42).

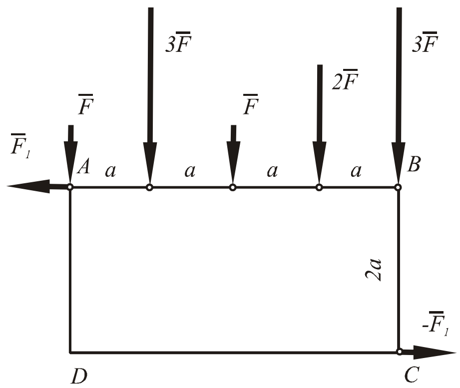


Fig. 2.42

Răspuns: forţa verticală ascendentă are valoarea R = 18F, situată în planul plăcii, al cărui suport intersectează placa la distanţa d = 2,05 a de punctul D.

2.3.6. După muchiile unei prisme drepte, cu baza un triunghi echilateral de latură a şi înălţime a, acţionează forţele $\overline{F_i}$, $(i = 1 \div 8)$, toate având acelaşi modul F şi poziţia ca în figura 2.43. Să se reducă sistemul de forţe în raport cu polul O.

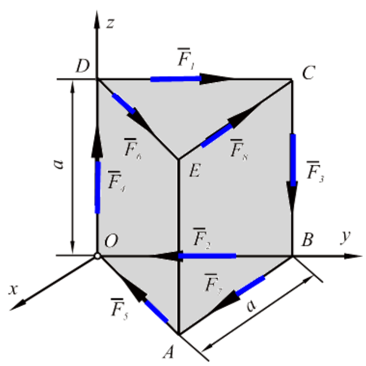


Fig. 2.43

Răspuns: sistemul de opt forţe se reduce la un moment, M = 3aF.

2.3.7. Asupra unui cub de latură a acţionează sistemul de forţe din figura 2.44. Forţa $\overline{F_1}$ are mărimea $F\sqrt{2}$, iar celelalte forţe au mărimea F. Să se reducă sistemul de forţe în raport cu polul O.

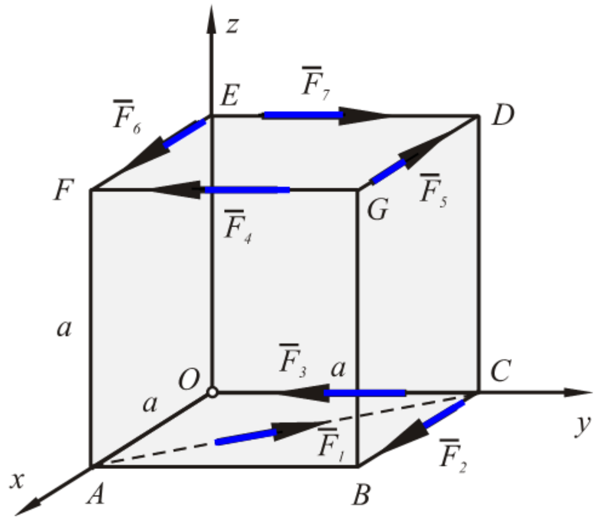


Fig. 2.44

Răspuns: sistemul de forţe este în echilibru.

2.3.8. Se consideră un sistem de trei forţe date prin proiecţiile lor carteziene şi prin coordonatele punctelor de aplicaţie: $\overline{F}_1(3,5,4)$ cu punctul de aplicaţie în $A_1(0,2,1)$; $\overline{F}_2(-2,\ 2,-6)$ cu punctul de aplicaţie în $A_2(1,-1,3)$; $\overline{F}_3(-1,-7,2)$ cu punctul de aplicaţie în $A_3(2,3,1)$. Se cere să se deplaseze aceste forţe astfel încât punctele lor de aplicaţie să treacă în originea O a sistemului cartezian de referinţă, fără a modifica efectul mecanic al sistemului.

Răspuns:

$$\overline{R}_0 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 .$$

$$\cos\alpha = \frac{16}{3\sqrt{61}}; \quad \cos\beta = \frac{-2}{3\sqrt{61}}; \quad \cos\gamma = \frac{-17}{3\sqrt{61}} .$$

3. GEOMETRIA MASELOR [10]

3.1 Considerații teoretice

3.1.1 Centrul de greutate (centrul maselor) al unui sistem de puncte materiale

Câmpul gravitaţional, după cum se cunoaşte din experimentele practice, acţionează asupra oricărei particule materiale cu o forţă:

$$\overline{P_i} = m_i \overline{g},$$

unde: $\overline{g}$ reprezintă un factor de proporţionalitate, o caracteristică a intensităţii câmpului gravitaţional, denumită *acceleraţie gravitaţională*.

Pentru o suprafaţă terestră bine delimitată, situată la aceeaşi altitudine, se poate face aproximarea de câmp gravitaţional constant.

Fie un sistem $M_i \, (i = 1 \div n)$ de puncte materiale aflate în câmp gravitaţional. Asupra acestora acţionează un sistem $\overline{P_i}$ de forţe de greutate paralele şi de acelaşi sens (fig. 3.1). Torsorul de reducere al sistemului de forţe în raport cu punctul *O* are componentele:

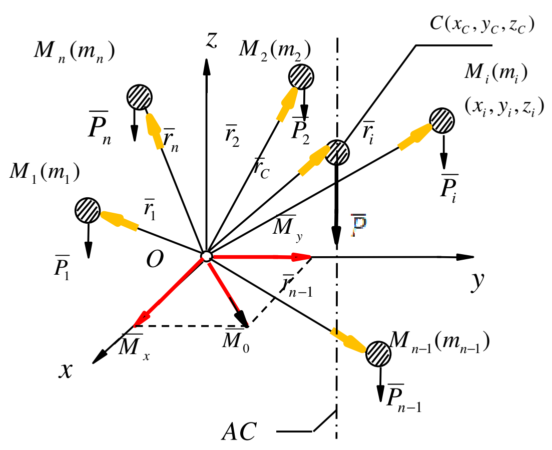


Fig. 3.1

[10] Ispas, V. și alții, 2010

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i=\overline{k}\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\right)=\overline{P} \tag{3.1}$$

$$\overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{P}_i=\sum_{i=1}^{n}P_i\,\overline{r}_i\times\overline{k} \tag{3.2}$$

S-a utilizat notaţia: $\overline{P}_i=\overline{k}m_i g$, unde $\overline{k}$ reprezintă versorul forţelor paralele. Deoarece $\overline{R}\cdot\overline{M}_O=0$, sistemul de forţe paralele se reduce la o rezultantă unică $\overline{P}$ în raport cu punctele axei centrale, notată AC conform cu figura 3.1.

Condiţia pentru obţinerea axei centrale, este ca momentul rezultant al sistemului de forţe în raport cu orice punct C de pe axa centrală să fie zero, $\overline{M}_C=0,\quad C\in AC$.

Utilizând legea de variaţie a momentului rezultant la schimbarea polului de reducere, se poate scrie:

$$\overline{M}_C=\overline{M}_O-\overline{r}\times\overline{R}\,. \tag{3.3}$$

Egalând cu zero relaţia (3.3) şi introducând expresiile (3.1) şi (3.2), rezultă:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\overline{r}_i-\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\right)\overline{r}\right]\times\overline{k}=0\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\overline{r}_i-\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\right)\overline{r}=\lambda\overline{k} \tag{3.4}$$

sau

$$\overline{r}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}P_i}-\lambda\frac{\overline{k}}{\sum_{i=1}^{n}P_i}\ , \tag{3.5}$$

unde $\lambda\in(-\infty,\infty)$ este un parametru scalar. Relaţia (3.5) reprezintă *ecuaţia vectorială a axei centrale*.

Pentru $\lambda=0$, se obţine vectorul de poziţie al centrului de greutate C, aparţinând axei centrale:

$$\overline{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}P_i}\ . \tag{3.6}$$

Proiecţiile vectorului $\overline{r}_C$ pe axe sunt *coordonatele centrului de greutate*:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad , \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad , \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} . \tag{3.7}$$

Forţa de greutate rezultantă ce acţionează asupra sistemului de puncte materiale este exprimată prin relaţia:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{g} = \overline{g} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) = M \cdot \overline{g} \ , \tag{3.8}$$

în care s-a folosit ipoteza: $\overline{g} = \overline{ct}$, iar $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ reprezintă masa sistemului de puncte materiale.

Similar, utilizând relaţiile (3.6) şi (3.7) şi simplificând cu g, se obţin relaţiile:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{M} \tag{3.9}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \quad , \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \quad , \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M} , \tag{3.10}$$

relaţii ce exprimă vectorul de poziţie, respectiv *coordonatele centrului de masă*.

3.1.1.1 Centrul de masă (centrul de greutate) al unui continuum material

Se consideră un solid rigid (continuum material indeformabil), reprezentat în figura 3.2.

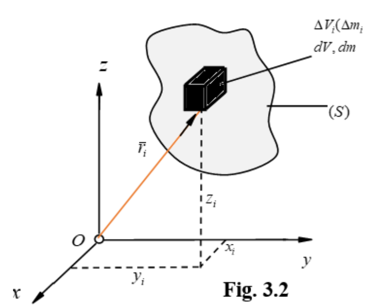


Fig. 3.2

Se presupune că solidul rigid se descompune în n volume ΔV_i foarte mici, având masa Δm_i şi centrul de greutate C_i. Centru de masă aproximativ al solidului rigid este dat de relaţiile:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} \tag{3.11}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}. \tag{3.12}$$

Cu cât valoarea lui n este mai mare, cu atât precizia determinării va fi mai mare. Poziţia exactă a centrului de masă se obţine transformând sumele în integrale, adică numărul volumelor mici trebuie să tindă la infinit. Astfel:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{\int dm} \tag{3.13}$$

$$x_C = \frac{\int x \; dm}{\int dm}, \quad y_C = \frac{\int y \; dm}{\int dm}, \quad z_C = \frac{\int z \; dm}{\int dm}. \tag{3.14}$$

Pentru suprafeţe, ΔV_i se va înlocui cu ΔA_i, iar pentru linii cu Δl_i şi în acest sens sunt reprezentative figurile 3.3 şi 3.4.

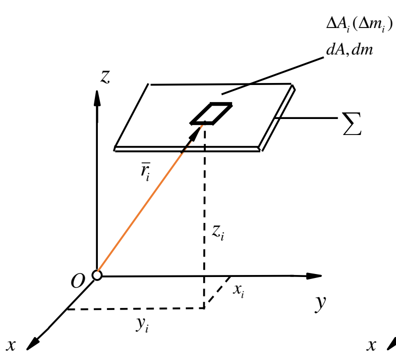


Fig. 3.3

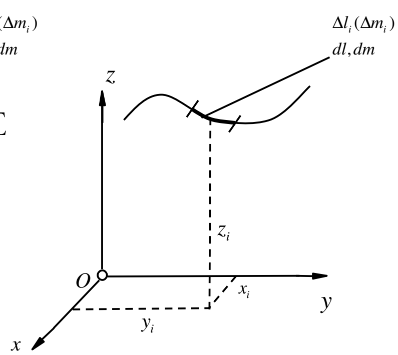


Fig. 3.4

3.1.1.2 Masă specifică

Pentru un continum material, *masa specifică volumetrică medie* este:

$$\rho_{V_i} = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} . \quad (3.15)$$

Trecând la limită, *masa specifică volumetrică* în punctul considerat este:

$$\rho_V = \lim_{V_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} = \frac{dm}{dV} . \quad (3.16)$$

Pentru plăci, *masa specifică superficială medie* poate fi scrisă astfel:

$$\rho_{S_i} = \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i} . \quad (3.17)$$

Trecând la limită, *masă specifică superficială* este definită de:

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i} = \frac{dm}{dA} . \quad (3.18)$$

În cazul barelor (sau al firelor), *masă specifică liniară medie* are expresia:

$$\rho_{l_i} = \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i} . \quad (3.19)$$

La limită, *masă specifică liniară* este caracterizată prin relaţia:

$$\rho_l = \lim_{\Delta l_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i} = \frac{dm}{dl} . \quad (3.20)$$

Pentru corpuri eterogene, masa specifică este variabilă, în funcţie de poziţia domeniului considerat din continuumul material:

$$\rho = \rho(x, y, z). \quad (3.21)$$

Masa volumului/plăcii/barei poate fi scrisă astfel:

$$M = \int dm = \int \rho \, dV \quad \text{(în cazul volumelor)} \quad (3.22)$$

$$M = \int dm = \int \rho_s \, dA \quad \text{(în cazul plăcilor)} \quad (3.23)$$

$$M = \int dm = \int \rho_l \, dl \quad \text{(în cazul barelor)} . \quad (3.24)$$

3.1.1.3 Centre de masă geometrice

Corpurile omogene sunt caracterizate prin densitate (masă specifică (ρ)) constantă.

Masa elementară, în funcţie de numărul de dimensiuni ale corpului, poate fi exprimată astfel:

$$dm = \rho_V dV\,, \quad dm = \rho_S dA\,, \quad dm = \rho_l dl\,. \tag{3.25}$$

În cazul *volumelor*, centrul de masă geometric este:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dV}{\int dV}\,,\; x_C = \frac{\int x dV}{\int dV}\,,\quad y_C = \frac{\int y dV}{\int dV}\,,\quad z_C = \frac{\int z dV}{\int dV}\,. \tag{3.26}$$

Pentru *suprafeţe* relaţiile sunt:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dA}{\int dA}\,,\; x_C = \frac{\int x dA}{\int dA}\,,\quad y_C = \frac{\int y dA}{\int dA}\,,\quad z_C = \frac{\int z dA}{\int dA}\,, \tag{3.27}$$

iar pentru *linii omogene*:

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dl}{\int dl}\,,\; x_C = \frac{\int x dl}{\int dl}\,,\quad y_C = \frac{\int y dl}{\int dl}\,,\quad z_C = \frac{\int z dl}{\int dl}\,. \tag{3.28}$$

Pentru corpurile omogene, poziţia centrului de greutate depinde numai de forma geometrică a corpurilor. De aici, rezultă expresia „centre de greutate geometrice".

3.1.1.4 Proprietăţile centrelor de greutate

În cele ce urmează, pot fi enumerate câteva dintre ***proprietăţile centrelor*** de greutate:

a. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale se găseşte în interiorul unei suprafeţe convexe (Σ), care conţine toate punctele sistemului.
b. Dacă punctele unui sistem se află toate într-un plan sau toate pe o dreaptă, centrul de greutate este în planul, respectiv pe dreapta ce conţine punctele.

c. Un sistem de puncte materiale care admite un centru, o axă sau un plan de simetrie are centrul de greutate în centrul, pe axa sau în planul respectiv de simetrie.
d. Dacă un sistem de corpuri (S) se compune dintr-un număr p de corpuri $S_1, S_2, ..., S_p$ ale căror mase $M_1, M_2, ..., M_p$ şi centre de greutate $C_1, C_2, ..., C_p$ sunt cunoscute, poziţia centrului de greutate al sistemului se determină cu relaţia:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} \bar{r}_{C_i} M_i}{\sum_{i=1}^{p} M_i} . \tag{3.29}$$

3.1.2 Moment de masă

Fie $M_i, (i = 1 \div n)$, un sistem de puncte materiale cu mase m_i şi coordonate x_i, y_i, z_i.

Expresia de forma: $$\sum_{i=1}^{n} x_i^n \cdot y_i^p \cdot z_i^q \cdot m_i \text{ , unde } n, p, q \in Z^+ \tag{3.30}$$

poartă numele de *moment de masă* de ordin $(n + p + q)$.

a) momentul de masă de ordin zero ($n+p+q = 0$) este chiar *masa sistemului*:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M , \tag{3.31}$$

b) momentele de masă de ordin întâi $(n + p + q = 1)$ poartă numele de *momente statice*:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i m_i , \quad \sum_{i=1}^{n} z_i m_i , \tag{3.32}$$

c) momentele de masă de ordinul doi $(n + p + q = 2)$ sunt *momente de inerţie*:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right), \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \tag{3.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i^2 + x_i^2\right), \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \tag{3.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \quad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \tag{3.35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \; . \tag{3.36}$$

3.1.3 Momente statice

Momentul static este produsul dintre o masă şi o distanţă (în raport cu un plan sau o axă) şi poate fi descris pentru sisteme de puncte materiale și solid rigid, prin relaţiile:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = x_C \cdot M \tag{3.37}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = y_C \cdot M \tag{3.38}$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = z_C \cdot M \tag{3.39}$$

$$x_C = \frac{\int xdm}{M} \quad \Rightarrow \quad \int xdm = x_C \cdot M \tag{3.40}$$

$$y_C = \frac{\int ydm}{M} \quad \Rightarrow \quad \int ydm = y_C \cdot M \tag{3.41}$$

$$z_C = \frac{\int zdm}{M} \quad \Rightarrow \quad \int zdm = z_C \cdot M \; . \tag{3.42}$$

Teorema momentelor statice

Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan sau o axă este egal cu produsul dintre masa întregului sistem, presupusă concentrată în centrul de greutate al sistemului, şi distanţa de la centrul de greutate al sistemului la acel plan sau la acea axă.

Ca o consecință a momentelor statice este faptul că: dacă momentul static în raport cu un plan (axă) este nul, atunci centrul maselor se află în acel plan (axă).

3.1.4 Momente de inerţie mecanice

Momentul de inerţie mecanic al unui sistem de puncte materiale $M_i, (i = 1 \div n)$, cu masele m_i, în raport cu un plan, o axă sau un pol, este suma produselor dintre masele punctelor şi pătratul distanţei până la planul, axa sau polul considerat :

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \ . \qquad (3.43)$$

Momentul de inerţie centrifugal în raport cu două plane P_1, P_2 este:

$$J_{P_1P_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_{i_1} d_{i_2} \ , \qquad (3.44)$$

unde $d_{i_1} = d(M_i, P_1)$, $d_{i_2} = d(M_i, P_2)$.

Dacă masele m_i sunt distribuite continuu, atunci expresiile anterioare pot fi scrise în formă integrală astfel:

$$J = \int d^2 dm \qquad (3.45)$$

$$J_{P_1P_2} = \int d_1 d_2 dm \ . \qquad (3.46)$$

În raport cu un *sistem cartezian*, se pot defini:

a) **Momente de inerţie planare**:

$$J_{xOy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \quad , \quad J_{yOz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \quad , \quad J_{zOx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \qquad (3.47)$$

b) **Momente de inerţie axiale**:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) \ , \ J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) \ , \ J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \quad (3.48)$$

b) **Momente de inerţie polare**:

$$J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \tag{3.49}$$

d) **Momente de inerţie centrifugale**:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \;\; ; \;\; J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \;\; ; \;\; J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \; . \tag{3.50}$$

Pentru sistemele continue, pot fi scrise expresii similare celor anterioare, prin înlocuirea sumelor cu integrale.

3.1.5 Momente de inerţie geometrice

În cazul momentelor de inerţie geometrice, elementul de masă dm va fi înlocuit prin elementele de volum, de suprafaţă sau de linie dV, dA sau dl. Rezultă astfel, expresiile *momentelor de inerţie geometrice* (exemplificate pentru volume):

a) Moment de inerţie geometric:

$$I = \sum_{i=1}^{n} V_i d_i^2 \text{, respectiv } I = \int d^2 dV \tag{3.51}$$

b) Moment de inerţie geometric centrifugal:

$$I_{P_1P_2} = \sum_{i=1}^{n} V_i d_{i_1} d_{i_2} \text{ , respectiv } I_{P_1P_2} = \int d_1 d_2 dV \; . \tag{3.52}$$

Similar, în raport cu un *sistem cartezian*, se pot defini:

a) Momente de inerţie geometrice planare:

$$I_{xOy} = \sum_{i=1}^{n} V_i z_i^2 \;\; , \;\; I_{yOz} = \sum_{i=1}^{n} V_i x_i^2 \;\; , \;\; I_{zOx} = \sum_{i=1}^{n} V_i y_i^2 \tag{3.53}$$

b) Momente de inerţie geometrice axiale:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(y_i^2 + z_i^2\right), \;\; I_y = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(x_i^2 + z_i^2\right), \;\; I_z = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \tag{3.54}$$

c) Momentele de inerţie geometrice polare:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \tag{3.55}$$

d) Momentele de inerţie geometrice centrifugale:

$$I_{xy}=\sum_{i=1}^{n}V_i x_i y_i\ ,\quad I_{yz}=\sum_{i=1}^{n}V_i y_i z_i\ ,\quad I_{xz}=\sum_{i=1}^{n}V_i x_i z_i\ . \tag{3.56}$$

Pentru sisteme continue, pot fi scrise expresii similare, prin înlocuirea sumelor prin integrale.

Legătura dintre momentele de inerţie mecanice şi cele geometrice poate fi exprimată prin relaţia:

$$I=\frac{J}{\rho}\ \text{sau}\ J=\rho\cdot I\ , \tag{3.57}$$

unde ρ este masa specifică (densitatea) de volum, de suprafaţă sau liniară.

3.1.6 Raza de giraţie

Raza de giraţie (i) reprezintă distanţa la care trebuie plasată masa M, concentrată într-un singur punct, pentru a obţine acelaşi moment de inerţie J:

$$J=M\cdot i^2 \qquad \Rightarrow \qquad i=\sqrt{\frac{J}{M}}=\sqrt{\frac{I}{V}}\ . \tag{3.58}$$

În cazul suprafeţelor sau al liniilor, volumul V va fi înlocuit prin aria A sau lungimea l:

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}\ ,\ i=\sqrt{\frac{I}{l}}\ . \tag{3.59}$$

3.1.7 Proprietăţi ale momentelor de inerţie

Se pot enumera următoarele *proprietăţi ale momentelor de inerţie*:

a) momentele de inerţie planare, axiale sau polare sunt mărimi pozitive care devin nule numai în cazul în care sistemul material este conţinut în planul, pe axa sau în polul respectiv;

b) momentele de inerţie centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule;

c) între momentele de inerţie planare, axiale şi polare raportate la un sistem cartezian *Oxyz,* există relaţiile:

$$J_x=J_{xOy}+J_{xOz}\ ;\quad J_y=J_{xOy}+J_{yOz}\ ;\quad J_z=J_{xOz}+J_{yOz} \tag{3.60}$$

$$J_x+J_y\geq J_z\ ;\quad J_x+J_z\geq J_y\ ;\quad J_y+J_z\geq J_x \tag{3.61}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

$$J_O = J_{xOy} + J_{xOz} + J_{yOz} = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) \qquad (3.62)$$

$$J_O = J_x + J_{yOz}\,; \quad J_O = J_y + J_{xOz}\,; \quad J_O = J_z + J_{xOy} \qquad (3.63)$$

Dacă $z_i = 0$ (sistemul material este în planul *xOy*), atunci:

$$J_O = J_x + J_y \qquad (3.64)$$

d) momentul de inerţie centrifugal este egal cu semidiferenţa momentelor de inerţie planare faţă de două plane bisectoare P_1 şi P_2.

3.1.8 Variaţia momentelor de inerţie

a) Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe paralele (teorema lui Steiner)

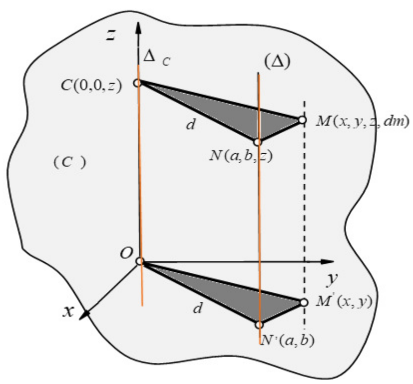


Fig. 3.5

Se consideră că centrul de greutate *C(0,0,z)* al unui solid rigid (C) se află pe axa $Oz\,(\Delta_C)$. Momentul de inerţie mecanic axial al solidului în raport cu axa (Δ) este:

$$J_\Delta = \int_{(C)} MN^2 dm\,. \qquad (3.65)$$

Vectorul $\overline{MN}$ poate fi exprimat analitic astfel:

$$\overline{MN} = (x-a)\bar{i} + (y-b)\bar{j} + (z-z)\bar{k}\,. \qquad (3.66)$$

Prin ridicare la pătrat, rezultă:

$$MN^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 . \qquad (3.67)$$

Înlocuind (3.67) în (3.65), rezultă:

$$J_\Delta = \int_{(C)} (x^2 + y^2) dm - 2a\int_{(C)} xdm - 2b\int_{(C)} ydm + (a^2 + b^2)\int_{(C)} dm , \qquad (3.68)$$

unde pot fi identificate următoarele mărimi:

$$J_z = \int_{(C)} (x^2 + y^2) dm \qquad (3.69)$$

$$Mx_C = \int_{(C)} x\, dm = 0 \qquad (3.70)$$

$$My_C = \int_{(C)} y\, dm = 0 \qquad (3.71)$$

$$d^2 = (a^2 + b^2) \qquad (3.72)$$

$$M = \int_{(C)} dm . \qquad (3.73)$$

Deoarece $J_z = J_{\Delta_C}$, folosind relaţiile de mai sus, rezultă:

$$J_\Delta = J_{\Delta_C} + Md^2 , \qquad (3.74)$$

relaţie cunoscută sub numele de *Teorema lui Steiner*.

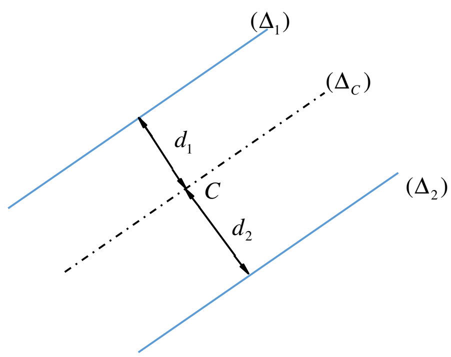


Fig. 3.6

Conform figurii 3.6, dacă (Δ_1) şi (Δ_2) sunt două axe paralele cu o axă (Δ_C) care trece prin centrul de masă şi d_1, d_2 sunt distanţele de la (Δ_C) la cele două axe, atunci pot fi scrise, prin aplicarea teoremei lui Steiner, următoarele relaţii:

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_C} + Md_1^2; \quad J_{\Delta_2} = J_{\Delta_C} + Md_2^2 \tag{3.75}$$

Prin eliminarea termenului J_{Δ_C} între cele două relaţii, rezultă:

$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_1} + M\left(d_2^2 - d_1^2\right), \tag{3.76}$$

relaţie care poartă numele de *teorema lui Steiner generalizată*.

b) Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe concurente

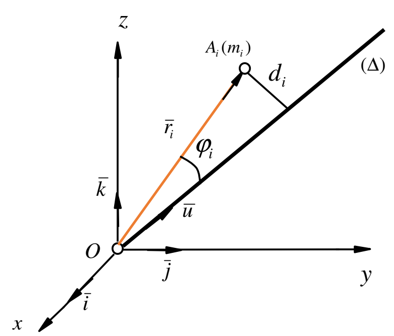


Fig. 3.7

Se consideră $A_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct oarecare al sistemului material (fig. 3.7). Se cunosc:

J_x, J_y, J_z - momentele de inerţie axiale ale sistemului de puncte;

J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} - momentele de inerţie centrifugale ale sistemului de puncte.

Se cere să se determine momentul de inerţie J_Δ în raport cu o axă (Δ) caracterizată prin versorul $\bar{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, unde α, β şi γ sunt cosinusurile directoare ale axei (Δ). Prin urmare, se poate scrie:

$$J_\Delta = \sum m_i d_i^2 \tag{3.77}$$

unde:

$$d_i = r_i \sin\varphi_i = r_i \cdot 1 \cdot \sin\varphi_i\,. \tag{3.78}$$

Din relaţia de mai sus se deduce:

$$d_i = \left|\bar{r}_i \times \bar{u}\right|. \tag{3.79}$$

Dezvoltând produsul vectorial prin determinantul simbolic asociat, se poate scrie:

$$\overline{r_i} \times \overline{u} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \overline{i}\left(y_i\gamma - z_i\beta\right) + \overline{j}\left(z_i\alpha - x_i\gamma\right) + \overline{k}\left(x_i\beta - y_i\alpha\right) \cdot \tag{3.80}$$

Prin ridicarea la pătrat a ecuaţiei de mai sus, rezultă pătratul distanţei d_i :

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \left(y_i\gamma - z_i\beta\right)^2 + \left(z_i\alpha - x_i\gamma\right)^2 + \left(x_i\beta - y_i\alpha\right)^2 = y_i^2\gamma^2 + z_i^2\beta^2 - \\ &- 2y_iz_i\beta\gamma + z_i^2\alpha^2 + x_i^2\gamma^2 - 2z_ix_i\gamma\alpha + x_i^2\beta^2 + y_i\alpha^2 - 2x_iy_i\alpha\beta = \\ &= \left(y_i^2 + z_i^2\right)\alpha^2 + \left(x_i^2 + z_i^2\right)\beta^2 + \left(x_i^2 + y_i^2\right)\gamma^2 - 2z_iy_i\alpha\beta - \\ &- 2y_iz_i\beta\gamma - 2z_ix_i\alpha\gamma. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Înlocuind pătratul distanţei în relaţia (3.77), rezultă:

$$\begin{aligned} J_\Delta = \sum m_id_i^2 &= \left[\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right)\right]\alpha^2 + \left[\sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right)\right]\beta^2 + \\ &+ \left[\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right]\gamma^2 - 2\left(\sum m_ix_iy_i\right)\alpha\beta - \\ &- 2\left(\sum m_iy_iz_i\right)\beta\gamma - 2\left(\sum m_iz_ix_i\right)\alpha\gamma \cdot \end{aligned} \tag{3.82}$$

Prin identificarea termenilor de mai sus cu momentele de inerţie:

$$\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) = J_x \qquad \sum m_ix_iy_i = J_{xy} \tag{3.83}$$

$$\sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) = J_y \qquad \sum m_iy_iz_i = J_{yz} \tag{3.84}$$

$$\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = J_z \qquad \sum m_iz_ix_i = J_{zx}\ , \tag{3.85}$$

rezultă *legea de variaţie a momentelor de inerţie în raport cu axe concurente*:

$$J_\Delta = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\alpha\gamma\ . \tag{3.86}$$

3.2 Probleme rezolvate [10]

3.2.1. Să se determine poziţia centrului de greutate pentru un arc de cerc omogen de rază *R*, cu unghiul la centru 2α (fig. 3.8).

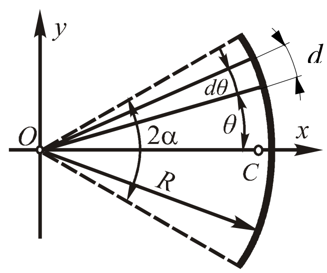


Fig. 3.8

Soluţie:

Pentru determinarea centrului de greutate al arcului de cerc se delimitează un arc elementar de lungime $dl = Rd\theta$, subîntins de unghiul $d\theta$ şi care se află la unghiul θ faţă de axa *Ox*. Având în vedere că lungimea *dl* este infinitesimală, centrul de greutate al porţiunii elementare considerate are coordonatele:

$$x = R\cos\theta; \quad y = R\sin\theta. \tag{1}$$

Prin urmare,

$$x_C = \frac{\int x\,dl}{\int dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} Rd\theta} = R\frac{\sin\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{2}$$

$$y_C = \frac{\int y dl}{\int dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} Rd\theta} = R\frac{-\cos\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha} = 0. \tag{3}$$

La concluzia $y_C = 0$ s-ar fi ajuns şi în urma observaţiei că *Ox* este axă de simetrie a arcului de cerc.

3.2.2. Se dă o bară omogenă de forma prezentată în figura 3.9. Se cere să se determine poziţia centrului de greutate al barei.

Soluţie:

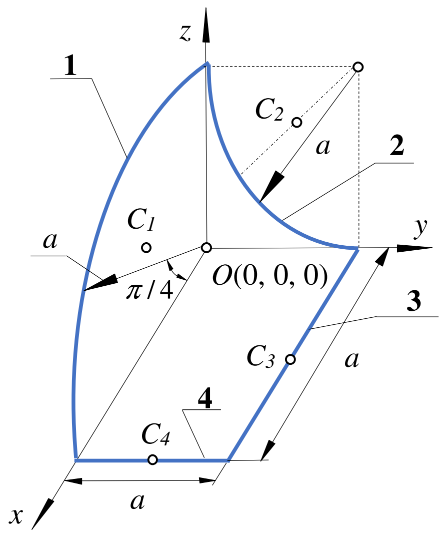


Fig. 3.9

Se ia un sistem de coordonate $xOyz$ şi se împarte figura în bare simple ale căror centre de greutate se cunosc sau se pot determina.

Astfel, se obţin: - sectorul de cerc 1 de rază a al cărui centru de greutate este C_1;
- sectorul de cerc 2 de rază a al cărui centru de greutate este C_2;
- bara 3 cu centrul de greutate C_3;
- bara 4 cu centrul de greutate C_4 .

Conform cu (3.29), relaţia vectorială de determinare a centrului maselor pentru o linie compusă este dată de:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{c_i} l_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i} . \tag{1}$$

Având în vedere figura 3.9, coordonatele centrului de masă al liniei compuse sunt:

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

$$x_C = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3 + x_4 l_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4},$$
$$y_C = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3 + y_4 l_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}, \qquad (2)$$
$$z_C = \frac{z_1 l_1 + z_2 l_2 + z_3 l_3 + z_4 l_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}.$$

Pentru a fi perfect explicitate relaţiile (2), trebuie determinate lungimile şi centrele de greutate la fiecare bară simplă în parte, prezentate în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Sfert de cerc	x_1	$OC_1 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}$
	y_1	0
	z_1	$OC_1 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}$
	l_1	$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi a}{2}$
Sfert de cerc	x_2	0
	y_2	$a - OC_2 \sin\frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)$
	z_2	$a - OC_2 \cos\frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)$
	l_2	$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi a}{2}$
Bară	x_3	$a/2$
	y_3	a
	z_3	0
	l_3	a
Bară	x_4	a
	y_4	$a/2$
	z_4	0
	l_4	a

Prin înlocuirea datelor din tabelul 3.1 în relaţiile (2), se obţin coordonatele centrului de greutate al cadrului din figura 3.9 şi anume $C(x_C, y_C, z_C)$:

$$x_C = \frac{5a^2}{2a(\pi+2)}, \quad y_C = \frac{a^2(\pi-2)+\frac{3a^2}{2}}{2a(\pi+2)}, \quad z_C = \frac{\frac{2a^3}{\pi}+\frac{a^2(\pi-2)}{8}}{2a(\pi+2)}. \qquad (3)$$

3.2.3. Să se determine poziţia centrului de masă pentru placa omogenă de forma unui sector circular, cu unghi la centru 2α şi rază R (fig. 3.10).

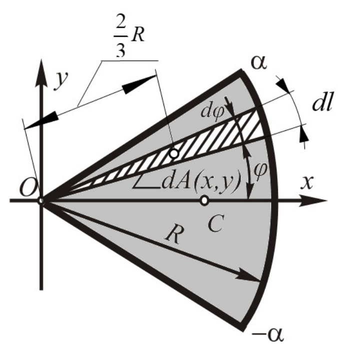


Fig. 3.10

Soluţie:

Pentru determinarea centrului de greutate al sectorului circular se delimitează un sector elementar având aria elementară dA, coarda corespunzătoare de lungime $dl = Rd\varphi$, unghi la centru $d\varphi$ şi care se află la unghiul φ faţă de axa Ox. Având în vedere că sectorul elementar poate fi aproximat cu un triunghi isoscel, centrul de greutate al acestuia are coordonatele:

$$x = \frac{2}{3}R\cos\varphi; \qquad y = \frac{2}{3}R\sin\varphi. \qquad (1)$$

iar aria elementară are expresia:

$$dA = \frac{R^2 d\varphi}{2}. \qquad (2)$$

Centrul de greutate al placii se determină astfel:

$$x_C = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R\cos\varphi \cdot \frac{R^2 d\varphi}{2}}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2 d\varphi}{2}} = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{3}$$

Deoarece Ox este axă de simetrie a plăcii, y_c devine:

$$y_C = 0. \tag{4}$$

3.2.4. O bucată de hârtie de forma din figura 3.11 se îndoaie după muchia *AB,* astfel încât ΔABC să se suprapună peste pătratul de latură a. Să se determine poziţia centrului de greutate al figurii care rezultă.

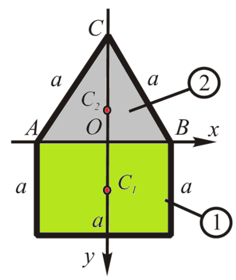


Fig. 3.11

Soluţie:

Se observă că Oy este axă de simetrie, prin urmare centrul de greutate este pe axa Oy, adică $x_C = 0$. Pentru determinarea lui y_C se împarte hârtia în cele două elemente, 1 şi 2, astfel că

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}. \tag{1}$$

Centrele de greutate ale elementelor 1 şi 2 sunt situate la distanţele:

$$y_{C_1} = \frac{a}{2} \quad ; \quad y_{C_2} = \frac{1}{3} OC_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a. \tag{2}$$

În urma calculelor rezultă:

$$y_C = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 + \frac{\sqrt{3}}{6} a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{a^2 + a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = 0{,}436\, a. \tag{3}$$

3.2.5. Să se determine poziţia centrului de greutate pentru suprafaţa haşurată din figura 3.12.

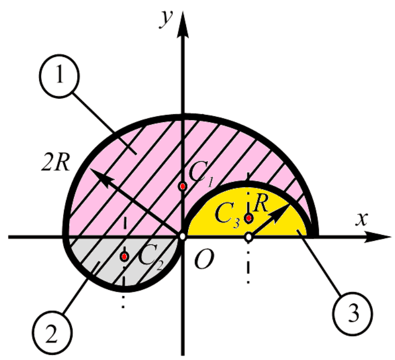


Fig. 3.12

Soluţie:

Suprafaţa dată se împarte în trei elemente, sectoare circulare cu unghi de 180° (semicercuri). Pentru fiecare dintre ele trebuie să se determine aria şi poziţia centrului de greutate.

Pentru determinarea coordonatelor centrelor de greutate se folosesc notaţiile generale din figura 3.13.

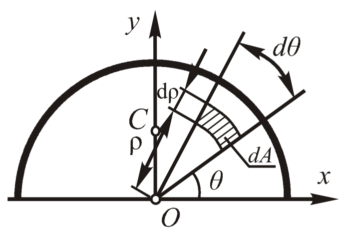


Fig. 3.13

Se observă că axa Oy este axă de simetrie, prin urmare centrul de greutate se află pe Oy şi $x_{C_1} = 0$. Pentru determinarea y_{C_1}, y_{C_2} şi y_{C_3} se aplică teorema momentului static pentru semicercul de rază r din figura 3.13. Relaţia determinată în cazul general se particularizează apoi pentru fiecare din elementele 1, 2 şi 3. Astfel:

$$A \cdot y_C = \iint y \, dA \,, \tag{1}$$

relaţie în care:

$$y = \rho \sin\theta;\;\; dA = \rho\, d\theta d\rho\,. \tag{2}$$

Introducând relaţiile (2) în (1) şi cunoscând aria semicercului $A = \pi r^2/2$, se determină:

$$y_C = \frac{\iint \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho}{A} = \frac{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^r \rho^2 d\rho}{A} = \frac{-\cos\theta\big|_0^\pi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^r}{A} = \frac{4r}{3\pi}\,. \tag{3}$$

Pentru elementul 1:

$$r \to 2R \Rightarrow y_{C_1} = \frac{8R}{3\pi}\;,\; A_1 = \frac{\pi(2R)^2}{2} = 2\pi R^2 \tag{4}$$

Pentru elementul 2:

$$x_{C_2} = -R, \qquad \text{(dreapta } x = \text{-}R \text{ este axă de simetrie)} \tag{5}$$

$$y_{C_2} = -\frac{4R}{3\pi}, \qquad A_2 = \frac{\pi R^2}{2} \tag{6}$$

Pentru elementul 3:

$$x_{C_3} = R\,, \qquad \text{(dreapta } x = R \text{ este axă de simetrie)} \tag{7}$$

$$y_{C_3} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad A_3 = \frac{\pi R^2}{2}\,. \tag{8}$$

Coordonatele centrului de greutate global sunt:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{-R\dfrac{\pi R^2}{2} - \left(R\dfrac{\pi R^2}{2}\right)}{2\pi R^2 + \dfrac{\pi R^2}{2} - \left(\dfrac{\pi R^2}{2}\right)} = -\frac{1}{2}R \tag{9}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{\dfrac{8R}{3\pi}\cdot 2\pi R^2 - \dfrac{4R}{3\pi}\cdot\dfrac{\pi R^2}{2} - \left(\dfrac{4R}{3\pi}\cdot\dfrac{\pi R^2}{2}\right)}{2\pi R^2} = \frac{2R}{\pi}\,. \tag{10}$$

Se observă că termenii corespunzători elementului 3 au fost introduşi cu semnul minus, întrucât acest element este un gol.

3.2.6. Să se determine poziţia centrului de greutate al plăcii din figura 3.14. Dimensiunile sunt date în centimetri.

Soluţie:

Se observă că *Oy* este axă de simetrie, prin urmare centrul de greutate este pe axa *Oy*. Cu alte cuvinte, $x_C = 0$. Pentru determinarea lui y_C se împarte placa în trei elemente dreptunghiulare, având dimensiunile din figură. Astfel,

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{(2 \cdot 20) \cdot 1 + (18 \cdot 2) \cdot 11 + (2 \cdot 15) \cdot 21}{2 \cdot 20 + 18 \cdot 2 + 2 \cdot 15} = 10{,}05 \ \text{[cm]}$$

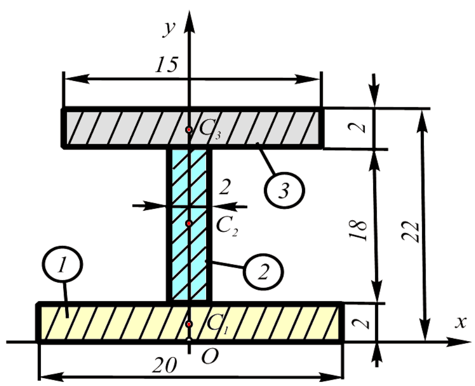


Fig. 3.14

3.2.7. Să se determine poziţia centrului de greutate al secţiunii haşurate din figura 3.15. Triunghiul *AEB* are vârful *E* în centrul de simetrie al pătratului *ABCD* .

Soluţie:

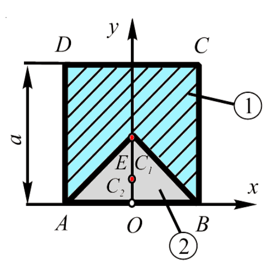


Fig. 3.15

Se observă că *Oy* este axă de simetrie, prin urmare centrul de greutate este pe axa *Oy*. Rezultă $x_C = 0$. Pentru determinarea lui y_C se consideră cele două elemente din figură, unde termenii corespunzători elementului 2 se vor lua cu semnul minus, elementul 2 fiind un gol. Astfel,

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{4}}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = 0{,}611\, a \cdot$$

3.2.8. Să se afle centrul de greutate al unei suprafeţe semicirculare de rază *r* (fig. 3.16).

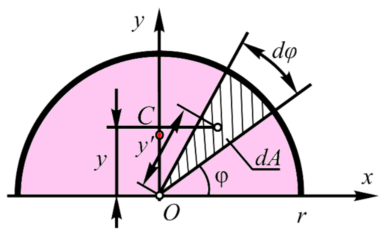


Fig. 3.16

Soluţie:

Se delimitează din suprafaţa semicirculară o porţiune elementară de forma unui sector circular, de unghi $d\varphi$ şi arie dA. Se observă că *Oy* este axă de simetrie, prin urmare $x_C = 0$. Mai rămâne de calculat doar y_C:

$$y_C = \frac{\int y dA}{\int dA}. \tag{1}$$

Aproximând sectorul circular elementar cu un triunghi isoscel, se pot scrie următoarele relaţii:

$$y' = \frac{2}{3} r, \quad y = y' \sin\varphi = \frac{2}{3} r \sin\varphi \tag{2}$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi\ . \tag{3}$$

Introducând relaţiile (2) şi (3) în (1) şi impunând limitele de integrare, se obţine:

$$y_C = \frac{\int_0^\pi \frac{2}{3} r \sin\varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 d\varphi}{\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\varphi} = \frac{\frac{1}{3} r^3 \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2} r^2 \int_0^\pi d\varphi} = \frac{2}{3} r \frac{-\cos\varphi\big|_0^\pi}{\varphi\big|_0^\pi} = \frac{4r}{3\pi}. \qquad (4)$$

3.2.9. Să se afle centrul de greutate al suprafeţei delimitate de graficul funcţiei $Y = \sin x$ şi axa Ox (fig. 3.17).

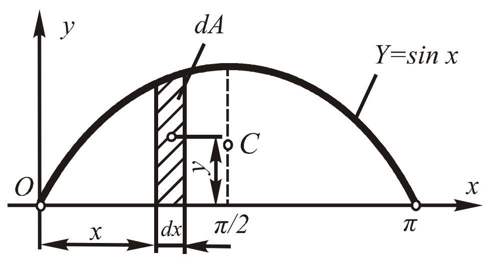


Fig. 3.17

Soluţie:

Se observă că dreapta de ecuaţie $x = \frac{\pi}{2}$ este axă de simetrie a suprafeţei din enunţul problemei. Prin urmare,

$$C \in \left(x = \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x_C = \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Pentru determinarea lui y_C se aplică relaţia:

$$y_C = \frac{\int y\, dA}{\int dA}, \qquad (2)$$

în care

$$dA = Ydx = \sin x\, dx \qquad (3)$$

iar y este ordonata centrului de greutate al suprafeţei elementare:

$$y = \frac{Y}{2} = \frac{\sin x}{2} \qquad (4)$$

Înlocuind (3) şi (4) în (2), se obţine:

$$y_C = \frac{\int_0^\pi \frac{\sin x}{2} \cdot \sin x\, dx}{\int_0^\pi \sin x\, dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx}{-\cos x\big|_0^\pi} = \frac{1}{4} \frac{x\big|_0^\pi - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi}{-(-1-1)} = \frac{\pi}{8} \qquad (5)$$

3.2.10. Să se stabilească formulele generale pentru calculul coordonatelor centrului de greutate la o suprafaţă omogenă având forma unui sfert de elipsă (fig. 3.18).

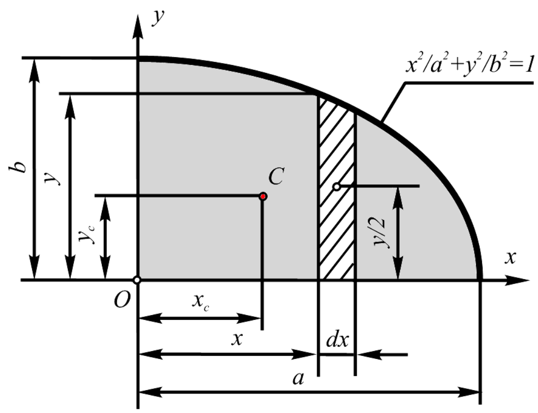


Fig. 3.18

Soluţie:

Din suprafaţa omogenă se delimitează o porţiune elementară de arie:

$$dA = ydx \tag{1}$$

Din ecuaţia elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

se poate deduce

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{3}$$

sau

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{4}$$

Prin urmare,

$$dA = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ dx\ . \tag{5}$$

Se aplică apoi formulele pentru calculul coordonatelor centrului de greutate pentru o suprafaţă plană şi omogenă, scrise sub formă integrală:

$$x_C = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \frac{\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx} \tag{6}$$

$$y_C = \frac{\int \frac{y}{2} dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a \frac{b}{2a}\cdot\frac{b}{a}\left(a^2-x^2\right)dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \frac{b}{2a}\,\frac{\int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx}{\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}\,. \tag{7}$$

Pentru rezolvarea integralelor se fac următoarele substituţii:

$$\sqrt{a^2-x^2} = u;\quad dx = du \;\Rightarrow\; a^2-x^2 = u^2;\quad -x\,dx = u\,du\,. \tag{8}$$

Înlocuind, rezultă:

$$\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\int_0^a u^2 du = -\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^a = -\left.\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^a = \frac{a^3}{3}\,. \tag{9}$$

Se aplică apoi metoda integrării prin părţi, unde $u = \sqrt{a^2-x^2};\quad v = x\,.$

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= uv - \int v\,du = \left|x\sqrt{a^2-x^2}\right|_0^a - \int_0^a x\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = \\ &= \left|x\sqrt{a^2-x^2}\right|_0^a + \int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left|x\sqrt{a^2-x^2}\right|_0^a + \int_0^a \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_0^a \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= \left|x\sqrt{a^2-x^2}\right|_0^a + \left|a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right|_0^a - \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Din (9) rezultă:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left|x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right|_0^a = \frac{1}{2}\left(a^2\frac{\pi}{2} - 0\right) = a^2\frac{\pi}{4}\quad. \tag{11}$$

Înlocuind (9) şi (11) în (6), se obţine:

$$x_C = \frac{4a}{3\pi}\;. \tag{12}$$

Numărătorul ultimei fracţii (6) se dezvoltă astfel:

$$\int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx = a^2 x\Big|_0^a - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = a^3 - \frac{1}{3}a^3\,. \tag{13}$$

Prin urmare, înlocuind (10) şi (12) în (6), rezultă:

$$y_C = \frac{4b}{3\pi}. \tag{14}$$

Dacă $a = b = r$, sfertul de elipsă se transformă în sfert de cerc şi se obţin următoarele coordonate ale centrului de greutate:

$$x_C = \frac{4r}{3\pi} \;;\; y_C = \frac{4r}{3\pi}\;. \tag{15}$$

3.2.11. Să se determine poziţia centrului de greutate pentru placa omogenă din figura 3.19.

Soluţie:

Se alege un sistem de referinţă *xOy*. Deoarece placa din figura 3.19 nu are simetrii, se împarte în plăci simple, ale căror centre de greutate sunt cunoscute sau se pot determina. Astfel, se notează:

- C_1 - centrul de greutate al plăcii pătrate 1;
- C_2 - centrul de greutate al plăcii triunghiulare 2;
- C_3 - centrul de greutate al plăcii semicirculare 3.

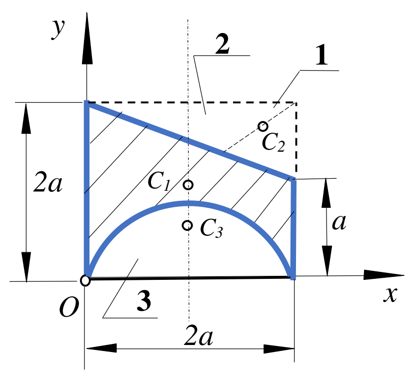


Fig. 3.19

În conformitate cu (3.29), relaţia vectorială de determinare a centrului maselor este dată de:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} . \qquad (1)$$

Se proiectează relaţia (1) pe axele sistemului de referinţă xOy ales şi se obţin coordonatele centrului de masă:

$$x_C = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3}, \qquad (2)$$
$$y_C = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3}.$$

În relaţiile (2) termenii care se referă la plinuri au semnul "+", iar termenii care se referă la goluri au semnul "-".

Prin înlocuirea datelor din tabelul 3.2 în relaţiile (2), rezultă centrul de greutate al plăcii din figură şi anume:

$$x_C = \frac{a(16 - 3\pi)}{3(6 - \pi)}, \qquad y_C = \frac{10a}{3(6 - \pi)} . \qquad (3)$$

Tabelul 3.2

Pătrat	x_1	a
	y_1	a
	A_1	$4a^2$
Triunghi	x_2	$\frac{2}{3}2a = \frac{4a}{3}$
	y_2	$a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a$
	A_2	a^2
Semicerc	x_3	a
	y_3	$\frac{4R}{3\pi} = \frac{4a}{3\pi}$
	A_3	$\frac{\pi a^2}{2}$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

3.2.12. Să se determine poziţia centrului de greutate al unui con circular drept de înălţime *h* şi raza bazei *r* (fig. 3.20).

Soluţie:

Se observă că *Oz* este axă de simetrie a conului, rezultă de aici că $C \in Oz$ şi prin urmare, $x_C = y_C = 0$. Pentru determinarea lui z_C se consideră o secţiune prin con, prin două plane perpendiculare pe înălţime, rezultând un trunchi elementar de con de înălţime *dz*, care poate fi aproximat cu un cilindru, după care se aplică relaţia:

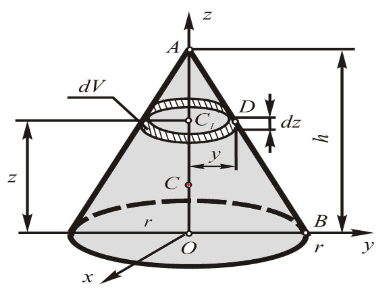


Fig. 3.20

$$z_C = \frac{\int_{(C)} z dV}{\int_{(C)} dV}. \tag{1}$$

Volumul secţiunii elementare se exprimă astfel:

$$dV = \pi y^2 dz = \pi \frac{r^2}{h^2}(h - z)^2 dz = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2 - 2hz + z^2\right)dz\,, \tag{2}$$

unde *y* a fost determinat din asemănarea de triunghiuri $\Delta\, ACD \sim \Delta\, AOB$, rezultând:

$$\frac{y}{r} = \frac{h - z}{h} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{r(h - z)}{h}\ . \tag{3}$$

Înlocuind (2) în (1), rezultă:

$$z_C = \frac{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2 z - 2hz^2 - z^3\right)dz}{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2 - 2hz - z^2\right)dz} = \frac{h^2\int_0^h z\,dz - 2h\int_0^h z^2 dz + \int_0^h z^3 dz}{h^2\int_0^h dz - 2h\int_0^h z\,dz + \int_0^h z^2 dz} = \frac{1}{4}h \cdot \qquad (4)$$

În concluzie, centrul de greutate al unui con circular drept se află pe înălţimea acestuia, la un sfert de bază.

3.2.13. Pentru o linie dreaptă de lungime *l* şi masă *M*, să se determine momentele de inerţie mecanice şi geometrice, în raport cu două axe perpendiculare pe linie, una cu originea într-unul din capete, iar cealaltă având originea în centrul de masă (fig. 3.21).

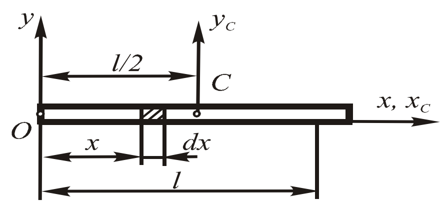


Fig. 3.21

Soluţie:

Se consideră o porţiune elementară din linie, de lungime *dx* şi masă $dm = \rho\, dx$, unde ρ reprezintă densitatea liniară.

Momentul de inerţie mecanic în raport cu axa *Oy* este:

$$J_y = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho\, dx = \rho \frac{l^3}{3}. \qquad (1)$$

Introducând masa întregii linii:

$$M = \rho l, \qquad (2)$$

se obţine:

$$J_y = M\frac{l^2}{3}. \qquad (3)$$

Aplicând teorema lui Steiner în raport cu axele *Oy* şi Cy_C:

$$J_y = J_{yC} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2, \qquad (4)$$

se obţine:

$$J_{yC} = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}. \tag{5}$$

Momentele de inerţie geometrice se determină astfel:

$$I_y = \frac{J_y}{\rho} = \frac{l^3}{3}$$
$$I_{y_C} = \frac{J_{y_C}}{\rho} = \frac{l^3}{12}. \tag{6}$$

3.2.14. Să se determine momentele de inerţie mecanice J_x, J_y şi J_O pentru un arc de cerc cu unghiul la centru 2α, rază r şi densitate liniară ρ (fig. 3.22).

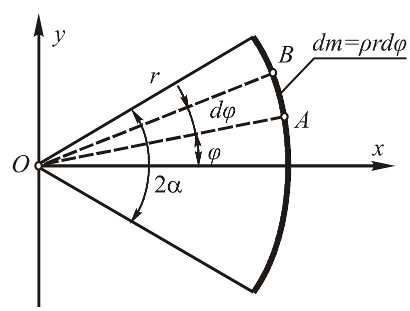


Fig. 3.22

Soluţie:

Din arcul de cerc se delimitează porţiunea elementară *AB*, de unghi la centru $d\varphi$, situată la unghiul φ faţă de *Ox*. Coordonatele centrului de masă al porţiunii elementare *AB* se aproximează cu coordonatele punctului A, porţiunea elementară fiind infinit de mică. Coordonatele punctului *A* sunt:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi\,. \tag{1}$$

Momentul de inerţie mecanic în raport cu axa *Ox* este:

$$J_x = \int y^2 dm = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \sin^2 \varphi \rho\, r\, dl\,. \tag{2}$$

Se ştie de la trigonometrie că:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}. \qquad (3)$$

Prin urmare:

$$J_x = \rho r^3 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-\cos 2\varphi)dl = \rho \frac{r^3}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} \qquad (4)$$

$$J_x = \rho \frac{r^3}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) == \frac{1}{2}\rho\, r\, 2\alpha\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)r^2. \qquad (5)$$

Înlocuind masa M în (5),

$$M = \rho\, r\, 2\alpha\,, \qquad (6)$$

se obţine:

$$J_x = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)Mr^2. \qquad (7)$$

Dar

$$\cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\ . \qquad (8)$$

Momentul de inerţie mecanic în raport cu axa *Oy*, având în vedere (8), este:

$$J_y = \int x^2 dm = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos^2 \varphi \rho\, r\, d\varphi = \frac{\rho r^3}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1+\cos 2\varphi)d\varphi \quad (9)$$

$$J_y = \frac{\rho r^3}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2}\rho\, r\, 2\alpha\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)r^2. \qquad (10)$$

Introducând masa *M*, se obţine:

$$J_y = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)Mr^2. \qquad (11)$$

În plan, momentul de inerţie mecanic polar în raport cu punctul O este:

$$J_O = J_x + J_y = Mr^2. \qquad (12)$$

3.2.15. Să se determine momentele de inerţie geometrice I_x, I_y, I_O, I_{xy} ale unei plăci dreptunghiulare omogene cu dimensiunile indicate în figura 3.23. Să se determine, de asemenea, semiaxele elipselor de inerţie în raport cu punctele *O* şi *C* (centrul masei).

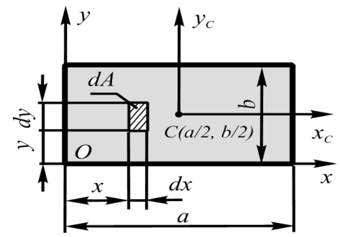


Fig. 3.23

Soluţie:

Din suprafaţa plăcii se delimitează suprafaţa elementară de arie dA, de dimensiuni şi poziţie conform figurii 3.23. Aria elementară este:

$$dA = dx\,dy\,. \tag{1}$$

Momentul de inerţie geometric centrifugal I_{xy} poate fi scris astfel:

$$I_{xy} = \int xy\,dA = \int xy\,dx\,dy \tag{2}$$

sau, separând şi delimitând variabilele de integrare,

$$I_{xy} = \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^b = \frac{a^2b^2}{4}\,. \tag{3}$$

Momentul de inerţie geometric axial în raport cu axa Ox este:

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = x\Big|_0^a \cdot \frac{1}{3}\, y^3\Big|_0^b = \frac{ab^3}{3}\,. \tag{4}$$

Similar, se obţine

$$I_y = \frac{ba^3}{3}\,. \tag{5}$$

Momentul de inerţie geometric polar în raport cu polul O se poate scrie:

$$I_O = I_x + I_y = \frac{ab}{3}\left(a^2 + b^2\right). \tag{6}$$

Elipsa de inerţie în punctul O are semiaxele:

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \sqrt{\frac{I_x\rho}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{ab^3}{3}\rho}{ab\rho}} = \sqrt{\frac{b^2}{3}} = b\frac{\sqrt{3}}{3} \\ i_y &= \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \sqrt{\frac{I_y\rho}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{a^3b}{3}\rho}{ab\rho}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \tag{7}$$

iar elipsa de inerţie în raport cu centrul masei este caracterizată prin semiaxele:

$$\begin{aligned} i_{xC} &= \sqrt{\frac{J_{xC}}{M}} = \sqrt{\frac{I_{xC}\rho}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{ab^3}{12}\rho}{ab\rho}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = b\frac{\sqrt{3}}{6} \\ i_{yC} &= \sqrt{\frac{J_{yC}}{M}} = \sqrt{\frac{I_{yC}\rho}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{a^3b}{12}\rho}{ab\rho}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = a\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned} \tag{8}$$

3.2.16. Să se determine momentele de inerţie polare J_O şi I_O pentru un disc circular de centru O şi de rază R (fig. 3.24).

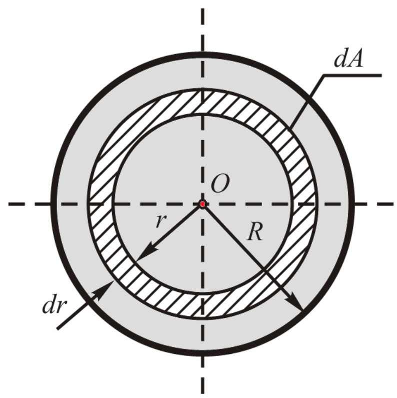


Fig. 3.24

Soluţie:

Din suprafaţa discului se consideră o coroană circulară elementară de grosime delimitată de raza interioară r şi raza exterioară $r+dr$. Fiind o suprafaţă elementară, aria acesteia poate fi considerată egală cu aceea a unui dreptunghi elementar de lungime $2\pi r$ şi de lăţime dr astfel:

$$dA = 2\pi r\, dr\,. \tag{1}$$

Masa elementară a porţiunii delimitate este:

$$dm = \rho dA\,. \tag{2}$$

Prin urmare, momentul mecanic polar al discului este:

$$J_O = \int r^2 dm = \int_0^R 2\pi\rho\, r^3 dr = 2\pi\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho R^4}{2}\,. \tag{3}$$

Notând masa discului prin:

$$M = \rho\pi R^2\,, \tag{4}$$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

momentul mecanic polar devine:

$$J_O = \frac{MR^2}{2}. \tag{5}$$

Momentul geometric polar se obţine împărţind momentul mecanic polar la densitatea de suprafaţă. Astfel,

$$I_O = \frac{\pi R^4}{2}. \tag{6}$$

3.2.17. Se cere să se calculeze pentru o placă dreptunghiulară omogenă *ABCD* (fig. 3.25a), de laturi *a, b* şi masă *M* următoarele elemente:

1) momentul de inerţie mecanic în raport cu laturile *AB* şi *AD*;
2) razele de inerţie în raport cu axele *Cx*, *Cy* şi cu laturile *AB*, *AD*;
3) elipsa de inerţie corespunzătoare centrului de masă *C* al plăcii;
4) momentul de inerţie mecanic polar în raport cu centrul dreptunghiului;
5) momentul centrifug $I_{x'y'}$.

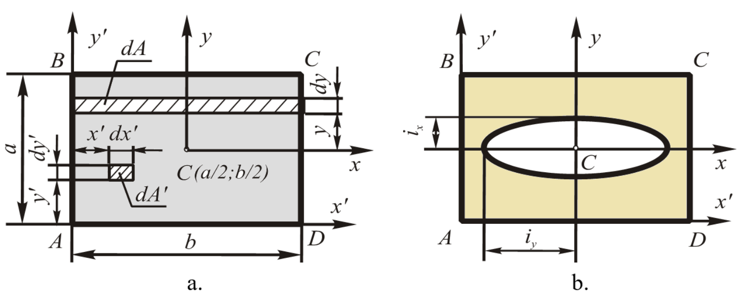


Fig. 3.25

Soluţie:

1) Se delimitează din suprafaţa dreptunghiului o suprafaţă elementară *dA*, de masă elementară:

$$dm = \rho\, dA = \rho\, b\, dy. \tag{1}$$

Momentul de inerţie mecanic axial în raport cu axa *Cx* este:

$$J_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho\, b\, y^2 dy = \rho b \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \rho \frac{ba^3}{12} = M\frac{a^2}{12}, \tag{2}$$

unde prin M s-a notat masa dreptunghiului iniţial.

$$M = \rho\, a\, b. \tag{3}$$

Similar, se obţine,

$$J_y = \frac{Mb^2}{12}. \tag{4}$$

Momentul de inerţie în raport cu una din laturile dreptunghiului se determină folosind formula lui Steiner :

$$J_{AD} = J_x + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{3}. \tag{5}$$

Similar, se poate determina:

$$J_{AB} = \frac{Mb^2}{3}. \tag{6}$$

2) Razele de inerţie se determină astfel:

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad & i_y &= \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{3}}{6} \\ i_{AB} &= \sqrt{\frac{J_{AB}}{M}} = \sqrt{\frac{b^2}{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \qquad & i_{AD} &= \sqrt{\frac{J_{AD}}{M}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned} \tag{7}$$

3) În figura 3.25b s-a reprezentat elipsa de inerţie corespunzătoare centrului de masă C al plăcii. Elipsa de inerţie aferentă punctului C are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 . \tag{8}$$

4) Momentul de inerţie polar în raport cu punctul C se obţine astfel:

$$J_C = J_x + J_y = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right) . \tag{9}$$

5) Momentul centrifugal. În acest scop se delimitează o porţiune elementară dreptunghiulară, având laturile dx' şi dy', situată la coordonatele x' şi y' (fig. 3.25a). Masa elementară este acum:

$$dm' = \rho\, dx'\, dy' . \tag{10}$$

Având în vedere cele de mai sus, se poate scrie:

$$J_{x'y'} = \int x'y'\,dm' = \rho\int_0^a x'\,dx' \int_0^b y'\,dy' = \rho\,\frac{a^2}{2}\cdot\frac{b^2}{2} = M\,\frac{ab}{4}. \tag{11}$$

3.2.18. Să se determine J_x şi J_y pentru suprafaţa compusă şi omogenă din figura 3.26.

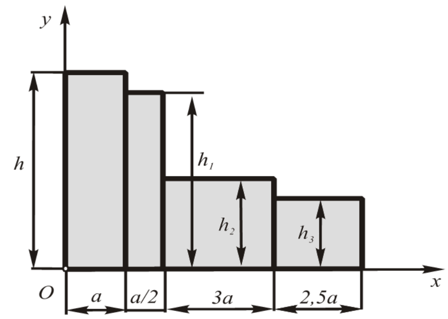


Fig. 3.26

Soluţie:

Pentru un dreptunghi de laturi *a* şi *b* şi densitate ρ, momentele de inerţie mecanice axiale în raport cu axele x_C, y_C care trec prin centrul de greutate, sunt:

$$J_{xC} = \rho\frac{ab^3}{12}\ ;\ J_{yC} = \rho\frac{a^3 b}{12}. \tag{1}$$

Momentele de inerţie mecanice determinate în raport cu laturile dreptunghiului, considerând latura *a* coliniară cu *Ox* şi paralelă cu Cx_C şi *b* coliniară cu *Oy* şi paralelă cu Cy_C, au următoarele expresii:

$$J_x = \rho\frac{ab^3}{3}\ ;\ J_y = \rho\frac{a^3 b}{3}. \tag{2}$$

Având în vedere (2), pentru placa compusă omogenă din figura 3.26, momentul de inerţie mecanic în raport cu axa *Ox* se obţine astfel:

$$J_x = \sum_{i=1}^{4} J_{x_i} = \frac{\rho}{3}\left(ah^3 + \frac{a}{2}h_1^3 + 3ah_2^3 + 2{,}5ah_3^3\right). \tag{3}$$

Pentru momentul de inerţie mecanic axial în raport cu axa *Oy* se aplică teorema lui Steiner, exprimând momentele de inerţie ale plăcilor componente în raport cu *Oy*:

$$J_y = \sum_{i-1}^{n} J_{y_i} \tag{4}$$

$$J_{y_1} = \frac{\rho}{3} h a^3 \tag{5}$$

$$J_{y2} = \frac{\rho}{12} h_1 \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \rho \frac{a}{2} h_1 \left(a + \frac{a}{4}\right)^2 \tag{6}$$

$$J_{y3} = \frac{\rho}{12} h_3 (3a)^3 + \rho \cdot 3a \cdot h_2 \left(a + \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right)^2 \tag{7}$$

$$J_{y4} = \frac{\rho}{12} h_3 (2{,}5\ a)^3 + \rho \cdot h_3 \cdot 2{,}5 a \cdot \left(a + \frac{a}{2} + 3a + \frac{2{,}5 a}{2}\right)^2 . \tag{8}$$

În final, se obţine:

$$\begin{aligned} J_y = {} & \frac{\rho}{3} h a^3 + \frac{\rho}{12} h_1 \frac{a^3}{8} + \rho \frac{a}{2} h_1 \cdot \left(\frac{5a}{4}\right)^2 + \frac{\rho}{12} h_2 \cdot 27a + \rho \cdot 3a \cdot h_2 \cdot 9a^2 + \\ & + \frac{\rho}{12} h_3 (2{,}5a)^3 + \rho h_3 \cdot 2{,}5a (5{,}75\, a)^2 . \end{aligned} \tag{9}$$

3.2.19. Să se calculeze momentele de inerţie ale unei plăci trapezoidale omogene (fig. 3.27):

a) în raport cu una din baze;
b) în raport cu axa paralelă cu baza care trece prin centrul de greutate C_1.

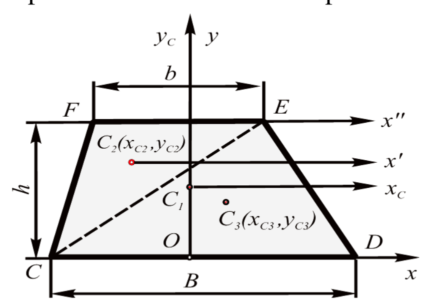


Fig. 3.27

Soluţie:

a) Se aleg axele de coordonate *Ox, Oy* astfel încât *Oy* să treacă prin centrul de greutate C_1 al plăcii, conform figurii 3.27. Se descompune trapezul dat în ΔCDE şi ΔCEF, de înălţime *h*. Momentul de inerţie mecanic axial în raport cu baza mare este egal cu suma momentelor de inerţie ale celor două triunghiuri exprimate în raport cu această latură, adică

$$J_x = J_{x_{\Delta CDE}} + J_{x_{\Delta CEF}}. \tag{1}$$

Pentru ΔCDE, momentul de inerţie în raport cu baza CD este (vezi anexa 2):

$$J_{x_{\Delta CDE}} = \rho \frac{Bh^3}{12}. \tag{2}$$

Momentul de inerţie al ΔCEF în raport cu baza EF este:

$$J_{x''} = \rho \frac{bh^3}{12}. \tag{3}$$

Aplicând teorema lui Steiner, se obţine:

$$J_{x''} = J_{x'} + M_{\Delta CEF} d^2, \tag{4}$$

unde distanta d are expresia:

$$d = \frac{1}{3} h, \tag{5}$$

iar

$$M_{\Delta CEF} = \rho \frac{bh}{2} \tag{6}$$

reprezintă masa ΔCEF. Din (4), (5) şi (6) rezultă momentul de inerţie mecanic $J_{x'}$ al plăcii triunghiulare CEF în raport cu axa C_2x' care trece prin centrul său de greutate şi anume

$$J_{x'} = J_{x''} - M_{\Delta CEF} \left(\frac{1}{3} h \right)^2 = \rho \frac{bh^3}{12} - \rho \frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{9} h^2 = \rho \frac{bh^3}{36}. \tag{7}$$

Conform aceleiaşi teoreme,

$$J_{x_{\Delta CEF}} = J_{x'} + M_{\Delta CEF} d_1^2, \tag{8}$$

unde

$$d_1 = \frac{2}{3} h. \tag{9}$$

Rezultă astfel:

$$J_{x_{\Delta CFE}} = \rho \frac{bh^3}{36} + \rho \frac{bh}{2} \cdot \frac{4}{9} h^2 = \rho \frac{bh^3}{4}. \tag{10}$$

La acelaşi rezultat se ajunge şi prin aplicarea teoremei lui Steiner generalizată:

$$J_{x_{\Delta CFE}} = J_{x''} + M \left(d_2^2 - d_1^2 \right),$$

relaţie în care

$$J_{x''} = \rho \frac{bh^3}{12}, \quad M = \rho \frac{bh}{12}, \quad d_1 = \frac{h}{3}, \quad d_2 = \frac{2h}{3}.$$

Înlocuind (2) şi (10) în (1), se obţine

$$J_x = \rho \frac{Bh^3}{12} + \rho \frac{bh^3}{4} = \frac{\rho h^3}{4}\left(\frac{B}{3} + b\right). \tag{11}$$

Masa trapezului este:

$$M_{trapez} = \rho A_{trapez} = \rho \frac{B+b}{2} h. \tag{12}$$

Având în vedere (12), relaţia (11) devine succesiv:

$$J_x = \rho \frac{(B+3b)}{12} h^3 = \rho \frac{B+b}{B+b} \cdot \frac{(B+3b)}{2 \cdot 6} h \cdot h^2, \tag{13}$$

respectiv

$$J_x = M_{trapez} \cdot \frac{h^2}{6} \cdot \frac{B+3b}{B+b}. \tag{14}$$

c) Aplicând teorema lui Steiner în raport cu axele Ox şi C_1x_C, rezultă:

$$J_x = J_{x_C} + M_{trapez} \cdot OC_1^2. \tag{15}$$

De aici poate fi exprimat:

$$J_{x_C} = J_x - M_{trapez} \cdot OC_1^2. \tag{16}$$

Distanţa OC_1 este de fapt ordonata centrului de greutate C_1 al trapezului. Prin urmare,

$$OC_1 = y_G = \frac{y_{C_3} A_{\Delta CDE} + y_{C_2} A_{\Delta CEF}}{A_{\Delta CDE} + A_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{1}{3} h \cdot \frac{Bh}{2} + \frac{2}{3} h \frac{bh}{2}}{\frac{B+b}{2} \cdot h} = \frac{h}{3} \cdot \frac{(B+2b)}{(B+b)}. \tag{17}$$

Înlocuind (14) şi (17) în (16) rezultă:

$$J_{x_C} = M_{trapez} \frac{h^2}{6} \cdot \frac{B+3b}{B+b} - M_{trapez} \frac{h^2}{9}\left(\frac{B+2b}{B+b}\right)^2. \tag{18}$$

Aducând la numitor comun şi efectuând calculele, se obţine:

$$J_{x_C} = M_{trapez} \frac{h^2}{18} \cdot \frac{3(B+3b)(B+b) - 2(B+2b)^2}{(B+b)^2} = M_{trapez} \frac{h^2}{18} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{(B+b)^2}. \tag{19}$$

3.2.20. Să se calculeze momentele de inerţie mecanice axiale ale unei plăci triunghiulare în raport cu axele ce trec prin punctele O şi C (centrul de greutate, figura 3.28) .

Soluţie:

Din suprafaţa triunghiului se delimitează două porţiuni elementare, una paralelă cu *Ox*, situată la distanţa *y* de aceasta şi una paralelă cu *Oy*, situată la distanţa *x* de axa *Oy*. Momentul de inerţie axial în raport cu axa *Ox* este:

$$J_x = \int y^2 dm \ , \tag{1}$$

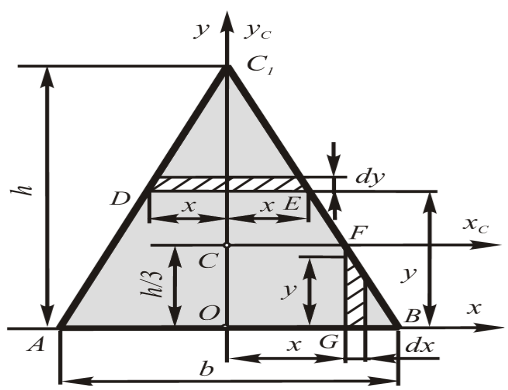


Fig. 3.28

unde elementul de masă are expresia:

$$dm = \rho \cdot dA = \rho \cdot 2x \cdot dy \, . \tag{2}$$

Din asemănarea triunghiurilor DEC_1 şi ABC_1, rezultă:

$$\frac{2x}{b} = \frac{h-y}{h} \ \text{, de unde } \ 2x = \frac{b}{h}(h-y). \tag{3}$$

Înlocuind (3) şi (2) în (1), se determină:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^h y^2 \rho 2x \, dy = \int_0^h \rho y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy = \\ &= \frac{\rho b}{h} \int_0^h (h-y) y^2 \, dy = \rho \frac{b}{h}\left(h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^h . \end{aligned} \tag{4}$$

Cunoscând masa triunghiului:

$$M = \rho \cdot A = \rho \frac{bh}{2} \tag{5}$$

şi înlocuind această masă în (4), se obţine:

$$J_x = \rho \frac{b}{h}\frac{h^4}{12} = \rho \frac{bh^3}{12} = M\frac{h^2}{6}. \tag{6}$$

Momentul de inerţie axial în raport cu axa *Oy* este:

$$Jy = \int x^2 dm \tag{7}$$

unde, de data aceasta, elementul de masă este:

$$dm = \rho\, dA = \rho\, y\, dx\ . \tag{8}$$

Din asemănarea triunghiurilor *GBF* şi OBC_1, se poate scrie următoarea relaţie:

$$\frac{y}{h} = \frac{\frac{b}{2} - x}{\frac{b}{2}}, \tag{9}$$

din care

$$y = \frac{2h\left(\frac{b}{2} - x\right)}{b} = \frac{h}{b}(b - 2x). \tag{10}$$

Înlocuind (10) şi (9) în (8) şi tinând cont de (5), rezultă:

$$J_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \rho\, y\, dx = \frac{\rho h}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (b - 2x)x^2\, dx = \frac{\rho h}{b}\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} =$$
$$= \frac{\rho h}{b}\left(\frac{b^4}{24} + \frac{b^4}{24} - \frac{b^4}{32} + \frac{b^4}{32}\right) = \frac{\rho\, h\, b^3}{12} = M\frac{b^2}{6}. \tag{11}$$

Aplicând teorema lui Steiner, se poate scrie:

$$J_x = J_{x_C} + M \cdot d^2, \tag{12}$$

unde $d = \frac{h}{3}$ este distanţa dintre cele două axe.

Rezultă, în continuare:

$$J_{xC} = J_x - M\frac{h^2}{9} = \frac{Mh^2}{6} - \frac{Mh^2}{9} = \frac{3Mh^2}{54} = \frac{Mh^2}{18}. \tag{13}$$

Având în vedere că axele *Oy* şi Cy_C sunt suprapuse:

$$J_{yC} = J_y = M\frac{b^2}{6}. \tag{14}$$

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

3.2.21. Să se calculeze pentru un sector circular omogen, de masă M, rază R şi unghi la centru 2α (fig. 3.29a):

a) momentele de inerţie mecanice şi razele de inerţie în raport cu axele O_x şi O_y;

b) momentul de inerţie mecanic polar în raport cu centrul cercului, O;

c) momentul de inerţie mecanic în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate şi este paralelă cu Ox ;

d) aplicaţie în cazul sfertului de cerc, semicercului şi cercului;

e) să se determine elipsele de inerţie în punctul C (centrul de greutate) şi punctul O.

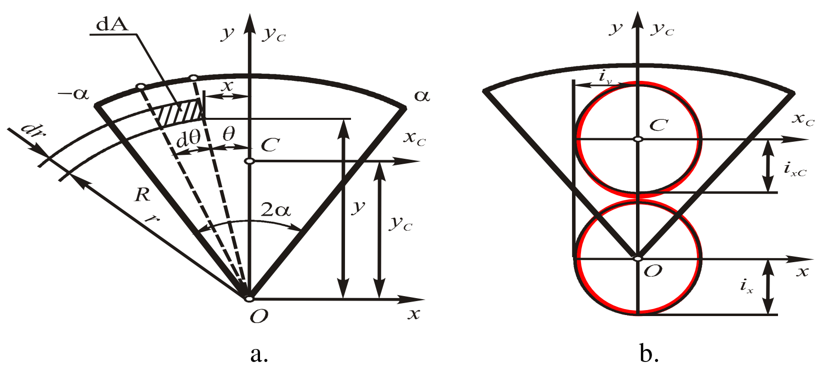


Fig. 3.29

Soluţie:

a) Se delimitează o porţiune elementară din suprafaţa plăcii situată la raza r şi unghiul θ faţă de Oy. Momentul de inerţie în raport cu axa Ox este:

$$J_x = \int y^2 dm \,, \tag{1}$$

unde:

$$dm = \rho \, dA = \rho \; r \, d\theta \, dr \; . \tag{2}$$

Coordonatele centrului de masă al suprafeţei elementare sunt:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ y &= r \cos \theta . \end{aligned} \tag{3}$$

Introducând (2) şi (3) în (1), rezultă:

$$J_x = \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \rho\, r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} = \tag{4}$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right).$$

Masa sectorului circular este:

$$M = \rho A = \rho \frac{R \cdot 2\alpha \cdot R}{2} = \rho \alpha R^2 . \tag{5}$$

Introducând (5) în (4) se obţine:

$$J_x = \frac{MR^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right). \tag{6}$$

Momentul de inerţie mecanic al plăcii în raport cu axa Oy este:

$$J_y = \int x^2 dm = \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \sin^2\theta\ \rho\ r\ \ dr\, d\theta = \rho \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} r^3\ dr\ \sin^2\theta\ d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} = \tag{7}$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \rho \alpha R^2 \frac{R^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right).$$

Introducând (5) în (7), rezultă:

$$J_y = \frac{MR^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) . \tag{8}$$

Razele de inerţie (giraţie) se determină astfel:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \frac{R}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} . \tag{9}$$

b) Momentul polar în raport cu polul O este:

$$J_O = J_x + J_y = \frac{MR^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) + \frac{MR^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) = \frac{MR^2}{2} . \tag{10}$$

c) Notând cu Cx_C axa ce trece prin centrul de greutate şi este paralelă cu Ox, se poate aplica teorema lui Steiner:

$$J_x = J_{x_C} + M\ y_C^2 . \tag{11}$$

Din ecuaţia de mai sus rezultă:

$$J_{x_C} = J_x - M\ y_C^2 , \tag{12}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

unde y_C este ordonata centrului de greutate şi se determină cu relaţia:

$$y_C = \frac{\int_{(S)} y\, dA}{\int_{(S)} dA}. \tag{13}$$

În expresia de mai sus, intervin următoarele mărimi:

$$y = \frac{2}{3} R \cos\theta; \quad dA = \frac{R d\theta \cdot R}{2}. \tag{14}$$

Introducând (14) în (13), se obţine:

$$y_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos\theta \frac{R^2 d\theta}{2}}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{\frac{R^3}{3} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\frac{R^2}{2} \theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{15}$$

Înlocuind (6) şi (15) în (12), rezultă:

$$\begin{aligned} J_{xC} &= \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) - \frac{4}{9} MR^2 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} = \\ &= \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16}{9}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Deoarece axa Oy este coliniară cu Cy_C, se poate scrie:

$$J_y = J_{y_C}. \tag{17}$$

d) Pentru diferite valori particulare ale unghiului α, specifice pentru sfert de cerc, semicerc şi cerc, momentele de inerţie corespunzătoare sunt prezentate în tabelul 3.3.

Tabelul 3.3

α	J_x	J_y	J_O	J_{x_C}
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{MR^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{MR^2}{4}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}-\frac{16}{9}\cdot\frac{1/2}{\pi^2/16}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{4}\left(1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{\pi^2/4}\right)$
π	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{4}$

e) Deoarece Oy este axă de simetrie, momentele J_x, J_y, J_{x_C} sunt momente principale de inerţie.

Semiaxele elipselor sunt:

- În raport cu punctul O:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \frac{R}{2}\sqrt{\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)}$$
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \frac{R}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)}. \tag{18}$$

- În raport cu punctul C (centrul de greutate):

$$i_{xC} = \sqrt{\frac{J_{xC}}{M}} = \frac{R}{2}\sqrt{1+\frac{\sin 2\alpha}{2}-\frac{16}{9}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$$
$$i_{yC} = i_y . \tag{19}$$

Axa $Oy \equiv Cy_C$ este axă de simetrie a sectorului circular şi, deci, este axă principală de inerţie. Cum axele principale de inerţie sunt axe de simetrie ale elipsei de inerţie, axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie pentru elipsa de inerţie corespunzătoare punctului O, iar axele Cx_C şi Cy_C sunt axe de simetrie pentru elipsa de inerţie aferentă punctului C. Ecuaţiile elipselor de inerţie corespunzătoare punctelor O şi C sunt:

$$\frac{x^2}{i_y^2}+\frac{y^2}{i_x^2}=1, \quad \frac{x_C^2}{i_{y_C}^2}+\frac{y_C^2}{i_{x_C}^2}=1 . \tag{20}$$

În figura 3.29b sunt reprezentate elipsele de inerţie corespunzătoare punctelor O şi C.

3.2.22. Să se calculeze momentele de inerţie mecanice şi geometrice ale unui paralelipiped omogen, de laturi a,b,c în raport cu axele sistemului $Cxyz$, în raport cu centrul de masă C şi în raport cu axa Δ (fig. 3.30).

Soluţie:

Momentul de inerţie mecanic în raport cu axa Cz al paralelipipedului elementar este echivalent cu momentul de inerţie mecanic polar al plăcii dreptunghiulare în raport cu centrul său de masă. Astfel, se poate scrie:

$$dJ_z = dm\frac{a^2+b^2}{12} , \tag{1}$$

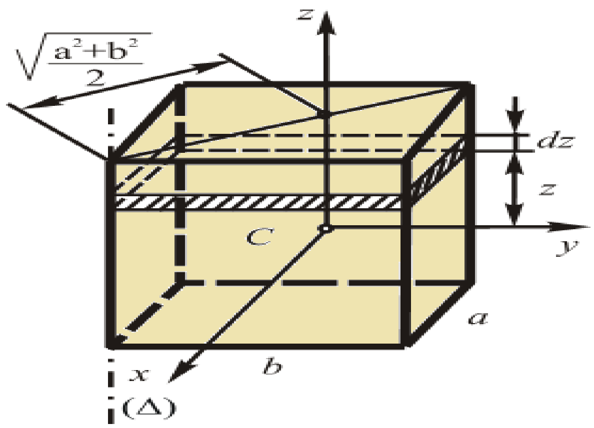


Fig. 3.30

pentru că la placa dreptunghiulară, conform cu relaţia (9) de la problema 3.16, momentul de inerţie polar în raport cu centrul de greutate are valoarea

$$J_C = M\frac{a^2+b^2}{12}. \tag{2}$$

Masa elementului de paralelipiped este:

$$dm = \rho\, a\, b\, dz. \tag{3}$$

Integrând (1), se obţine:

$$J_z = \int dm\frac{a^2+b^2}{12}, \tag{4}$$

relaţie în care *dm* are valoarea exprimată prin relaţia (3), astfel că:

$$J_z = \frac{a^2+b^2}{12}\rho\, a\, b\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz = \rho abc\frac{a^2+b^2}{12}. \tag{5}$$

Masa paralelipipedului este:

$$M = \rho V = \rho abc. \tag{6}$$

Prin urmare,

$$J_z = M\frac{a^2+b^2}{12}. \tag{7}$$

Analog, se obţin:

$$J_x = M\frac{c^2 + b^2}{12}; \quad J_y = M\frac{a^2 + c^2}{12}. \tag{8}$$

Momentele de inerţie geometrice axiale ale paralelipipedului sunt:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{abc}{12}\left(b^2 + c^2\right) \\ I_y &= \frac{abc}{12}\left(a^2 + c^2\right) \\ I_z &= \frac{abc}{12}\left(a^2 + b^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Momentul de inerţie mecanic polar este:

$$J_O = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) = M\frac{a^2 + b^2 + c^2}{12} \tag{10}$$

iar cel geometric:

$$I_O = abc\frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}. \tag{11}$$

Pentru determinarea momentului de inerţie mecanic în raport cu axa (Δ) paralelă cu axa Cz se aplică teorema lui Steiner şi anume:

$$J_\Delta = J_z + Md^2, \tag{12}$$

unde distanţa d este:

$$d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{13}$$

Prin urmare,

$$J_\Delta = M\frac{a^2 + b^2}{12} + M\frac{a^2 + b^2}{14} = \frac{1}{3}M\left(a^2 + b^2\right). \tag{14}$$

Momentul de inerţie geometric în raport cu axa (Δ) este:

$$I_\Delta = \frac{1}{3}abc\left(a^2 + b^2\right). \tag{15}$$

3.2.23. Să se calculeze momentele de inerţie mecanice şi geometrice pentru o sferă (fig. 3.31).

Soluţie:

Volumul sferei este:

$$V_{sf.} = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \frac{R^3}{3} \ . \tag{1}$$

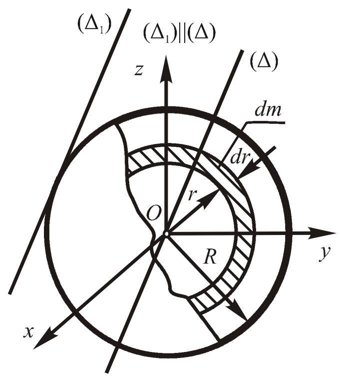


Fig. 3.31

Masa porţiunii elementare este:

$$dm = \rho dV = \rho A_{sf.} dr = \rho 4\pi r^2 dr \ . \tag{2}$$

Momentul de inerţie polar în raport cu punctul O este:

$$J_O = \int r^2 dm = \int_0^R 4\pi\rho r^4 dr = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}\pi R^3 \rho R^2 \ . \tag{3}$$

Masa sferei poate fi scrisă astfel:

$$M = \rho V_{sf} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \ . \tag{4}$$

Înlocuind (4) şi (1) în (3), rezultă:

$$J_O = \frac{3}{5} M R^2 \ . \tag{5}$$

Momentul de inerţie geometric polar este:

$$I_O = \frac{4}{5}\pi R^5 \ . \tag{6}$$

Datorită simetriei, momentul de inerţie în raport cu orice axă care trece prin centrul sferei este acelaşi:

$$J_\Delta = J_x = J_y = J_z \,. \tag{7}$$

Momentul polar mai poate fi scris, ţinând cont de (7), astfel:

$$J_O = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) = \frac{3}{2} J_x \,, \tag{8}$$

de unde rezultă:

$$J_x = \frac{2}{3} J_O \tag{9}$$

şi, înlocuind (5), se obţine:

$$J_x = J_y = J_z = J_\Delta = \frac{2}{5} M R^2 \,. \tag{10}$$

Momentul de inerţie geometric axial în raport cu orice axă care trece prin centrul sferei este:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{8}{15} \pi R^3 \,. \tag{11}$$

Aplicând teorema lui Steiner, se deduce momentul de inerţie mecanic în raport cu orice axă tangentă la sferă:

$$J_{\Delta 1} = J_\Delta + M R^2 = \frac{2}{3} M R^2 + M R^2 = \frac{7}{5} M R^2 \,. \tag{12}$$

3.2.24. Să se determine momentele inerţiale axiale şi centrifugale, polare corespunzătoare unei sfere pline de rază *R* (fig. 3.32).

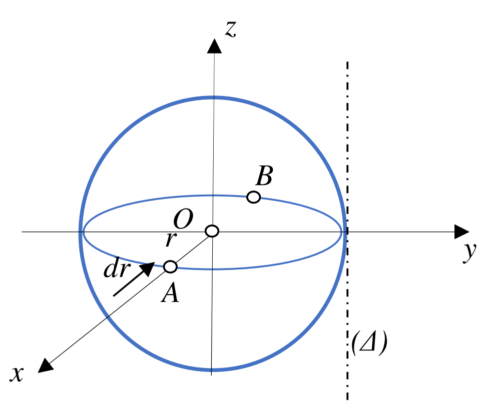


Fig. 3.32

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Soluţie:

Datorită simetriei:

$$J_x = J_y = J_z$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yzz} = 0$$

$$3J_x = J_x + J_y + J_z = \int \left(y^2 + z^2\right)dm + \int \left(x^2 + z^2\right)dm + \int \left(y^2 + x^2\right)dm$$

$$3J_x = 2\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dm = 2\int r^2 dm$$

$$\rho_v = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^3}; \qquad dm = \rho_v dV = 4\pi r^2 r dr$$

$$J_x = 2\int_0^R r^2 \rho_v 4\pi r^2 dr = 8\rho_v \pi \int_0^R r^2 r^2 dr = \frac{2MR^2}{5}$$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2MR^2}{5}$$

$$J_0 = \frac{2MR^2}{5}\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} = \frac{2MR^2}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Probleme propuse

3.3.1. Să se determine poziţia centrului de greutate al barei compuse omogene din figura 3.33.

Răspuns: $x_C = y_C = 0$.

3.3.2. Să se determine poziţia centrului de greutate al plăcii rezultate prin decuparea unui cerc dintr-un pătrat (fig. 3.34).

Răspuns: $x_C = y_C = -\dfrac{a\pi}{4(16-\pi)}$.

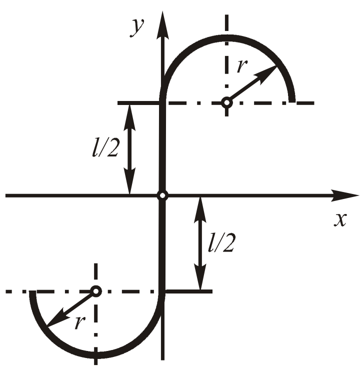


Fig. 3.33

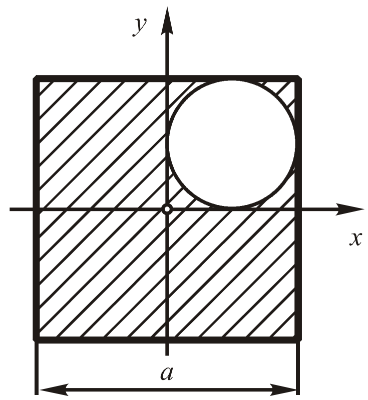


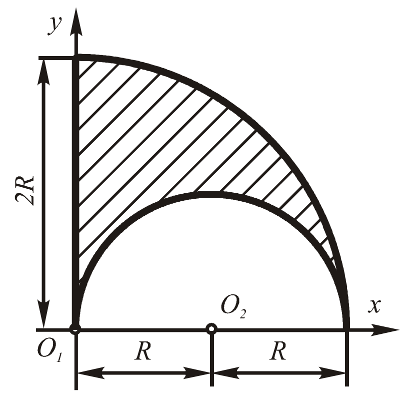
Fig. 3.34

3.3.3. Să se calculeze poziţia centrului de masă al suprafeţei omogene rezultate prin extragerea unui semicerc de rază R dintr-un sfert de cerc de rază $2R$. (fig. 3.35).

Răspuns: $x_C = R\left(\dfrac{16}{3\pi} - 1\right)$, $\quad y_C = \dfrac{4R}{\pi}$.

3.3.4. Să se calculeze poziţia centrului de masă al suprafeţei omogene compuse din figura 3.36.

Răspuns: $x_C = -\dfrac{R}{3}$, $\quad y_C = \dfrac{28R}{9\pi}$.



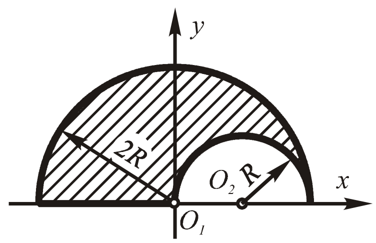


Fig. 3.35 **Fig. 3.36**

3.3.5. Să se determine centrul de greutate al plăcii din figura 3.37, figură formată din semicercul *ACB* şi triunghiul *ADB*. Se dă raza semicercului *R* şi *OD = 2R*.

Răspuns:

$C(x_C\,,\ y_C) = C(0.187\,R\,,\ 0)$.

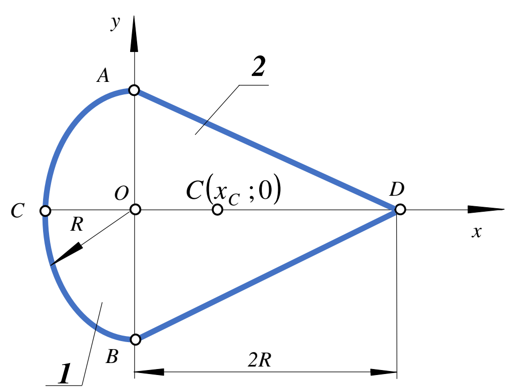


Fig. 3.37

3.3.6. Se dau patru mase: m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, m_3 = 3 kg, m_4 = 4 kg, concentrate în vârfurile unui pătrat OABC de latură *a* cm. Să se determine poziţia centrului acestor mase şi momentul de inerţie mecanic faţă de axele sistmului de referinţă *Oxyz* (fig. 3.38).

Răspuns: $x_C = \frac{a}{2}\ [cm], \qquad y_C = \frac{7a}{10}\ [cm], \qquad z_C = 0.$

$J_x = 7a^2\ [kg \cdot cm^2], \qquad J_y = 5a^2\ [kg \cdot cm^2], \qquad J_z = 12a^2\ [kg \cdot cm^2].$

3.3.7. Să se calculeze momentul de inerţie geometric centrifugal I_{xy} pentru triunghiul dreptunghic OAB din figura 3.39.

Răspuns: $I_{xy} = \frac{b^2c^2}{24}.$

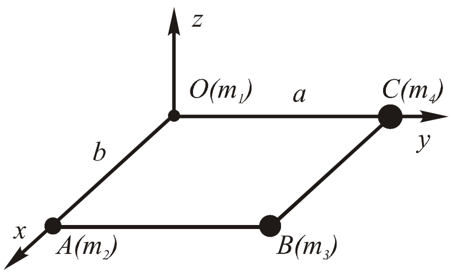


Fig. 3.38

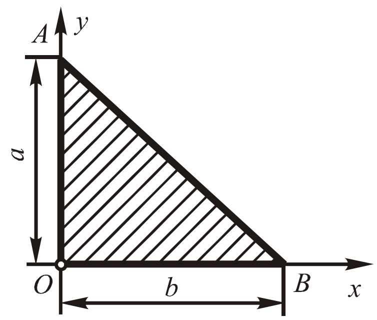


Fig. 3.39

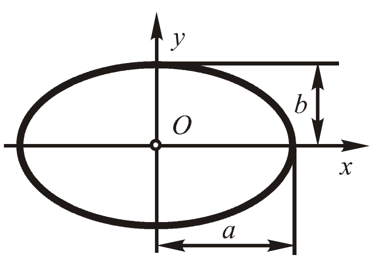


Fig. 3.40

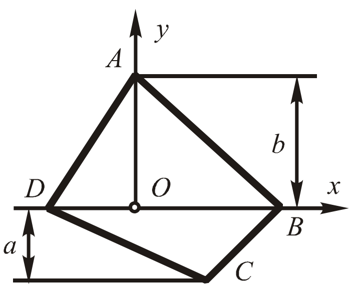


Fig. 3.41

3.3.8. Să se calculeze momentul de inerţie mecanic polar J_O pentru elipsa de semiaxe a şi b din figura 3.40, precum şi ecuaţia elipsei sale centrale de inerţie.

Răspuns:

$$J_O = \frac{M}{4}\left(a^2 + b^2\right),$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1.$$

3.3.9. Să se determine momentul de inerţie mecanic axial J_x al patrulaterului

ABCD din figura 3.41, ştiind că masa acestuia este *M*.

Răspuns:

$$J_x = \frac{M}{6}\left(\frac{a^3 + b^3}{a + b}\right).$$

3.3.10. Să se calculeze momentele de inerţie mecanice J_x , $J_{x'}$, J_y , J_O , $J_{O'}$ ale suprafeţei cuprinse între cercurile de raze *R* şi *r* din figura 3.42, ştiind că distanţa dintre centrele *O* şi *O'* ale cercurilor este a şi masa suprafeţei respective este *M*.

Răspuns:

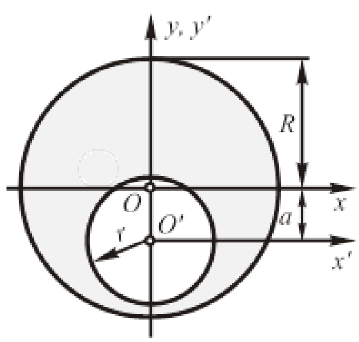


Fig. 3.42

$$J_x = \frac{M}{4}\left[r^2\left(1 - \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + R^2\right],$$

$$J_{x'} = \frac{M}{4}R^2\left(1 + \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right),$$

$$J_y = \frac{M}{4}\left(R^2 + r^2\right),$$

$$J_O = J_x + J_y = \frac{M}{4}\left[r^2\left(2 - \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + 2R^2\right]$$

$$J_{O'} = J_{x'} + J_{y'} = \frac{M}{4}\left[R^2\left(2 + \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + 2r^2\right].$$

4. STATICA PUNCTULUI MATERIAL [10]

4.1 Consideraţii teoretice

4.1.1 Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare

O legătură este o restricţie care limitează posibilităţile de deplasare ale unui punct material.

Din punct de vedere mecanic, legătura unui punct material poate fi suprimată şi înlocuită cu o forţă notată $\overline{R_l}$ şi numită *forţă de legătură sau reacţiune*. Sub acţiunea forţelor date de rezultantă $\overline{R}$ şi a forţei de legătură $\overline{R_l}$, punctul material devine „liber”.

Aspectul geometric al legăturii se caracterizează prin reducerea gradelor de libertate ale punctului.

Condiţia necesară şi suficientă de echilibru a punctului material este:

- *vectorială*: $\overline{R} + \overline{R_l} = 0$, unde $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$ - rezultanta forţelor exterioare (4.1)

- *scalară*: $R_x + R_{lx} = 0,\ R_y + R_{ly} = 0,\ R_z + R_{lz} = 0.$ (4.2)

Necunoscutele unei probleme de echilibru a punctului material supus la legături, sunt parametrii poziţiei de echilibru şi forţa/forțele de legătură.

În cele ce urmează, se va studia echilibrul punctului material pe o suprafață sau o curbă.

a) Punct material obligat să rămână în echilibru pe o suprafaţă cu frecare neglijabilă

Forţa de legătură are direcţia normală la suprafaţă (fig. 4.1). În cazul punctului obligat să stea în echilibru pe suprafaţă sunt necesari doar doi parametri independenți care să definească poziţia de echilibru a punctului, punctul pe suprafaţă având două grade de libertate.

- Dacă ecuaţia suprafeţei este: $f(x, y, z) = 0$, atunci $\overline{R_l} = \overline{N} = \lambda \text{ grad} f$ şi condiţiile de echilibru (4.1) şi (4.2) devin:

- *vectorial*: $$\overline{R} + \lambda \text{ grad } f = 0 \quad (4.3)$$

[10] Ispas, V. și alții, 2010

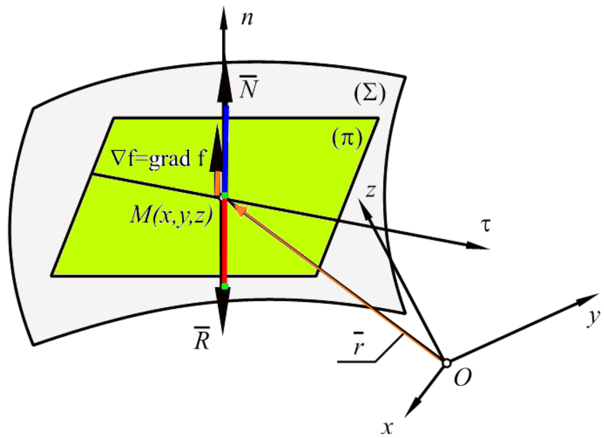


Fig. 4.1

- *scalar*:

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ f(x,y,z) = 0. \tag{4.4}$$

Dacă interesează doar poziţia de echilibru a punctului, se elimină din (4.4) parametrul λ şi se obţine următorul sistem în necunoscutele *x, y, z*:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}},\ f(x,y,z) = 0. \tag{4.5}$$

- Dacă ecuaţia suprafeţei este $z = f(x, y)$, ecuaţiile (4.4) şi (4.5) devin:

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$R_z - \lambda = 0, \qquad f(x,y) - z = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{-1},\ f(x,y) - z = 0\ . \tag{4.7}$$

- Dacă suprafaţa este dată sub formă parametrică:

$$x = x(u,v);\ \ y = y(u,v);\ \ z = z(u,v),$$

atunci:

$$\overline{R}_l = \overline{N} = \lambda\left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\right),$$

În final, ecuaţiile de echilibru (4.2) devin:

$$R_x + \lambda\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = 0,\quad R_y + \lambda\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = 0,$$
$$R_z + \lambda\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0,\quad f(x,y,z) = 0. \tag{4.8}$$

$$\frac{R_x}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{R_y}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{R_z}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}},\ f(x,y,z) = 0. \tag{4.9}$$

Relaţiile (4.5), (4.7) şi (4.9) se folosesc dacă nu este necesar să se determine forţa de legătură (de fapt, forţa de legătură rezultă din (4.1) ca fiind $\overline{R}_l = \overline{N} = -\overline{R}$, dacă se determină rezultanta forţelor exterioare $\overline{R}$), şi în consecinţă, ne interesează doar poziţia de echilibru a punctului material.

b) Punct obligat să stea pe o curbă cu frecare neglijabilă

Forţa de legătură este situată în planul normal la curbă în punctul respectiv, punctul având un grad de libertate (fig. 4.2).

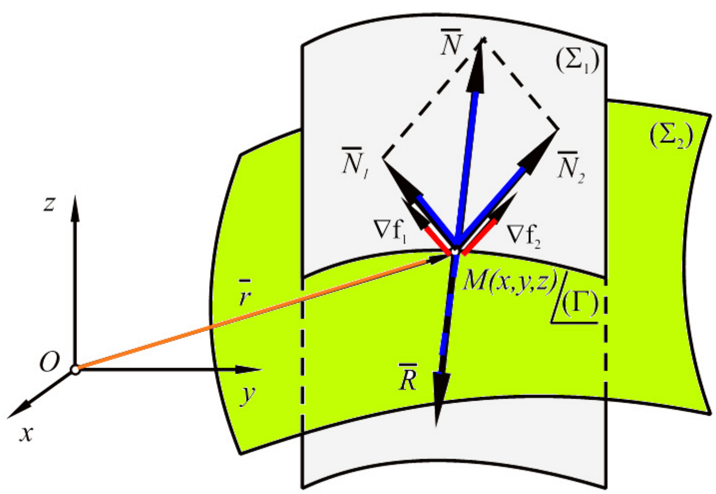


Fig. 4.2

- Dacă ecuaţia curbei este dată parametric: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ atunci: $\overline{R}_l \cdot \overline{\tau} = 0$ ($\overline{\tau}$ fiind versorul tangentei la curbă) sau, în baza relaţiei (4.1), $\overline{R} \cdot \overline{\tau} = 0$. Dar cum versorul $\overline{\tau}$ are valoarea:

$$\overline{\tau} = \frac{x'\overline{i} + y'\overline{j} + z'\overline{k}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

se obţine:

$$R_x x'(t) + R_y y'(t) + R_z z'(t) = 0, \tag{4.10}$$

din care se determină parametrul *t* al poziţiei de echilibru.

- Dacă ecuaţia curbei este dată sub forma: $f_1(x, y, z) = 0,\ \ f_2(x, y, z) = 0,$ atunci $\overline{R}_l = \overline{N} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2$ şi relaţiile (4.2) devin:

$$\begin{aligned}
&R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0\\
&R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0\\
&R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0\\
&f_1(x, y, z) = 0\\
&f_2(x, y, z) = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

sau

$$\begin{vmatrix} R_x & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ R_y & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ R_z & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{matrix}, \tag{4.12}$$

din care, utilizând (4.11), se determină coordonatele punctului x, y, z şi parametrii scalari λ_1 şi λ_2, sau numai coordonatele punctului x, y, z din (4.12), dacă nu ne interesează decât poziţia de echilibru a punctului pe curbă.

- Dacă ecuaţia curbei este dată sub forma: $z = f(x, y),\ \ z = g(x, y),$

notând:

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= f(x, y) - z = 0\\
\psi(x, y, z) &= g(x, y) - z = 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ecuaţiile de echilibru sunt date de (4.11) şi (4.12) scrise astfel:

$$
\begin{aligned}
&R_x+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial x}=0\\
&R_y+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial y}=0\\
&R_z-\lambda_1-\lambda_2=0\\
&f(x,y)-z=0\\
&g(x,y)-z=0
\end{aligned}
\qquad (4.14)
$$

$$
\begin{vmatrix}
R_x & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial x}\\
R_y & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\\
R_z & -1 & -1
\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{aligned}&f(x,y)-z=0\\&g(x,y)-z=0.\end{aligned} \qquad (4.15)
$$

4.1.2 Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare

La legăturile cu frecare *forţa de legătură se poate descompune în două componente: una normală $\overline{N}$ şi cealaltă tangenţială $\overline{T}$, numită forţă de frecare.*

Condiţia de echilibru în cazul frecării este (4.1), în care $\overline{R_l}=\overline{N}+\overline{T}$, iar

$$T \le \mu \cdot N , \qquad (4.16)$$

unde $\mu = tg\,\varphi$, unghiul φ fiind unghiul de frecare, iar μ coeficientul de frecare la alunecare (adimensional şi subunitar pentru a învinge frecarea).

a) Echilibrul unui punct material pe o suprafaţă aspră

Dacă unghiul ascuţit dintre normala la suprafaţă şi rezultanta forţelor exterioare este β (fig. 4.3), condiţia necesară şi suficientă de echilibru este:

$$\beta \le \varphi \quad \text{sau} \quad \cos\beta \ge \cos\varphi \ , \qquad (4.17)$$

dar cum

$$\cos\beta=\frac{\overline{R}\cdot\nabla f}{\left|\overline{R}\right|\cdot\left|\nabla f\right|} \quad \text{şi} \quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \ ,$$

rezultă:

$$\frac{\overline{R}\cdot\nabla f}{\left|\overline{R}\right|\cdot\left|\nabla f\right|}\geq\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\ . \tag{4.18}$$

Geometric, această condiţie se enunţă astfel: *în caz de echilibru sub limită, rezultanta forţelor exterioare aplicate punctului material trebuie sa fie în interiorul unui con de revoluţie având ca axă normala la suprafaţă şi unghiul la vârf* 2φ, *numit con de frecare*, respectiv, *în cazul echilibrului la limită rezultanta forţelor exterioare trebuie să fie pe generatoarea conului de frecare.*

În general, condiţiile (4.17) determină un domeniu de echilibru pe suprafaţă, frontiera lui fiind locul geometric al poziţiilor de echilibru la limită ($\beta=\varphi$ sau $\cos\beta=\cos\varphi$).

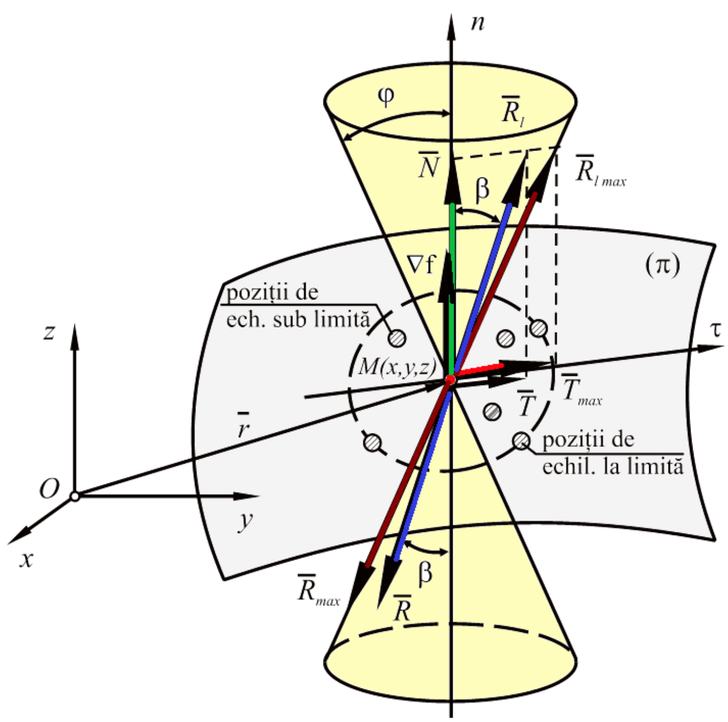


Fig. 4.3

b) Echilibrul unui punct material pe o curbă cu frecare

Notând prin α unghiul complementar făcut de rezultanta $\overline{R}$ a forţelor exterioare cu tangenta la curbă în M (fig. 4.4), condiţia de echilibru (4.17) devine:

$$\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ sau } \cos\alpha \leq \sin\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \ , \tag{4.19}$$

unde: $|\cos\alpha| = \left|\frac{\overline{R}}{R}\overline{\tau}\right|$, $\overline{\tau}$ fiind versorul tangentei la curbă.

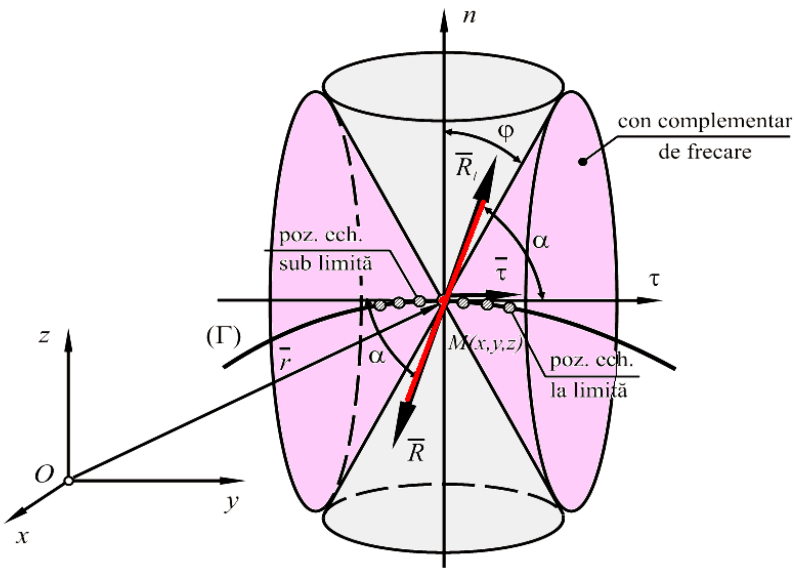


Fig. 4.4

Geometric, condiţia (4.19) se enunţă astfel: *în caz de echilibru sub limită, rezultanta forţelor exterioare aplicate punctului material trebuie să fie în exteriorul unui con de revoluţie având ca axă tangenta la curbă şi unghiul la vârf (180- 2φ), numit con complementar de frecare; în caz de echilibru la limită rezultanta forţelor exterioare trebuie să fie pe generatoarea conului complementar de frecare.*

În general, un punct material poate sta în echilibru sub limita frecării de alunecare pe o curbă aspră în toate punctele unui arc ce aparţine curbei, extremităţile lui fiind poziţiile de echilibru la limită, obţinute pentru $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

4.2 Probleme rezolvate [10]

4.2.1. Să se determine poziţia de echilibru a unui punct material M, de masă *m*, atras proporţional cu masele şi distanţele de trei puncte materiale de mase m_1, m_2, m_3 (fig. 4.5).

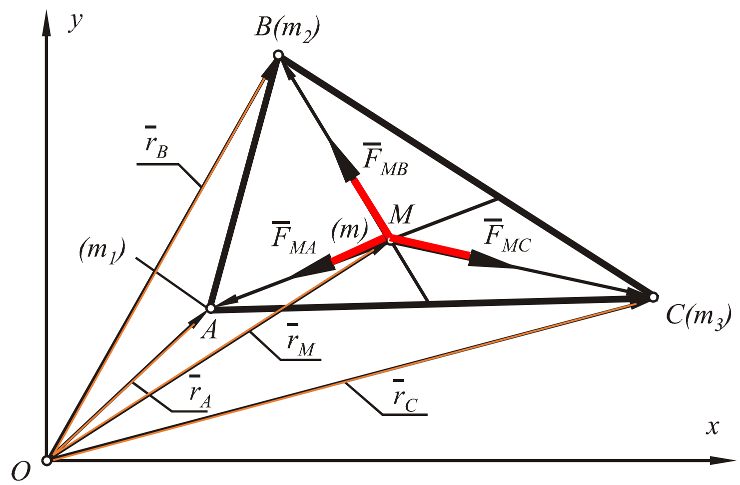


Fig. 4.5

Soluţie:

Punctul M este sub acţiunea forţelor de atracţie a punctelor A, B, C, care sunt forţe de legătură. Punctul neavând greutate, rezultanta forţelor de atracţie este nulă.

Condiţia de echilibru, în baza relaţiei (4.1), este:

$$\overline{F}_{MA} + \overline{F}_{MB} + \overline{F}_{MC} = 0 \ , \qquad (1)$$

dar:

$$\overline{F}_{MA} = k \cdot m \cdot m_1 \overline{MA}\,; \quad \overline{F}_{MB} = k \cdot m \cdot m_2 \overline{MB}\,; \quad \overline{F}_{MC} = k \cdot m \cdot m_3 \overline{MC} \quad , \qquad (2)$$

unde: k este o constantă de proporţionalitate;

m reprezintă masa punctului M;

m_1, m_2, m_3 reprezintă masele punctelor A,B,C.

Având în vedere figura 4.5 se pot scrie relaţiile:

$$\overline{MA} = \bar{r}_A - \bar{r}_M \,, \quad \overline{MB} = \bar{r}_B - \bar{r}_M \,, \quad \overline{MC} = \bar{r}_C - \bar{r}_M \,, \tag{3}$$

care introduse în (1), având în vedere (2), conduc la:

$$\bar{r}_M = \frac{m_1\bar{r}_A + m_2\bar{r}_B + m_3\bar{r}_C}{m_1 + m_2 + m_3} \;. \tag{4}$$

În concluzie, pentru ca punctul M să fie în echilibru trebuie să fie plasat în centrul de greutate al triunghiului ABC, întrucât (4) este expresia vectorului de poziţie al centrului de greutate al triunghiului.

4.2.2. Un punct *M* este legat cu trei bare rigide de lungimi egale $MA = MB = MC = l$ de trei puncte fixe *A, B, C*, care alcătuiesc un triunghi echilateral de latură *a* (fig. 4.6).

Punctul M fiind supus la acţiunea unei forţe $\overline{F}$ de direcţie paralelă cu înălţimea *AA'* a triunghiului *ABC*, se cer tensiunile în barele *MA, MB, MC*.

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru ale punctului material, conform cu (4.2), sunt:

$$\begin{gathered} F - N_A\cos\alpha + N_B\cos\alpha\frac{OA'}{OB} + N_C\cos\alpha\frac{OA'}{OC} = 0 \\ -N_B\cos\alpha\cos\beta + N_C\cos\alpha\cos\beta = 0 \\ -\left(N_A\sin\alpha + N_B\sin\alpha + N_C\sin\alpha\right) = 0 \,. \end{gathered} \tag{1}$$

Având în vedere că:

$$OA = OB = OC = \frac{2}{3}AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}a \,,$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{3l} \,,$$

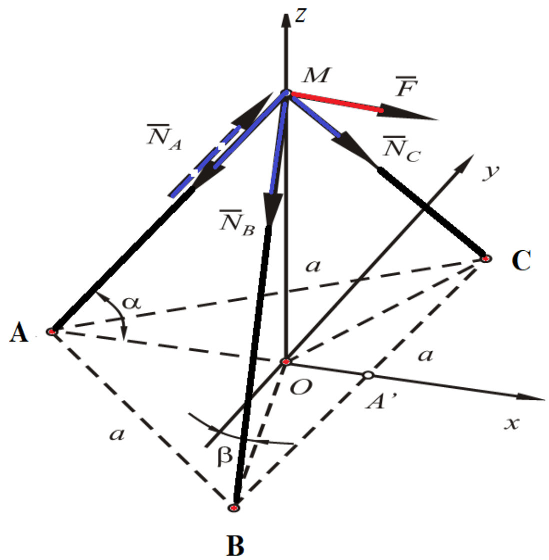


Fig. 4.6

sistemul (1) devine:

$$-N_A+\frac{1}{2}N_B+\frac{1}{2}N_C=-\frac{\sqrt{3}l}{a}F\ , \qquad (2)$$

$$N_C-N_B=0\ ,\quad N_A+N_B+N_C=0\ .$$

Rezolvând sistemul (2), rezultă:

$$N_A=-2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a}{l}F\,;\quad N_B=N_C=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{l}{a}F\ . \qquad (3)$$

Semnul (-) din expresia lui N_A arată că sensul corect al acestei forţe este cel punctat în figura 4.7.

4.2.3. Se cere poziţia de echilibru a unui punct M (fig. 4.7), de greutate $\overline{P}$, mobil fără frecare în interiorul unei sfere de rază r şi atras cu o forţă de modul constant $Q \neq P$, spre un punct fix A, exterior sferei şi situat pe diametrul vertical la înălţimea $OA = a$ deasupra centrului $O\ (a>r)$.

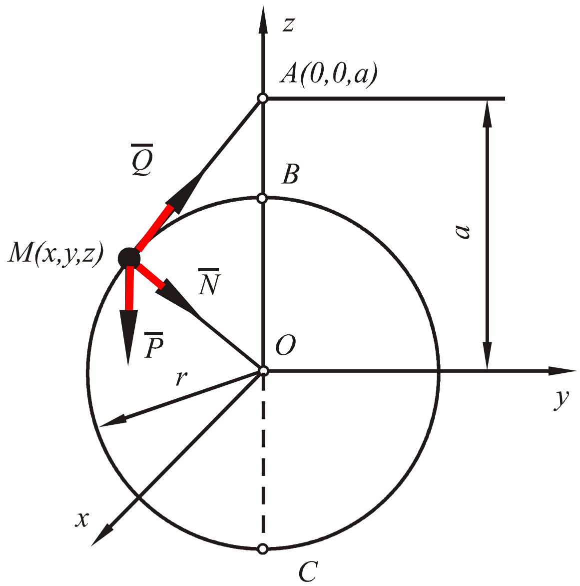


Fig. 4.7

Soluţie:

Asupra punctului acţionează trei forţe:

- greutatea $\overline{P}$;
- forţa de atracţie $\overline{Q}$;
- reacţiunea $\overline{N}$.

Ecuaţia vectorială de echilibru, conform relaţiei (4.1), este:

$$\overline{P} + \overline{Q} + \overline{N} = 0; \qquad \Big| \times \overline{P}) \cdot \overline{Q}\ . \tag{1}$$

Înmulţind (1) vectorial cu $\overline{P}$ şi scalar cu $\overline{Q}$, se obţine:

$$\left(\overline{N} \times \overline{P}\right) \cdot \overline{Q} = 0, \tag{2}$$

deci, pentru a fi posibil echilibrul punctului, cele trei forţe trebuie să fie coplanare.

Din (1) rezultă:

$$\overline{Q}+\overline{N}=-\overline{P}\ , \tag{3}$$

adică $\overline{P}$ este direct opus diagonalei paralelogramului forţelor $\overline{Q}$ şi $\overline{N}$, deci $\overline{P}$ este exterior unghiului forţelor $\overline{Q}$ şi $\overline{N}$.

Sintetizând rezultatele (2), (3) şi (1), se poate spune că trei forţe concurente şi în echilibru sunt coplanare şi fiecare este exterioară unghiului celorlalte două.

Cum forţa $\overline{P}$ este în plan vertical, rezultă că cele trei forţe sunt mereu în planul vertical ce conţine diametrul BC şi pentru a fi în echilibru trebuie ca fiecare să fie exterioară unghiului celorlalte două.

Se observă că această condiţie nu este satisfăcută decât în A şi C. Dacă $Q>P$ echilibrul este în punctul B, cel de mai sus al sferei, iar dacă $Q<P$ echilibrul este în punctul C, cel mai de jos al sferei.

4.2.4. Un sistem de puncte materiale A_i, de mase m_i (i = 1, 2, ..., n) atrag proporţional cu masele şi distanţele un punct *M* de greutate $\overline{P}$. Constanta de atracţie este aceeaşi, *k*. Să se determine poziţia de echilibru a punctului *M*.

Soluţie:

Asupra punctului acţionează greutatea $\overline{P}$ ca forţă exterioară şi forţele de atracţie (forţe de legătură) $\overline{F}_{MA_i}$.

Ecuaţia vectorială de echilibru, în baza relaţiei (4.1), este:

$$\overline{P}+\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_{MA_i}=0, \tag{1}$$

dar:

$$\overline{F}_{MA_i}=k\cdot m\cdot m_i\overline{MA_i}=k\cdot m\cdot m_i\left(\overline{r}_i-\overline{r}_M\right), \tag{2}$$

unde: m - masa punctului M ;

$\overline{r}_i$ - vectorul de poziţie al punctului A_i ;

$\overline{r}_M$ - vectorul de poziţie al punctului M .

Introducând (2) în (1), se obţine:

$$k\cdot m\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\overline{r}_i-\overline{r}_M\sum_{i=1}^{n}m_i\right)+\overline{P}=0\ . \tag{3}$$

Ştiind că:

$$\overline{r}_i=x_i\overline{i}+y_i\overline{j}+z_i\overline{k},\ \overline{r}_M=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k},$$

se proiectează relaţia vectorială (3) pe axele unui sistem de referinţă triortogonal $Oxyz$ şi se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - x\sum_{i=1}^{n} m_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} m_i y_i - y\sum_{i=1}^{n} m_i = 0,\ k\cdot m\left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\right) - P = 0\ . \quad (4)$$

Poziţia centrului de masă al unui sistem de puncte materiale este definită de:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

sau:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\ . \quad (5)$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului (4) se obţine, ţinând cont de (5):

$$x = x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ y = y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \quad (6)$$

Ultima relaţie din (5) conduce la:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = z_C \sum_{i=1}^{n} m_i = z_C M\ , \quad (7)$$

unde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ este masa întregului sistem de puncte materiale.

Introducând (7) în ultima ecuaţie a sistemului (4), rezultă:

$$k\cdot m\cdot M\left(z_C - z\right) = P\ . \quad (8)$$

Relaţiile (6) arată că punctul M este pe verticala dusă prin centrul de masă al sistemului material, la distanţa:

$$CM = z_C - z = \frac{P}{k\cdot m\cdot M} \quad (9)$$

obţinută din (8).

[10] Ispas, V. și alții, 2010

4.2.5. Un punct material M de greutate $\overline{P}$ (fig. 4.8) este mobil, fără frecare, pe linia de cea mai mare pantă AB a unui plan înclinat, care face $B\hat{A}C = 30^0$ cu orizontala AC. Punctul este atras de un punct D situat pe verticala CBD la înălţimea CD=CA, cu o forţă de modul constant Q.

Se cere:

1. Unghiul ascuţit $BMD = \alpha$ în poziţie de echilibru
2. Apăsarea punctului M pe planul înclinat
3. Între ce limite poate varia forţa $\overline{Q}$ pentru ca punctul M să aibă o poziţie de echilibru între A şi B ?

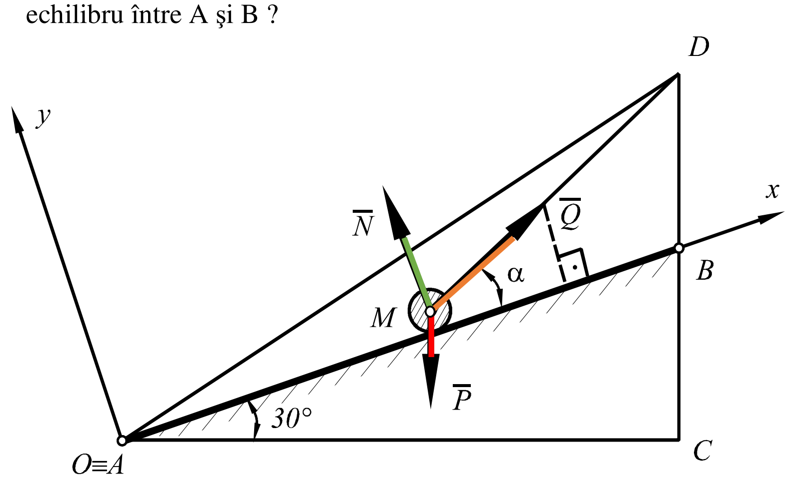


Fig. 4.8

Soluţie:

Forţele care acţionează asupra punctului *M* sunt:

- greutatea $\overline{P}$;
- forţa de atracţie $\overline{Q}$;
- forţa normală (recţiunea planului) $\overline{N}$.

Se alege un sistem de referinţă xOy, cu axa Ox după linia de cea mai mare pantă AB, iar axa Oy perpendiculară pe ea în punctul A (fig. 4.8) . Ecuaţia vectorială de echilibru, conform relaţiei (4.1), este:

$$\overline{P} + \overline{Q} + \overline{N} = 0 \ . \tag{1}$$

Proiectând (1) pe axele sistemului de referinţă xOy, se obţine:

$$-P\frac{1}{2} + Q\cos\alpha = 0, \ -P\frac{\sqrt{3}}{2} + Q\sin\alpha + N = 0. \tag{2}$$

Din (2) rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{P}{2Q}; \quad N = \frac{1}{2}\left(P\sqrt{3} - \sqrt{4Q^2 - P^2}\right) .$$

Problema are soluţie pentru $\frac{P}{2} \le Q \le P,$ deoarece N trebuie să fie pozitivă (sau nulă) şi $\left(4Q^2 - P^2\right) \ge 0$.

Pentru determinarea limitelor de variaţie a forţei $\overline{Q}$ între A şi B se calculează Q în punctele extreme ţinând cont de (2) :

- în punctul A:

$$\alpha = 15^0,\ Q = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{P}{2\cos 15^0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)P$$

- în punctul B:

$$\alpha = 60^0, Q = \frac{p}{2\cos\alpha} = \frac{P}{2\frac{1}{2}} = P,$$

deci:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)P < Q < P. \tag{3}$$

4.2.6. Un punct M este mobil, fără frecare, pe dreapta Δ :

$$x = az + p$$
$$y = az - p \ ,$$

sub acţiunea unei forţe de componente:

$$F_x = yz; \quad F_y = zx; \quad F_z = xy.$$

1. Să se găsească poziţiile de echilibru ale punctului M considerând dreapta Δ ca dată prin intersecţia a două suprafeţe .
2. Să se rezolve problema considerând ecuaţiile date ca ecuaţii parametrice ale dreptei Δ de parametru z .

Soluţie:

1. Suprafeţele ce determină dreapta Δ se pot scrie sub forma:

$$f_1(x, y, z) = x - az - p = 0,\ f_2(x, y, z) = y - az + p = 0 .$$

Folosind condiţiile de echilibru (4.12), se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} R_x & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ R_y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ R_z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & 1 & 0 \\ zx & 0 & 1 \\ zy & -a & -a \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{array}{l} x - az - p = 0 \\ y - az + p = 0 \end{array} \tag{1}$$

sau:

$$az(x+y) + xy = 0, \quad x - az - p = 0, \quad y - az + p = 0. \tag{2}$$

Adunând şi, respectiv, înmulţind ultimele două relaţii ale sistemului (2), rezultă expresiile:

$$x + y = 2az, \; xy = a^2 z^2 - p^2, \tag{3}$$

care introduse în prima ecuaţie, conduc la:

$$z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p}{a}. \tag{4}$$

Cu expresia (4) se pot obţine coordonatele:

$$x = az + p = p\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \; y = az - p = p\left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{5}$$

Astfel, punctul va sta în echilibru în două poziţii date de (4) şi (5).

2. Ecuaţiile dreptei (Δ) scrise sub formă parametrică sunt:

$$x = az + p; \quad y = az - p; \quad z = z. \tag{6}$$

Condiţia de echilibru a punctului, conform cu (4.10), este:

$$R_x x' + R_y y' + R_z z' = 0 .$$

Înlocuind $R_x, R_y, R_z, x', y', z'$, rezultă:

$$ayz + azx + xy = 0$$

sau ţinând cont de (6), se obţine:

$$az(x+y) + xy = 0; \;\; x + y = 2az; \;\;\; xy = a^2 z^2 - p^2; \;\;\; z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p}{a} . \tag{7}$$

Introducând (7) în (6), rezultă:

$$x = p\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \;\; y = p\left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{8}$$

4.2.7. Un punct material de greutate $\overline{G}$ poate aluneca fără frecare:

a) pe un cerc şi asupra lui acţionează o forţă orizontală constantă $\overline{F}$ ca în figura 4.9a;

b) pe o elipsă şi punctul este respins de axa Oy cu o forţă proporţională cu distanţa de la punct la axă, conform figurii 4.9b.

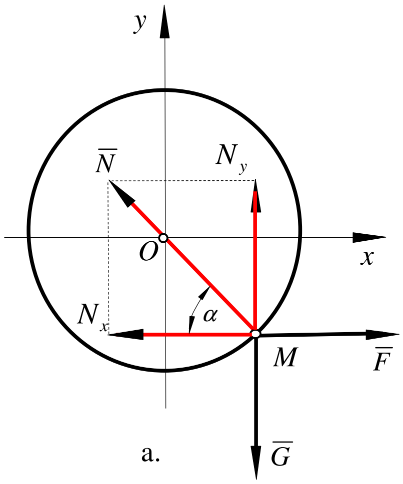
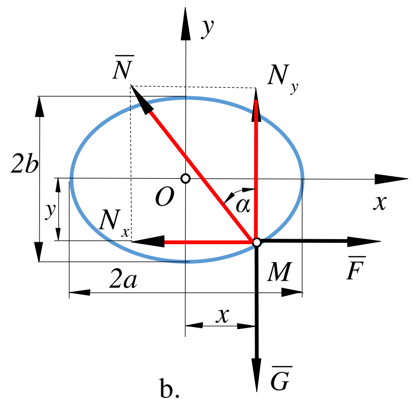


Fig. 4.9



Soluţie:

a) Ecuaţia vectorială de echilibru a forţelor care acţionează asupra punctului M este:

$$\overline{F} + \overline{G} + \overline{N} = 0. \tag{1}$$

Se proiectează această ecuaţie pe axele sistemului de referinţă ales xOy. Astfel,

$$\begin{aligned} F - N\cos\alpha = 0 \\ -G + N\sin\alpha = 0 \end{aligned}. \tag{2}$$

Din sistemul (2) rezultă:

$$tg\alpha = \frac{G}{F} \tag{3}$$

$$N = \sqrt{F^2 + G^2}. \tag{4}$$

Discuţie:

1° Dacă forţa $\overline{F} \to \infty$, rezultă $tg\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \;\; sau \;\; \pi$;

2° Dacă forţa $\overline{F}=0$, rezultă $tg\alpha=\infty \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$ *sau* $\frac{3}{2}\pi$; (5)

3° Dacă forţa $\overline{F}=\overline{G}$, rezultă $tg\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ *sau* $\frac{5}{4}\pi$.

b) Ecuaţia vectorială de echilibru a forţelor ce acţionează asupra punctului M este:

$$\overline{F}+\overline{G}+\overline{N}=0.$$

Proiectând această ecuaţie pe axele sistemului de referinţă ales xOy , se obţine:

$$\begin{aligned} F-N_x&=0\\ -G+N_y&=0\\ F&=k\,x\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Din sistemul (6) rezultă:

$$N_x=F, \qquad N_y=G, \tag{7}$$

iar din figura 4.9b se obţine:

$$tg\alpha=-\frac{f^{'}(x)}{f^{'}(y)}=\frac{N_x}{N_y}=\frac{F}{G}=\frac{kx}{G}. \tag{8}$$

Luând în considerare ecuaţia elipsei, se poate scrie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}. \tag{9}$$

Notând:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{10}$$

şi cunoscând interpretarea geometrică a noţiunii de derivată a unei funcţii, panta se determină astfel:

$$tg\alpha=-\frac{f'(x)}{f'(y)}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \quad . \tag{11}$$

Din relaţiile (8) şi (11) se obţine *y*, respectiv din (9) se obţine *x*. Astfel:

$$y=-\frac{b^2}{a^2}\frac{G}{k}, \qquad x=\pm\frac{1}{ak}\sqrt{a^4k^2-b^2G^2}\,. \tag{12}$$

Pentru $x = 0$, din (9) rezultă $y = \pm b$.

Valorile scalare ale reacţiunii normale $\overline{N}$ se obţin din (6), având în vedere (12), astfel:

$$N_x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{a^4k^2 - b^2G^2} \quad , \quad N_y = G\,. \tag{13}$$

Modulul reacţiunii normale este:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{\sqrt{k^2a^4 + G^2(a^2 - b^2)}}{a}\,. \tag{14}$$

4.2.8. Un punct material *M* de greutate $\overline{G}$ poate aluneca fără frecare pe un cerc, fiind respins de extremitatea inferioară a diametrului vertical al cercului cu o forţă invers proporţională cu pătratul distanţei dintre cele două puncte (fig. 4.10). Să se determine poziţia de echilibru a punctului pe cerc şi reacţiunea cercului.

Soluţie:

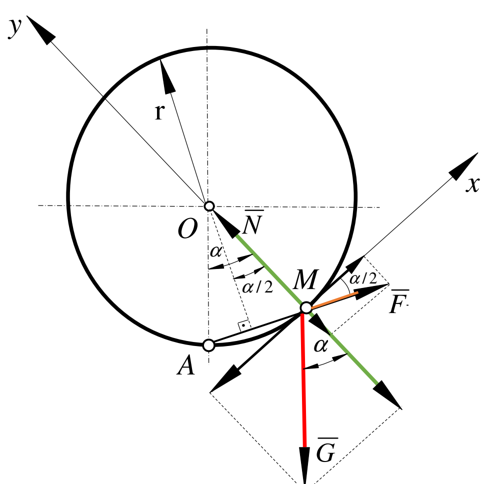


Fig. 4.10

Ecuaţia vectorială de echilibru a sistemului de forţe care acţionează asupra lui *M* este:

$$\overline{F} + \overline{G} + \overline{N} = 0. \tag{1}$$

Proiectând (1) pe axele sistemului de referinţă *xOy* ales, se obţin ecuaţiile scalare de echilibru:

$$F\cos\frac{\alpha}{2} - G\sin\alpha = 0$$
$$N - F\sin\frac{\alpha}{2} - G\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

în care: $$F = \frac{k}{AM^2}, \quad AM = 2r\sin\frac{\alpha}{2}, \quad F = \frac{k}{4r^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Rezolvând sistemul (2), rezultă:

$$N = F\sin\frac{\alpha}{2} + G\cos\alpha \tag{4}$$

$$a)\quad \cos\frac{\alpha}{2} = 0;\quad \alpha = \pi\ ;$$

$$b)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{Gr^2}}\ . \tag{5}$$

Ţinând cont de rezultatele a) şi b), rezultă: distanţa AM şi valoarea reacţiunii $\overline{N}$:

$$\text{a)}\quad AM = 2r;\quad N = \frac{k}{4r^2} - G. \tag{6}$$

$$\text{b)}\quad AM = \sqrt[3]{\frac{kr}{G}};\quad N = G. \tag{7}$$

4.2.9. Un punct greu poate aluneca pe o semidreaptă Ox care face unghiul α cu orizontala (fig. 4.11), fiind atras de punctul O, cel mai de sus pe Ox, cu o forţă proporţională cu distanţa. Unghiul de frecare fiind $\varphi < \alpha$, se cere intervalul de echilibru.

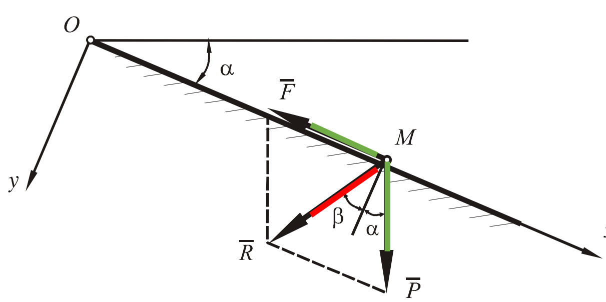


Fig. 4.11

Soluţie:

a) Prima metodă

Rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra punctului este:

$$\overline{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} = \overline{P} + \overline{F} \ ,$$

unde: $R_x = P\sin\alpha - F$; $R_y = P\cos\alpha$.

Condiţia de echilibru, conform cu (4.17), este:

$$\cos\beta \geq \cos\varphi \ . \tag{1}$$

Cum:

$$|\cos\beta| = \left|\frac{\overline{R}}{R}\bar{j}\right| = \frac{|R_y|}{R} = \frac{P\cos\alpha}{\sqrt{(P\sin\alpha - F)^2 + P^2\cos^2\alpha}} = \frac{P\cos\alpha}{\sqrt{F^2 - 2P\cdot F\cdot\sin\alpha + P^2}} \ ,$$

se obţine:

$$\frac{P\cos\alpha}{\sqrt{F^2 - 2P\cdot F\cdot\sin\alpha + P^2}} \geq \cos\varphi$$

sau:

$$F^2 - 2P\cdot F\cdot\sin\alpha + P^2\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}\right) \leq 0 \ . \tag{2}$$

Rădăcinile ecuaţiei dată de (2) sunt:

$$F_{1,2} = P\frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos\varphi} \ . \tag{3}$$

Întrucât:

$$\Delta = P^2\left(\sin^2\alpha - \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}\right) = P^2\cos^2\alpha\cdot tg^2\varphi > 0 \ ,$$

pentru a avea satisfăcută inegalitatea (2) este necesar ca:

$$F_1 \leq F \leq F_2 \ . \tag{4}$$

Dar cum

$$F = kx, \tag{5}$$

introducând (3) şi (5) în (4), se obţine:

$$\frac{P\sin(\alpha - \varphi)}{k\cos\varphi} \leq x \leq \frac{P\sin(\alpha + \varphi)}{k\cos\varphi} \ . \tag{6}$$

b) A doua metodă – a se vedea problema anterioară.

4.2.10. Un punct material greu *M* (fig. 4.12) este mobil pe un cerc vertical, fiind atras de punctul cel mai de sus A al cercului, cu o forţă proporţională cu distanţa AM şi care devine egală cu greutatea punctului la o distanţă egală cu diametrul cercului. Unghiul de frecare fiind φ se cere regiunea de echilibru.

Soluţie:

Suprimând legăturile, se introduc forţele de legătură $\overline{N}$ şi $\overline{T}$, după care se studiază echilibrul punctului material ca un punct material liber. Alegând un sistem de referinţă intrinsec $M\tau\nu$ (fig. 4.12), condiţiile de echilibru, conform cu (4.1), (4.2), (4.16), sunt:

$$\overline{P}+\overline{F}+\overline{T}+\overline{N}=0 \qquad (1)$$
$$T \le \mu N$$

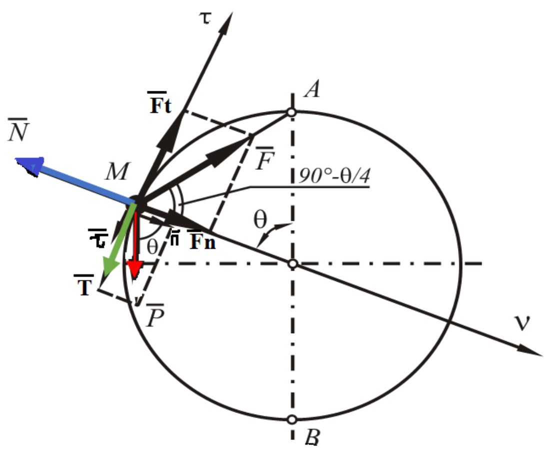


Fig. 4.12

$$F\sin\frac{\theta}{2}+P\cos\theta-N=0,\;\; F\cos\frac{\theta}{2}-T-P\sin\theta=0,\;\; T\le\mu N. \qquad (2)$$

Cum valoarea lui *F* este:

$$F=k\cdot MA=2K\cdot r\cdot\sin\frac{\theta}{2},$$

pentru $AM=2r$, $F=P$, rezultă

$$k=\frac{P}{2r},\;\; F=P\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (3)$$

Din primele două relaţii ale sistemului (2), luând în considerare (3) se obţine:

$$T = -P\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,; \quad N = P\cos^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{4}$$

Introducând (4) în ultima relaţie din (2), rezultă:

$$tg\,\frac{\theta}{2} \le tg\,\varphi \quad \text{sau} \quad \theta \le 2\varphi\ .$$

Pentru $F = P$ şi $AM = 2r$ punctul M coincide cu B, deci $\theta = \pi$ şi din (4) rezultă $T = 0,\ N = 0,$ deci punctul este în echilibru. Poziţiile de echilibru ale punctului sunt pentru $\theta < 2\varphi$ şi în punctul cel mai jos al cercului.

4.2.11. Un punct material greu este mobil pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală şi al cărui unghi de frecare este $\varphi < \alpha$ (fig. 4.13). El este acţionat de o forţă $\overline{F}$ care face unghiul $\beta < 90^0$ cu planul înclinat, având sensul din figură. Între ce limite poate varia $\overline{F}$ pentru ca punctul să stea în echilibru?

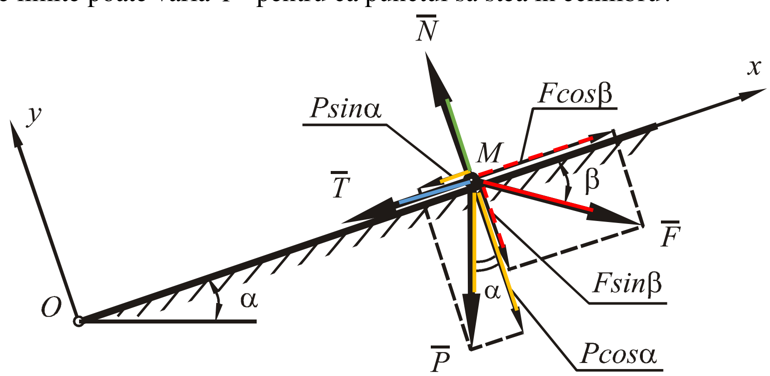


Fig. 4.13

Soluţie:

Asupra punctului acţionează forţele exterioare $\overline{P}, \overline{F}$ şi forţele de legătură $\overline{N}, \overline{T}$. Condiţiile de echilibru, conform cu (4.1), (4.2), (4.16) sunt:

$$\overline{P} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{T} = 0, \ \ T \le tg\varphi N \tag{1}$$

sau:

$$-P\sin\alpha+F\cos\beta-T=0$$
$$-P\cos\alpha-F\sin\beta+N=0 \qquad (2)$$
$$T\le tg\varphi N.$$

Din primele ecuaţii ale sistemului (2) se obţin:

$$T=F\cos\beta-P\sin\alpha;\quad N=F\sin\beta+P\cos\alpha\ , \qquad (3)$$

care introduse în ultima relaţie, ştiind că $\beta<90^0$, $\alpha<90^0$, conduc la:

$$|\,F\cos\beta-P\sin\alpha\,|\le tg\varphi(P\cos\alpha+F\sin\beta). \qquad (4)$$

Dacă:

$$F\cos\beta-P\sin\alpha>0\ ,$$

relaţia (4) devine:

$$F\cos\beta-P\sin\alpha\le tg\varphi(P\cos\alpha+F\sin\beta),$$

de unde:

$$F\le P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}\quad . \qquad (5)$$

Dacă:

$$F\cos\beta-P\sin\alpha<0,$$

relaţia (4) devine:

$$P\sin\alpha-F\cos\beta\le \mathrm{tg}(P\cos\alpha+F\sin\beta)\ ,$$

de unde:
$$F\ge P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}. \qquad (6)$$

Reunind relaţiile (5) şi (6) rezultă:

$$P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}\le F\le P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}\ . \qquad (7)$$

pentru
$$\beta+\varphi<90^0;\ \sin(\alpha+\varphi)>0;\ \cos(\alpha+\varphi)>0;$$
$$\sin(\alpha-\varphi)>0;\ \alpha>\varphi;\ \cos(\beta-\varphi)>0,$$

astfel că:

$$P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \le F \le P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}\ . \tag{8}$$

Pentru $\beta+\varphi>90^0$; $\sin(\alpha+\varphi)>0$; $\cos(\alpha+\varphi)<0$; $\sin(\alpha-\varphi)>0$; $\alpha>\varphi$; $\cos(\beta-\varphi)>0$,

astfel că: $$F \ge P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}\,.$$

4.3 Probleme propuse

4.3.1. Un trepied echilateral este fixat pe cadrul unui ceas (fig. 4.14). Înălţimea trepiedului este egală cu raza cadranului de ceas. Picioarele trepiedului sunt sprijinite la indicaţia orelor 12, 4 şi 8. Forţa orizontală $\overline{F}$ este aplicată în punctul A la vârful trepiedului în direcţia corespunzătoare orei 1 la 30^0 faţă de planul format de punctele A, O, C_{12}. Să se determine forţele aplicate punctului A de către barele trepiedului.

Răspuns: $F_4 = 0$; $F_8 = F_{12} = \dfrac{2F}{\sqrt{6}}$

4.3.2. O particulă de greutate G este suspendată la mijlocul unui resort orizontal de lungime *2a* în stare nedeformată (fig. 4.15). Fiecare jumătate de resort are constanta elastică *k*. Să se determine deplasarea δ a particulei.

Răspuns: $\delta = \left(\dfrac{Ga^2}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$.

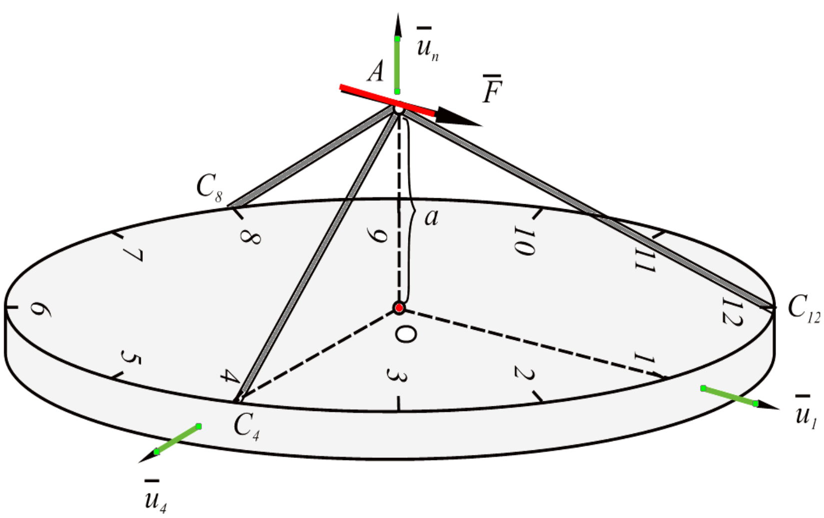


Fig. 4.14

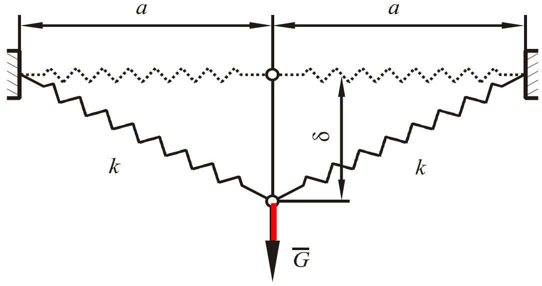


Fig. 4.15

4.3.3. Un punct material M este mobil fără frecare pe elipsoidul de inerţie:

$$x^2 + y^2 + 2z + \frac{\frac{G}{k} - a^2}{2} = c^2 \quad \text{(c = constantă)}$$

fiind acţionat de următoarele forţe: greutatea sa G, o forţă de atracţie proporţională cu distanţa spre punctul fix $A(0,0,a)$ şi o forţă de atracţie proporţională cu distanţa spre planul orizontal xOy şi perpendiculară pe aceasta. Coeficientul atracţiilor este acelaşi, *k*. Se cer poziţiile de echilibru.

Răspuns: Echilibru în orice poziţie.

4.3.4. Se cere poziţia de echilibru a unui punct greu *M*, mobil fără frecare pe curba (Γ) de ecuaţii:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z}{3} = 0$$

într-un sistem $Oxyz$ cu axa Oz verticală în sus .

Răspuns: Patru poziţii de echilibru:

$$x = 0\ ; \quad y = \pm\sqrt{3}\ ; \quad z = -1$$

şi

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad y = 0; \quad z = \frac{2}{3}\ .$$

4.3.5. Să se determine poziţiile de echilibru ale unui punct greu M, mobil pe un cerc luciu al cărui plan face unghiul α cu planul orizontal.

Răspuns: $x = 0$; $y = \pm r \cdot \cos\alpha$; $z = \pm r \cdot \sin\alpha$.

4.3.6. Un punct material greu este mobil pe un plan aspru înclinat cu unghiul α faţă de orizontală şi al cărui unghi de frecare este $\varphi < \alpha$. El este acţionat de o forţă orizontală $\overline{F}$ cuprinsă în acelaşi plan vertical cu linia de cea mai mare pantă, având sensul din figura 4.16. Între ce limite poate varia forţa F pentru a exista echilibru?

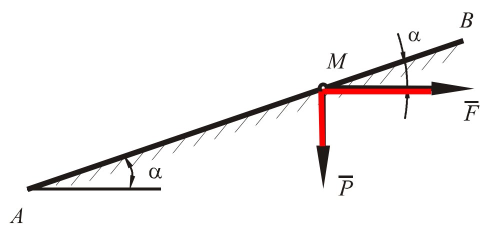


Fig. 4.16

Răspuns:

dacă $\alpha + \varphi < 90^0$, atunci $P\ \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) \le F \le P\ \mathrm{tg}(\alpha + \varphi)$,

dacă $\alpha + \varphi > 90^0$, atunci $P\ \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) \le F \le P\ \mathrm{tg}(\alpha + \varphi)$.

4.3.7. O greutate $\overline{G}$ este suspendată în punctul O de un fir inextensibil AOB ale cărei capete A şi B sunt fixate la o grindă. Se cunosc unghiurile α, β pe care firul le face cu grinda. Să se determine tensiunile din fir (fig. 4.17).

Răspuns:

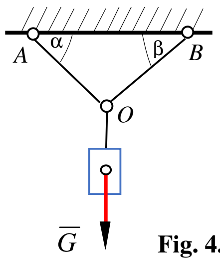


Fig. 4.17

$$S_A = G\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ ; \quad S_B = G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\ .$$

4.3.8. Un punct *M* de greutate $\overline{G}$ se poate deplasa fără frecare pe un cerc de rază *r*, fiind respins de extremitatea *A* a diametrului orizontal şi atras de extremitatea *B* a diametrului vertical, cu forţe proporţionale cu distanţele respective. Să se determine poziţia de echilibru a punctului pe cerc şi reacţiunea cercului (fig. 4.18).

Răspuns:

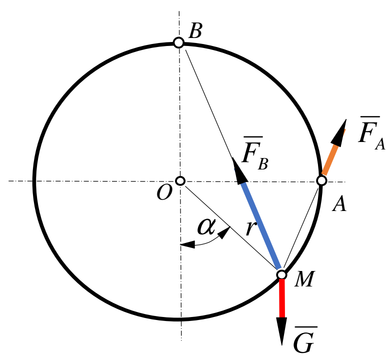


Fig. 4.18

$$\overline{F}_A + \overline{F}_B + \overline{G} + \overline{N} = 0.$$

$$tg\alpha = \frac{G}{kr} - 1\ .$$

$$N = \sqrt{(G-kr)^2 + k^2r^2}\ .$$

4.3.9. Pe un ghidaj circular, situat într-un plan vertical, se sprijină două puncte de greutăţi $\overline{G}_1$ şi $\overline{G}_2$ legate între ele printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil de lungime *l*. Raza ghidajului circular este *r*. Se cere să se determine valorile unghiurilor φ_1 şi φ_2 pentru poziţia de echilibru (fig. 4.19).

Răspuns:

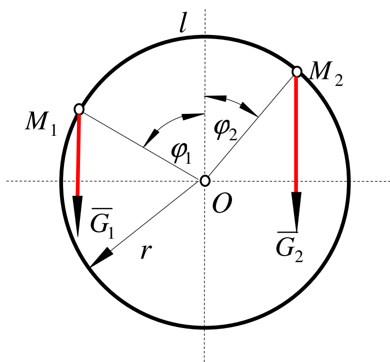


Fig. 4.19

$$ctg\,\varphi_1 = \frac{G_1 + G_2 \cos\left(\frac{l}{r}\right)}{G_2 \sin\left(\frac{l}{r}\right)}$$

$$ctg\,\varphi_2 = \frac{G_2 + G_1 \cos\left(\frac{l}{r}\right)}{G_1 \sin\left(\frac{l}{r}\right)}.$$

4.3.10. Un punct *M*, care poate aluneca fără frecare în lungul unei drepte, este atras de două puncte fixe O_1 şi O_2 cu forţe invers proporţionale cu distanţele pătratelor respective. Punctul *M* se găseşte în echilibru când segmentul MO_1 este normal pe segmentul MO_2. Să se demonstreze că pentru poziţia de echilibru a punctului, între lungimile *a*, *b*, *c* există relaţia: $a^3 + b^3 = abc$. Să se determine în acest caz valoarea reacţiunii normale $\overline{N}$.

Răspuns:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{N} = 0.$$

$$N = \frac{k}{\sqrt{a^4 + b^4}}.$$

5. ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID [10]

5.1 Consideraţii teoretice

5.1.1 Echilibrul solidului rigid liber

*Un solid rigid este **liber** (are şase grade de libertate) atunci când poziţia sa în spaţiu este determinată exclusiv de către sistemul de forţe care acţionează asupra lui. Solidul rigid liber are şase grade de libertate* care, în general, sunt *trei translaţii şi trei rotaţii*. Înseamnă că poziţia rigidului în spaţiu este determinată de şase parametri care pot fi aleşi în următoarele moduri (fig. 5.1):

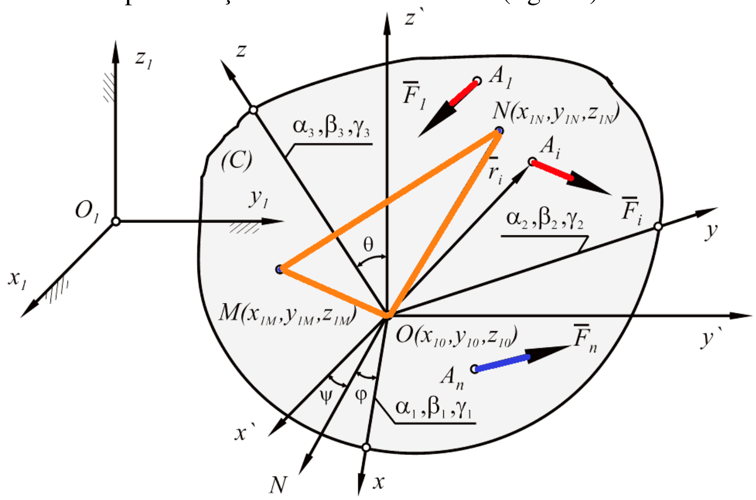


Fig. 5.1

a) se aleg coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} ale unui punct O aparţinând solidului rigid şi unghiurile lui Euler ψ, φ, θ;

b) se aleg coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} ale unui punct O al rigidului şi trei din cele nouă cosinusuri directoare $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1 \div 3$, ale axelor sistemului $Oxyz$ solidar cu rigidul (C) în raport cu sistemul fix oarecare $O_1x_1y_1z_1$, respectiv în raport cu sistemul $Ox'y'z'$ ale cărui axe sunt paralele cu ale sistemului de referinţă fix;

c) se aleg şase din cele nouă coordonate a trei puncte *O, M, N* necoliniare distincte, aparţinând solidului rigid.

Condiţia necesară şi suficientă ca un solid rigid aflat sub acţiunea unui sistem de forţe $\overline{F}_1, ..., \overline{F}_i, ..., \overline{F}_n$ *să fie în echilibru este ca sistemul de forţe să fie echivalent cu zero*, respectiv torsorul de reducere în raport cu un punct oarecare O să fie nul. În consecinţă, ecuaţiile vectoriale de echilibru ale solidului rigid sunt:

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{M}_O = 0. \tag{5.1}$$

Ecuaţiile scalare de echilibru se obţin proiectând relațiile (5.1) pe axele unui sistem de referinţă, sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$. Se obţine astfel sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}
R_{x_1} &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix_1} = 0 \\
R_{y_1} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy_1} = 0 \\
R_{z_1} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz_1} = 0 \\
M_{x_1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{1i} F_{iz_1} - z_{1i} F_{iy_1} \right) = 0 \\
M_{y_1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(z_{1i} F_{ix_1} - x_{1i} F_{iz_1} \right) = 0 \\
M_{z_1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1i} F_{iy_1} - y_{1i} F_{ix_1} \right) = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

în care x_{1i}, y_{1i}, z_{1i} sunt coordonatele punctelor A_i în care acţionează forţele $\overline{F}_i,\ i = 1 \div n$, în raport cu sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, iar $F_{ix_1}, F_{iy_1}, F_{iz_1}$ reprezintă proiecţiile forţelor $\overline{F}_i$ pe axele acestui sistem.

În general, necunoscutele la o problemă de echilibru a unui solid rigid liber sunt cei şase parametri independenţi care poziţionează rigidul în spaţiu. Având şase ecuaţii şi şase necunoscute, problema echilibrului unui solid rigid liber este o problemă static determinată.

5.1.2 Echilibrul solidului rigid supus la legături

O **legătură** a unui solid rigid este o restricţie impusă posibilităţilor de mişcare ale acestuia. Rigidul poate face mişcari simple (translație sau rotație), fie mişcări compuse combinații ale acestora. Orice legătură a unui rigid îi suprimă acestuia un număr *n* de grade de libertate, $n \leq 6$.

În conformitate cu axioma legăturilor, orice legătură a unui rigid se poate suprima şi se înlocuieşte cu o forţă de legătură corespunzătoare (pe direcția mişcării suprimate şi în sens invers acesteia) aplicată rigidului într-un punct teoretic de contact. Astfel, solidul rigid devine “liber”, asupra lui acţionând forţele date şi forţele de legătură.

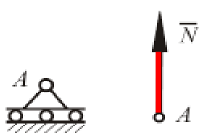
În mecanica tehnică legăturile reale fără frecare ale solidului rigid se aproximează cu următoarele tipuri de legături:

5.1.2.1 Reazemul simplu (simpla rezemare)

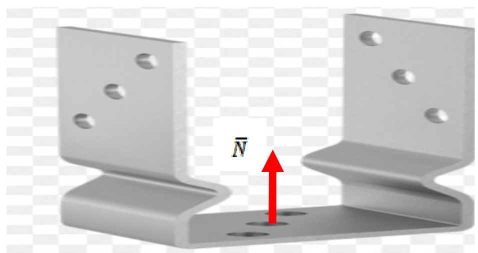
Această legătură apare atunci când contactul dintre corpuri este punctiform, este după o dreaptă de contact sau o suprafaţă plană de contact. Indiferent de situaţie, se consideră contactul corpurilor într-un punct teoretic de contact şi anume în punctul în care axa centrală a sistemului de forţe date intersectează suprafaţa (sau dreapta) de contact dintre cele două corpuri.

Reazemul simplu suprimă rigidului *un grad de libertate* şi anume, *deplasarea în direcţia normalei* dusă în punctul teoretic de contact pe suprafaţa (sau dreapta) de contact.

Simbolul reazemului simplu este prezentat în figura 5.2a.

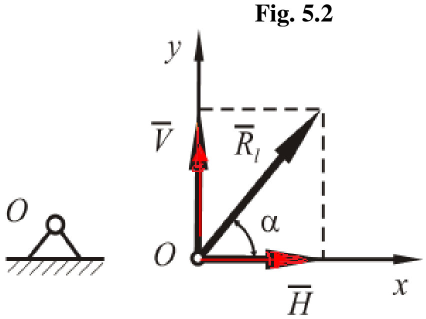


a. b.

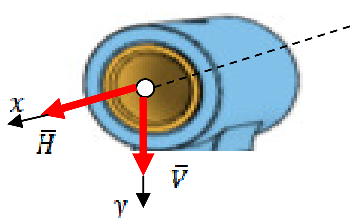


c.

Fig. 5.2



a. b.



c. Articulație cilindrica [1a].

Fig. 5.3

Prin suprimarea acestei legături, se introduce în punctul teoretic de contact A ***reacţiunea normală*** $\overline{N}$ după direcţia normalei pe suprafaţa de contact, având sensul contrar tendinţei de deplasare a rigidului, iar modulul necunoscut (fig. 5.2b).

5.1.2.2 Articulaţia cilindrică

Legătura aceasta se întâlneşte atunci când solidul rigid este acţionat de către un sistem de forţe coplanare care fixează un punct al rigidului situat în planul forţelor.
Astfel, rigidul este obligat să se rotească în jurul unei axe

[4a]

perpendiculare pe planul forţelor, în punctul fix. Articulaţia cilindrică are *simbolul* prezentat în figura 5.3a.

Prin suprimarea acestei legături se introduce o forţă de legătură $\overline{R_l}$, care trece prin punctul fix, dar are direcţia şi modulul necunoscute. În aplicaţiile practice se introduc componentele $\overline{H}$ şi $\overline{V}$, pe orizontală şi pe verticală, ale forţei de legătură (fig. 5.3b), cu ajutorul cărora se pot determina modulul şi direcţia forţei de legătură $\overline{R_l}$ astfel:

$$R_l = \sqrt{H^2 + V^2}\ ,\ \ tg\,\alpha = \frac{V}{H}. \tag{5.3}$$

5.1.2.3 Articulaţia sferică

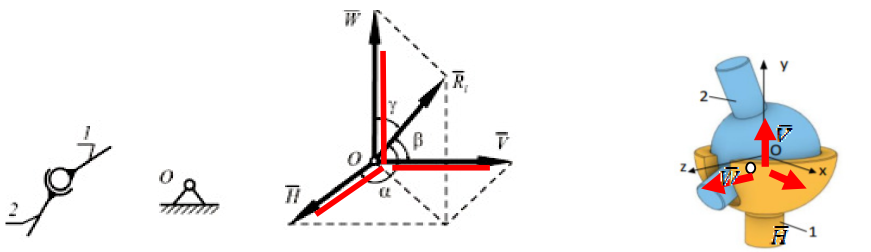
Această legătură suprimă corpului trei grade de libertate şi anume, cele trei translaţii în lungul axelor unui sistem de referinţă. Solidul rigid are, în acest caz, trei grade de libertate care sunt cele trei rotaţii în jurul axelor sistemului de referinţă ales cu originea în punctul fix al rigidului.

[4a]

Suprimând legătura, se introduce în punctul fix al solidului rigid forţa de legătură $\overline{R_l}$, necunoscută în spaţiu ca modul şi direcţie. În aplicaţii forţa $\overline{R_l}$ se înlocuieşte pe axele sistemului de referinţă cu componentele $\overline{H}, \overline{V}, \overline{W}$ (fig. 5.4c) a căror mărime se determină din ecuaţiile de echilibru scrise pentru solidul rigid.

Simbolul articulaţiei sferice se poate urmări în figurile 5.4a şi 5.4b.
Având în vedere figura 5.4c, se pot determina modulul şi direcţia forţei de legătură

$\overline{R}_l$ astfel: $\overline{R}_l = \sqrt{H^2 + V^2 + W^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{H}{R_l}$, $\cos\beta = \dfrac{V}{R_l}$, $\cos\gamma = \dfrac{W}{R_l}$. (5.4)



a. b. c. **d.** Articulatie sferică [1a].

Fig. 5.4

5.1.2.4 Încastrarea

Încastrarea *suprimă corpului toate cele şase grade de libertate*. Dacă sistemul de forţe care acţionează asupra solidului rigid este spaţial sau în plan, încastrarea se numeşte *spaţială* sau *plană*.

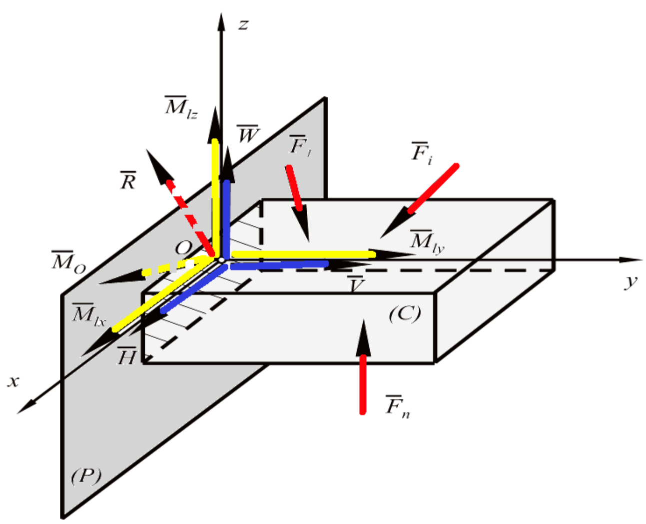
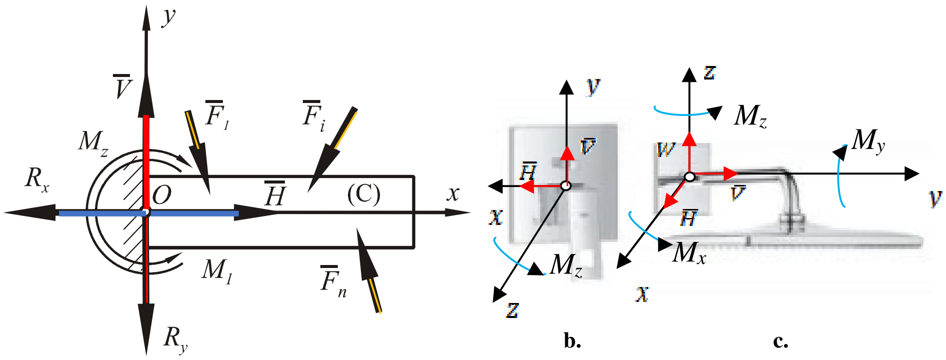


Fig. 5.5

Fie un solid rigid (C) (fig. 5.5) încastrat într-un perete şi aflat sub acţiunea unui sistem spaţial de forţe $\overline{F}_i\ ,i=1\div n$. În centrul O de greutate al secţiunii de încastrare se introduce sistemul de referinţă $Oxyz$ cu axele Ox şi Oz în planul secţiunii de încastrare, iar Oy în lungul rigidului (C). Legătura se înlocuieşte în O cu un torsor al forţelor de legătură $\tau_{l_O}\left(\overline{R}_l,\overline{M}_{l_O}\right)$ ale cărui elemente echilibrează elementele torsorului de reducere $\tau_O\left(\overline{R},\overline{M}_O\right)$ al forţelor date $\overline{F}_i\ ,i=1\div n$.



b. c.

a.

b. Încastrare plană [2a].
c. Încastrare spațială.

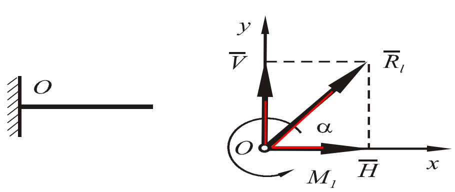
Fig. 5.6

Elementele torsorului forţelor de legătură sunt:

$$\overline{R}_l \rightarrow H,V,W\quad ,\quad \overline{M}_{l_O} \rightarrow M_{l_x},M_{l_y},M_{l_z}\ .$$

Pentru exemplificarea încastrării plane, în figura 5.6 este reprezentată o grindă încastrată într-un perete vertical, supusă unui sistem de forţe coplanare $\overline{F}_i\ ,i=1\div n$. Elementele celor doi torsori de reducere în raport cu O ai forţelor date şi de legătură sunt: $\overline{R}\rightarrow R_x,R_y,0$; $\overline{M}_O\rightarrow 0,0,M_z$; $\overline{R}_l\rightarrow H,V,0$; $\overline{M}_{lO}\rightarrow 0,0,M_1$

Simbolul încastrării plane este prezentat în figura 5.7a.



a. *b.*

Fig. 5.7

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Prin suprimarea încastrării plane (fig. 5.7b), în centrul O de greutate al secţiunii de încastrare se introduc în planul forţelor reacţiunile H şi V, iar perpendicular pe acest plan se introduce momentul M_1 al forţelor de legătură, numit şi moment din încastrare.

Considerând solidul rigid eliberat de legături, se poate studia echilibrul acestuia sub acţiunea forţelor date şi de legătură. Ecuaţiile vectoriale de echilibru a solidului rigid supus la legături sunt:

$$\bar{R} + \bar{R}_l = 0, \qquad \bar{M}_O + \bar{M}_{lO} = 0, \tag{5.5}$$

care proiectate, apoi, pe axele unui sistem de referinţă conduc la un sistem de şase ecuaţii scalare de echilibru, la care se ataşează şi ecuaţiile legăturilor.

Necunoscutele la o problemă de echilibru a solidului rigid supus la legături sunt:

- necunoscute pentru poziţia de echilibru a rigidului (parametri de poziţie) şi
- necunoscute pentru sistemul forţelor de legătură.

Dacă numărul necunoscutelor este egal (sau nu) cu numărul ecuaţiilor, problema este static determinată (sau static nedeterminată).

Legătura prin fire şi bare introduce, prin suprimare, pe direcţia firului (sau barei) o tensiune $\bar{S}$ a cărei mărime este necunoscută.

5.1.2.5 Echilibrul solidului rigid supus la legături cu frecare

Frecarea de alunecare (fig. 5.8) apare atunci când un corp are o mişcare de translaţie, fiind rezemat pe un alt corp sau are o tendinţă de deplasare faţă de acel corp. Acestei mişcări sau tendinţe de deplasare i se opune forţa de frecare la alunecare notată $\bar{T}$ (sau în unele referințe cu $\bar{F}_f$), care este situată în planul tangent dus în punctul teoretic de contact dintre cele două corpuri, are sens contrar mişcării sau tendinţei de mişcare şi are modulul cuprins între limitele:

$$0 \le T \le \mu N . \tag{5.6}$$

În relaţia (5.6) μ - reprezintă *coeficientul de frecare la alunecare* şi este o mărime adimensională, iar N - este *modulul reacţiunii normale*.

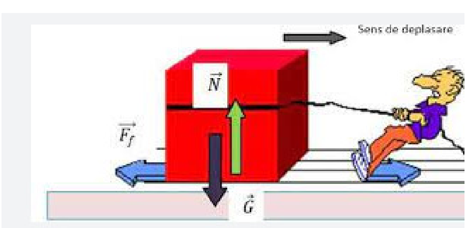


Fig. 5.8 Frecarea la alunecare [6a].

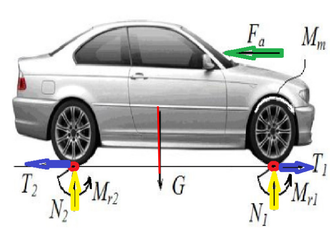


Fig. 5.9 Frecarea la rostogolire [7a].

Frecarea de rostogolire (fig. 5.9) apare între două corpuri atunci când un corp aflat în contact cu celălalt într-un punct teoretic de contact, are o mişcare de rotaţie sau o tendinţă a unei astfel de mişcări în jurul unei axe situată în planul tangent dus în punctul de contact dintre cele două corpuri. Acestei mişcări sau tendinţe de mişcare i se opune momentul M_r al frecării de rostogolire, care are valoarea cuprinsă între limitele:

$$0 \le M_r \le sN \,. \tag{5.7}$$

În relaţia (5.7) s - reprezintă *coeficientul frecării de rostogolire* şi are dimensiunea unei lungimi, iar N - reprezintă modulul reacţiunii normale.

Frecarea de pivotare apare în cazul în care un corp este sprijinit pe un alt corp într-un punct teoretic de contact şi are o mişcare de rotaţie sau o tendinţă de mişcare de rotaţie în jurul unei axe, care are direcţia normalei comune dusă în punctul teoretic de contact la suprafaţa de contact dintre cele două corpuri. Acestei mişcări sau tendinţe de mişcare i se opune momentul frecării de pivotare M_p, care are valoarea cuprinsă între limitele:

$$0 \le M_p \le kN \,. \tag{5.8}$$

În relaţia (5.8) k - reprezintă *coeficientul frecării de pivotare* şi are dimensiunea unei lungimi, iar N - reprezintă *modulul reacţiunii normale*.

Frecarea din articulaţii şi lagăre (fig. 5.10) apare la mişcarea de rotaţie a unui corp în jurul unei axe sau atunci când există o tendinţă a unei astfel de mişcări. Oricărei mişcări sau tendinţe de mişcare a unui corp în jurul unui ax fix i se opune un moment M_{fa} al frecării din articulaţie, care are valoarea cuprinsă între limitele:

$$0 \le M_{fa} \le \mu' rN \,. \tag{5.9}$$

În relaţia (5.9) μ' - reprezintă *coeficientul de frecare din articulaţie* şi lagăr, r - este *raza axului* (fusului), iar N - reprezintă *modulul reacţiunii normale* totale.

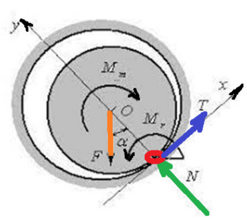


Fig. 5.10 Frecarea din articulații şi lagăre [8a].

[10] Ispas, V. și alții, 2010

5.2 Probleme rezolvate [10]

5.2.1. O bară de lungime $AB = l = 100\ cm$, având centrul de masă C la distanţa $AC = a = 40\ cm$ de capătul A şi greutatea $G = 1\ daN$, trebuie menţinută în echilibru cu ajutorul a trei forţe P, Q, R, cuprinse în planul vertical al barei, în poziţia în care face unghiul $\alpha = 60^0$ (fig. 5.11).

Se cer mărimile forţelor P,Q, şi R ştiind că forţa P este aplicată în A pe verticală, forţele Q şi R sunt perpendiculare pe direcţia barei şi aplicate în punctele D şi B astfel încât $DB = c = 25\,cm$. Sensul forţelor este cel indicat în figură. Să se precizeze o variantă de legături introduse în A şi B pentru a rezulta forţele de legătură $\overline{P}$ şi $\overline{R}$.

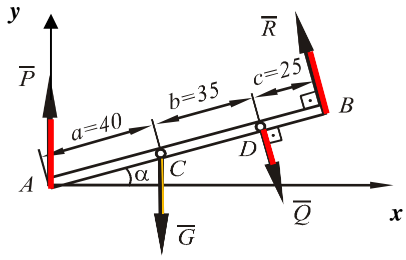


Fig. 5.11

Soluţie:

Bara fiind în echilibru sub acţiunea a patru forţe coplanare, se scriu două ecuaţii de proiecţii pe axele sistemului xAy şi o ecuaţie de momente în raport cu A. Astfel ,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ Q\sin\alpha - R\sin\alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ P - G - Q\cos\alpha + R\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F_i}\right) = 0\ ;\ -a\cos\alpha \cdot G - (a+b)Q + (a+b+c)R = 0\ .$$

Rezolvând sistemul (1), se obţin:

$$Q = R = \frac{a}{c}\cos\alpha G\ ;\ P = G\ .$$

Aplicaţie numerică:

$$Q = R = \frac{40}{25}\cos 60^0 \cdot 1 = 0{,}8\,daN\ ; \qquad P = 1\,daN\ .$$

În punctele A şi B, pentru a se obţine $\overline{P}$ şi $\overline{R}$, se introduc simple rezemări sau legături prin fir.

O variantă de legături introduse în *A* si *B* este arătată în figura 5.12.

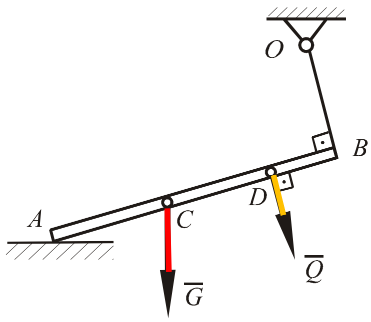


Fig. 5.12

5.2.2. O macara este formată dintr-o bară omogenă AC de greutate $\overline{P}$. Bara se poate roti în jurul articulaţiei A şi este prinsă de punctul fix B printr-un lanţ BC. De capătul C este atârnată o greutate $\overline{Q}$ (fig. 5.13). Să se determine tensiunea S a lanţului şi reacţiunea în articulaţia A, dacă unghiurile α şi β sunt cunoscute. Cum variază tensiunea în cazul când lanţul va deveni orizontal?

Caz particular: se neglijează greutatea barei.

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ H - S\sin(\alpha+\beta) = 0 \tag{1}$$

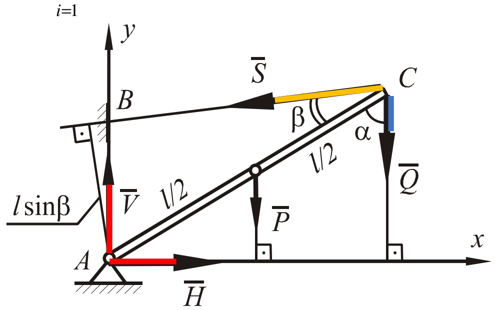


Fig. 5.13

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ V - P - Q - S\cos(\alpha+\beta) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0\ ;\ \frac{l}{2}\sin\alpha\cdot P + l\sin\alpha\cdot Q - l\sin\beta\cdot S = 0\,. \tag{3}$$

Din relaţia (3) se obţine:

$$S = \frac{P+2Q}{2\sin\beta}\sin\alpha\ , \tag{4}$$

care, introdusă în (1) şi (2), conduce la:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P+2Q}{2\sin\beta}\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta) \\ V &= P+Q+S = \frac{P+2Q}{2\sin\beta}\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta). \end{aligned} \tag{5}$$

Dacă lanţul este pe orizontală, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. În acest caz, tensiunea S are valoarea:

$$S = \frac{P+2Q}{2}tg\alpha\ . \tag{6}$$

Caz particular: dacă greutatea barei se neglijează, (4) şi (5) devin:

$$S = Q\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ ;\ H = Q\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\sin(\alpha+\beta) \tag{7}$$

$$V = Q\left[1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos(\alpha+\beta)\right].$$

5.2.3. O bară grea omogenă este în echilibru sub acţiunea a două forţe care sunt aplicate în extremităţile A,B şi fac cu verticala unghiurile α,β (fig. 5.14). Ce unghi face bara cu verticala în poziţia de echilibru?

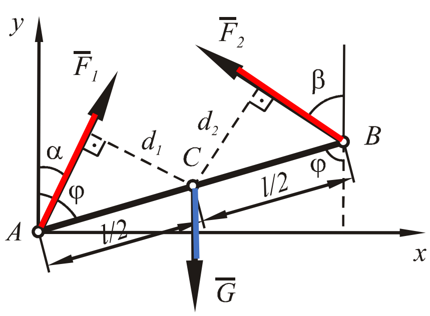


Fig. 5.14

Soluţie:

Bara este în echilibru sub acţiunea forţelor $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$ şi a forţei de greutate $\overline{G}$. Alegând sistemul de referinţă *xAy,* se scriu ecuaţii de proiecţii pe axele sistemului şi o ecuaţie de momente în raport cu punctul *C*. Astfel,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ F_1\sin\alpha - F_2\sin\beta = 0,$$

din care rezultă: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (1)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ ; \ F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - G = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i) = 0 \ ; \qquad -F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0 \ ,$$

din care se obţine:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\varphi-\alpha)}, \qquad (3)$$

având în vedere că

$$d_1 = \frac{l}{2}\sin(\varphi-\alpha) \ ; \ d_2 = \frac{l}{2}\sin[180 - (\beta+\varphi)] . \qquad (4)$$

Din (1) şi (3) se obţine:

$$\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta} \ , \qquad (5)$$

din care rezultă:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{2} . \qquad (6)$$

F_1 şi F_2 se obţin din ecuaţiile (1) şi (2) şi anume:

$$F_1 = G\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \ , \ F_2 = G\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} . \qquad (7)$$

5.2.4. O placă triunghiulară omogenă *ABC* (fig. 5.15) are greutatea *P*=1 *daN* şi poartă în vârfurile *A, B, C* greutăţile: $F_1 = 2\ daN$, $F_2 = 3\ daN$,$F_3 = 4\ daN$. În ce punct trebuie susţinută placa pentru a rămâne în echilibru? Să se arate că acest punct nu depinde de orientarea planului plăcii. Se dau: *OA*=*m* şi *BC*=2*a*.

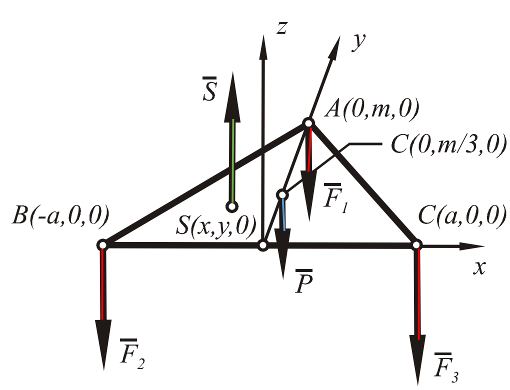


Fig. 5.15

Soluţie:

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \;;\; S - 1 - 2 - 3 - 4 = 0 \text{, de unde } S = 10\,daN \;. \tag{1}$$

În conformitate cu (5.2), se pot scrie ecuaţiile:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \right) = 0$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right) = 0 \tag{2}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) = 0 \,,$$

în care $F_{ix} = F_{iy} = 0$, astfel că (2) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i F_{iz} = yS - \frac{m}{3} \cdot 1 - m \cdot 2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i F_{iz} = xS + 3a - 4a = 0. \tag{3}$$

Din sistemul (3) se obţin

$$x = \frac{7}{30} m \;;\; y = -\frac{1}{10} a \,. \tag{4}$$

Dacă se schimbă orientarea planului plăcii (se schimbă direcţia vectorilor $\overline{F_i}$ şi $\overline{G}$), alegând Oz mereu paralel cu direcţia vectorilor, se obţin aceleaşi ecuaţii de echilibru.

5.2.5. Două bare grele, omogene, de aceeaşi lungime $AB = AC = l$ formează un unghi drept rigid BAC care se poate deplasa într-un plan vertical, rezemându-se fără frecare pe colţurile D, E a doi pereţi din acest plan, punctele D şi E fiind pe aceeaşi orizontală la distanţa $DE = a < l$.

Se cere poziţia de echilibru şi reacţiunile în D şi E (fig. 5.16).

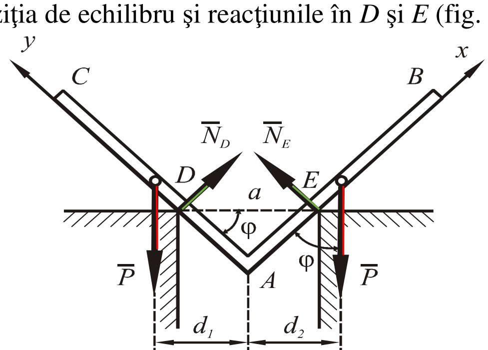


Fig. 5.16

Soluţie:

Reazemele simple din D şi E suprimă rigidului două grade de libertate în planul său, rămânând doar un singur grad de libertate. Parametrul care determină poziţia de echilibru a barelor este unghiul φ.

Se suprimă legăturile, introducând forţele de legătură $\overline{N}_D$ şi $\overline{N}_E$. Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; N_D - P\cos\varphi - P\cos\varphi = 0 \Rightarrow N_D = 2P\cos\varphi \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; N_E - P\sin\varphi - P\sin\varphi = 0 \Rightarrow N_E = 2P\sin\varphi \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0 \; ; - N_D \cdot AD + Pd_1 + N_E \cdot AE - Pd_2 = 0 \, , \tag{3}$$

în care

$$AD = a\cos\varphi; \quad AE = a\sin\varphi; \quad d_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi; \quad d_2 = \frac{l}{2}\sin\varphi \, .$$

Ecuaţia (3) de momente devine:

$$2a\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) - \frac{l}{2}\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) = 0 \, , \tag{4}$$

care este satisfăcută dacă

$$\begin{cases} \sin\varphi - \cos\varphi = 0 & (5) \\ \sin\varphi + \cos\varphi = \dfrac{l}{4a}. & (6) \end{cases}$$

Din (5) se obţine:

$$\sin\varphi = \cos\varphi \text{ pentru } \varphi < 90^0 \text{, rezultă } \varphi = 45^0 \, . \tag{7}$$

Ecuaţia (6) se mai poate scrie:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right) = \frac{l}{4a} \, ,$$

$$\cos\left(45^0 - \varphi\right) = \frac{l}{4a\sqrt{2}} \, . \tag{8}$$

Cum $\varphi < 90^0$, rezultă $\left|45^0 - \varphi\right| < 45^0$, astfel că ecuaţia (8) are soluţie pentru:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{l}{4a\sqrt{2}} < 1$$

sau

$$4 < \frac{l}{a} < 4\sqrt{2} \, . \tag{9}$$

În această ipoteză, din (8) se obţine:

$$\left|45^0 - \varphi\right| = \arccos\frac{l}{4a\sqrt{2}} \ ,$$

respectiv,

$$\varphi = 45^0 \pm \arccos\frac{l}{4a\sqrt{2}} \ . \qquad (10)$$

Aşadar, dacă este satisfăcută inegalitatea (9), există trei poziţii de echilibru date de (7) şi (10). Dacă nu este îndeplinită inegalitatea (9), se obţine o singură poziţie de echilibru dată de (7).

Pentru prima poziţie de echilibru se obţine:

$$N_D = N_E = P\sqrt{2} = 1{,}414\,P \ , \qquad (11)$$

iar pentru poziţia dată de (10) se obţin valorile forţelor N_D şi N_E, astfel:

$$N_D = 2P\cos\varphi = 2P\cos\left[45^0 \pm \arccos\frac{l}{4a\sqrt{2}}\right]$$

$$N_D = 2P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{4a\sqrt{2}} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{l^2}{32a^2}}\right) = \frac{P}{4a}\left(l \pm \sqrt{32a^2 - l^2}\right) \qquad (12)$$

$$N_E = 2P\sin\varphi = 2P\sin\left[45^0 \pm \arccos\frac{l}{4a\sqrt{2}}\right]$$

$$N_E = P\sqrt{2}\left(\frac{l}{4a\sqrt{2}} \pm \sqrt{1-\frac{l^2}{32a^2}}\right) = \frac{P}{4a}\left(l \pm \sqrt{32a^2 - l^2}\right) \ . \qquad (13)$$

5.2.6. O bară *AB*=*a* de greutate $\overline{G}$ se reazemă în *A* pe o podea perfect lustruită, iar în *B* pe un perete perfect lustruit, înclinat sub unghiul β faţă de orizontală. Să se determine reacţiunile în *A* şi *B* şi mărimea forţei $\overline{F}$ ce trebuie aplicată în A, pentru ca bara să stea în echilibru (fig. 5.17).

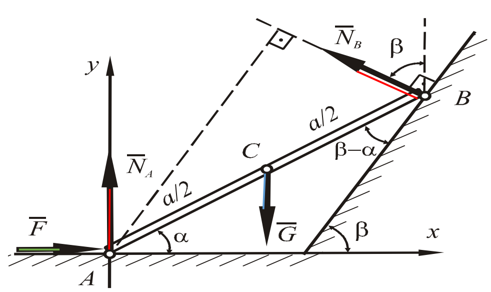


Fig. 5.17

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \ ; \ F - N_B \sin\beta = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ ; \ N_A + N_B \sin\beta - G = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0 \ ; \ G\frac{a}{2}\cos\alpha - N_B a \cos(\beta-\alpha) = 0 \ . \tag{3}$$

Din sistemul format de ecuaţiile (1)-(3) se obţin succesiv:

$$N_B = G\frac{\cos\alpha}{2\cos(\beta-\alpha)} \tag{4}$$

$$F = N_B \sin\beta = G\frac{\cos\alpha\sin\beta}{2\cos(\beta-\alpha)} \tag{5}$$

$$N_A = G\left(1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\beta-\alpha)}\right) \ . \tag{6}$$

5.2.7. La capătul E al unei bare de greutate neglijabilă, atârnă o greutate $\overline{G}$. Bara este articulată la capătul din *A* şi este legată prin firul *BCD* trecut în *B* după un inel fără frecare (fig. 5.18). Se dă $\overline{AC} = \overline{DE}$ şi $\overline{BC} = \overline{BD}$. Să se găsească tensiunea $\overline{S}$ în fir. Să se determine reacţiunea în articulaţia *A* ca mărime şi direcţie.

Soluţie:

Se suprimă legăturile barei şi se introduc forţele de legătură *H*, *V*, S_1, S_2. Neglijând frecarea firului cu inelul, se poate scrie: $S_1 = S_2 = S$.

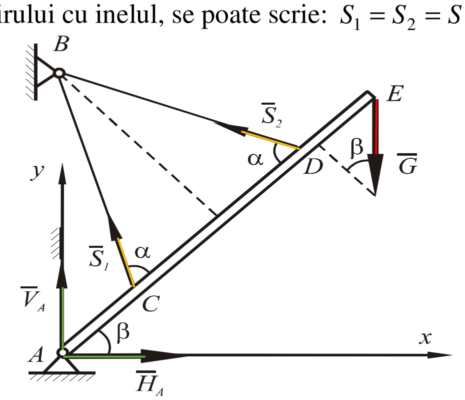


Fig. 5.18

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ H_A - S\cos(\pi - \alpha - \beta) - S\cos[\pi - \beta - (\pi - \alpha)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ V_A + S\sin(\pi - \alpha - \beta) + S\sin(\alpha - \beta) - G = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0\ ;\ AC \cdot S\sin\alpha + (AE - DE)S\sin\alpha - AE \cdot G\cos\beta = 0$$

sau

$$\begin{aligned} &H_A + S\sin(\alpha + \beta) - S\cos(\alpha - \beta) = 0 \\ &V_A + S\sin(\alpha + \beta) + S\sin(\alpha - \beta) - G = 0 \\ &S\sin\alpha(AC + AE - DE) - AE \cdot G\cos\beta = 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Cum $AC = DE$, rezultă

$$S = G\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} . \tag{2}$$

Din primele două ecuaţii (1), se obţin:

$$\begin{aligned} H_A &= G\sin 2\beta \\ V_A &= G\cos 2\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Modulul reacţiunii $\overline{R}_A$ din articulaţia A este:

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = G . \tag{4}$$

Direcţia reacţiunii $\overline{R}_A$ se obţine astfel:

$$\cos\left(\widehat{\overline{R}_A, Ox}\right) = \frac{H_A}{R_A} = \sin 2\beta\ ,\quad \widehat{\overline{R}_A, Ox} = \frac{\pi}{2} - 2\beta\ . \tag{5}$$

5.2.8. O placă triunghiulară omogenă ABC de greutate $\overline{G}$, este suspendată prin intermediul a două fire AD şi BE. Placa se aşează în poziţie de echilibru când latura AB este orizontală, iar firul BE face unghiul α cu această latură (fig. 5.19). Se cer tensiunile din fire şi unghiul β al firului AD cu orizontala în poziţia de echilibru .

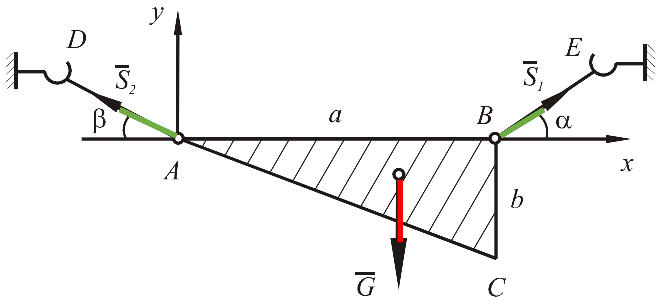


Fig. 5.19

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ S_2 \sin\beta + S_1 \sin\alpha - G = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0\ ; -G\frac{2}{3}a + S_1 \sin\alpha \cdot a = 0 .$$

Din ecuaţia de momente se obţine:

$$S_1 = \frac{2G}{3\sin\alpha}\ . \tag{2}$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului (1), având în vedere (2), rezultă relaţiile:

$$S_2 \sin\beta = \frac{1}{3}G\ ;\ S_2 \cos\beta = \frac{2G}{3\,tg\,\alpha}\ ,$$

care, ridicate la pătrat şi adunate membru cu membru, conduc la:

$$S_2 = \frac{G}{3\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}\ . \tag{3}$$

Din prima ecuaţie a sistemului (1), având în vedere (2) şi (3), se obţine

$$\cos\beta = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}\ . \tag{4}$$

5.2.9. O bară $AB = l$ de greutate neglijabilă se sprijină în A pe un zid vertical perfect lustruit (fără frecare), iar în C pe o muchie perfect lustruită. Celălalt capăt al barei este încărcat cu greutatea G. Să se găsească unghiul φ pentru poziţia de echilibru şi să se determine reacţiunile reazemelor A şi C (fig. 5.20).

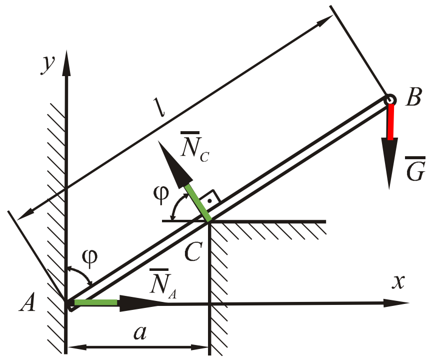


Fig. 5.20

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \ ; \ N_A - N_C \cos\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ ; \ N_C \sin\varphi - G = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0 \ ; \ G\, l \sin\varphi - N_C \frac{a}{\sin\varphi} = 0 . \tag{3}$$

Din (2) se obţine:

$$N_C = \frac{G}{\sin\varphi} , \tag{4}$$

care introdusă în (3) conduce la

$$\sin\varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad . \tag{5}$$

Având în vedere (1),(4),(5), se obţin valorile reacţiunilor din *A* şi *C:*

$$N_C = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}} \ ; \ N_A = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}} \sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{l}{a}}\right)^2} \quad . \tag{6}$$

5.2.10. O placă pătrată de greutate $\overline{G}$ este articulată în *O* şi se reazemă cu colţul A pe un zid vertical. Să se afle reacţiunea din A în funcţie de unghiul α care este dat (fig. 5.21).

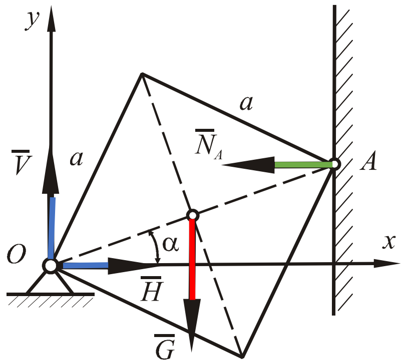


Fig. 5.21

Soluţie:

Se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ H - N_A = 0\ ;\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ V - G = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\overline{F}_i\right) = 0\ ;\ G\,a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - N_A a\sqrt{2}\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

Din sistemul (1)-(2) se obţin:

$$N_A = \frac{G}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$H = N_A = \frac{G}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{3}$$

$$V = G\,.$$

Modulul şi direcţia recţiunii din A se determină astfel:

$$R_A = \sqrt{H^2 + V^2} = G\sqrt{1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} \tag{4}$$

$$tg\left(\widehat{\overline{R}_A, \overline{H}}\right) = \frac{V}{H} = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,.$$

5.2.11. O bară omogenă $OA=l$ de greutate $\overline{G}$, având secţiune dreptunghiulară, se reazemă într-un canal perfect luciu dreptunghiular. Să se determine reacţiunile în O şi B (fig. 5.22).

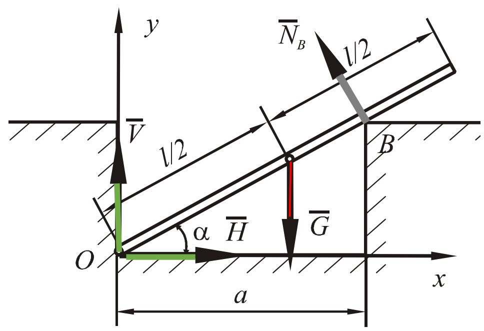


Fig. 5.22

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; H - N_B \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; V + N_B \cos\alpha - G = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\overline{F}_i\right) = 0 \; ; \; G\frac{l}{2}\cos\alpha - N_B\frac{a}{\cos\alpha} = 0\,. \tag{3}$$

Din (1)-(3) se obţin:

$$N_B = G\frac{l}{2a}\cos^2\alpha \tag{4}$$

$$H = G\frac{l}{2a}\cos^2\alpha\,\sin\alpha \tag{5}$$

$$V = G\left(1 - \frac{l}{2a}\cos^3\alpha\right)\,. \tag{6}$$

Modulul reacţiunii R din O este:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2}\,,$$

respectiv:

$$R = \sqrt{1 - \frac{l}{a}\cos^3\alpha + \frac{l^2}{4a^2}\cos^4\alpha}\,. \tag{7}$$

5.2.12. O scândură pătrată *ABCD* de greutate *P* este atârnată de firul *BE*; cu vârful *A* ea se sprijină pe un perete neted fix şi vertical *EA*. Să se determine reacţiunea peretelui în punctul *A*, tensiunea *S* a firului şi unghiul φ, dacă *AB*=*BE*=*a* (fig. 5.23).

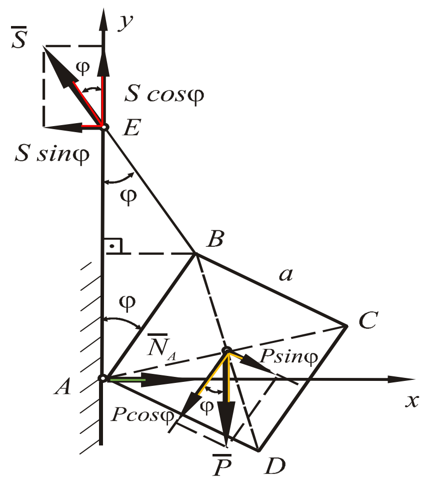


Fig. 5.23

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; N_A - S\sin\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; S\cos\varphi - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0 \; ; \; S\sin\varphi\, 2a\cos\varphi - P\cos\varphi\frac{a}{2} - P\sin\varphi\frac{a}{2} = 0\,. \tag{3}$$

Din (2) se obţine:

$$S = \frac{P}{\cos\varphi} \;,$$

care introdusă în (3) conduce la:

$$tg\,\varphi = \frac{1}{3}\,. \tag{4}$$

Având în vedere relaţia

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,,$$

se obţine valoarea tensiunii

$$S = \frac{\sqrt{10}}{3} P \tag{5}$$

şi valoarea reacţiunii normale:

$$N_A = \frac{1}{3} P\,. \tag{6}$$

5.2.13. Într-un vas emisferic neted de rază $OC = r$ este aşezată o bară omogenă AB=2a şi greutate P. Să se determine unghiul φ şi reacţiunile în punctele A şi C în poziţia de echilibru. Să se afle de asemenea, condiţia posibilităţii echilibrului (fig. 5.24).

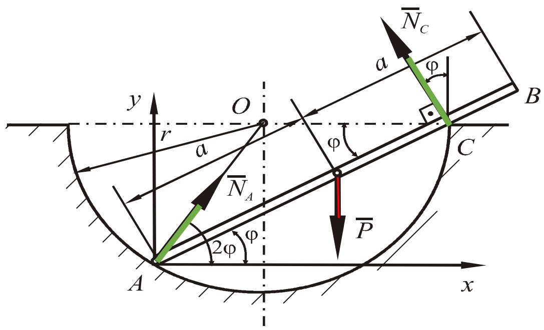


Fig. 5.24

Soluţie:

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ;\ N_A \cos 2\varphi - N_C \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ ;\ N_A \sin 2\varphi - P + N_C \cos\varphi = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0\ ;\ N_C 2r\cos\varphi - a\cos\varphi P = 0\,. \tag{3}$$

Din ecuaţia (3) rezultă

$$N_C = P\frac{a}{2r}\ , \tag{4}$$

care introdus în (1) conduce la

$$N_A = \frac{P\cdot a\sin\varphi}{2r\cos 2\varphi}\ . \tag{5}$$

Introducând (4) şi (5) în (2) se obţine ecuaţia:

$$4r\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2r = 0, \tag{6}$$

a cărei soluţie este:

$$\cos\varphi = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}\ .$$

Echilibrul este posibil pentru $0 \le \cos\varphi \le 1$, adică

$$0 \le \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r} \le 1,$$

de unde:

$$r \ge \frac{a}{2}\ . \tag{7}$$

5.2.14. O placă de greutate $\overline{P}$, având forma unui triunghi echilateral *ABC* cu latura *a*, se reazemă cu vârfurile *A, B* şi *C* pe trei plane perpendiculare între ele *xOy, yOz* şi *zOx*. În vârful *A* placa este legată de punctul *O* printr-un fir de lungime *l*, care împarte unghiul *xOy* în două părţi egale (fig. 5.25).
Să se afle reacţiunile în punctele *A, B, C* şi tensiunea $\overline{S}$ a firului, dacă $OB' = OC'$.

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt :

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad N_C - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad N_B - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \qquad N_A - P = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_A(\overline{F}_i) = 0. \tag{2}$$

Pentru determinarea momentelor este necesar să se determine coordonatele punctelor A,B,C, şi E. În acest sens:

$$OB' = OC' = a\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad OD' = OB'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}. \tag{3}$$

Din $\Delta ADD' \sim \Delta AEE'$ se obţine :

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{AE'}{AD'} = \frac{AE}{AD}, \tag{4}$$

iar din ΔABD şi $\Delta ADD'$ rezultă succesiv:

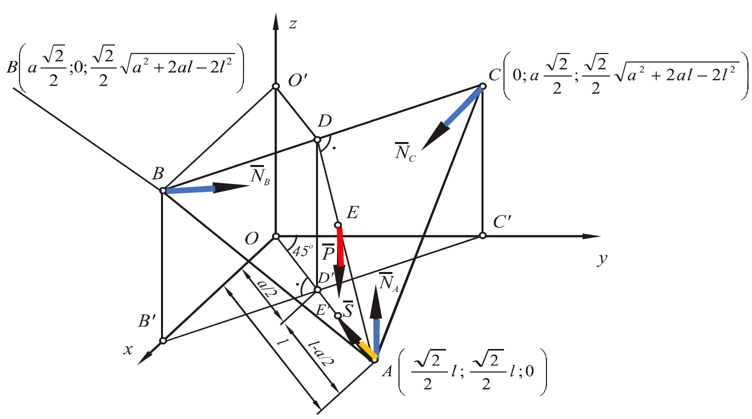


Fig. 5.25

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ DD' = \sqrt{AD^2 - AD'^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}\ . \quad (5)$$

Introducând (5) în (4), se obţine :

$$AE' = \frac{2}{3}(l - \frac{a}{2}); \quad EE' = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2},$$

astfel că:

$$OE' = OA - AE' = \frac{a+l}{3}. \quad (6)$$

Având în vedere figura 5.25 şi relaţiile (3) ÷ (6), coordonatele punctelor *A, B, C, E* sunt:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l; \frac{\sqrt{2}}{2}l; 0\right); B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}\right);$$

$$C\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}\right);$$

$$E\left[\frac{\sqrt{2}}{6}(a+l); \frac{\sqrt{2}}{6}(a+l); \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}\right].$$

Ecuaţia vectorială de echilibru (2) poate fi scrisă astfel:

$$\overline{AB} \times \overline{N}_B + \overline{AC} \times \overline{N}_C + \overline{AE} \times \overline{P} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-l) & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2} \\ 0 & N_B & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2} \\ N_C & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l) & \frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l) & \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2} \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = 0.$$

$$-\left[\frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l)P + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}N_B\right]\bar{i} +$$

$$+\left[\frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l)P + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}N_C\right]\bar{j} + \left[(N_B - N_C)\frac{\sqrt{2}}{2}(a-l)\right]\bar{k} = 0$$

sau scalar:

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l)P+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2al-2l^2}\,N_B=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(a-2l)P+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2al-2l^2}\,N_C=0 \qquad (7)$$

$$(N_B-N_C)\frac{\sqrt{2}}{2}(a-l)=0.$$

Din ecuaţiile (1) se obţin:

$$N_A=P;\quad N_B=N_C;\quad S=\sqrt{2}N_B, \qquad (8)$$

iar din (7) rezultă:

$$N_B=\frac{(2l-a)P}{3\sqrt{a^2+2al-2l^2}}. \qquad (9)$$

Tensiunea S din fir se obţine din (8) şi ţinând cont de (9) şi anume:

$$S=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2l-a}{\sqrt{a^2+2al-2l^2}}P. \qquad (10)$$

5.2.15. O bară AB este articulată în A şi are capătul B prins cu două fire: unul vertical BC, având suspendată o greutate $\overline{G}$ şi celălalt BD, trecut peste un scripete D şi având greutatea $2\overline{G}$ la capăt. Să se determine mărimea unghiului α şi reacţiunea din A pentru echilibru, ştiind că AB = AD, greutatea barei fiind $2\overline{G}$ şi $G=1\ daN$ (fig. 5.26).

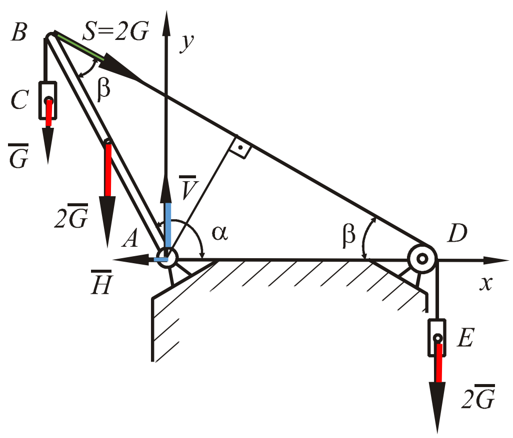


Fig. 5.26

Soluţie:

Având în vedere figura 5.26, se poate scrie:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad 2G\sin\frac{\alpha}{2} - H = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad V - G - 2G - 2G\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F_i}\right) = 0; \qquad 2G\frac{l}{2}(-\cos\alpha) + Gl(-\cos\alpha) - 2Gl\cos\frac{\alpha}{2} = 0. \tag{3}$$

Din (3) rezultă:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}; & \frac{\alpha}{2} = 60^o \\ -1; & \frac{\alpha}{2} = \pi. \end{cases}$$

Problema are sens pentru unghiul: $\alpha = 120^o$. (4)

Din (1) şi (2) şi luând în considerare (4), se obţin:

$$H = \sqrt{3}G; \quad V = 4G \tag{5}$$

pentru $G = 1daN$,

$$H = \sqrt{3}\,daN; \; V = 4\,daN\,. \tag{6}$$

5.2.16. O bară omogenă AB=2a se reazemă fără frecare pe o podea orizontală şi pe un perete vertical. Bara este fixată în C printr-un fir legat de punctul O la celălalt capăt. Se cunosc greutatea $\overline{G}$ a barei şi unghiurile α şi β. Să se determine tensiunea $\overline{S}$ din fir şi reacţiunile în A şi B (fig. 5.27).

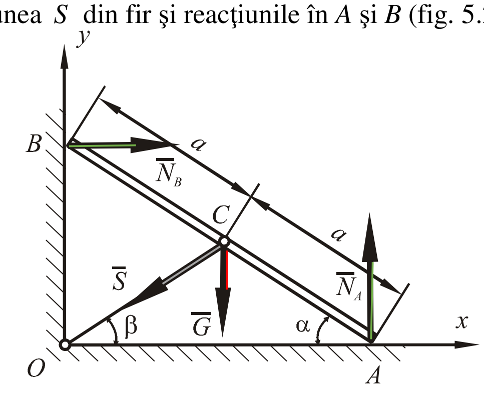


Fig. 5.27

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; N_B - S\cos\beta = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; N_A - G - S\sin\beta = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\overline{F}_i\right) = 0 \; ; \; N_B\, 2a\,\sin\alpha + G\,a\cos\alpha - N_A\, 2a\,\cos\alpha = 0\,. \tag{3}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$N_A = G + S\sin\beta \;\; , \; N_B = S\cos\beta\,, \tag{4}$$

care introduse în (3) conduc la:

$$S = G\frac{\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}\;. \tag{5}$$

Introducând (5) în (4), rezultă valorile reacţiunilor $\overline{N}_A$ şi $\overline{N}_B$:

$$N_A = G\left(1 + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}\right) \; ; \; N_B = S\cos\beta = G\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}\;\;. \tag{6}$$

5.2.17. O bară omogenă de lungime $2l$ şi greutate $\overline{P}$ este fixată prin articulaţia B de un perete, iar în punctul A ea se sprijină pe un cilindru circular fix de rază r, al cărui centru se află la distanţa d de perete. Să se afle reacţiunile in punctele A şi B, fiind cunoscut unghiul α dintre bară şi orizontală (fig. 5.28).

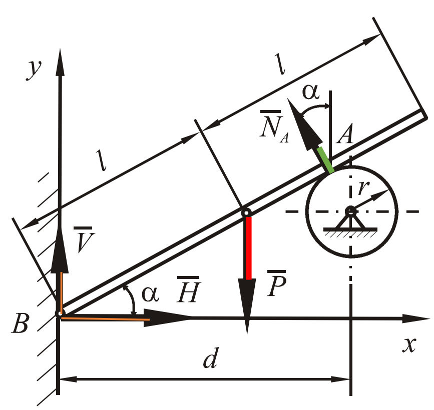


Fig. 5.28

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \ ; \ H - N_A \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ ; \ V + N_A \cos\alpha - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_i\right) = 0 \ ; \ N_A \cdot AB - Pl \cos\alpha = 0 \cdot \tag{3}$$

Din figura 5.28 se obţine

$$AB = \frac{d - r\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

astfel că din (3) rezultă:

$$N_A = P\frac{l \cdot \cos^2\alpha}{d - r\sin\alpha}, \tag{5}$$

iar din (1) şi (2) se obţin: $H = P\dfrac{l\cos^2\alpha\sin\alpha}{d - r\sin\alpha} \ ; V = P\left(1 - \dfrac{l\cos^3\alpha}{d - r\sin\alpha}\right).$ (6)

5.2.18. Se cere poziţia de echilibru a unei bare grele omogene $AB = l$, ale cărei extremităţii se reazemă fără frecare pe un arc de cerc şi pe raza sa verticală $OC = r > l$ (se va exprima prin unghiul $B\widehat{O}C = \alpha$) (fig. 5.29).

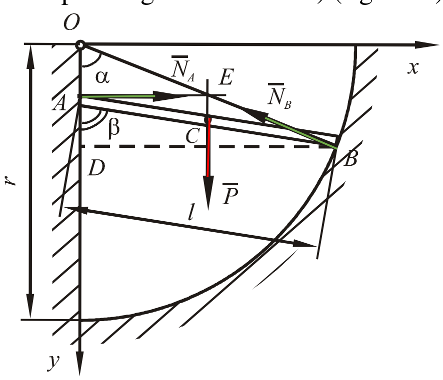


Fig. 5.29

Soluţie:

Bara fiind în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare, acestea trebuie să fie concurente într-un punct. Astfel, punctul E de intersecţie al reacţiunilor $\overline{N}_A$ şi $\overline{N}_B$ trebuie să fie pe verticala centrului de greutate al barei (fig. 5.29).

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad N_A - N_B \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad N_B \cos\alpha - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_o\left(\overline{F_i}\right) = 0; \qquad P \cdot \frac{l}{2} \sin\beta - N_A \cdot OA = 0, \tag{3}$$

în care: $$OA = OD - AD = r\cos\alpha - l\cos\beta. \tag{4}$$

Având în vedere figura dată, se poate scrie:

$$BD = r\sin\alpha = l\sin\beta \tag{5}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}, \tag{6}$$

astfel că din (4) şi ţinând cont de (6), relaţia devine:

$$OA = r\cos\alpha - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}. \tag{7}$$

Din (2) rezultă:

$$N_B = \frac{P}{\cos\alpha},$$

care introdusă în (1) va conduce la:

$$N_A = P\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{8}$$

Luând în considerare (5), (7) şi (8), relaţia (3) devine:

$$\frac{l}{2}\cdot\frac{r\sin\alpha}{l}P - P\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(r\cos\alpha - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}\right) = 0$$

sau: $$\sin\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4l^2 - r^2}{3}}; \qquad \text{pentru } \frac{r}{2} < l < r. \tag{9}$$

5.2.19. O bară omogenă se sprijină într-un ghidaj circular de rază r, distanţa de la centrul ghidajului până la bară fiind egală cu b. Să se determine unghiul φ din figura 5.30 pentru poziţia limită de echilibru a barei în ghidaj.

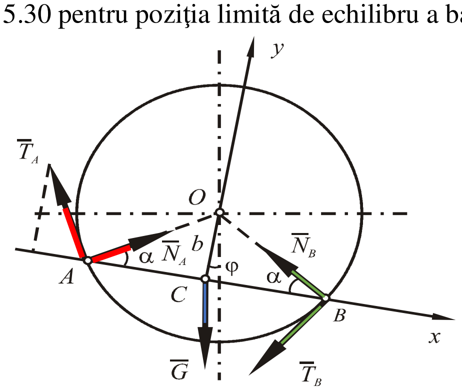


Fig. 5.30

Soluţie:

Pentru echilibru la limită se scriu relaţiile:

$$T_A = \mu N_A; \qquad T_B = \mu N_B. \tag{1}$$

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ (\cos\alpha - \mu\sin\alpha) N_A - (\cos\alpha + \mu\sin\alpha) N_B + G\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) N_A + (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) N_B - G\cos\varphi = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_O(\overline{F}_i) = 0;\ \mu N_A \cdot r + \mu N_B \cdot r - Gb\sin\varphi = 0\,. \tag{4}$$

Din (2) se obţine:

$$N_B = \frac{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) N_A + G\sin\varphi}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \tag{5}$$

care introdusă în (3) şi (4) va conduce la un sistem de ecuaţii în necunoscutele N_A şi φ. Având în vedere că:

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - b^2}\,, \tag{6}$$

se rezolvă sistemul în N_A şi φ şi se obţine:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2}{r^2}\frac{1+\mu^2}{\mu} - \mu\,. \tag{7}$$

5.2.20. O scândură omogenă se sprijină prin două reazeme pe un plan orizontal aspru. Greutatea scândurii este P, iar coeficienţii de frecare dintre reazeme şi planul de sprijin sunt μ_1 şi μ_2. Să se determine valoarea maximă a forţei orizontale $\overline{Q}$ pentru care echilibrul mai este posibil (fig. 5.31).

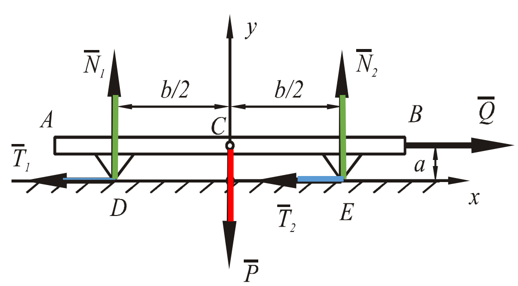


Fig. 5.31

Soluţie:

Pentru echilibrul la limită:

$$T_1 = \mu_1 N_1; \qquad T_2 = \mu_2 N_2. \tag{1}$$

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad N_1 + N_2 - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad Q - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_E(\overline{F}_i) = 0; \quad Qa - P\frac{b}{2} + N_1 b = 0\,. \tag{4}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii (1) - (4), se obţin succesiv:

$$N_1 = \frac{P}{2} - Q\frac{a}{b}; \quad N_2 = \frac{P}{2} + Q\frac{a}{b} \tag{5}$$

$$Q = \frac{(\mu_1 + \mu_2)b}{2[b + (\mu_1 - \mu_2)a]}P \quad . \tag{6}$$

5.2.21. O bară AB de greutate $\overline{G}$ se sprijină în A pe un plan orizontal aspru, coeficientul de frecare de alunecare fiind μ, iar în B este suspendată printr-un fir. În poziţia de echilibru bara face unghiul α cu planul orizontal. Să se determine unghiul de înclinare al firului faţă de planul orizontal pentru care bara începe să alunece. Să se determine, în acest caz şi reacţiunea în A (fig. 5.32).

Soluţie:

Din figură se poate scrie:

$$\beta = 90° - \left[(90° - \varphi) + \alpha\right]$$
$$\beta = \varphi - \alpha.$$

Pentru echilibru la limita frecării de alunecare:

$$T_A = \mu N_A\,. \tag{1}$$

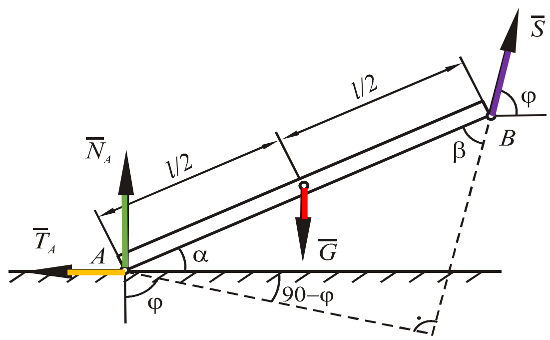


Fig. 5.32

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad S\cos\varphi - \mu N_A = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad N_A + S\sin\varphi - G = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0; \quad G\frac{l}{2}\cos\alpha - Sl\sin(\varphi - \alpha) = 0\,. \tag{4}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii (1)-(4) se obţine:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\mu} + 2\operatorname{tg}\alpha\,. \tag{5}$$

5.2.22. O bară AB, cu centrul de masă C, se reazemă pe o suprafaţă orizontală aspră (coeficient de frecare μ_1) şi pe un perete vertical (coeficient de frecare μ_2), (fig. 5.33). Care sunt valorile unghiului φ pentru care bara este în echilibru?

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad T_A - N_B = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad N_A - G + T_B = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M}_A(\overline{F}_i) = 0; \quad -Ga\cos\varphi + N_B(a+b)\sin\varphi + T_B(a+b)\cos\varphi = 0, \tag{3}$$

la care se adaugă inecuaţiile:

$$T_A \le \mu_1 N_A \tag{4}$$

$$T_B \le \mu_2 N_B\,. \tag{5}$$

Din (1), (2), (4) şi (5), se obţine:

$$N_B = \frac{\mu_1 G}{(1+\mu_1\mu_2)}, \tag{6}$$

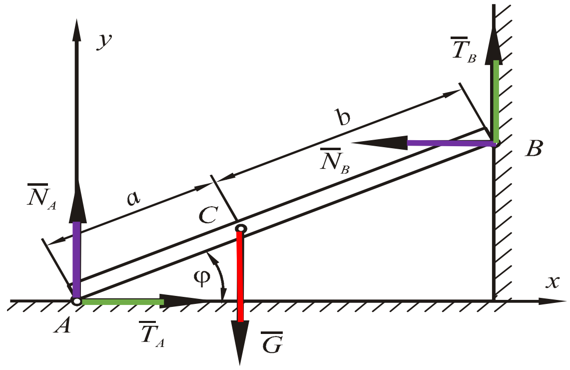


Fig. 5.33

care, introdusă în (3), conduce la

$$T_B = \frac{G \cdot a}{a+b} - \frac{\mu_1 G}{(1+\mu_1\mu_2)\,\mathrm{ctg}\,\varphi}, \tag{7}$$

Introducând (6) şi (7) în (5), rezultă:

$$\mathrm{tg}\,\varphi \geq \frac{a - b\mu_1\mu_2}{(a+b)\mu_1}. \tag{8}$$

5.2.23. Un bloc paralelipipedic de greutate $\overline{P}$ este tras orizontal de o forţă $\overline{H}$ aplicată la înălţimea *h* de pământ. Forţa $\overline{H}$ este situată într-un plan vertical de simetrie al blocului (fig. 5.34). Să se studieze posibilităţile de echilibru şi de mişcare ale blocului în funcţie de valoarea forţei $\overline{H}$.

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad H - T = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad N - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_A(\overline{F}_i) = 0; \quad H \cdot h + P\frac{b}{2} = 0, \tag{3}$$

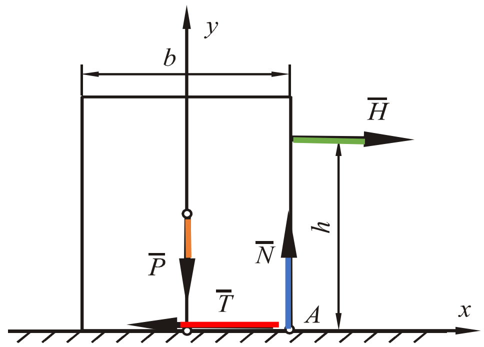


Fig. 5.34

la care, ţinând cont de frecările de alunecare şi de rostogolire, se adaugă inecuaţiile:

$$T \le \mu N \tag{4}$$

$$H \cdot h \le P\frac{b}{2}. \tag{5}$$

Din (1), (2) şi (4) se obţine valoarea lui H pentru echilibru la alunecare:

$$H \le \mu P, \tag{6}$$

iar din (5) se obţine valoarea lui H pentru echilibru la rostogolire:

$$H \le \frac{b}{2h}P. \tag{7}$$

Posibilităţile de mişcare sunt:

- alunecare fără rostogolire, pentru care relaţiile (6) şi (7) devin:

$$\begin{aligned} &H > \mu P \\ &H \le \frac{b}{2h}P, \end{aligned} \tag{8}$$

condiţii care sunt îndeplinite pentru:

$$\frac{b}{2h} \ge \mu; \tag{9}$$

- rostogolire fără alunecare, pentru care relaţiile (6) şi (7) devin:

$$\begin{aligned} &H > \frac{b}{2h}P \\ &H \le \mu P, \end{aligned} \tag{10}$$

relaţii satisfăcute pentru:

$$\frac{b}{2h} \le \mu; \tag{11}$$

- alunecare şi rostogolire, pentru care relaţiile (6) şi (7) devin:

$$H > \mu P$$
$$H > \frac{b}{2h} P. \tag{12}$$

5.2.24. Stâlpul unei antene este ancorat cu trei cabluri ca în figura 5.35. Ştiind că tensiunea din cablul AC este 7000 N, să se determine tensiunile din celelalte două cabluri astfel ca stâlpul să fie solicitat numai de-a lungul axei sale verticale AO. Să se determine apoi reacţiunea din articulaţia O, dacă stâlpul are greutatea $G = 24000$ N.

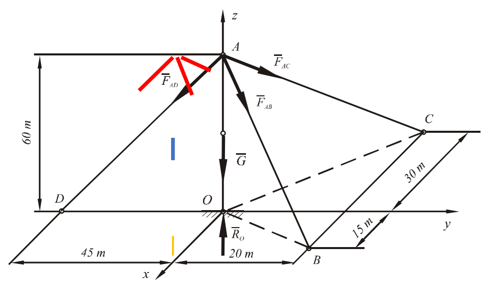


Fig. 5.35

Soluţie:

Din figura 5.35 se pot determina următoarele distanţe:

$$OC = \sqrt{900+400} = \sqrt{1300}; \qquad AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{1300+3600} = 70$$
$$OB = \sqrt{400+225} = 25; \quad AB = \sqrt{OB^2 + AO^2} = \sqrt{625+3600} = 65$$
$$AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \sqrt{2025+3600} = 75.$$

Pentru ca rezultanta reacţiunilor să acţioneze numai după OA trebuie ca $\overline{R}_O$ să fie orientată după Oz.

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad -F_{AC}\frac{OC}{AC}\frac{EC}{OC} + F_{AB}\frac{OB}{AB}\frac{BE}{OB} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad F_{AC}\frac{OC}{AC}\frac{OE}{OC} + F_{AB}\frac{OB}{AB}\frac{OE}{OB} - F_{AD}\frac{OD}{AD} = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i\,z} = 0; \qquad R_o - F_{AC}\frac{OA}{AC} - F_{AB}\frac{OA}{AB} - F_{AD}\frac{OA}{AD} - G = 0\,.$$

Rezolvând sistemul (1) se obţin:

$$F_{AB} = F_{AC}\frac{EC}{AC}\frac{AB}{BE} = 7000\frac{30}{70}\frac{65}{15} = 13000\,N \tag{2}$$

$$F_{AD} = \left(F_{AC}\frac{OE}{AC} + F_{AB}\frac{OE}{AB}\right)\frac{AD}{OD} = \left(7000\frac{20}{70} + 13000\frac{20}{65}\right)\frac{75}{45} \tag{3}$$

$$F_{AD} = 10000\,N$$

$$R_o = 60\left(\frac{7000}{70} + \frac{13000}{65} + \frac{10000}{75}\right) + 24000 = 50000N\,. \tag{4}$$

5.2.25. Asupra braţului unui robot industrial serial de tip *RTR* acţionează sistemul de forţe şi momente din figura 5.36. Să se determine o forţă $\overline{Q}$ şi punctul N în care suportul acesteia intersectează planul xOy, care să echilibreze sistemul iniţial de forţe şi momente. Să se reducă apoi, forţa $\overline{Q}$ în raport cu un punct N' aparţinând braţului robotului.

Soluţie:

Se reduce sistemul de forţe şi momente din figura 5.36 în raport cu punctul O. Proiecţiile pe axele sistemului de referinţă $Oxyz$ ale elementelor torsorului de reducere sunt:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\,x} = F_3\cos\alpha + Q_x \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\,y} = F_2 + F_3\sin\alpha + Q_y \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\,z} = F_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 + Q_z\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Momentul polar al forţei $\overline{Q}$ se determină cu relaţia:

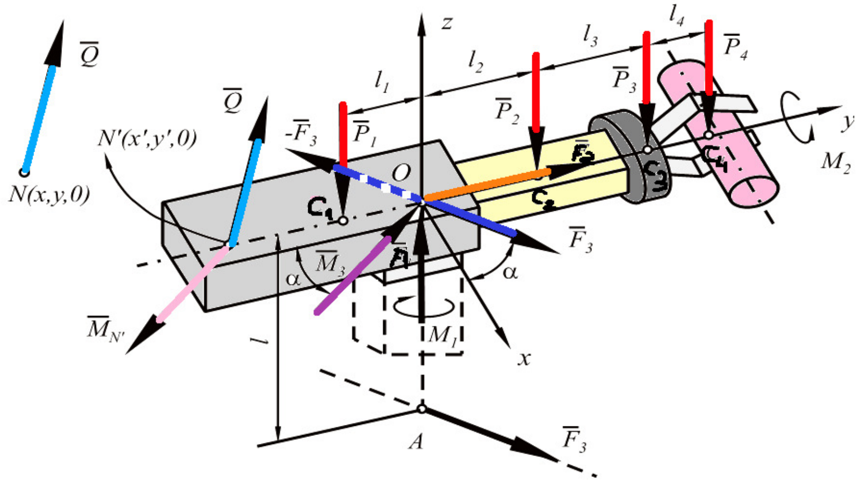


Fig. 5.36

$$\overline{M}_o(\overline{Q}) = \overline{OM} \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = yQ_z\bar{i} - xQ_z\bar{j} + (xQ_y - yQ_x)\bar{k}.$$

Astfel,

$$\begin{aligned} M_x &= yQ_z + P_1l_1 - P_2l_2 - P_3(l_2 + l_3) - P_4(l_2 + l_3 + l_4) - M_3 \sin\alpha \\ M_y &= -xQ_y + M_2 + M_3 \cos\alpha \\ M_z &= xQ_y - yQ_x + M_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Impunând datele numerice:

$$\begin{array}{lll} F_1 = 100\,daN; & F_2 = 50\,daN; & F_3 = 120\,daN; \\ P_1 = 40\,daN; & P_2 = 20\,daN; & P_3 = 15\,daN; \\ P_4 = 10\,daN; & M_1 = -169{,}77\,daN \cdot m; & M_2 = 2\,daN \cdot m \\ l = 0{,}8\,m; & l_1 = 0{,}1\,m; & l_2 = 0{,}2\,m; \\ l_3 = 0{,}3\,m; & l_4 = 0{,}3\,m; & \alpha = 30^o, \end{array} \tag{3}$$

se obţin:

$$\begin{aligned} R_x &= 120 \cdot \cos 30^o + Q_x = 103{,}9 + Q_x \\ R_y &= 50 + 120 \cdot 0{,}5 + Q_y = 110 + Q_y \\ R_z &= 100 - 40 - 20 - 15 - 10 + Q_Z = 15 + Q_z, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} M_x &= yQ_z - 63{,}5 \\ M_y &= -xQ_z + 83{,}13 \\ M_z &= xQ_y - yQ_x - 169{,}77\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Pentru ca sistemul forţelor şi momentelor date să fie echilibrat de forţa $\overline{Q}$, trebuie ca torsorul de reducere în raport cu punctul *O* al forţelor şi momentelor din figura 5.36 să fie nul, adică:

$$\begin{aligned}&\overline{R}=0;\quad R_x=0;\quad R_y=0;\quad R_z=0\\&\overline{M}_o=0;\quad M_x=0;\quad M_y=0;\quad M_z=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Având în vedere (4), (5) şi (6), se obţin:

$$\begin{aligned}&Q_x=-103{,}9\,daN,\quad Q_y=-110\,daN,\quad Q_z=-15\,daN\\&x=-5{,}542\,m;\qquad y=-4{,}233\,m.\end{aligned}\tag{7}$$

Întrucât coordonatele *x* şi *y* ale punctului în care suportul forţei $\overline{Q}$ intersectează planul *xOy* au valorile –5,542 m, –4,233 m, punctul respectiv este înafara braţului robotului. Pentru ca forţa $\overline{Q}$ să acţioneze asupra braţului, trebuie ca suportul ei să treacă printr-un punct $N'(x', y')$ care să aparţină braţului robotului. Aceasta presupune însă, ca pe lângă forţa $\overline{Q}$, în punctul N' să acţioneze şi un moment, în conformitate cu echivalenţa şi reducerea sistemelor de forţe. Astfel, reducând forţa $\overline{Q}$ care trece prin punctul *N* de coordonatele *x* şi *y* în raport cu punctul $N'(x', y')$, se obţin vectorii $\overline{Q}$ şi $\overline{M}_{N'}$, care au expresiile:

$$\overline{Q}\rightarrow Q_x=-103{,}9\,daN,\ Q_y=-110\,daN,\ Q_z=-15\,daN,\ Q=152{,}05\,daN\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_{N'}=\overline{N'N}\times\overline{Q}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x-x' & y-y' & z-z'\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}=\bar{i}\left[Q_z(y-y')-Q_y(z-z')\right]+\\+\bar{j}\left[Q_x(z-z')-Q_z(x-x')\right]+\bar{k}\left[Q_y(x-x')-Q_x(y-y')\right].\end{aligned}\tag{9}$$

Impunând că forţa $\overline{Q}$ să treacă prin punctul $N'(0{,}05;-0{,}25)$ şi având în vedere valorile coordonatelor *x* şi *y* date de (7), din (9) se obţine:

$$\overline{M}_{N'}=59{,}74\bar{i}-83{,}88\bar{j}+201{,}28\bar{k}\,.\tag{10}$$

Modulul momentului $\overline{M}_{N'}$ este:

$$M_{N'}=226{,}09\ daN\cdot m\,.\tag{11}$$

În concluzie, pentru ca sistemul de forţe şi momente date, care acţionează asupra braţului robotului RTR, să fie echilibrat, se impune ca în punctul $N'(0{,}05;-0{,}25)$ aparţinând braţului să se introducă o forţă $\overline{Q}(-103{,}9;-110;-15)$ şi un moment $\overline{M}_{N'}(59{,}74;-83{,}88;201{,}28)$.

Direcţiile acestor vectori sunt date de cosinusurile directoare:

$$\alpha = \frac{Q_x}{Q} = -0{,}6833; \quad \beta = \frac{Q_y}{Q} = -0{,}7234; \quad \gamma = \frac{Q_z}{Q} = 0{,}0986;$$
$$\alpha_1 = \frac{M_{N_x'}}{M_{N'}} = 0{,}2642; \quad \beta_1 = \frac{M_{N_y'}}{M_{N'}} = 0{,}3710; \quad \gamma_1 = \frac{M_{N_z'}}{M_{N'}} = 0{,}8902. \tag{12}$$

5.2.26. O bară omogenă grea AB de lungime l se sprijină pe un plan orizontal şi pe un semicilindru fix de rază r aşezat pe planul orizontal. Bara este perpendiculară pe axul cilindrului, iar unghiul de frecare al barei cu semicilindrul şi planul orizontal este acelaşi şi egal cu φ. Să se afle unghiul maxim dintre bară şi planul orizontal, pentru care există echilibru (fig. 5.37).

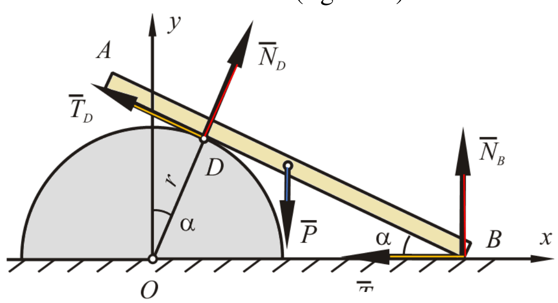


Fig. 5.37

Soluţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad -T_B - T_D \cos\alpha + N_D \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad N_B - P + N_D \cos\alpha + T_D \sin\alpha = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_B(\overline{F}_i) = 0; \quad P\frac{l}{2}\cos\alpha - N_D \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = 0, \tag{3}$$

la care se adaugă relaţiile scrise în baza studiului echilibrului la limita frecării de alunecare, deoarece se cere valoarea maximă a unghiului α pentru care mai este posibil echilibrul şi anume:

$$T_B = \operatorname{tg}\varphi \cdot N_B \tag{4}$$

$$T_D = \operatorname{tg}\varphi \cdot N_D. \tag{5}$$

Din relaţia (3) se obţine:

$$N_D = \frac{Pl}{2r}\sin\alpha. \tag{6}$$

Introducând (4), (5) şi (6) în (1), rezultă:

$$N_B = \frac{Pl}{2r}\sin\alpha\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Relaţiile (5), (6) şi (7) introduse în (2), conduc la:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{r}{l}\sin 2\varphi}. \tag{8}$$

5.2.27. O placă dreptunghiulară *ABCD* de greutate $\overline{G}$ şi dimensiuni $AD = BC = l$, $AB = CD = 2l$, este aşezată în poziţie verticală şi se poate roti în jurul unei axe care coincide cu latura *AB*. Cunoscând coeficientul de frecare μ şi raza r a lagărelor, să se determine momentul maxim $\overline{M}$ al cuplului care poate fi aplicat plăcii fără ca aceasta să se rotească (fig. 5.38).

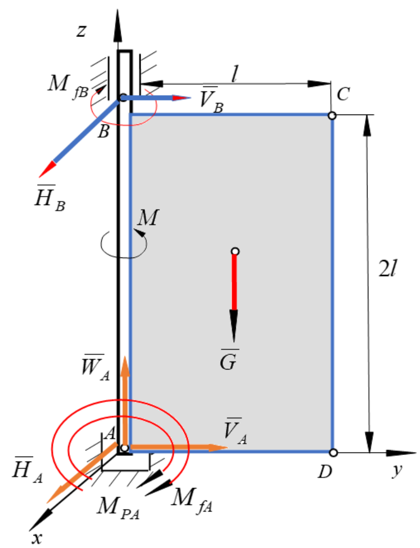


Fig. 5.38

Soluţie:

Lagărul *A* este o *articulaţie sferică* şi prin suprimarea ei se introduce forţa de legătură $\overline{R}_A(H_A, V_A, W_A)$, precum şi momentele datorate frecării de pivotare şi a frecării din articulaţie $\overline{M}_{PA}$, $\overline{M}_{fA}$.

Pentru ca problema să fie static şi dinamic determinată în punctul B se introduce o *articulaţie cilindrică*. Prin suprimarea acesteia se introduce forţa de legătură $\overline{R}_B(H_B, V_B, 0)$ şi momentul $\overline{M}_{fB}$ datorat frecării din articulaţie.

Se alege un sistem de referinţă fix $xAyz$ ca în figură. Se proiectează sistemul de forţe pe axele acestui sistem şi se scriu ecuaţii de momente în raport cu punctul A.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad H_A + H_B = 0\\ &\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad V_A + V_B = 0\\ &\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \quad W_A - G = 0\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&M_x = 0; \quad -G\frac{l}{2} - V_B 2l = 0\\ &M_y = 0; \quad H_B 2l = 0\\ &M_z = 0; \quad M - M_{fA} - M_{fB} - M_{PA} = 0\end{aligned} \tag{2}$$

Dar, conform cu (5.9) şi (5.8), momentele de frecare şi de pivotare au următoarele expresii:

$$\begin{aligned}&M_{fA} <= \mu r\sqrt{H_A^2 + V_A^2}\\ &M_{fB} <= \mu r\sqrt{H_B^2 + V_B^2}\\ &M_{PA} <= \frac{2}{3}\mu r W_A\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2) şi având în vedere (3), se obţin:

$$\begin{aligned}&H_B = H_A = 0\\ &V_B = -\frac{G}{4}\\ &V_B = -V_A = \frac{G}{4}\\ &W_A = G\\ &M = \mu r\frac{G}{4} + \mu r\frac{G}{4} + \frac{2}{3}\mu rG = \frac{7}{6}\mu rG\,.\end{aligned} \tag{4}$$

5.3 Probleme propuse

5.3.1. Un stâlp OO' de greutate $P_1 = 160 \cdot 9{,}81$ N poartă în C, la distanţa OC = 6,5 m, o consolă orizontală AB = 2 m de greutate $P_2 = 130 \cdot 9{,}81$ N (fig. 5.39). Consola este încărcată ca în figură, cu tensiunile conductorilor suspendaţi de ea, tensiunea unui conductor fiind $T = 250 \cdot 9{,}81$ N, paralelă cu planul zOy, făcând unghiul α cu orizontala Oy (cos α = 0,8). Să se determine elementele mecanice corespunzătoare legăturii de încastrare a stâlpului.

Răspuns:

$H = 0$; $V = -600 \cdot 9{,}81$ N;

$W = 670 \cdot 9{,}81$ N; $M_x = 3900 \cdot 9{,}81$ N·m;

$M_y = 75 \cdot 9{,}81$ N·m; $M_z = 100 \cdot 9{,}81$ N·m.

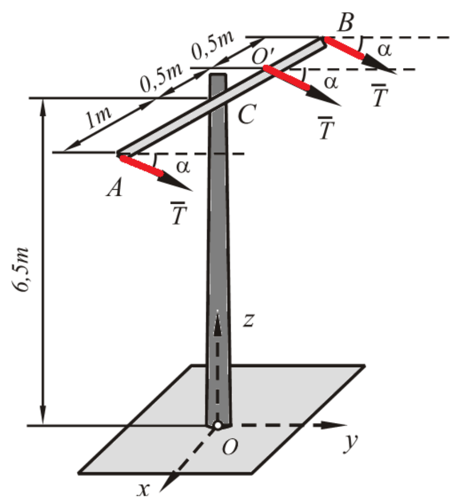


Fig. 5.39

5.3.2. O bară AD este suspendată de cablul BE şi suportă o sarcină de 8 kg în punctul C (fig. 5.40). Extremităţile barei se reazemă pe doi pereţi verticali lucioşi. Să se determine:

a) Tensiunea din cablul BE şi reacţiunile din A şi D, dacă distanţa d = 8 cm.
b) Distanţa maximă d la care trebuie suspendată sarcina în C pentru ca forţele cu care apasă bara asupra pereţilor în A şi D să nu depăşească valoarea de 5 N.

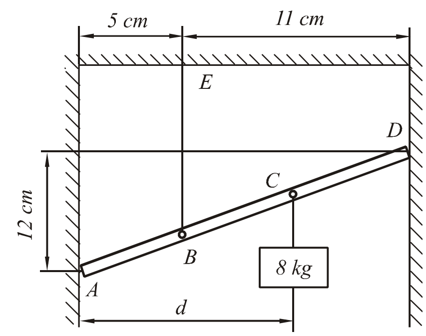


Fig. 5.40

Răspuns:

$$F_{BE} = G = 8 \text{ N}; \qquad N_D = N_A = 2\text{ N};$$

$$d = \frac{12N_D + 5F_{BE}}{G}.$$

5.3.3. Să se determine reacţiunile din încastrarea A a stâlpului cu consolă din figura 5.41, acţionată de o forţă orizontală $\overline{P}$ în capătul B şi de un moment $\overline{M}_O$ în capătul consolei.

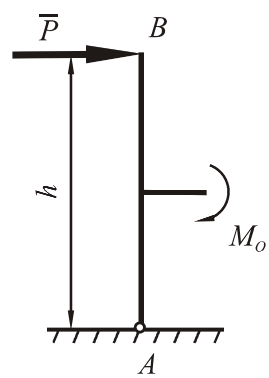


Fig. 5.41

Răspuns:

$$H_A = P$$
$$V_A = 0$$
$$M_1 = M_0 + P \cdot h.$$

5.3.4. Să se determine reacţiunile din încastrarea A a consolei AB din figura 5.42, acţionată de o sarcină distribuită liniar de p N/m şi de o forţă $\overline{P}$ înclinată cu 60° faţă de orizontală.

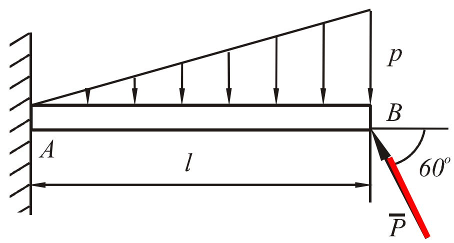


Fig. 5.42

Răspuns:

$$H_A = \frac{P}{2}$$

$$V_A = \frac{pl}{2} + P\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_1 = \frac{pl^2}{3} - Pl\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3.5. O bară omogenă de greutate $\overline{P}$ se sprijină cu un capăt A pe un plan orizontal aspru şi este menţinută în echilibru cu ajutorul unui fir trecut peste un scripete mic, ideal, la capătul căruia atârnă greutatea $\overline{Q}$ oarecare (fig. 5.43). Se cere valoarea maximă a greutăţii $\overline{Q}$, cunoscând coeficientul μ al frecării barei cu planul, unghiul α dintre bară şi orizontală şi greutatea $\overline{P}$ a barei.

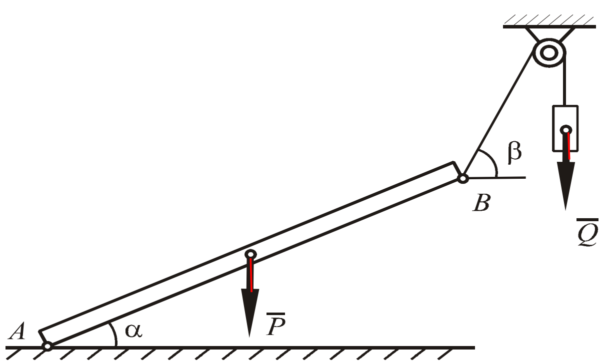


Fig. 5.43

Răspuns:

$$Q = \frac{P\sqrt{\mu^2 + (1 + 2\mu\ \text{tg}\ \alpha)^2}}{2(1 + \mu\,\text{tg}\,\alpha)}.$$

Observaţie: pentru $\mu = 0$, $Q = \frac{P}{2}$.

5.3.6. Un paralelipiped dreptunghic omogen ABCD de greutate $\overline{P}$ se sprijină cu faţa AB pe un plan înclinat aspru MN, al cărui unghi cu orizontala creşte mereu (fig. 5.44). Cunoscând valoarea μ a coeficientului de frecare la alunecare, să se determine valoarea unghiului α în poziţia limită de echilibru.

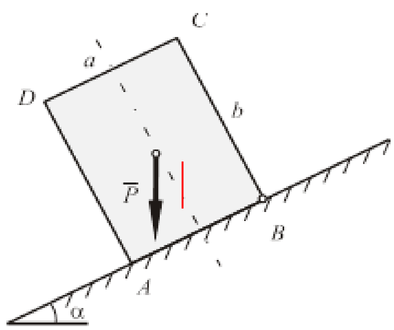


Fig. 5.44

Răspuns:

$\text{tg}\ \alpha \le \mu,\ \ \text{tg}\ \alpha \le \frac{a}{b}.$

a) Dacă $\frac{a}{b} < \mu$, pierderea echilibrului se face prin rostogolire pentru $\alpha = \text{arctg}\frac{a}{b}$.

b) Dacă $\frac{a}{b} > \mu$, se produce o alunecare pentru $\alpha = \text{arctg}\,\mu$.

6. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE [10]

6.1 Consideraţii teoretice

6.1.1 Introducere

Prin *sistem de solide rigide* se înţelege o mulţime finită de solide rigide care interacţionează reciproc. Un interes deosebit îl reprezintă cazul solidelor legate între ele, având şi legături exterioare. Legăturile pot conferi întregului sistem un caracter deformabil sau nedeformabil, adică sistemul, fără a lua în considerare micile deformaţii ale fiecărui solid în parte, să poată fi considerat sau nu rigid. Sistemele de solide rigide, cel mai des întâlnite în practică, sunt constituite din bare legate între ele.

Mecanismele sunt sisteme de bare legate între ele prin articulaţii sau reazeme şi care au unul sau mai multe grade de libertate. La polul opus se află sistemele de bare articulate, cum ar fi stâlpii, grinzile etc., la care sistemul per ansamblu nu mai are nici un grad de libertate. Astfel de sisteme de bare se numesc, în general, *grinzi cu zăbrele* şi sunt folosite pe scară largă în construcţii.

Există două probleme ale staticii sistemelor de solide rigide: problema directă şi problema inversă sau mixtă. În *problema directă* se dă un sistem nedeformabil de solide, cu legături exterioare şi interioare, în repaus într-o anumită poziţie, acţionat de forţe exterioare. Se cere să se determine forţele de legătură exterioare şi interioare sistemului. În cazul *problemei inverse,* se dă un mecanism cu legături exterioare şi interioare, acţionat de forţe exterioare. Se cere să se determine poziţiile în care trebuie aşezat mecanismul pentru ca el să rămână în repaus, precum şi forţele de legătură exterioare şi interioare pentru susţinerea acestei poziţii.

6.1.2 Condiţii de echilibru

Un model aproximativ pentru un sistem de solide rigide în echilibru este un sistem de n puncte materiale M_i ($i = 1 \div n$) în echilibru (fig. 6.1). Se notează prin $\overline{F}_i$ rezultanta forţelor exterioare date şi de legătură aplicate punctului M_i ; $\overline{F}_{ij}$ forţa interioară, reprezentând acţiunea punctului material M_i asupra lui M_j, iar $\overline{F}_{ji}$ reacţiunea lui M_j asupra lui M_i ; $\overline{r}_i$ şi $\overline{r}_j$ sunt vectorii de poziţie în raport cu un punct O. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, forţele interioare respectă următoarele relaţii:

$$\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = 0; \quad \overline{r}_i \times \overline{F}_{ij} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{ji} = 0 . \tag{6.1}$$

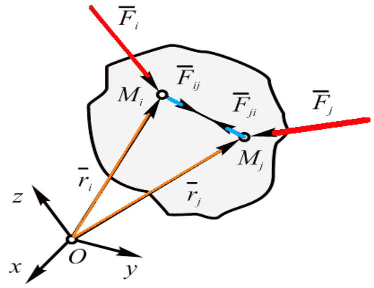


Fig. 6.1

Un sistem nedeformabil de puncte materiale în echilibru în raport cu un reper fix rămâne în echilibru dacă fiecare din punctele sistemului rămâne în echilibru faţă de acelaşi reper şi reciproc.

Condiţiile necesare şi suficiente de echilibru pentru forţele exterioare sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = 0\,. \tag{6.2}$$

Condiţiile pot fi scrise atât pentru întregul sistem, cât şi pentru o parte bine delimitată. În acest fel se elimină total sau parţial scrierea forţelor de legătură interioare.

Aspectele stabilite pentru un sistem de puncte materiale pot fi extinse şi asupra unui sistem de solide rigide.

6.1.3 Teoreme utilizate în probleme de echilibru al sistemelor

Teoremele cu ajutorul cărora se studiază echilibrul sistemelor de puncte materiale sau de solide rigide sunt următoarele:

Teorema solidificării: dacă un sistem de puncte materiale sau de solide rigide libere sau cu legături este în echilibru, acesta poate fi considerat ca un solid rigid în această stare.

Teorema echilibrului părţilor: dacă un sistem de puncte materiale sau de solide rigide libere sau cu legături se află în echilibru sub acţiunea unor forţe, atunci o parte oarecare din acest sistem va fi de asemenea în echilibru sub acţiunea forţelor corespunzătoare acestei părţi: exterioare şi de legătură exterioare şi a forţelor de legătură ce intervin între această parte şi rest (forţe de legătură interioare).

Ca şi metodă generală de rezolvare a problemelor de echilibru a sistemelor de puncte materiale sau de solide rigide poate fi următoarea: se descompune sistemul în punctele sau rigidele componente prin îndepărtarea legăturilor dintre ele şi înlocuirea acestora cu elementele mecanice corespunzătoare, forţe sau momente. Apoi se studiază echilibrul fiecărui punct material sau rigid în parte, aplicându-se şi forţele şi momentele exterioare iniţiale, acolo unde este cazul.

6.2 Probleme rezolvate [10]

6.2.1. Se dă sistemul de bare din figura 6.2, la care în articulaţia B există frecare, coeficientul de frecare fiind μ, iar raza articulaţiei este r. Să se determine unghiul φ pentru poziţia de echilibru şi reacţiunile din sistem.

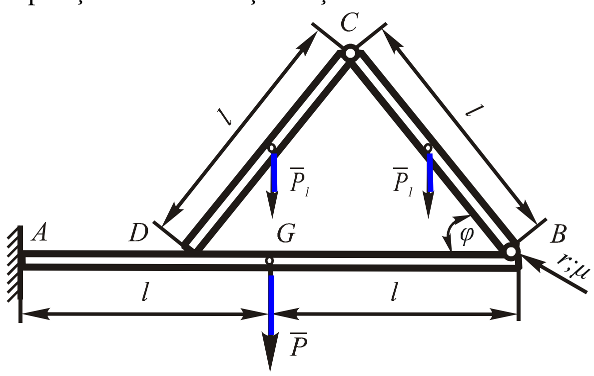


Fig. 6.2

Soluţie:

Se eliberează de legături fiecare element, conform figurilor 6.3, 6.4, 6.5, legăturile înlocuindu-se prin forţele şi momentele de legătură.

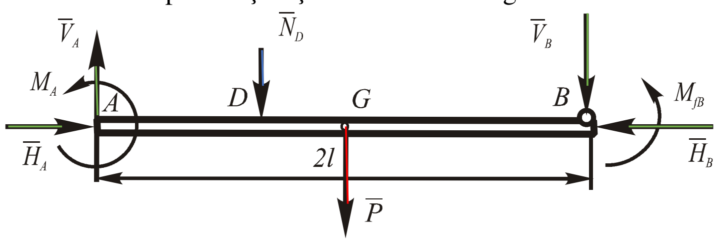
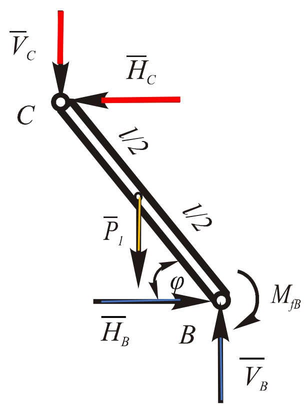


Fig. 6.3

Pentru fiecare element se vor scrie trei ecuaţii de echilibru, câte două ecuaţii de proiecţii de forţe şi o ecuaţie de momente. Astfel, pentru elementul 1, se pot scrie ecuaţiile:

$$\begin{gathered} H_A - H_B = 0 \\ V_A - N_D - P - V_B = 0 \\ M_A : M_A - N_D(2l - 2l\cos\varphi) - P\,l - V_B \cdot 2l + M_{fB} = 0 \end{gathered} \quad . \tag{1}$$



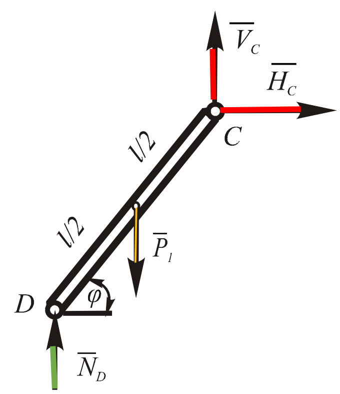


Fig. 6.4 **Fig. 6.5**

Pentru elementul 2 ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\begin{gathered} H_B - H_C = 0 \\ V_B - P_1 - V_C = 0 \\ M_B : -M_{fB} + P_1 \frac{l}{2} \cos\varphi + H_C l \sin\varphi + V_C l \cos\varphi = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

În plus mai apare o inecuaţie datorată existenţei frecării în articulaţia de la capătul din dreapta al elementului 1:

$$M_{fB} \le \mu r \sqrt{H_B^2 + V_B^2}\ . \tag{3}$$

Ecuaţiile de echilibru pentru elementul 3 se scriu astfel:

$$\begin{gathered} H_C = 0 \\ N_D - P_1 + V_C = 0 \\ P_1 \frac{l}{2} \cos\varphi - N_D l \cos\varphi = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

În urma rezolvării sistemului alcătuit din ecuaţiile (1), (2) şi (4), se determină următoarele reacţiuni pentru sistemul de solide rigide:

$$H_C = 0; \qquad H_B = 0; \qquad H_A = 0 \tag{5}$$

$$N_D = \frac{P_1}{2}; \qquad V_C = P_1 - N_D = \frac{P_1}{2} \tag{6}$$

$$V_B = P_1 + V_C = \frac{3P_1}{2} \tag{7}$$

$$V_A = N_D + P + V_B = P + 2P_1\ . \tag{8}$$

Din a treia ecuaţie (2), înlocuind (5) şi (6), rezultă:

$$M_{fB} = P_1 \frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{P_1}{2} l\cos\varphi = P_1 l\cos\varphi\,. \tag{9}$$

Din inecuaţia (3) se deduce:

$$M_{fB} \le \mu\, r \cdot \frac{3P_1}{2}\,. \tag{10}$$

Înlocuind (10) în (9), se găseşte că:

$$P_1 l\, cos\,\varphi \le \mu\, r \cdot \frac{3P_1}{2}\,, \tag{11}$$

de unde rezultă unghiul φ corespunzător poziţiei de echilibru, exprimat prin funcţia *cos*:

$$\cos\varphi \le \mu\, r \cdot \frac{3}{2l}\,. \tag{12}$$

Din a treia ecuaţie (1) rezultă:

$$M_A = N_D\,(2l - 2l\cos\varphi) + Pl + 2V_B l - M_{fB}\,. \tag{13}$$

Înlocuind (6), (7) şi (9) în (13), se obţine:

$$M_A \le \frac{P_1}{2} l(2 - 2\cos\varphi) + Pl + 3P_1 l - \mu\, r \frac{3P_1}{2} \tag{14}$$

$$M_A \le Pl + P_1\left(\frac{7l}{2} - l\cos\varphi - \frac{3}{2}\mu\, r\right). \tag{15}$$

6.2.2. Pe o podea orizontală se sprijină o capră *ABC* formând un triunghi echilateral de latură *a* (fig. 6.6). Pe capră se sprijină o grindă *OD* = *2l* de secţiune constantă şi greutate $\overline{G}$. Grinda se poate roti în jurul punctului *O*. Să se găsească poziţia caprei, astfel încât în punctul *A* să nu existe apăsare. Care va fi în acest caz valoarea lungimii *OA*=*x* şi care trebuie să fie valoarea forţei $\overline{F}$ aplicată în *B*?

Soluţie:

Separând corpurile şi introducând forţele de legătură (fig. 6.7 şi fig. 6.8), se observă că asupra caprei acţionează trei forţe coplanare care, pentru a fi în echilibru, trebuie ca ele să fie şi concurente. Rezultă că forţa $\overline{N}_C$ este orientată după direcţia *BC*, dar perpendiculară pe *OD*. Prin urmare, unghiul $B\hat{C}O = 90^\circ$, dar în acelaşi timp $\beta = 30^\circ$, deci *x*=*a*.

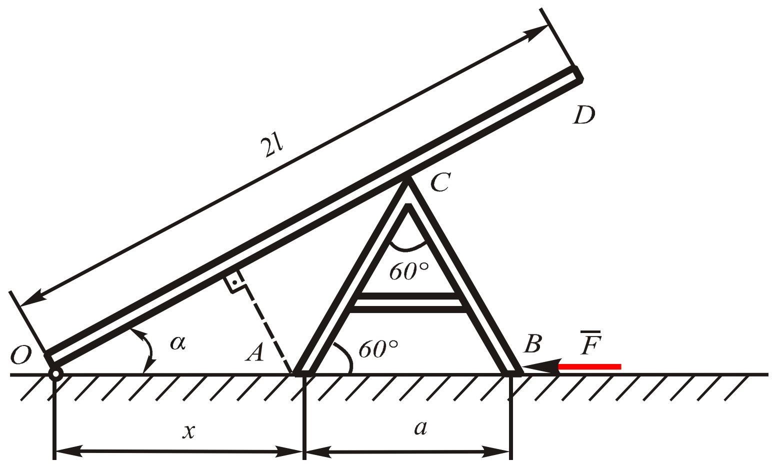


Fig. 6.6

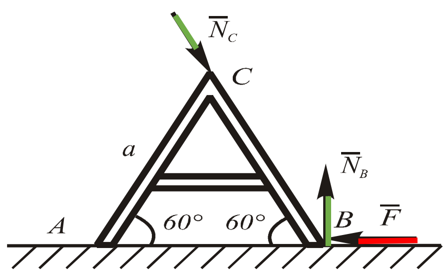


Fig. 6.7

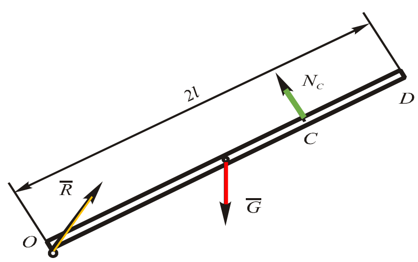


Fig. 6.8

Ecuaţiile de echilibru pentru capră sunt:

$$\begin{cases} N_C \cos 60^\circ - F = 0 \\ N_B - N_C \cos 30^\circ = 0 \end{cases} \tag{1}$$

sau

$$\begin{cases} N_C \dfrac{1}{2} - F = 0 \\ N_B - N_C \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Punând condiţia:

$$M_O = 0, \tag{3}$$

se poate scrie ecuaţia de momente, pentru grindă:

$$M_O : Gl\frac{\sqrt{3}}{2} - N_C \cdot OC = 0. \tag{4}$$

Din triunghiul OAC se observă că:

$$OC = 2a\cos\alpha = 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}. \tag{5}$$

Înlocuind (5) în (4), rezultă:

$$Gl\frac{\sqrt{3}}{2} - N_C \cdot a\sqrt{3} = 0, \tag{6}$$

de unde se determină:

$$N_C = \frac{Gl}{2a} \tag{7}$$

iar din (2) de găseşte valoarea forţei $\overline{F}$ şi reacţiunea normală din punctul B:

$$F = N_C \cdot \frac{1}{2} = \frac{Gl}{4a} \tag{8}$$

$$N_B = N_C \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{Gl\sqrt{3}}{4a}. \tag{9}$$

6.2.3. Se consideră sistemul din figura 6.9, format din trei elemente: bara *AB,* încastrată în *A* şi articulată în *B*, placa omogenă şi bara *CD*, articulate în punctele *B*, *C* şi *D*. Cunoscându-se dimensiunile şi greutăţile celor trei elemente, se cere să se determine forţele şi momentele forţelor de legătură.

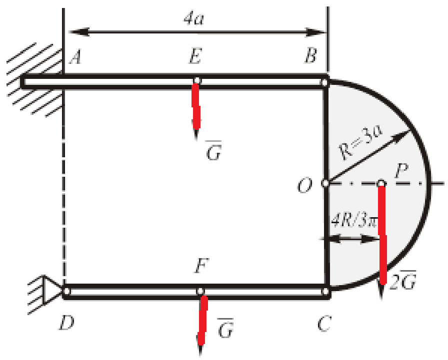


Fig. 6.9

Soluţie:

Se separă corpurile ce alcătuiesc sistemul, legăturile fiind înlocuite cu forţele şi momentele forţelor de legătură. Pentru fiecare solid rigid astfel izolat (fig. 6.10, fig. 6.11 şi fig. 6.12) se scrie câte un sistem de trei ecuaţii de echilibru, două de proiecţii de forţe şi una de momente.

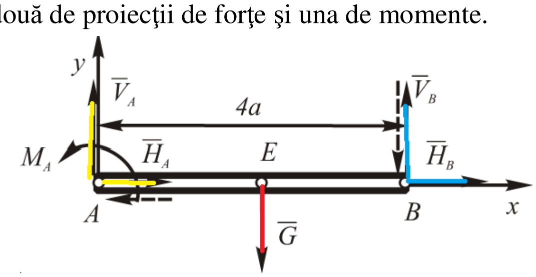


Fig. 6.10

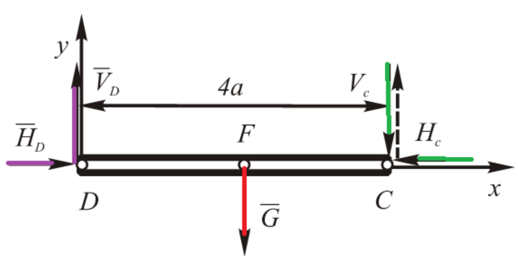


Fig. 6.11

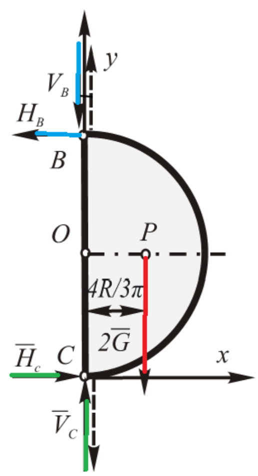


Fig. 6.12

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Ecuaţiile de echilibru pentru corpul (1) (fig. 6.10) sunt:

$$\begin{aligned} & H_A + H_B = 0 \\ & V_A + V_B - G = 0 \\ & M_A\!: \; M_A - 2aG + 4aV_B = 0 \end{aligned} \quad , \tag{1}$$

pentru corpul (2) (fig. 6.11) sunt următoarele:

$$\begin{aligned} & H_C - H_B = 0 \\ & V_C - V_B - 2G = 0 \\ & M_C : \; 6a\,H_B - \frac{4R}{3\pi} \cdot 2G = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

iar pentru semidisc (fig. 6.12) sunt exprimate astfel:

$$\begin{aligned} & H_D - H_C = 0 \\ & V_D - G - V_C = 0 \\ & M_D : -2aG - 4aV_C = 0 \end{aligned} \quad . \tag{3}$$

Rezultă un sistem de nouă ecuaţii cu nouă necunoscute, prin a cărui rezolvare se determină forţele şi momentele forţelor de legătură:

$$\begin{aligned} & H_B = \frac{4 \cdot 3a}{3\pi} \cdot 2G \cdot \frac{1}{6a} = \frac{4G}{3\pi} \\ & H_C = H_B = \frac{4G}{3\pi} \\ & H_D = H_C = \frac{4G}{3\pi} \\ & V_C = -\frac{G}{2} \\ & H_A = -\frac{4G}{3\pi} \\ & V_B = V_C - 2G = -\frac{5}{2}G \\ & V_D = V_C + G = \frac{G}{2} \\ & V_A = G - V_B = \frac{7}{2}G \\ & M_A = 2aG - 4aV_B = 2aG + 10aG = 12aG. \end{aligned} \tag{4}$$

6.2.4. Două bare identice $AB = AC = l$ de greutăţi neglijabile, se găsesc într-un plan vertical şi sunt articulate în acelaşi punct fix A, fiind aşezate simetric faţă de verticală. Între ele este aşezat, tangent, un disc omogen de rază r şi greutate $\overline{P}$, iar în capetele B şi C sunt aplicate două forţe de acelaşi modul F, după direcţia BC şi în sensuri opuse (fig. 6.13). Unghiul de frecare dintre bare şi disc este φ. Să se determine reacţiunea din articulaţia A în funcţie de F. Între se limite poate varia F, pentru a exista echilibru, atunci când unghiul $BAC = 2\alpha$?

Soluţie:

Se aplică metoda izolării corpurilor. Încărcarea barelor fiind simetrică, se studiază doar echilibrul uneia din ele.

Ecuaţiile de echilibru pentru bara din stânga (fig. 6.14) şi disc (fig. 6.15) sunt:

$$F + H_A - N\cos\alpha - T\sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$V_A - N\sin\alpha + T\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

$$M_A : F\,l\cos\alpha - N\frac{r}{tg\,\alpha} = 0 \tag{3}$$

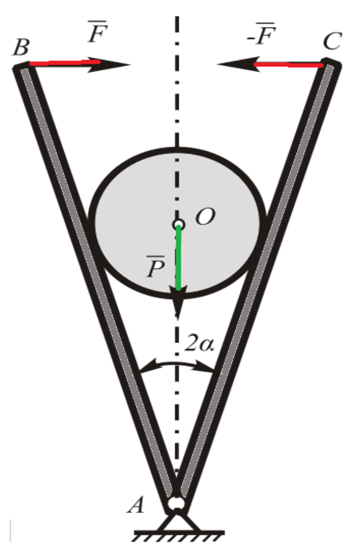


Fig. 6.13

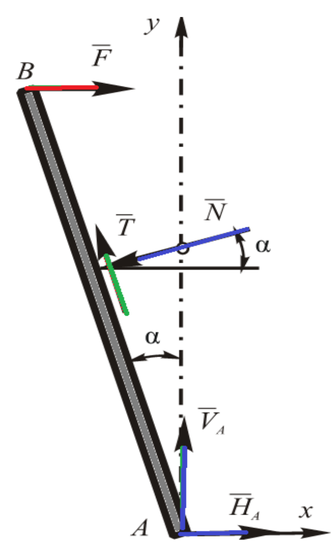


Fig. 6.14

[10] Ispas, V. și alții, 2010

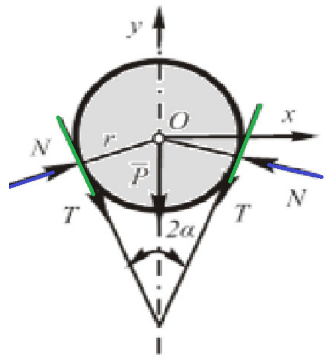


Fig. 6.15

$$-2T\cos\alpha - P + 2N\sin\alpha = 0 \tag{4}$$

$$\left|\overline{T}\right| \le \mu\left|\overline{N}\right|, \tag{5}$$

unde μ = tgφ.

Din ecuaţiile (3) şi (4) se obţin:

$$N\frac{F\,l\sin\alpha}{r};\quad T=\frac{2F\,l\sin^2\alpha - P\cdot r}{2r\cos\alpha}, \tag{6}$$

care introduse în (5), conduc la:

$$\left|2F\,sin^2\,\alpha - P\cdot r\right| \le 2F\,l\cdot tg\,\varphi\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha \tag{7}$$

Pentru $2F\,l\,sin^2\,\alpha - P\cdot r > 0$ relaţia (7) devine:

$$2F\,l\,sin^2\,\alpha - P\cdot r < 2F\,l\cdot tg\,\varphi\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha, \tag{8}$$

de unde

$$F \le \frac{P\cdot r\cdot cos\,\varphi}{2l\cdot sin\,\alpha\cdot sin(\alpha-\varphi)}. \tag{9}$$

Pentru $2F\,l\sin^2\alpha - P\cdot r < 0$ relaţia (7) devine:

$$P\cdot r - 2F\,l\sin^2\alpha \le 2F\,l\cdot tg\,\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{10}$$

de unde

$$F \ge \frac{P\cdot r\cdot cos\,\varphi}{2l\cdot sin\,\alpha\cdot sin(\alpha+\varphi)}. \tag{11}$$

Reunind (7) şi (9), rezultă condiţia:

$$\frac{P\cdot r\cdot cos\,\varphi}{2l\cdot sin\,\alpha\cdot sin(\alpha+\varphi)}\le F\le\frac{P\cdot r\cdot cos\,\varphi}{2l\cdot sin\,\alpha\cdot sin(\alpha-\varphi)}\,. \tag{12}$$

Relaţiile de inegalitate (12) sunt valabile numai în cazul când:

$$\alpha>\varphi, \tag{13}$$

valorile minimă şi maximă ale lui F fiind pozitive.

Dacă

$$\alpha\le\varphi \tag{14}$$

atunci dubla inegalitate (12) îşi pierde sensul şi se va reduce la următoarea inegalitate simplă:

$$F\ge\frac{P\cdot r\cdot\cos\varphi}{2l\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\varphi)}\ . \tag{15}$$

Din (1) şi (2), ţinând cont de (6), se obţin:

$$H_A=F\frac{l\cdot tg\,\alpha-r}{r}-\frac{P}{2}tg\,\alpha \tag{16}$$

$$V_A=\frac{P}{2}. \tag{17}$$

6.2.5. Se consideră două emisfere perfect lustruite de greutăţi $\overline{G_1}$ şi $\overline{G_2}$ (fig. 6.16). O bară omogenă de lungime l şi greutate Q este articulată la cele două capete la marginile celor două emisfere. Să se determine unghiurile φ_1, φ_2 şi ψ pentru poziţia de echilibru. Se neglijează frecările.

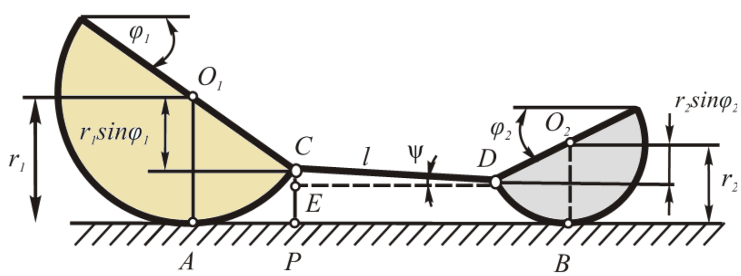


Fig. 6.16

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

Soluţie:

Se separă corpurile (fig. 6.17, fig. 6.18 şi fig. 6.19) şi se scriu ecuaţiile de echilibru:

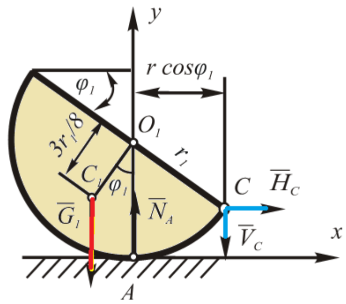


Fig. 6.17

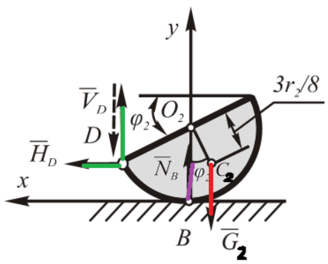


Fig. 6.18

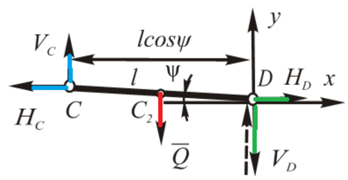


Fig. 6.19

Pentru corpul din figura 6.17 ecuaţiile de echilibru sunt:

$$H_C = 0 \tag{1}$$

$$N_A - G_1 - V_C = 0 \tag{2}$$

$$M_{O1} = 0, \qquad V_C r_1 \cos\varphi_1 - \frac{3}{8} r_1 \sin\varphi_1 G_1 = 0\,. \tag{3}$$

Pentru cealaltă emisferă (fig. 6.18) se pot scrie ecuaţiile:

$$H_D = 0 \tag{4}$$

$$V_D - G_2 + N_B = 0 \tag{5}$$

$$M_{O2} = 0, \qquad V_D r_2 \cos\varphi_2 - \frac{3}{8} r_2 \sin\varphi_2 G_2 = 0\,. \tag{6}$$

Bara de legătură (fig. 6.19) este caracterizată prin ecuaţiile:

$$H_D = H_C \tag{7}$$

$$V_C - V_D - Q = 0 \tag{8}$$

$$M_D = 0, \qquad V_C l\cos\psi - H_C\sin\psi - Q\frac{l}{2}\cos\psi = 0\,. \tag{9}$$

Din ecuaţiile (4) şi (7) rezultă:

$$H_C = H_D = 0\,. \tag{10}$$

Din relaţia (9) se determină:

$$V_C = \frac{Q}{2} \tag{11}$$

iar din (8) rezultă: $V_D = -\frac{Q}{2}$ (orientat în sens contrar). (12)

Din relaţia (2) se determină:

$$N_A = G_1 + \frac{Q}{2}\,. \tag{13}$$

Din ecuaţia (3) rezultă:

$$tg\varphi_1 = \frac{4Q}{3G_1} \tag{14}$$

iar din (6):

$$tg\varphi_2 = \frac{4Q}{3G_2}\,. \tag{15}$$

În final, din triunghiul *CED* se determină al treilea unghi:

$$\sin\psi = \frac{CE}{l} = \frac{CP - EP}{l} = \frac{r_1(1-\sin\varphi_1) - r_2(1-\sin\varphi_2)}{l}\,. \tag{16}$$

6.2.6. O bară omogenă $OA = l$ de greutate $\overline{P}$ este articulată în O. O altă bară omogenă BC, din acelaşi material cu primă, este articulată în punctul O_1, situat deasupra punctului O, pe aceeaşi verticală, astfel încât $O_1B = OA$. Capetele barelor A şi B sunt legate printr-un fir inextensibil $AB = OO_1$, iar bara BC poartă în capătul C o contragreutate $\overline{Q}$ (fig. 6.20).

Să se determine distanţa $O_1C = c$ astfel încât, sistemul să fie în echilibru în orice poziţie precum şi tensiunea $\overline{S}$ din fir.

Soluţie:

Se aplică metoda izolării corpurilor, izolând cele două bare şi scriind ecuaţiile de momente în raport cu O şi O_1.

Astfel, ecuaţiile de momente pentru cele două bare sunt:

$$M_O:\ P\frac{l}{2}\cos\alpha - S\cdot l\cdot \cos\alpha = 0 \tag{1}$$

$$M_{O_1}:\ P_1\frac{l-c}{2}\cos\alpha + S\cdot l\cdot \cos\alpha - Q\cdot c\cdot \cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Ştiind că:

$$P_1 = \frac{l+c}{l}P, \tag{3}$$

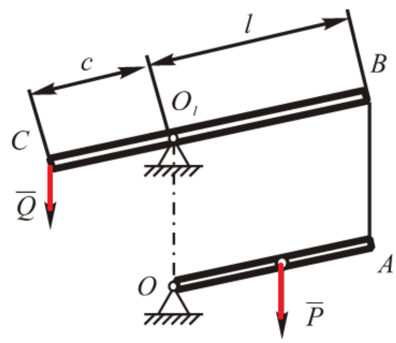
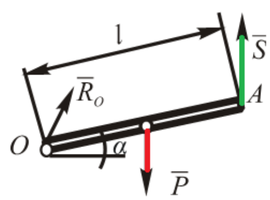


Fig. 6.20



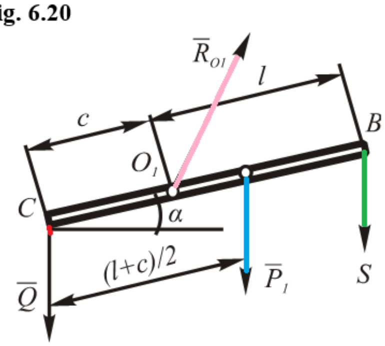


Fig. 6.21 **Fig. 6.22**

rezolvând sistemul, se obţin:

$$S = \frac{P}{2};\qquad c = l\left[\sqrt{\left(\frac{Q}{P}\right)^2 + 2} - \frac{Q}{P}\right]. \tag{4}$$

6.2.7. Două bare omogene $AB = a$ şi $BC = b$, de greutăţi $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ (fig. 6.23) se găsesc într-un plan vertical şi sunt articulate între ele în B şi în punctele fixe A, C şi fac cu orizontala unghiurile α, respectiv β. Se cer reacţiunile în articulaţiile A şi C.

Soluţie:

Se aplică metoda echilibrului sistemului prin suprimarea legăturilor exterioare din A şi C şi metoda izolării corpurilor, introducând forţele de legătură corespunzătoare.

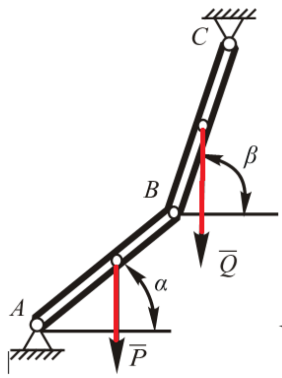


Fig. 6.23

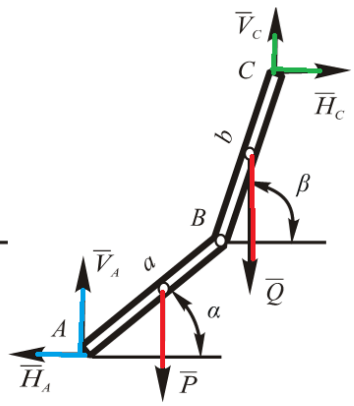


Fig. 6.24

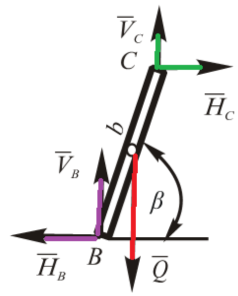


Fig. 6.25

Ecuaţiile de echilibru pentru sistem (fig. 6.23) şi pentru bara BC (fig. 6.25) sunt:

$$H_C - H_A = 0 \tag{1}$$

$$V_C + V_A - P - Q = 0 \tag{2}$$

$$M_A : P\frac{a}{2}\cos\alpha + Q\left(a\cdot\cos\alpha + \frac{b}{2}\cdot\cos\beta\right) + H_C\left(a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta\right) - V_C\left(a\cdot\cos\alpha + b\cdot\cos\beta\right) = 0 \tag{3}$$

$$M_B : Q\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos\beta + H_C\cdot b\cdot\sin\beta - V_C\cdot b\cdot\cos\beta = 0\,. \tag{4}$$

Din ecuaţia (4) se poate exprima necunoscuta V_C:

$$V_C = \frac{Q}{2} + H_C\cdot tg\beta\,, \tag{5}$$

care introdusă în (3), conduce la:

$$H_C\left(cos\,\alpha\cdot tg\beta - sin\,\alpha\right) = \frac{1}{2}cos\,\alpha\left(P + Q\right), \tag{6}$$

de unde, ţinând cont de (1), se obţine:

$$H_A = H_C = \frac{P+Q}{2(tg\beta - tg\alpha)} \quad . \tag{7}$$

Introducând (7) în (5), rezultă:

$$V_C = \frac{(P+2Q)tg\beta - Q\cdot tg\alpha}{2(tg\beta - tg\alpha)} \tag{8}$$

iar din (2), luând în considerare (8), se obţine:

$$V_A = \frac{P\cdot tg\beta - (Q+2P)tg\alpha}{2(tg\beta - tg\alpha)} \, . \tag{9}$$

6.2.8. Doi semicilindri circulari de aceeaşi lungime l şi de raze r şi r_1, având greutăţile G şi G_1 se reazemă cu suprafeţele plane, aspre, unul pe celălalt (fig. 6.26). Să se găsească valoarea coeficientului de frecare μ astfel ca sistemul format din cei doi semicilindri să fie în echilibru în poziţia din figură. Să se găsească unghiul φ de înclinaţie al planului suprafeţelor în contact faţă de planul orizontal, reacţiunea normală $\overline{N}$ dintre cele două suprafeţe în contact şi distanţa x faţă de O la care acţionează această reacţiune.

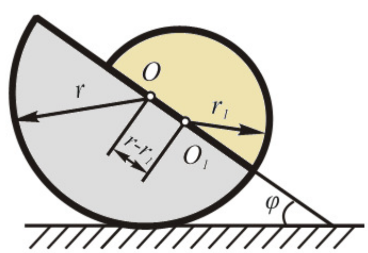


Fig. 6.26

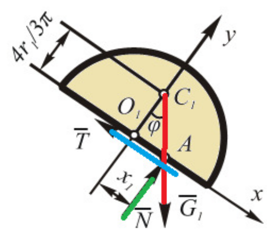


Fig. 6.27

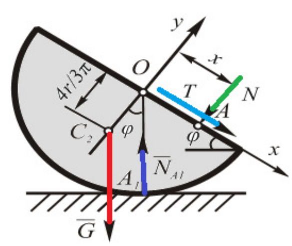


Fig. 6.28

Soluţie:

Se separă corpurile introducând forţele de legătură şi cele date şi se studiază echilibrul lor. Corpul din figura 6.26 este în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare. Condiţia necesară ca să fie în echilibru este ca cele trei forţe să fie şi concurente. Rezultă astfel punctul *A* în care trebuie aplicată reacţiunea $\overline{N}$, situat la distanţa:

$$x_1 = \frac{4r_1}{3\pi} tg\varphi \tag{1}$$

de punctul O_1.
Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$N - G_1 \cos\varphi = 0 \tag{2}$$

$$G_1 \sin\varphi - T = 0 \tag{3}$$

$$T = \mu N \text{ (echilibru la limită)} \tag{4}$$

$$N_A \cos\varphi - G\cos\varphi - N = 0 \tag{5}$$

$$G\sin\varphi - N_A \sin\varphi - \mu N = 0 \tag{6}$$

$$M_O : G\frac{4r}{3\pi}\sin\varphi - N \cdot x = 0 . \tag{7}$$

Din figurile 6.26 ÷ 6.28 rezultă:

$$x = r - r_1 + x_1 = r - r_1 + \frac{4r_1}{3\pi} tg\varphi . \tag{8}$$

Din ecuaţia (2) rezultă:

$$N = G_1 \cos\varphi . \tag{9}$$

Dacă se introduce (9) în (4) şi (4) în (3), rezultă:

$$\mu = tg\varphi . \tag{10}$$

Din relaţiile (9) şi (7) se determină:

$$x = \frac{G}{G_1} \cdot \frac{4r}{3\pi} tg\varphi . \tag{11}$$

Dacă se egalează (8) cu (11), rezultă:

$$\frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{G}{G_1} tg\varphi = \frac{4r_1}{3\pi} tg\varphi + r - r_1 , \tag{12}$$

de unde se găseşte unghiul poziţiei de echilibru:

$$tg\,\varphi = \frac{3\pi G_1 (r - r_1)}{4(Gr - G_1 r_1)} . \tag{13}$$

Astfel, relaţia (10) devine:

$$\mu = \frac{3\pi G_1 (r - r_1)}{4(Gr - G_1 r_1)} . \tag{14}$$

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

Din relaţia (13) se poate determina:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{4(Gr - G_1 r_1)}{\sqrt{16(Gr - G_1 r_1)^2 + 9\pi^2 G_1^2 (r - r_1)^2}} . \tag{15}$$

Dacă se introduce (15) în (9), rezultă:

$$N = \frac{4G_1(Gr - G_1 r_1)}{\sqrt{16(Gr - G_1 r_1)^2 + 9\pi^2 G_1^2 (r - r_1)^2}} . \tag{16}$$

Înlocuind (13) în (8) sau (11), se obţine:

$$x = \frac{4r_1}{3\pi} tg\varphi + r - r_1 = \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{G}{G_1} tg\varphi = \frac{Gr(r - r_1)}{Gr - G_1 r_1} . \tag{17}$$

6.2.9. Cadrul cu trei articulaţii din figura 6.29 este alcătuit din barele rigide *ADC* şi *BEC* articulate între ele în punctul *C* şi de teren în punctele *A* şi *B* situate pe aceeaşi orizontală. Să se determine reacţiunile din articulaţiile *A* şi *B* la încărcarea cu o forţă verticală $\overline{P}$, neglijând greutatea proprie. Să se precizeze direcţia reacţiunii din articulaţia *A*.

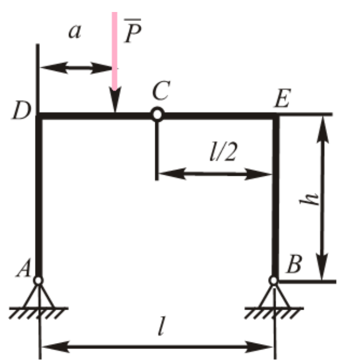


Fig. 6.29

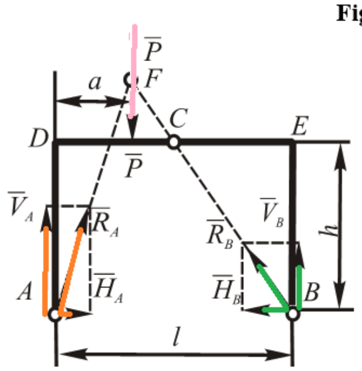


Fig. 6.30

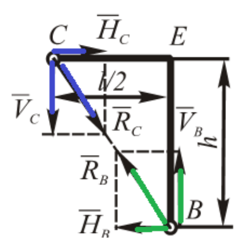


Fig. 6.31

Soluţie:

Se aplică metoda echilibrului sistemului prin suprimarea legăturilor exterioare din *A* şi *B* şi metoda izolării corpurilor, separând bara *BEC*.

Ecuaţiile de echilibru pentru sistem (fig. 6.30) şi pentru bara *BEC* (fig. 6.31) sunt:

$$
\begin{aligned}
&H_A - H_B = 0\\
&V_A + V_B - P = 0\\
&M_A : P \cdot a - V_B \cdot l = 0\\
&M_C : H_B \cdot h - V_B \cdot \frac{l}{2} = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Rezolvând sistemul (1) de ecuaţii se obţin:

$$H_A = H_B = \frac{P \cdot a}{2h}; \qquad V_A = P\frac{l-a}{l}; \qquad V_B = \frac{P \cdot a}{l}. \tag{2}$$

Pentru determinarea direcţiei reacţiunii din articulaţia *A* se observă că sistemul de corpuri (fig. 6.29) este sub acţiunea a trei forţe coplanare $\overline{P}, \overline{R}_A$ şi $\overline{R}_B$ şi pentru a fi în echilibru, aceste trei forţe trebuie să fie şi concurente. Direcţia lui $\overline{R}_B$ este după *BC,* deoarece reacţiunea din *B* este egală şi de sens contrar cu reacţiunea din *C* (fig. 6.31) pentru ca bara *BEC* să fie în echilibru. Rezultă deci că reacţiunea articulaţiei din *A* concură cu *BC* pe suportul lui *P* (în punctul *F*).

6.2.10. O sferă de rază *r* şi greutate *G* este suspendată printr-un fir inextensibil de punctul fix *O*, în care este articulat capătul *O* al unei bare omogene *OA* = *2a*, având greutatea *Q* şi care este în contact cu sfera în punctul *B*. Să se determine unghiul φ pe care îl face în poziţia de echilibru firul $OC_1 = b$ cu verticala care trece prin punctul *O*. Să se determine, de asemenea, tensiunea în fir, reacţiunea în punctul de sprijin dintre bilă şi bară şi unghiul α pe care-l face bara cu verticala, trecând prin punctul fix *O*, pentru poziţia de echilibru (fig. 6.32).

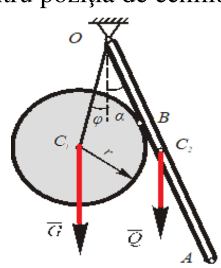


Fig. 6.32

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

Soluţie:

Observând în figura 6.33 că:

$$b^2 = OB^2 + r^2 \quad , \tag{1}$$

de unde:

$$OB = \sqrt{b^2 - r^2} \quad , \tag{2}$$

ecuaţiile de echilibru pentru bilă (fig. 6.33) sunt:

$$S \sin \varphi - N_B \cos \alpha = 0 \tag{3}$$

$$S \cos \varphi - N_B \sin \alpha - G = 0 \tag{4}$$

$$M_O : \; G\, b \sin \varphi - N_B \sqrt{b^2 - r^2} = 0 \tag{5}$$

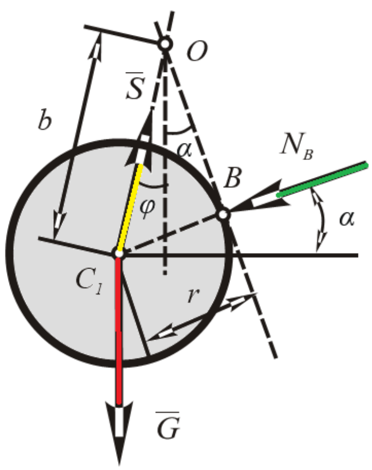


Fig. 6.33

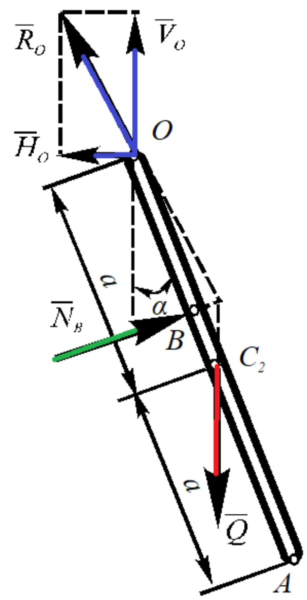


Fig. 6.34

iar pentru bară (fig. 6.34)

$$N_B \cos \alpha - \; H_O \; = 0 \tag{6}$$

$$V_O + N_B \sin \alpha - Q = 0 \tag{7}$$

$$M_A : \; Q\, a \sin \alpha - N_B \sqrt{b^2 - r^2} \;\; = \; 0, \tag{8}$$

la care se adaugă relaţia geometrică:

$$r = b\ sin\ (\alpha + \varphi). \tag{9}$$

Rezolvând sistemul de mai sus, se determină:

$$\sin\alpha = \frac{r\cos\varphi \pm \sqrt{b^2 - r^2}\ \sin\varphi}{b} \tag{10}$$

$$N_B = Q\frac{a}{b\sqrt{b^2 - r^2}}\left[r\cos\varphi \pm \sqrt{b^2 - r^2}\sin\varphi\right] \tag{11}$$

$$N_B = G\frac{b}{\sqrt{b^2 - r^2}}\sin\varphi. \tag{12}$$

Egalând relaţiile (11) şi (12), se obţine:

$$ctg\ \varphi = \frac{Gb^2}{Qar} \pm \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}. \tag{13}$$

Cunoscând unghiul φ, se obţine unghiul α din relaţia (10). Utilizând expresiile determinate ale unghiurilor α şi φ, se obţin în continuare:

$$N_B = Q\frac{a}{\sqrt{b^2 - r^2}}\sin\alpha; \qquad S = Q\frac{a}{2\sqrt{b^2 - r^2}}\sin\alpha \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\varphi}; \tag{14}$$

$$H_O = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{b}^2 - r^2}}\sin 2\alpha; \tag{15}$$

$$V_O = Q\left(1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - r^2}}\ \sin^2\alpha\right). \tag{16}$$

Aplicând teorema solidificării, forţele care se echilibrează sunt $\overline{G}$, $\overline{Q}$ şi reacţiunea totală din *O*. Rezultă că direcţia reacţiunii totale din *O* este o dreaptă verticală, sensul este ascendent, iar modulul este egal cu $G + Q$.

Aplicând ecuaţia de momente în *O,* se obţine:

$$G\ b\ sin\ \varphi = \ Q\ a\ sin\ \alpha\ , \tag{17}$$

relaţie care se verifică înlocuind *sin* α în funcţie de unghiul φ.

Prin urmare, poziţia punctului *O* este pe verticala care trece prin centrul de greutate al sistemului format din greutăţile $\overline{G}$ şi $\overline{Q}$.

6.2.11. Se dă un troliu de raze r şi R de care atârnă o greutate $\overline{Q}$. Troliul este frânat de o frână în punctul C, de care este lipită o bară AB, articulată în B şi la capătul celălalt acţionat la un unghi α de o forţă $\overline{P}$ (fig. 6.35). Se cere să se determine reacţiunile din lagăre.

Soluţie:

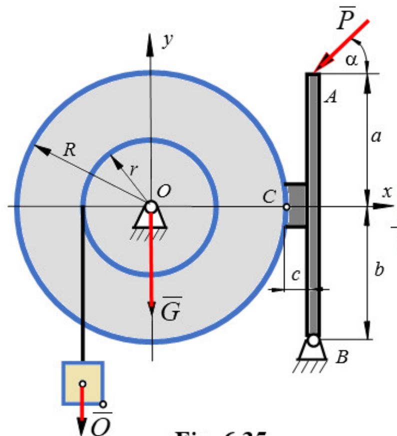


Fig. 6.35

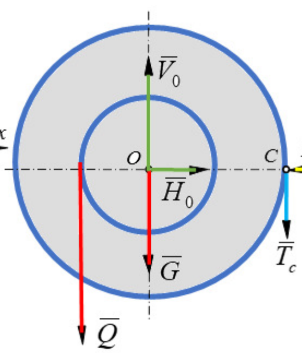


Fig. 6.36

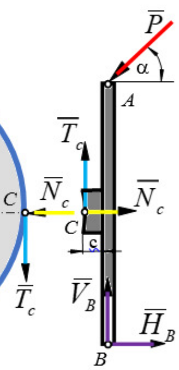


Fig. 6.37

Se aplică metoda izolării corpurilor. Astfel, sistemul de corpuri se separă în troliu (fig. 6.36) şi bara AB (fig. 6.37), introducând forţele date şi de legătură care acţionează asupra acestora, după ce, în prealabil au fost suprimate legăturile.

Se scriu ecuaţiile de proiecţii pentru forţe pe axele sistemului de referinţă ales şi ecuaţii de momente în raport cu punctul O pentru troliu şi punctul B pentru bară astfel:

$$\begin{aligned} &H_0 - N_c = 0\\ &V_0 - Q - G - T_c = 0\\ &Q\,r - T_c R = 0\\ &T_c = \mu N_c \end{aligned} \tag{1}$$

şi

$$\begin{aligned} &-P\cos\alpha + N_c + H_B = 0\\ &-P\sin\alpha + T_c + V_B = 0\\ &N_c b - P\cos\alpha(a+b) + T_c c = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Rezolvând sistemele de ecuaţii (1) şi (2), se obţin succesiv:

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{Q\,r}{R} \\ N_c &= \frac{T_C}{\mu} = \frac{Q\,r}{\mu\,R} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H_0 &= N_c = \frac{Q\,r}{\mu\,R} \\ V_0 &= Q + G + T_c = Q + G + \frac{Q\,r}{R} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} H_B &= P\cos\alpha - N_c = P\cos\alpha - \frac{Q\,r}{\mu\,R} \\ V_B &= P\sin\alpha - T_c = P\sin\alpha - \frac{Q\,r}{R} \end{aligned} . \tag{5}$$

6.2.12. Să se determine reacţiunile şi forţa $\overline{P}$ care apasă tamburul frânei din figura 6.38. Se cunosc: $AB = a$, $BE = b$, troliul are raza R şi greutatea $\overline{G}$, între tambur şi frână există frecare, coeficientul frecării de alunecare fiind μ.

Soluţie:

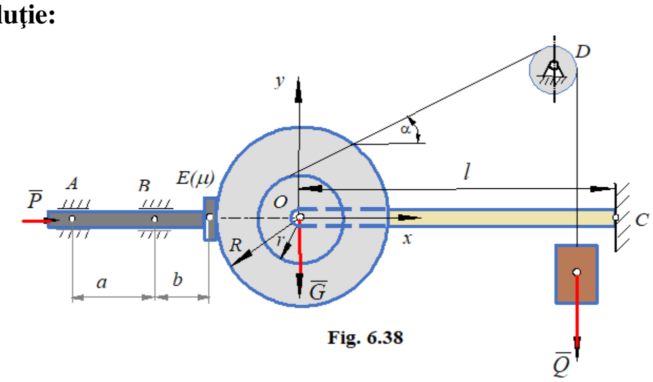


Fig. 6.38

Se aplică *metoda izolării corpurilor*. Astfel, sistemul de corpuri se separă în troliu (fig. 6.39), bara *AB* (fig. 6.40) şi bara încastrată *OC* (fig. 6.41), introducând forţele date şi de legătură care acţionează asupra acestora, după ce, în prealabil, au fost suprimate legăturile sistemului.

Se scriu ecuaţiile de proiecţii pentru forţe pe axele sistemului de referinţă ales şi ecuaţii de momente astfel:

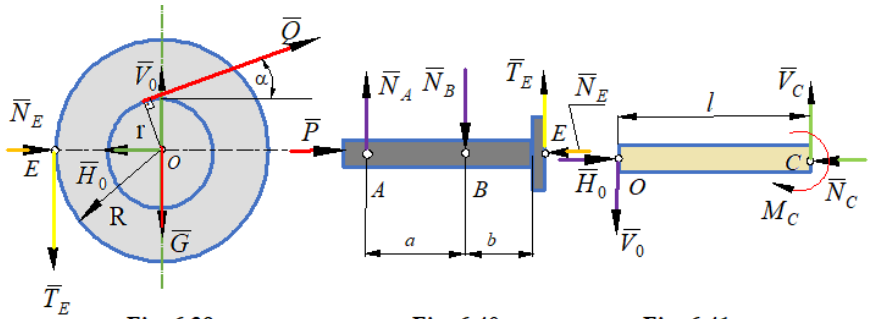


Fig. 6.39 Fig. 6.40 Fig. 6.41

$$\begin{aligned}&-H_0+N_E+Q\cos\alpha=0\\&V_0+Q\sin\alpha-G-T_E=0\\&Q\,r-T_E R=0\\&T_E=\mu N_E\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&P-N_E=0\\&N_A-N_B+T_E=0\\&-N_B b+N_A(a+b)=0\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&H_0-H_C=0\\&V_C-V_0=0\\&-M_C+V_0 l=0\end{aligned} \quad . \tag{3}$$

Rezolvând sistemele de ecuaţii (1), (2) şi (3), se obţin succesiv:

$$T_E=\frac{Q\,r}{R} \tag{4}$$

$$N_E=\frac{T_E}{\mu}=\frac{Q\,r}{R\,\mu} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
H_0 &= N_E + Q\cos\alpha = Q\left(\frac{r}{\mu R} + \cos\alpha\right)\\
V_0 &= T_E + G - Q\sin\alpha = \frac{Q\,r}{R} + G - Q\sin\alpha
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
H_C &= H_0 = Q\left(\frac{r}{\mu R} + \cos\alpha\right)\\
V_C &= V_0 = Q\left(\frac{r}{R} - \sin\alpha\right) + G \quad .\\
M_C &= V_0 l = \left[Q\left(\frac{r}{R} - \sin\alpha\right) + G\right] l
\end{aligned} \tag{7}$$

Din sistemul (2) se obţin N_A şi N_B. Astfel:

$$N_A = N_B - T_E \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&(N_B - T_E)(a+b) - N_B b = 0\\
&N_B = \frac{T_E(a+b)}{a} = \frac{a+b}{a}\frac{Q\,r}{R}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$N_A = \frac{a+b}{a}\frac{Q\,r}{R} - \frac{Q\,r}{R} = \frac{Q\,r}{R}\left(\frac{a+b}{a} - 1\right). \tag{10}$$

Din sistemul (2) se obţine valoarea forţei $\overline{P}$:

$$P = N_E = \frac{Q\,r}{R\mu}. \tag{11}$$

6.2.13. Un ansamblu format din două bare identice *AB* şi *AC* de lungime *l* şi greutate *G*, situate într-un plan vertical şi articulate între ele în *B*, se sprijină în *A* şi *C* pe un plan orizontal. Un resort vertical leagă vârful *B* de punctul *D*, aflat pe planul orizontal. În *A* şi *C* se aplică două forţe orizontale opuse, având aceeaşi mărime *H*, care tind să apropie barele. Să se determine valoarea unghiului α corespunzătoare poziţiei de echilibru şi valoarea maximă pe care o poate atinge forţa H, ştiind că resortul se rupe daca forţa elastică depăşeşte valoarea F. Forţa dezvoltată în resort este proporţională cu alungirea sa, coeficientul de proporţionalitate fiind k. În stare neîntinsă, resortul are lungimea a. Să se determine reacţiunile în punctele A, C şi în articulaţia B (fig. 6.42).

Soluţie:

Forţa elastică din resort se exprimă astfel:

$$F_e = k(l \sin \alpha - a). \tag{1}$$

Datorită simetriei, reacţiunile normale din punctele de sprijin A şi C sunt egale şi au valoarea:

$$N_A = N_C = G + \frac{F_e}{2} = G + \frac{1}{2}k(l \sin\alpha - a). \tag{2}$$

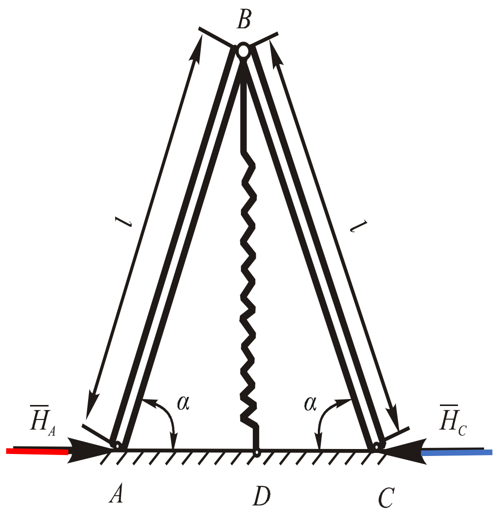


Fig. 6.42

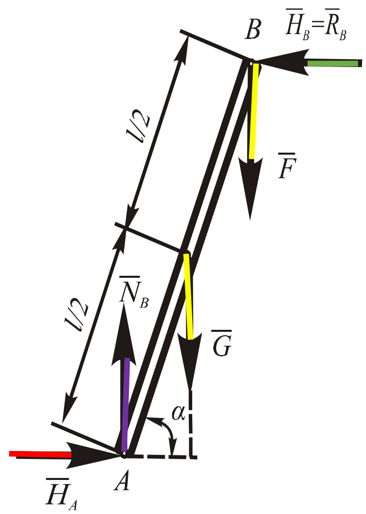


Fig. 6.43

Componenta orizontală a reacţiunii din articulaţia B este:

$$H_A = H_B = H_C = H. \tag{3}$$

Din ecuaţia de momente în raport cu articulaţia B se obţine:

$$H_A = H_B = H_C = \frac{G + k(l \sin\alpha - a)}{2}\, ctg\alpha\ , \tag{4}$$

reprezentând valoarea forţei H pentru poziţia de echilibru a sistemului format din două bare. Pentru valoarea maximă F a forţei pe care o poate suporta resortul, se obţine:

$$F_e = F = k\,(l \sin \alpha - a), \tag{5}$$

de unde se determină:

$$\sin \alpha = \frac{F + ka}{kl} \tag{6}$$

şi reacţiunile în punctele B, C şi A sunt:

$$N_A = N_C = G + \frac{F}{2}; \quad H_A = H_B = H_C = \frac{G+F}{2}\,ctg\alpha. \tag{7}$$

6.2.14. Un stâlp AB, de greutate $\overline{G}$ şi lungime $a + b$, este articulat în capătul A, iar în B este supus acţiunii tensiunii $\overline{S}$ a unui fir telegrafic. Stâlpul este susţinut de o bară CD, de greutate $\overline{Q}$, articulată la ambele capete (fig. 6.44). Cunoscând unghiul α corespunzător poziţiei de echilibru, să se determine reacţiunile din punctele A, C şi D.

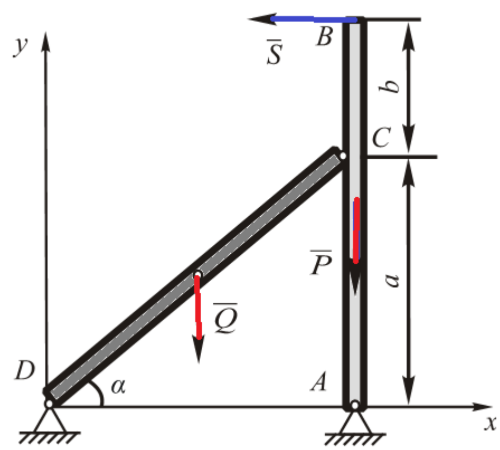


Fig. 6.44

Soluţie:

Se separă barele, potrivit figurilor 6.45 şi 6.46 şi se impune condiţia de echilibru al forţelor şi momentelor:

$$\overline{R} = 0,\ \overline{M} = 0 \tag{1}$$

pentru fiecare din ele.

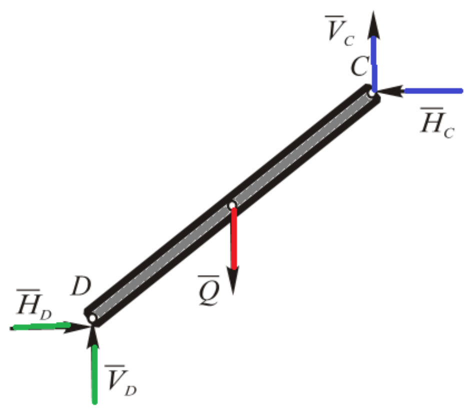


Fig. 6.45

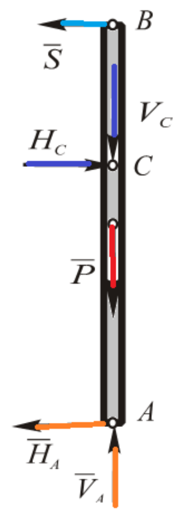


Fig. 6.46

Pentru bara *CD* rezultă sistemul de ecuaţii:

$$H_D - H_C = 0 \tag{2}$$

$$V_D - Q + V_C = 0 \tag{3}$$

$$M_D = 0,\ -Q\frac{l\cos\alpha}{2} + V_C\, l\cos\alpha + H_C\, l\sin\alpha = 0\,, \tag{4}$$

iar pentru bara *AB*:

$$H_C - H_A - S = 0 \tag{5}$$

$$V_A - V_C - G = 0 \tag{6}$$

$$M_A : (a+b)S - aH_C = 0\ . \tag{7}$$

Din sistemul format de ecuaţiile (2) ÷ (7) se determină reacţiunile din punctele *A*,

C şi D:

$$H_A = \frac{b}{a}S\ ,\ H_C = \frac{(a+b)}{a}S = H_D \tag{8}$$

$$V_A = G + \frac{Q}{2} - \frac{(a+b)}{a}S \cdot tg\alpha\ ,\ V_C = \frac{Q}{2} - \frac{(a+b)}{a}S \cdot tg\alpha \tag{9}$$

$$V_D = \frac{Q}{2} + \frac{(a+b)}{a}S \cdot tg\alpha\ . \tag{10}$$

6.2.15. O bară cotită $ABCD$ rezemată în punctul A şi articulată în D este încărcată cu o sarcină p uniform distribuită pe unitatea de lungime şi cu două forţe una verticală $\overline{P}$ şi alta orizontală $\overline{H}$. Să se determine reacţiunile din punctele A şi D cunoscând greutatea barei ca fiind $4\overline{G}$ şi repartizată proporţional cu lungimea pe fiecare tronson al acestui cadru (fig. 6.47).

Soluţie:

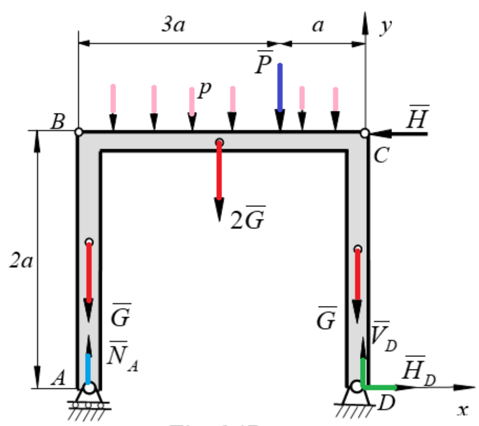


Fig. 6.47

În figura 6.47 se alege sistemul de referinţă fix xDy şi se proiectează sistemul forţelor active şi de legătură pe axele acestui sistem, după ce, în prealabil, au fost suprimate legăturile în A (reazem simplu) şi în B (articulaţie cilindrică).

 [10] Ispas, V. şi alţii, 2010

Ecuaţiile scalare de echilibru sunt:

$$\begin{aligned}
&H_D - H = 0\\
&N_A + V_D - P - 4G - p \cdot 4a = 0\\
&M_D = -N_A \cdot 4a + G \cdot 4a + 2G \cdot 2a + p \cdot 4a \cdot 2a + P \cdot a + H \cdot 2a = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{1}$$

Rezolvând sistemul (1) de ecuaţii scalare, se obţin:

$$\begin{aligned}
&H_D = H\\
&N_A = 2G + 2ap + \frac{P}{4} + \frac{H}{2} \quad .\\
&V_D = 2G + 2ap + \frac{3}{4}P - \frac{H}{2}
\end{aligned} \tag{2}$$

6.3 Probleme propuse

6.3.1. O scară este formată din treptele *A* şi *B*, una rezemată pe o fundaţie orizontală, cealaltă pe peretele vertical al casei. Treptele sunt încărcate cu greutăţile $\overline{P}$, respectiv $\overline{Q}$. Să se determine condiţia de echilibru, ţinând seama de frecările pe cele trei plane de contact, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ = tg φ. Greutăţile treptelor se vor considera înglobate în valorile forţelor *P* şi *Q* (fig. 6.48).

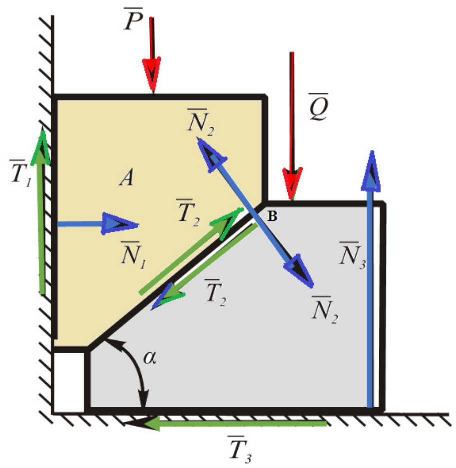


Fig. 6.48

Răspuns:

Condiţia de echilibru este:

$$P \leq Q \frac{tg\varphi}{tg(\alpha - 2\varphi)}.$$

6.3.2. O bară omogenă *AB* = *2l*, de greutate *G*, se sprijină pe o emisferă de greutate G_1 şi pe un plan orizontal perfect lucios. Coeficientul de frecare la alunecare dintre bară şi emisferă este μ. Să se determine lungimea barei, astfel încât reacţiunea dintre bară şi emisferă să treacă prin centrul de greutate al barei (fig. 6.49).

 [10] Ispas, V. și alții, 2010

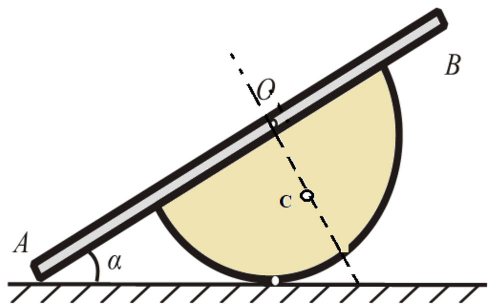


Fig. 6.49

Răspuns:

$$l = r\left(\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} - \frac{3}{8}\mu\frac{G_1}{G}\right).$$

6.3.3. Să se determine reacţiunile din articulaţiile *A, B* şi *C* ale sistemului de bare egale *AB* şi *BC* din figura 6.50, acţionat de forţa $\overline{P}$. Sistemul este în echilibru pentru înclinarea barelor sub unghiul α faţă de orizontală.

Caz particular: $P = 2kN,\ \alpha = 30^0$.

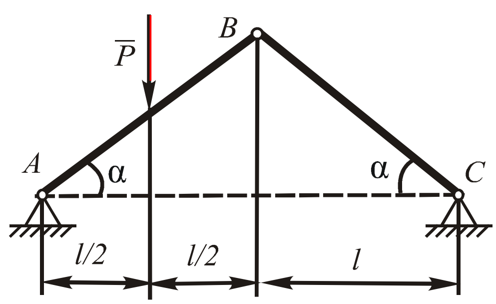


Fig. 6.50

Răspuns:

$$N_A = \frac{P}{4tg\alpha}\sqrt{9tg^2\alpha + 1}\,,\; N_B = N_C = \frac{P}{4\sin\alpha}.$$

Caz particular:

$$N_A = \frac{P\sqrt{3}}{2}\,,\; N_C = N_B = \frac{P}{2}\,,\; \varphi = 90^0.$$

6.3.4. O sferă de greutate $2\overline{P}$ se reazemă ca în figura 6.51, pe două emisfere de greutăţi $\overline{P}$ egale. Cât de mare trebuie să fie coeficientul de frecare μ dintre emisfere şi masă, pentru ca sistemul să fie în echilibru în poziţia din figură?

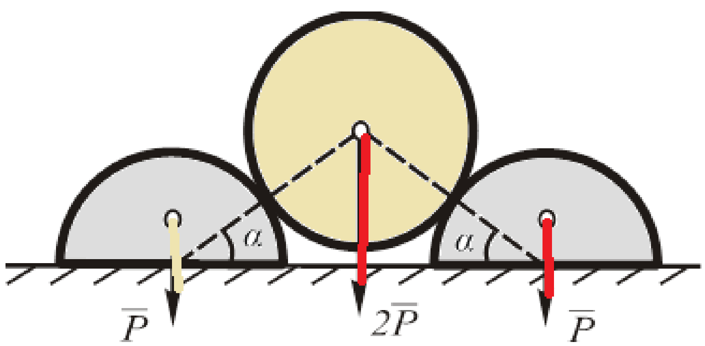


Fig. 6.51

Răspuns:

$$\mu = \frac{1}{2tg\,\alpha}.$$

[10] Ispas, V. și alții, 2010

6.3.5. Să se studieze poziţia de echilibru a penei de greutate $\overline{P}$ şi a blocului de greutate $\overline{G}$ din figura 6.52 (coeficientul de frecare între bloc şi masă este μ, iar între bloc şi pană şi între pană şi planul înclinat μ_1). Cât de mare trebuie să fie greutatea $\overline{G}$ a blocului, pentru ca sistemul să fie în echilibru?

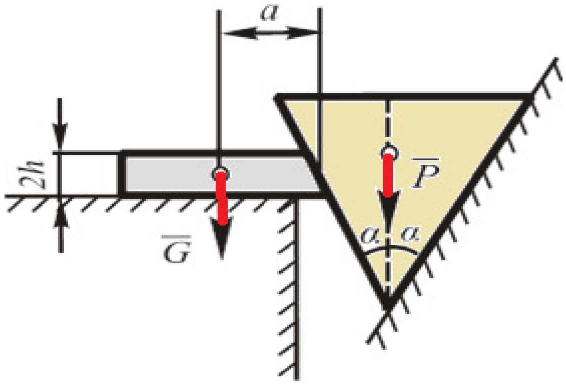


Fig. 6.52

Răspuns:

$$G = \frac{P}{2}\left[\frac{\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha}{\mu(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)} - 1\right].$$

6.3.6. Două bare omogene identice de lungime l şi greutate $\overline{P}$ sunt articulate între ele în punctul O din mijlocul lor şi se sprijină pe un plan orizontal luciu, cu capetele lor inferioare, iar capetele lor superioare sunt legate printr-un fir inextensibil. Dacă unghiul dintre cele două bare este 2α şi ele susţin un cilindru de rază R şi greutate $\overline{Q}$, se cere să se determine reacţiunea din articulaţia O şi tensiunea din fir (fig. 6.53).

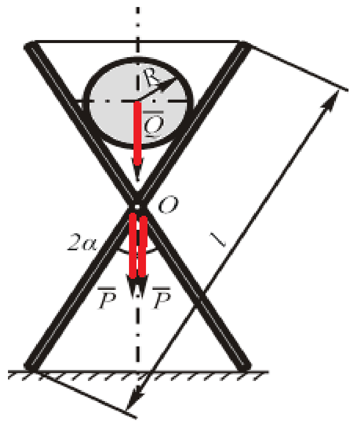


Fig. 6.53

Răspuns:

$$R_O = \frac{Q \cdot ctg\alpha}{2} - \left(\frac{Q}{2} + P\right) tg\alpha - \frac{QR}{l \cdot \sin^2 \alpha}.$$

$$S = \frac{QR}{l \cdot \sin^2 \alpha} + \left(\frac{Q}{2} + P\right) tg\alpha.$$

7. CALCULUL FIRELOR AERIENE [10]

7.1 Consideraţii teoretice

Când discutăm de fire în subconştient se dezvoltă noțiunea de întindere, de la expresia a trage. Astfel că, apare o noțiune nouă numită ***forță de tensiune (***a cărei notație este fie ***S*** fie ***T)*** şi care poate fi modelată folosind ***firele ideale*** fără masă, fără frecări, care nu se rup şi nu se întind. Firele pot fi combinate cu scripeți ficşi sau mobili, ei fiind considerați ideali şi permit firelor să schimbe direcția forțelor fără a exista frecare.

Astfel, prin ***fir*** se înțelege un corp care are o singură dimensiune şi anume lungimea şi care este sensibil mai mare decât celelalte două dimensiuni ale secțiunii transversale. La calculul firelor se iau în considerare următoarele ipoteze simplificatoare:

- Firul este perfect flexibil, poate lua orice formă fără să opună rezistență;
- Firul poate fi solicitat numai la întindere, neputând prelua solicitări de compresiune sau de încovoiere;
- Firul este inextensibil;
- Firul este torsionabil, nu se opune când i se aplică un moment de răsucire.

Ipotezele simplificatoare conform cărora firele sunt considerate perfect flexibile şi torsionabile au efectul că în orice secțiune se introduce o singură forță, respective torsorul de reducere este format dintr-o singură forță normală pe planul secțiunii transversal a firului.

Firele transmit forțele de tensiune în perechi de câte două, respectiv acțiune-reacțiune (egale şi de sens opus) astfel încât, dacă două corpuri sunt legate de un fir ideal orice forță pe direcția firului exercitată de primul obiect este însoțită de o forță de-a lungul firului în direcția opusă exercitată de al doilea obiect. Dacă se foloseşte un acelaşi fir înfăşurat de mai multe ori pe acelaşi obiect cu ajutorul unei structuri de scripeți, forța de tensiune poate fi multiplicată. Pentru fiecare fir care acționează asupra unui corp, o altă forță de tensiune din fir acționează asupra corpului.

Cu alte cuvinte se poate spune că, *firul* este un corp perfect flexibil şi inextensibil (adică poate lua orice formă şi are o lungime constantă) a cărui secţiune transversală este foarte mică în raport cu lungimea sa şi poate fi supus la întindere, dar datorită lungimii acestuia nu se poate comprima.

Importanța studiului firelor este în general asimilată cu firele aeriene de aceea în cele ce urmează se va studia echilibrul firelor aeriene (forma firului şi tensiunea într-un punct a lui) conform [19], [21].

7.1.1 Ecuaţia generală a firelor

Se consideră un fir presupus fără masă şi având o încărcare oarecare, iar într-un punct A acesta coincide cu originea arcelor de lungime s (fig. 7.1a). Se secţionează firul într-un punct M şi se notează cu $\overline{T}$ tensiunea în punctul M (fig. 7.1b) . Se izolează elementul de fir *MM'* (fig. 7.1c,d).

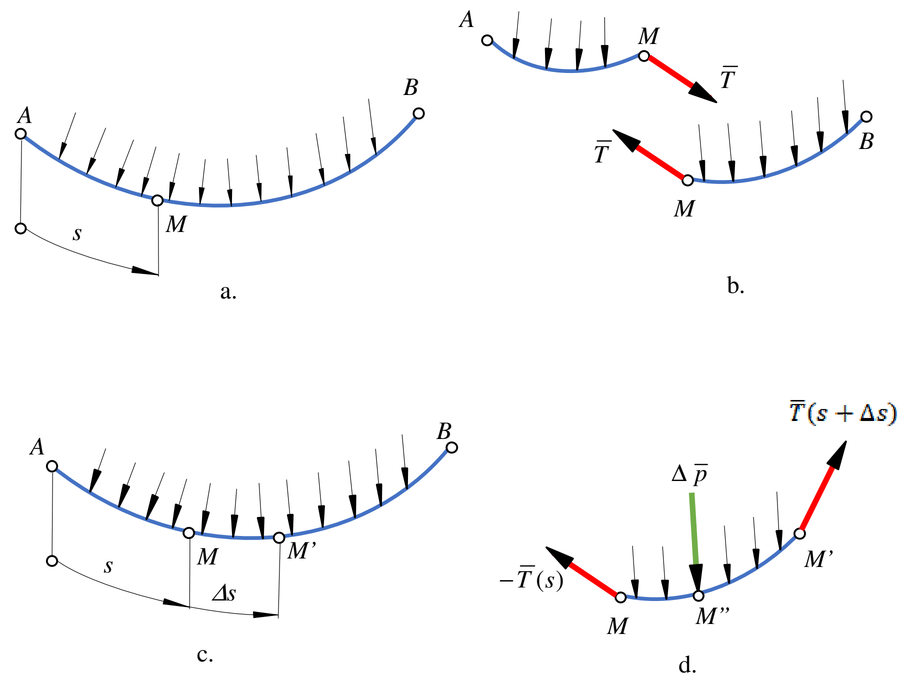


Fig. 7.1

Se consideră $\Delta\,\overline{p}$ rezultanta fortelor distribuite pe firul *MM'*, iar $\overline{T}(s+\Delta s)$ şi $-\overline{T}(s)$ sunt tensiunile din fir la capete, pe porțiunea Δs, precum şi $\overline{\tau}$ - versorul axei pe care acționează tensiunile în fir.

Ecuaţiile vectoriale de echilibru a elementului *MM'* pentru fir sunt:

$$\begin{aligned} &-\overline{T}(s)+\overline{T}(s+\Delta s)+\Delta\,\overline{p}=0 \\ &-\overline{M^{'}M}\times\overline{T}(s)+\overline{M^{'}M^{''}}\times\Delta\,\overline{p}=0 \quad (M^{'})\ . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Se împart ambele ecuaţii cu $\Delta\, s$ şi prin trecere la limită se obţine:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{-\overline{T}(s)}{\Delta s}+\frac{\overline{T}(s+\Delta s)}{\Delta s}\right)+\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\,\overline{p}}{\Delta\,s}=0\ , \tag{7.2}$$

relaţie din care rezultă:

$$\frac{d\overline{T}}{ds}+\overline{p}=0. \tag{7.3}$$

Din ecuaţia a doua a sistemului (7.1) se obţine:

$$\overline{\tau}\times\overline{T}=0 \ \text{ sau } \ \overline{T}=T\cdot\overline{\tau}\ . \tag{7.4}$$

Se face observaţia că tensiunea $\overline{T}$ în fir are întotdeauna valoare pozitivă, firele neputând fi supuse la compresiune.

Astfel, ecuaţiile vectoriale ale firelor sunt:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{T}}{ds}+\overline{p}=0 \\ &\overline{\tau}\times\overline{T}=0 \quad . \end{aligned} \qquad (7.5)\text{ - }(7.6)$$

7.1.2 Ecuaţiile diferenţiale ale firelor în sistemul cartezian de coordonate

Ecuaţiile scalare ale firelor se obţin din ecuaţiile vectoriale proiectate pe axele de coordonate *Oxyz* astfel:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(T_x)+p_x=0 \\ &\frac{d}{ds}(T_y)+p_y=0 \quad . \\ &\frac{d}{ds}(T_z)+p_z=0 \end{aligned} \qquad (7.7)$$

Tangenta la curbă are cosinusurile directoare $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, astfel că:

$$T_x=T\frac{dx}{ds},\ T_y=T\frac{dy}{ds},\ T_z=T\frac{dz}{ds}\ . \qquad (7.8)$$

Cu precizările (7.8), ecuaţiile (7.7) devin:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+p_x=0 \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+p_y=0 \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+p_z=0 \end{aligned} \qquad (7.9)$$

şi reprezintă *ecuaţiile carteziene ale firelor*.

Dacă la sistemul (7.9) se adaugă relaţia între cosinusurile directoare: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$, se obţine un sistem de patru ecuaţii în necunoscutele *x*, *y*, *z* şi *T(s),* el fiind static determinat.

7.1.3 Ecuaţiile diferenţiale ale firelor în coordonate intrinseci

Din geometria analitică se cunoaşte relaţia:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{\nu} \ , \tag{7.10}$$

denumită *prima formulă a lui Frénet* , unde raportul $\frac{1}{\rho}$ se numeşte *curbură*.

Conform cu a doua ecuaţie a sistemului (7.5) se poate scrie că $\overline{T}=T\cdot\overline{\tau}$. De asemenea, sarcina $\overline{p}$ a unităţii de lungime a firului se poate scrie prin proiecţii pe axele sistemului de referinţă Frénet astfel:

$$\overline{p}=p_\tau\overline{\tau}+p_\nu\overline{\nu}+p_\beta\overline{\beta} \ . \tag{7.11}$$

Luând în considerare (7.10), prin proiectarea ecuaţiilor vectoriale ale firelor pe axele sistemului Frénet se obţin ecuaţiile intrinseci ale firelor, scrise sub forma:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{ds}+p_\tau=0 \\ &\frac{T}{\rho}+p_\upsilon=0 \\ &p_\beta=0 \end{aligned} \ . \tag{7.12}$$

7.1.4 Fir acţionat exclusiv de greutatea proprie

Se consideră un fir omogen, suspendat în două puncte *A* şi *B* şi acţionat de greutatea proprie *pds*. Se alege un sistem de referinţă astfel încât, axa *Oy* să fie verticală cu sensul ascendent, iar axele *Ox* şi *Oz* alese în aşa fel încât *A* şi *B* să aparţină planului *xOy* (fig. 7.2).

În ecuaţiile scalare carteziene (7.9) se înlocuiesc: $p_x=p_z=0$, $p_y=-p$ şi se obţine:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)-p=0 \quad . \tag{7.13}$$
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0$$

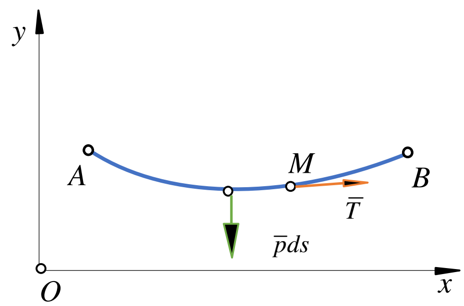


Fig. 7.2

Din prima şi a treia ecuaţie a sistemului (7.13) rezultă:

$$T\frac{dx}{ds}=H \text{ şi cu } T\frac{dz}{ds}=C, \tag{7.14}$$

relaţii în care H şi C sunt constante.

Transformând succesiv a doua ecuaţie a sistemului (7.13) prin utilizarea unor artificii matematice [18] se obţine **ecuaţia lănţişorului** scrisă sub forma:

$$y=a\,ch\frac{x}{a}. \tag{7.15}$$

Pentru determinarea tensiunii din fir $\overline{T}$ se utilizează prima relaţie (7.14) în care se înlocuieşte $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ şi $y'=sh\ u$ şi se obţine astfel:

$$T=H\ ch\frac{x}{a}=\frac{H}{a}a\ ch\frac{x}{a}=p\,y. \tag{7.16}$$

Lungimea unui arc de lănţişor s este:

$$s=\int ds=\int_o^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_o^x\sqrt{1+sh^2\left(\frac{x}{a}\right)}dx=\int_o^x ch\frac{x}{a}dx=a\,sh\frac{x}{a}\Big|_o^x=a\ sh\frac{x}{a}. \tag{7.17}$$

7.1.5 Frecarea firelor

Se consideră un fir petrecut peste un scripete fix. Între fir şi scripete se consideră că există frecare, coeficientul frecării fiind μ. Se presupune că la un capăt al firului acţionează tensiunea $\overline{T}_1$, iar la celălalt capăt $\overline{T}_2$. Se cere să se determine tensiunea $\overline{T}_2$.

Având în vedere figura 7.3, se poate scrie:

$$p_\tau = -\mu N, \quad p_\nu = -N, \quad p_\beta = 0. \tag{7.18}$$

Ecuaţiile (7.12) intrinseci ale firelor, ţinând cont de (7.18), devin:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} - \mu N = 0 \\ &\frac{T}{\rho} - N = 0 \quad . \end{aligned} \tag{7.19}$$

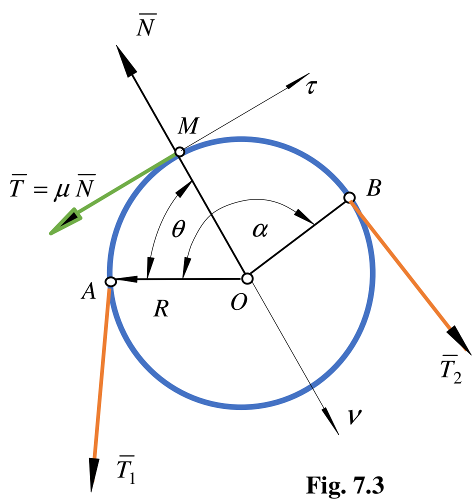


Fig. 7.3

Rezolvând sistemul (7.19), se obţine relaţia:

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu\,\alpha} \ , \tag{7.20}$$

care reprezintă *formula lui Euler* privind frecarea firelor doar în ipoteza în care $T_2 > T_1$.

7.2 Probleme rezolvate [10]

7.2.1. De un balon este legat în punctul B un cablu AOB cu lungime totală $l = 300\ m$ şi greutate $p = 2\ kgf/m\ (1kgf = 9,806\ N)$. O lungime x_0 din cablu se târăşte pe pământ cu coeficientul de frecare $\mu = 0.2$. Se constată că unghiul cablului în B este $\theta_B = 60^\circ$. Să se determine tensiunea orizontală $\overline{H}$, tensiunea $\overline{T}_B$, lungimea x_0 şi înălţimea h la care se află balonul (fig. 7.4).

Soluţie:

În punctul O cablul începe să se ridice de pe sol. Pe sol tensiunea $\overline{H}$ din fir este orizontală şi este egală cu forţa de frecare pe lungimea x_0. Se poate scrie astfel:

$$H = \mu\, p\, x_0. \tag{1}$$

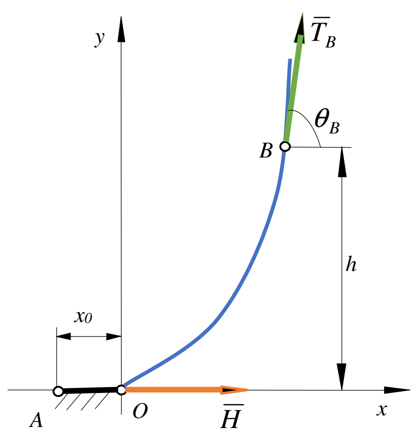


Fig. 7.4

Lănţişorul OB are o lungime s necunoscută şi care, conform cu (7.17) pentru săgeata $\varphi_A = 0$, este:

$$s = \frac{H}{p} sh\, \varphi_B \,. \tag{2}$$

Înlocuind (1) în (2), rezultă:

$$s = \mu\, x_0 sh\, \varphi_B \;\;. \tag{3}$$

Pe de altă parte,

$$s = l - x_0 \;\;. \tag{4}$$

Egalând (3) şi (4), rezultă

$$x_0 = \frac{l}{1 + \mu \;\; sh\, \varphi_B} = \frac{300}{1 + 0.2 + 1.7} = 223\, m \;\;. \tag{5}$$

Revenind la relaţia (1) cu valoarea lui x_0, se obţine *H*:

$$H = 0{,}2 \text{ x } 2 \text{ x } 223 = 89\ kgf \;\;. \tag{6}$$

Scriind o ecuaţie de echilibru pe orizontală se obţine valoarea tensiunii $\overline{T}_B$

$$T_B = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{89}{0.5} = 178\, kgf \;\;. \tag{7}$$

Înălţimea *h* la care se ridică firul este:

$$h = \frac{T_B - H}{p} = \frac{178 - 89}{2} = 44.5\ m \,. \tag{8}$$

Dacă $\varphi = tg\ \beta$, rezultă:

$$x = l\,\frac{\cos\beta\cos\theta_B}{\cos(\theta_B - \beta)}; \quad H = \frac{p\, l \sin\beta\ \cos\theta_B}{\cos(\theta_B - \beta)}; \quad h = \frac{l \sin\beta\,(1 - \cos\theta_B)}{\cos(\theta_B - \beta)} \;. \tag{9}$$

7.2.2. Care este distanţa d între punctele de legare ale unui lănţişor de lungime $2l$ situate la acelaşi nivel, astfel ca tensiunile în punctele de legare să fie egale cu greutatea firului? Se cere, să se determine înclinarea firului în punctele de legare (fig. 7.5).

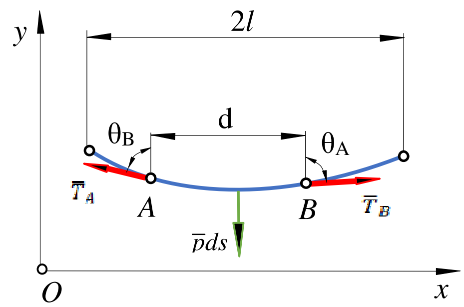


Fig. 7.5

Soluţie:

Se ia ca referinţă capătul drept B al firului. Conform enunţului, se poate scrie:

$$T_B = 2p\,l. \tag{1}$$

Proiecţia verticală a tensiunii este V şi ţinând cont că $s = l$ (lungimea din punctul minim până la punctul de legare), are valoarea:

$$V = p\,s = p\,l\ . \tag{2}$$

Pe de altă parte,

$$V = T_B \sin\theta_B\ . \tag{3}$$

Egalând cele două relaţii ale lui V se obţine:

$$\theta_B = \frac{\pi}{6}\ . \tag{4}$$

Componenta orizontală a tensiunii în punctul B este:

$$H = T_B \cos\theta_B = \sqrt{3}\,p\,l\ . \tag{5}$$

 Ispas, V. şi alţii, 2010. [10]

În conformitate cu relaţiile din literatura de specialitate [1], [19] se poate preciza că în punctele A şi B:

$$\varphi_A = \frac{p}{H}\left(-x_0\right); \quad \varphi_B = \frac{p}{H}\left(d - x_0\right). \tag{6}$$

Deoarece $\varphi_A = -\varphi_B$, rezultă:

$$\begin{aligned} 2\varphi_B &= \frac{p}{H}d \\ tg\,\theta_B &= sh\,\varphi_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi_B = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3. \tag{8}$$

Distanţa d este următoarea:

$$d = \frac{2H}{p}\varphi_B = \sqrt{3}\,l\left(\ln 3\right). \tag{9}$$

7.2.3. La o curbă funiculară parabolică de forma din figură, se cunosc: $d = 25\ m$, θ_1=10º, $\rho = 2\ f/m$. Se cere să se afle tensiunea H, tensiunile de capete T_A şi T_B, lungimea parabolei şi săgeata maximă h (fig. 7.6).

Soluţie:

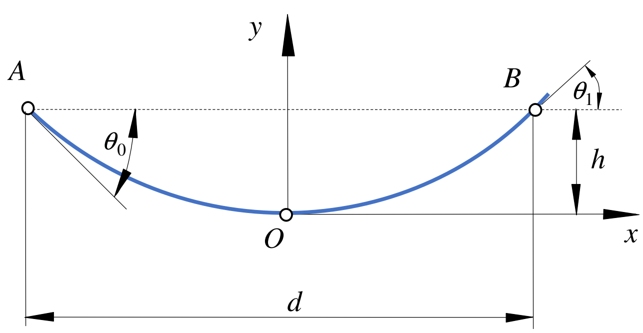


Fig. 7.6

Se alege sistemul de coordonate *Oxy* conform figurii 7.6. Ecuaţia parabolei este:

$$y = a + \frac{x^2}{2a'} \tag{1}$$

unde a' – parametru al parabolei.

Relaţia (1) reprezintă ecuaţia unei parabole la care vârful se află la distanţa a de origine. În cazul problemei de faţă, originea sistemului de coordonate coincide cu vârful parabolei, deci ecuaţia parabolei devine:

$$y = \frac{x^2}{2a} = \frac{px^2}{2H} \ . \tag{2}$$

Derivând în raport cu x relaţia (2), se găseşte *panta firului*:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\theta = \frac{px}{H} . \tag{3}$$

Aplicând relaţia (3) în punctul B pentru:

$$x = \frac{d}{2} = \frac{25}{2} \ m \ , \tag{4}$$

se obţine succesiv

$$tg\theta_1 = 0{,}1763 = \frac{2\times\frac{25}{2}}{H} \ , \quad H = 142\,tf \ . \tag{5}$$

Săgeata h se află aplicând relaţia (2) la capătul firului (B):

$$y_B = h = \frac{2\times 12.5^2}{2\times 142} = 1.1 \ \ m. \tag{6}$$

Tensiunile în punctele A şi B sunt:

$$T_A = T_B = \frac{H}{\cos\theta_1} = \frac{142}{0.9848} = 144.3 \ tf \ . \tag{7}$$

 Ispas, V. și alții, 2010. [10]

Lungimea firului pentru parabolă se poate afla plecând de la relaţia:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \tag{8}$$

Deoarece derivata *dy/dx* are valori foarte mici, se iau din dezvoltarea în serie a radicalului primii doi termeni, respectiv:

$$ds = dx\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right), \quad y' = \frac{px}{H}. \tag{9}$$

Prin integrarea lui *ds* se obţine *lungimea firului*:

$$l = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} ds = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(1+\frac{p^2x^2}{2H^2}\right)dx = d + \frac{p^2d^3}{24H^2} \tag{10}$$

$$l = 25 + \frac{2^2 \cdot 25^3}{24 \cdot 142^2} = 25.13 \ m \ . \tag{11}$$

7.2.4. La un lănţişor, având capetele fixate la acelaşi nivel se cunosc: lungimea totală a curbei l = 100 *m*, sarcina p = 5 *kgf/m*, unghiul în capăt $\theta_0 = \theta_1 = 10^\circ$. Se cer tensiunile H, T_A, T_B, deschiderea d şi săgeata h (fig. 7.7).

Soluţie:

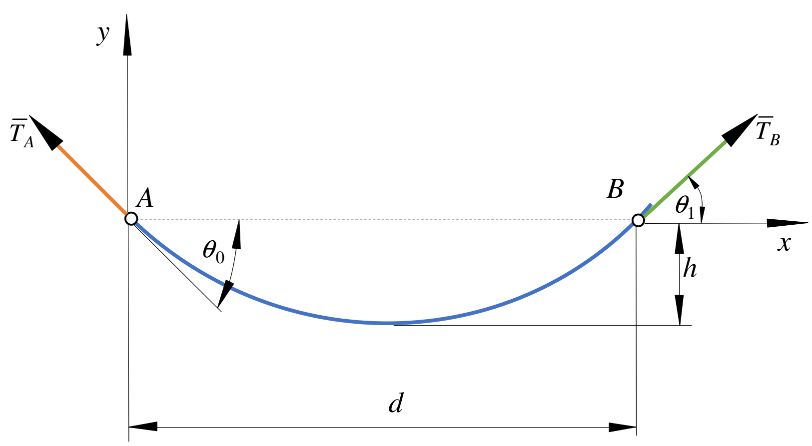


Fig. 7.7

Ecuaţia de echilibru a firului pe direcţie verticală este:

$$2T_B \sin\theta_1 - pl = 0 \ . \tag{1}$$

Având în vedere că,

$$\sin \theta_1 = \sin 10^\circ = 0{,}1735 \ , \tag{2}$$

din relaţia (1) se obţine valoarea tensiunii $\overline{T}_B$ astfel:

$$T_B = T_A = \frac{5\times 100}{2\times 0{,}1736} = 1443\,kgf \ . \tag{3}$$

În punctul B unghiul $\varphi_A = -\varphi_B$ şi $s = l$. Se ştie conform literaturii de specialitate [19] privind statica firelor că: $\varphi = \frac{p}{H}(x - x_0)$, x_0 - este poziţia iniţială, iar x - poziţia cea mai de sus a firului.

Lungimea firului este:

$$l = \frac{H}{p} 2\, sh\varphi_B \ , \tag{4}$$

astfel că:

$$H = \frac{pl}{2sh\varphi_B} = \frac{5\times 100}{2\times 0{,}1763} = 1420\ kgf \ . \tag{5}$$

Săgeata maximă h este:

$$h = \frac{T_B - H}{p} = \frac{1443 - 1420}{5} = 4{,}6\ m. \tag{6}$$

Se cunoaşte că, în cazul *firului uniform greu* prin dezvoltări aproximative în serii de puteri a cosinusului hiperbolic [18] şi reţinerea primilor doi termeni se poate scrie:

$$x = \frac{H}{p}\varphi + x_0 \ , \quad y = \frac{H}{2p}\varphi^2 + \frac{H}{p} + y_0 \ , \quad tg\theta = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} \ . \tag{7}$$

Aplicând relaţiile (7) pentru origine (x = 0) şi la mijlocul firului ($x = d/2,\ \varphi = 0$), se obţin relaţiile:

 Ispas, V. şi alţii, 2010. [10]

$$0 = \frac{H}{p}\varphi_A + x_0\,, \quad \frac{d}{2} = 0 + x_0\,, \tag{8}$$

din care rezultă:

$$x_0 = \frac{d}{2}; \quad \varphi_A = -0.1754\,; \; d = -\frac{2h\varphi_A}{p} = 99.7 \;\; m\,. \tag{9}$$

7.2.5. O curbă funiculară lănţişor este legată de două puncte A şi B situate la nivele diferite. Dacă lungimea firului este l, iar unghiurile tangentelor la capete cu verticala sunt α şi β, se cere diferenţa de nivel a punctelor A şi B (fig. 7.8).

Soluţie:

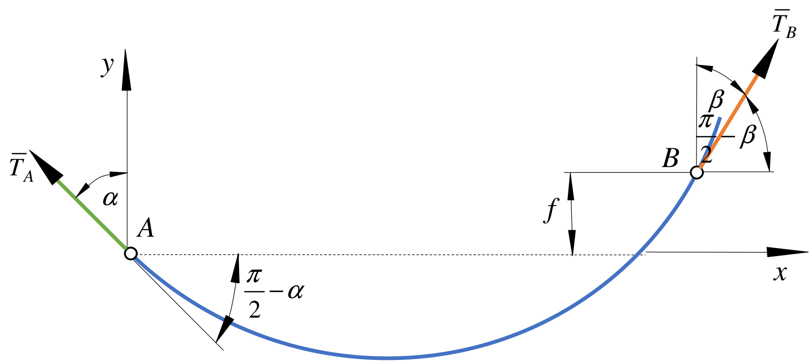


Fig. 7.8

În conformitate cu (7.16) şi (7.15), se pot scrie relaţiile:

$$y = \frac{H}{p}\left(ch\;\varphi - ch\;\varphi_A\right), \;\; s = \frac{H}{p}\left(sh\;\varphi - sh\;\varphi_A\right), \tag{1}$$

care aplicate pentru punctul B conduc la:

$$y_B = f = \frac{H}{p}\left(ch\varphi_B - ch\varphi_A\right);\;\; l = \frac{H}{p}\left(sh\;\varphi_B - sh\;\varphi_A\right). \tag{2}$$

Prin împărţirea relaţiilor (2) rezultă :

$$f = l\frac{ch\varphi_B - ch\varphi_A}{sh\varphi_B - sh\varphi_A}. \tag{3}$$

Ţinând seama de relaţiile:

$$sh\varphi = tg\,\theta \tag{4}$$

$$ch\varphi = \sqrt{1 + sh^2\varphi} = \sqrt{1 + tg^2\theta} \tag{5}$$

şi având în vedere că,

$$\theta_A = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),\;\; \theta_B = \frac{\pi}{2} - \beta, \tag{6}$$

se obţin succesiv:

$$f = l\frac{\sqrt{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} - \sqrt{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} - \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\,l. \tag{7}$$

$$f = l\frac{\dfrac{1}{\sin\beta} - \dfrac{1}{\sin\alpha}}{ctg\beta + ctg\alpha} = l\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = l\frac{\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}}. \tag{8}$$

7.3 Probleme propuse

 Ispas, V. şi alţii, 2010. [10]

7.3.1. Un cablu de greutate *p (kgf/m)* este legat ca şi în figura 7.9 în punctul *A*, înfăşurat pe suprafaţa exterioară a unui cilindru şi atârnă cu o lungime *a*. Se cer tensiunile în punctele *A*, *B* şi *C*.

Răspuns:

$T_A = T_C = pa$; $T_B = p(r + a)$.

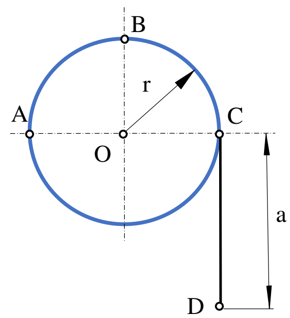


Fig. 7.9

7.3.2. Lanţul omogen din figura 7.10 are lungime totală *l* şi este legat cu capetele de două inele care pot aluneca cu frecare pe o bară orizontală *AB*. Dacă coeficientul de frecare este μ, să se arate care este valoarea maximă a distanţei *d* dintre inele pentru care este posibil echilibrul (fig. 7.10).

Răspuns:

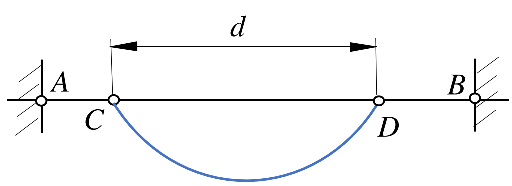


Fig. 7.10

$$d \le \mu l \varphi_D = \mu l \arg sh \frac{1}{\mu}.$$

7.3.3. Între două puncte *A* şi *B* aflate la acelaşi nivel şi depărtate unul de altul cu *d = 100 m*, se poate lega o parabolă sau un lănţişor. Lungimea lănţişorului este $l = 120\ m$. Sarcina totală pe care o suportă fiecare dintre curbele funiculare este aceeaşi $P = 1200\ kgf\ (1kgf = 9{,}806\ N)$ repartizată după legea lănţişorului, respectiv a parabolei. Ambele curbe funiculare au acelaşi unghi θ_0 în origine. Se cere, să se determine lungimea l a parabolei, iar la fiecare dintre curbe tensiunile $\overline{H}$, $\overline{T}_A$, săgeata maximă şi raza de curbură la mijlocul firului (fig. 7.11).

Răspuns:

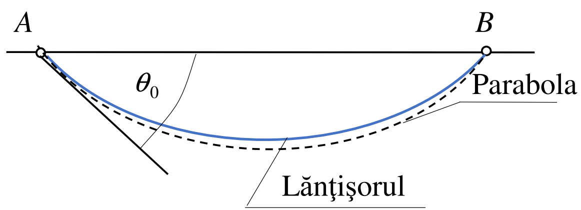


Fig. 7.11

a) Lănţişor

$$H = \frac{p\,d}{2\,\varphi_B} = \frac{10 \cdot 100}{2 \cdot 1{,}065} = 469\ kgf\ .$$

$$T_A = T_B = \frac{H}{\cos\,\theta_B} = \frac{469}{0{,}616} = 762\ kgf\ .$$

$$y = \frac{H}{p}\left(ch\,\varphi - ch\,\varphi_0\right),\ \varphi_0 = \varphi_B\ .\ h = \frac{H}{p}\left(1 - ch\,\varphi_0\right) = \frac{469}{10}\left(1 - 1{,}623\right) = -29{,}25\ m.)$$

$$\rho = \frac{H}{p} = \frac{469}{10} = 46{,}9\ \ m$$

b) *Parabola*

$$\rho = \frac{T}{p\cos\,\theta} = \frac{H}{p} = \frac{469}{12} = 39{,}1\ \ m\ .$$

$$y = \frac{H}{p}\left(ch\,\varphi - ch\,\varphi_0\right),\ \varphi_0 = \varphi_B\ .\ \ h = \frac{pd^2}{8H} = \frac{12 \cdot 100^2}{8 \cdot 468} = 31{,}95\ \ m\ .$$

$$l = d + \frac{p^2 d^3}{24\,H^2} = 100 + \frac{12^2 \cdot 100^3}{24 \cdot 469^2} = 127{,}3\ \ m\ .$$

8. MECANISME SIMPLE

Ispas, V. și alții, 2010. [10]

Mecanismele simple ca şi *pârghia şi scripetele* sunt cunoscute încă din antichitate, ele au fost şi sunt folosite şi în prezent [3] cu scopul de a uşura activitatea omului. În cele ce urmează, cele două mecanisme simple vor fi prezentate şi explicate.

I. SCRIPEȚI

8.1 Consideraţii teoretice la scripeţi [3]

Rolul scripeților în viața cotidiană este acela de dispozitive care se încadrează în categoria de *mecanisme simple* alături de pârghii, *cu scopul de a uşura munca omului*, acest ajutor este fie prin schimbarea sensului forței motoare (F_m) care acționează la unul din capetele firului înfăşurat pe scripete, fie prin reducerea acesteia vizavi de forța rezistentă (F_r), aflată la celălalt capăt al firului (fig. 8.1 şi fig. 8.2).

Un ***scripete*** *este un dispozitiv elementar format dintr-un disc/roată având un canal periferic de ghidare a firului/cablului şi care va permite schimbarea sensului unei forțe sau obținerea unei economii de forță. Scripetele este un dispozitiv ce se poate roti în jurul axei proprii.*

Scripeţii pot să fie *ficși* (axa proprie nu îşi modifică poziţia faţă de un sistem de coordonate fix) sau pot fi *mobili* (axa proprie este mobilă). Scripeţii *mobili* sunt susţinuţi de firele care trec pe sub aceştia. Prin combinarea scripeţilor ficşi cu cei mobili se pot ridica greutăţi mari cu efort redus (forță motoare mică), ceea ce conduce la obţinerea unui *avantaj mecanic (AM)*. Astfel de combinaţii sunt întâlnite la utilajele şi sistemele de ridicat în special cu macarale (fig. 8.1).

[3] Fodor G., Cristea A.F., 2019.

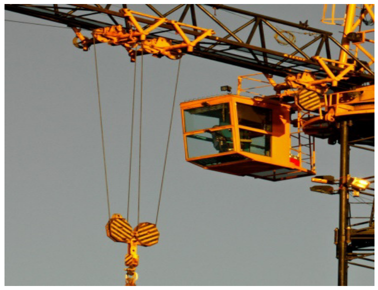


Fig. 8.1 Combinaţii de scripeţi [3].

Pentru obținerea unui avantaj mecanic mare, respectiv economie de forță, în practică se folosesc ***sisteme de scripeţi.*** Această combinaţie de scripeţi ficşi şi mobili valorifică proprietăţile scripeţilor ficşi prin schimbarea direcţiei forţei rezistente notată (F_r) care combinată cu cea a scripeţilor mobili reduce forţa motoare (F_m).

În cazul **scripetelui fix** (fig. 8.2a) dacă se ţine seama de rigiditatea firelor şi de frecarea din axul scripetelui, forţa motoare necesară învingerii forţei rezistente este:

$$F_m = k\, F_r\,, \tag{8.1}$$

unde: - ***k*** este un coeficient supraunitar numit şi ***factor de multiplicare*** al forței rezistente;

$$k = 1 + \lambda + 2\mu r/R\,, \tag{8.2}$$

unde: $\lambda = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/R = k_1 d_{fir}$ (d_{fir} – diametrul firului) şi se datorează rigidității firului/cablului;

(k_1 = 0.002...0.006 m^{-2} pentru funii de cânepă şi k_1 = 0.03...0.09 m^{-2} pentru cabluri de oţel);

ε_1 , ε_2 sunt excentricitățile firelor;

$2\mu r/R$ – este frecarea din axul scripetelui şi este exprimată prin μ;

μ - coeficientul de frecare la alunecare;

r - raza fusului;

R - raza scripetelui.

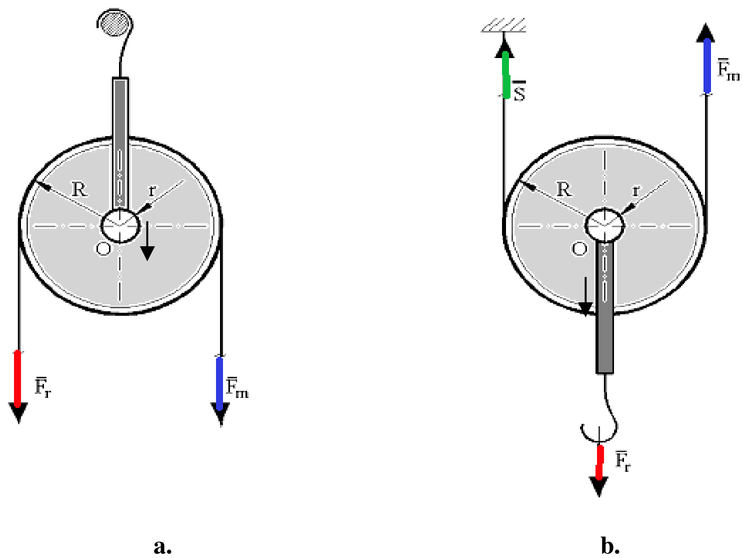


Fig. 8.2 Scripete fix şi scripete mobil [3].

În general, pe lângă avantajul mecanic (*AM*) la scripeți mai interesează şi randamentul acestora care este exprimat prin relația:

$$\eta = F_0 / F_m \ , \qquad (8.3)$$

unde: - F_0 este forța motoare în cazul ideal, iar ***avantajul mecanic*** (AM) se va calcula cu relația:

$$AM = Fm/Fr \ . \qquad (8.4)$$

8.1.1 Randamentul scripeților în diferite situații

În cazul *scripetelui fix randamentul* și avantajul mecanic *AM* devin:

$$\eta = 1/k; \quad AM = k \ . \qquad (8.5)$$

Observăm că *avantajul mecanic este supraunitar* și vorbim în acest caz de o *multiplicare a forței rezistente*.

[3] Fodor G., Cristea A.F., 2019.

- Dacă *scripetele fix este ideal (k=1),* atunci se neglijează atât rigiditatea firului/cablului cât şi frecarea din axul propriu. În acest caz *forţa motoare* devine *egală cu forţa rezistentă*.

- Pentru **scripetele mobil** (fig. 8.2b) forţa motoare devine:

$$Fm = Fr / ((k + 1)/k). \qquad (8.6)$$

În acest caz *coeficientul* (*k<0*) *este subunitar* şi se poate vorbi de o *demultiplicare a forţei rezistente*, adică este nevoie de o forţă motoare mai mică pentru a învinge forţa rezistentă. Scripetele se va mişca odată cu mişcarea punctului de aplicaţie al forţei motoare. Se poate observa că în acest caz, deplasarea forţei rezistente este mai mică faţă de deplasarea forţei motoare.

- Dacă *scripetele mobil este ideal* (*k = 1*) forţa motoare şi avantajul mecanic devin:

$$F_m = 0{,}5\ F_r\,; \qquad AM = 2\,. \qquad (8.7)$$

8.2 Sisteme de scripeţi

Cele mai des întâlnite sisteme de scripeţi sunt **palanele** sau blocurile de scripeţi ca şi cele prezentate în figura 8.3.

Fig. 8.3 Palane [3]

Palanele sunt folosite pentru ridicarea greutăţilor mari, ele fiind acţionate fie manual fie cu motoare (la macarale). Pentru a avea un avantaj mecanic (AM) mare se folosesc combinaţii de scripeţi grupaţi în *mufle*.

 Ispas, V. şi alţii, 2010. [10]

***Mufla** este o combinație de mai mulți scripeți fixați pe aceeași furcă. Fixarea pe furcă se poate face pe același ax (scripeții au același diametru) sau pe axe paralele (diametrele diferă).*

Palanul *este alcătuit din două mufle, una fixă şi una mobilă*. Fiecare muflă conţine un număr egal de scripeţi montaţi pe aceeaşi furcă. Palanul poate fi realizat în două variante (fig. 8.4). Pentru ambele variante calculul forței motoare şi a coeficientului de multiplicare este acelaşi.

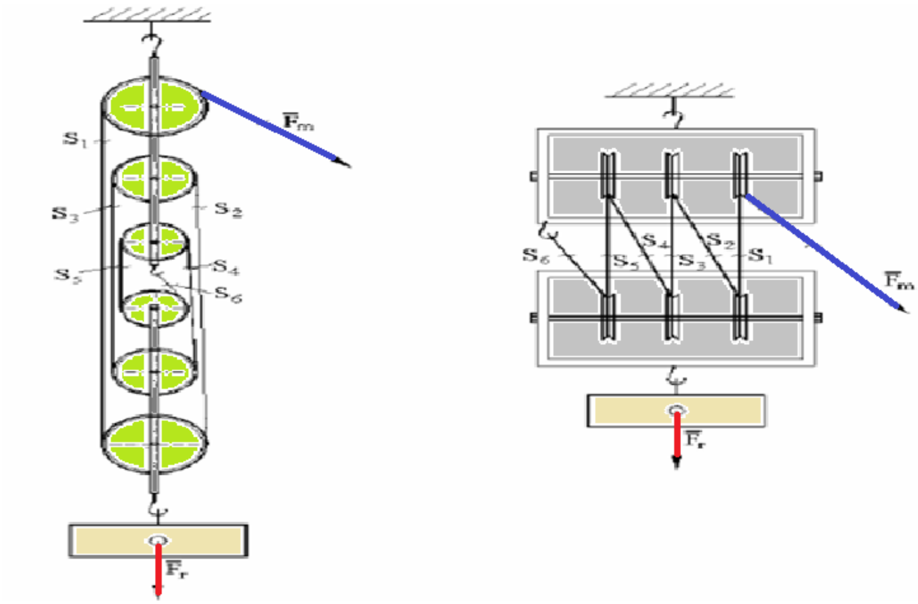


Fig. 8.4 Palanul [3]

În cele ce urmează se vor prezenta câteva relații de calcul a forței motoare [3], în cazul sistemelor de scripeti care utilizează palanul. De exemplu, pentru palanul cu *şase scripeţi* montaţi în două mufle, forţa motoare (F_m) va fi:

$$F_m = \frac{k^6}{1 + k + k^2 + \cdots k^6} \cdot F_r = \frac{k^6}{\frac{k^6 - 1}{k - 1}} \cdot F_r = \frac{k^6(k-1)}{k^6 - 1} \cdot F_r \tag{8.8}$$

[3] Fodor G., Cristea A.F., 2019.

În cazul general, utilizând *2n scripeţi* şi două mufle [3], *forța motoare* se determină cu relația:

$$F_m = \frac{k^{2n}(k-1)}{k^{2n}-1} \cdot F_r \quad . \tag{8.9}$$

În situaţia ideală când *k = 1* apare o nedeterminare care se ridică prin aplicarea teoremei lui *l'Hospital* [3] şi anume:

$$F_m = \lim_{k=1}\left(\frac{\frac{d}{dk}(k^{2n+1} - k^{2n})}{\frac{d}{dk}(k^{2n}-1)}\right) \cdot F_r = \frac{1}{2n} \cdot F_r \tag{8.10}$$

În acest caz, coeficientul forței rezistente este subunitar adică, există o *demultiplicare* a ei, ceea ce înseamnă că este nevoie de o forţă motoare mai mică pentru a învinge forța rezistentă.

II. PÂRGHII

8.3 Consideraţii teoretice în cazul pârghiilor [3]

Pârghia este un mecanism simplu şi mai modest din punctul de vedere al construcției decât scripetele dar, al cărei rol conduce în final, la uşurarea muncii omului.

Pârghia – este o bară rigidă (fig. 8.5) care se sprijină pe un punct fix şi asupra căreia se exercită o forţă activă şi o forţă rezistentă (în ipoteza neglijării frecărilor). În practică, pârghiile sunt frecvent utilizate la ridicarea greutăţilor sau intră în componenţa mecanismelor care ridică greutăţi.

[3] Fodor G., Cristea A.F., 2019.

 Ispas, V. și alții, 2010. [10]

Se consideră o forţă F aplicată în punctul A şi un pol O arbitrar ales. Vectorul moment al forţei F în raport cu polul O se notează cu M_0 şi se exprimă vectorial prin relaţia:

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F}, \tag{8.11}$$

unde: r - este vectorul de poziţie al punctului de aplicație al forţei F faţă de polul O. Fiind o mărime vectorială, momentul ($\overline{M}_0$) are direcţia perpendiculară pe planul format din vectorul de poziţie (r) şi forţa (F), sensul dat de regula burghiului şi modulul este dat de produsul dintre forţă şi braţul forţei.

În cele ce urmează se consideră că asupra pârghiei acţionează o forţă activă $F_a = F_m$ care roteşte pârghia în jurul unui punct de sprijin O şi căreia i se opune o forţă rezistentă sau de încărcare F_r.

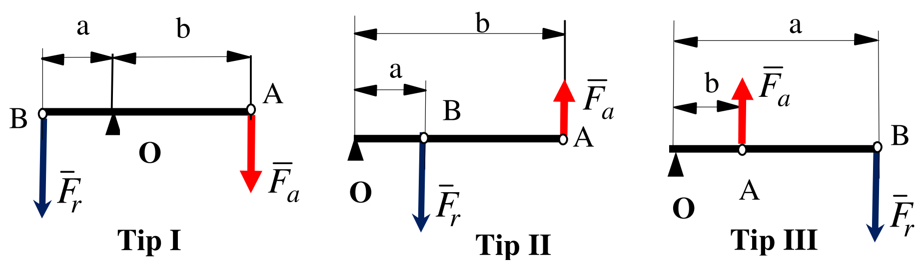


Fig. 8.5

Analog cu scripeții, şi în acest caz este o forță motoare notată F_m şi una rezistentă notată cu F_r, iar dispunerea acestora pe pârghie în funcție de punctul de sprijin al acesteia, conduce la o clasificare a pârghiilor. Astfel că, poziţiile punctelor de aplicaţie ale forţelor (A pentru forţa activă (motoare) și B pentru forţa rezistentă) şi a punctului de sprijin O vor determina cele trei tipuri de pârghii din figura 8.5, astfel:

- **Pârghia de tip I** - punctul de sprijin O este situat între F_r şi F_a (AOB).

Exemple: balanţa cu braţe egale, ranga, cleştele de cuie, foarfeca etc.;

- **Pârghia de tip II** - încărcarea F_r este situată între punctul de sprijin O şi forţa activă F_a (OBA).

Exemple: roaba, spărgătorul de nuci, cheia pentru piuliţe etc.;

- **Pârghia de tip III** - forţa F_a este situată între punctul de sprijin O şi încărcarea F_r (OAB).
Exemple: penseta, cleştele de jăratic, supapa de siguranţă a cazanului cu abur, pedala mașinii de cusut etc.

Interesant de calculat în cazul pârghiilor este acelaşi **avantaj mecanic**, respectiv (***AM***), având aceeaşi formulă ca şi în cazul scripeților. Pentru a afla acest avantaj mecanic se cere scrierea ecuațiilor de momente. Se observă din ecuaţiile de momente faţă de punctul de sprijin *O*, că momentele celor două forţe (active şi de rezistență) trebuie să fie egale.

Dacă se notează cu *a* distanţa de la punctul de sprijin *O* la încărcarea F_r şi cu *b* distanţa de la forţa activă F_a la punctul de sprijin *O* (braţele pârghiei), atunci modulele momentelor faţă de punctul *O* vor fi:

$$F_r \cdot a = F_a \cdot b \tag{8.12}$$

Raportul F_r / F_a se numeşte ***factor de multiplicare al forței active sau avantaj mecanic al pârghiei (AM)***.

$$AM = \frac{F_r}{F_a} = \frac{b}{a} \quad . \tag{8.13}$$

Se poate observa că pot exista două cazuri: când AM > 1 se obține **amplificarea** raportului forțelor / braţelor pârghiei şi dacă AM < 1 se obține **demultiplicarea** raportului forțelor / braţelor pârghiei.

[3] Fodor G., Cristea A.F., 2019.

8.4 Probleme rezolvate

8.4.1. O macara ridică o grindă din oțel cu masa M. Sistemul de scripeți de pe brațul macaralei este compus din patru scripeți. Ce forță motoare este necesară pentru ridicarea grinzii?

Soluție:

Forța care se opune rotirii scripetelui este greutatea aşadar:

$$F_r = G = Mg\,. \tag{1}$$

Există sistemul de scripeți la care fiecare din cei patru scripeți înjumătățesc forța motoare astfel că

$$F_m = G/8 = Mg/8\,. \tag{2}$$

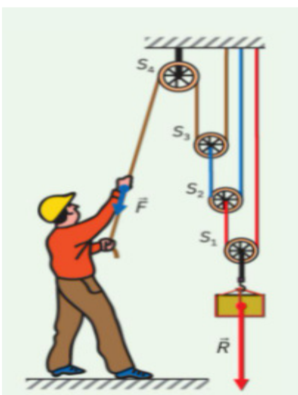


Fig. 8.6 [Google]

8.4.2. În figura 8.6 se cere, să se determine valoarea forței motoare (F_m = Fm_1) cu care operatorul trebuie să ridice o greutate (R = F_r) de masă M utilizând sistemul de scripeți dat, scripeții şi firul se consideră ideali.

Soluție:

Se analizează fiecare scripete din sistemul de scripeți dat de figura 8.6 astfel:

pentru scripetele S2: tensiunea în fir devine:

$$Fm_1 = Fr\,/\,2 \tag{1}$$

pentru scripetele S3: tensiunea în fir devine:

$$Fm_2 = Fm_1 / 2 \tag{2}$$

pentru scripetele S3: tensiunea în fir devine:

$$Fm_3 = Fm_2 / 2 \tag{3}$$

pentru scripetele S4: tensiunea în fir devine:

$$Fm_4 = Fm_3 / 2 \tag{4}$$

Ținând cont de (2) – (4) şi înlocuind în relația (1), se obține valoarea finală a forței cu care operatorul va putea ridica greutatea *R*:

$Fm_1 = R / 2^n$, unde: *n* – este numărul de scripeți mobili (5)

respectiv, $Fm_1 = Mg / 2^3$. (6)

8.4.3. Un bloc de piatra (fig. 8.7) cu masa (*M*) este ridicat cu ajutorul unei bare de lungime (*l*), sprijinită la distanța *a* de capătul la care acționează un operator cu o forță motoare $2F_m$. Să se identifice tipul pârghiei şi să se calculeze în acest caz forța rezistentă, ştiindu-se forța motoare şi avantajul mecanic al pârghiei.

Soluție:

Se observă că pârghia este de tipul I conform teoriei, iar rezolvarea cerinței se va face prin scrierea ecuației de momente față de polul O:

$$\text{O: } 2F_m\, a = G\,(l - a)\ . \qquad (1)$$

Se observă că forța rezistentă este G, astfel:

$$F_r = G = 2F_m\, a / (l - a)\ . \qquad (2)$$

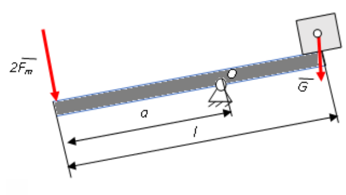


Fig. 8.7

Avantajul mecanic (*AM*) se poate calcula:

$$\boldsymbol{AM = F_r / F_m} = (\ 2F_m\, a / (l - a)\ )\ \ / \ 2F_m \qquad (3)$$

respectiv, $\boldsymbol{AM = =}\ a / (l - a)$ (4)

 Ispas, V. și alții, 2010. [10]

8.5 Probleme propuse

8.5.1. Se dă sistemul de scripeți considerați ideali din figura 8.8. Se cunoaşte forța rezistentă care trebuie învinsă de un operator se cere să se afle forța motoare în acest caz.

Răspuns: $F_m = F_r/2^n$

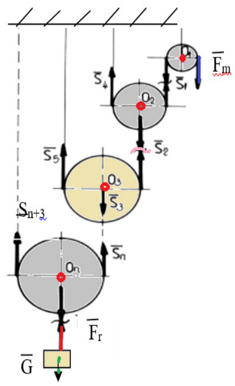


Fig. 8.8

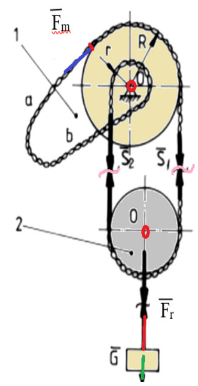


Fig. 8.9

8.5.2. Se dă sistemul diferențial din figura 8.9 format din troliu (1) şi scripetele mobil (2) peste care este petrecut un lanț de care se trage cu forța F_m pe cele două ramuri ale sistemului notate *a* şi *b*. Să se determine forța motoare în acest caz, cunoscându-se toate celelalte date ale problemei conform figurii.

Răspuns:

Indicații: se izolează corpurile şi se determină tensiunile din fire (S_1 şi S_2) şi va rezulta forța motoare cerută:

$$F_m = F_r\,(R - r)/\,2$$

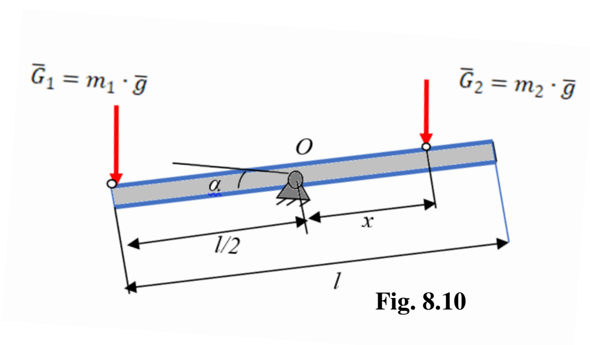


Fig. 8.10

8.5.3. Doi copii unul de masă m_1 şi altul de masă m_2 ($m_1 < m_2$) vor să se legene pe un balansoar de lungime l, sprijinit la mijloc (fig. 8.10). Copilul de masă (m_1) se aşează chiar la un capăt. La ce distanță x trebuie să se aşeze celălalt copil pentru ca balansoarul să stea la orizontală? Se cunoaşte unghiul α.

Răspuns: $x = m_1\, l\cos\alpha\, /\, 2m_2$

II. CINEMATICĂ

A. MIŞCAREA ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINŢĂ FIX

9. CINEMATICA PUNCTULUI [9]

9.1 Consideraţii teoretice

9.1.1 Introducere

În cadrul cinematicii punctului material se studiază mişcarea în timp a acestuia, fără a lua în considerare cauzele mişcării adică, fără a stabili legătura dintre sistemul de forţe concurente ce acţionează asupra punctului şi mişcarea acestuia.

Mişcarea unui punct este cunoscută dacă la orice moment (t) se poate determina poziţia punctului faţă de sistemul (reperul) ales. Poziţia unui punct este cunoscută în general, dacă se defineşte vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului faţă de originea O a sistemului de referinţă ca funcţie de timp astfel:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{9.1}$$

Funcţia vectorială (9.1) trebuie să îndeplinească anumite condiţii impuse de fenomenul mişcării şi anume: să fie *continuă* (drumul parcurs de punctul material nu poate prezenta întreruperi), *uniformă* (drumul parcurs nu se poate ramifica, punctul material neputând ocupa în acelaşi moment mai multe poziţii distincte în spaţiu), *finită în modul şi derivabilă*.

9.1.2 Traiectoria mişcării

Se numeşte *traiectorie, curba ce reprezintă locul geometric al poziţiilor succesive ale punctului în mişcare.* Aceasta poate fi o curbă plană sau o curbă oarecare din spaţiu.

Relaţiile matematice care permit determinarea poziţiei punctului în orice moment (t) ales arbitrar, în intervalul de timp în care are loc mişcarea, poartă numele de *ecuaţii parametrice ale mişcării*. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului M faţă de originea O a unui sistem de referinţă. În general, acest vector poate fi definit cu ajutorul a trei funcţii scalare depinzând de sistemul de referință. Eliminând timpul între ecuațiile parametrice, se obține expresia traiectoriei.

În general în aplicaţii, vrem să determinăm traiectoria, viteza şi acceleraţia în diferite sisteme de coordonate care vor fi prezentate în cele ce urmează.

9.1.2.1 Sistemul de coordonate carteziene

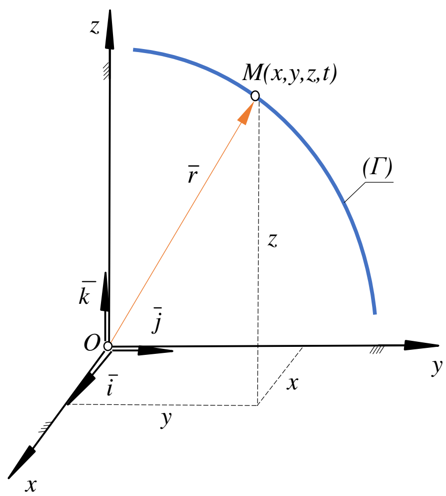


Fig. 9.1

În sistemul *Oxyz* de coordonate carteziene, presupus fix (fig. 9.1), cele trei funcţii scalare care definesc poziţia punctului *M* pe traiectoria *(Γ)* sunt coordonatele carteziene *x, y, z,* ale căror valori variază în funcţie de timp. Pentru a determina mişcarea punctului *M*, este necesară cunoaşterea *ecuaţiilor parametrice ale mişcării* acestuia:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (9.2)$$

În cazul în care mişcarea punctului *M* are loc în plan, alegând sistemul de referinţă *Oxy* plasat în planul mişcării, se obţin *ecuaţiile parametrice ale mişcării*:

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \qquad (9.3)$$

9.1.2.2 Sistemul de coordonate cilindrice

În sistemul de coordonate cilindrice (fig. 9.2) cele trei funcţii scalare care definesc poziţia punctului *M* pe traiectoria *(Γ)* sunt: raza polară *r*, unghiul polar θ şi cota *z*, date sub forma:

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t). \qquad (9.4)$$

Dacă mişcarea punctului material are loc în plan, se poate adopta un sistem de coordonate polare constituit din polul *O* şi axa polară *OΔ* (fig. 9.3). Poziţia punctului *M* pe traiectoria sa plană *(Γ)* este determinată prin coordonatele polare (r,θ). *Ecuaţiile parametrice ale mişcării* punctului *M* sunt:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t). \tag{9.5}$$

Referitor la traiectorie, relaţia (9.1) reprezintă *ecuaţia vectorială a traiectoriei*, iar relaţiile (9.2), (9.3), (9.4) şi (9.5) pot fi considerate ca *ecuaţii parametrice ale traiectoriei*, parametrul fiind timpul *t*.

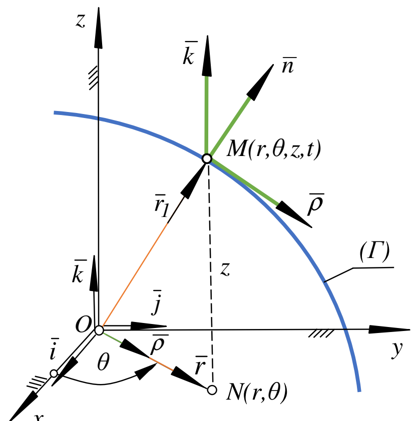


Fig. 9.2

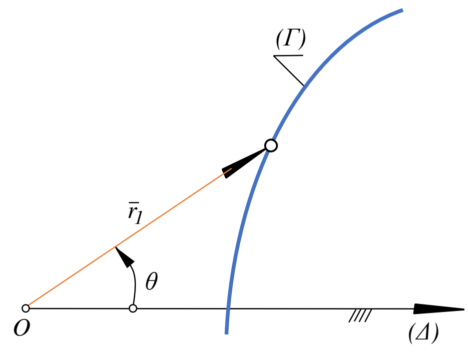


Fig. 9.3

Ecuaţiile curbei *(Γ)* sub formă explicită sau implicită se determină eliminând parametrul (*t*) din ecuaţiile parametrice.

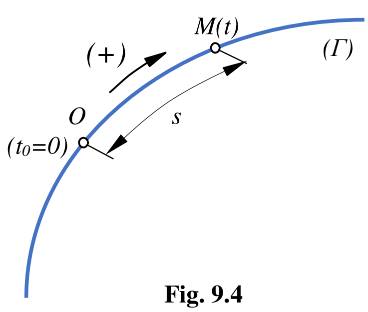


Fig. 9.4

9.1.2.3 Ecuaţia orară a mişcării

Dacă traiectoria punctului este o curbă continuă, spaţiul parcurs de acesta poate fi exprimat printr-o singură funcţie scalară de timp. Într-adevăr, alegând pe curba *(Γ)* un punct arbitrar *O* (fig. 9.4), punctul *M* este definit prin cunoaşterea arcului $s = OM$. Cum între arcul *s* şi poziţia punctului *M* trebuie să existe o corespondenţă biunivocă, este necesar să se stabilească pe traiectorie un sens pozitiv de măsurare a arcelor.

După alegerea acestui sens, spaţiul parcurs de punct va fi cunoscut dacă se cunoaşte legea de variaţie a arcului (s) în funcţie de timpul (*t*), adică:

$$s = s(t)\,. \tag{9.6}$$

Această funcţie se numeşte *ecuaţia orară a mişcării*.

9.1.3 Viteza

Se consideră un punct material M, aflat în mişcare pe traiectoria (Γ) (fig. 9.5). Mişcarea este înregistrată faţă de sistemul cartezian de referinţă fix $Oxyz$. Fie două poziţii M şi M_1 ale punctului mobil pe traiectoria (Γ) corespunzătoare momentelor (t) şi ($t+\Delta t$), notând cu (Δt) un interval de timp finit, dar foarte mic. Vectorii de poziţie în raport cu originea O a sistemului cartezian care definesc poziţiile M şi M_1 sunt $\bar{r}$ şi $\bar{r}+\Delta\bar{r}$, $\Delta\bar{r}$ reprezentând variaţia vectorului de poziţie $\bar{r}$ în intervalul de timp Δt.

Se numeşte *viteză medie* a punctului caracteristic M, corespunzătoare momentului (t) şi intervalului de timp Δt, expresia:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \qquad (9.7)$$

Suportul vitezei medii reprezintă o coardă MM_1 pentru curba (Γ). Limita către care tinde viteza medie atunci când intervalul de timp Δt tinde către zero se numeşte *viteză instantanee* a punctului mobil M, corespunzătoare momentului (t), ea având expresia:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \qquad (9.8)$$

Caracteristicile vectorului viteză instantanee $\bar{v}$ sunt următoarele:

- *punctul de aplicaţie:* al vectorului viteză instantanee este punctul M ;
- *suportul/direcția:* este tangenta construită în punctul M la traiectoria curbilinie (Γ);
- *sensul:* vectorului viteză instantanee coincide cu sensul de mişcare al punctului M pe traiectoria sa ;
- *modulul:* vectorului viteză instantanee se determină derivând în raport cu timpul ecuaţia orară a mişcării (9.6).

Pentru a demonstra aceasta se alege o origine O_1 a spaţiului pe traiectoria (Γ), notând cu (s) distanţa măsurată pe traiectorie de la originea O_1 până la poziţia pe care o ocupă punctul M la momentul (t).

Se notează cu $\bar{\tau}_1$ versorul vectorului viteză medie $\bar{v}_m$ şi cu $\bar{\tau}$ versorul vectorului viteză instantanee $\bar{v}$ astfel încât, se pot scrie relaţiile:

$$\bar{v} = v_m\bar{\tau}_1,\ \ \bar{v} = v\bar{\tau}. \qquad (9.9)$$

Relaţia (9.8) devine:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\bar{v} = v\bar{\tau} = \dot{s}\bar{\tau}, \tag{9.10}$$

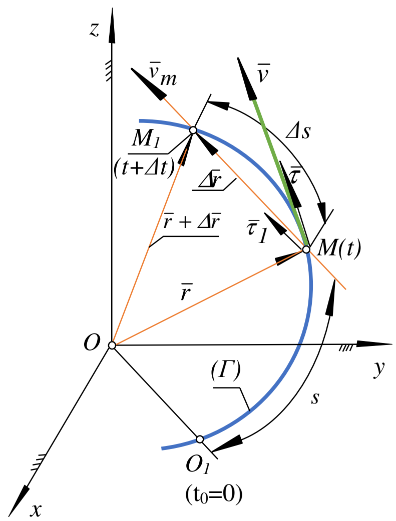


Fig. 9.5

astfel încât, modulul vitezei instantanee v devine:

$$v = \dot{s}. \tag{9.11}$$

Din relaţia (9.8) rezultă că, ***viteza instantanee*** $\bar{v}$ *a unui punct material este dată de derivata vectorială de ordinul întâi a funcţiei vectoriale de timp* $\bar{r} = \bar{r}(t)$ *în raport cu timpul*, iar din relaţia (9.10) rezultă că vectorul viteză instantanee este orientat după tangenta la traiectorie în sensul mişcării punctului, mărimea sa fiind dată de prima derivată în raport cu timpul a ecuaţiei orare a mişcării $s=s(t)$, conform cu relaţia (9.11).

Unitatea de măsură a vitezei în sistemul internaţional (SI) este *metrul/secundă* (m/s).

9.1.4 Acceleraţia

Fie un punct M aflat în mişcare pe traiectoria (Γ), (fig. 9.6). Punctul este surprins în poziţiile M şi M_1 la momentele (t) şi ($t+\Delta t$), având viteza instantanee $\overline{v}$ şi respectiv $\overline{v}+\Delta\overline{v}$. Se transpun vectorii $\overline{v}$ şi $\overline{v}+\Delta\overline{v}$ cu punctul de aplicaţie în originea O a sistemului cartezian de referinţă $Oxyz$ şi se trasează vectorul $\Delta\overline{v}$ ce reprezintă variaţia vectorială a vectorului viteză instantanee $\overline{v}$ în intervalul de timp (Δt).

Raportul dintre variaţia vectorului $\Delta\overline{v}$ a vitezei instantanee şi intervalul de timp Δt se numeşte *acceleraţia medie*:

$$\overline{a}_m = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} \quad . \tag{9.12}$$

Limita către care tinde acceleraţia medie atunci când intervalul de timp (Δt) tinde către zero, poartă numele de *acceleraţie instantanee* corespunzătoare momentului (t), ea având expresia:

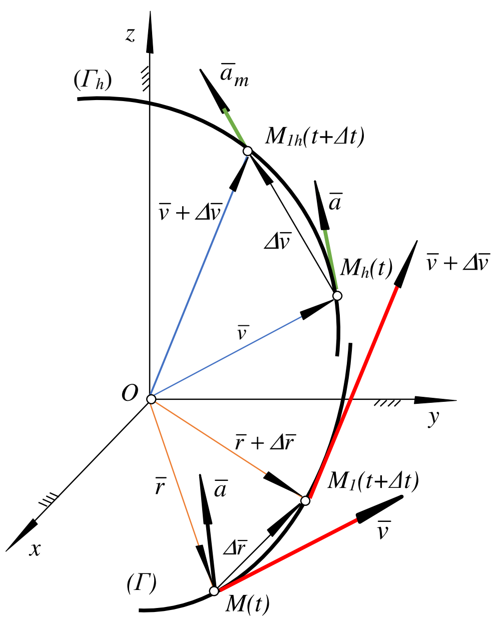


Fig. 9.6

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \dot{\overline{v}} \,. \tag{9.13}$$

Având în vedere relaţiile (9.8) şi (9.12), se poate scrie:

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} \quad . \tag{9.14}$$

Conform relaţiei (9.14), *acceleraţia instantanee în mişcarea curbilinie a unui punct material este egală cu derivata vectorială de ordinul întâi în raport cu timpul a vectorului viteză instantanee* sau cu derivata vectorială de ordinul doi în raport cu timpul a funcţiei vectoriale de timp $\overline{r} = \overline{r}(\,t\,)$.

Caracteristicile vectorului accelerație instantanee $\overline{a}$ sunt:

- *punctul de aplicaţie:* al vectorului acceleraţie instantanee este în punctul M ;
- *suportul* său/*direcția:* este conţinut în planul osculator al traiectoriei *(Γ)* dus în punctul M (plan definit de punctul M şi două puncte M' şi M'' plasate pe traiectoria *(Γ)*, infinit apropiate de punctul M);
- *sensul:* vectorului acceleraţie instantanee este dirijat în concavitatea traiectoriei *(Γ)* ;
- *modulul:* vectorului acceleraţie instantanee se va determina în paragrafele următoare cu ajutorul componentelor înregistrate faţă de diferite sisteme de referinţă.

Unitatea de măsură a acceleraţiei în sistemul internaţional (SI) este *metrul pe secundă la pătrat (m/s^2).*

9.1.5 Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate carteziene la mişcarea curbilinie

În figura 9.7 este reprezentat un punct M în mişcare pe o traiectorie curbilinie *(Γ)*, punct definit prin vectorul de poziţie $\overline{r}$ în raport cu originea O a sistemului cartezian de referinţă fix *Oxyz* şi având versorii axelor $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Cunoscând ecuaţiile parametrice ale traiectoriei înregistrate faţă de sistemul cartezian fix *Oxyz:* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, se vor determina componentele carteziene, modulele şi direcţiile vitezei şi acceleraţiei instantanee.

Întrucât,

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \tag{9.15}$$

din relaţia (9.8) rezultă viteza instantanee:

$$\overline{v} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k} \tag{9.16}$$

deoarece $\dot{\overline{i}} = \dot{\overline{j}} = \dot{\overline{k}} = 0$, sistemul *Oxyz* fiind fix.

Utilizând notaţiile din figura 9.7 şi având în vedere relaţia (9.16) rezultă *componentele carteziene ale vitezei instantanee:*

$$v_x = \dot{x}\ ,\ v_y = \dot{y}\ ,\ v_z = \dot{z}\ . \tag{9.17}$$

Modulul şi direcţia vectorului viteză instantanee, având în vedere relaţia (9.17) şi figura 9.7, sunt date de relațiile (9.18-9.19):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ , \tag{9.18}$$

$$\cos\alpha_1 = v_x/v\ ,\quad \cos\beta_1 = v_y/v\ ,\quad \cos\gamma_1 = v_z/v\ . \tag{9.19}$$

Acceleraţia instantanee $\bar{a}$, conform relaţiilor (9.14) şi (9.16), are expresia:

$$\bar{a} = \ddot{x}\,\bar{i} + \ddot{y}\,\bar{j} + \ddot{z}\,\bar{k}\quad . \tag{9.20}$$

Utilizând notaţiile din figura 9.7 şi relaţia (9.20), rezultă *componentele carteziene ale acceleraţiei instantanee:*

$$a_x = \ddot{x}\ ,\quad a_y = \ddot{y}\ ,\quad a_z = \ddot{z}\quad . \tag{9.21}$$

Modulul şi direcţia acceleraţiei instantanee $\bar{a}$, având în vedere relaţiile (9.21) şi figura 9.7, sunt date de expresiile:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\quad , \tag{9.22}$$

$$\cos\alpha_2 = a_x/a\ ,\qquad \cos\beta_2 = a_y/a\ ,\qquad \cos\gamma_2 = a_z/a\ . \tag{9.23}$$

În relaţiile (9.19) şi (9.23) s-au notat prin $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,$ respectiv, $\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,$ unghiurile pe care vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ le formează cu axele sistemului cartezian de referinţă fix, *Oxyz*.

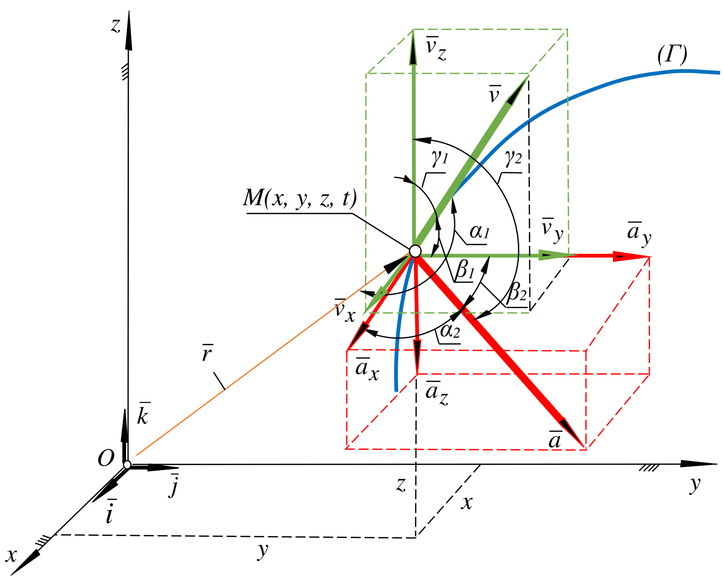


Fig. 9.7

9.1.6 Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate polare la mişcarea curbilinie

Sistemul de coordonate polare este un sistem plan, astfel că poate fi utilizat numai pentru un punct material care are o traiectorie plană.

Fie un punct mobil *M* care descrie curba *(Γ)* în planul fix *(π)*. Se consideră sistemul cartezian mobil *Mρn* având originea plasată în punctul mobil *M*. Axa polară *OM* pivotează în planul *(π)*, în jurul polului fix *O*, iar axa normală *Mn* este perpendiculară în *M* pe *OM*. Coordonatele polare ale punctului sunt *r* şi *θ* (fig. 9.8). Cunoscând ecuaţiile polare date de: $r = r(t)$; $\theta = \theta(t)$, se vor determina componentele, modulele şi direcţiile vectorilor viteză şi acceleraţie instantanee.

Notând cu $\overline{\rho}$ şi $\overline{n}$ versorii axelor reperului cartezian mobil *Mρn*, vectorul de poziţie $\overline{r}$ ce defineşte punctul *M* în raport cu polul fix *O* are expresia:

$$\overline{r} = r\,\overline{\rho}\ .$$

Se observă că, în timpul mişcării versorii $\overline{\rho}$ şi $\overline{n}$ îşi schimbă direcţia deoarece unghiul θ este variabil. Din această cauză, spre deosebire de versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ai axelor sistemului cartezian fix, derivatele în raport cu timpul ale versorilor $\overline{\rho}$ şi $\overline{n}$ sunt în general, diferite de zero. Pentru a calcula aceste derivate se exprimă $\overline{\rho}$ şi $\overline{n}$ în funcţie de proiecţiile lor pe axele fixe *Ox*, *Oy* şi de versorii $\overline{i}$ şi $\overline{j}$ (fig. 9.8).

$$\overline{\rho} = \cos\theta\ \overline{i} + \sin\theta\ \overline{j}\ , \quad \overline{n} = -\sin\theta\ \overline{i} + \cos\theta\ \overline{j}\ . \tag{9.24}$$

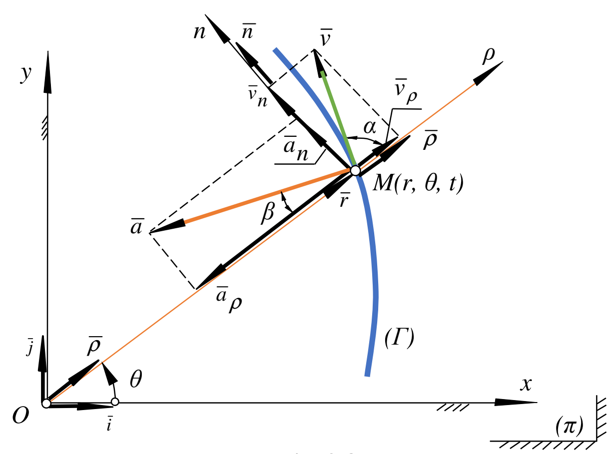


Fig. 9.8

Derivând relaţiile (9.24) în raport cu timpul şi având în vedere că $\dot{\bar{i}} = \dot{\bar{j}} = 0$, rezultă:

$$\dot{\bar{\rho}} = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\bar{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\bar{j} = \dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}) = \dot{\theta}\,\bar{n}\ , \tag{9.25}$$

$$\dot{\bar{n}} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\bar{i} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\bar{j} = -\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j}) = -\dot{\theta}\,\bar{\rho}\ . \tag{9.26}$$

Viteza se obţine prin derivare în raport cu timpul a vectorului de poziţie $\bar{r}$ şi ţinând seama de relaţia (9.25):

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\,\bar{\rho} + r\,\dot{\bar{\rho}} = \dot{r}\,\bar{\rho} + r\,\dot{\theta}\,\bar{n}\ . \tag{9.27}$$

Utilizând notaţiile din figura 9.8, se poate scrie:

$$\bar{v} = v_\rho\bar{\rho} + v_n\bar{n}\ . \tag{9.28}$$

Din relaţiile (9.27) şi (9.28) rezultă *componentele polare ale vitezei instantanee:*

$$v_\rho = \dot{r}\ , \quad v_n = r\,\dot{\theta}\ . \tag{9.29}$$

Modulul şi direcţia vitezei instantanee se obţin utilizând relaţiile (9.29) şi figura 9.8. Astfel,

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}, \quad tg\,\alpha = \frac{r\,\dot{\theta}}{\dot{r}}\ . \tag{9.30}$$

Acceleraţia instantanee se obţine derivând în raport cu timpul expresia (9.27) a vitezei. Astfel,

$$\bar{a} = \ddot{r}\,\bar{\rho} + \dot{r}\,\dot{\bar{\rho}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\bar{n} + r\,\ddot{\theta}\bar{n} + r\,\dot{\theta}\dot{\bar{n}}\ . \tag{9.31}$$

Înlocuind în relaţia (9.31) pe $\dot{\bar{\rho}}$ şi $\dot{\bar{n}}$ cu expresiile (9.25) şi (9.26), se obţine:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\bar{n}\ . \tag{9.32}$$

Utilizând notaţiile din figura 9.8, se poate scrie:

$$\bar{a} = a_\rho\,\bar{\rho} + a_n\,\bar{n}\ . \tag{9.33}$$

Din relaţiile (9.32) şi (9.33) rezultă *componentele polare ale acceleraţiei instantanee:*

$$a_\rho = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2, \quad a_n = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\ . \tag{9.34}$$

Modulul şi direcţia acceleraţiei instantanee se obţin utilizând relaţiile (9.34) şi figura 9.8. Astfel,

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})^2}\ , \quad tg\,\beta = \frac{r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}{\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2}. \tag{9.35}$$

9.1.7 Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee în coordonate cilindrice în mişcarea curbilinie

În sistemul de coordonate cilindrice (fig. 9.9) vectorul de poziţie $\overline{r_1}$ al punctului M în raport cu polul O este definit de coordonatele polare r şi θ în planul xOy precum şi de cota z.

Pentru a cunoaşte mişcarea punctului M trebuie cunoscute funcţiile de timp:

$$r = r(t),\ \theta = \theta(t),\ z = z(t). \tag{9.36}$$

Având în vedere (9.16), (9.21), (9.29) şi (9.34), se pot preciza *componentele cilindrice ale vitezei şi acceleraţiei instantanee* la mişcarea curbilinie. Astfel,

$$\begin{aligned} &v_\rho = \dot{r}\ , \qquad v_n = r\dot{\theta}\ , \qquad v_z = \dot{z}\ , \\ &a_\rho = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\ , \quad a_n = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\ , \quad a_z = \ddot{z}\ . \end{aligned} \tag{9.37}$$

În conformitate cu figura 9.9 şi relaţiile (9.37), *modulele şi direcţiile vectorilor* $\overline{v}$ *şi* $\overline{a}$ se pot determina după cum urmează:

$$\begin{gathered} v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}\ ,\ \cos(\widehat{\overline{v},\overline{\rho}}) = \frac{\dot{r}}{v}\ ,\ \cos(\widehat{\overline{v},\overline{n}}) = \frac{r\dot{\theta}}{v}\ ,\ \cos(\widehat{\overline{v},\overline{k}}) = \frac{\dot{z}}{v}\ , \\ a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}\ , \end{gathered} \tag{9.38}$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{\rho}}\right) = \frac{\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2}{a}\ ,\ \cos(\widehat{\overline{a},\overline{n}}) = \frac{r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}{a}\ ,\ \cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \frac{\ddot{z}}{a}\ .$$

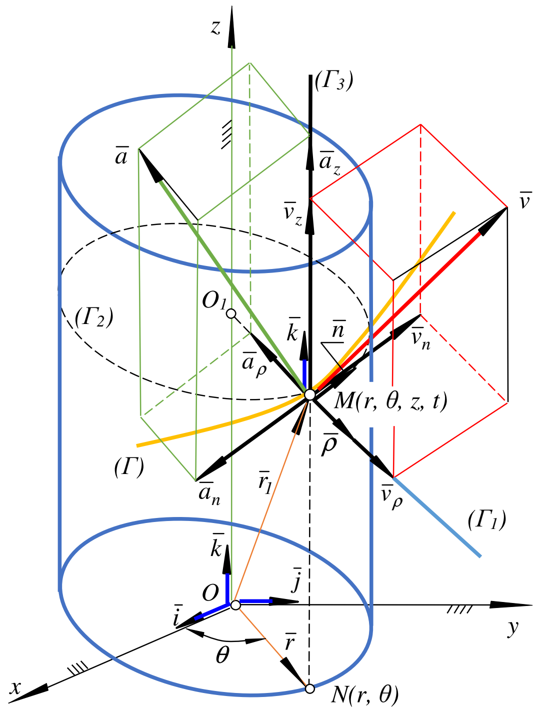


Fig. 9.9

9.1.8 Componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee pe axele triedrului Frenét la mişcarea curbilinie

Se consideră un punct *M* în mişcare în spaţiul tridimensional, pe traiectoria curbilinie *(Γ)*. În figura 9.10 pe lângă sistemul de referinţă cartezian fix *Oxyz*, s-a adoptat şi un sistem mobil *MTNB,* având originea plasată permanent în punctul mobil *M*. Sistemul mobil *MTNB* denumit *triedrul intrinsec de referinţă al lui Frenét,* are următoarele axe:

- *tangenta MT la curbă* orientată pozitiv în sensul de creştere al arcului *s* al cărei versor se notează cu $\bar{\tau}$;
- *normala principală MN*, adică normala din planul osculator al curbei orientată pozitiv spre centrul de curbură *K,* al cărei versor se notează cu $\bar{\vartheta}$;

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

- *binormala MB*, adică normala pe planul format de versorii $\overline{\tau}$ şi $\overline{\vartheta}$ (planul osculator), al cărei versor se notează cu $\overline{\beta}$ şi se alege astfel încât, versorii $\overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta}$ luaţi în această ordine, să formeze un triedru drept orientat.

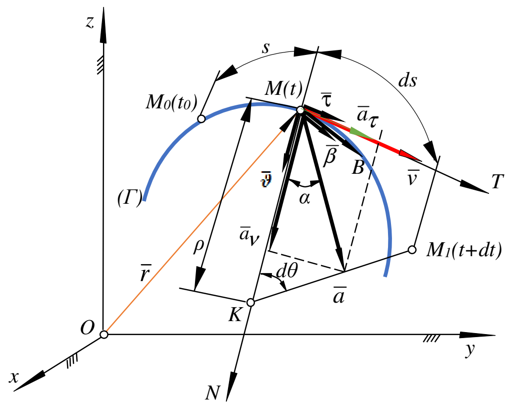


Fig. 9.10

Din modul cum a fost definit sistemul intrinsec al lui Frenét, rezultă că vectorul viteză instantanee $\overline{v}$ al punctului *M* are permanent ca suport axa tangentă *MT* şi acelaşi sens cu această axă.

Componentele intrinseci ale vitezei $\overline{v}$ pe axele sistemului mobil *MTNB*, având în vedere figura 9.10, au expresiile:

$$v_\tau = v = \dot{s}\ ,\ \ v_\nu = 0\ ,\ \ v_\beta = 0\ . \tag{9.39}$$

Rezultă că *modulul vitezei* se determină derivând în raport cu timpul ecuaţia orară a mişcării *s = s(t)*, fapt cunoscut de la definirea vitezei la mişcarea curbilinie a punctului material.

Derivând în raport cu timpul expresia $\overline{v} = v\overline{\tau} = \dot{s}\overline{\tau}$, se va obţine acceleraţia punctului *M* astfel:

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}\,\overline{\tau} + v\,\dot{\overline{\tau}}\ . \tag{9.40}$$

Dar,

$$\dot{\overline{\tau}} = |\,\dot{\overline{\tau}}\,|\,\overline{\nu} = \dot{\theta}\,\overline{\nu}, \tag{9.41}$$

întrucât derivata în raport cu un scalar a unui vector de modul constant şi direcţie variabilă este egală cu un vector normal pe vectorul dat şi luat în sensul rotirii lui, având modulul egal cu produsul dintre modulul vectorului şi derivata unghiului de rotaţie în raport cu parametrul scalar:

$$|\dot{\overline{\tau}}|=|\overline{\tau}|\,\dot{\theta}=\dot{\theta}\,. \qquad (9.42)$$

Din figura 9.10 rezultă:

$$ds=\rho\, d\theta\,, \quad \frac{ds}{dt}=\rho\frac{d\theta}{dt}\,, \quad \dot{s}=\rho\dot{\theta}\,, \quad \dot{\theta}=\frac{1}{\rho}\dot{s}=\frac{1}{\rho}v\,. \qquad (9.43)$$

Relaţia (9.40), având în vedere (9.41) şi (9.43), devine:

$$\overline{a}=\dot{v}\,\overline{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\overline{\nu}\,. \qquad (9.44)$$

Pe de altă parte, se poate scrie conform figurii:

$$\overline{a}=a_\tau\overline{\tau}+a_\nu\overline{\nu}+a_\beta\overline{\beta}\,. \qquad (9.45)$$

Din relaţiile (9.44) şi (9.45) se obţin *componentele intrinseci ale acceleraţiei instantanee,*

$$a_\tau=\dot{v}\,, \quad a_\nu=\frac{v^2}{\rho}\,, \quad a_\beta=0. \qquad (9.46)$$

Întrucât $a_\beta=0,$ rezultă că ***vectorul acceleraţie este conţinut în planul osculator al traiectoriei (Γ) corespunzător punctului M fiind dirijat în concavitatea curbei*** (fig. 9.10).

Modulul şi direcţia acceleraţiei având în vedere expresiile (9.46) şi figura 9.10, se determină cu relaţiile:

$$a=\sqrt{\dot{v}^2+\frac{v^4}{\rho^2}}\,, \quad tg\,\alpha=\frac{\rho\dot{v}}{v^2}\,. \qquad (9.47)$$

Raza de curbură a traiectoriei (Γ) se poate deduce din prima relaţie (9.47).

Componenta $\overline{a}_\tau$ a acceleraţiei se numeşte *acceleraţie tangenţială* şi aceasta poate fi pozitivă sau negativă după cum derivata $\dot{v}$ a vitezei este cu semnul “+” sau “-”.

Componenta $\overline{a}_\nu$ a acceleraţiei se numeşte *acceleraţie normală* şi este întotdeauna centripetă. În cazul particular în care, componenta $\overline{a}_\tau$ este egală cu zero, mişcarea punctului pe curba *(Γ)* este uniformă, modulul vitezei $\overline{v}$ rămânând constant în timpul mişcării.

De remarcat că, în cazul unei mişcări curbilinii ($\frac{1}{\rho} \neq 0$), iar acceleraţia $\overline{a}$ nu este nulă, deoarece:

$$a_{\nu} = \frac{v^2}{\rho} \neq 0 . \tag{9.48}$$

Aceasta se explică prin faptul că *acceleraţia normală* $\overline{a}_{\nu}$ *se datorează variaţiei direcţiei vitezei şi nu variaţiei modulului acesteia*, ca şi în cazul acceleraţiei tangenţiale.

Dacă $\overline{a}_{\nu} = 0,$ ***mişcarea este rectilinie***.

Singura mişcare în care acceleraţia punctului este nulă, este mişcarea rectilinie şi uniformă (pentru $\overline{a}_{\nu} = 0,$ se obţine $1/\rho = 0$ deci mişcarea este rectilinie; pentru $\overline{a}_{\tau} = 0$ se obţine v = const., deci mişcarea este uniformă).

9.1.9 Viteza şi acceleraţia areolară

Fie un punct material M în mişcare pe traiectoria plană (Γ) (fig. 9.11), surprins în poziţiile M_1 la momentul (t), respectiv M_2 la momentul $t+\Delta t$. Mişcarea punctului este înregistrată faţă de un sistem de referinţă cartezian fix $Oxyz$, ea având loc în planul fix Oxy. Vectorii de poziţie în raport cu originea O ai punctelor M_1 şi M_2 sunt $\overline{r}$ şi $\overline{r} + \Delta\overline{r}$. Aria suprafeţei OM_1M_2 poate fi aproximată ca fiind egală cu aria triunghiului OM_1M_2 , dacă intervalul de timp Δt este foarte mic.

Mărimea orientată $\frac{1}{2}\overline{r} \times \Delta\overline{r}$ este egală ca modul cu aria triunghiului OM_1M_2 şi se numeşte *arie orientată* a triunghiului. *Limita către care tinde raportul dintre aria orientată considerată şi intervalul de timp Δt, când acest interval de timp tinde către zero, poartă denumirea de **viteză areolară***.

Se notează:

$$\overline{\Omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{\overline{r} \times \Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \overline{r} \times \overline{v} . \tag{9.49}$$

Viteza areolară este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\overline{r}$ şi $\overline{v}$ (planul traiectoriei), având modulul:

$$\Omega = \frac{1}{2} |\overline{r}||\overline{v}| sin(\widehat{\overline{r}\overline{v}}) = \frac{1}{2} r v_n = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} . \tag{9.50}$$

Viteza areolară este o mărime care se măsoară în sistemul internaţional de măsură (SI) în *metru la pătrat pe secundă [m²/s].*

Derivata în raport cu timpul a vitezei areolare se numeşte ***acceleraţie areolară*** şi are expresia:

$$\overline{W} = \dot{\overline{\Omega}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{r}\times\overline{v}\right) = \frac{1}{2}\overline{r}\times\overline{a} \quad . \tag{9.51}$$

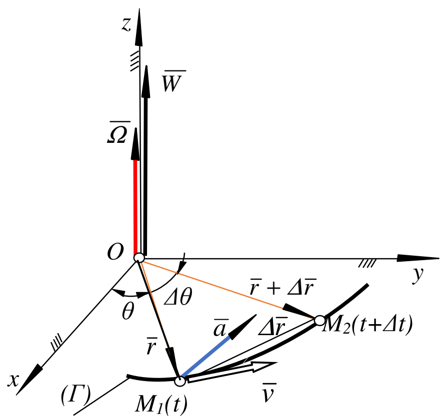


Fig. 9.11

Acceleraţia areolară este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\overline{r}$ şi $\overline{a}$ (planul traiectoriei), având modulul:

$$W = \frac{1}{2}|\overline{r}||\overline{a}|sin(\widehat{\overline{r}\overline{a}}) = \frac{1}{2}ra_n = \frac{1}{2}r\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right). \tag{9.52}$$

Unitatea de măsură a acceleraţiei areolare în sistemul de măsură internaţional (SI) este *metrul pătrat pe secundă la pătrat [m²/s²].*

9.1.10 Mişcarea circulară

Fie un punct material *M* în mişcare pe o traiectorie circulară cu centrul în *O* şi rază *R*. La momentul $t_0 = 0$ mobilul se găseşte în poziţia M_0 pe axa *Ox*. După timpul (*t*) mobilul se găseşte în poziţia *M* definită de unghiul $\theta = \sphericalangle M_0OM$. Mişcarea punctului *M* pe traiectoria *(Γ)* este descrisă de ecuaţia:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\theta = \theta(t)\,. \tag{9.53}$$

Relația (9.53) exprimă legea de variaţie în funcţie de timp a unghiului de rotaţie θ , a razei OM. La momentul (t + Δt) punctul se găseşte în poziţia M_1, unghiul măturat de raza OM în intervalul de timp (Δt) fiind $\Delta\theta = \sphericalangle MOM_1$ (fig. 9.12).

Se numeşte ***viteză unghiulară medie*** raportul:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,. \tag{9.54}$$

Trecând la limită şi făcând pe Δt să tindă către zero, se obţine ***viteza unghiulară instantanee***:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{9.55}$$

Fie ω şi $\omega + \Delta\omega$ valorile vitezei unghiulare la momentele (t) şi ($t + \Delta t$) (fig. 9.12), notând prin $\Delta\omega$ variaţia pe care o are viteza unghiulară ω în intervalul de timp Δt.

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{9.56}$$

Raportul poartă numele de ***accelerație unghiulară medie*** corespunzătoare momentului (t) şi intervalului de timp Δt. Trecând la limită şi făcând pe Δt să tindă către zero, se obţine ***accelerația unghiulară instantanee,***

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}\ . \tag{9.57}$$

Din relaţiile (9.55) şi (9.57) rezultă:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}. \tag{9.58}$$

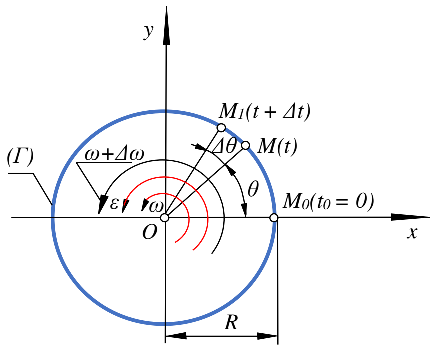


Fig. 9.12

Cunoscând legea de mişcare (9.53) a punctului *M* pe traiectoria circulară *(Γ),* cu ajutorul relaţiei (9.58) se va determina în orice moment $0 \leq t \leq t_1$ valorile vitezei unghiulare şi a acceleraţiei unghiulare instantanee.

Unităţile de măsură ale vitezei şi acceleraţiei unghiulare în sistemul internaţional de măsură (SI) sunt *radian pe secundă [rad/s]* sau *[1/s]* şi *radian pe secundă la pătrat [rad/s²]* sau *[1/s²]*.

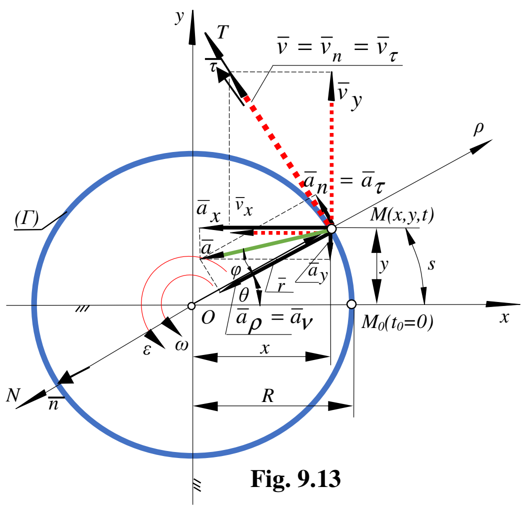


Fig. 9.13

În figura 9.13 a fost reprezentat un punct material *M* în mişcare pe traiectoria circulară *(Γ),* de rază *R* şi trei sisteme de referinţă: sistemul de referinţă cartezian fix *Oxy*, sistemul mobil *Mρn* şi sistemul mobil *MTN*. Fie *ω* şi *ε,* respectiv, viteza şi acceleraţia unghiulară corespunzătoare mişcării variate a punctului *M* pe traiectoria *(Γ).* Se pune problema să se găsească expresiile componentelor vitezei $\bar{v}$ şi acceleraţiei $\bar{a}$ ale punctului *M* pe axele celor trei sisteme de referinţă.

Utilizând notaţiile din figura 9.13, ecuaţiile carteziene ale traiectoriei sunt:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta\,. \tag{9.59}$$

Expresiile *componentelor carteziene ale vitezei şi acceleraţiei instantanee* ale punctului *M pe axele sistemului cartezian de referinţă fix Oxy*, conform cu (9.17), (9.21), au forma:

$$v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -\omega\, y,$$
$$v_y = \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = \omega\, x, \tag{9.60}$$
$$a_x = \ddot{x} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta = -\varepsilon\, y - \omega^2 x,$$
$$a_y = \ddot{y} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta = \varepsilon\, x - \omega^2 y. \tag{9.61}$$

Modulele vectorilor viteză şi acceleraţie, având în vedere (9.60) şi (9.61), au expresiile:

$$v = \omega R, \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,. \tag{9.62}$$

În acelaşi mod, folosind relaţiile (9.29) şi (9.34) şi ţinând seama de relaţiile (9.55) şi (9.57), se obţin expresiile componentelor vitezei şi acceleraţiei instantanee ale punctului *M* pe axele sistemului de referinţă *Mρn*.

$$v_\rho = 0, \quad v_n = v = \omega R\,, \tag{9.63}$$
$$a_\rho = -\omega^2 R\,, \qquad a_n = \varepsilon R. \tag{9.64}$$

Modulele vectorilor viteză şi acceleraţie, conform cu (9.63) şi (9.64), au expresiile:

$$v = \omega R\,, \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,. \tag{9.65}$$

Utilizând ecuaţia orară a mişcării $s = R\cdot\theta$, se obţin cu ajutorul relaţiilor (9.39) şi (9.46), expresiile componentelor vitezei şi acceleraţiei în sistemul intrinsec *MTN* astfel:

$$v_\tau = \dot{s} = R\dot{\theta} = \omega R\,, \qquad v_\nu = 0\,, \quad v_\beta = 0\,, \tag{9.66}$$

$$a_\tau = \dot{v} = R\ddot{\theta} = \varepsilon R\,, \qquad a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R\,, \qquad a_\beta = 0. \tag{9.67}$$

Expresiile modulele vectorilor viteză şi acceleraţie instantanee, precum şi direcţia acesteia, se obţin utilizând relaţiile (9.66) şi (9.67):

$$v = \omega R, \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad tg\theta = \frac{a_\tau}{a_\vartheta} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad . \tag{9.68}$$

Analizând relaţiile (9.62), (9.65) şi (9.68), se constată că indiferent de sistemul de referinţă la care este raportată mişcarea, mărimile vectorilor viteză şi acceleraţie în cazul mişcării circulare a punctului material sunt aceleaşi.

9.1.11 Mişcări particulare ale punctului

9.1.11.1 Mişcarea rectilinie

9.1.11.1.1 Mişcarea rectilinie şi uniformă

*Mişcarea unui punct material este **rectilinie şi uniformă** dacă punctul se deplasează pe o linie dreaptă astfel încât, valoarea vitezei să rămână constantă în timp.* Utilizând notaţiile din figurile 9.13 şi 9.14 şi ţinând seama că $\dot{s} = v = v_0$, se pot scrie relaţiile ce reprezintă legile de variaţie ale spaţiului, vitezei şi acceleraţiei în funcţie de timp:

$$s = v_0 t + s_0 , \quad v = v_0 = const ., \quad a = a_0 = 0 . \tag{9.69}$$

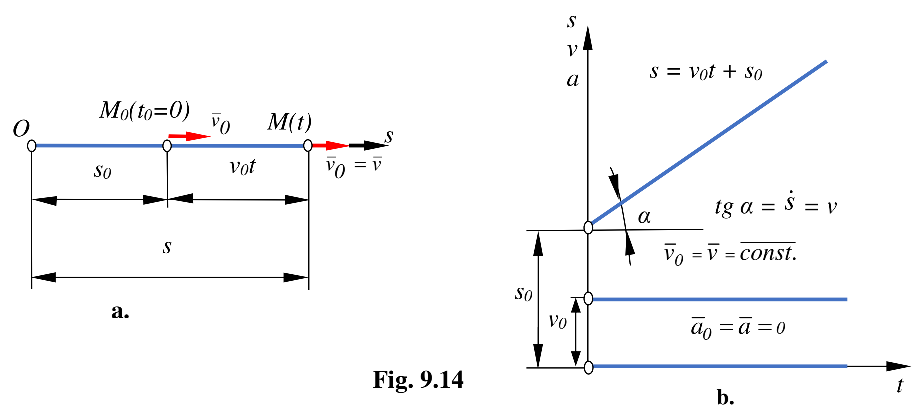


Fig. 9.14

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

În figura 9.14 au fost trasate curbele de variaţie ale spaţiului, vitezei şi acceleraţiei în funcţie de timp. Pentru a trece de la mişcarea curbilinie la mişcarea rectilinie a punctului, raza de curbură ρ a traiectoriei trebuie să aibă valoarea infinit de mare.

9.1.11.1.2 Mişcarea rectilinie şi uniform variată

Un punct material are o ***mişcare rectilinie uniform variată*** *dacă se deplasează pe o dreaptă astfel încât valoarea acceleraţiei sale să rămână constantă în timp.*

Utilizând notaţiile din figura 9.15 şi ţinând seama că $\ddot{s} = a = a_0$, se scriu relaţiile ce reprezintă legile de variaţie ale spaţiului, vitezei şi acceleraţiei în funcţie de timp:

$$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0, \qquad v = a_0 t + v_0, \qquad a = a_0 = const. \tag{9.70}$$

Alegând un sistem de referinţă şi având variabila (t) pe abscisă, respectiv pe ordonată funcţiile s, $\overline{v}$ şi $\overline{a}$ şi reprezentând grafic aceste funcţii, se obţin diagramele mişcării (fig. 9.16).

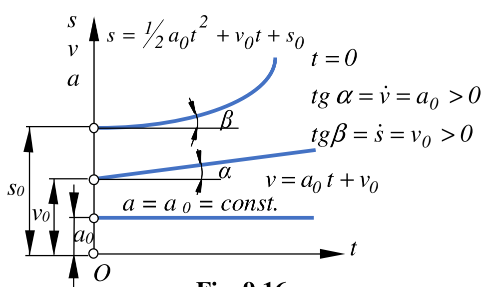


Fig. 9.16

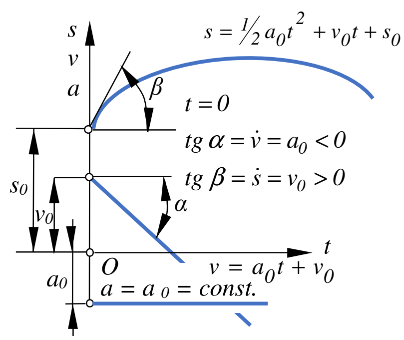


Fig. 9.17

Mişcările uniform variate pot fi *accelerate* sau *întârziate*.

O mişcare uniform variată este accelerată dacă mărimile vitezei şi acceleraţiei au acelaşi semn. În cazul în care semnele sunt diferite, mişcarea se numeşte uniform încetinită.

Diagramele mişcării pentru cele două cazuri ($a_0 > 0,\ \dot{s} > 0$), respectiv, ($a_0 < 0,\ \dot{s} > 0$), sunt reprezentate în figura 9.16 şi figura 9.17.

9.1.11.1.3 Mişcarea oscilatorie armonică

În natură precum şi în tehnică, sunt procese fizice/mecanice care se repetă în timp, iar acestea au la bază oscilaţiile de diferite feluri.

Factorii care determină mişcarea oscilatorie sunt:

- Existenţa unei poziţii de echilibru;
- Mişcarea se efectuează în ambele sensuri în jurul poziţiei de echilibru;
- Traiectoria mişcării are două extreme în aceste poziţii, viteza trecând prin zero la schimbarea sensului.

Ținând cont de cele explicate anterior, se poate defini acest tip de mişcare şi anume: Mişcarea unui corp care se repetă la intervale egale de timp şi se execută simetric faţă de poziţia de echilibru, se numeşte *mişcare oscilatorie armonică.*

La mişcarea oscilatorie armonică se pot preciza următoarele:

- *legea de mişcare*:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \quad (A, \omega, \varphi) \text{ - constante} \tag{9.71}$$

- *viteza instantanee*:

$$v = \dot{x} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi), \tag{9.72}$$

- *acceleraţia instantanee*:

$$a = \ddot{x} = -A\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \ , \tag{9.73}$$

- perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{9.74}$$

- frecvenţa:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{9.75}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

9.2 Probleme rezolvate [9]

9.2.1. Un punct descrie o cicloidă cu viteza constantă ca mărime (*c*) (fig. 9.18). Să se arate că proiecţia acestui punct pe axa *y* se mişcă cu o acceleraţie constantă, după ce s-au dedus în prealabil ecuaţiile parametrice ale cicloidei.

Problema inversă: Un punct se mişcă pe o curbă cu viteza (*c*) constantă ca mărime. Proiecţia punctului pe o dreaptă oarecare pe care o intersectează şi se află în planul curbei, are acceleraţia constantă $\overline{a}$. Să se afle ecuaţia curbei.

Soluţie:

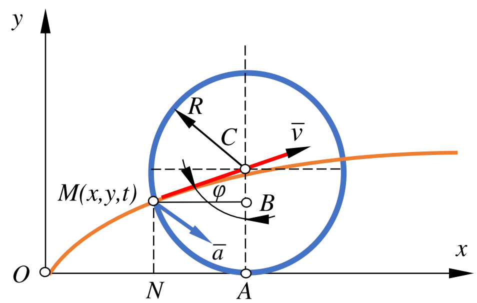


Fig. 9.18

Se determină coordonatele punctului *M,* care constituie ecuaţiile parametrice ale cicloidei (fig. 9.18). Astfel,

$$x = OA\text{-}NA = R\,\varphi\text{-}R\sin\varphi = R\,(\varphi\text{-}\sin\varphi)$$

$$y = AC\text{-}BC = R\text{-}R\cos\varphi = R\,(1\text{-}\cos\varphi)\ . \tag{1}$$

Derivând relaţiile (1) în raport cu timpul, rezultă:

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi),$$
$$\dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi\,. \tag{2}$$

Derivând relaţia lui $\dot{y}$ în raport cu timpul, se obţine:

$$\ddot{y} = R\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\,\varphi). \tag{3}$$

Expresia lui $\dot{\varphi}$ se obţine din condiţia: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c$, respectiv:

$$R\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)^2 + R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\dot{\varphi} = c^2.$$

Rezultă astfel:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{2R^2(1-\cos\varphi)}\,. \tag{4}$$

Derivând relaţia (4) în raport cu timpul, se obţine valoarea lui $\ddot{\varphi}$:

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{c^2\dot{\varphi}\ \ sin\varphi}{2R^2(1-\cos\varphi)^2}, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{c^2\sin\varphi}{4R^2(1-\cos\varphi)^2}\,. \tag{5}$$

Se introduc relaţiile (4) şi (5) în (3) şi se obţine:

$$\ddot{y} = -\frac{c^2}{2R}. \tag{6}$$

Problema inversă: Se ia dreapta dată în enunţ ca axă *Ox*, iar punctul ei de intersecţie cu curba drept origine a axelor rectangulare, axa *Oy* luându-se tangenta în origine la curbă ($\frac{dy}{dx} \to \infty$). Sistemul de axe astfel ales conduce la:

$$\ddot{x} = a, \tag{7}$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = c^2, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = c^2,$$

unde:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}\ , \quad \frac{dy}{dx} = y'\ ,$$

$$\dot{x}^2 = \frac{c^2}{1+y'^2}\,. \tag{8}$$

(7)

Derivând relaţia (8) în raport cu timpul, rezultă:

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{2c^2y'y''\dot{x}}{(1+y'^2)^2}, \qquad \ddot{x} = -\frac{y'y''c^2}{(1+y'^2)^2}. \tag{9}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Comparând relaţiile (9) cu (7), se obţine:

$$a = -\frac{y' y'' c^2}{(1 + y'^2)^2}. \qquad (10)$$

Integrând relaţia (10), rezultă:

$$\frac{c^2}{2\,(1 + y'^2)} = a\,x + C_1.$$

Pentru $x_0 = 0$, $y' \to \infty$, se va obţine $C_1 = 0$, astfel că:

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{2\,a\,x} - 1}, \quad dy = \sqrt{\frac{c^2}{2\,a\,x} - 1}\; dx. \qquad (11)$$

Se notează:

$$\frac{c^2}{2\,a\,x} - 1 = r^2. \qquad (12)$$

Din relaţia (12) se obţine:

$$x = \frac{c^2}{2\,a\,(r^2 + 1)}, \qquad (13)$$

care prin diferenţiere conduce la:

$$dx = -\frac{c^2 r\,dr}{a\,(r^2 + 1)^2}. \qquad (14)$$

Introducând relaţia (13) şi (14) în (11), rezultă:

$$dy = \sqrt{\frac{c^2}{2a\frac{c^2}{2\,a\,(r^2+1)}} - 1}\left[-\frac{c^2}{a^2}\,\frac{r\,dr}{\left(r^2+1\right)^2}\right] = -\frac{c^2}{a}\,\frac{r^2 dr}{\left(r^2+1\right)^2}.$$

Prin integrare se obţine:

$$y = \int -\frac{c^2}{a}\frac{r^2+1-1}{(r^2+1)^2}dr = -\frac{c^2}{a}\int\frac{1}{r^2+1}dr + \frac{c^2}{a}\int\frac{1}{(r^2+1)^2}dr$$

Dar,

$$\int \frac{1}{r^2+1}dr = arctg\ r\ , \qquad \int \frac{1}{(r^2+1)^2}dr = \frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2}arctg\ r\ ,$$

astfel că

$$y = \frac{c^2}{2a}\left(\frac{r}{r^2+1} - arctg\ r\right) + C_2\ . \tag{15}$$

Înlocuind relaţia (12) în (15), se obţine:

$$y = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{2ac^2x - 4a^2x^2} - c^2 arctg\sqrt{\frac{c^2}{2ax} - 1}\right) + C_2\ .$$

Pentru $x = 0$ şi $y = 0$, rezultă:

$$C_2 = \frac{\pi c^2}{4a},$$

astfel că *y* devine:

$$y = \frac{1}{2a}\left[\sqrt{2ac^2x - 4a^2x^2} + c^2\left(-arctg\sqrt{\frac{c^2}{2ax} - 1} + \frac{\pi}{2}\right)\right]\ . \tag{16}$$

Notând:

$$arctg\sqrt{\frac{c^2}{2ax} - 1} = \alpha\ ,$$

după o serie de transformări, relaţia (16) este:

$$y = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{2ac^2x - 4a^2x^2} + c^2 arctg\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{2ax} - 1}}\right). \tag{17}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Notând, în continuare, $arctg\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{2ax}-1}}=\beta$ şi efectuând unele transformări trigonometrice, relaţia (17) ajunge la forma:

$$y=\sqrt{x(2R-x)}+2R\arccos\sqrt{1-\frac{x}{2R}}\ , \qquad (18)$$

în care $\frac{c^2}{2a}=2R$.

astfel că

$$2\arccos\sqrt{1-\frac{x}{2R}}=\arccos\left(1-\frac{x}{R}\right),$$

$$y=\sqrt{x\ (2R-x)}+R\arccos\frac{R-x}{R}. \qquad (19)$$

Curba căutată este cicloida dată de relaţia (19). Cercul generator având raza $R=\frac{c^2}{4a}$, se rostogoleşte pe dreapta $x=2R$.

9.2.2. În figura 9.19 este reprezentat un mecanism cu articulaţii care constă din barele OA_1, OB_1, CA_4, CB_4, de lungime a şi din barele A_1B_2, B_1A_2, A_2B_3, B_2A_3, A_3B_4, B_3A_4, de lungime $2a$. Să se afle traiectoriile descrise de articulaţiile A_1, A_2, A_3, A_4, considerând că, articulaţia C se mişcă în lungul axei Ox.

Soluţie:

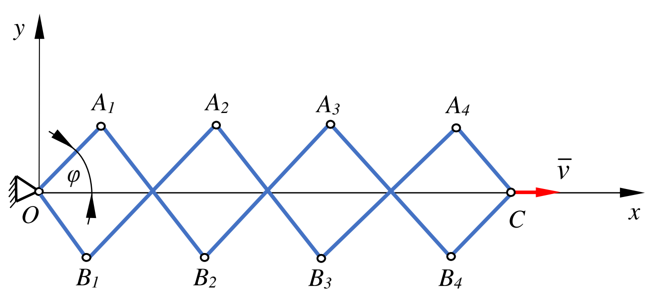


Fig. 9.19

Se determină coordonatele punctelor A_1, A_2, A_3, A_4,... A_n.

A_1: $x = a\cos\varphi$ $\quad$ A_2: $x = 3a\cos\varphi$ $\quad$ A_3: $x = 5a\cos\varphi$

$y = a\sin\varphi$ $\quad$ $y = a\sin\varphi$ $\quad$ $y = a\sin\varphi.$

A_4: $x = 7a\cos\varphi$ $\quad$ A_n: $x = (2n-1)a\cos\varphi$ (1)

$y = a\sin\varphi$ $\quad$ $y = a\sin\varphi.$

Prin eliminarea parametrului φ din relaţiile (1) se obţin ecuaţiile traiectoriilor punctelor A_1, A_2, A_3, A_4,… A_n de forma:

$$\frac{x^2}{(2n-1)^2a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \tag{2}$$

care sunt elipse cu semiaxe $(2n-1)a$ şi a, n fiind numărul de ordine al articulaţiei ($n = 1,2,3,4$…).

9.2.3. Extremitatea A a unei bare alunecă pe o dreaptă fixă Ox cu viteza constantă c. Bara trece printr-o culisă care se roteşte într-o articulaţie în jurul punctului fix B. Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct M al barei în funcţie de unghiul φ dacă $AM = OB = b$ (fig. 9.20).

Soluţie:

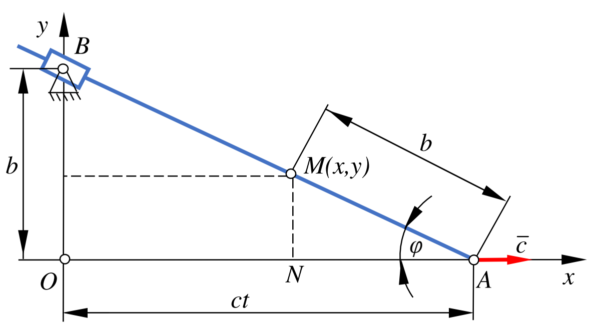


Fig. 9.20

a) *Traiectoria*. Se determină coordonatele punctului M astfel:

$$x = OA - NA = ct - b\cos\varphi$$

$$y = b\sin\varphi\,, \tag{1}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

apoi se determină timpul *t,* observând că triunghiul *AOB* este asemenea cu triunghiul *ANM*. Scriind relaţiile de asemănare în cele două triunghiuri, se obţine timpul *t* astfel:

$$\frac{AN}{AO}=\frac{MN}{BO}, \qquad \frac{b\cos\varphi}{ct}=\frac{b\sin\varphi}{b}, \qquad t=\frac{b}{c}ctg\,\varphi. \tag{2}$$

Având în vedere relaţia (2), relaţiile (1) devin:

$$x = b\,(ctg\,\varphi - \cos\varphi)$$
$$y = b\sin\varphi. \tag{3}$$

Eliminând parametrul φ din relaţia (3), se obţine ecuaţia carteziană a traiectoriei:

$$(y-b)^2(y^2-b^2)+x^2y^2=0. \tag{4}$$

b) *Viteza.* Derivând relaţiile (3) în raport cu timpul, se obţin componentele carteziene ale vitezei instantanee:

$$\dot{x}=b\dot{\varphi}\left(-\frac{1}{\sin^2\varphi}+\sin\varphi\right) \tag{5}$$
$$\dot{y}=b\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Derivând ultima relaţie (2) în raport cu timpul, rezultă:

$$\dot{\varphi}=-\frac{c}{b}\sin^2\varphi. \tag{6}$$

Înlocuind relaţia (6) în relaţia (5), se obţin expresiile:

$$\dot{x}=c(1-\sin^3\varphi), \qquad \dot{y}=-c\sin^2\varphi\cos\varphi. \tag{7}$$

Modulul vitezei are expresia:

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=c\sqrt{1-2\sin^3\varphi+\sin^4\varphi}\ . \tag{8}$$

c) *Acceleraţia*. Derivând relaţiile (7) în raport cu timpul şi având în vedere relaţia (6), se obţin componentele carteziene ale acceleraţiei:

$$\ddot{x} = -3c\dot{\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi = -3\frac{c^2}{b}\sin^4\varphi\cos\varphi,$$
$$\ddot{y} = -c\dot{\varphi}(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) = \frac{c^2}{b}\sin^3\varphi(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \qquad (9)$$

Modulul acceleraţiei se determină astfel:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{c^2}{b}\sin^3\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,. \qquad (10)$$

9.2.4. Se dă o mişcare definită prin ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = 2e^t - 1 \\ y = 2e^t + 1 \end{cases}.$$

Să se determine traiectoria mobilului, viteza şi acceleraţia la un moment dat $(t_0 = 0, \rho = \rho_0)$.

Soluţie:

Eliminând timpul (t) din ecuaţiile parametrice, se obţine $y = x+2$, care este ecuaţia carteziană a traiectoriei punctului. Se constată că traiectoria este o dreaptă. În coordonate carteziene, componentele vitezei şi acceleraţiei instantanee ale punctului sunt:

$$v_x = \dot{x} = 2e^t, \qquad a_x = \ddot{x} = 2e^t,$$
$$v_y = \dot{y} = 2e^t, \qquad a_y = \ddot{y} = 2e^t. \qquad (1)$$

Modulele vitezei şi acceleraţiei punctului au expresiile:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 2\sqrt{2}\,e^t,$$
$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2\sqrt{2}\,e^t. \qquad (2)$$

9.2.5. Să se determine raza de curbură iniţială a traiectoriei unui punct ale cărui ecuaţii de mişcare sunt:

$$\mathrm{x} = 3\mathrm{t}^2 + 2\,,$$
$$\mathrm{y} = 6\mathrm{t} + 5.$$

Soluţie:

În cinematica punctului, raza de curbură ρ a traiectoriei apare explicit în expresia componentei normale a_ν a acceleraţiei. Expresia modulului acceleraţiei în coordonate intrinseci este:

$$a = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}\,. \tag{1}$$

Din relaţia (1) se obţine raza de curbură a traiectoriei astfel:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}\,. \tag{2}$$

Modulele vitezei şi acceleraţiei instantanee ale punctului se determină utilizând componentele carteziene. Astfel,

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 6t, \qquad & a_x &= \ddot{x} = 6, \\ v_y &= \dot{y} = 6, \qquad & a_y &= \ddot{y} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 6\sqrt{t^2 + 1}, \quad a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = 6. \tag{4}$$

Derivata în raport cu timpul a modulului vitezei are expresia:

$$\dot{v} = \frac{6t}{\sqrt{t^2 + 1}}. \tag{5}$$

Având în vedere relaţiile (4) şi (5), relaţia (2) devine:

$$\rho = 6(t^2 + 1)^{3/2} \tag{6}$$

şi constituie legea de variaţie, în funcţie de timp a razei de curbură a traiectoriei punctului.

Raza de curbură iniţială a traiectoriei punctului se obţine pentru condiţiile iniţiale $t_0 = 0$, $\rho = \rho_0$ care se introduc în relaţia (6) şi se va obţine:

$$\rho_0 = 6. \tag{7}$$

9.2.6. Punctul *M* descrie o curbă plană. Linia de acţiune a acceleraţiei formează prin intersecţia cu cercul de curbură coarda *MA* =*l*. Să se exprime mărimea acceleraţiei în

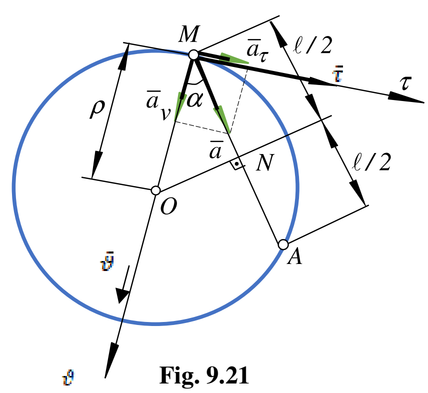


Fig. 9.21

funcţie de mărimea vitezei şi lungimea acestei coarde (fig. 9.21).

Soluţie:

Având în vedere componentele intrinseci ale acceleraţiei, se pot scrie relaţiile:

$$a = \sqrt{a_\tau^{\,2} + a_\nu^{\,2}},\ a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \qquad (1)$$
$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho},\ tg\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{\dot{v}\rho}{v^2}.$$

Din triunghiul *MON:*

$$tg\,\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{\sqrt{\rho^2 - (\ell/2)^2}}{\ell/2},\text{ adică:}$$

$$\frac{\dot{v}\,\rho}{v^2} = \frac{\sqrt{4\rho^2 - \ell^2}}{\ell}. \qquad (2)$$

Din relaţia (2) se obţine:

$$\rho^2 = \frac{v^4\ell^2}{4v^4 - \dot{v}^2\ell^2}.$$

Acceleraţia instantanee a punctului devine succesiv:

$$a = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4(4v^4 - \dot{v}^2\ell^2)}{v^4\ell^2}}, \qquad (3)$$
$$a = \frac{2v^2}{\ell}.$$

9.2.7. Se consideră un punct material *M* având vectorul de poziţie în raport cu originea *O* a sistemului de referinţă *Oxy,* $\bar{r} = \overline{OM} = 4t\,\bar{i} + (16t^2 - 1)\bar{j}$. Să se determine ecuaţia traiectoriei, poziţia, viteza şi acceleraţia punctului *M* la momentul $t = t_1 = \frac{1}{2}\ s$, precum şi raza de curbură a traiectoriei (fig. 9.22).

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

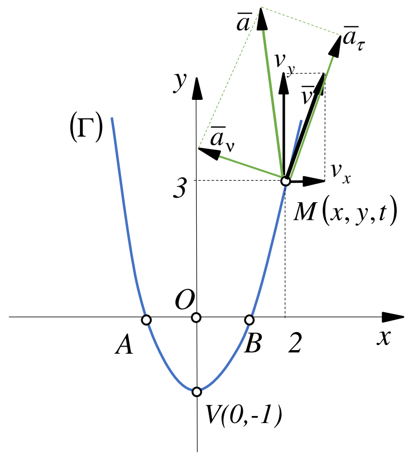


Fig. 9.22

Soluţie:

Ecuaţiile traiectoriei sub formă parametrică sunt:

$$x = x(t) = 4t$$
$$y = y(t) = 16t^2 - 1\ . \qquad (1)$$

Eliminând parametrul (t) din ecuaţiile (1), se obţine forma implicită a ecuaţiei traiectoriei punctului M de forma:

$$x^2 - y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Conform cu (2), traiectoria punctului M este o parabolă cu vârful în $V(0,-1)$ şi care intersectează axa Ox în punctele $A(-1, 0)$ şi $B(1, 0)$.

Componentele carteziene ale vitezei instantanee sunt:

$$v_x = \dot{x} = 4$$
$$v_y = \dot{y} = 32t = 16\ . \qquad (3)$$

Modulul vitezei este dat de relaţia:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ , \qquad (4)$$

în care se introduc valorile date de (3) şi se obţine:

$$v = 16{,}5\, cm / s\,. \qquad (5)$$

Componentele carteziene ale acceleraţiei instantanee sunt:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$
$$a_y = \ddot{y} = 32 \tag{6}$$

iar modulul acceleraţiei se obţine astfel:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \ , \qquad a = 32\, cm/s^2 . \tag{7}$$

Poziţia, viteza şi acceleraţia punctului M la momentul $t = t_1$, se obţin astfel:

$$x(t_1) = 2 \qquad \dot{x}(t_1) = 4$$
$$y(t_1) = 3 ^{,} \qquad \dot{y}(t_1) = 16$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 16{,}6\, cm/s , \tag{8}$$
$$\ddot{x}(t_1) = 0 , \qquad \ddot{y}(t_1) = 32$$
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 32\, cm/s^2 .$$

Acceleraţia exprimată în coordonate intrinseci are următoarea expresie:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} , \tag{9}$$

în care conform cu (8), acceleraţia tangenţială devine:

$$a_\tau = |\dot{v}| = \frac{v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} , \qquad a_\tau = 31\, cm/s^2 , \tag{10}$$

iar,

$$a_\nu = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 7{,}94\, cm/s^2 . \tag{11}$$

Raza de curbură a traiectoriei, conform cu (9.46), se determină astfel:

$$\rho(t_1) = \frac{v^2(t_1)}{a_\upsilon(t_1)} = \frac{16{,}5^2}{7{,}94} = 34{,}3\ cm. \tag{12}$$

9.2.8. O bară *(d)* se poate roti într-un plan în jurul punctului fix *O* cu viteza unghiulară constantă ω. Bara intersectează în punctul *M* un cerc fix de rază *R* (fig. 9.23). Să se determine viteza şi acceleraţia punctului *M* în mişcarea sa pe dreapta *(d)* şi pe cerc.

Soluţie:

a) Mişcarea punctului M pe dreapta (d):

- legea de mişcarea a punctului este:

$$s = ON + NM = 2R\cos\theta \;; \qquad (1)$$

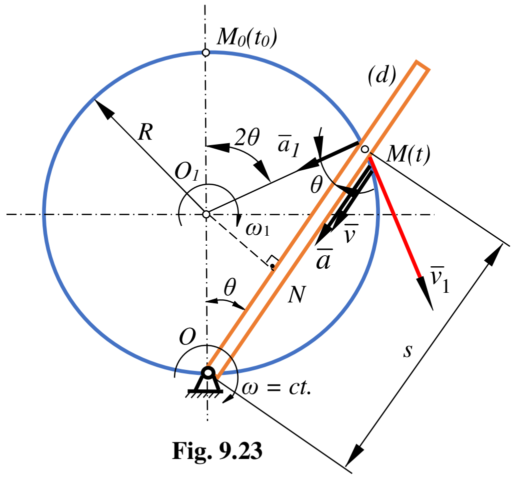


Fig. 9.23

- viteza punctului are expresia:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{ds}{d\theta} = -2\,\omega R\sin\theta \qquad (2)$$

şi sensul spre punctul O datorită semnului "-" ;

- acceleraţia punctului:

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dv}{d\theta} = -2\,\omega^2 R\cos\theta \;. \qquad (3)$$

Acceleraţia are sensul către punctul O datorită semnului "-".

b) Mişcarea punctului M pe cercul C(O₁, R).

- viteza punctului:

$$v_1 = \omega_1 R\,, \qquad (4)$$

relaţie în care:

$$\omega_1 = 2\dot{\theta} = 2\,\omega\,. \qquad (5)$$

Înlocuind relaţia (5) în (4), rezultă viteza:

$$v_1 = 2\,\omega R\;; \qquad (6)$$

- acceleraţia punctului:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= a_\tau \bar{\tau} + a_\nu \bar{\nu} \\ \text{unde:}\quad a_\tau &= \varepsilon_1 R \\ a_\nu &= \omega_1^{\,2} R = 4\omega^2 R\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Dar $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 2\dot{\omega} = 0$, pentru că viteza unghiulară ω este constantă. Astfel,

$$\begin{aligned} a_\tau &= 0, \\ a_1 &= 4\omega^2 R\,. \end{aligned} \tag{8}$$

9.2.9. Un punct descrie o traiectorie plană astfel încât proiecţia vitezei pe axa Ox are mereu o valoare constantă c. Să se arate că, în cazul acesta, mărimea acceleraţiei se exprimă prin $a = \dfrac{v^3}{c\rho}$, unde $\bar{v}$ este viteza punctului, iar ρ este raza de curbură a traiectoriei.

Soluţie:

Urmărind datele problemei, se pot scrie relaţiile:

$$\dot{x} = c, \qquad \ddot{x} = 0, \qquad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \ddot{y}, \tag{1}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \tag{2}$$

Se derivează relaţia (2) în raport cu timpul şi se obţine:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\,\dot{x}\,\ddot{x} + 2\,\dot{y}\,\ddot{y}\,.$$

Însă,

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau\,,$$

astfel că,

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,. \tag{3}$$

Având în vedere (9.46), se poate scrie:

$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_\tau^{\,2}}$$

sau, în conformitate cu relaţiile (1) şi (3), acceleraţia normală devine:

$$a_v = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \tag{4}$$

Înlocuind relaţia (2) în (4), se obţine:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}. \tag{5}$$

Introducând relaţiile (1) şi (2) în (5), rezultă:

$$a = \frac{v^3}{c\,\rho}. \tag{6}$$

9.2.10. Să se arate că în cazul unei mişcări plane mărimea vitezei punctului poate fi exprimată astfel: $v = \rho\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$, unde ρ este raza de curbură a traiectoriei, iar φ unghiul dintre viteză şi o dreaptă oarecare fixă, aşezată în acelaşi plan în care se mişcă punctul (fig. 9.24).

Soluţie:

Dreapta *(Δ)* este o dreaptă oarecare fixă care închide cu direcţia vitezei unghiul φ. Prin centrul de curbură O se duce dreapta *(Δ₁)* perpendiculară pe *(Δ)* astfel că, $\sphericalangle MON = \varphi$. Dreapta *(Δ₁)* va fi, de asemenea fixă şi va fi luată ca origine pentru unghiul φ. Viteza punctului se determină cu relaţia:

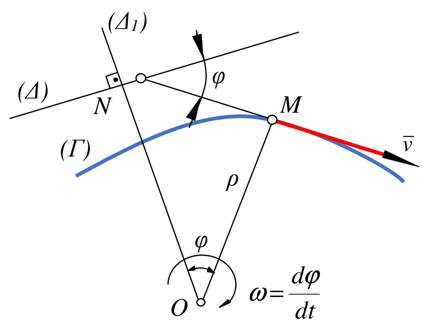


Fig. 9.24

$$v = \omega\rho = \frac{d\varphi}{dt}\rho, \tag{1}$$

$$v = \rho\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|. \tag{2}$$

9.2.11. Un punct descrie o curbă plană astfel încât, dreapta după care este orientată acceleraţia $\overline{a}$ trece mereu printr-un punct fix O. Să se arate că în acest caz, există relaţia:

$$a = \pm \frac{dv}{dr},$$

Relație în care v este mărimea vitezei punctului, iar r este modulul razei vectoare în raport cu O. Semnul plus se ia în cazul când acceleraţia este orientată de la punctul O înafară şi semnul minus, în caz contrar (fig. 9.25).

Soluţie:

- *Prima metodă*

În conformitate cu (9.13), se poate scrie:

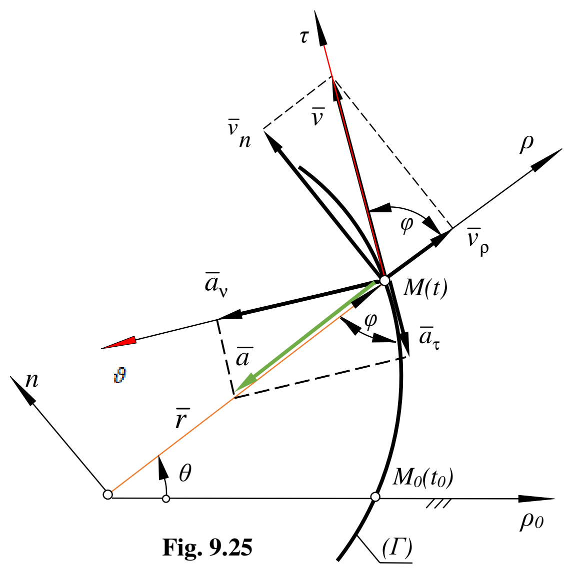


Fig. 9.25

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}, \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \tag{1}$$

Se derivează relaţia (1) şi se adună şi se scade $r\dot{r}\dot{\theta}^2$, obținându-se:

$$v\frac{dv}{dt} = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 - r\dot{r}\dot{\theta}^2,$$

respectiv,

$$v\frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr}=\dot{r}\,(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)+r\,\dot{\theta}\,(r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\ . \tag{2}$$

Având în vedere (9.14), în relaţia (2) se pot preciza:

$$a_\rho=\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2,\quad a_n=r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta}. \tag{3}$$

Dar, $a_n = 0$ pentru că acceleraţia trece mereu printr-un punct fix O astfel că, $a = a_\rho$. În consecinţă, relaţia (2) devine succesiv , $v\frac{dv}{dr}\dot{r}=\dot{r}\,a$,

respectiv,

$$a=v\frac{dv}{dr}. \tag{4}$$

- *A doua metodă*

În conformitate cu figura 9.25, se poate scrie:

$$tg\,\varphi=\frac{a_\nu}{a_\tau}=\frac{v_n}{v_\rho}. \tag{5}$$

Dar,

$$v_n=r\,\dot{\theta},\quad v_\rho=\dot{r},\quad a_\tau=\frac{dv}{dt}\ ,$$

astfel că, se poate scrie:

$$\frac{a_\nu}{a_\tau}=\frac{r\,d\theta}{dr}. \tag{6}$$

Acceleraţia punctului are modulul:

$$a=\sqrt{{a_\tau}^2+{a_\nu}^2}=a_\tau\sqrt{1+\left(\frac{a_\nu}{a_\tau}\right)^2}=\frac{dv}{dt}\sqrt{1+\frac{r^2d\theta^2}{dr^2}} \tag{7}$$

$$a=\frac{dv}{dr}\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{r\,d\theta}{dt}\right)^2}. \tag{8}$$

Însă,

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{r\,d\theta}{dt}\right)^2}=\sqrt{\dot{r}^2+(r\,\dot{\theta})^2}=v,$$

astfel că, relaţia (8) devine:

$$a=v\frac{dv}{dr}. \tag{9}$$

- *A treia metodă*

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr} = \frac{dv}{dr}\dot{r}\ . \tag{10}$$

Din figura 9.25 se poate scrie:

$$a_\tau = a\cos\varphi\ .$$

Dar,

$$v_\rho = \dot{r} = v\cos\varphi,$$

astfel că, relaţia (10) devine:

$$a = v\frac{dv}{dr}. \tag{11}$$

9.2.12. Un punct descrie o traiectorie plană. Viteza radială a punctului este pozitivă şi constantă, iar acceleraţia radială este negativă şi invers proporţională cu cubul distanţei la pol adică: $v_\rho = c > 0,\ a_\rho = -\dfrac{a^2}{r^3}(a > 0)$. Să se afle traiectoria şi viteza areolară a punctului, ştiind că: $t_0 = 0,\ \varphi = \varphi_0$ şi $\dot{\varphi} > 0$.

Soluţie:

Având în vedere relaţiile (9.12) şi (9.14) şi enunţul problemei, se pot scrie relaţiile:

$$\begin{gathered} v_\rho = \dot{r},\ a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ \dot{r} = c \end{gathered} \tag{1}$$

$$\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{a^2}{r^3}\quad . \tag{2}$$

Integrând ecuaţia (1), se obţine:

$$r = c\,t + C_1\,.$$

Pentru $t_0 = 0,\ r = r_0$, rezultă $C_1 = r_0$, astfel că:

$$r = ct + r_0. \tag{3}$$

Înlocuind relaţia (3) în (2) şi integrând, se obţine succesiv:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{a^2}{r^3}, \quad (\ddot{r} = 0),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{r^2} = \frac{a}{(ct + r_0)^2},$$

$$\varphi = -\frac{a}{c(ct + r_0)} + C_2 .$$

Pentru $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$ rezultă constanta:

$$C_2 = \varphi_0 + \frac{a}{c\,r_0} .$$

Ecuaţiile parametrice polare ale traiectoriei sunt:

$$r = c\,t + r_0$$
$$\varphi = -\frac{a}{c\,(c\,t + r_0)} + \varphi_0 + \frac{a}{c\,r_0}. \tag{4}$$

Eliminând timpul (t) din relaţia (4), se obţine ecuaţia polară a traiectoriei:

$$r = \frac{a\,r_0}{a - r_0\,c\,(\varphi - \varphi_0)}. \tag{5}$$

Viteza areolară a punctului se calculează cu relaţia (9.50). Astfel,

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{a}{2}. \tag{6}$$

9.2.13. Un corp este aruncat în gol, vertical în sus, cu viteza iniţială v_0. După $t < \frac{2v_0}{g}$ s de la începutul mişcării lui, un al doilea corp este aruncat în sus cu aceeaşi viteză iniţială v_0. După câte secunde de la începutul mişcării primului corp şi la ce distanţă de poziţia lui iniţială se vor întâlni cele două corpuri?

Soluţie:

Legile de mişcare ale celor două corpuri sunt:

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g\,t^2, \tag{1}$$

$$x_2 = v_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} g\,(t - t_0)^2. \tag{2}$$

Corpurile se vor întâlni când $x_1 = x_2$, adică:

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2, \tag{3}$$

relaţie din care se obţine timpul după care cele două corpuri se întâlnesc şi anume:

$$t = \frac{1}{2} t_0 + \frac{v_0}{g}.$$

Pentru $t = \frac{1}{2} t_0 + \frac{v_0}{g}$ se obţine distanţa h la care se vor întâlni corpurile şi anume:

$$x_1 = h = v_0 \left(\frac{1}{2} t_0 + \frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{1}{2} t_0 + \frac{v_0}{g} \right)^2,$$
$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^{\,2}}{g} - \frac{1}{4} g t_0^{\,2} \right). \tag{4}$$

9.2.14. Un corp cade în gol fără viteză iniţială. După t_0 secunde de la începutul căderii un al doilea corp este aruncat de asemenea, fără viteză iniţială. În cât timp de la începutul căderii primului corp distanţa dintre cele două corpuri va fi a ?

Soluţie:

Cele două corpuri se mişcă după următoarele legi:

$$x_1 = -\frac{1}{2} g t^2,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} g (t - t_0)^2. \tag{1}$$

Distanţa a dintre cele două corpuri este:

$$x_2 - x_1 = a \ ,$$
$$-\frac{1}{2} g (t - t_0) + \frac{1}{2} g t^2 = a. \tag{2}$$

Astfel, timpul după care distanţa dintre cele două corpuri este a şi are valoarea:

$$t = \frac{t_0}{2} + \frac{a}{g t_0}. \tag{3}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

9.2.15. În cazul mişcării unui punct în plan, unghiul constant α este unghiul dintre viteză şi acceleraţie (fig. 9.26). Să se arate că în cazul acesta, mărimea vitezei punctului poate fi exprimată prin relaţia următoare: $v = v_0\, e^{c(\varphi - \varphi_0)}$, unde φ este unghiul dintre viteză şi o dreaptă oarecare fixă, situată în planul mişcării, φ_0 şi v_0 sunt valorile iniţiale ale acestui unghi şi a vitezei, iar $c = ctg\ \alpha$.

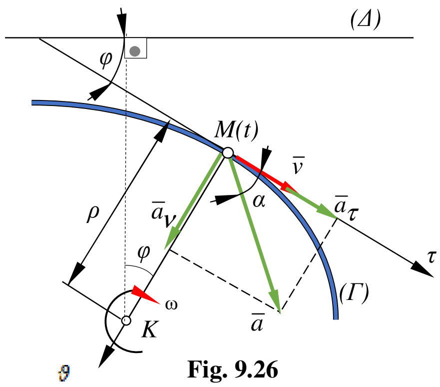


Fig. 9.26

Soluţie:

Având în vedere figura 9.26, se poate scrie:

$$ctg\ \alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{\dot{v}\rho}{v^2} = c\ , \tag{1}$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{c}{\rho}dt. \tag{2}$$

Integrând expresia (2), se obţine:

$$-\frac{1}{v} = \frac{c}{\rho}t + C_1. \tag{3}$$

Pentru $t_0 = 0$, $v = v_0$, rezultă $C_1 = -\frac{1}{v_0}$, astfel că din (3) se obţine:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{c\,v_0}{\rho}t}. \tag{4}$$

Se poate scrie:

$$v = \omega\rho,$$

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt}\,, \tag{5}$$

relație în care ρ este raza de curbură a traiectoriei plane a mișcării punctului.

Se introduce expresia (5) a vitezei în relaţia (1) şi se obţine:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{6}$$

Se notează:

$$\frac{d\varphi}{dt} = y. \tag{7}$$

Relaţia (7) devine succesiv:

$$\frac{dy}{dt} = c\,y^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = c\,dt\,,$$

$$-\frac{1}{y} = c\,t + C_2\,.$$

Pentru $t_0 = 0$, $v = v_0$, $y_0 = \frac{d\ \ _0}{dt} = \frac{v_0}{\rho}$, se obţine $C_2 = -\frac{\rho}{v_0}$,

respectiv,
$$y = \frac{1}{\frac{\rho}{v_0} - ct}\,. \tag{8}$$

Introducând relaţia (7) în (8) şi integrând, se obţine:

$$d\varphi = \frac{dt}{\frac{\rho}{v_0} - ct}, \qquad \varphi = -\frac{1}{c}\ln\left(\frac{\rho}{v_0} - ct\right) + C_3. \tag{9}$$

Pentru $t_0 = 0$, $\varphi = = \varphi_0$, se obţine succesiv, luând în considerare (9):

$$C_3 = \varphi_0 + \frac{1}{c}\ln\frac{\rho}{v_0}$$

$$c(\varphi - \varphi_0) = \ln\frac{\frac{\rho}{v_0}}{\frac{\rho}{v_0} - ct} = \ln\frac{1}{1 - \frac{v_0 c}{\rho}t} \tag{10}$$

$$e^{c(\varphi-\varphi_0)} = \frac{1}{1 - \frac{v_0 c}{\rho}t}\,.$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Comparând relaţiile (4) şi (10), se poate scrie:

$$v = v_0 e^{c(\varphi - \varphi_O)}. \tag{11}$$

9.2.16. În mişcarea unui punct modulul vitezei este o mărime constantă, egală cu c, iar viteza unghiulară de rotaţie a razei vectoare este de asemenea constantă şi egală cu ω_0. Să se afle ecuaţiile mişcării şi traiectoria punctului când $r_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ pentru $t_0 = 0$ (fig. 9.27).

Soluţie:

În conformitate cu enunţul problemei se pot scrie relaţiile:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = c^2, \quad \dot{\varphi} = \omega_0,$$

adică:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = c^2, \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0. \tag{2}$$

Din relaţia (1) se obţine succesiv:

$$\dot{r} = \sqrt{c^2 - r^2\omega_0^{\ 2}}, \quad dr = \sqrt{c^2 - \omega_0^{\ 2} r^2}\, dt,$$

$$\frac{dr}{\sqrt{c^2 - \omega_0^{\ 2} r^2}} = dt. \tag{3}$$

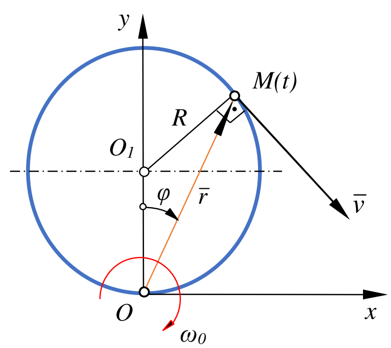


Fig. 9.27

Integrând relaţia (3), rezultă:

$$\frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{\omega_0 r}{c} = t + C_1.$$

Pentru $t_0 = 0$, $r_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, se obţine $C_1 = 0$, astfel că:

$$\arcsin\frac{\omega_0\, r}{c} = \omega_0\, t.$$

Integrând relaţia (2) se obţine: $\varphi = \omega_0 t + C_2$.

Pentru $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, rezultă $C_2 = 0$, astfel că: $\varphi = \omega_0 t$, $\arcsin\frac{\omega_0\, r}{c} = \varphi$, iar , $$\sin\varphi = \frac{\omega_0 r}{c},\ \ r = \frac{c}{\omega_0}\sin\varphi\ .$$

Coordonatele punctului care se mişcă pe curbă vor fi:

$$x = r\cos\varphi = \frac{c}{\omega_0}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{c}{2\,\omega_0}\sin 2\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi = \frac{c}{\omega_0}\sin\varphi\sin\varphi = \frac{c}{2\,\omega_0}(1-\cos 2\varphi). \tag{4}$$

Eliminând parametrul φ în relaţiile (4), se obţine ecuaţia carteziană a traiectoriei:

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{2\,\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{c}{2\,\omega_0}\right)^2. \tag{5}$$

Expresia (5) este ecuaţia unui cerc de rază $R = \dfrac{c}{2\omega_0}$, cerc tangent la axa Ox în originea sistemului de referinţă, cu centrul $C\left(0, \dfrac{c}{2\omega_0}\right)$ pe axa Oy.

9.2.17. O bară subţire OL se roteşte în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară constantă ω şi mişcă inelul M pe sârma fixă aflată la distanţa b de punctul O. Să se exprime viteza şi acceleraţia inelului în funcţie de distanţa $x = AM$ (fig. 9.28).

Soluţie:

Din triunghiul OAM se poate scrie:

$$tg\varphi = \frac{x}{b},\ \ x = b\,tg\varphi. \tag{1}$$

Viteza instantanee $\bar{v}$ a inelului se obţine prin derivare în raport cu timpul a relaţiei (1). Astfel,

$$v = \dot{x} = b\frac{\omega}{\cos^2\varphi}.$$

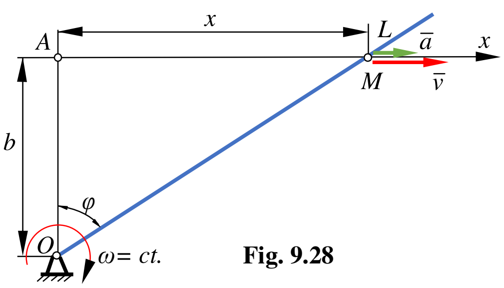


Fig. 9.28

Deoarece: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, se obţine succesiv:

$$v = b\,\omega(1+tg^2\varphi) = b\,\omega\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right), \qquad v = \omega\left(b+\frac{x^2}{b}\right). \tag{2}$$

Acceleraţia instantanee $\bar{a}$ a inelului se obţine prin derivare în raport cu timpul a relaţiei (2). Astfel,

$$a = \ddot{x} = 2b\omega^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 2b\omega^2\frac{tg\,\varphi}{\cos^2\varphi} = 2b\omega^2 tg\,\varphi(1+tg^2\varphi), \tag{3}$$

$$a = 2\omega^2 x\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right).$$

9.2.18. Un om de înălţime h trece cu viteza constantă $\bar{v}_0$ pe sub un felinar care se află la înălţimea H deasupra pământului. Să se afle cu ce viteză $\bar{v}$ se mişcă pe pământ extremitatea B a umbrei omului (fig. 9.29).

Soluţie:

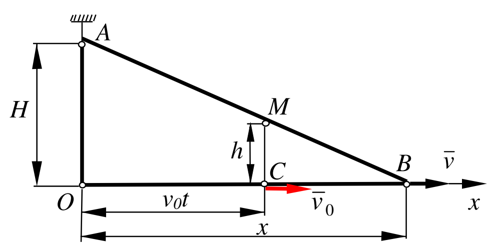


Fig. 9.29

Din figura 9.29 se constată asemănarea triunghiurilor OAB şi CMB,

$$\frac{MC}{OA} = \frac{CB}{OB}, \quad \frac{h}{H} = \frac{x - v_0 t}{x},$$

rezultând:

$$h\,x = H\,x - H\,v_0 t\ ,$$

$$x = \frac{H}{H-h}v_0 t\ . \tag{1}$$

Viteza punctului B se obţine derivând relaţia (1) în raport cu timpul. Astfel,

$$v_B = \dot{x} = \frac{H}{H-h} v_0 . \tag{2}$$

9.2.19. Un mobil execută o mişcare rectilinie dată de ecuaţia: $x = A\sin \omega t + B\cos \omega t$. Să se arate că, mişcarea este oscilatorie şi să se determine amplitudinea, frecvenţa, perioada, faza, viteza şi acceleraţia.

Soluţie:

$$x = A\sin \omega t + B\cos \omega t = A\,(\sin \omega t + \frac{B}{A}\cos \omega t) . \tag{1}$$

Se notează: $\frac{B}{A} = tg\,\varphi$ şi se obţine:

$$x = \frac{A}{\cos\varphi}\sin(\omega t + \varphi) .$$

Având în vedere relaţia: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, se obţine:

$$x = A\sqrt{1+tg^2\varphi}\sin(\omega t+\varphi) = A\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}\sin(\omega t+\varphi),$$

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\varphi). \tag{2}$$

Se constată că mişcarea mobilului este o mişcare oscilatorie caracterizată de:

- amplitudinea: $b = \sqrt{A^2+B^2}$ (3)
- faza: $tg\,\varphi = \frac{B}{A}$, (4)
- perioada: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, (5)
- frecvenţa: $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, (6)
- viteza: $v = \dot{x} = \sqrt{A^2+B^2}\,\omega\cos(\omega t+\varphi)$, (7)
- acceleraţia: $a = \ddot{x} = -\sqrt{A^2+B^2}\,\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$. (8)

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

9.3 Probleme propuse

9.3.1. Dreapta *FM* se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în planul unei elipse date, în jurul focarului acesteia *F*. Să se afle viteza punctului de intersecţie *M* al acestei drepte cu elipsa.

Răspuns:

$v = \frac{\omega r}{b}\sqrt{r(2a - r)}$, în care $r = FM$, iar a şi b sunt semiaxele elipsei.

9.3.2. O bară rectilinie se roteşte în jurul capătului ei fix *O* cu viteza unghiulară constantă ω_0. De-a lungul barei alunecă o culisă cu viteză constantă v_0. Să se afle traiectoria şi viteza culisei dacă în momentul iniţial (pentru $t_0 = 0$), $r_0 = 0$ şi $\varphi_0 = 0$.

Răspuns: $r = \frac{v_0}{\omega_0}\varphi, \quad v = v_0\sqrt{1 + \omega_0^{\,2} t^2}$.

9.3.3. Plecând de la expresiile generale pentru acceleraţia radială şi transversală să se arate că, în cazul când nu există acceleraţie, mişcarea punctului este rectilinie şi uniformă.

9.3.4. Un punct descrie o traiectorie plană cu viteza $\bar{v}_0$ constantă ca mărime. Prelungirea vectorului acceleraţie a punctului trece mereu printr-un punct fix dat *O*. Distanţa iniţială a punctului mobil la *O* este *a*. Să se determine traiectoria.

Răspuns: Un cerc de rază *a* şi centrul în punctul *O*.

9.3.5. Se dau ecuaţiile de mişcare ale unui punct:

$$x = at,$$

$$y = \frac{a}{2}(e^{t} + e^{-t}) = a\,ch\,t.$$

Să se afle traiectoria şi raza de curbură a traiectoriei în funcţie de ordonata *y*.

Răspuns:

Traiectoria este lănţişorul: $y = a\,ch\frac{x}{a}$, raza de curbură este $\rho = \frac{y^2}{a}$.

9.3.6. Un punct material se mişcă pe un cerc de rază R după legea: $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$. Să se determine mărimea acceleraţiei punctului şi momentul când acceleraţia va fi o mărime egală cu b.

Răspuns: $a = \sqrt{b^2 + \frac{1}{R^2}(v_0 - bt)^2}$, $t = \frac{v_0}{a}$.

9.3.7. Un punct material pornind din starea de repaus se mişcă pe un cerc de rază R având acceleraţia tangenţială constantă a. După câte secunde de la începutul mişcării, acceleraţia tangenţială va fi numeric egală cu cea normală?

Răspuns: $t = \sqrt{\frac{R}{a}}$.

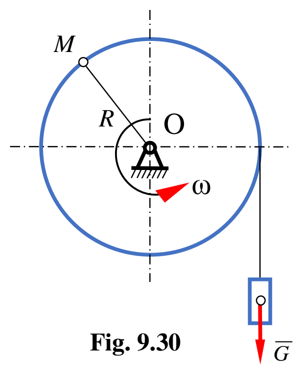


Fig. 9.30

9.3.8. Pe o şaibă de rază $R = 0,5\ m$ este înfăşurat un fir de care atârnă o greutate $\overline{G}$ la capătul lui liber. Greutatea coboară după legea: $s = 0,6\, t^2$ şi pune în mişcare şaiba. Să se afle acceleraţia punctului M situat pe circumferinţa şaibei după o secundă de la începutul mişcării (fig. 9.30).

Răspuns: $a = 3,12\ m/s^2$.

9.3.9. Se consideră un punct material la care se cunoaşte vectorul de poziţie în raport cu originea O a sistemului de axe Oxy: $\overline{r} = \overline{OM} = 3 \sin \pi t\, \overline{i} + 2 \cos \pi t\, \overline{j}$. Se cere:

1) Ecuaţia traiectoriei sub formă parametrică şi implicită în sistemul de axe Oxy;

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

2) Viteza şi acceleraţia punctului;
3) Poziţia, viteza şi acceleraţia punctului la momentul t_1 =1/3 *s*, precum şi raza de curbură a traiectoriei la acelaşi moment.

Răspuns:

$$v = \pi\sqrt{4+5\cos^2 \pi t} = 7{,}19\, cm/s. \qquad a = \pi^2\sqrt{4+5\sin^2 \pi t} = 27{,}47\, cm/s^2 .$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_\nu} = 2{,}005\, cm .$$

9.3.10. Se consideră mecanismul format din două pistoane şi o bielă (fig. 9.31) la care se cunosc $AB = l$, $AM = 2l/3$ şi legea de mişcare a pistonului B respectiv, $OB = s(t) = 10{,}3 \cos \pi t$. Se cere, să se determine: a) Ecuaţiile sub formă parametrică şi implicită ale traiectoriei punctul M al bielei; b) Poziţia, viteza, acceleraţia punctului şi raza de curbură la momentul t_1=1/3s, dacă se cunosc valorile numerice: $\alpha = \pi / 3$, $l = 30$ cm.

Răspuns:

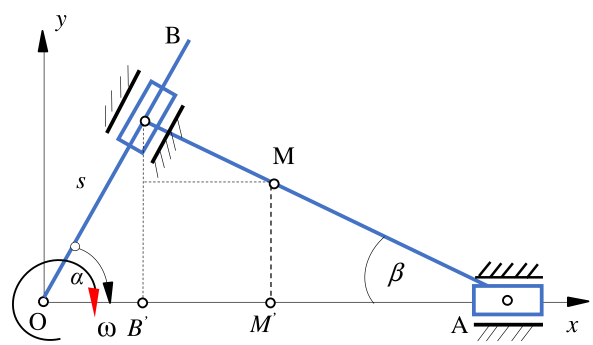


Fig. 9.31

$$v(t_1) = \dot{s}\sqrt{\left(\cos\alpha - \frac{s\sin^2\alpha}{3\sqrt{l^2 - s^2\sin^2\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)^2} = 25{,}46\, cm/s.$$

$$a(t_1)=\sqrt{\left(\ddot{s}\left(\cos\alpha-\frac{s\sin^2\alpha}{3\sqrt{l^2-s^2\sin^2\alpha}}\right)\dot{s}^2\left(\frac{l^2\sin^2\alpha}{3\sqrt{\left(l^2-s^2\sin^2\alpha\right)^3}}\right)\right)^2+\ddot{s}\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)^2}=77{,}99\,cm/s^2.$$

$$\rho(t_1)=\frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right|}=29{,}04\ cm.$$

9.3.11. Două corpuri aflate la momentul iniţial la distanţa de *100 m* se mişcă unul spre celălalt astfel:

- primul în mişcare uniformă cu viteza v_1 = *3 m/s,*
- al doilea în mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială v_0 = *7 m/s* şi acceleraţia $a = 4\ m/s^2$. Să se afle locul şi timpul de întâlnire al celor două corpuri.

Răspuns: $t = 5\ s$, $x_1 = 15\ m$ de poziţia iniţială a primului corp.

9.3.12. Un mobil este lansat în vid de jos în sus cu viteza iniţială v_0. Ştiind că mobilul este acţionat de acceleraţia gravitaţională *g*, să se studieze mişcarea şi să se determine înălţimea maximă h_{max} la care ajunge şi viteza cu care atinge pământul. Să se reprezinte grafic diagramele mişcării şi ale vitezei.

Răspuns: $h_{\max}=\dfrac{v_0^{\ 2}}{2g}$, $|\,v_f\,|=v_0$, viteza cu care corpul ajunge pe pământ este egală în modul cu viteza iniţială v_0.

9.3.13. Pentru o mişcare dată a unui corp, diagrama vitezelor este o parabolă cu axa verticală îndreptată cu concavitatea în sus şi trecând prin origine. Să se determine timpul în care corpul parcurge un drum de mărimea s_1 şi viteza v_1 a corpului la sfârşitul drumului, dacă în momentul iniţial acceleraţia corpului este a_0, iar la sfârşitul drumului s_1 acceleraţia are mărimea a_1 .

Răspuns: $t_1=\sqrt{\dfrac{6s_1}{2a_0+a_1}}$, $v_1=\dfrac{a_0+a_1}{2}\sqrt{\dfrac{6s_1}{2a_0+a_1}}$.

9.3.14. Un punct execută o oscilaţie armonică după legea: $x = a\sin\frac{2\pi}{T}t$. Pentru $x = x_1$ şi $x = x_2$ viteza punctului este respectiv egală cu v_1 şi v_2. Să se afle amplitudinea a şi perioada T a acestei oscilaţii.

Răspuns: $a = \sqrt{\frac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$.

9.3.15. Legea mişcării armonice a coliviei de mină este dată de relaţia: $h = \frac{H}{2}(1 - \cos\varphi)$, în care H este înălţimea totală la care se ridică colivia de mină, $\varphi = \sqrt{\frac{2a}{H}}t$, $a - const.$ Să se determine viteza şi acceleraţia coliviei în funcţie de unghiul φ, precum şi timpul de înălţare T al coliviei la înălţimea H.

Răspuns: $v = \sqrt{\frac{aH}{2}}\sin\varphi$, $a = a\cos\varphi$, $T = \pi\sqrt{\frac{H}{2a}}$.

10. MIŞCĂRILE DE TRANSLAŢIE, DE ROTAŢIE ÎN JURUL UNUI AX FIX ŞI DE ROTO-TRANSLAŢIE ALE UNUI SOLID RIGID [9]

10.1 Consideraţii teoretice

10.1.1 Introducere

În acest capitol se va studia mişcarea în timp a unui solid rigid notat fie cu (C) sau cu (S) pe parcursul capitolelor, fără a se stabili legătura dintre sistemul de forţe ce acţionează asupra solidului rigid şi caracteristicile mişcării acestuia.

A cunoaşte mişcarea unui solid rigid înseamnă, a cunoaşte în orice moment poziţia, viteza şi acceleraţia unui punct oarecare M al rigidului, în raport cu un sistem de referinţă fix. Întrucât, pentru fiecare punct aparţinând rigidului este necesar să se determine câte trei coordonate, problema are aparent, un număr foarte mare de necunoscute. Însă, datorită condiţiei de rigiditate potrivit căreia distanţele între două puncte oarecare aparţinând rigidului rămân constante, numărul de necunoscute independente este în realitate mult mai mic.

Solidul rigid poate executa o mişcare generală (când variază toți parametrii mişcării) sau mişcări particulare (când variază unul (mişcare simplă) sau mai mulți parametrii). Studiul cinematic al mişcărilor particulare poate fi realizat prin particularizarea studiului cinematic al mişcării generale a rigidului. Însă, pentru o înţelegere cât mai aprofundată a studiului cinematic al mişcării rigidului se vor trata în continuare mişcările particulare ale solidului rigid şi ulterior mişcarea generală a acestuia.

Pornind de la mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie în jurul unui ax fix, se pot obţine prin combinarea acestor mişcări simple, toate celelalte mişcări ale solidului rigid care sunt: *mişcarea de rototranslaţie, mişcarea de rotaţie în jurul unui punct fix, mişcarea plan-paralelă şi mişcarea generală.*

10.1.2 Mişcarea de translaţie a rigidului

10.1.2.1 Studiul geometric al mişcării

Un solid rigid se află în ***mişcare de translaţie*** *dacă o dreaptă oarecare aparţinând rigidului rămâne tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi* (fig. 10.1).

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

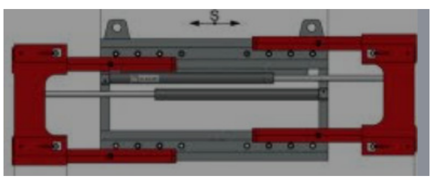
În cazul mişcării de translaţie a solidului rigid conform definiţiei anterioare, traiectoriile tuturor punctelor aparţinând acestuia sunt paralele între ele, ceea ce face ca studiul mişcării să se reducă la studiul mişcării unui punct al rigidului.

După forma traiectoriilor punctelor se pot distinge trei tipuri de mişcări de translaţie si anume:

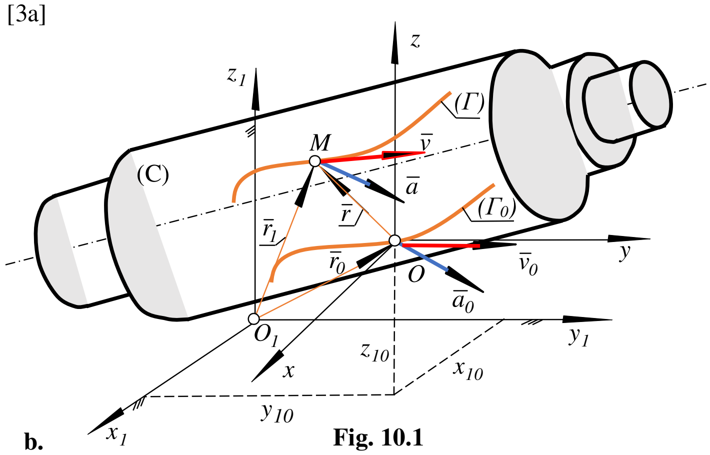
a) *translaţii rectilinii* - la care traiectoriile punctelor rigidului sunt linii drepte. Ca exemple se pot da, mişcările echipajelor mobile ale modulelor de translaţie din structura manipulatoarelor şi a roboţilor industriali de construcţie modulară, mişcarea saniei unei maşini de rabotat sau mortezat, mişcările pistoanelor unui motor diesel stabil, mişcarea sertăraşului unui distribuitor hidraulic, mişcarea unui ascensor etc.;

b) *translaţii circulare* - la care traiectoriile punctelor rigidului sunt arce de cerc. Exemple de astfel de mişcări pot fi: mişcarea degetelor dispozitivelor de prehensiune care au în componenţa lor mecanisme paralelogram, mişcarea scaunului unui scrânciob, mişcarea bielei de cuplare a două roţi etc.;

c) *translaţii curbilinii* - la care traiectoriile punctelor rigidului sunt curbe strâmbe în spaţiu. Se pot da ca exemple: mişcarea bielei de cuplare a roţilor unei locomotive unde un punct descrie o cicloidă scurtată şi mişcarea rigletelor unui aparat ISIS etc.



a. [3a]



b. **Fig. 10.1**

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

În figura 10.1b este reprezentat un solid rigid *(C)* care execută o mişcare de translaţie curbilinie oarecare înregistrată faţă de un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$. Se alege un sistem de referinţă mobil *Oxyz* legat invariabil de solidul rigid a cărui origine o constituie un punct *O* aparţinând rigidului şi ale cărui axe rămân paralele cu axele sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$, în tot timpul mişcării.

Un astfel de *rigid aflat în mişcare de translaţie posedă trei grade de libertate* întrucât, poziţia sa este determinată univoc prin coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} ale unui punct *O* aparţinând rigidului, înregistrate faţă de sistemul cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$.

10.1.2.2 Distribuţia de viteze

Fie un punct oarecare aparţinând rigidului *(C)*, punct notat cu *M* şi reprezentat în figura 10.1b. Relaţia de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării de translaţie a solidului rigid se obţine derivând în raport cu timpul în ambii membrii, relaţia vectorială:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r} \tag{10.1}$$

și ţinând seama că:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}, \ \dot{\bar{r}}_{10} = \bar{v}_0, \ \dot{\bar{r}} = 0 \ , \tag{10.2}$$

rezultă astfel relaţia:

$$\bar{v} = \bar{v}_0, \tag{10.3}$$

conform căreia, *în cazul mişcării de translaţie a unui solid rigid vitezele instantanee ale punctelor rigidului sunt egale între ele.* Fiind vorba de viteze la un moment dat (*t*), vectorii viteză ai punctelor rigidului sunt variabili ca modul şi direcţie în timpul mişcării acestuia. Singura mişcare de translaţie în care vitezele punctelor rigidului rămân constante, fiind şi egale, este cea a mişcării rectilinii şi uniforme.

10.1.2.3 Distribuţia de acceleraţii

Legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării de translaţie a solidului rigid se obţine derivând de două ori în raport cu timpul relaţia (10.1) sau o dată în raport cu timpul relaţia (10.3). Se obţine astfel relaţia:

$$\bar{a} = \bar{a}_0, \tag{10.4}$$

întrucât,

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\ddot{\overline{r}}_1 = \overline{a},\ \ddot{\overline{r}}_{10} = \overline{a}_0,\ \ddot{\overline{r}} = 0 \tag{10.5}$$

sau

$$\dot{\overline{v}} = \overline{a},\ \dot{\overline{v}}_0 = \overline{a}_0 . \tag{10.6}$$

Relaţia (10.4) arată că la un moment dat (*t*), *acceleraţiile punctelor aparţinând unui rigid aflat în mişcare de translaţie sunt egale între ele* (fig. 10.1).

În cazul mişcării de translaţie rectilinie şi uniform variată, acceleraţiile punctelor rigidului sunt egale între ele şi constante în timpul mişcării.

10.1.3 Mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul unui ax fix

10.1.3.1 Studiul geometric al mişcării

*Un solid rigid execută o **mişcare de rotaţie în jurul unui ax fix** dacă în timpul mişcării două puncte aparţinând rigidului rămân fixe în spaţiu.*

Aceste două puncte determină axul fix în jurul căruia se roteşte solidul rigid. În figura 10.2 s-a reprezentat un solid rigid *(C)* care execută o mişcare de rotaţie în jurul axului fix (Δ). Mişcarea de rotaţie a rigidului *(C)* este definită la un moment dat (*t*) prin poziţia axului de rotaţie, sensul de rotaţie al rigidului în jurul acestui ax şi valoarea vitezei unghiulare, parametri determinaţi în mod univoc de către *vectorul de rotaţie* $\overline{\varpi}$ care are următoarele caracteristici:

a) *punctul de aplicaţie:* plasat oriunde pe axul de rotaţie (Δ);

b) *suportul/direcția:* reprezentat prin axul de rotaţie (Δ);

c) *sensul*: pe acest suport astfel dirijat încât, pentru observatorul plasat cu picioarele în origine şi cu capul în extremitatea vectorului $\overline{\varpi}$, rotaţia rigidului să aibă loc de la dreapta la stânga;

d) *mărimea*: în general variabilă de la un moment la altul astfel încât, transformată la scara vitezelor unghiulare, să reprezinte în orice moment valoarea vitezei unghiulare de rotaţie $\overline{\varpi}$ a rigidului la momentul considerat.

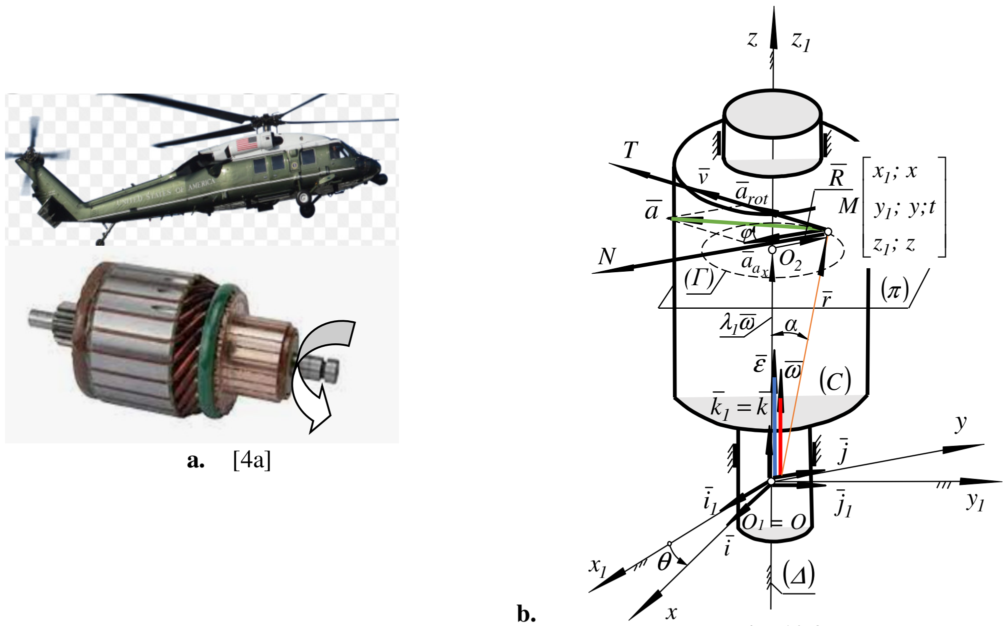
Rezultă că vectorul $\overline{\omega}$ are direcţia axului $(\Delta) \equiv Oz$ şi modulul egal cu viteza unghiulară de rotaţie $\dot{\theta} = \omega$, aceeaşi pentru toate punctele rigidului la un moment dat. Pe baza acestor concluzii, vectorul $\overline{\omega}$ este denumit vector *viteză unghiulară* şi are expresia:

$$\overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{k} = \omega\,\overline{k} . \tag{10.7}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Derivata vectorială în raport cu timpul a vectorului viteză unghiulară de rotaţie reprezintă *acceleraţia unghiulară* de rotaţie. Astfel,

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\bar{k} = \varepsilon\bar{k}\,. \tag{10.8}$$



a. [4a]

b.

Fig. 10.2

Rezultă că ***acceleraţia unghiulară*** $\bar{\varepsilon}$ are *direcţia* axului de rotaţie $(\Delta) \equiv Oz$ şi *modulul* egal cu derivata a doua în raport cu timpul a unghiului de rotaţie, adică:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}. \tag{10.9}$$

Fie un punct material aparţinând rigidului *(C)* aflat în mişcare de rotaţie în jurul axului fix (Δ) (fig. 10.2b).

Între coordonatele x_1, y_1, z_1 şi *x, y, z* ale acestui punct înregistrate faţă de sistemul fix respectiv, faţă de cel mobil, există relaţia matriceală de legătură:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{10.10}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

din care rezultă *ecuaţiile parametrice carteziene ale traiectoriei punctului M*:

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z_1 = z = const. \qquad (10.11)$$

Eliminând parametrul θ din relaţia (10.11) şi având în vedere că x, y, z sunt mărimi constante, rezultă:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = R^2, \quad z_1 = z = const. \qquad (10.12)$$

Ecuaţiile (10.12) arată că la mişcarea de rotaţie traiectoria punctului M este un cerc de rază R cu centrul pe axul fix (Δ), situat într-un plan (π), normal pe axa O_1z_1, de cotă $z_1 = z$. Întrucât punctul M a fost ales arbitrar, concluziile se extind asupra tuturor punctelor rigidului.

Rigidul (C) aflat în mişcare de rotaţie în jurul axului fix (Δ) *posedă un singur grad de libertate* întrucât, poziţia sa în spaţiu este determinată de unghiul θ, numit *unghi de rotaţie* (fig. 10.2). Ca exemple de mişcări de rotaţie în jurul unui ax fix se pot aminti: mişcarea de rotaţie a rotoarelor motoarelor electrice, pneumatice şi hidraulice, a rotoarelor turbinelor şi pompelor centrifugale etc.

10.1.3.2 Distribuţia de viteze

În figura 10.2b se alege pe axul fix de rotaţie (Δ) un punct fix O care coincide cu originea O_1 a sistemului de referinţă cartezian fix şi constituie în acelaşi timp originea sistemului cartezian mobil *Oxyz,* solidar cu rigidul. Se notează cu $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului M având punctul de aplicaţie în O. Se plasează vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ corespunzător unui moment (t), cu punctul de aplicaţie în O. Viteza $\bar{v}$ a punctului M la momentul ales este reprezentată prin vectorul produs vectorial $\bar{\omega}\times\bar{r}$,

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}. \qquad (10.13)$$

Într-adevăr, ***vectorii*** $\bar{v}$ şi $\bar{\omega}\times\bar{r}$ au *punctul de aplicaţie* în M, *suportul* reprezentat prin tangenta la traiectoria circulară (Γ) corespunzătoare punctului M şi *sensul* corespunzător sensului vectorului $\bar{\omega}$. Conform relatiei iniţiale, valoarea vitezei $\bar{v}$ este dată de expresia $v = \omega R$, iar valoarea produsului vectorial $\bar{\omega}\times\bar{r}$ este:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$|\bar{\varpi} \times \bar{r}| = |\bar{\varpi}||\bar{r}|sin\alpha = \omega R \tag{10.14}$$

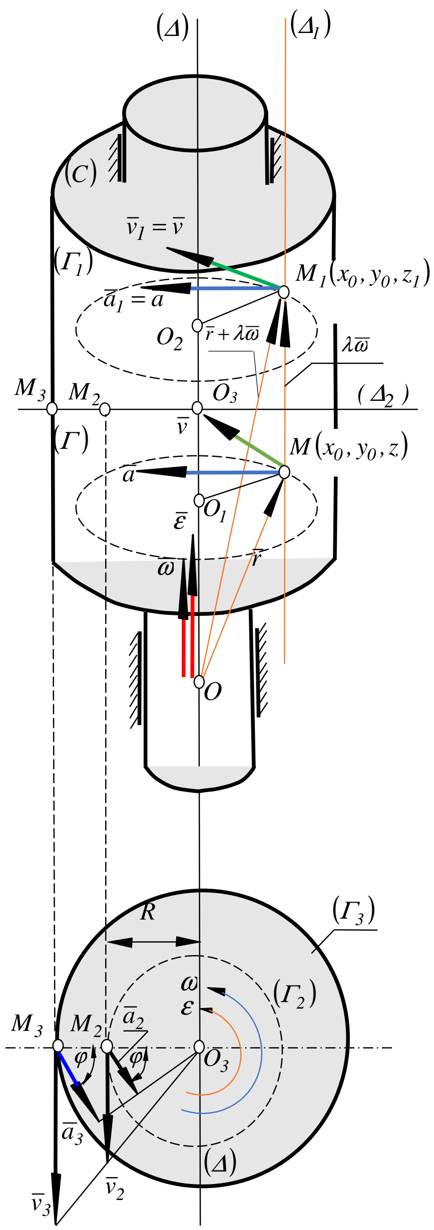


Fig. 10.3

În concluzie, viteza devine:

$$v = |\bar{\varpi} \times \bar{r}| = \omega R. \tag{10.15}$$

Deoarece toate caracteristicile vectorilor $\bar{v}$ şi $\bar{\varpi} \times \bar{r}$ sunt identice, se ajunge la concluzia că relaţia (10.13) constituie *legea de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui ax fix.*

Proiectând (10.13) pe axele sistemului de referinţă mobil *Oxyz*, se obţin proiecţiile vitezei punctului *M(x, y, z)* pe aceste axe:

$$v_x = -\omega y, \; v_y = \omega x, \; v_z = 0. \tag{10.16}$$

Modulul vectorului viteză, având în vedere (10.16),este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R, \tag{10.17}$$

unde: R este distanţa de la punctul M la axul de rotaţie.

Din expresiile proiecţiilor vitezei $\bar{v}$ pe axele sistemului mobil, rezultă unele ***proprietăţi ale distribuţiei de viteze în cazul mişcării de rotaţie***:

a) Punctele care au viteza egală cu zero sunt cele care aparţin axului de rotaţie. Într-adevăr, egalând cu zero proiecţiile (10.16) ale vitezei, se obţin: $x = y = 0$ care sunt ecuaţiile axei Oz;

b) Vitezele punctelor rigidului sunt conţinute în plane normale pe axul de rotaţie $(\Delta) \equiv Oz$ ($v_z = 0,$ conform relaţiei (10.16));

c) Punctele situate pe o paralelă cu axul de rotaţie au aceeaşi viteză (fig. 10.3). Această proprietate rezultă din faptul că, în expresiile (10.16) nu apare cota z a punctului, deci toate punctele care au o anumită abscisă x_0 şi o anumită ordonată y_0 au o aceeaşi viteză. Aceste puncte se găsesc pe dreapta $x = x_0$, $y = y_0$ care este paralelă cu axul de rotaţie.

Proprietatea aceasta poate fi demonstrată şi vectorial introducând în (10.13) vectorii de poziţie $\bar{r}$, respectiv $\bar{r} + \lambda\bar{\omega}$, ce definesc punctele M şi M_1 aparţinând rigidului şi plasate pe dreapta (Δ_1) paralelă cu axul de rotaţie (Δ).

Vitezele celor două puncte au expresiile:

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}, \quad \bar{v}_1 = \bar{\omega}\times(\bar{r} + \lambda\bar{\omega}) = \bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{10.18}$$

astfel că:

$$\bar{v} = \bar{v}_1. \tag{10.19}$$

Relaţia (10.19) poate fi extinsă la toate punctele de pe dreapta (Δ_1) întrucât, punctele M şi M_1 au fost alese arbitrar;

d) Vitezele punctelor aparţinând rigidului, situate pe o dreaptă (Δ_2) perpendiculară pe axul de rotaţie (Δ) pe care îl intersectează, cresc proporţional cu distanţa R de la aceste puncte la axul fix de rotaţie, conform cu (10.17) şi sunt normale pe dreapta (Δ_2) având sensul mişcării.

10.1.3.3 Distribuţia de acceleraţii

Legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării de rotaţie în jurul unui ax fix a unui solid rigid se obţine derivând vectorial în raport cu timpul legea de distribuţie a vitezelor dată de (10.13). Ţinând seama că:

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a}, \quad \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}, \quad \dot{\bar{r}} = \bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{10.20}$$

se obţine:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) \tag{10.21}$$

sau

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + (\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{\omega} - \omega^2\bar{r}. \tag{10.22}$$

Relaţia (10.21) respectiv, (10.22), constituie *legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui ax fix.*

Componenta $\overline{\varepsilon}\times\overline{r}$ poartă numele de ***acceleraţie de rotaţie***, iar componenta $\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r})$ poartă numele de ***acceleraţie axipetă,*** notându-se:

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r}=\overline{a}_{rot}\,,\qquad \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r})=\overline{a}_{ax}. \tag{10.23}$$

Aceste componente coincid cu componentele intrinseci ale acceleraţiei punctului M, punct aflat în mişcare circulară:

$$\overline{a}_{rot}=\overline{a}_{\tau}\,,\qquad \overline{a}_{ax}=\overline{a}_{\nu} \tag{10.24}$$

şi sunt indicate în figura 10.2.

Având în vedere notaţiile din figura 10.2, se poate scrie relaţia:

$$\overline{r}=\lambda_1\overline{\omega}+\overline{R}\,, \tag{10.25}$$

care introdusă în relaţiile (10.23), conduce la:

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r}=\overline{\varepsilon}\times(\lambda_1\overline{\omega}+\overline{R})=\overline{\varepsilon}\times\overline{R}\,,$$

$$\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r})=\overline{\omega}\times[\overline{\omega}\times(\lambda_1\overline{\omega}+\overline{R})]=-\omega^2\,\overline{R}. \tag{10.26}$$

Acceleraţia punctului M (fig. 10.2), având în vedere (10.21) şi (10.26), ajunge la forma:

$$\overline{a}=\overline{\varepsilon}\times\overline{R}-\omega^2\overline{R} \tag{10.27}$$

sau, notând cu $\overline{\tau}$ şi $\overline{\nu}$ versorii axelor sistemului intrinsec de referinţă corespunzător mişcării punctului M pe traiectoria (Γ) de rază R, relaţia (10.27) devine:

$$\overline{a}=\overline{a}_{\tau}+\overline{a}_{\nu}=\overline{\tau}\,\varepsilon R+\overline{\nu}\,\omega^2 R\,. \tag{10.28}$$

Modulul şi direcţia vectorului acceleraţie, conform cu (10.28), se determină cu relaţiile:

$$a=R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\,,\ tg\,\varphi=\frac{a_{\tau}}{a_{\nu}}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\,. \tag{10.29}$$

Proiectând (10.22) sau (10.27) pe axele sistemului mobil *Oxyz* din figura 10.2, se obţin componentele carteziene ale acceleraţiei $\overline{a}$ şi anume:

$$a_x=-\varepsilon y-\omega^2 x\,,\quad a_y=\varepsilon x-\omega^2 y\,,\quad a_z=0. \tag{1030}$$

Cu ajutorul expresiilor (10.30) se poate deduce *modulul acceleraţiei* punctului M :

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\sqrt{x^2+y^2}=R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\,. \qquad (10.31)$$

Din expresiile (10.30) rezultă următoarele ***proprietăţi ale distribuţie de acceleraţii în cazul mişcării de rotaţie***:

a) Punctele care au acceleraţia egală cu zero sunt punctele de pe axul de rotaţie. Într-adevăr, egalând cu zero proiecţiile a_x şi a_y rezultă:

$$-\omega^2 x-\varepsilon y=0,\quad \varepsilon x-\omega^2 y=0. \qquad (10.32)$$

Sistemul omogen (10.32) are determinantul său:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-\omega^2 & -\varepsilon\\ \varepsilon & -\omega^2\end{vmatrix}=\omega^4+\varepsilon^2 \qquad (10.33)$$

diferit de zero, deoarece ω şi ε nu pot fi concomitent nuli astfel încât, sistemul nu poate să admită decât soluţia banală $x = y = 0$ care reprezintă ecuaţia axului de rotaţie $(\Delta)\equiv Oz$;

b) Acceleraţiile punctelor rigidului sunt conţinute în plane normale pe axul de rotaţie deoarece $a_z=0$;

c) Punctele situate pe o paralelă cu axul de rotaţie au aceeaşi acceleraţie (fig. 10.3), deoarece cota z a acestor puncte nu figurează în expresiile (10.30), coordonatele x şi y fiind aceleaşi pentru toate punctele de pe această paralelă. Proprietatea poate fi demonstrată şi vectorial introducând în expresia (10.21) a acceleraţiei vectorii de poziţie $\bar{r}$, respectiv $\lambda\bar{\omega}+\bar{r}$, care deservesc punctele M şi M_1 din figura 10.3 situate pe dreapta (Δ_1) , dreaptă paralelă cu axul de rotaţie. Se obţine astfel:

$$\bar{a}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}), \qquad (10.34)$$

$$\bar{a}_1=\bar{\varepsilon}\times(\lambda\bar{\omega}+\bar{r})+\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times(\lambda\bar{\omega}+\bar{r})]=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}), \qquad (10.35)$$

astfel că,

$$\bar{a}=\bar{a}_1\,; \qquad (10.36)$$

d) Punctele solidului rigid aparţinând unei drepte perpendiculare pe axul de rotaţie au vectorii acceleraţie paraleli, direcţia lor fiind dată de un unghi φ a cărui tangentă este $tg\,\varphi = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, iar modulul este proporţional cu distanţa R a punctului la axul de rotaţie, conform cu (10.31) şi figura 10.3;

e) Mişcarea de rotaţie a unui solid rigid în jurul unui ax fix în timpul căreia $\omega = constant$, se numeşte ***mişcare de rotaţie uniformă***. În acest caz, acceleraţia unui punct se reduce la componenta intrinsecă normală:

$$a_v = \omega^2 R. \tag{10.37}$$

Cunoscând turaţia n [*rot/min*] a corpului, viteza unghiulară de rotaţie a acestuia se determină cu relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \ [rad/s]. \tag{10.38}$$

f) Dacă $\varepsilon = constant$, mişcarea rigidului se numeşte ***mişcare de rotaţie uniform variată*** putând fi: *uniform accelerată* dacă $\overline{\omega}$ şi $\overline{\varepsilon}$ au acelaşi sens sau *uniform întârziată* dacă au sensuri contrare.

10.1.4 Mişcarea de roto-translaţie a rigidului

10.1.4.1 Studiul geometric al mişcării

Un solid rigid execută o ***mişcare de roto-translaţie*** *dacă o dreaptă solidară cu el păstrează în tot timpul mişcării un suport fix* (Δ).

Pentru studiul mişcării se consideră un sistem cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încât, axa O_1z_1 să coincidă cu axa mişcării de roto-translaţie şi un sistem cartezian mobil $Oxyz$ invariabil legat de solidul rigid, a cărui axă Oz coincide cu axa O_1z_1, originile O_1 şi O ale celor două sisteme de referinţă fiind plasate pe axa (Δ) (fig. 10.4). Întrucât rigidul execută o mişcare de translaţie de-a lungul axei mişcării (originea O a sistemului mobil se deplasează pe axa O_1z_1) şi o mişcare de rotaţie în jurul acestei axe, parametrii care dau poziţia sistemului mobil, deci şi a rigidului, faţă de sistemul fix sunt:

$$z_0 = z_0(t)\ , \qquad \theta = \theta(t). \tag{10.39}$$

Rezultă că, *rigidul aflat în mişcare de roto-translaţie are două grade de libertate*.

Fie M un punct material aparţinând solidului rigid *(C)* care execută o mişcare de roto-translaţie în raport cu axa (Δ) (fig. 10.4). Între coordonatele x_1, y_1, z_1 şi *x, y, z* ale acestui punct înregistrate faţă de sistemul fix, respectiv faţă de cel mobil, există relaţia matriceală de legătură:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ z_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{10.40}$$

din care se obţin *ecuaţiile parametrice carteziene ale traiectoriei punctului M:*

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z_1 = z_0 + z. \tag{10.41}$$

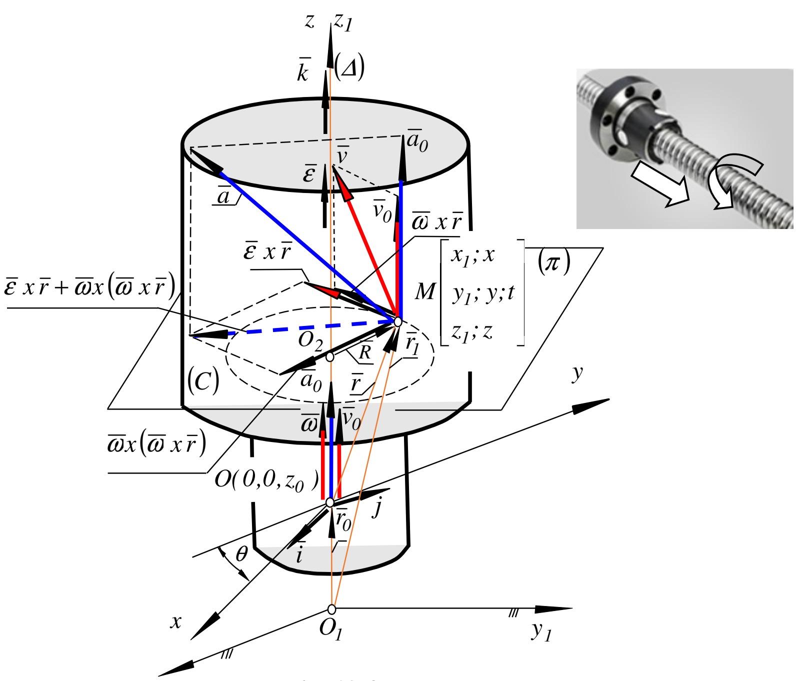


Fig. 10.4

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

În acest caz şi conform cu (10.40), traiectoriile punctelor rigidului sunt elice de pas variabil situate pe un cilindru de rază $R=\sqrt{x^2+y^2}$, excepţie făcând doar punctele de pe axă, care descriu axa. Ca exemple de mişcări de roto-translaţie se pot prezenta: mişcarea mandrinei de la o maşină de găurit, mişcarea unei piuliţe pe un şurub, mişcarea unui glonț în interiorul ţevii unei arme ghintuite, mişcarea ansamblului mobil al unui modul de roto-translaţie din structura mecanică a unui manipulator sau robot industrial etc.

10.1.4.2 Distribuţia de viteze

Având în vedere *particularităţile mişcării* se constată următoarele:

a) Originea O a sistemului de referinţă mobil are o mişcare rectilinie pe dreapta O_1z_1, astfel că:

$$\bar{r}_0=\overline{O_1O}=z_0\bar{k},\ \bar{v}_0=\dot{\bar{r}}_0=\dot{z}_0\bar{k}=v_0\bar{k},\ \bar{a}_0=\dot{\bar{v}}_0=\ddot{z}_0\bar{k}=a_0\bar{k}. \tag{10.42}$$

b) Planul xOy al sistemului mobil rămâne paralel cu planul fix $x_1O_1y_1$, astfel încât vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ vor avea aceleaşi expresii ca şi la mişcarea de rotaţie:

$$\bar{\omega}=\dot{\theta}\bar{k}=\omega\bar{k},\quad \bar{\varepsilon}=\ddot{\theta}\bar{k}=\varepsilon\bar{k}. \tag{10.43}$$

Între vectorii de poziţie $\bar{r}_0, \bar{r}_1$ şi $\bar{r}$ din figura 10.4 există relaţia:

$$\bar{r}_1=\bar{r}_0+\bar{r}, \tag{10.44}$$

care derivată vectorial în raport cu timpul conduce la expresia:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{10.45}$$

întrucât,

$$\dot{\bar{r}}_1=\bar{v},\ \ \dot{\bar{r}}_0=\bar{v}_0,\ \ \dot{\bar{r}}=\bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{10.46}$$

Relaţia vectorială (10.45) reprezintă *legea de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării de roto-translaţie a solidului rigid.*

Proiecţiile vectorului viteză pe axele sistemului mobil, având în vedere relaţiile (10.42), (10.43) şi (10.45), sunt:

$$v_x=-\omega y,\ \ v_y=\omega x,\ \ v_z=v_0. \tag{10.47}$$

Din expresiile (10.47) rezultă următoarele ***proprietăţi ale distribuţiei de viteze în cazul mişcării de roto-translaţie***:

a) nu există puncte ale rigidului a căror viteză să fie nulă $\left(v_z = v_0 \neq 0\right)$;

b) vitezele punctelor de pe axa mişcării de roto-translaţie sunt minime şi egale cu $\overline{v}_0$;

c) proiecţiile vitezelor tuturor punctelor rigidului pe axa mişcării sunt constante şi egale cu $\overline{v}_0$, ceea ce rezultă înmulţind scalar cu $\overline{k} = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$ relaţia vectorială (10.45);

d) vitezele punctelor situate pe o dreaptă $\left(\Delta_1\right)$ paralelă cu axa $\left(\Delta\right)$ sunt egale;

Fie M şi M_1 două puncte situate pe o dreaptă paralelă cu axa mişcării. Vitezele acestor puncte sunt conform cu (10.45) şi figura 10.5:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}, \quad \overline{v}_1 = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \left(\overline{r} + \lambda\overline{\omega}\right) = \overline{v}\,, \tag{10.48}$$

astfel că:

$$\overline{v} = \overline{v}_1\,, \tag{10.49}$$

relaţie ce poate fi extinsă la toate punctele de pe dreapta $\left(\Delta_1\right)$, întrucât punctele M şi M_1 au fost alese arbitrar;

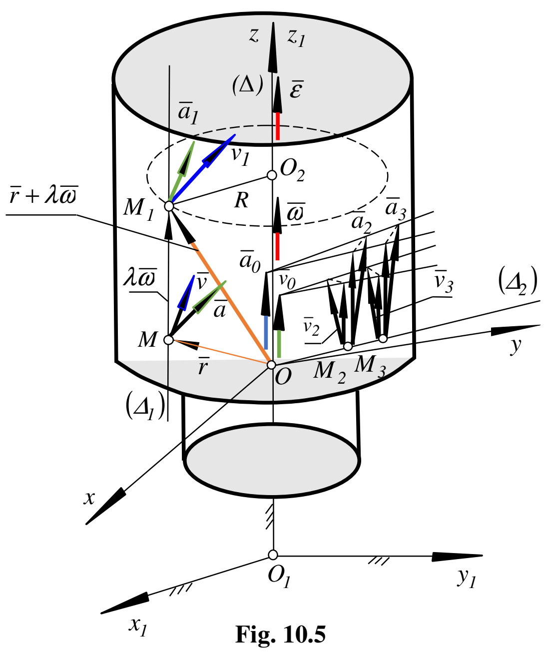


Fig. 10.5

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

e) vitezele punctelor aparţinând rigidului, situate pe o dreaptă (Δ_2) (fig. 10.5) normală pe axa (Δ) a mişcării pe care o intersectează, variază liniar (vârfurile vectorilor viteză de pe dreapta (Δ_2) se găsesc pe o dreaptă). Această proprietate este o consecinţă a relaţiilor (10.47), care sunt liniare în coordonatele *x* şi *y*.

10.1.4.3 Distribuţia de acceleraţii

Legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării de roto-translaţie a solidului rigid se obţine derivând vectorial în raport cu timpul legea de distribuţie a vitezelor 10.45). Ţinând seama că:

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a},\ \dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0,\ \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon},\ \dot{\bar{r}} = \bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{10.50}$$

se obţine:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}), \tag{10.51}$$

sau

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + (\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{\omega} - \omega^2\bar{r}\ . \tag{10.52}$$

Relaţia (10.51), respectiv (10.52), constituie l*egea de distribuţie a acceleraţiilor la mişcarea de roto-translaţie a solidului rigid.*

Similar cu distribuţia de viteze, se pot obţine proiecţiile acceleraţiei pe axele sistemului mobil, având în vedere (10.42), (10.43) şi (10.52). Astfel,

$$a_x = -\varepsilon y - \omega^2 x,\quad a_y = \varepsilon x - \omega^2 y,\quad a_z = a_0\,. \tag{10.53}$$

Din expresiile (10.53) rezultă următoarele ***proprietăţi ale distribuţiei de acceleraţii în cazul mişcării de roto-translaţie***:

a) nu există puncte ale rigidului a căror acceleraţie să fie egală cu zero $(a_z = a_0 \neq 0)$;

b) punctele situate pe axa mişcării de roto-translaţie au acceleraţiile minime şi egale cu a_0 (fig. 10.5);

c) punctele situate pe o dreaptă (Δ_1) paralelă cu axa mişcării au acceleraţii egale, întrucât componentele acceleraţiei (10.53) nu depind de cota z;

d) punctele aparţinând rigidului situate pe o dreaptă (Δ_2) ce intersectează normal axa mişcării, au acceleraţii care variază liniar (vârfurile vectorilor

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

accelerație ale diferitelor puncte de pe dreapta (Δ_2) se găsesc pe o dreaptă), întrucât expresiile (10.53) ale proiecțiilor accelerațiilor sunt liniare în coordonatele *x* și *y*;

e) proiecțiile accelerațiilor tuturor punctelor rigidului pe axa mișcării sunt constante și egale cu $\overline{a}_0$, proprietate care se obține înmulțind scalar cu versorul axei mișcării, relația (10.51).

10.1.4.4 Mişcarea de şurub

Un caz particular al mişcării de roto-translaţie este cel al *mişcării de şurub*, caz în care între parametrii z_0 şi θ există o relaţie de forma:

$$z_0 = k\theta. \tag{10.54}$$

De remarcat că în acest caz, *rigidul are un singur grad de libertate*. Pentru determinarea constantei *k* în funcţie de pasul şurubului se observă că la rotaţia şurubului cu un unghi $\theta = 2\pi$, acesta înaintează cu un pas *p*. Rezultă astfel:

$$k = \frac{p}{2\pi}. \tag{10.55}$$

Introducând relaţia (10.55) în (10.54), se obţine:

$$z_0 = \frac{p}{2\pi}\theta. \tag{10.56}$$

Derivând succesiv expresia (10.56) în raport cu timpul, rezultă:

$$v_0 = \dot{z}_0 = \frac{p}{2\pi}\omega, \quad a_0 = \dot{v}_0 = \frac{p}{2\pi}\varepsilon. \tag{10.57}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

10.2 Probleme rezolvate [9]

10.2.1. Un solid rigid se roteşte cu turaţia n = 3000 *rot/min* în jurul axei fixe (Δ) de ecuaţie $x_1 = y_1 = z_1$. Să se determine viteza unui punct oarecare *M* al solidului rigid în raport cu sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, respectiv în raport cu sistemul de referinţă mobil *Oxyz* (fig. 10.6). Să se stabilească de asemenea, relaţiile de legătură între coordonatele unui punct *M* al rigidului înregistrate faţă de cele două sisteme de referinţă.

Soluţie:

Cosinusurile directoare ale axei de rotaţie sunt:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{1}$$

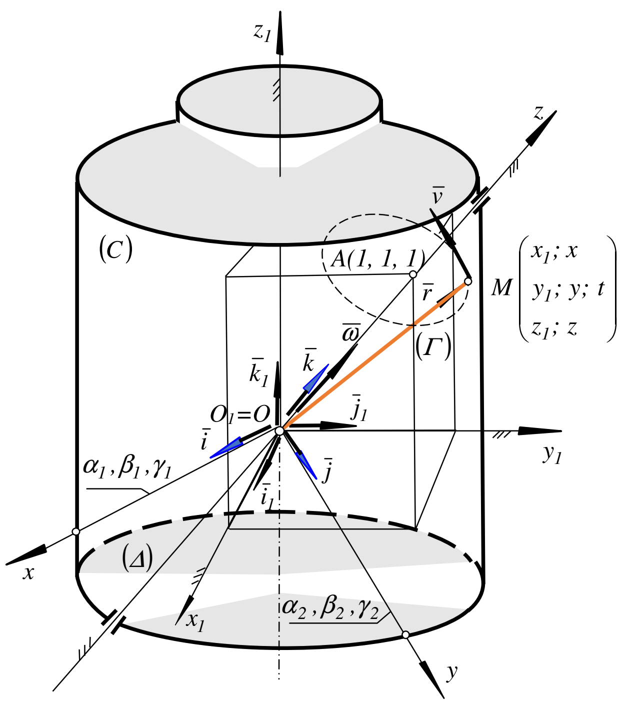


Fig. 10.6

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

iar modulul vectorului $\overline{\omega}$ este:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{\pi}{30} 3000 = 100\pi \ \ rad/s. \qquad (2)$$

Componentele vectorului viteză unghiulară pe axele sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$ vor fi egale între ele, întrucât cosinusurile directoare ale suportului vectorului $\overline{\omega}$ au aceeaşi valoare, în conformitate cu (1). Astfel,

$$\omega_{x1} = \omega_{y1} = \omega_{z1} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Viteza unui punct M al rigidului înregistrat faţă de sistemul de referinţă fix se determină astfel:

$$\overline{v} = \overline{\omega}\, x\, \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i}_1 & \overline{j}_1 & \overline{k}_1 \\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \frac{10\pi}{\sqrt{3}} \left[(z_1 - y_1)\overline{i}_1 + (x_1 - z_1)\overline{j}_1 + (y_1 - x_1)\overline{k}_1 \right]. \qquad (4)$$

Exprimând viteza punctului M faţă de un sistem de referinţă mobil $Oxyz$, invariabil legat de solidul rigid, se obţine:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = 100\pi(-y\overline{i} + x\overline{j}). \qquad (5)$$

Notând cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1 \div 3$, cosinusurile directoare ale axelor sistemului de referinţă mobil $Oxyz$ în raport cu axele sistemului de referinţă fix şi utilizând tabelul 10.1,

Tabelul 10.1

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}_1$	α_1	α_2	α_3
$\overline{j}_1$	β_1	β_2	β_3
$\overline{k}_1$	γ_1	γ_2	γ_3

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

se pot scrie relaţiile:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \alpha_1 \bar{i}_1 + \beta_1 \bar{j}_1 + \gamma_1 \bar{k}_1 & \qquad \bar{i}_1 &= \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k} \\ \bar{j} &= \alpha_2 \bar{i}_1 + \beta_2 \bar{j}_1 + \gamma_2 \bar{k}_1 & \bar{j}_1 &= \beta_1 \bar{i} + \beta_2 \bar{j} + \beta_3 \bar{k} \\ \bar{k} &= \alpha_3 \bar{i}_1 + \beta_3 \bar{j}_1 + \gamma_3 \bar{k}_1 & \bar{k}_1 &= \gamma_1 \bar{i} + \gamma_2 \bar{j} + \gamma_3 \bar{k}, \end{aligned} \tag{6}$$

prin care se poate trece de la sistemul de referinţă fix la cel mobil, respectiv de la sistemul de referinţă mobil la cel fix.

Vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului *M* în raport cu originile *O* şi O_1 ale celor două sisteme de referinţă se poate exprima astfel:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1 \ . \tag{7}$$

Introducând în (7) primul set de relaţii (6) şi identificând coeficienţii versorilor $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$, se obţin relaţiile de legătură între coordonatele punctului *M* exprimate în raport cu sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi coordonatele aceluiaşi punct înregistrate faţă de sistemul mobil *Oxyz*. *A*stfel,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y_1 &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Introducând al doilea set de relaţii (6) în relaţia (7) şi identificând coeficienţii versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, se obţin relaţiile:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \\ z &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 \ . \end{aligned} \tag{9}$$

10.2.2. Un corp se roteşte în jurul unui ax care trece prin punctul $M_0(2, 1, 3)$ cu viteza unghiulară $\omega = 25\ s^{-1}$, cosinusurile directoare ale vectorului

$\overline{\omega}$ fiind: $\alpha = 0{,}60$, $\beta = 0{,}48$, $\gamma = 0{,}64$. Să se determine viteza punctului $M(10,\ 7,\ 11)$ a corpului (fig. 10.7).

Soluţie:

Notând ca în figura 10.7 vectorii de poziţie ai punctelor M_0 şi M, viteza punctului M conform cu (10.15) este:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \qquad (1)$$

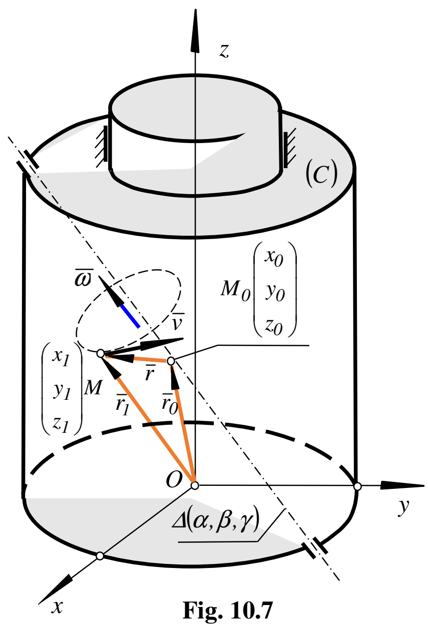


Fig. 10.7

$$v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Proiecţiile vitezei punctului M pe axele sistemului cartezian $Oxyz$ sunt:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$
$$v_z = \omega_x y - \omega_y x. \qquad (3)$$

Componentele carteziene ale vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$ şi ale vectorului de poziţie $\overline{r}$ sunt:

$$\omega_x = \omega \cdot \alpha = 25 \cdot 0{,}60 = 15 \quad 1/s$$
$$\omega_y = \omega \cdot \beta = 25 \cdot 0{,}48 = 12 \quad 1/s$$
$$\omega_z = \omega \cdot \gamma = 25 \cdot 0{,}64 = 16 \quad 1/s$$

$$x = x_1 - x_0 = 10 - 2 = 8$$
$$y = y_1 - y_0 = 7 - 1 = 6$$
$$z = z_1 - z_0 = 11 - 3 = 8\,. \qquad (4)$$

Înlocuind în (3) mărimile obţinute în relaţiile (4), se obţin componentele carteziene ale vitezei instantanee $\overline{v}$. Astfel,

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

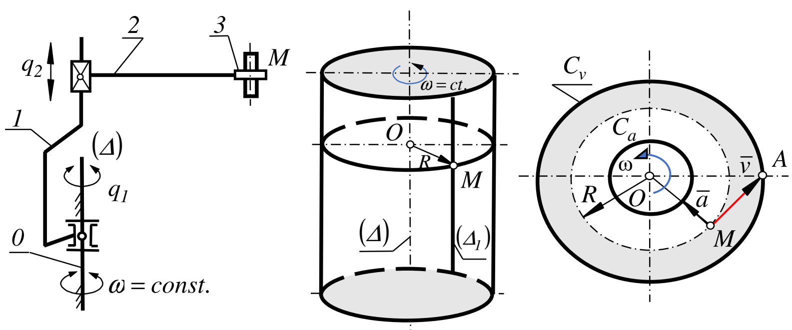
$$v_x = 12 \cdot 8 - 16 \cdot 6 = 0,\ \ v_y = 16 \cdot 8 - 15 \cdot 8 = 8,\ \ v_z = 15 \cdot 6 - 12 \cdot 8 = -6. \qquad (5)$$

Modulul vitezei punctului *M* este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{64 + 36} = 10\ m/s\,. \qquad (6)$$

10.2.3. Se consideră un robot industrial a cărui schemă cinematică structurală este prezentată în figura 10.8a. Se presupune că robotul manipulează piese de formă cilindrică utilizând mişcarea pe verticală pentru depunerea pieselor într-un depozit. Referindu-ne la mişcarea de rotaţie uniformă în jurul axului *(Δ)* cu viteza unghiulară ω, se cer, să se determine locurile geometrice ale extremităţilor vectorilor viteză $\overline{v}$ şi acceleraţie $\overline{a}$ ai punctului caracteristic *M*, daţi ca mărime şi direcţie.

Soluţie:



a. **b.** **c.**

Fig. 10.8

Punctul caracteristic *M,* aparţinând dreptei caracteristice *(Δ_1)* paralelă cu axul de rotaţie *(Δ)* se mişcă pe un cerc de rază *R*, situat într-un plan perpendicular pe axul *(Δ)* (fig. 10.8b).

Viteza punctului *M,* conform cu (10.15), are expresia:

$$v = \omega R\,. \qquad (1)$$

Acceleraţia punctului caracteristic, având în vedere (10.28), se calculează astfel:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2}\,,\quad a_\tau = \varepsilon R = 0,\quad (\varepsilon = \dot{\omega} = 0),\quad a_\nu = \omega^2 R\,. \tag{2}$$

$$a = \omega^2 R\,. \tag{3}$$

Extremităţile vectorilor viteză $\overline{v}$ şi acceleraţie $\overline{a}$ descriu cercuri concentrice în O (fig. 10.8c). Dar, cum dreapta caracteristică (Δ_I) are o infinitate de puncte M, locurile geometrice ale extremităţilor vectorilor $\overline{v}$ şi $\overline{a}$ vor fi cilindrii C_v şi C_a, ale căror raze se deduc din triunghiul OMA:

$$R_{C_v} = OA = \sqrt{OM^2 + MA^2} = R\sqrt{1+\omega^2}\,, \tag{4}$$

$$R_{C_a} = OM - MB = R(1-\omega^2)\,. \tag{5}$$

10.2.4. Mecanismul din figura 10.9 se compune din corpurile A şi B care pot executa numai mişcări de translaţie astfel ca ele să rămână mereu în contact în punctul C. Cunoscând valoarea deplasării orizontale h a piesei A, se cere valoarea deplasării h_1 a piesei B.

Soluţie:

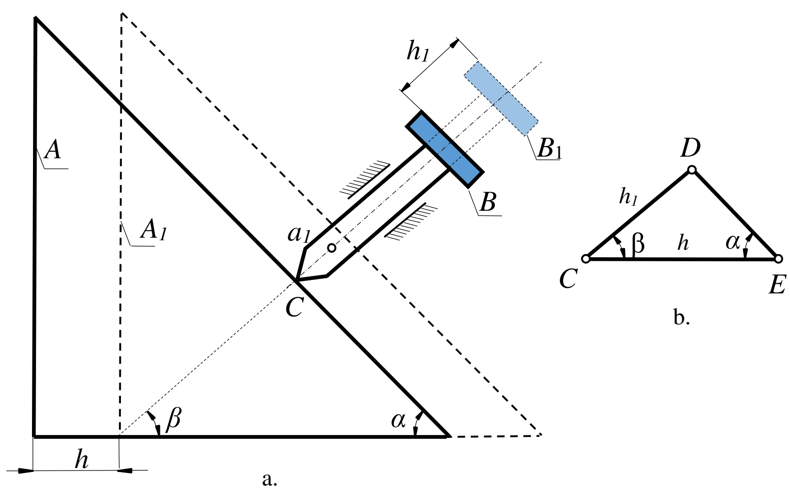


Fig. 10.9

Poziţiile finale ale pieselor A şi B sunt A_1 şi B_1. Valoarea deplasării h_1 a piesei B se deduce din figură, respectiv CD este deplasarea punctului de contact C de pe piesa

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

B, iar *CE* este deplasarea aceluiaşi punct situat pe piesa *A*. Cum $CD = h_1$ iar $CE = h$, din triunghiul *CDE* rezultă:

$$\frac{h}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{h_1}{\sin\alpha} = \frac{DE}{\sin\beta} \tag{1}$$

$$h_1 = h \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{2}$$

În raport cu pana *A*, vârful piesei *B* se urcă cu *DE,* adică, conform cu (1):

$$DE = h \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3}$$

10.2.5. Rotorul unei maşini electrice are o turaţie de regim $n = 1000$ *rot/min*, când i se întrerupe alimentarea cu curent electric. Ca urmare a rezistenţelor pe care le întâmpină, după 700 rotaţii din momentul întreruperii alimentării, rotorul se opreşte. Cunoscând raza rotorului $r = 20$ *cm*, să se determine:

a) timpul după care s-a oprit;

b) acceleraţia unui punct de pe periferia rotorului după ce rotorul a făcut 200 de rotaţii din momentul întreruperii alimentării;

Soluţie:

a) Considerând că mişcarea rotorului din momentul întreruperii alimentării până la oprire este o *mişcare de rotaţie uniform întârziată*, ecuaţiile mişcării sunt:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\varepsilon t_0^2 + \omega_0 t_0 . \tag{1}$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t_0 = 0, \tag{2}$$

unde:

φ este unghiul în *radiani* corespunzător la 700 de rotaţii;

ω_0 este viteza unghiulară de regim;

ε este acceleraţia unghiulară a rotorului;

ω este viteza unghiulară în momentul opririi;

t_0 este timpul cât durează mişcarea, unghi măsurat din momentul întreruperii alimentării.

Conform datelor problemei, rezultă:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\varphi = 2\pi n_1 = 2\pi 700 \quad rad.$$

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 100}{3} = 104{,}71 \quad 1/s \ . \tag{3}$$

Înlocuind relaţia (3) în (1) şi (2), se obţine:

$$\varepsilon = \frac{\pi 100}{3t_0}, \qquad 2\pi 700 = -\frac{1}{2}\frac{\pi 100}{3}t_0 + \frac{\pi 100}{3}t_0\,, \tag{4}$$

$$t_0 = 14 \cdot 6 = 84 \ s. \tag{5}$$

b) *Acceleraţia unui punct de pe periferia rotorului.*

b1. În mişcarea de regim se consideră că *viteza unghiulară* $\overline{\omega}_0$ *este constantă,* deci $\overline{\varepsilon}_0 = 0$ şi acceleraţia unui punct de pe periferia rotorului va avea numai componentă intrinsecă normală, a cărei valoare este:

$$a_\nu = \omega_0^2\, r = \frac{(\pi 100)^3}{3^3}\ x\ 0{,}2 = 2193{,}24 \ \ m/s^2. \tag{6}$$

b2. În *mişcarea uniform întârziată acceleraţia unghiulară* $\overline{\varepsilon}$ *fiind constantă*, componenta intrinsecă tangenţială a acceleraţiei $\overline{a}_\tau$ a unui punct de pe periferia rotorului va fi ca mărime constantă şi egală cu:

$$a_\tau = \varepsilon\, r = \frac{\pi 100}{3t} r = \frac{\pi 100}{3 \cdot 84} \cdot 0{,}2 = 0{,}2493 \quad m/s^2. \tag{7}$$

Componenta intrinsecă normală $\overline{a}_\nu$ a punctului de pe periferia rotorului în momentul când acesta a făcut 200 de rotaţii după întreruperea alimentării, este:

$$a_\nu = \omega_{200}^2\, r\,, \tag{8}$$

unde: ω_{200} este viteza unghiulară corespunzătoare momentului când rotorul a făcut 200 rotaţii din momentul întreruperii alimentării cu curent a motorului.

Folosind expresiile (1) şi (2) şi având în vedere că $\varepsilon = \frac{\pi 100}{252}$, după eliminarea timpului rezultă:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$400\,\pi = -\frac{1}{2}\varepsilon\, t_{200}^2 + \omega_0 t_{200}\,,$$

$$\omega_{200} = \omega_0 - \varepsilon\, t_{200} \Rightarrow t_{200} = \frac{\omega_0 - \omega_{200}}{\varepsilon}\,, \tag{9}$$

$$400\,\pi = \omega_0 \frac{\omega_0 - \omega_{200}}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{(\omega_0 - \omega_{200})^2}{\varepsilon} = \frac{\omega_0^2 - \omega_{200}^2}{2\,\varepsilon}\,,$$

$$\omega_{200} = \sqrt{\omega_0^2 - 800\,\pi\,\varepsilon} = \sqrt{10966 - 3132{,}796} = 88{,}50 \quad 1/s.$$

Acceleraţia normală este:

$$a_\nu = \omega_{200}^2\, r = (88{,}50)^2\, x\, 0{,}2 = 1566{,}448 \;\; m/s^2. \tag{10}$$

Acceleraţia unui punct de pe periferia rotorului după ce acesta a efectuat 200 de rotaţii din momentul întreruperii alimentării, este:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_\nu\,, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{0{,}2493^2 + 1566{,}448^2}\,, \qquad a = 1581{,}377\, m/s^2 \;. \tag{11}$$

10.2.6. În construcţia modulelor de rotaţie din structura mecanică a manipulatoarelor şi roboţilor sunt incluse traductoare de poziţie de tip *TIRO*. În figura 10.10 este prezentată schema de principiu a antrenării traductorului de poziţie *TIRO 1000* din construcţia modulului *MRE,* respectiv ansamblul de rotaţie a braţului robotului. Să se determine turaţia n_1 la axul de rotaţie al traductorului în funcţie de turaţia arborelui condus, precum şi viteza $\bar{v}_1$ şi acceleraţia $\bar{a}_1$ ale unui punct *M* de pe periferia discului cu fante a traductorului. Se cunosc razele *r* şi *R* ale arborelui condus şi a discului cu fante.

Soluţie:

În figura 10.10 se notează:

- $\omega\,(n)$ - viteza unghiulară, respectiv turaţia de rotaţie a arborelui condus;
- $\omega_1\,(n_1)$ - viteza unghiulară, respectiv turaţia de rotaţie a echipajului mobil al traductorului de poziţie *TIRO 1000*;

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

- $r(r_1)$ - razele roţilor dinţate cu centrul în O şi O_1 peste care este trecută o curea dinţată;

- R - raza discului cu fante al traductorului;

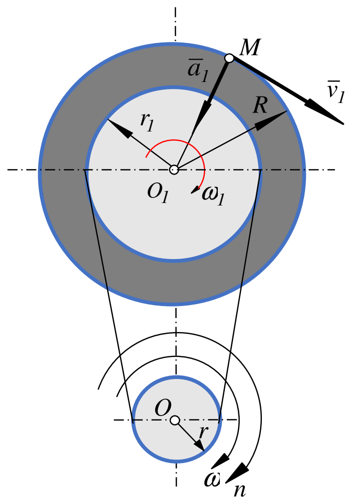


Fig. 10.10

- $\bar{v}_1$ - viteza unui punct arbitrar M de pe periferia discului cu fante.

Întrucât punctele de pe cureaua dinţată au la un moment dat aceeaşi viteză, se poate scrie relaţia:

$$\omega r = \omega_1 r_1 \ . \tag{1}$$

Din relaţia (1) se obţine viteza unghiulară ω_1 şi apoi turaţia n_1 astfel:

$$\omega_1 = \frac{r}{r_1}\omega, \quad n_1 = \frac{30}{\pi}\omega_1 = \frac{30\, r}{r_1}\omega, \tag{2}$$

având în vedere că: $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$. Ştiind că: $\omega = \frac{\pi n}{30}$, relaţiile (2) devin:

$$\omega_1 = \frac{\pi n r}{30 r_1}, \quad n_1 = \frac{r}{r_1} n . \tag{3}$$

Viteza $\bar{v}_1$ a unui punct arbitrar M de pe periferia discului cu fante este tangentă la acest disc, are sensul dat de viteza unghiulară ω_1 şi modulul:

$$v_1 = \omega_1 R = \frac{\pi r R}{30 r_1} n . \tag{4}$$

Acceleraţia $\bar{a}_1$ a punctului M poate fi exprimată prin componentele intrinseci $\bar{a}_\nu$ şi $\bar{a}_\tau$,

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_\nu + \bar{a}_\tau . \tag{5}$$

Componenta normală $\bar{a}_\nu$ este orientată după raza O_1M cu sensul de la M spre centrul O_1 şi are modulul:

$$a_\nu = \omega_1^2 R = \frac{\pi n^2 r^2}{900 r_1^2} R . \tag{6}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Componenta tangenţială $\overline{a}_\tau$ este nulă pentru că $\omega_1 = const.$

$$a_\tau = \varepsilon_1 R = 0, \quad \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0. \tag{7}$$

Astfel, acceleraţia $\overline{a}_1$ este orientată după rază către centrul de rotaţie O_1 şi are mărimea:

$$a_1 = \frac{\pi n^2 r^2}{900\, r_1^2} R\,. \tag{8}$$

10.2.7. Pe scripetele *O* de rază $R = 15\ cm$ se desfăşoară un fir inextensibil în direcţia $\overline{AB}$ după legea $s = 3t^2$. Scriptele este astfel antrenat într-o mişcare de rotaţie (fig. 10.11). Să se determine viteza unghiulară a scripetelui, viteza $\overline{v}$ şi acceleraţia $\overline{a}$ a unui punct de pe periferia scripetelui, la *2* secunde de la începutul mişcării.

Soluţie:

Capătul *B* al firului se mişcă după legea:

$$s = 3t^2\,. \tag{1}$$

Viteza punctului *B* este orientată după direcţia firului, are sensul în jos şi mărimea:

$$v_B = \dot{s} = 6t \quad m/s\,. \tag{2}$$

Firul fiind perfect flexibil şi inextensibil face ca vitezele punctelor sale să fie egale între ele în orice moment al mişcării. Astfel,

$$v_B = v_A = v_M = \omega R. \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) se obţine viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{v_B}{R} = \frac{6}{R} t \quad rad/s\,. \tag{4}$$

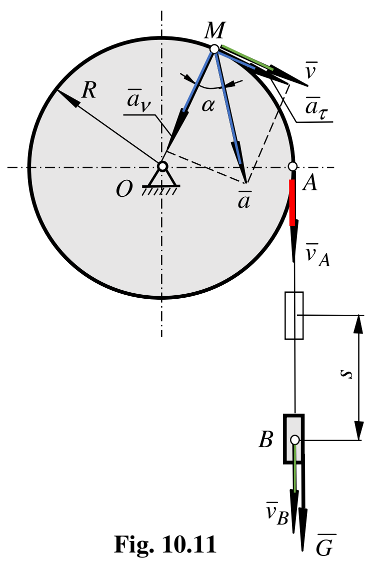


Fig. 10.11

Acceleraţia punctului M poate fi exprimată prin componentele intrinseci $\overline{a}_\nu$ şi $\overline{a}_\tau$. Astfel,

$$\overline{a} = \overline{a}_\nu + \overline{a}_\tau . \tag{5}$$

Componenta normală este orientată după raza OM cu sensul de la M spre O şi are modulul:

$$a_\nu = \omega^2 R = \frac{36}{R} t \;\; m/s^2 \quad . \tag{6}$$

Componenta tangenţială $\overline{a}_\tau$ este perpendiculară pe rază (după tangentă), are sensul dat de sensul acceleraţiei unghiulare $\overline{\varepsilon}$ şi modulul:

$$a_\tau = \varepsilon R = 6 \; m/s^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{6}{R} \;\; rad/s^2 \quad . \tag{7}$$

Modulul acceleraţiei $\overline{a}$ se obţine astfel:

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = \frac{6}{R}\sqrt{R^4 + 36t^4} . \tag{8}$$

Direcţia acceleraţiei se poate determina prin unghiul α (fig. 10.11) extras din relaţia:

$$tg\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{R}{6t} . \tag{9}$$

La t = *2* secunde de la începerea mişcării, mărimile cerute sunt:

$$s = 12 \; m, \;\; v = 12 \; m/s, \;\; \omega = 80 \; rad/s, \;\; a = 960 \; m/s^2. \tag{10}$$

10.2.8. Se consideră un ax filetat (fig. 10.12) cu diametrul exterior d şi pasul filetului p. Pornind din repaus, axul ajunge la turaţia n [*rot/min*] după *t secunde* de la începerea mişcării. Mişcarea şurubului fiind uniform accelerată, să se determine:

a) viteza unghiulară $\overline{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}$;

b) viteza de translaţie $\overline{v}_0$ şi acceleraţia de translaţie $\overline{a}_0$;

c) viteza $\overline{v}$ şi acceleraţia $\overline{a}$ a unui punct situat pe periferia axului filetat.

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

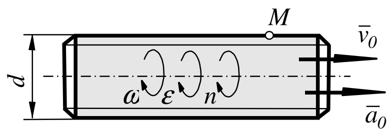


Fig. 10.12

a) Mişcarea şurubului fiind uniform accelerată, se pot scrie relaţiile:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = ct., \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t = \varepsilon_0 t, \quad (1)$$

dacă la momentul iniţial avem: $t_0 = 0$, $\omega_0 = 0$.

Pe de altă parte, se poate scrie:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \varepsilon_0 t, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\pi n}{30 t}. \quad (2)$$

b) La mişcarea de şurub au fost stabilite relaţiile (10.57), conform cărora:

$$v_0 = \frac{p}{2\pi}\omega, \quad a_0 = \frac{p}{2\pi}\varepsilon. \quad (3)$$

Având în vedere (2), relaţiile (3) devin:

$$v_0 = \frac{p\,n}{60}, \quad a_0 = \frac{p\,n}{60 t}. \quad (4)$$

c) În conformitate cu legea de distribuţie a vitezelor stabilită la mişcarea de roto-translaţie $\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}$, se poate scrie pentru modulul vitezei unui punct de pe periferia şurubului relaţia:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}. \quad (5)$$

Având în vedere (2) şi (4) şi relaţia $R = d/2$, relaţia (5) devine:

$$v = \frac{n}{60}\sqrt{p^2 + \pi^2 d^2}. \quad (6)$$

Acceleraţia $\overline{a}$ a unui punct *M* de pe periferia axului filetat poate fi dedusă ca modul din legea de distribuţie a acceleraţiilor din cazul mişcării de roto-translaţie, scrisă sub forma $\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$. Astfel:

$$a = \sqrt{a_0^2 + R^2\left(\omega^4 + \varepsilon^2\right)}. \quad (7)$$

Introducând în (7) mărimile geometrice şi cinematice stabilite anterior, se obţine:

$$a = \frac{n}{60}\sqrt{\frac{p^2}{t^2} + \pi^2 d^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{900} + \frac{1}{t^2}\right)}. \tag{8}$$

10.2.9. Două puncte ale unui şurub sunt situate pe acelaşi diametru la distanţele r_1 şi r_2 de axa şurubului. Ce relaţie există între distanţele r_1 şi r_2 în cazul în care vitezele acestor puncte sunt perpendiculare între ele, iar viteza de translaţie şi cea unghiulară a şurubului sunt egale ca mărime cu v şi ω (fig. 10.13).

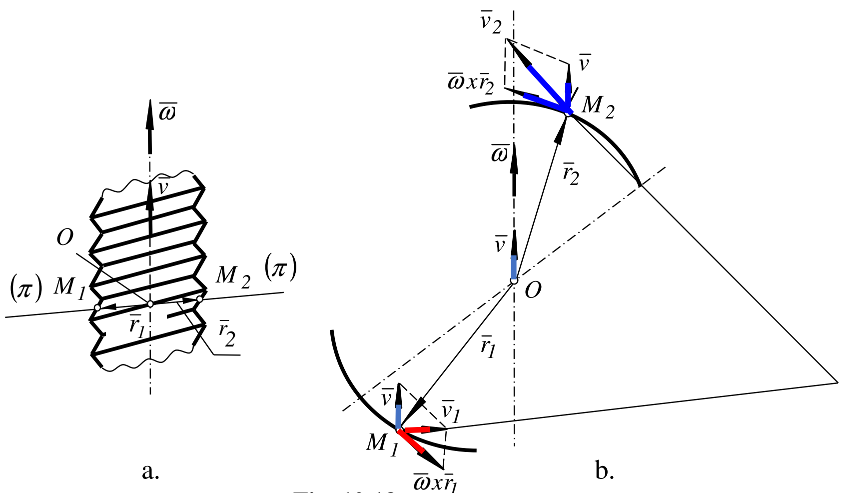


Fig. 10.13

Soluţie:

Vitezele punctelor M_1 şi M_2 (fig. 10.13a. şi 10.13b.) sunt date de relaţiile:

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{r}_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{r}_2. \tag{1}$$

Condiţia ca vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ să fie perpendiculari este:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \tag{2}$$

sau luând în considerare (1):

$$(\bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{r}_1)\cdot(\bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{r}_2) = 0, \tag{3}$$

relaţie din care se obţine:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$v^2 + \bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) + \bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_2) + (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_2) = 0. \tag{4}$$

În relaţia (4): $\bar{v} \cdot (\omega \times \bar{r}_1) = 0$ şi $\bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_2) = 0$, întrucât vectorii sunt perpendiculari între ei iar:

$$(\bar{\omega} \times \bar{r}_1) \cdot (\bar{\omega} \times \times \bar{r}_2) = |\bar{\omega} \times \bar{r}_1| \, | \bar{\omega} \times \bar{r}_2 | \sin \left(\widehat{\bar{\omega} \times \bar{r}_1, \bar{\omega} \times \bar{r}_2}\right) = -\omega^2 r_1 r_2 .$$

Astfel, relaţia (4) devine:

$$v^2 - \omega^2 r_1 r_2 = 0 , \quad r_1 r_2 = \frac{v^2}{\omega^2}. \tag{5}$$

Dacă se cunoaşte pasul p al şurubului atunci:

$$v = \frac{p}{2\pi} \omega , \tag{6}$$

iar relaţia (5) devine:

$$r_1 r_2 = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 . \tag{7}$$

10.2.10. Un şurub diferenţial are construcţia din figura 10.14. Pasul primului filet este p_1, pasul celui de al doilea care deplasează culisa este p_2. Să se afle viteza $\bar{v}$ a culisei dacă primul filet este pe dreapta, al doilea filet este pe dreapta sau pe stânga, iar mânerul se învârteşte astfel încât, primul filet se înşurubează făcând n *rotaţii/minut*.

Soluţie:

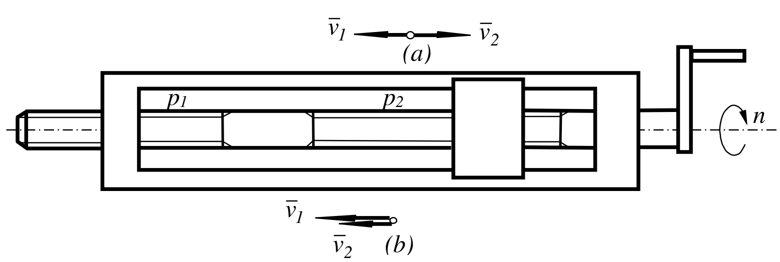


Fig. 10.14

a) Primul filet pe dreapta, al doilea pe dreapta;

Viteza $\bar{v}$ a culisei va fi dată de componenta de translaţie a vitezei la mişcarea de şurub. Filetul cu pasul p_1 produce o deplasare a culisei cu viteza $\bar{v}_1$ după axa şurubului, în sensul de înşurubare, de modul:

$$v_1 = \frac{p_1}{2\pi}\omega = \frac{p_1}{2\pi}\frac{\pi n}{30} = \frac{p_1}{60}n. \tag{1}$$

Filetul cu pasul p_2 produce o deplasare a culisei cu viteza $\bar{v}_2$ după axa şurubului, în sens invers celui de înşurubare, de modul:

$$v_2 = \frac{p_2}{2\pi}\omega = \frac{p_2}{2\pi}\frac{\pi n}{30} = \frac{p_2}{60}n. \tag{2}$$

Compunând cele două mişcări (fig. 10.14), se obţine:

$$v = v_1 - v_2 = \frac{p_1 - p_2}{60}n\,. \tag{3}$$

b) Primul filet este pe dreapta, al doilea filet este pe stânga;

Expresiile vitezelor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ ca modul sunt identice cu cele obţinute în primul caz, direcţiile lor sunt după axa şurubului, iar sensul este în sensul de înşurubare (fig. 10.14).

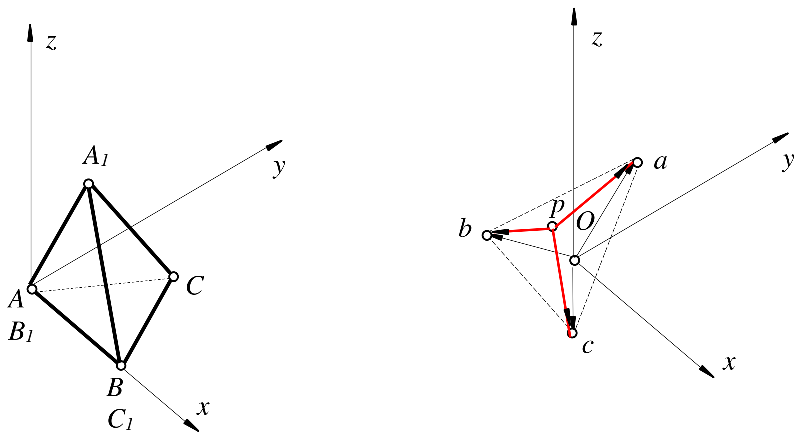
Compunând cele două mişcări şi având în vedere relaţiile (1) şi (2), se obţine:

$$v = v_1 + v_2 = \frac{p_1 + p_2}{60}n\,. \tag{4}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

10.2.11. Un tetraedru regulat având muchia a se deplasează astfel încât, trei dintre vârfurile lui care se găsesc iniţial în A, B, C ocupă poziţiile A_1, B_1, C_1 (fig. 10.15). Se cere, să se determine mişcarea elicoidală instantanee care corespunde acestei deplasări.

Soluţie:



a. **Fig. 10.15** b.

Se trasează dintr-un punct oarecare O (fig. 10.15b), trei vectori $\overline{Oa}, \overline{Ob}, \overline{Oc}$ de lungimi egale cu s, reprezentând deplasările vârfurilor A, B şi C.

Coordonatele punctelor a, b, c astfel obţinute în raport cu sistemul din figură, sunt:

$$a:\begin{cases} x=\dfrac{s}{2} \\ y=\dfrac{s\sqrt{3}}{6} \\ z=s\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases};\qquad b:\begin{cases} x=-s \\ y=0 \\ z=0 \end{cases};\qquad c:\begin{cases} x=\dfrac{s}{2} \\ y=-s\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z=0 \end{cases}. \tag{1}$$

Ecuaţia planului care trece prin punctele a, b, c este:

$$x+y\sqrt{3}-z\sqrt{6}+s=0\,. \tag{2}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Deoarece mişcarea de translaţie a tuturor punctelor este aceeaşi, ea va fi dată de lungimea perpendicularei coborâtă din punctul O pe planul care trece prin *abc,* respectiv:

$$d = OP = \frac{s}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{10}}. \tag{3}$$

Astfel, coordonatele punctului P sunt:

$$x = -\frac{s}{10}, \quad y = -\frac{s\sqrt{3}}{10}, \quad z = \frac{s\sqrt{6}}{10} . \tag{4}$$

După determinarea mişcării de translaţie se poate determina mişcarea de rotaţie. Mărimile deplasărilor punctelor A, B şi C provenind din rotaţie sunt exprimate de vectorii $\overline{Pa}$, $\overline{Pb}$, $\overline{Pc}$:

$$\overline{Pa} = \frac{s}{10}\left(6\bar{i} + \frac{8}{\sqrt{3}}\bar{j} + 7\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{k}\right), \qquad \overline{Pb} = \frac{s}{10}\left(-9\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j} - \sqrt{6}\,\bar{k}\right),$$
$$\overline{Pc} = \frac{s}{10}\left(6\bar{i} + -4\sqrt{3}\,\bar{j} - \sqrt{6}\,\bar{k}\right). \tag{5}$$

Pentru determinarea axei de roto-translaţie se duc prin mijloacele lui AA_1, BB_1, CC_1 plane perpendiculare pe axele de rotaţie respective; ele se intersectează toate pe axa de roto-translaţie. Ecuaţiile acestor plane sunt:

$$\text{pentru } AA_1: \ 18x + 8\sqrt{3}y + 7\sqrt{6}z = \frac{27}{2}s,$$
$$\text{pentru } BB_1: \ 9x - \sqrt{3}y + \sqrt{6}z = \frac{9}{2}s. \tag{6}$$

Aceste două ecuaţii determină axa de roto-translaţie. Proiecţiile acestei axe pe planele de coordonate au ecuaţiile:

$$\sqrt{2}y + z = \frac{3\sqrt{6}}{20}s; \quad \sqrt{3}x - y = \frac{2\sqrt{3}}{5}s . \tag{7}$$

Pentru determinarea unghiului de rotaţie se trasează prin axa de rotaţie două plane, unul care trece prin punctul B şi unul care trece prin B_1, determinându-se unghiul dintre ele. Ecuaţiile acestor plane sunt:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\begin{aligned} &\text{prin } B: \ \sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{2}z = s\sqrt{3}, \\ &\text{prin } B_1: \ -3\sqrt{3}x + 11y + 4\sqrt{2}z = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Unghiul dintre ele este dat de:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}\ . \tag{9}$$

10.2.12. Un şurub având pasul p şi raza exterioară r înaintează într-o piuliţă fixă astfel că, deplasarea în lungul axei se face cu o acceleraţie constantă $\overline{a}_0$. Se cere viteza şi acceleraţia unui punct de pe periferia şurubului.

Soluţie:

Viteza de translaţie este:

$$v = a_0 t\,. \tag{1}$$

În conformitate cu (10.57), se exprimă viteza unghiulară cu relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi\, v}{p} = \frac{2\pi\, a_0 t}{p}. \tag{2}$$

Un punct oarecare al şurubului situat la distanţa r de axa sa are cele două componente ale vitezei sale $\overline{v}_1$ în lungul axei şi $\overline{v}_2$ perpendiculară pe axă date de:

$$v_1 = v = a_0 t\,, \tag{3}$$

$$v_2 = \omega r = \frac{2\pi r a_0 t}{p}. \tag{4}$$

Vitezele $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt perpendiculare între ele astfel că, valoarea vitezei punctului considerat este:

$$v_M = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = a_0 t\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{p}\right)^2}\ . \tag{5}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Acceleraţia punctului M este:

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 \ , \tag{6}$$

relaţie în care:

$$a_1 = a_0 \text{ de-a lungul axei} \tag{7}$$

$$\overline{a}_2 = \overline{a}_\tau + \overline{a}_\nu \ , \tag{8}$$

$$a_\tau = \dot{v}_2 = \frac{2\pi r\, a_0}{p} \tag{9}$$

$$a_\nu = \omega^2 r = r\left(\frac{2\pi a_0 t}{p}\right)^2 . \tag{10}$$

Cele trei componente fiind perpendiculare între ele, mărimea acceleraţiei totale a punctului considerat este:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = a_0\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi\, r}{p}\right)^2 + r^2 a_0^2\left(\frac{2\pi\, t}{p}\right)^4} \ . \tag{11}$$

10.2.13. O presă cu articulaţii constă dintr-un romb articulat care are două vârfuri fixate prin articulaţii de piuliţele C şi B ale unui şurub diferenţial cu filete (pe dreapta şi pe stânga), de pas p; axa şurubului se poate deplasa liber prin mişcări de translaţie în sus şi în jos alunecând cu capetele în cadrul presei (fig. 10.16a.). Să se afle viteza punctului A, dacă mânerul presei face n *rotaţii/minut*, în sensul acelor de ceasornic.

Soluţie:

Piuliţa D se va deplasa de-a lungul axei şurubului cu viteza $\overline{v}_D$ (fig. 10.16b.) de modul:

$$v_D = \frac{p}{2\pi}\omega = \frac{p}{2\pi}\frac{\pi n}{30} = \frac{p}{60}n \ . \tag{1}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

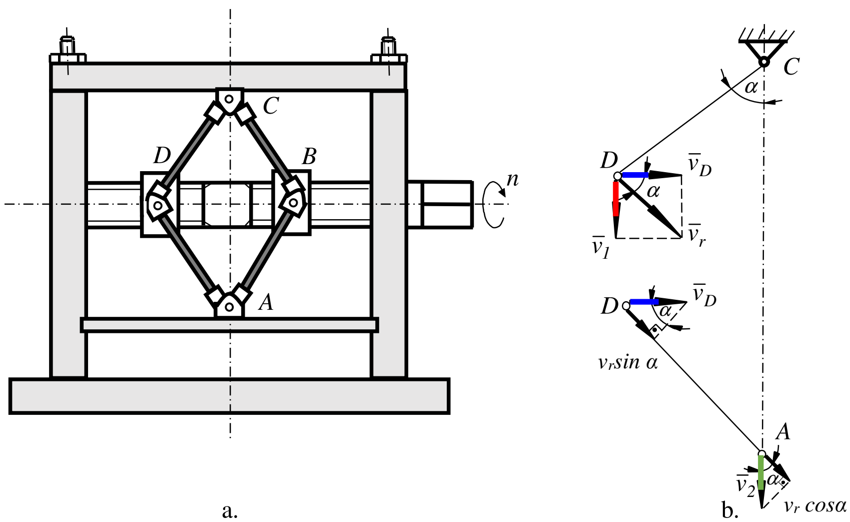


Fig. 10.16

Bara *CD* se roteşte în jurul lui *C* cu viteza $\overline{v}_r$, ca urmare a deplasării lui *D* cu viteza $\overline{v}_D$ (fig. 10.16b), rezultând o deplasare pe verticală a piuliţei *D* cu viteza $\overline{v}_1$, de modul:

$$v_1 = v_D\, tg\,\alpha\ . \tag{2}$$

La studiul mişcării barei *AD* (făcând abstracţie de deplasarea lui *D* pe verticală cu viteza $\overline{v}_1$) se aplică proprietatea: proiecţiile vitezelor a două puncte pe dreapta ce uneşte cele două puncte sunt egale astfel:

$$v_D \sin\alpha = v_2 \cos\alpha\ , \tag{3}$$

de unde:

$$v_2 = v_D\, tg\,\alpha\ . \tag{4}$$

Punctul *A* se va deplasa pe verticală. Conform cu relaţiile (2) şi (4), viteza punctului *A* este:

$$v = v_1 + v_2 = 2\,v_D\, tg\,\alpha\ , \tag{5}$$

sau, luând în considerare relaţia (1), se obţine:

$$v = \frac{p}{30} n\, tg\,\alpha. \tag{6}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

10.2.14. Paralelipipedul din figură execută o mişcare de rotaţie în jurul unei axe, cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ la care se cunoaşte componenta $\overline{\omega}_1\,(0,\ 5,\ 3\ rad/s)$, precum şi direcţia celei de a doua componente ca fiind cea a diagonalei *OD*. Cunoscând că viteza punctului *B* are valoarea şi că $OA = 5m$, $OC = 4cm$, $OE = 3cm$, se cere să se determine valoarea celei de a doua componente $\overline{\omega}_2$, precum şi viteza unghiulară rezultantă (fig. 10.17).

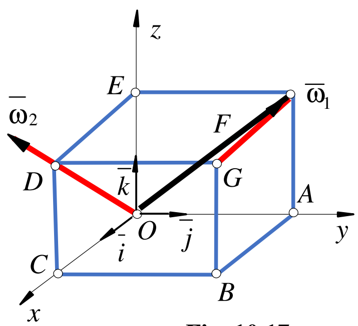


Fig. 10.17

Soluţie:

Urmărind figura 10.17 şi enunţul problemei, se poate scrie:

$$\overline{\omega}_1 = 5\overline{j} + 3\overline{k} \quad \text{şi} \quad \overline{\omega}_2 = \frac{4}{5}\omega_2\overline{i} + \frac{3}{5}\omega_2\overline{k}\,. \tag{1}$$

Viteza punctului *B*(4, 5, 0), conform cu (10.13), se poate scrie astfel:

$$\overline{v}_B = \overline{\omega}\times\overline{OB} = \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right)\times\overline{OB} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{4}{5}\omega_2 & 5 & \frac{3}{5}\omega_2 + 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -\left(3\omega_2 + 15\right)\overline{i} + \left(\frac{12}{5}\omega_2 + 12\right)\overline{j} + \left(4\omega_2 - 20\right)\overline{k}\,, \tag{2}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

relaţie din care rezultă:

$$61^2 = (3\omega_2 + 15)^2 + \left(\frac{12}{5}\omega_2 + 12\right)^2 + (4\omega_2 - 20)^2 , \tag{3}$$

$$769\omega_2^2 - 310\omega_2 - 73800 = 0. \tag{4}$$

Relaţia (4) este o ecuaţie de gradul doi în ω_2, ale cărei soluţii sunt $\omega_2{}' = 10\,rad/s$ şi $\omega_2{}'' = -9{,}6\,rad/s$. Cea de a doua soluţie arată că viteza unghiulară ω_2 este îndreptată de la punctul *D* spre punctul *O*.

Astfel, viteza unghiulară $\overline{\omega}$ poate fi:

$$\overline{\omega} = \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2{}'\right) = 8\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}, \quad sau \quad \overline{\omega} = \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2{}''\right) = -7{,}68\bar{i} + 5\bar{j} - 2{,}76\bar{k}. \tag{5}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

10.3 Probleme propuse

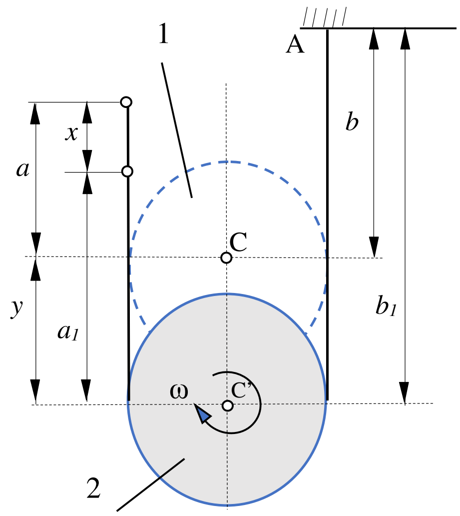


Fig. 10.18

10.3.1. Pentru un scripete de diametru D suspendat de un perete fix prin intermediul unui fir, să se determine cu cât coboară centrul său notat cu C, atunci când un capăt al firului coboară pe verticală cu o cantitate cunoscută x (fig. 10.18).

Răspuns:

$$y = \frac{x}{2}.$$

10.3.2. Un solid rigid se roteşte în jurul axei $x = y = z$ cu viteza unghiulară $\overline{\varpi}$. Se cere viteza unui punct oarecare al rigidului.

Răspuns :

$$\bar{v} = \frac{\overline{\omega}}{\sqrt{3}}\left[(z-y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}\right].$$

10.3.3. O greutate legată cu un fir înfăşurat pe un arbore orizontal, este lăsată în jos uniform accelerat fără viteză iniţială. În primele t secunde ea a parcurs o distanţă de h metri. Să se afle acceleraţia unghiulară a arborelui, dacă raza lui este de r metri.

Răspuns: $\varepsilon = \dfrac{2h}{r\,t^2}$ $1/s^2$.

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

10.3.4. O roată dinţată care are z_1 dinţi şi face n_1 rotaţii/minut, este angrenată cu o altă roată care are z_2 dinţi. Pe axul acestei ultime roţi se află fixată o roată dinţată care are z_3 dinţi. La rândul ei, această roată este angrenată cu a patra roată dinţată care are z_4 dinţi. Să se determine numărul de rotaţii/minut al ultimei roţi.

Răspuns: $n_4 = \dfrac{z_1 z_3}{z_2 z_4} n_1$.

10.3.5. Două roţi *A* şi *B* sunt legate printr-o curea de transmisie fără sfârşit; diametrul primei roţi este $d_1 = 1\ m$, diametrul roţii a doua este $d_2 = 1{,}5\ m$. Roata *B* face 100 rot/min. Să se afle viteza $\bar{v}$ a punctelor curelei şi vitezele unghiulare ale ambelor roţi.

Răspuns: $v = 7{,}854$ *m/s,* $\omega_1 = 15{,}708$ *rad/s,* $\omega_2 = 10{,}472$ *rad/s.*

10.3.6. Pe elicea $(\bar{v}, \bar{\omega})$, $\bar{v}$ este viteza de translaţie şi $\bar{\omega}$ viteza unghiulară. Să se afle locul geometric al punctelor a căror viteză este $v\sqrt{2}$.

Răspuns: Un cilindru circular de rază $r = \dfrac{v}{\omega}$, a cărui axă coincide cu axa elicei.

10.3.7. Raza unui şurub este *r*, iar unghiul de înclinare a filetului este α. Acest şurub se roteşte în piuliţă cu viteza unghiulară ω. Să se afle viteza lui de translaţie $\bar{v}$.

Răspuns: $v = \omega r\, ctg\, \alpha$ *cm/s* .

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

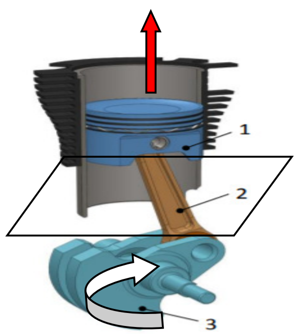
11. MIŞCAREA PLAN-PARALELĂ A SOLIDULUI RIGID [9]

11.1 Consideraţii teoretice

11.1.1 Studiul geometric al mişcării

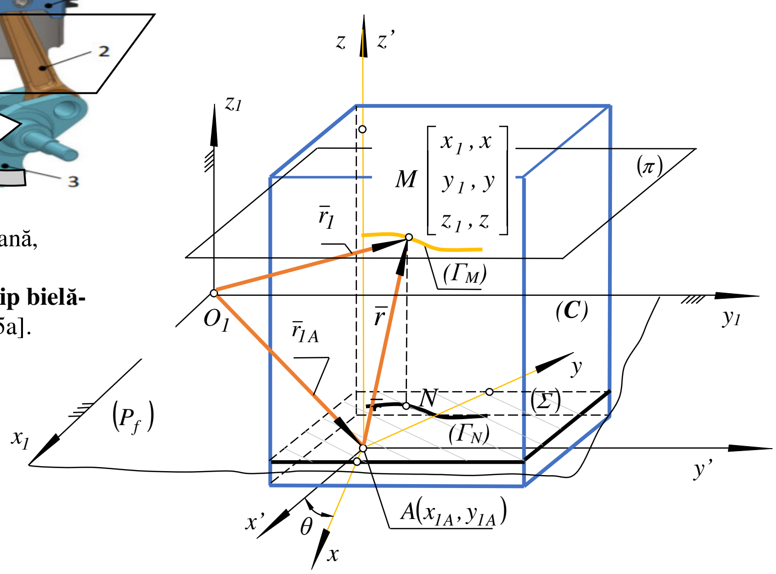
*Un solid rigid execută **o mişcare plan-paralelă** dacă trei puncte necoliniare aparţinând rigidului rămân permanent într-un plan fix din spaţiu.*

Se consideră un solid rigid *(C)* (fig. 11.1b) care efectuează o mişcare plan-paralelă.



1 – translație
2 – mişcare plană,
3 – rotație

a. Mecanism tip bielă-manivelă [5a].



b.

Fig. 11.1

Fie $O_1x_1y_1z_1$ un sistem cartezian de referinţă fix şi $Ax'y'z'$, respectiv $Axyz$, două sisteme de referinţă mobile având originea într-un punct A aparţinând suprafeţei (Σ), suprafaţă de intersecţie a rigidului cu planul fix (P_f). Primul

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

sistem are axele permanent paralele cu axele sistemului fix, iar celălalt este invariabil legat de solidul rigid şi are axa *Az* normală pe planul fix (P_f). Funcţiile care caracterizează poziţia sistemului de referinţă mobil *Axyz*, deci şi a rigidului în raport cu sistemul de referinţă fix $Ox_1y_1z_1$,, sunt:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad \theta = \theta(t). \tag{11.1}$$

Rezultă că, *solidul rigid în mişcarea plană are **trei** grade de libertate.*

Fie *M* un punct material aparţinând rigidului *(C)* (fig. 11.1). Între coordonatele x_1, y_1, z_1 şi *x, y, z* ale acestui punct înregistrate faţă de sistemul fix, respectiv cel mobil solidar cu rigidul, există relaţia matriceală de legătură:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{1A} & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ y_{1A} & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ z_{1A} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{11.2}$$

din care se obţin *ecuaţiile parametrice carteziene ale traiectoriei punctului M*:

$$x_1 = x_{1A} + x\cos\theta - y\sin\theta, \;\; y_1 = y_{1A} + x\sin\theta + y\cos\theta,$$

$$z_1 = z_{1A} + z = const. \tag{11.3}$$

În cele ce urmează, se va considera coordonata $z_{1A} = 0$, ceea ce presupune că planul mobil *Axy* se deplasează pe suprafaţa planului fix $O_1x_1y_1$. Din relaţia (11.3) rezultă că traiectoria punctului *M* este o curbă plană situată în planul (π) de cotă $z_1 = z_{1A} + z = const$. Notând cu (Σ) suprafaţa plană formată din mulţimea punctelor de intersecţie dintre planul fix $O_1x_1y_1 \equiv (P_f)$ şi solidul rigid *(C)*, se constată că toate punctele rigidului situate pe o perpendiculară pe planul mobil *Axy* au mişcări identice cu cele ale punctelor care aparţin suprafeţei plane (Σ), deoarece aceste puncte au aceleaşi coordonate *x* şi *y*, iar traiectoriile lor nu depind de cota *z*. Rezultă că, mişcările (traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile) punctelor *M* şi *N* din figura 11.1b sunt identice. Astfel, studiul mişcării solidului rigid se reduce la studiul mişcării secţiunii (Σ) pe suprafaţa planului fix $O_1x_1y_1$, mişcare complet determinată dacă se cunoaşte mişcarea a două puncte aparţinând acestei secţiuni. Cum două puncte determină un segment de dreaptă, rezultă că studiul mişcării secţiunii plane (Σ), deci şi a solidului rigid (*C*), se reduce la studiul mişcării unui segment de dreaptă aparţinând secţiunii (Σ) pe suprafaţa planului fix.

Pe baza celor afirmate anterior, studiul mişcării rigidului (*C*) aflat în mişcare plan-paralelă se reduce la studiul mişcării unei plăci plane într-un plan fix.

Exemple de mişcări plan-paralele pot fi: mişcarea bielei la un mecanism bielă-manivelă, mişcarea unei roţi de vehicul pe un drum rectiliniu, mişcarea cardanică, mişcarea mecanismelor cu came şi cu roţi dinţate etc.

11.1.2 Distribuţia de viteze

În figura 11.2 este reprezentată placa mobilă (P_m) care execută o mişcare plan-paralelă în planul fix (P_f). Cunoscând la un moment dat (*t*) viteza $\overline{v}_A$ a unui punct *A* aparţinând plăcii şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ corespunzătoare rotaţiei plăcii în jurul unui ax perpendicular în punctul *A* pe aceasta, se pune problema determinării vitezei $\overline{v}_B$ a oricărui punct *B* aparţinând plăcii la momentul (*t*).

În acest scop, se alege sistemul de referinţă cartezian fix $O_1x_1y_1$ în planul fix (P_f) şi sistemul cartezian de referinţă mobil *Axy* legat invariabil de placa mobilă (P_m). Între vectorii de poziţie $\overline{r}_B, \overline{r}_A$ şi $\overline{r}$ indicaţi în figura 11.2, există relaţia vectorială de legătură :

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{r}\,, \tag{11.4}$$

care derivată în raport cu timpul, conduce la relaţia:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{r}\,, \tag{11.5}$$

întrucât,

$$\dot{\overline{r}}_B = \overline{v}_B\,, \qquad \dot{\overline{r}}_A = \overline{v}_A\,, \qquad \dot{\overline{r}} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,. \tag{11.6}$$

Introducând notaţia:

$$\overline{\omega} \times \overline{r} = \overline{v}_{BA}\,, \tag{11.7}$$

relaţia (11.5) se va scrie sub forma :

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}\,. \tag{11.8}$$

Relaţia vectorială (11.8) este cunoscută şi ca ***relaţia lui Euler pentru viteze*** în cazul mişcării plan-paralele şi serveşte ca bază pentru construcţia *planului vitezelor*.

Din analiza legii de distribuţie a vitezelor (11.5) şi (11.8) se pot stabili următoarele ***proprietăţi ale distribuţiei de viteze în cazul mişcării plan-paralele***. Astfel,

a) Viteza oricărui punct aparţinând plăcii este suma vectorială dintre viteza instantanee $\overline{v}_A$, reprezentând viteza polului de referinţă mobil *A* (componentă de translaţie) şi componenta $\overline{\omega}\times\overline{r}$ de rotaţie relativă a plăcii în jurul polului *A* (cu viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$);

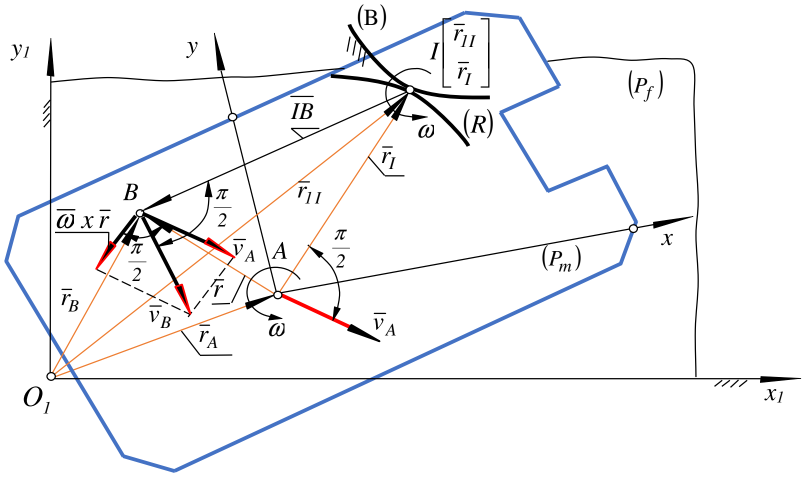


Fig. 11.2

b) Proiecţiile vitezelor a două puncte *A* şi *B* aparţinând plăcii pe dreapta definită de aceste puncte sunt egale.

Această proprietate se obţine înmulţind scalar cu versorul $\overline{u}$ al direcţiei *AB* expresia (11.5). Se obţine astfel:

$$\overline{v}_B \cdot \overline{u} = \overline{v}_A \cdot \overline{u}, \tag{11.9}$$

întrucât $(\overline{\omega}\times\overline{r})\cdot\overline{u} = 0,$ pentru că vectorii $\overline{r} = \overline{AB}$ şi $\overline{u}$ sunt coliniari.

c) În general, există puncte aparţinând solidului rigid a căror viteză este nulă. Notând cu $\overline{r}_I$ vectorul de poziţie al unui punct al rigidului în raport cu polul A, a cărui viteză instantanee se presupune a fi nulă (fig. 11.3), se poate scrie, conform cu relaţia (11.5):

$$\overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{r}_I = 0. \tag{11.10}$$

Soluţia generală a ecuaţiei vectoriale (11.10) este:

$$\bar{r}_I = \frac{\overline{\omega} \times \bar{v}_A}{\omega^2} + \lambda \overline{\omega}. \tag{11.11}$$

Relaţia (11.11) reprezintă o dreaptă (Δ) paralelă cu vectorul $\overline{\omega}$, dreaptă perpendiculară pe planul mişcării şi care intersectează acest plan în punctul I, având vectorul de poziţie $\bar{r}_I$ în raport cu polul mobil A (fig. 11.2 şi fig.11.3).

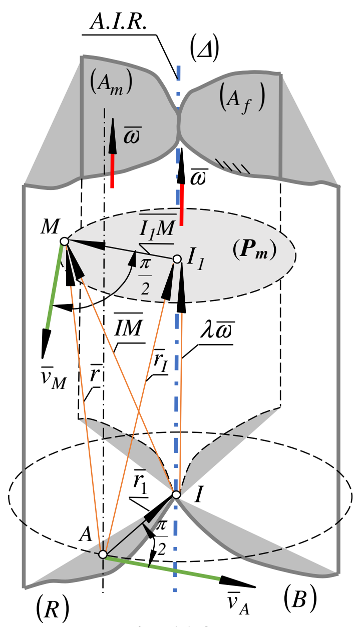


Fig. 11.3

Punctul *I* din planul mişcării astfel definit, poartă numele de ***centru instantaneu de rotaţie (C.I.R.)***, iar **dreapta** (Δ) se numeşte ***axă instantanee de rotaţie (A.I.R.)***. Centrul instantaneu de rotaţie şi axa instantanee îşi schimbă poziţia în timpul mişcării plăcii (P_m), atât faţă de sistemul de referinţă fix, cât şi faţă de cel mobil.

*Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de C.I.R. în timpul mişcării plăcii în raport cu sistemul de referinţă fix este o curbă plană numită **bază** (sau **centroidă fixă**)*, iar în raport cu sistemul de referinţă mobil este o curbă plană numită ***rostogolitoare*** *(sau **centroidă mobilă**)*.

*Locurile geometrice descrise în raport cu sistemul fix, respectiv mobil, de către A.I.R. în timpul mişcării plăcii (rigidului) sunt suprafeţe riglate în spaţiu, una fixă numită **axoidă fixă** şi cealaltă mobilă numită **axoidă mobilă**.*

În timpul mişcării, rostogolitoarea (axoida mobilă) *se rostogoleşte fără alunecare* peste bază (axoida fixă), punctul (generatoarea comună) de tangenţă fiind centrul instantaneu de rotaţie (axa instantanee de rotaţie), (fig. 11.2 şi fig. 11.3).

Ecuaţiile parametrice ale centroidei mobile (rostogolitoare – R) sunt:

$$x_I = -\frac{v_{Ay}}{\omega}, \qquad y_I = \frac{v_{Ax}}{\omega}. \tag{11.12}$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei centroide fixe (bază – B) sunt:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$x_{1I} = -\frac{v_{Ay1}}{\omega} + x_{1A}\,, \qquad y_{1I} = \frac{v_{Ax1}}{\omega} + y_{1A}\,; \tag{11.13}$$

d) Raportând distribuţia de viteze la centrul instantaneu de rotaţie, se obţine o distribuţie de viteze specifică mişcării de rotaţie ca şi când, placa mobilă s-ar roti în jurul axei instantanee de rotaţie. Într-adevăr, transpunând polul mobil A în centrul instantaneu de rotaţie a cărui viteză este nulă, relaţia vectorială (11.5) devine:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{IB}\,. \tag{11.14}$$

În conformitate cu (11.14), viteza punctului B este perpendiculară pe raza vectoare $\overline{IB}$ şi proporţională cu lungimea acesteia:

$$v_B = \omega\; IB\,. \tag{11.15}$$

O astfel de distribuţie de viteze s-a întâlnit la mişcarea de rotaţie, a solidului rigid în jurul unui ax fix. Rezultă că, *distribuţia de viteze la mişcarea plan-paralelă raportată la centrul instantaneu de rotaţie seamănă cu mişcarea de rotaţie, ca şi când placa mobilă (rigidul) s-ar roti în jurul axei instantanee de rotaţie*.

De remarcat însă că, *placa mobilă (rigidul)* ***nu execută*** *o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee de rotaţie*, deoarece această axă se află în mişcare atât faţă de sistemul fix, cât şi faţă de cel mobil, coordonatele centrului instantaneu de rotaţie date de (11.12) şi (11.13) fiind în general, funcţii de timp.

Din expresia (11.14) rezultă că vitezele punctelor plăcii sunt perpendiculare pe dreptele care unesc centrul instantaneu de rotaţie şi vitezele în punctele respective (fig. 11.2), având sensul dat de sensul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$. Se obţine astfel *o metodă de determinare a* ***poziţiei centrului instantaneu de rotaţie I****, acesta găsindu-se la intersecţia perpendicularelor pe direcţiile vitezelor a două puncte, perpendiculare duse în punctele respective şi aparţinând plăcii.*

În concluzie, pentru a determina poziţia centrului de rotaţie la un moment dat, este suficient să se cunoască poziţia la momentul respectiv a două puncte aparţinând plăcii pe curbele care reprezintă traiectoriile acestora.

Centrul instantaneu de rotaţie *se va găsi la intersecţia perpendicularelor duse pe tangentele în punctele respective la traiectoriile celor două puncte.*

Din calculele efectuate în acest paragraf, rezultă că vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ nu depinde de poziția polului de referință A, ales pe placă.

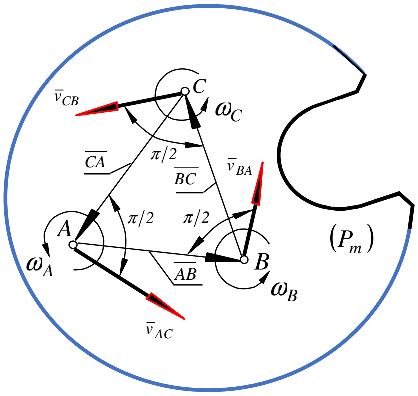


Fig. 11.4

Această proprietate poate fi demonstrată utilizând figura 11.4 în care s-a reprezentat placa mobilă (P_m) pe care s-au ales trei puncte arbitrare A, B şi C. Vitezele acestor puncte sunt legate între ele prin relaţii Euler de forma:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times \overline{AB}, \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega}_B \times \overline{BC},$$
$$\bar{v}_A = \bar{v}_C + \bar{\omega}_C \times \overline{CA}. \tag{11.16}$$

Având în vedere figura 11.4, prin însumarea relaţiilor (11.16) se obţine:

$$(\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A) \times \overline{BC} + (\bar{\omega}_C - \bar{\omega}_A) \times \overline{CA} = 0. \tag{11.17}$$

Din relaţia (11.17), având în vedere că punctele A, B şi C au fost alese pe placă arbitrar, se obţine:

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_C = \bar{\omega}. \tag{11.18}$$

De aici rezultă că, *viteza unghiulară* $\bar{\omega}$ *nu depinde de poziţia polului de referinţă mobil A la momentul (t), ea constituind astfel un invariant vectorial faţă de poziţia acestui pol.*

11.1.2.1 Metode pentru determinarea distribuţiei de viteze în mişcarea plan-paralelă

Mişcarea plan-paralelă are o largă aplicaţie în construcţia de maşini, acolo unde majoritatea mecanismelor au elemente cu o asemenea mişcare. Se vor prezenta în continuare, metodele folosite la determinarea vitezelor unghiulare şi liniare corespunzătoare elementelor mecanismelor.

a) ***Metoda centrului instantaneu de rotaţie*** (*CIR*) - constă în determinarea centrelor instantanee ale diferitelor elemente ale mecanismului studiat, apoi a vitezelor unghiulare instantanee ale acestor elemente şi în final, a vitezelor diferitelor puncte.

Fie mecanismul bielă-manivelă prezentat în figura 11.5 la care se presupun cunoscute toate elementele geometrice pentru poziţia din figură, precum şi viteza

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

unghiulară de rotaţie ω_1 a manivelei *OA*. În aceste condiţii, viteza punctului *A* este normală pe *OA*, are modulul $v_A = \omega_1 OA$, sensul ei fiind dat de sensul vitezei unghiulare ω_1. Trecând la biela *AB*, centrul instantaneu de rotaţie I_2 se află la intersecţia normalelor duse în punctele *A* şi *B* pe direcţiile vitezelor acestor puncte. Raportând distribuţia de viteze în cazul mişcării plan-paralele la centrul instantaneu de rotaţie, se pot scrie, în conformitate cu (11.15), relaţiile:

$$v_A = \omega_2 I_2 A, \qquad v_B = \omega_2 I_2 B. \tag{11.19}$$

Dar cum,

$$v_A = \omega_1 OA, \tag{11.20}$$

din (11.19) şi (11.20) se obţin viteza unghiulară instantanee de rotaţie ω_2 a bielei, respectiv, viteza v_B a pistonului mecanismului.

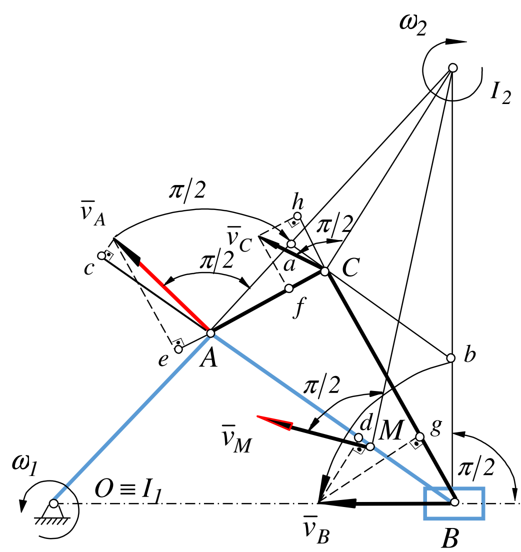


Fig. 11.5

Astfel:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{OA}{I_2 A},$$

$$v_B = \omega_1 \frac{OA}{I_2 A} I_2 B. \tag{11.21}$$

Aplicând această metodă, se poate determina viteza oricărui punct aparţinând bielei

AB. Astfel, viteza instantanee a unui punct oarecare *M* va fi normală pe dreapta I_2M , având sensul dat de ω_2 , iar modulul:

$$v_M = \omega_2 I_2 M = \omega_1 \frac{OA}{I_2 A} I_2 M. \qquad (11.22)$$

b) ***Metoda rabaterii*** **-** permite determinarea vitezei unui punct când se cunosc traiectoria acestui punct şi viteza altui punct aparţinând aceluiaşi element. Această metodă se aplică de obicei, în cazurile când centrele instantanee de rotaţie sunt situate în afara cadrului desenului.

Se consideră două puncte *A* şi *B* ale unei plăci aflată într-o mişcare plan-paralelă. Fie $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_B$ vitezele acestor puncte (fig. 11.6). Dacă se rabat vectorii $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_B$ cu acelaşi unghi de $\frac{\pi}{2}$ [*rad*], vârfurile *a* şi *b* astfel obţinute se găsesc pe o dreaptă paralelă cu *AB*. Având în vedere relaţiile:

$$v_A = Aa = \omega IA, \quad v_B = Bb = \omega IB, \qquad (11.23)$$

rezultă,

$$Aa / IA = Bb / IB = \omega. \qquad (11.24)$$

Se constată din figura 11.6 că triunghiurile *Iab* şi *IAB* sunt asemenea, astfel că dreapta *ab* este paralelă cu *AB*.

Ca exemplu, se consideră mecanismul bielă manivelă din figura 11.5. Presupunând *cunoscută viteza* $\overline{v}_A$ *a punctului A, se cere să se determine viteza punctului B* a cărui traiectorie este definită. Pentru aceasta se rabate viteza punctului *A* cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ [*rad*] în sensul acelor de ceasornic. Se obţine astfel punctul *a* prin care se duce o paralelă la *AB*. Se notează cu *b* punctul de intersecţie al acestei paralele cu dreapta I_2B. Apoi, se rabate în sens trigonometric

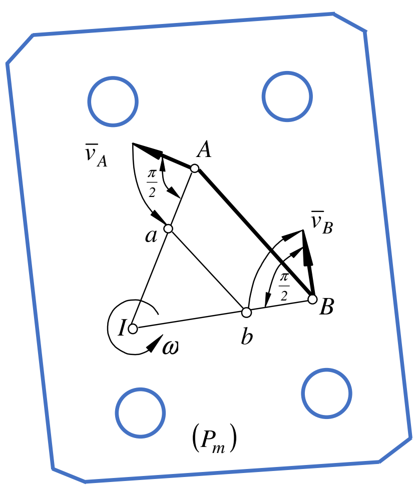


Fig. 11.6

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

segmentul Bb cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$ [rad], obţinând vectorul $\overline{v}_B$.

c) ***Metoda proiecţiilor -*** se bazează pe proprietatea distribuţiei de viteze din cazul mişcării plan-paralele, conform căreia, proiecţiile vitezelor a două puncte pe dreapta care uneşte aceste puncte sunt identice şi de acelaşi sens. Cunoscând vitezele $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_B$ ale punctelor A şi B aparţinând unei plăci în mişcare plană, se poate scrie, conform cu (11.9), relaţia:

$$pr_{AB}(\overline{v}_A) = pr_{AB}(\overline{v}_B). \tag{11.25}$$

Spre exemplificare, se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 11.5 la care *se cunoaşte viteza* $\overline{v}_A$ *a punctului A* şi se cer să se determine, aplicând metoda proiecţiilor vitezelor, *viteza punctului B* şi *viteza punctului C* în care sunt articulate barele AC şi BC. Întrucât $pr_{AB}(\overline{v}_A) = pr_{AB}(\overline{v}_B)$, se proiectează viteza $\overline{v}_A$ a punctului A pe direcţia AB. Segmentul Ac astfel obţinut se transportă în punctul B şi se obţine segmentul $Bd = Ac$ (în acelaşi sens cu Ac). În punctul d se ridică o perpendiculară pe AB. Vectorul $\overline{v}_B$ cu originea în B, are vârful pe dreapta OB.
Se procedează analog pentru punctele B şi C, respectiv A şi C şi în baza relaţiilor:

$$pr_{BC}(\overline{v}_B) = pr_{BC}(\overline{v}_C), \qquad pr_{AC}(\overline{v}_A) = pr_{AC}(\overline{v}_C), \tag{11.26}$$

se iau în acelaşi sens segmente egale:

$$Bg = Ch, \qquad Ac = Cf. \tag{11.27}$$

Ridicând perpendicularele în punctele h şi f, la intersecţia acestora se află extremitatea vectorului $\overline{v}_C$ cu originea în C.

d) ***Metoda planului vitezelor***. Fie (P_m) o placă mobilă într-un plan fix (P_f) şi A, B, C, …, N puncte aparţinând plăcii, ele având vitezele instantanee egale cu $\overline{v}_A, \overline{v}_B, \overline{v}_C, ..., \overline{v}_N$. *Se numeşte* ***plan al vitezelor*** *corespunzător plăcii aflată în mişcare plană, figura formată din vectorii concurenţi într-un punct* ***o*** *denumit pol, echipolenţi cu vectorii viteză* $\overline{v}_A, \overline{v}_B, \overline{v}_C, ..., \overline{v}_N$ *ai punctelor A, B, C, …, N aparţinând plăcii mobile*. Se notează cu a, b, c, …, n extremităţile vectorilor viteză concurenţi în ***o***, astfel că: $\overline{oa} = \overline{v}_A$, $\overline{ob} = \overline{v}_B$, $\overline{oc} = \overline{v}_C$, ..., $\overline{on} = \overline{v}_N$. Vectorii $\overline{ab}, \overline{bc}$

etc., care unesc două câte două extremităţile acestor vectori, se numesc ***viteze relative***.

Considerând două puncte arbitrare A şi B ale plăcii mobile (fig. 11.7) din planul de viteze, se poate scrie relaţia:

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}. \tag{11.28}$$

Pe de altă parte, conform relaţiei lui Euler pentru viteze, ştiind că $\overline{r} = \overline{AB}$, se poate scrie:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\varpi} \times \overline{AB}. \tag{11.29}$$

Comparând relaţiile (11.28) şi (11.29) şi având în vedere (11.7) rezultă:

$$\overline{ab} = \overline{\varpi} \times \overline{AB} = \overline{v}_{BA}, \tag{11.30}$$

astfel încât:

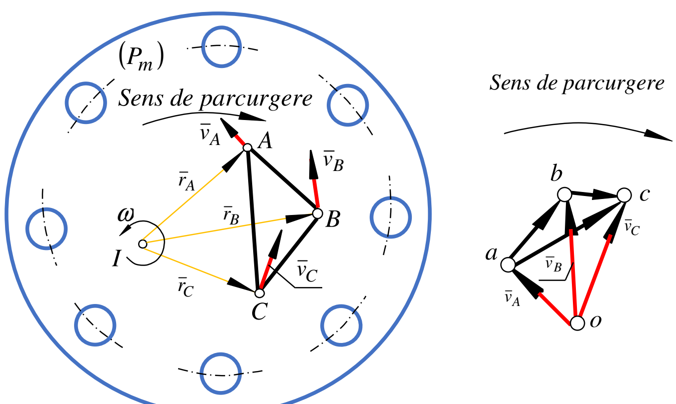
$$\overline{v}_{BA} \perp \overline{AB}, \text{ respectiv } \overline{ab} \perp \overline{AB}. \tag{11.31}$$

Fie C un alt punct al plăcii mobile ales astfel încât, să nu fie pe dreapta AB. Ca urmare, în planul plăcii se formează triunghiul ABC. Continuând raţionamentul făcut anterior pentru punctele A şi B, se pot scrie relaţii analoage cu (11.30) şi pentru $\overline{BC}$ şi $\overline{CA}$. Astfel,

$$\overline{bc} = \overline{\varpi} \times \overline{BC} = \overline{v}_{CB}, \quad \overline{ca} = \overline{\varpi} \times \overline{CA} = \overline{v}_{AC}. \tag{11.32}$$

Având în vedere (11.30) şi (11.32), se poate scrie:

$$\overline{ab} \perp \overline{AB}, \quad \overline{bc} \perp \overline{BC}, \quad \overline{ca} \perp \overline{CA}, \tag{11.33}$$



a. **Fig. 11.7** b.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

astfel că vectorii $\overline{v}_{BA}, \overline{v}_{CB}, \overline{v}_{AC}$, deci şi $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$, sunt rotiţi faţă de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ în acelaşi sens, cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$ [*rad*].

Modulele vectorilor $\overline{v}_{BA}, \overline{v}_{CB}, \overline{v}_{AC}$, conform cu (11.30) şi (11.32), sunt:

$$v_{BA} = \omega AB = ab,\ v_{CB} = \omega BC = bc,\ v_{AC} = \omega CA = ca, \tag{11.34}$$

din care rezultă relaţiile:

$$ab / AB = bc / BC = ca / CA = \omega, \tag{11.35}$$

pe baza cărora se deduce că, triunghiurile *abc* şi *ABC* sunt asemenea. Cele două triunghiuri sunt rotite între ele cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$ [*rad*], sensul de parcurgere al lor şi succesiunea literelor fiind aceleaşi.

Întrucât, o figură poligonală poate fi descompusă în triunghiuri, se poate generaliza că: pentru un număr oarecare de puncte aparţinând plăcii mobile, se poate enunţa *teorema asemănării* sau ***teorema lui Mehmke pentru viteze.*** Astfel: *dacă pe o placă care execută o mişcare plană se aleg arbitrar un număr oarecare de puncte şi se construieşte planul vitezelor corespunzător acestora, poligonul format prin unirea extremităţilor vectorilor viteză absolută din planul vitezelor este asemenea cu poligonul format prin unirea punctelor alese pe placa mobilă.*

Primul poligon este rotit faţă de al doilea cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$ [*rad*] în sensul vitezei unghiulare ω.

În cazul unui mecanism alcătuit din elemente care execută mişcări plane, se poate construi un plan al vitezelor pentru întregul mecanism alegând acelaşi pol ***o*** pentru toate elementele mecanismului.

Ca aplicaţie, se va considera mecanismul patrulater din figura 11.8 la care se cunosc elementele geometrico-constructive ale acestuia pentru poziţia din figură, precum şi viteza unghiulară de rotaţie ω a manivelei *OA*. Având în vedere figura 11.8 şi relaţia Euler pentru viteze, se pot scrie succesiv pentru punctele *A*, *B*, şi *C* relaţiile:

$$v_A = \omega OA,\ \bar{v}_A \perp \overline{OA}, \text{ având sensul dat de } \omega \tag{11.36}$$

B, A: $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_B \perp \overline{O_1B}, \ \bar{v}_{BA} \perp \overline{BA},$ (11.37)

C, A: $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}, \quad \bar{v}_{CA} \perp \overline{CA},$ (11.38)

C, B: $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}, \quad \bar{v}_{CB} \perp \overline{CB}.$ (11.39)

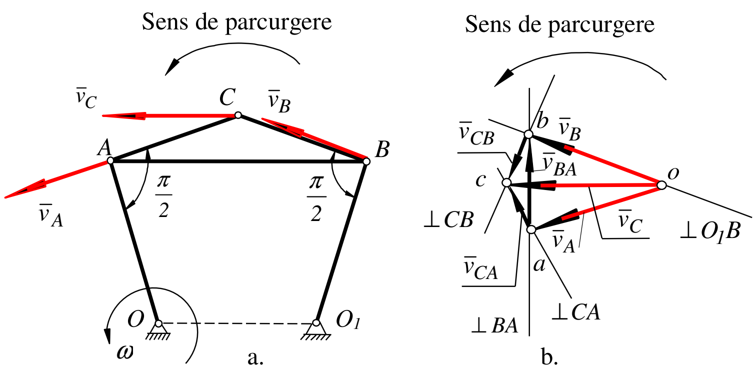


Fig. 11.8

Se alege **o *scară a vitezelor*** şi se transpune vectorul $\bar{v}_A$ la scara vitezelor într-un pol *o*, arbitrar ales, obţinând în planul vitezelor vectorul $\overline{oa} = \bar{v}_A$ transpus la scară. Urmărind relaţiile (11.36) şi (11.37), prin punctul *a* din planul vitezelor se duce o perpendiculară pe *AB* din planul mecanismului, care întâlneşte perpendiculara pe O_1B dusă prin *o* din planul vitezelor în *b*.

Segmentul $\overline{ob}$ din planul vitezelor reprezintă la scară vectorul viteză absolută $\bar{v}_B$, iar segmentul $\overline{ab}$ vectorul viteză relativă $\bar{v}_{BA}$. Perpendicularele în *a* şi *b* pe *OA* respectiv pe *OB,* se întâlnesc în *c* care constituie extremitatea vectorului viteză absolută $\bar{v}_C$, având originea în polul *o* al planului vitezelor. Segmentele $\overline{ac}$ şi $\overline{bc}$ reprezintă la scara vitezelor, vitezele relative $\bar{v}_{CA}$ şi $\bar{v}_{CB}$. Din figura 11.8b se

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

observă că triunghiurile *abc* şi *ABC* sunt asemenea, dar rotite cu $\frac{\pi}{2}$ [*rad*] unul faţă de altul, sensul de parcurgere şi succesiunea literelor fiind aceleaşi.

11.1.3 Distribuţia de acceleraţii

În figura 11.9 este reprezentată placa mobilă (P_m) care execută o mişcare plan-paralelă în planul fix (P_f). Cunoscând la un moment dat (*t*) acceleraţia $\overline{a}_A$ a unui punct *A* aparţinând plăcii, viteza unghiulară ω şi acceleraţia unghiulară ε corespunzătoare rotaţiei plăcii în jurul unui ax perpendicular în polul *A* pe planul mişcării, se pune problema determinării la momentul (*t*) a acceleraţiei $\overline{a}_B$ a oricărui punct *B* aparţinând plăcii.

În acest scop, se alege sistemul de referinţă cartezian fix $O_1x_1y_1$ în planul fix (P_f) şi sistemul de referinţă cartezian mobil *Axy*, legat invariabil de placa mobilă (P_m). Derivând vectorial în raport cu timpul relaţia (11.5), se obţine *legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării plan-paralele* astfel:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}), \tag{11.40}$$

sau

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} - \omega^2\overline{r}, \tag{11.41}$$

Întrucât:

$$\dot{\overline{v}}_B = \overline{a}_B,\ \dot{\overline{v}}_A = \overline{a}_A,\ \dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon},\ \dot{\overline{r}} = \overline{\omega}\times\overline{r},\ \overline{\omega}\perp\overline{r}. \tag{11.42}$$

Introducând notaţiile:

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r} = \overline{a}_{BA_\tau}, \quad -\omega^2\overline{r} = \overline{a}_{BA_\nu}, \tag{11.43}$$

$$\overline{a}_{BA_\tau} + \overline{a}_{BA_\nu} = \overline{a}_{BA}, \tag{11.44}$$

relaţia (11.41) se scrie sub forma:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}. \tag{11.45}$$

Relaţia vectorială (11.45) este cunoscută sub denumirea de ***relaţia lui Euler pentru acceleraţii*** în cazul mişcării plan-paralele, ea fiind utilizată la determinarea acceleraţiilor prin metoda planului de acceleraţii.

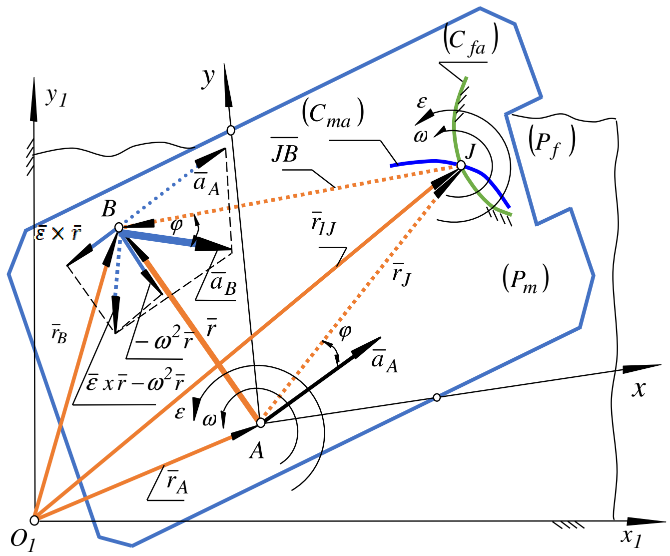


Fig. 11.9

Din analiza legii de distribuţie a acceleraţiilor (11.45) se pot stabili următoarele ***proprietăţi ale distribuţiei de acceleraţii în cazul mişcării plan-paralele***:

a) Acceleraţia oricărui punct aparţinând rigidului este suma vectorială dintre acceleraţia $\bar{a}_A$, reprezentând acceleraţia polului mobil *A* caracteristică unei mişcări de translaţie şi o componentă reprezentată prin vectorii $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}, -\omega^2 \bar{r}$, corespunzătoare unei mişcări de rotaţie (fig. 11.9);

b) Există în general, puncte a căror acceleraţie este nulă. Ele se găsesc pe o axă (Δ) paralelă cu *Oz,* care intersectează planul *Oxy* într-un **punct *J, punct* care poartă numele de *polul (centrul) acceleraţiilor*** (fig. 11.10).

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Polul acceleraţiilor ca şi axa (Δ), care se numeşte ***axa instantanee a acceleraţiilor,*** îşi schimbă continuu poziţia atât faţă de sistemul de referinţă fix cât şi faţă de cel mobil.

*Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de centrul instantaneu (pol) al acceleraţiilor (*sau *axa instantanee a acceleraţiilor), în raport cu sistemul cartezian fix, este o curbă denumită* ***centroidă fixă a acceleraţiilor*** (C_{fa}) *(*sau *axoida fixă a acceleraţiilor* (A_{fa})*)* (fig. 11.9 şi fig. 11.10).

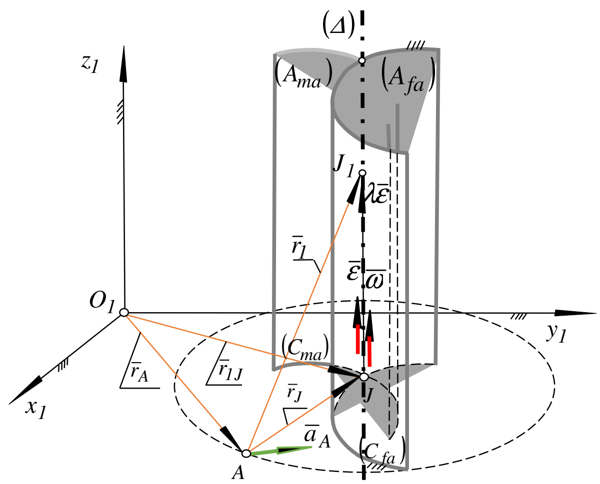


Fig. 11.10

Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de centrul instantaneu (pol) al acceleraţiilor (axa instantanee a acceleraţiilor), în raport cu sistemul cartezian mobil, este o curbă denumită ***centroidă mobilă a acceleraţiilor*** (C_{ma}) (sau *axoida mobilă a acceleraţiilor* (A_{ma})).

Polul acceleraţiilor *J* se găseşte în orice moment (*t*) în punctul de intersecţie al celor două centroide care **nu mai sunt tangente** ca şi în cazul distribuţiei de viteze;

c) *Raportând distribuţia de acceleraţii din cazul mişcării plan-paralele la polul acceleraţiilor, se obţine o distribuţie specifică mişcării de rotaţie, ca şi când placa mobilă (rigidul) s-ar roti în jurul unui ax perpendicular pe planul mişcării în polul acceleraţiilor.*

Această proprietate se exprimă prin relaţia:

$$\overline{a}_B = \overline{\varepsilon} \times \overline{JB} - \omega^2 \overline{JB}, \tag{11.46}$$

scrisă pentru un punct arbitrar B aparţinând plăcii mobile (P_m) (fig. 11.11).

Din (11.46) se obţine modulul şi *direcţia acceleraţiei* unui punct oarecare B aparţinând plăcii mobile (P_m):

$$a_B = JB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad tg\,\varphi = |\,\overline{\varepsilon} \times \overline{JB}\,| / \omega^2 JB = \varepsilon / \omega^2. \tag{11.47}$$

Comparând relaţia (11.46) cu relaţia dedusă în cazul mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui ax fix, se ajunge la concluzia că, se poate realiza *legea de distribuţie a acceleraţiilor plăcii mobile* (P_m) în orice moment (t), dacă se imprimă acesteia o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee a acceleraţiilor, axă normală în polul J pe planul plăcii (P_m), având viteza unghiulară $\overline{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}$, componente ce caracterizează mişcarea de rotaţie relativă a plăcii (P_m) în jurul polului de referinţă mobil A la momentul (t) (fig. 11.9).

Se ajunge astfel la concluzia că, *distribuţia de acceleraţii la mişcarea plan-paralelă este aceeaşi ca şi la mişcarea de rotaţie, ca şi când placa mobilă (rigidul) s-ar roti în jurul axei instantanee a acceleraţiilor.*

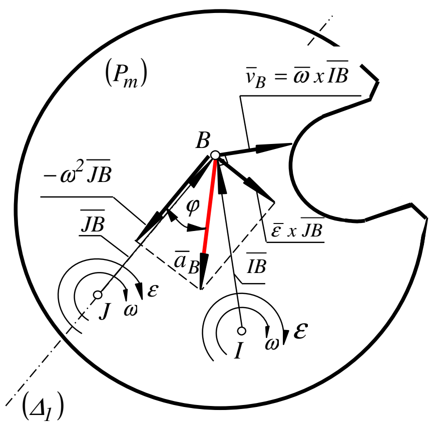


Fig. 11.11

De remarcat însă, că placa mobilă (rigidul) ***nu execută*** *o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee a acceleraţiilor*, deoarece această axă se află în mişcare atât faţă de sistemul de referinţă fix, cât şi faţă de cel mobil, coordonatele polului acceleraţiilor fiind, în general, funcţii de timp.

Cunoscând la un moment dat acceleraţia $\overline{a}_B$ a unui punct B al plăcii (P_m) şi mărimile ω şi ε, se poate determina poziţia centrului instantaneu al acceleraţiilor astfel: se duce prin B o dreaptă (Δ_I) ce închide cu acceleraţia $\overline{a}_B$, conform cu (11.47), un unghi φ măsurat în sens trigonometric, dacă ε>0 sau în sens contrar,

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

dacă $\varepsilon<0$ şi se măsoară pe această dreaptă un segment a cărui valoare să fie $JB = a_B / \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ (fig. 11.11);

d) Determinând şi comparând expresiile vectorilor de poziţie $\bar{r}_I$ şi $\bar{r}_J$ ai punctelor I şi J se constată că, *centrul instantaneu de rotaţie I* ***diferă*** *de centrul instantaneu (pol) al acceleraţiilor J.*

Rezultă că, *centrul instantaneu de rotaţie I nu are viteză, dar are acceleraţie, după cum centrul instantaneu J are viteză, dar nu are acceleraţie, acesta fiind singurul punct al plăcii* (P_m) *care la un moment dat (t) se află în mişcare rectilinie şi uniformă* (fig. 11.11).

Din calculele efectuate anterior a rezultat că, *vectorul acceleraţie unghiulară* ε ***nu depinde*** *de poziţia polului de referinţă A aparţinând plăcii mobile.* Această proprietate se poate demonstra utilizând figura 11.12 în care s-a reprezentat placa mobilă (P_m) pe care s-au ales trei puncte arbitrare A, B şi C. Acceleraţiile acestor puncte sunt legate prin relaţii Euler de forma (11.41). Astfel,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{\varepsilon}_B \times \overline{BC} - \omega^2 \overline{BC},$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{\varepsilon}_C \times \overline{CA} - \omega^2 \overline{CA}. \tag{11.48}$$

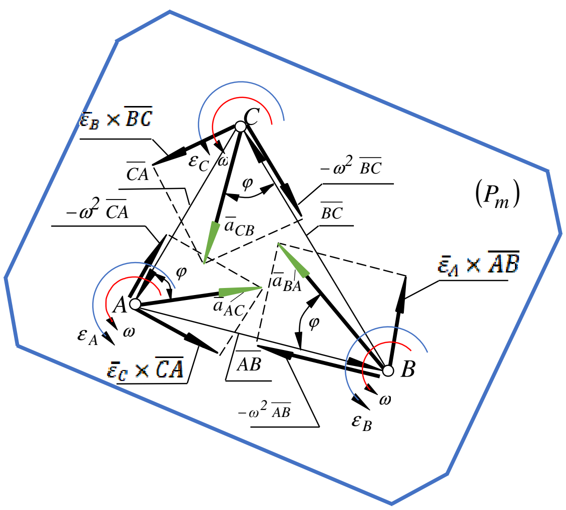


Fig. 11.12

Prin însumarea relaţiilor şi efectuând calculele, se obţine relaţia:

$$(\bar{\varepsilon}_B - \bar{\varepsilon}_A)\times\overline{BC} + (\bar{\varepsilon}_C - \bar{\varepsilon}_A)\times\overline{CA} = 0. \qquad (11.49)$$

Din relaţia (11.49), având în vedere că punctele A, B şi C au fost alese arbitrar pe placa mobilă (P_m), se obţine:

$$\bar{\varepsilon}_A = \bar{\varepsilon}_B = \bar{\varepsilon}_C = \bar{\varepsilon}. \qquad (11.50)$$

Se ajunge astfel la concluzia că, *accelerația unghiulară* $\bar{\varepsilon}$ ***nu depinde*** *de poziția polului de referință mobil A* la momentul (t), constituind un invariant vectorial față de poziția acestui pol.

11.1.3.1 Metode pentru determinarea distribuţiei de acceleraţii în mişcarea plan-paralelă

a) ***Metoda polului acceleraţiilor*** este analoagă metodei centrului instantaneu de rotaţie utilizată la determinarea vitezelor. În figura 11.13 este reprezentată o placă mobilă (P_m) care execută o mişcare plană. Cunoscând acceleraţia $\bar{a}_A$ a unui punct A aparţinând plăcii, precum şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ de rotaţie relativă a plăcii în jurul unui ax perpendicular în A pe planul plăcii, se va determina acceleraţia $\bar{a}_B$ a unui punct B aparţinând plăcii (P_m).

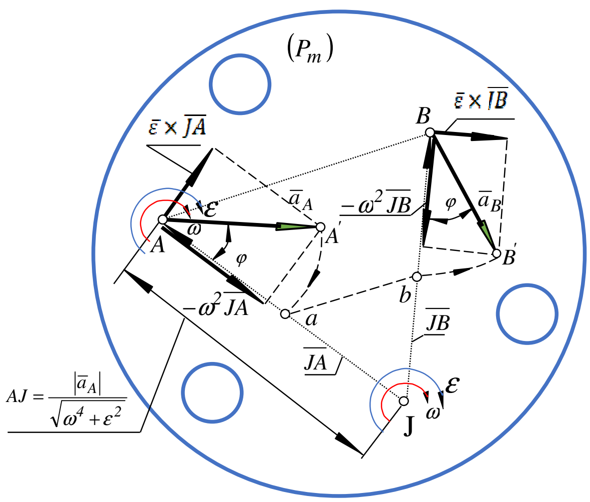


Fig. 11.13

Pentru aceasta se determină poziţia polului acceleraţiilor construind o semidreaptă care trece prin A şi face cu vectorul $\bar{a}_A$ unghiul $\varphi = arctg\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, în sensul indicat de acceleraţia unghiulară ε, pe care se ia apoi segmentul $AJ = |\bar{a}_A|/\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$.

Raportând mişcarea plan-paralelă la polul acceleraţiilor se obţine o *distribuţie de acceleraţii*

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

specifică unei mişcări de rotaţie, ca şi când placa s-ar roti în jurul polului J. Pentru a determina acceleraţia punctului *B* se trasează o semidreaptă prin *B* care face unghiul φ cu *JB* (de aceeaşi parte faţă de *JB* ca şi suportul vectorului $\overline{a}_A$ faţă de *JA*), pe care se desenează, la scara acceleraţiilor, un vector $\overline{a}_B$ al cărui modul are expresia $a_B = JB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

b) ***Metoda rabaterii acceleraţiilor***. Fie o placă mobilă (P_m) aflată în mişcare plană (fig. 11.13) şi $\overline{a}_A$ acceleraţia instantanee a unui punct *A* aparţinând plăcii, reprezentată la o anumită scară. Se cunoaşte de asemenea, poziţia polului *J* al acceleraţiilor corespunzătoare momentului (*t*). Acceleraţia oricărui alt punct *B* poate fi obţinută utilizând **metoda grafică a rabaterii**, indicată în figura 11.13. Astfel, se rabate cu unghiul φ extremitatea vectorului acceleraţie $\overline{a}_A$, obţinând pe raza polară *JA* punctul a , prin care se duce paralela *ab* la segmentul *AB*. Rabatând apoi tot cu unghiul φ segmentul *Bb*, dar în sens invers primei rabateri, se obţine acceleraţia $\overline{a}_B$ a punctului *B*.

Într-adevăr, raportând *distribuţia de acceleraţii din cazul mişcării plan-paralele la polul acceleraţiilor, se obţine o distribuţie specifică mişcării de rotaţie, fapt pentru care în baza relaţiei care exprimă modulul acceleraţiei la mişcarea de rotaţie* şi utilizând notaţiile din figura 11.13, se poate scrie:

$$a_A = JA\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad a_B = JB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{11.51}$$

de unde rezultă:

$$a_B = (JB/JA)\, a_A . \tag{11.52}$$

Pe de altă parte, din figura 11.13 în care $Aa = a_A$, se obţine:

$$Bb = (JB\,/\,JA)a_A . \tag{11.53}$$

Comparând (11.52) cu (11.53), se constată că segmentul *Bb* reprezintă, la scara adoptată pentru acceleraţii, modulul acceleraţiei $\overline{a}_B$.

Componentele intrinseci ale acceleraţiilor $\overline{a}_A$ şi $\overline{a}_B$ ale punctelor *A* şi *B,* raportate la polul acceleraţiilor, au mărimile:

$$\left|\overline{\varepsilon}\times\overline{JA}\right| = \varepsilon\, JA, \ \left|-\overline{\omega}^2\,\overline{JA}\right| = \omega^2 JA, \ \left|\overline{\varepsilon}\times\overline{JB}\right| = \varepsilon\, JB, \ \left|-\omega^2\,\overline{JB}\right| = \omega^2 JB. \tag{11.54}$$

Având în vedere (11.54) şi figura 11.13, se constată că:

$$tg \measuredangle JAA' = tg \measuredangle JBB' = \varepsilon / \omega^2, \qquad (11.55)$$

astfel încât:

$$\measuredangle JAA' = \measuredangle JBB' = \varphi. \qquad (11.56)$$

Relaţiile (11.53) şi (11.56) conduc la concluzia că, vectorul $\overline{BB'}$ reprezintă la scara acceleraţiilor, acceleraţia punctului *B*.

c) ***Metoda planului acceleraţiilor***. Fie (P_m) o placă mobilă într-un plan fix (P_f) şi *A*, *B*, *C*, …, *N* puncte aparţinând plăcii, având acceleraţiile instantanee egale cu $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \overline{a}_C, ..., \overline{a}_N$. Se numeşte ***plan al acceleraţiilor*** *corespunzător plăcii aflată în mişcare plană, figura formată din vectorii echipolenţi cu vectorii acceleraţie* $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \overline{a}_C, ..., \overline{a}_N$, *aplicaţi într-un pol* o', *numit polul planului acceleraţiilor*. Notând cu $a', b', c', ..., n'$ extremităţile vectorilor acceleraţie concurenţi în o', există relaţiile: $\overline{o'a'} = \overline{a}_A$, $\overline{o'b'} = \overline{a}_B$, $\overline{o'c'} = \overline{a}_C$, ,…, $\overline{o'n'} = \overline{a}_N$. Vectorii $\overline{a'b'}$, $\overline{b'c'}$ etc., care unesc două câte două extremităţile acestor vectori reprezintă ***acceleraţiile relative***.

În figura 11.14 s-a reprezentat placa mobilă (P_m) pe care s-au ales în mod arbitrar trei puncte *A*, *B* şi *C* ale căror acceleraţii instantanee sunt $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \overline{a}_C$.

În conformitate cu (11.45), se pot scrie relaţiile vectoriale:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \quad \overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}, \quad \overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}, \qquad (11.57)$$

din care rezultă:

$$\overline{a}_B - \overline{a}_A = \overline{a}_{BA}, \quad \overline{a}_C - \overline{a}_B = \overline{a}_{CB}, \quad \overline{a}_C - \overline{a}_A = \overline{a}_{CA}. \qquad (11.58)$$

Se construieşte planul acceleraţiilor (fig. 11.14b) din care se obţin expresiile vectoriale:

$$\overline{o'b'} = \overline{o'a'} + \overline{a'b'}, \quad \overline{o'c'} = \overline{o'b'} + \overline{b'c'}, \quad \overline{o'c'} = \overline{o'a'} + \overline{a'c'}, \qquad (11.59)$$

care se mai pot scrie sub forma:

$$\overline{a'b'} = \overline{o'b'} - \overline{o'a'} = \overline{a}_B - \overline{a}_A, \overline{b'c'} = \overline{o'c'} - \overline{o'b'} = \overline{a}_C - \overline{a}_B, \overline{a'c'} = \overline{o'c'} - \overline{o'a'} = \overline{a}_C - \overline{a}_A, \qquad (11.60)$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

având în vedere echipolenţa vectorilor

$$\overline{o'a'} = \overline{a}_A, \quad \overline{o'b'} = \overline{a}_B, \quad \overline{o'c'} = \overline{a}_C. \tag{11.61}$$

Comparând relaţiile (11.58) şi (11.60), rezultă că:

$$\overline{a'b'} = \overline{a}_{BA}, \quad \overline{b'c'} = \overline{a}_{CB}, \quad \overline{a'c'} = \overline{a}_{CA}. \tag{11.62}$$

Se constată că, vectorii $\overline{a'b'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{a'c'}$ din planul acceleraţiilor reprezintă acceleraţiile relative de rotaţie a punctelor B faţă de A, respectiv C faţă de B şi A.

Dacă se consideră doar perechea de puncte A şi B, având în vedere (11.43) şi (11.44), se poate scrie expresia acceleraţiei relative de rotaţie a punctului B faţă de A:

$$\overline{a}_{BA} = \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}. \tag{11.63}$$

Componenta $\bar{\varepsilon} \times \overline{AB}$ a acestei acceleraţii este perpendiculară pe $\overline{AB}$, sensul ei fiind dat de acceleraţia unghiulară ε, iar componenta $-\omega^2 \overline{AB}$ este coliniară cu vectorul $\overline{AB}$, dar de sens contrar acestuia.

Notând cu φ_1 unghiul ascuţit dintre direcţiile vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{a}_{BA}$, există relaţia:

$$tg\varphi_1 = \varepsilon / \omega^2. \tag{11.64}$$

Având în vedere sensurile pozitive ale celor doi vectori se constată că, vectorul $\overline{a}_{BA}$ este rotit faţă de vectorul $\overline{AB}$ cu unghiul $(\pi - \varphi_1)$, măsurat în sensul indicat de acceleraţia unghiulară ε (fig. 11.14a).

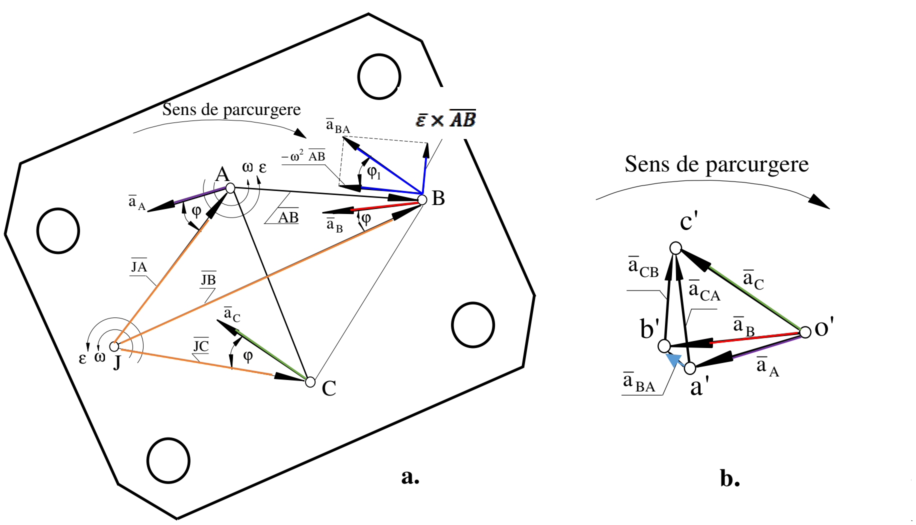


Fig. 11.14

$(\pi-\varphi_1)$ în sensul indicat de vectorul acceleraţie unghiulară $\bar{\varepsilon}$ astfel că, cele două triunghiuri sunt asemenea, având unghiuri egale.

Întrucât, o figură poligonală se poate descompune în triunghiuri, concluzia anterioară poate fi generalizată pentru un număr oarecare de puncte aparţinând plăcii mobile. Se obţine astfel, *teorema asemănării* sau ***teorema lui Mehmke pentru acceleraţii*** care se enunţă în felul următor:

Dacă pe o placă care execută o mişcare plană se aleg arbitrar un număr oarecare de puncte şi se construieşte planul acceleraţiilor corespunzător acestora, poligonul format prin unirea extremităţilor vectorilor acceleraţie absolută din planul acceleraţiilor este asemenea cu poligonul format prin unirea punctelor alese pe placa mobilă.

Cele două poligoane sunt rotite unul faţă de altul cu un unghi $(\pi-\varphi_1)$, unghiul φ_1 rezultând din relaţia (11.64).

De remarcat că, succesiunea vârfurilor celor două poligoane şi sensul de parcurgere a lor sunt aceleaşi.

În cazul unui mecanism alcătuit din elemente care execută mişcări plane se poate construi un plan al acceleraţiilor pentru întregul mecanism alegând acelaşi pol o' pentru toate elementele mecanismului.

Pentru exemplificare, se consideră mecanismul din figura 11.15 la care se cunosc elementele geometrico-constructive ale acestuia, respectiv viteza $\bar{v}_A$ şi acceleraţia $\bar{a}_A$ a punctului A pentru poziţia din figură. Pentru a determina acceleraţiile punctelor B şi C se va construi planul acceleraţiilor. Având în vedere figura 11.15, planul vitezelor prezentat în figura 11.8b, precum şi relaţia Euler (11.45), se pot scrie succesiv pentru punctele A, B şi C relaţiile:

$$\bar{a}_B=\bar{a}_A+\bar{a}_{BA},\ \bar{a}_{BA}=\bar{a}_{BA_\nu}+\bar{a}_{BA_\tau},\ a_{BA_\nu}=v_{BA}^2/BA,\ \bar{a}_{BA_\nu}\parallel\overline{AB},\ \text{are sensul de la } B \text{ spre } A,\ \bar{a}_{BA_\tau}\perp\overline{AB}, \tag{11.65}$$

$$\bar{a}_B=\bar{a}_{B_\nu}+\bar{a}_{B_\tau},\ a_{B_\nu}=v_B^2/O_1B,\ \bar{a}_{B_\nu}\parallel\overline{O_1B},\ \text{are sensul de la } B \text{ spre } O_1,\ \bar{a}_{B_\tau}\parallel\overline{O_1B}, \tag{11.66}$$

$\bar{a}_C=\bar{a}_A+\bar{a}_{CA},\ \ \bar{a}_{CA}=\bar{a}_{CA_\nu}+\bar{a}_{CA_\tau},\ \ a_{CA_\nu}=v_{CA}^2/CA,\ \ \ \bar{a}_{CA_\nu}\parallel\overline{AC},$ are sensul de la C

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

spre A, $\bar{a}_{CA_\tau} \perp \overline{AC}$,

$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}$, $\bar{a}_{CB} = \bar{a}_{CB_\nu} + \bar{a}_{CB_\tau}$, $a_{CB_\nu} = v_{CB}^2 / CB$, $\bar{a}_{CB_\nu} \parallel \overline{BC}$, are sensul de la C

spre B, $\bar{a}_{CB_\tau} \perp \overline{BC}$. (11.67)

În relaţiile (11.65), (11.66) şi (11.67) componentele normale ale acceleraţiilor au sensul de la punct către centrul de rotaţie (fix sau mobil).

Se alege o scară a acceleraţiilor şi se transpune vectorul $\bar{a}_A$ la scara acceleraţiilor într-un pol o', arbitrar ales, obţinând în planul acceleraţiilor vectorul $\overline{o'a'} = \bar{a}_A$. Urmărind relaţiile (11.65), se duce prin o' o paralelă la O_1B din planul mecanismului, pe care se ia vectorul $\bar{a}_{B_\nu}$ la scara acceleraţiilor, cu sensul de la B spre O_1.

Prin extremitatea vectorului $\bar{a}_{B_\nu}$ se duce o perpendiculară pe O_1B. Apoi prin extremitatea a' a vectorului $\bar{a}_A$ din planul acceleraţiilor se trasează o paralelă la AB din planul mecanismului, pe care se ia vectorul $\bar{a}_{BA_\nu}$ la scara acceleraţiilor, cu sensul de la B spre A.

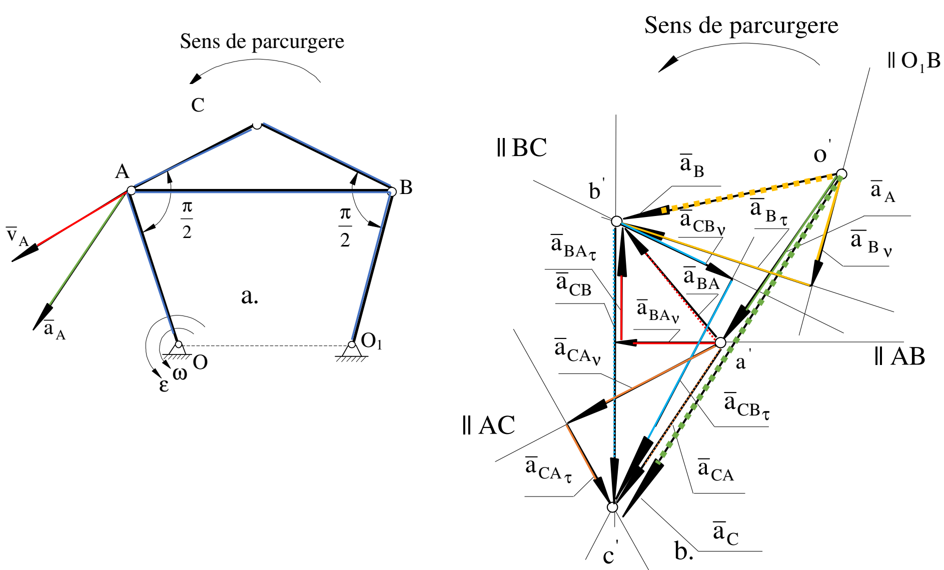


Fig. 11.15

Prin extremitatea vectorului $\overline{a}_{BA\,\nu}$ se duce o perpendiculară pe AB. Perpendicularele pe O_1B, respectiv pe AB din planul acceleraţiilor se intersectează în punctul b' care reprezintă extremitatea vectorului $\overline{a}_B$ în planul de acceleraţii. Construind analog în punctele a' şi b' vectorii $\overline{a}_{CA\,\nu}$ şi $\overline{a}_{CB\,\nu}$, pe baza relaţiilor (11.66) şi (11.67) şi trasând prin extremităţile acestor vectori perpendicularele pe AC şi BC, se obţine în planul acceleraţiilor punctul c', care constituie extremitatea vectorului $\overline{a}_C$. Urmărind planul acceleraţiilor construit şi relaţiile (11.65), (11.66) şi (11.67), se trasează vectorii acceleraţie absolută şi relativă conţinuţi în aceste relaţii.

Acceleraţia punctului C se poate determina şi aplicând teorema asemănării pentru acceleraţii, punctul c' rezultând din asemănarea triunghiurilor ABC şi $a'b'c'$.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

11.2 Probleme rezolvate [9]

11.2.1. Pe un cerc de rază *R*, tangent în originea O_1 a axei O_1x_1, se sprijină continuu o bară *AB* a cărei extremitate *A* se mişcă pe axa O_1x_1. Să se determine baza şi rostogolitoarea mişcării barei *AB,* precum şi viteza punctului de tangenţă *C* pentru poziţia dată în figură, ştiind că punctul *A* se deplasează cu viteza constantă $\overline{u}$ pe axa O_1x_1 (fig. 11.16).

Soluţie:

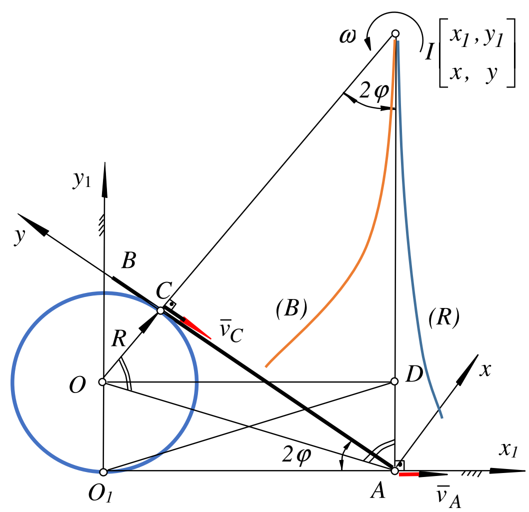


Fig. 11.16

a) Baza

Se determină coordonatele x_1, y_1 ale centrului instantaneu de rotaţie *I* faţă de sistemul de referinţă fix $x_1O_1y_1$:

$$x_1 = R\, ctg\,\varphi\,, \tag{1}$$

$$y_1 = ID + DA = x_1 ctg\,2\varphi + R = R + R\,ctg\,\varphi\; ctg\,2\varphi\,. \tag{2}$$

Dar, $$ctg\,2\varphi = \frac{1 - tg^2\varphi}{2\,tg\;\varphi}, \tag{3}$$

astfel că:

$$y_1 = R + \frac{R\,(1 - tg^2\varphi)}{2\,tg^2\varphi}. \tag{4}$$

Din (1) rezultă:

$$tg\,\varphi = \frac{R}{x_1},$$

care introdusă în (4), conduce la:

$$y_1 = \frac{{x_1}^2}{2R} + \frac{R}{2},\ (B), \tag{5}$$

astfel că, baza este o parabolă având ca focar centrul O al cercului şi ca directoare axa O_1x_1.

b) Rostogolitoarea

Se notează cu x, y coordonatele centrului instantaneu de rotaţie faţă de sistemul de referinţă mobil xAy solidar cu bara AB.
Se observă că, triunghiul IOA este isoscel ($\sphericalangle IOA = \sphericalangle IAO$ pentru că $\Delta\, O_1AD = \Delta\, OAC$), astfel că, se poate scrie:

$$IO = IA = OC + IA\cos 2\varphi,$$

de unde:

$$IA = \frac{R}{1 - \cos 2\varphi}. \tag{6 - 7}$$

Având în vedere figura 11.18 şi relaţia (7), se pot scrie relaţiile:

$$x = IA\cos 2\varphi = \frac{R\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}, \tag{8}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$y = IA\sin 2\varphi = \frac{R\sin 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}. \tag{9}$$

Eliminând parametrul φ din (8) şi (9), se obţine ecuaţia carteziană a rostogolitoarei:

$$y^2 = 2\,R\,x + R^2, \quad (R), \tag{10}$$

care este o parabolă având focarul în punctul A şi ca directoare dreapta $x = -\frac{R}{2}$.

c) Viteza punctului C

În baza relaţiei (11.15) şi utilizând notaţiile din figura 11.16, se scriu relaţiile:

$$v_A = u = \omega\; IA, \text{ de unde } \omega = \frac{u}{IA}, \tag{11}$$

$$v_C = \omega\; IC = \omega\; IA\cos 2\varphi, \tag{12}$$

$$v_C = u\cos 2\varphi. \tag{13}$$

Direcţia vitezei punctului C este după tangenta la cerc în acest punct, sensul ei fiind dat de sensul vitezei unghiulare ω.

11.2.2. Bara OA se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul extremităţii sale O. De cealaltă extremitate este legat un fir care trece peste un scripete mic B şi de care atârnă la extremitatea liberă o greutate $\overline{G}$. Să se afle viteza cu care se mişcă greutatea în funcţie de unghiul φ, fiind date: $OA = R$, $OC = a$, $CB = b$ (fig. 11.17).

Soluţie:

Prima metodă: Se determină poziţia centrului instantaneu de rotaţie I corespunzător barei AB, urmată de viteza unghiulară instantanee ω de rotaţie a barei în jurul acesteia.

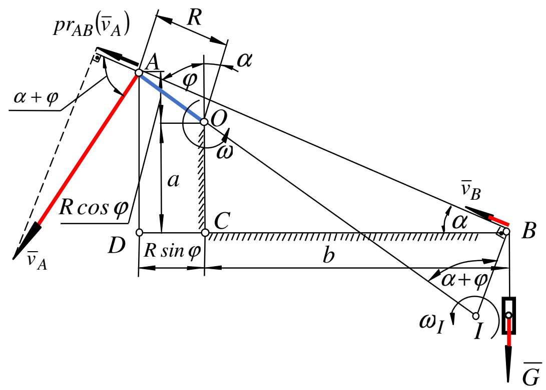


Fig. 11.17

Astfel, se poate scrie:

$$v_A = \omega R = \omega_I \, IA, \tag{1}$$

de unde:

$$\omega_I = \frac{\omega R}{IA}. \tag{2}$$

Viteza punctului *B,* conform cu (11.15), are modulul:

$$v_B = \omega IB = \frac{\omega R}{IA} IB. \tag{3}$$

Din triunghiul *ABI* rezultă:

$$IA = \frac{AB}{\sin(\alpha + \varphi)}, \quad IB = AB \, ctg(\alpha + \varphi). \tag{4}$$

Din triunghiul ABD se obţine:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}, \tag{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{a + R\cos\varphi}{AB}, \quad \cos\alpha = \frac{b + R\sin\varphi}{AB}. \tag{6}$$

Ţinând cont de (4), (5) şi (6), relaţia (3) devine:

$$v_B = \omega R \frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}}. \tag{7}$$

Metoda a doua: Se aplică metoda proiecţiilor conform căreia, proiecţiile vitezelor a două puncte pe dreapta ce uneşte cele două puncte sunt egale.

Astfel:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$v_B = v_A \cos(\alpha + \varphi) = \omega R \cos(\alpha + \varphi) \tag{8}$$

sau, având în vedere (5) şi (6), mărimea v_B a vitezei punctului B este:

$$v_B = \omega R \frac{b\cos \quad - a\sin}{\sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a\cos \quad + b\sin \quad)}}. \tag{9}$$

11.2.3. Tija AB de lungime ℓ alunecă cu extremităţile sale pe laturile unui ghidaj fix x_1Oy_1 ale cărui laturi închid un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ *rad*. Să se afle baza, rostogolitoarea, traiectoriile punctelor tijei, viteza $\overline{v}$ şi acceleraţia $\overline{a}$ a unui punct oarecare M al tijei aflat la distanţa m de extremitatea A, în ipoteza că viteza extremităţii A este constantă şi egală cu u (fig. 11.18).

Soluţie:

a) **Baza**

$$\begin{aligned} x_1 &= OA = \ell\cos\varphi, \\ y_1 &= OB = \ell\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Eliminând parametrul φ din relaţiile (1), se obţine:

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell^2, \ (B), \tag{2}$$

astfel că, baza este un cerc de rază ℓ, având centrul în originea O a sistemului fix.

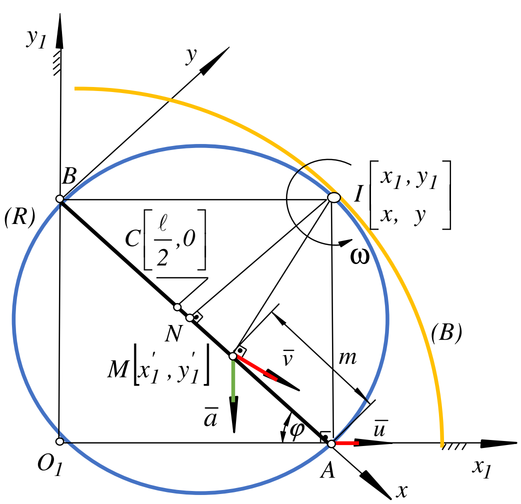


Fig. 11.18

b) **Rostogolitoarea**

$$\begin{aligned} x &= BN = \frac{\ell}{2}(1 + \cos 2\varphi), \\ y &= IN = \frac{\ell}{2}\sin 2\varphi \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Eliminând parametrul φ din (3), rezultă ecuaţia carteziană a rostogolitoarei:

$$\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2, \ (R), \tag{4}$$

care este ecuaţia unui cerc de rază $\frac{\ell}{2}$, cu centrul în punctul $C\left(\frac{\ell}{2}, 0\right)$.

c) **Traiectoriile punctelor tijei**

Se consideră punctul $M(x_1', y_1')$ ale cărui coordonate x_1', y_1' au expresiile:

$$x_1' = (\ell - m)\cos\varphi\,,\qquad y_1' = m\sin\varphi. \tag{5}$$

Eliminând parametrul φ din (5), se obţine:

$$\left(\frac{x_1'}{\ell - m}\right)^2 + \left(\frac{y_1'}{m}\right)^2 = 1, \tag{6}$$

Relația (6) reprezintă ecuația unei elipse cu semiaxe $\ell - m$ şi m, variabile în funcţie de parametrul m.

d) **Viteza punctului M**

Se determină viteza $\bar{v}$ a punctului M prin proiecţiile ei, respectiv v_{x1} şi v_{y1} pe axele sistemului de referinţă fix x_1Oy_1, necesare pentru a deduce apoi acceleraţia $\bar{a}$ a acestui punct. Astfel, utilizând figura 11.18, se poate scrie:

$$\bar{v} = v_{x_1}\,\bar{i}_1 + v_{y_1}\,\bar{j}_1 = \bar{\omega}\times\overline{IM}\,,$$

$$\overline{IM} = (x_1'\text{-}x_1)\,\bar{i}_1 + (y_1'\text{-}y_1)\,\bar{j}_1\,,$$

$$\bar{v} = v_{x_1}\,\bar{i}_1 + v_{y_1}\,\bar{j}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i}_1\,\omega(y_1' - y_1) + \bar{j}_1\,\omega(x_1' - x_1),$$

de unde:

$$v_{x1} = -\,\omega(y_1' - y_1),\qquad v_{y1} = \omega(x_1' - x_1). \tag{7}$$

Viteza unghiulară ω de rotaţie a barei în jurul centrului instantaneu de rotaţie I se determină dintr-o relaţie similară cu (11.15), dar scrisă pentru punctul A:

$$v_A = u = \omega\; IA = \omega\,\ell\sin\varphi, \tag{8}$$

de unde:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\omega = \frac{u}{\ell \sin \varphi}. \tag{9}$$

Înlocuind în (7) relaţiile (1), (5) şi (9), se obţin proiecţiile vitezei instantanee $\overline{v}$ pe axele Ox_1 şi Oy_1 şi anume:

$$\begin{aligned} v_{x1} &= \frac{u}{\ell}(\ell - m), \\ v_{y1} &= -\frac{u\,m}{\ell} ctg\,\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Direcţia vitezei se determină din relaţia:

$$tg(\widehat{\overline{v}, x_1}) = \frac{v_{y1}}{v_{x1}} \tag{11}$$

sau $\overline{v} \perp \overline{IM}$, având în vedere (11.14), sensul vitezei fiind dat de sensul vitezei unghiulare ω.

e) **Acceleraţia punctului M**

Componentele a_{x1}, a_{y1} ale acceleraţiei $\overline{a}$ pe axele sistemului fix x_1Oy_1 se obţin derivând relaţiile (10) în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} a_{x1} &= \dot{v}_{x1} = 0, \\ a_{y1} &= \dot{v}_{y1} = \frac{u\,m}{\ell \sin^2 \varphi}\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{12}$$

Dar $\dot{\varphi} = -\omega$, pentru că unghiul φ descreşte când punctul A se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox_1. Având în vedere (9), se obţine:

$$a_{y1} = -\frac{u^2 m}{\ell^2 \sin^3 \varphi}, \tag{13}$$

astfel că:

$$\overline{a} = -\frac{u^2 m}{\ell^2 \sin^3 \varphi}\,\overline{j}_1 . \tag{14}$$

Se observă că, vectorul acceleraţie $\overline{a}$ a punctului M este orientat după axa Oy_1 în sens invers direcţiei axei.

11.2.4. Se dau barele $OA = AB = \ell$ articulate între ele în punctul A. Bara OA se roteşte cu viteză unghiulară constantă în jurul lui O, iar punctul B se poate deplasa de-a lungul axei Ox_1. Să se determine baza, rostogolitoarea, traiectoria punctului M, viteza punctului B şi viteza punctului M, dacă $AM = k\ AB$ (fig. 11.19).

Soluţie:

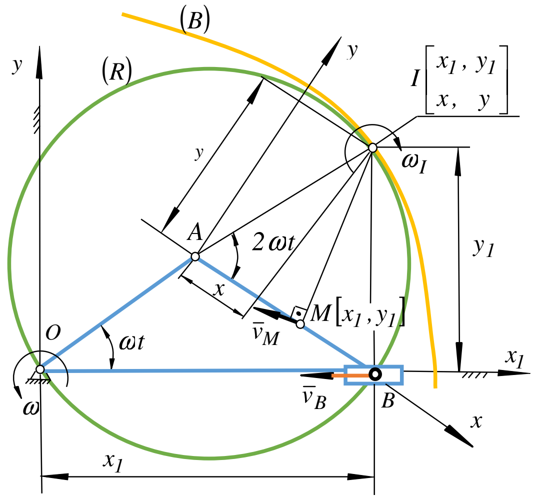


Fig. 11.19

a) Baza

Se determină centrul instantaneu de rotaţie I corespunzător barei AB. Din figura 11.19 se observă că: $AI = OA = \ell$, astfel că:

$$x_1 = 2\ell\cos\omega t,$$
$$y_1 = 2\ell\sin\omega t. \tag{1}$$

Eliminând parametrul (t) din (1), se obţine ecuaţia carteziană a centroidei fixe (*bazei*):

$$x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = 4\ell^2, \ \ (B), \tag{2}$$

care este ecuaţia unui cerc de rază $2\,\ell$, având centrul în originea O_1 a sistemului fix $x_1O_1y_1$.

b) Rostogolitoarea

Notând cu x, y coordonatele centrului instantaneu de rotaţie în sistemul de referinţă mobil xAy, se pot scrie relaţiile:

$$x = \ell\cos 2\omega t,$$
$$y = \ell\sin 2\omega t\ . \tag{3}$$

din care eliminând parametru (t), se obţine ecuaţia carteziană a centroidei mobile (*rostogolitoarei*):

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$x^2 + y^2 = \ell^2, \quad (R), \tag{4}$$

care este ecuaţia unui cerc de rază ℓ, având centrul în originea sistemului de referinţă mobil *xAy,* solidar cu bara *AB*.

c) Traiectoria punctului *M*

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului *M* se obţin determinând coordonatele $x_1^{'}$, $y_1^{'}$, ale acestuia în raport cu sistemul fix $x_1 O_1 y_1$. Astfel,

$$\begin{aligned} x_1' &= \ell(1+k)\cos\omega t \ , \\ y_1' &= \ell(1-k)\sin\omega t . \end{aligned} \tag{5}$$

Prin eliminarea parametrului *t* din (5), se ajunge la ecuaţia carteziană a traiectoriei punctului *M*:

$$\frac{x_1^{'2}}{\ell^2(1+k)^2} + \frac{y_1^{'2}}{\ell^2(1-k)^2} = 1 \ , \tag{6}$$

care este o elipsă de semiaxe ℓ(1+k), ℓ(1-k).

d) Viteza punctului *B*

Viteza unghiulară ω_I de rotaţie a barei *AB* în jurul centrului instantaneu de rotaţie are, în baza relaţiei (11.15), expresia:

$$\omega_I = \frac{v_A}{AI} = \frac{\omega \, OA}{AI} = \omega \, . \tag{7}$$

În conformitate cu (11.15), vectorul viteză $\bar{v}_B$ a punctului *B* este:

$$\bar{v}_B = -\omega_I \, BI \, \bar{i}_1 = -2\,\omega \ell \sin \omega \, t \ \bar{i}_1 \ . \tag{8}$$

e) Viteza punctului *M*

Aplicând (11.15) punctului *M* şi teorema cosinusului în triunghiul *IAM,* rezultă:

$$v_M = \omega \ell \sqrt{1 + k^2 - 2k\cos 2\omega t} \ . \tag{9}$$

Viteza punctului *M* este perpendiculară pe $\overline{IM}$, are sensul dat de sensul vitezei unghiulare instantanee ω_I, iar modulul se determină cu relaţia (9).

11.2.5. Se consideră mecanismul bielă-manivelă excentric reprezentat în figura 11.20. Manivela motoare se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω_0. Se cer, să se determine acceleraţia capului de cruce, precum şi acceleraţia unghiulară a bielei atunci când manivela se găseşte în poziţie verticală.

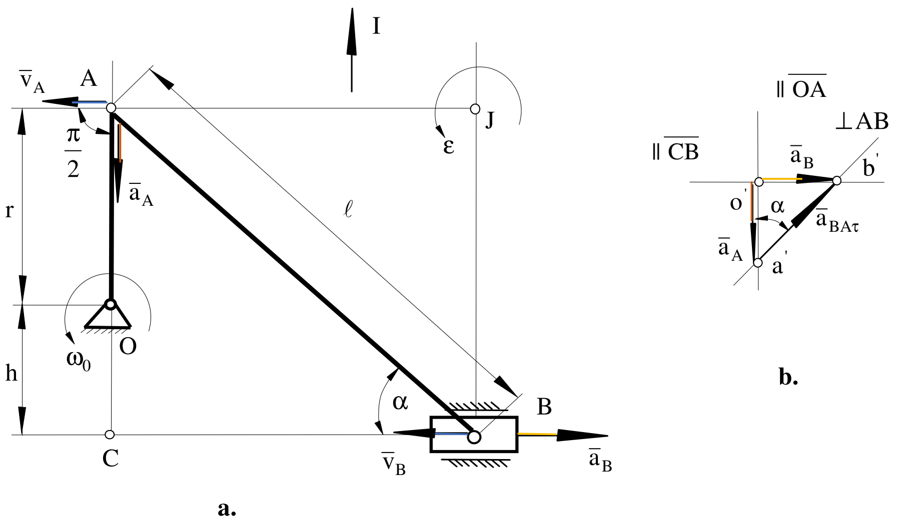


Fig. 11.20

instantaneu de rotaţie *I,* corespunzător mişcării plan-paralele a bielei *AB*, este aruncat la infinit, deci biela execută o mişcare elementară de translaţie. Rezultă că, viteza unghiulară instantanee ω de rotaţie a bielei este nulă.

Conform relaţiei (11.45), acceleraţia capului de cruce *B* are expresia:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \tag{1}$$

în care:

$$\overline{a}_B \parallel \overline{CB},\ \overline{a}_A = \overline{a}_{A\nu} + \overline{a}_{A\tau},\ \overline{a}_{A\nu} \parallel \overline{OA},\ a_{A\nu} = \omega_0^2 r,\ a_{A\tau} = \varepsilon_0 OA = 0,\ (\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = 0), \tag{2}$$

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA\nu} + \overline{a}_{BA\tau},\quad a_{BA\nu} = \omega^2 AB = 0,\ (\omega = 0),\quad \overline{a}_{BA\tau} \perp \overline{BA}. \tag{3}$$

Introducând (3) în (1), se obţine:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA_\tau} = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} \tag{4}$$

Având în vedere planul acceleraţiilor din figura 11.20b şi utilizând relaţiile (1), (2), (3) şi (4), se obţine valoarea acceleraţiei $\overline{a}_B$ a capului de cruce:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$a_B = a_A tg\,\alpha = \omega_0{}^2 r \frac{(r+h)}{\sqrt{\ell^2 - (r+h)^2}} , \tag{5}$$

Din figura 11.20a rezultă:

$$tg\,\alpha = \frac{(r+h)}{\sqrt{\ell^2 - (r+h)^2}} . \tag{6}$$

Componenta tangenţială $\overline{a}_{BA_\tau}$ a acceleraţiei relative $\overline{a}_{BA}$ de rotaţie a punctului B faţă de A are mărimea:

$$a_{BA_\tau} = \varepsilon\, AB = \varepsilon\, \ell . \tag{7}$$

Din figura 11.20 se obţine:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - (r+h)^2}}{\ell}, \quad a_{BA\,\tau} = \frac{a_A}{\cos\alpha} = \frac{\omega_0{}^2 r\,\ell}{\sqrt{\ell^2 - (r+h)^2}}, \tag{8}$$

astfel încât, conform cu (7) şi (8),

$$\varepsilon = \frac{\omega_0{}^2 r}{\sqrt{\ell^2 - (r+h)^2}}. \tag{9}$$

Raportând mişcarea plan-paralelă la polul J al acceleraţiilor, acceleraţiile punctelor A şi B, conform cu (11.46), au expresiile:

$$\begin{aligned} \overline{a}_A &= \overline{\varepsilon} \times \overline{JA} - \omega^2\, \overline{JA} , \\ \overline{a}_B &= \overline{\varepsilon} \times \overline{JB} - \omega^2\, \overline{JB} . \end{aligned} \tag{10}$$

Dar viteza unghiulară $\overline{\omega}$, corespunzătoare componentei de rotaţie a mişcării plan-paralele a bielei AB, este egală cu 0 (C.I.R. este la infinit) astfel încât, relaţiile (10) devin:

$$\begin{aligned} \overline{a}_A &= \overline{\varepsilon} \times \overline{JA}, \\ \overline{a}_B &= \overline{\varepsilon} \times \overline{JB}. \end{aligned} \tag{11}$$

Analizând (11), se constată că polul J al acceleraţiilor se găseşte în punctul de intersecţie a normalelor duse în punctele de articulaţie A şi B pe suporţii acceleraţiilor $\overline{a}_A$ şi $\overline{a}_B$ (fig. 11.20).

11.2.6. Cunoscând acceleraţiile extremităţilor unei bare *AB* aflată în mişcare plană, se cere să se determine acceleraţia mijlocului *C* al barei. Se dau acceleraţiile $\overline{a}_A$ şi $\overline{a}_B$.

Soluţie:

Conform cu (11.41), se pot scrie relaţiile:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AC} - \omega^2 \overline{AC}, \qquad \overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BC} - \omega^2 \overline{BC}. \tag{1}$$

Prin adunare rezultă:

$$\overline{a}_C = \frac{1}{2}(\overline{a}_A + \overline{a}_B), \quad \text{deoarece} \quad \overline{AC} + \overline{BC} = 0. \tag{2}$$

11.2.7. O bară *OA* se roteşte într-un plan în jurul articulaţiei fixe *O* astfel încât, $\alpha = \alpha_0 + \omega t$. O a doua bară *AB* se roteşte în jurul lui *A* astfel încât, $\beta = \beta_0 + \omega t$, unde ω este o mărime presupusă constată. Se cer să se determine vitezele unghiulare de rotaţie ω_0 şi ω_1 ale barelor *OA* şi *AB* în jurul lui *O*, respectiv *A*, viteza punctului *B* şi centroidele mişcării plane a barei *AB*. Se dau: *OA* = ℓ, *AB* = ℓ_1 (fig. 11.21).

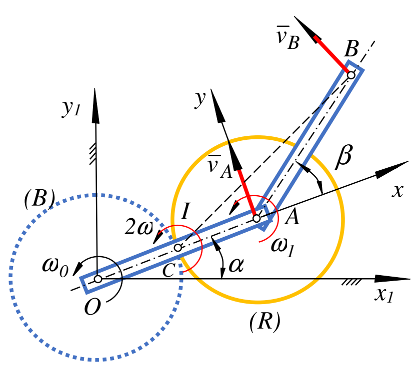


Fig. 11.21

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

a) Vitezele unghiulare ω_0 şi ω_1

Prin derivare în raport cu timpul a unghiurilor de rotaţie α şi β se obţin vitezele unghiulare ω_0 şi ω_1 astfel:

$$\omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \quad \omega_1 = \frac{d\beta}{dt} = \omega . \tag{1}$$

b) Viteza punctului *B*

Se constată că rotaţiile barelor în jurul punctelor *O* şi *A* sunt identice (sunt egale conform cu (1), paralele şi de acelaşi sens). Ca urmare, axa centrală a sistemului de vectori paraleli $\overline{\omega}_0$ şi $\overline{\omega}_1$ trece prin mijlocul *C* al barei *OA*, punct în care se poate aplica rezultanta vectorilor $\overline{\omega}_0$ şi $\overline{\omega}_1$ de valoare $\omega_0 + \omega_1 = 2\omega$. Această rezultantă reprezintă viteza unghiulară instantanee absolută a barei *AB*. Dar cum centrul instantaneu de rotaţie *I* al barei *AB* se află pe perpendiculara *OA* dusă în punctul *A* pe viteza $\overline{v}_A$ a acestuia şi viteza unghiulară absolută a barei *AB* acţionează în punctul *C,* rezultă că punctul *C* este centrul instantaneu de rotaţie corespunzător barei *AB*. Astfel, viteza punctului *B* este perpendiculară în *B* pe *IB* şi are sensul dat de viteza unghiulară 2ω. În conformitate cu metoda centrului instantaneu de rotaţie, mărimea vitezei $\overline{v}_B$ se va obţine cu relaţia:

$$v_B = 2\omega IB = \omega\sqrt{\ell^2 + 4\ell_1^2 + 4\ell_1\ell\cos\beta} \ . \tag{2}$$

c) Baza

Înregistrând punctul *I* faţă de sistemul de referinţă fix x_1Oy_1 introdus în figura 11.21, se determină coordonatele x_1, y_1 ale acestui punct cu relaţiile:

$$x_1 = \frac{\ell}{2}\cos\alpha, \quad y_1 = \frac{\ell}{2}\sin\alpha \ . \tag{3}$$

Eliminând unghiul α din relaţia (3), se obţine ecuaţia carteziană a curbei bază:

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2, \ (B), \tag{4}$$

care este un cerc de rază $\frac{\ell}{2}$ cu centrul în punctul *O*.

d) Rostogolitoarea

Coordonatele x şi y ale centrului instantaneu de rotaţie, înregistrate faţă de sistemul mobil xAy (fig. 11.21) solidar cu bara AB, au expresiile:

$$x = \frac{\ell}{2} = const., \qquad y = 0. \tag{5}$$

Se constată că rostogolitoarea este un cerc mobil cu centrul în punctul A şi raza egală cu $\frac{\ell}{2}$.

11.2.8. Pe un segment de dreaptă AB care se mişcă într-un plan fix, să se afle punctul M a cărui viteză să fie orientată în lungul segmentului. Să se determine mărimea acestei viteze, distanta h a centrului instantaneu de rotaţie la segment şi viteza unghiulară instantanee ω a segmentului.

Se cunosc vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ ale capetelor A şi B ale segmentului şi unghiurile α_1 şi α_2 dintre viteze şi segmentul AB de lungime ℓ (fig. 11.22) .

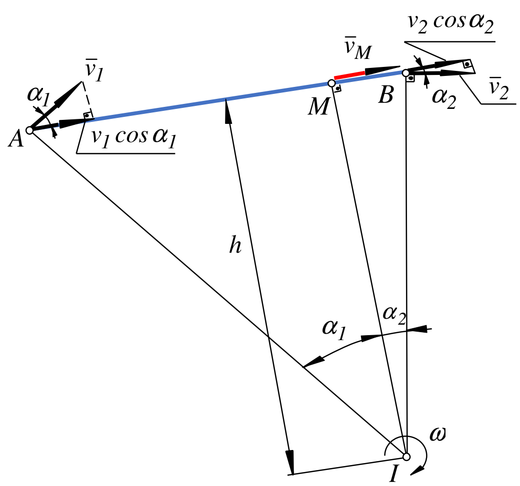


Fig. 11.22

Soluţie:

Centrul instantaneu de rotaţie se găseşte la intersecţia perpendicularelor duse în punctele A şi B pe vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Punctul M reprezintă piciorul perpendicularei dusă din punctul I pe segmentul AB. Urmărind figura 11.22, se pot scrie relaţiile:

$$\begin{aligned} IA \sin\alpha_1 + IB \sin\alpha_2 &= \ell, \\ IA \cos\alpha_1 &= IB \cos\alpha_2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Prin rezolvarea sistemului (1) se obţin segmentele IA şi IB ale căror expresii sunt:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$IA = \frac{\ell \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad IB = \frac{\ell \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} . \tag{2}$$

Conform figurii, se obţine poziţia punctului M pe segmentul AB astfel:

$$AM = IA \sin\alpha_1 = \frac{\ell \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} . \tag{3}$$

Viteza punctului M este:

$$v_M = \omega IM = \omega h , \tag{4}$$

relaţie în care:

$$h = IA \cos\alpha_1 = IB \cos\alpha_2 = \frac{\ell \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\ell}{tg\alpha_1 + tg\alpha_2} . \tag{5}$$

Pe de altă parte, vitezele sunt:

$$v_1 = \omega IA , \quad v_2 = \omega IB , \tag{6}$$

relaţii din care se obţine viteza unghiulară ω:

$$\omega = \frac{v_1}{IA} = \frac{v_2}{IB} = \frac{v_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\ell \cos\alpha_1} = \frac{v_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\ell \cos\alpha_2} . \tag{7}$$

Având în vedere relaţiile (5) şi (7), viteza v_M a punctului M are expresia:

$$v_M = v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2 . \tag{8}$$

La acelaşi rezultat (8) se ajunge şi prin aplicarea metodei proiecţiilor.

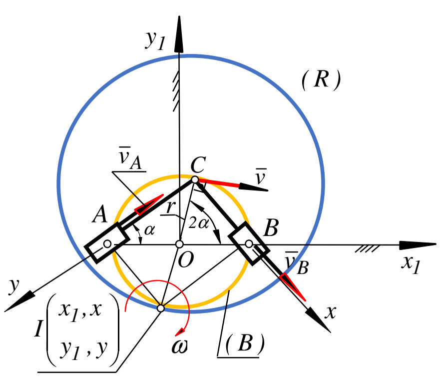


Fig. 11.23

11.2.9. Vârful C al unei bare îndoită în unghi drept descrie cu viteză constantă $\overline{v}$ periferia unui cerc de rază r.

Laturile barei trec prin două puncte A şi B de pe cerc, ele fiind situate pe acelaşi diametru. Să se determine: centroidele mişcării plane a barei şi vitezele $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ ale punctelor barei care coincid cu punctele *A* şi *B*, pentru poziţia dată în figura 11.23 prin unghiul $\alpha = \sphericalangle CAB$.

Soluţie:

Centroidele mişcării plane pentru bară sunt baza şi rostogolitoarea. Centrul instantaneu de rotaţie *I* se află la intersecţia perpendicularelor duse în punctele *A* şi *B* pe laturile barei îndoită în unghi drept. De altfel, punctul *I* se află şi pe prelungirea razei punctului *C* .

a) Baza

Pentru determinarea bazei se introduce în *O* sistemul cartezian fix x_1Oy_1 şi se notează cu x_1 şi y_1 coordonatele punctului *I* înregistrate în raport cu acest sistem de referinţă. Urmărind figura 11.23, se pot scrie relaţiile:

$$x_1 = -r\cos 2\alpha, \quad y_1 = -r\sin 2\alpha. \tag{1}$$

Prin ridicare la pătrat şi adunare, aceste relaţii conduc la:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \ (B). \tag{2}$$

Ecuaţia (2) reprezintă un cerc de rază *r*, cu centrul în punctul *O* şi este curba numită bază *(B)*.

b) Rostogolitoarea

Curba rostogolitoare se determină exprimând coordonatele *x* şi *y* ale centrului instantaneu de rotaţie în raport cu sistemul de coordonate mobil *xCy*, solidar cu bara îndoită în unghi drept astfel:

$$x = 2r\sin\alpha, \quad y = 2r\cos\alpha. \tag{3}$$

Parametrul α se poate elimina prin ridicare la pătrat şi adunarea relaţiilor (2).
Se obţine astfel relaţia:

$$x^2 + y^2 = 4r^2, \ (R) \tag{4}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

care este ecuaţia unui cerc de rază $2r$, cu centrul în punctul C şi reprezintă curba plană mobilă numită rostogolitoare *(R)*.

c) Vitezele $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$

Raportând distribuţia de viteze din cazul mişcării plane la centrul instantaneu de rotaţie, se pot scrie relaţiile:

$$v = \omega IC = 2\omega r,\ v_A = \omega IA = 2\omega r \sin\alpha,\ v_B = \omega IB = 2\omega r \cos\alpha. \qquad (5)$$

Din prima relaţie (5) se determină viteza unghiulară ω:

$$\omega = \frac{v}{2r}, \qquad (6)$$

astfel că, vitezele v_A şi v_B devin:

$$v_A = v\sin\alpha,\quad v_B = v\cos\alpha . \qquad (7)$$

Vitezele $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ sunt orientate în lungul laturilor AC şi CB şi au sensul determinat de sensul vitezei unghiulare ω a barei din jurul centrului instantaneu de rotaţie I.

11.2.10. Se consideră mecanismul bielă-manivelă prezentat în figura 11.24. Manivela motoare OA are lungimea r şi se roteşte în jurul lui O cu viteza unghiulară constantă ω. Biela AB are lungimea ℓ. Să se determine viteza unghiulară ω_1 şi acceleraţia unghiulară ε_1 a bielei pentru poziţia mecanismului dată de unghiul φ.

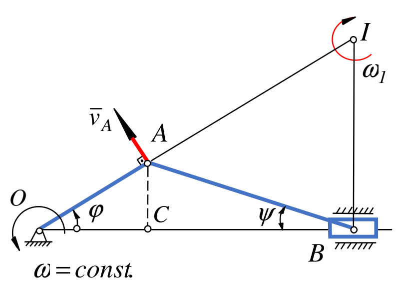


Fig. 11.24

Soluţie:

Centrul instantaneu de rotaţie corespunzător bielei AB se află la intersecţia perpendicularelor duse în A pe viteza $\bar{v}_A$ a punctului A şi în B pe direcţia vitezei acestui punct.

Exprimând viteza lui A ca punct care aparţine manivelei şi bielei, se poate scrie:

$$v_A = \omega r = \omega_1 \, IA. \tag{1}$$

Având în vedere figura 11.24, există relaţia:

$$IA \cos\varphi = \ell \cos\psi, \tag{2}$$

din care se obţine:

$$IA = \frac{\ell \cos\psi}{\cos\varphi}. \tag{3}$$

Din triunghiul dreptunghic *ABC* rezultă:

$$\sin\psi = \frac{AC}{AB} = \frac{r\sin\varphi}{\ell}, \tag{4}$$

relaţie care permite obţinerea funcţiei:

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \frac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - \mathrm{r}^2 \sin^2\varphi}. \tag{5}$$

Viteza unghiulară instantanee ω_1 a bielei se obţine din relaţia (1). Astfel,

$$\omega_1 = \frac{\omega\, r}{IA}. \tag{6}$$

Având în vedere relaţiile (3) şi (5), relaţia (6) devine:

$$\omega_1 = \frac{\omega r \cos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - \mathrm{r}^2 \sin^2\varphi}}. \tag{7}$$

Acceleraţia unghiulară instantanee ε_1 a bielei se obţine prin derivare în raport cu timpul a relaţiei (7). Astfel,

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \omega r\,\dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - \mathrm{r}^2\sin^2\varphi}}\right) = \omega^2 r\,(r^2 - \ell^2)\frac{\sin\varphi}{\left(\ell^2 - \mathrm{r}^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{8}$$

11.2.11. Manivela *OA* a unui mecanism bielă-manivelă se roteşte în jurul punctului *O* cu viteza unghiulară constantă ω. Pistonul *B* este acţionat prin intermediul bielei *AB*. Să se arate că viteza $\bar{v}_B$ a pistonului este egală cu $\omega \cdot OC$, unde *C* este punctul de intersecţie dintre biela *AB* şi perpendiculara dusă în *O* pe dreapta *OB* (fig. 11.25).

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

Centrul instantaneu de rotaţie I corespunzător bielei AB se află la intersecţia perpendicularelor duse în punctul A pe viteza $\overline{v}_A$ şi în B pe direcţia vitezei punctului B.

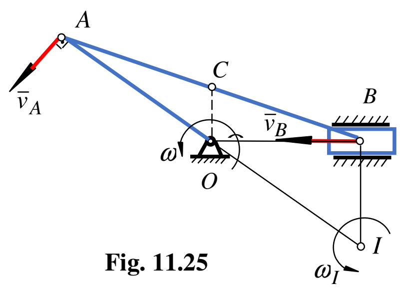


Fig. 11.25

Se exprimă viteza punctului A ca punct aparţinând manivelei OA respectiv, ca punct aparţinând bielei. Se poate scrie astfel:

$$v_A = \omega OA = \omega_I \, IA \,, \tag{1}$$

relaţie din care se poate determina viteza unghiulară instantanee corespunzătoare bielei. Astfel,

$$\omega_I = \frac{OA}{IA}\omega \,. \tag{2}$$

În conformitate cu metoda centrului instantaneu de rotaţie, viteza $\overline{v}_B$ a punctului B are direcţia perpendiculară pe IB şi sensul determinat de ω_I, iar modulul:

$$v_B = \omega_I \, IB = \frac{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{IB}}{IA}\omega \,. \tag{3}$$

Urmărind figura 11.25, se constată că $\Delta\ OAC \sim \Delta\ IAB$. Astfel, se poate scrie:

$$\frac{OC}{IB} = \frac{OA}{IA} \,. \tag{4}$$

Din relaţia (4) rezultă:

$$OC = \frac{OA \cdot IB}{IA} \,. \tag{5}$$

Introducând relaţia (5) în relaţia (3), se obţine:

$$v_B = \omega \cdot OC \,. \tag{6}$$

11.2.12. Se dă mecanismul din figura 11.26 în care o camă de forma unui disc circular, de rază R, se roteşte în jurul unei articulaţii O_0 cu viteza ω = const., antrenând în mişcare sistemul de bare ABD şi DE. Cunoscând $AB = 2R$, $BD = R$ şi $DE = 4R$, să se determine:

a) ecuaţiile parametrice de mişcare ale barei DE;
b) centrul instantaneu de rotaţie al barei DE;
c) centroidele mişcării plan-paralele ale barei DE;
d) viteza unghiulară de rotaţie a barei DE;
e) vitezele punctelor D şi E.

Soluţie:

Se alege sistemul de referinţă $x_0O_0y_0$ fix şi un unghi θ pe care îl face bara *DE* cu verticala la un moment dat. Variaţia acestui unghi $\theta = \theta(t)$ reprezintă *legea mişcării relative a barei DE* .

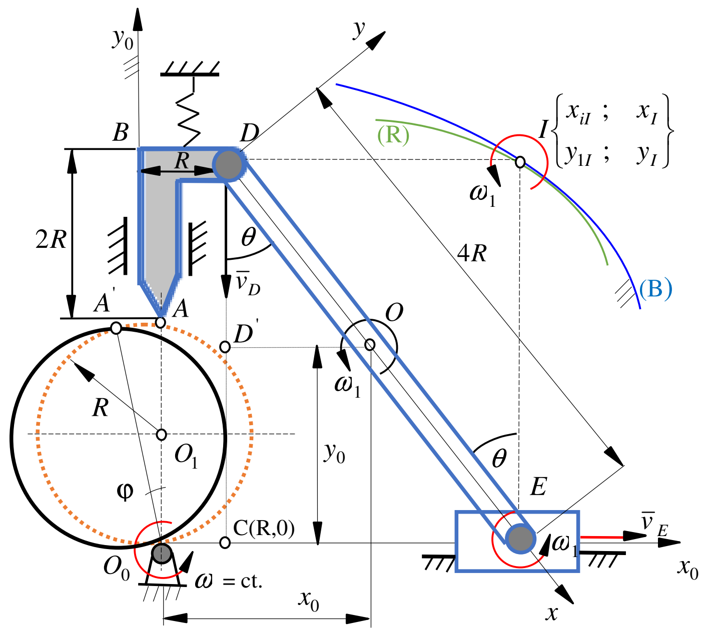


Fig. 11.26

a) Ecuaţiile parametrice de mişcare ale barei *DE* raportate la sistemul de referinţă fix $x_0O_0y_0$ sunt următoarele:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= BD + D'O = R + 2R\sin\theta \\
y_0 &= 2R\cos\theta \qquad\qquad (1) \\
\theta &= \theta(t).
\end{aligned}
$$

b) Se observă că bara *DE* execută o mişcare plan-paralelă a cărui centru instantaneu de rotaţie *I* se poate determina geometric ducând perpendiculare pe direcţiile vitezelor în punctele *D* şi *E*.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

c) Centroidele mişcării plane ale barei *DE*:

Ecuaţiile parametrice ale curbei *bază (B)* exprimate în raport cu sistemul de referinţă $x_0O_0y_0$ sunt:

$$\begin{aligned} x_{1I} &= R + 4R\sin\theta \\ y_{1I} &= 4R\cos\theta \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Prin eliminarea unghiului θ din relaţiile (2), se obţine ecuaţia carteziană a *curbei bază* şi anume:

$$(x_{1I} - R)^2 + y_{1I}^2 = (4R)^2 \,. \tag{3}$$

Relaţia (3) reprezintă ecuaţia unui *cerc* de rază *2R* şi şi centru *C(R, 0)*.

Ecuaţiile parametrice ale centroidei mobile (rostogolitoarei (R)) raportate la sistemul de referinţă mobil xOy, sunt următoarele:

$$\begin{aligned} x_I &= DI\sin\theta = 2R(1 - \cos 2\theta) \\ y_I &= DI\cos\theta = 2R\sin 2\theta \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Eliminând unghiul θ din relaţia (4), se obţine ecuaţia carteziană a *centroidei mobile* numită *rostogolitoare (R)*:

$$(x_I - 2R)^2 + y_I^2 = (2R)^2 \,, \tag{5}$$

care reprezintă un cerc de rază *2R* cu centrul în punctul *O(2R, 0)*.

d) Viteza unghiulară de rotaţie a barei *DE* este ω_1 şi se determină astfel:

$$\omega_1 = \dot{\theta}. \tag{6}$$

Urmărind figura 11.26, se constată că $O_0B = EI$, adică:

$$2R\cos\varphi + 2R = 4R\cos\theta \,,$$

relaţie care devine:

$$2\cos\theta = 1 + \cos\varphi. \tag{7}$$

Derivând relaţia (7) în ambii membrii în raport cu timpul, se obţine viteza unghiulară ω_1 a barei *DE*:

$$\omega_1 = \dot{\theta} = \frac{\omega \sin \omega t}{2 \sin \theta}. \tag{8}$$

e) Vitezele punctelor D şi E se determină cu metoda centrului instantaneu de rotaţie. Astfel,

$$\bar{v}_D = \bar{\omega}_1 \times \overline{ID},$$
$$v_D = \omega_1 ID = \frac{1}{2}\omega \frac{\sin \omega t}{\sin \theta} 4R \sin \theta = 2\omega R \sin \omega t; \tag{9}$$

$$\bar{v}_E = \bar{\omega}_1 \times \overline{IE},$$
$$v_E = \omega_1 IE = \frac{1}{2}\omega \frac{\sin \omega t}{\sin \theta} 4R \cos \theta = 2\omega R \sin \omega t \, ctg\theta. \tag{10}$$

Vitezele punctelor A şi B sunt egale cu viteza punctului D deoarece aparţin aceleiaşi bare:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_D \ . \tag{11}$$

11.2.13. Se dă mecanismul bielă-manivelă din figura 11.27 a cărui manivelă OA se roteşte cu viteza unghiulară instantanee ω şi acceleraţia unghiulară instantanee ε. Să se determine prin *metoda planului vitezelor* şi prin *metoda planului acceleraţiilor* , viteza $\bar{v}_C$ şi acceleraţia $\bar{a}_C$ a punctului C al bielei AB, punct aflat la distanţa m de A. Se dau $OA = r$, $AB = \ell$.

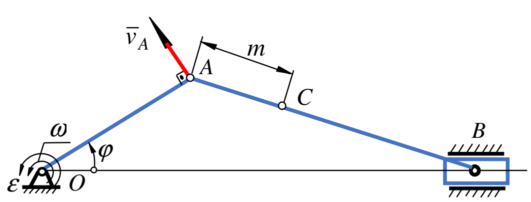


Fig. 11.27

Soluţie:

a) Determinarea vitezelor

Viteza $\bar{v}_A$ a punctului A are direcţia perpendiculară pe OA, are sensul dat de viteza unghiulară ω şi modulul:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$v_A = \omega OA \ . \tag{1}$$

Viteza $\bar{v}_B$ a punctului *B* se obţine din relaţia de tip Euler pentru viteze scrisă pentru punctele *B* şi *A*. Astfel,

$$B, A: \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \ , \tag{2}$$

relaţie în care $\bar{v}_A$ este cunoscută, $\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$, $\bar{v}_B \parallel \overline{OB}$.

Se construieşte planul vitezelor (fig. 11.28a) într-un punct *o* din afara planului vitezelor. În acest sens, se reprezintă la o scară s_v impusă pentru viteze, în polul *o* al planului vitezelor viteza $\bar{v}_A$ şi se notează cu *a* extremitatea sa. Apoi prin punctul *a* se duce o perpendiculară pe *AB*, iar prin *o* paralela la *OB* care se intersectează în extremitatea *b* a vectorului viteză $\bar{v}_B$.

Viteza $\bar{v}_C$ a punctului *C* aparţinând bielei se poate găsi pe segmentul *ab* din planul de viteze, alegând punctul *c* astfel încât:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{m}{\ell - \mathrm{m}} \ . \tag{3}$$

Unind punctul *o* cu *c* se obţine în planul de viteze vectorul $\bar{v}_C$ în mărime, direcţie şi sens.

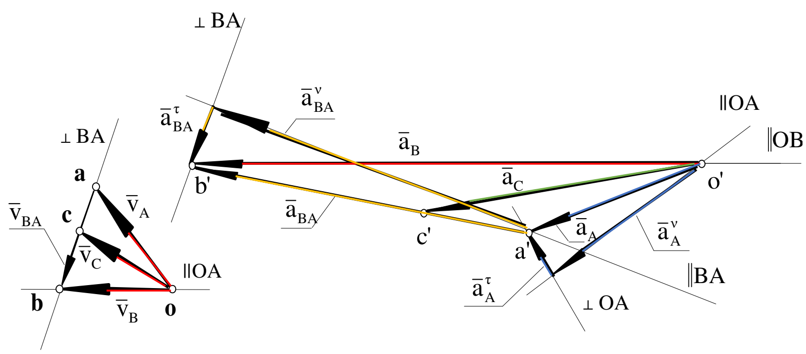


Fig. 11.28

b) Determinarea acceleraţiilor

Acceleraţia $\bar{a}_A$ a punctului *A* se poate scrie ca o sumă de două componente intrinseci (fig. 11.28b):

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{\nu} \qquad (4)$$

unde: $\overline{a}_A^{\nu}$ are direcţia paralelă cu *OA*, sensul de la *A* spre *O* şi modulul:

$$a_A^{\nu} = \omega^2 \, OA\,;$$

$\overline{a}_A^{\tau}$ are direcţia perpendiculară pe *OA*, sensul dat de ε şi modulul $a_A^{\tau} = \varepsilon OA$.

Acceleraţia $\overline{a}_B$ a punctului *B* se poate determina cu o relaţie de tip Euler pentru acceleraţii scrisă pentru punctele *B* şi *A*. Astfel,

$$B,\, A\!: \; \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}\ , \qquad (5)$$

relaţie în care $\overline{a}_A$ - este cunoscută;

$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{\nu} + \overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}^{\nu}$ - are direcţia paralelă cu *BA*, sensul de la *B* spre *A* şi modulul: $a_{BA}^{\nu} = \dfrac{v_{BA}^2}{BA}$, $\overline{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{BA}$, *iar* $\overline{a}_B \,||\, \overline{OB}$.

Utilizând relaţiile (4) şi (5), se construieşte într-un punct o', situat înafara planului mecanismului, planul de acceleraţii (fig. 11.28b). În acest sens, se alege o scară s_a a acceleraţiilor şi se reprezintă la scară vectorii $\overline{a}_A^{\nu}$, $\overline{a}_A^{\tau}$ şi $\overline{a}_{BA}^{\nu}$. În punctul o' se introduce vectorul $\overline{a}_A^{\nu}$, iar în extremitatea acestuia se introduce vectorul $\overline{a}_A^{\tau}$. Suma lor vectorială este vectorul $\overline{a}_A$ a cărui extremitate se notează cu a'. Se construieşte prin a' o paralelă la *AB* pe care, cu sensul de la *B* spre *A,* se reprezintă vectorul $\overline{a}_{BA}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se duce o perpendiculară pe *BA*. În continuare, prin punctul o' se duce o paralelă la *OB* care intersectează în b' perpendiculara pe *BA*. Pornind din o' spre b' şi urmărind relaţiile (4) şi (5), se închid poligoanele rezultând vectorii $\overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}$ şi $\overline{a}_B$.

Acceleraţia punctului *C* a bielei se obţine luând pe segmentul $a'b'$ din planul de acceleraţii imaginea c' a punctului *C,* astfel încât:

$$\frac{a'c'}{c'b'} = \frac{m}{\ell - m}\ . \qquad (6)$$

Vectorul $\overline{o'c'}$ din planul acceleraţiilor reprezintă acceleraţia $\overline{a}_C$ a punctului *C* în mărime, direcţie şi sens.

11.2.14. Două bare omogene *AC* şi *BC* de lungimi cunoscute sunt articulate între ele în punctul *C*, iar în *A* şi *B* de două patine care se pot deplasa pe orizontală. Cunoscând la un moment dat vitezele $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ ($v_2 > v_1$) şi acceleraţiile $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

($a_2 > a_1$) ale patinelor *A* şi *B,* se cere să se determine viteza $\bar{v}_C$ şi acceleraţia $\bar{a}_C$ a punctului *C* prin *metoda planului de viteze şi metoda planului de acceleraţii*. Să se determine de asemenea, centrele instantanee de rotaţie corespunzătoare barelor *AC* şi *BC* (fig. 11.29).

Soluţie:

a) Viteza punctului *C*

Traiectoria punctului *C* fiind necunoscută, pentru determinarea vitezei $\bar{v}_C$ a punctului *C* se scriu relaţii Euler pentru viteze pentru perechile de puncte *C, A* şi *C, B* astfel:

$$C, A: \quad \bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}\,, \tag{1}$$

relaţie în care $\bar{v}_A = \bar{v}_1$ - viteză cunoscută, $\bar{v}_{CA} \perp \overline{CA}$, $\bar{v}_C$ - viteză necunoscută.

$$C, B: \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}\,, \tag{2}$$

relaţie în care $\bar{v}_B = \bar{v}_2$ - viteză cunoscută, $\bar{v}_{CB} \perp \overline{CB}$, $\bar{v}_C$ - viteză necunoscută.

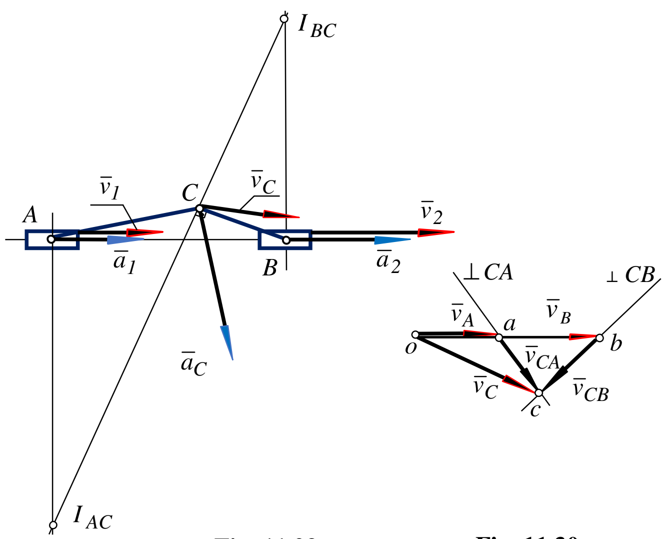


Fig. 11.29 **Fig. 11.30**

Se alege o scară s_v a vitezelor şi se reprezintă vitezele $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ la scară, introducându-le în planul vitezelor (fig. 11.30) în punctul *o*. Prin extremităţile *a* şi *b* ale vectorilor $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ din planul de viteze se duc perpendicularele pe *CA* şi pe *CB,* care se intersectează în punctul *c*. Viteza punctului *C* se obţine unind în planul de viteze punctul *o* cu punctul *c,* urmărind desigur, relaţiile (1) şi (2) şi reprezentând în C (fig. 11.29) un vector echipolent cu vectorul $\overline{oc} = \overline{v}_C$, din planul de viteze.

Centrele instantanee de rotaţie corespunzătoare barelor AC şi BC se determină astfel: se duc perpendiculare în punctele A, B şi C pe vitezele $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ şi $\overline{v}_C$, obţinând la intersecţia a câte două din aceste perpendiculare, centrele instantanee de rotaţie I_{AC} şi I_{BC}.

b) Acceleraţia punctului *C*

Pentru determinarea acceleraţiei $\overline{a}_C$ a punctului C se scriu relaţii Euler pentru acceleraţii, corespunzător perechilor de puncte C, A şi C, B. Astfel,

$$C, A: \ \overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA} \ , \tag{3}$$

relaţie în care $\overline{a}_A = \overline{a}_1$ este acceleraţie cunoscută, $\overline{a}_{CA} = \overline{a}_{CA}^{\nu} + \overline{a}_{CA}^{\tau}$, $\overline{a}_{CA}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu CA, sensul de la C la A şi modul $a_{CA}^{\nu} = \dfrac{v_{CA}^2}{CA}$, $\overline{a}_{CA}^{\tau} \perp \overline{CA}$, $\overline{a}_C$ acceleraţia necunoscută:

$$C, B: \ \overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB} \ , \tag{4}$$

relaţie în care $\overline{a}_B = \overline{a}_2$ acceleraţie cunoscută, $\overline{a}_{CB} = \overline{a}_{CB}^{\nu} + \overline{a}_{CB}^{\tau}$, $\overline{a}_{CB}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu CB, sensul de la C la B şi modul: $a_{CB}^{\nu} = \dfrac{v_{CB}^2}{CB}$, $\overline{a}_{CB}^{\tau} \perp \overline{CB}$, $\overline{a}_C$ este acceleraţia necunoscută.

Planul de acceleraţii (fig. 11.31) se construieşte astfel: în polul o' al planului acceleraţiilor se reprezintă la scara s_a a acceleraţiilor, vectorii $\overline{a}_A$ şi $\overline{a}_B$. Prin extremitatea a' a acceleraţiei $\overline{a}_A$ se duce o paralelă la CA pe care, cu sensul de la C spre A, se reprezintă la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{CA}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se trasează o perpendiculară pe CA. În mod similar, prin extremitatea b' a acceleraţiei $\overline{a}_B$ se trasează o paralelă la CB pe care, cu sensul de la C spre B, se reprezintă vectorul $\overline{a}_{CB}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se duce o perpendiculară pe CB.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Punctul c' care este extremitatea acceleraţiei $\overline{a}_C$, se află la intersecţia perpendicularelor pe AC şi CB.

Urmărind relaţiile (3) şi (4), se porneşte din o' spre c' şi se închid poligoanele, obținându-se vectorii acceleraţie: $\overline{a}_{CA}^{\tau}$, $\overline{a}_{CA}$, $\overline{a}_{CB}^{\tau}$, $\overline{a}_{CB}$, $\overline{a}_C$.

În planul de acceleraţii, acceleraţia $\overline{a}_C$ este determinată ca direcţie, sens şi modul. Dar cum punctul de aplicaţie este C, se desenează în punctul C din figura 11.31 un vector echipolent cu vectorul $\overline{o'c'} = \overline{a}_C$ din planul de acceleraţii. Astfel, acceleraţia $\overline{a}_C$ a punctului C este perfect determinată.

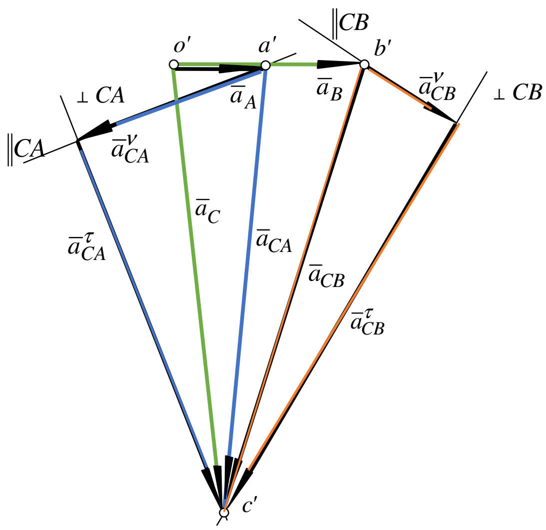


Fig. 11.31

11.2.15. Două bare paralele AB şi CD se mişcă în sensuri contrare cu vitezele $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ $(v_1 > v_2)$. Între bare se află un disc de rază r care se rostogoleşte fără să alunece pe bare (fig. 11.32). Să se determine:

a) viteza unghiulară a discului;

b) viteza $\overline{v}_0$ a centrului discului;

c) centroidele mişcării plane a discului.

Soluţie:

a) *Centrul instantaneu de rotaţie* se găseşte la intersecţia perpendicularelor comune duse în punctele E şi F pe vitezele $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ şi cu dreapta HG care uneşte extremităţile vitezelor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$. Într-adevăr, exprimând vitezele punctelor E şi F aparţinând discului, se pot scrie relaţiile:

$$v_1 = \omega IE, \qquad v_2 = \omega IF. \tag{1}$$

Prin împărţire membru cu membru a acestor relaţii, se obţine:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{IE}{IF} \Leftrightarrow \frac{EH}{FG} = \frac{IE}{IF}. \tag{2}$$

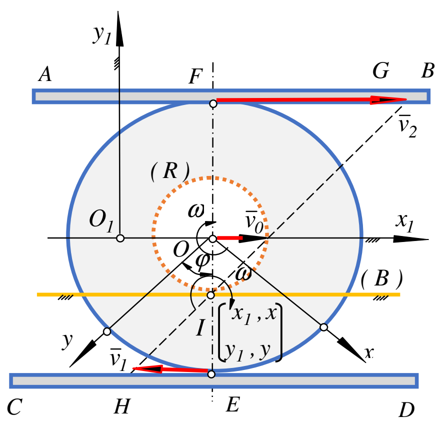


Fig. 11.32

În figura 11.32 se constată că: $\Delta\, IEH \sim \Delta\, IFG$, astfel că:

$$\frac{EH}{FG} = \frac{IE}{IF}. \tag{3}$$

Se observă că, relaţiile (2) şi (3) sunt identice, ceea ce conduce la concluzia că centrul instantaneu de rotaţie I se găseşte la intersecţia dreptelor EF şi HG.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Prin adunarea membru cu membru a relaţiilor (1), se obţine:

$$v_1 + v_2 = 2\omega r \ , \tag{4}$$

de unde viteza unghiulară instantanee a discului are valoarea:

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2r} \ . \tag{5}$$

b) În conformitate cu metoda centrului instantaneu de rotaţie, viteza $\overline{v}_0$ a centrului discului are direcţia perpendiculară pe *IO*, sensul este dat de viteza unghiulară ω şi modulul se obţine cu relaţia:

$$v_0 = \omega IO = \frac{v_2 - v_1}{2}. \tag{6}$$

În relaţia (6) *IO* are expresia:

$$IO = r - \mathrm{IE} = \mathrm{r} - \frac{\mathrm{v}_1}{\omega} = \frac{v_2 - \mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_1 + v_2} r \ . \tag{7}$$

c) Centroidele mişcării plane a discului se obţin exprimând coordonatele x_1, y_1 respectiv, x, y ale centrului instantaneu de rotaţie în raport cu sistemul fix $x_1O_1y_1$, respectiv mobil xOy solidar cu discul.

1) Baza

$$x_1 = x_1 \ , \qquad y_1 = -\mathrm{IO} = \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2} r = ct. \tag{8}$$

Se constată că, baza *(B)* este o dreaptă paralelă cu O_1x_1, aflată la distanţa *IO* de centrul discului.

2) Rostogolitoarea

$$x = IO \sin \varphi, \qquad y = IO \cos \varphi \ . \tag{9}$$

Prin ridicare la pătrat şi adunare membru cu membru a relaţiilor (9), se obţine ecuaţia carteziană a rostogolitoarei:

$$x^2 + y^2 = IO^2, \tag{10}$$

care este un cerc de rază *IO*, cu centrul în punctul *O,* tangent în punctul *I* la baza *(B)*.

11.2.16. Se consideră mecanismul de antrenare al pompei din figura 11.33, a cărui manivelă motoare OA are turaţia *n [rot/min]*.

Să se determine:

a) viteza $\overline{v}_F$ a pistonului pompei utilizând *metoda planului de viteze*;

b) acceleraţia $\overline{a}_F$ a pistonului pompei utilizând *metoda planului de acceleraţii*.

Soluţie:

a) Viteza $\overline{v}_F$ a pistonului pompei

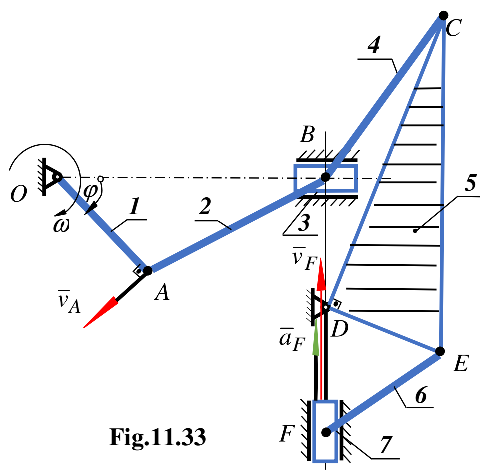


Fig.11.33

Viteza $\overline{v}_F$ a pistonului pompei se va determina prin metoda planului de viteze.

Cum relaţiile Euler pentru viteze se pot scrie pentru perechi de puncte aparţinând aceluiaşi element, se determină viteza $\overline{v}_A$ a punctului A apoi succesiv, vitezele $\overline{v}_B, \overline{v}_C, \overline{v}_E, \overline{v}_F$ ale punctelor *B, C, E* şi *F* aparţinând elementelor 2, 3, 4, 5, 6 şi 7. Astfel,

- viteza $\overline{v}_A$ a punctului A are expresia:

$$\overline{v}_A = \overline{\omega} \times \overline{OA}. \tag{1}$$

Caracteristicile vectorului viteză instantanee (fig. 11.34) $\overline{v}_A$ sunt:

- direcţia perpendiculară pe OA, sensul este dat de viteza unghiulară ω, modulul este:

$$v_A = \omega OA = \frac{\pi n}{30} OA,$$

- viteza $\overline{v}_B$ a punctului B are expresia:

$$B,A: \ \overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}, \tag{2}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

relaţie în care viteza $\overline{v}_A$ este cunoscută, $\overline{v}_{BA} \perp \overline{BA}$, $\overline{v}_B \parallel \overline{OB}$;

- viteza $\overline{v}_C$ ***a punctului C*** are expresia:

$$C,B: \quad \overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{v}_{CB} , \tag{3}$$

relaţie în care viteza $\overline{v}_B$ este cunoscută, $\overline{v}_{CB} \perp \overline{CB}$, $\overline{v}_C \perp \overline{CD}$*;*

- viteza $\overline{v}_E$ ***a punctului E*** are expresia

$$E,C: \quad \overline{v}_E = \overline{v}_C + \overline{v}_{EC} , \tag{4}$$

relaţie în care viteza $\overline{v}_C$ este cunoscută, $\overline{v}_{EC} \perp \overline{EC}$, $\overline{v}_E \perp \overline{DE}$;

- viteza $\overline{v}_F$ ***a punctului F*** *(pistonul pompei)* are expresia:

$$F,E: \quad \overline{v}_F = \overline{v}_E + \overline{v}_{FE} , \tag{5}$$

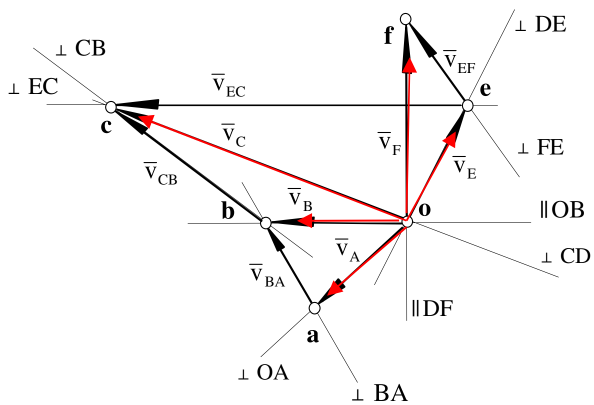


Fig. 11.34

relaţie în care viteza $\overline{v}_E$ este cunoscută, $\overline{v}_{FE} \perp \overline{FE}$, $\overline{v}_F \parallel \overline{DF}$.

Construcţia planului de viteze (fig. 11.34) se face urmărind relaţiile (1) - (5). Se alege o scară s_v a vitezelor şi se reprezintă la scară în polul o al planului de viteze, vectorul $\overline{v}_A$. Prin extremitatea a a vectorului $\overline{v}_A$ se trasează o perpendiculară pe BA, iar prin punctul o se duce o paralelă la OB. Se obţine astfel, punctul *b* care este extremitatea vectorului viteză absolută $\overline{v}_B$. În continuare, prin *b* se trasează o perpendiculară pe *CB* şi prin *o* se desenează o perpendiculară pe *CD*. Punctul lor de intersecţie este *c* şi reprezintă extremitatea vectorului viteză $\overline{v}_C$. Viteza punctului *E* se determină astfel: prin *c* se construieşte o perpendiculară pe *EC*, iar prin *o* se trasează o perpendiculară pe *DE*. La intersecţia acestor perpendiculare se află extremitatea *e* a vectorului viteză absolută $\overline{v}_E$. Extremitatea *f* a vitezei absolute $\overline{v}_F$ a pistonului pompei se află la intersecţia perpendicularei dusă în punctul *e* pe *FE,* cu paralela trasată în punctul *o* la *DF*. Transpunând în *F* vectorul $\overline{v}_F$, din planul de viteze se obţine pentru poziţia mecanismului definită de unghiul φ, viteza pistonului pompei la scara vitezelor.

b) Acceleraţia $\overline{a}_F$ a pistonului pompei

Acceleraţia $\overline{a}_F$ (fig. 11.35) a pistonului pompei se determină prin metoda planului acceleraţiilor. Similar cu vitezele punctelor mecanismului, se determină la început acceleraţia $\overline{a}_A$ a punctului *A*, iar succesiv, acceleraţiile $\overline{a}_B$, $\overline{a}_C$, $\overline{a}_E$, $\overline{a}_F$ ale punctelor *B, C, E* şi *F*. Punctul *A* descrie o traiectorie circulară astfel că, acceleraţia $\overline{a}_A$ se determină prin componentele sale intrinseci. Acceleraţiile $\overline{a}_B$, $\overline{a}_C$, $\overline{a}_E$, $\overline{a}_F$ se determină cu relaţii Euler pentru acceleraţii. Astfel, se determină succesiv:

- ***acceleraţia $\overline{a}_A$ a punctului A***

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\nu} + \overline{a}_A^{\tau}, \tag{6}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_A^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *OA*, sensul de la *A* spre *O*, modulul: $a_A^{\nu} = \omega^2 OA = \dfrac{\pi^2 n^2}{900} OA$,

$\overline{a}_A^{\tau} = 0$, deoarece $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$, $n = ct.$, $a_A^{\tau} = \varepsilon OA = 0$;

- *acceleraţia $\overline{a}_B$ a punctului B*

$$B, A\text{:}\ \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \tag{7}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_A$ este acceleraţie cunoscută;

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{\nu} + \overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *BA*, sensul de la *B* spre *A*,

modulul: $a_{BA}^{\nu} = \dfrac{v_{BA}^2}{BA}$, $\overline{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{BA}$,

$\overline{a}_B \parallel \overline{OB}$;

- ***acceleraţia*** $\overline{a}_C$ ***a punctului C***

$$C, B:\ \overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}\ , \tag{8}$$

relaţie în care:

- $\overline{a}_B$ **este acceleraţie cunoscută;**

$\overline{a}_{CB} = \overline{a}_{CB}^{\nu} + \overline{a}_{CB}^{\tau}$, $\overline{a}_{CB}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *CB*, sensul de la *C* spre *B*,

modulul: $a_{CB}^{\nu} = \dfrac{v_{CB}^2}{CB}$, $\overline{a}_{CB}^{\tau} \perp \overline{CB}$,

$\overline{a}_C = \overline{a}_C^{\nu} + \overline{a}_C^{\tau}$, $\overline{a}_C^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *DC*, sensul de la *C* spre *D*,

modulul: $a_C^{\nu} = \dfrac{v_C^2}{DC}$, $\overline{a}_C^{\tau} \perp \overline{DC}$;

- ***acceleraţia*** $\overline{a}_E$ ***a punctului E***

$$E, C:\ \overline{a}_E = \overline{a}_C + \overline{a}_{EC}\ , \tag{9}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_C$ este acceleraţie cunoscută;

$\overline{a}_{EC} = \overline{a}_{EC}^{\nu} + \overline{a}_{EC}^{\tau}$, $\overline{a}_{EC}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *EC*, sensul de la *E* spre *C*,

modulul: $a_{EC}^{\nu} = \dfrac{v_{EC}^2}{EC}$, $\overline{a}_{EC}^{\tau} \perp \overline{EC}$,

$\overline{a}_E = \overline{a}_E^{\nu} + \overline{a}_E^{\tau}$, $\overline{a}_E^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *DE*, sensul de la *E* spre *D*,

modulul $a_E^{\nu} = \dfrac{v_E^2}{DE}$, $\overline{a}_E^{\tau} \perp \overline{DE}$.

- ***acceleraţia*** $\overline{a}_F$ ***a punctului F***

$$F, E:\ \overline{a}_F = \overline{a}_E + \overline{a}_{FE}\ , \tag{10}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_E$ este acceleraţie cunoscută;

$\overline{a}_{FE} = \overline{a}_{FE}^{\nu} + \overline{a}_{FE}^{\tau}$, $\overline{a}_{FE}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu *FE*, sensul de la *F* spre *E*, modulul:

$$a_{FE}^{\nu} = \frac{v_{FE}^2}{FE}, \ \overline{a}_{FE}^{\tau} \perp \overline{FE}\ , \quad \overline{a}_F \parallel \overline{DF}\ .$$

Planul acceleraţiilor (fig. 11.34) se construieşte astfel: în polul o' al planului de acceleraţii se reprezintă la scara s_a a acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_A$.

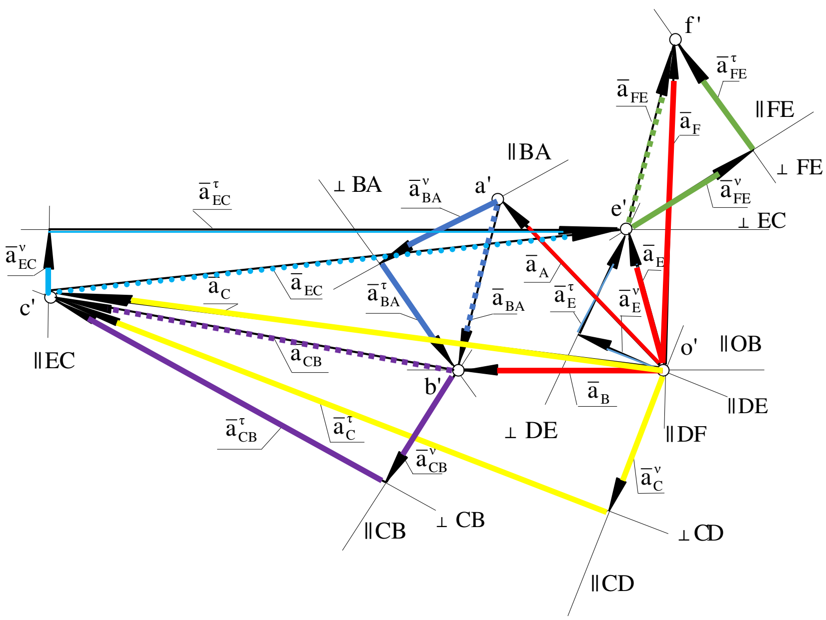


Fig. 11.35

Prin extremitatea a' a acceleraţiei $\overline{a}_A$ se trasează o paralelă la *BA* pe care, cu sensul de la *B* spre *A,* se reprezintă la scara acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_{BA}^{\nu}$, prin extremitatea căruia se duce o perpendiculară pe *BA*. Paralela la *OB* dusă prin o' , intersectează în b' perpendiculara pe *BA*. Urmărind relaţiile (7), se închid poligoanele pornind din o' spre b', rezultând vectorii $\overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}$,$\overline{a}_B$.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

În continuare, prin b' se trasează o paralelă la *CB* pe care cu sensul de la *C* spre *B*, se introduce la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{CB}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se desenează o perpendiculară pe *CB.* Prin o' se trasează o paralelă la *DC,* pe care cu sensul de la *C* spre *D,* se introduce la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{C}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se desenează o perpendiculară pe *DC*. Punctul c' de intersecţie a perpendicularelor pe *CB* şi *DC* reprezintă extremitatea vectorului acceleraţie $\overline{a}_{C}$. Urmărind relaţiile (8), se porneşte din o' spre *c'* şi se închid poligoanele rezultând astfel, acceleraţiile $\overline{a}_{CB}^{\tau}$, $\overline{a}_{CB}$, $\overline{a}_{C}^{\tau}$, $\overline{a}_{C}$. Acceleraţia $\overline{a}_{E}$ a punctului *E* se obţine astfel: se trasează prin c' o paralelă la *EC,* pe care cu sensul de la *E* spre *C,* se introduce la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{EC}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se duce o perpendiculară pe *EC*; prin o' se desenează o paralelă la *DE,* pe care cu sensul de la *E* spre *D,* se introduce la scara acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_{E}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se duce o perpendiculară pe *DE*; se notează cu e' extremitatea vectorului acceleraţie $\overline{a}_{E}$, aflată la intersecţia perpendicularelor pe *EC* şi *DE*. Pornind din o' spre e' şi urmărind relaţiile (9), se închid poligoanele şi se obţin acceleraţiile $\overline{a}_{EC}^{\tau}$, $\overline{a}_{EC}$, $\overline{a}_{E}^{\tau}$, $\overline{a}_{E}$. Acceleraţia $\overline{a}_{F}$ a pistonului pompei se obţine reprezentând grafic în planul de acceleraţii relaţiile (10). Astfel, prin e' se trasează o paralelă la *FE* pe care cu sensul de la *F* spre *E*, se reprezintă la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{FE}^{\nu}$, prin a cărui extremitate se duce o perpendiculară pe *FE*. Această perpendiculară intersectează în f' paralela dusă prin o' la *DF*. Pornind din o' spre f' şi urmărind relaţiile (10), se închid poligoanele, obţinându-se vectorii acceleraţie $\overline{a}_{FE}^{\tau}$, $\overline{a}_{FE}$, $\overline{a}_{F}$. Transpunând în *F* vectorul $\overline{a}_{F}$ din planul de acceleraţii, se obţine pentru poziţia mecanismului definită de unghiul φ, acceleraţia pistonului pompei la scara acceleraţiilor.

11.2.17. Se consideră un mecanism al cărui cilindru oscilează în jurul unui punct fix *C*. Să se determine valoarea vitezei unghiulare ω_1 a cilindrului oscilator în funcţie de viteza unghiulară $\omega = ct.$ a lui *OA*, cunoscând *OA* = *r*, *OC* = *d* şi unghiul φ pe care-l face *OA* cu *OC*. Se cere să se determine viteza $\overline{V}_C$ a pistonului (fig. 11.36).

Soluţie:

Pistonul *AC* execută o mişcare plană. Centrul instantaneu de rotaţie *I* se află la intersecţia perpendicularelor duse pe vitezele punctelor *A* şi *C* aparţinând bielei *AB*. Viteza unghiulară instantanee a bielei este $\omega_1 = \dot{\psi}$. Exprimând viteza punctului *A* în două moduri, se poate scrie:

$$v_A = \omega \cdot r = \omega_1 \cdot IA = \dot{\psi} \cdot IA \ , \tag{1}$$

relaţie din care se obţine:

$$\dot{\psi} = \frac{\omega\, r}{IA}. \tag{2}$$

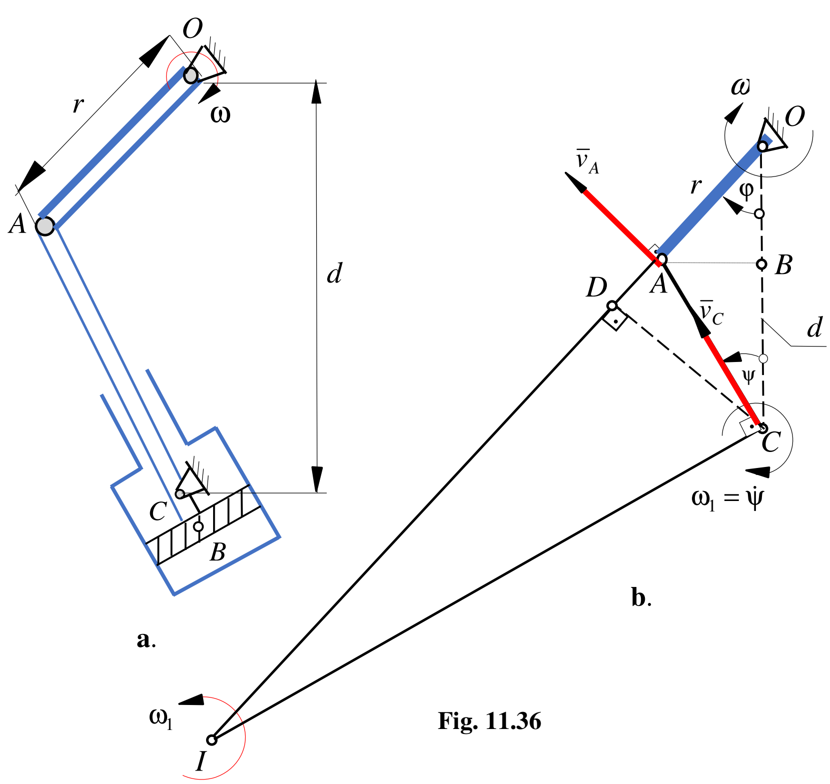


Fig. 11.36

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Deoarece segmentul *IA* este necunoscut, acesta se determină din asemănarea de triunghiuri pentru $\Delta ADC \sim \Delta IAC$. Astfel,

$$\frac{CA}{IA} = \frac{DA}{CA} \Rightarrow IA = \frac{CA^2}{DA}. \tag{3}$$

Din ΔCAO se poate determina *CA* cu relaţia:

$$CA^2 = (r\sin\varphi)^2 + (d - r\cos\varphi)^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\varphi. \tag{4}$$

Înlocuind (4) în (3) şi apoi în (2),se obţine:

$$\omega_1 = \dot{\psi} = \omega r \frac{d\cos\varphi - r}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}, \tag{5}$$

Viteza punctului *C* a pistonului, exprimată în funcţie de viteza unghiulară ω_1, este dată de relația:

$$v_C = \omega_1 \cdot IC = \dot{\psi} \cdot IC. \tag{6}$$

Din asemănarea triunghiurilor *IDC* şi *ADC* se obţine:

$$\frac{IC}{DC} = \frac{CA}{DA} \Rightarrow IC = \frac{DC \cdot CA}{DA}. \tag{7}$$

Înlocuind relaţiile (5) şi (7) în (6), având în vedere că $DC = d\sin\varphi$, rezultă:

$$v_C = \omega rd\sin\varphi \frac{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\varphi}}{r^2 + d^2 - 2dr\cos\varphi}. \tag{8}$$

11.2.18. Manivela $O_1O = 2R$ se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_0 = const.$ în jurul punctului O_1. Ea conduce în mişcarea plană un disc de rază *R* care se rostogoleşte fără alunecare în interiorul suprafeţei cilindrice de rază *R*. Se cer să se calculeze viteza şi acceleraţia unui punct *A* situat pe disc (fig. 11.37).

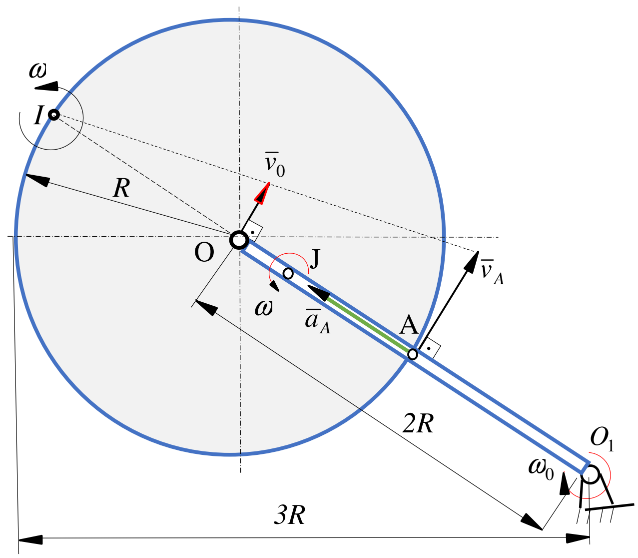


Fig. 11.37

Soluţie:

Manivela O_1O efectuează mişcare de rotaţie în jurul punctului O_1. Punctele O şi A aparţinând discului au vitezele $\overline{v}_0$ şi $\overline{v}_A$, fiind perpendiculare pe O_1O. Centrul instantaneu de rotaţie corespunzător discului se află pe perpendiculara dusă pe $\overline{v}_0$, adică în prelungirea manivelei O_1O, fiind pe conturul discului în punctul I.

Viteza $\overline{v}_A$ a punctului A este perpendiculară pe segmentul IA, extremitatea acesteia fiind pe dreapta care uneşte punctul I cu extremitatea vectorului viteză instantanee $\overline{v}_0$.

Expresia vitezei $\overline{v}_0$ este:

$$\overline{v}_0 = \overline{\omega}_0 \times \overline{O_1O}, \tag{1}$$

relație din care se obține:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$v_0 = \omega_0 \cdot O_1O = 2\omega_0 R. \tag{2}$$

Pe de altă parte,

$$v_0 = \omega \cdot IO. \tag{3}$$

Egalând relaţiile (2) şi (3), rezultă:

$$\omega = \frac{v_0}{IO} = \frac{2\omega_0 R}{R} = 2\omega_0 . \tag{4}$$

Viteza $\overline{v}_A$ a punctului *A* este:

$$v_A = \omega \cdot IA = 4R\omega_0 . \tag{5}$$

Deoarece viteza unghiulară $\omega_0 = const.$, rezultă că acceleraţia unghiulară $\varepsilon_0 = 0.$

Acceleraţia $\overline{a}_0$ a punctului *O* este:

$$\overline{a}_0 = -\omega_0^2 \cdot \overline{O_1O}. \tag{6}$$

$$a_0 = \omega_0^2 \cdot 2R. \tag{7}$$

Raportând punctul *O* la polul *J* al acceleraţiilor, se poate scrie:

$$\overline{a}_0 = \overline{\varepsilon} \times \overline{JO} - \omega^2 \cdot \overline{JO}, \tag{8}$$

respectiv:

$$a_0 = \omega^2 \cdot JO. \tag{9}$$

Din relaţia (9) se obţine:

$$JO = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 2R}{(2\omega_0)^2} = \frac{\omega_0^2 2R}{4\omega_0^2} = \frac{R}{2}. \tag{10}$$

Analizând relaţia (10) se constată că, polul acceleraţiilor *J* este situat la distanţa *R/2* de punctul *O,* astfel că *JA* = *R/2*. Acceleraţia punctului *A* raportată la polul *J* al acceleraţiilor este:

$$\overline{a}_A = \overline{\varepsilon} \times \overline{JA} - \omega^2 \cdot \overline{JA} \quad . \tag{11}$$

Dar, pentru că $\omega = const.$ rezultă $\varepsilon = 0$, respectiv:

$$a_A = \omega^2 \cdot JA = 2\omega_0^2 R . \tag{12}$$

11.2.19. Se dă mecanismul de pompă din figura 11.38 la care se cunosc viteza unghiulară constantă ω a manivelei motoare *OA* şi dimensiunile mecanismului transpuse la scara s_ℓ a lungimilor. Să se determine pentru poziţia mecanismului definită de unghiul φ, viteza şi acceleraţia pistonului pompei prin utilizarea planelor de viteză şi de acceleraţie.

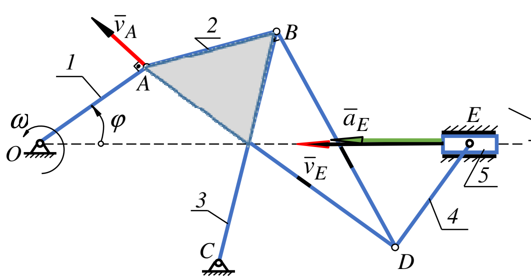


Fig. 11.38

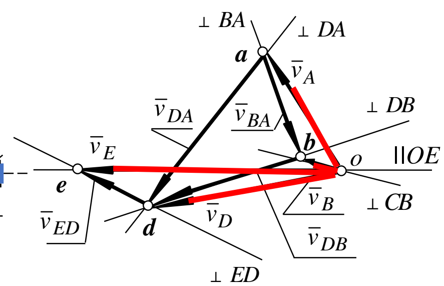


Fig.11.39

Soluţie:

a) Viteza $\bar{v}_E$ a pistonului pompei

Viteza pistonului pompei se va determina prin metoda planului de viteze (fig. 11.39). În acest sens, după determinarea vitezei punctului *A* aparţinând manivelei, se determină succesiv vitezele punctelor *B, D şi E* scriind relaţii Euler pentru viteze corespunzătoare perechilor de puncte care aparţin aceluiaşi element. Astfel, se determină succesiv:

- ***viteza $\bar{v}_A$ a punctului A***

$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{OA}$, are direcţie perpendiculară pe *OA*, sensul dat de ω şi modulul:

$$v_A = \omega \, OA \tag{1}$$

- ***viteza $\bar{v}_B$ a punctului B***

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

B, A: $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$, $\overline{v}_A$ este viteză cunoscută, $\overline{v}_{BA} \perp \overline{BA}$, $\overline{v}_B \perp \overline{C\mathrm{B}}$; (2)

- ***viteza*** $\overline{v}_D$ ***a punctului D***

$$D{,}A\colon \overline{v}_D = \overline{v}_A + \overline{v}_{DA} , \qquad (3)$$

$\overline{v}_A$ este viteză cunoscută, $\overline{v}_{DA} \perp \overline{DA}$, $\overline{v}_D$ este viteză necunoscută:

$$D{,}B\colon \overline{v}_D = \overline{v}_B + \overline{v}_{DB} , \qquad (4)$$

$\overline{v}_B$ este viteză cunoscută, $\overline{v}_{DB} \perp \overline{DB}$, $\overline{v}_D$ este viteză necunoscută;

- ***viteza*** $\overline{v}_E$ ***a pistonului pompei***

$$\overline{v}_E = \overline{v}_D + \overline{v}_{ED} , \qquad (5)$$

$\overline{v}_D$ este viteză cunoscută, $\overline{v}_{ED} \perp \overline{E\mathrm{D}}$, $\overline{v}_E \parallel \overline{OE}$.

Planul de viteze (fig. 11.39) se construieşte astfel: Se alege o scară s_v a vitezelor şi se reprezintă la scară în polul *o* al planului de viteze vectorul viteză absolută $\overline{v}_A$. Prin extremitatea *a* a lui $\overline{v}_A$ se trasează o perpendiculară pe *BA*, iar prin *o* se trasează o perpendiculară pe *CB*. Punctul de intersecţie al acestor perpendiculare, notat cu *b*, reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\overline{v}_B$. În continuare, prin *a* se trasează o perpendiculară pe *DA*, respectiv prin *b* o perpendiculară pe *DB*. Aceste perpendiculare se intersectează în punctul *d,* care reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\overline{v}_D$. Prin *d* se trasează o perpendiculară pe *ED,* care intersectează în *e* paralela dusă prin *o* la *OE*. Punctul *e* reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\overline{v}_E$. Urmărind relaţiile (2)÷(5) şi figura 11.39, se închid poligoanele pornind din *o* spre *b*, *d* şi *e* şi rezultă vectorii $\overline{v}_{BA}, \overline{v}_B, \overline{v}_{DA}, \overline{v}_{DB}, \overline{v}_D, \overline{v}_{ED}, \overline{v}_E$.

Viteza pistonului pompei se obţine transpunând în punctul *E,* din planul mecanismului, vectorul $\overline{v}_E$ din planul de viteze. Valoarea reală a acestei viteze se determină utilizând scara vitezelor.

b) Accelerația $\overline{a}_E$ a pistonului pompei

Accelerația pistonului pompei (fig. 11.40) se va determina prin metoda planului de accelerații. În acest sens, după determinarea accelerației absolute a punctului *A* aparținând manivelei *OA*, se determină succesiv accelerațiile punctelor *B, D* și *E* scriind relații Euler pentru accelerații la perechi de puncte care aparțin aceluiași element. Astfel, se determină succesiv:

- ***accelerația $\overline{a}_A$ a punctului A***

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\nu} + \overline{a}_A^{\tau}, \tag{6}$$

relație în care:

$\overline{a}_A^{\nu}$ are direcție paralelă cu *OA*, sensul de la *A* spre *O*, modulul: $a_A^{\nu} = \omega^2\, OA$,

$\overline{a}_A^{\tau} = \overline{\varepsilon} \times \overline{OA} = 0$, deoarece $\varepsilon = \dot{\omega} = 0,\ \ \omega = ct$;

- ***accelerația $\overline{a}_B$ a punctului B***

$$B, A:\ \ \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \tag{7}$$

relație în care:

$\overline{a}_A$ este accelerație cunoscută;

$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{\nu} + \overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}^{\nu}$ are direcție paralelă cu *BA*, sensul de la *B* spre *A*, modulul:

$$a_{BA}^{\nu} = \frac{v_{BA}^2}{BA},\quad \overline{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{BA},$$

$\overline{a}_B = \overline{a}_B^{\nu} + \overline{a}_B^{\tau}$, $\overline{a}_B^{\nu}$ are direcție paralelă cu *CB*, sensul de la *B* spre *C,* modulul

$$a_{BA}^{\nu} = \frac{v_B^2}{CB},\quad \overline{a}_B^{\tau} \perp \overline{CB};$$

- ***accelerația $\overline{a}_D$ a punctului D***

$$D, A:\ \ \overline{a}_D = \overline{a}_A + \overline{a}_{DA}, \tag{8}$$

relație în care:

$\overline{a}_A$ este accelerație cunoscută;

$\overline{a}_{DA} = \overline{a}_{DA}^{\nu} + \overline{a}_{DA}^{\tau}$, $\overline{a}_{DA}^{\nu}$ are direcție paralelă cu *DA*, sensul de la *D* spre *A*, modulul:

$$a_{DA}^{\nu} = \frac{v_{DA}^2}{DA},\quad \overline{a}_{DA}^{\tau} \perp \overline{\mathrm{DA}},$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$\overline{a}_D$ este acceleraţia necunoscută:

$$D,\ B:\ \ \overline{a}_D = \overline{a}_B + \overline{a}_{DB}\,, \tag{9}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_B$ este acceleraţie cunoscută;

$\overline{a}_{DB} = \overline{a}_{DB}^{\nu} + \overline{a}_{DB}^{\tau}$, $\overline{a}_{DB}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu DB, sensul de la D spre B, modulul:

$$a_{DB}^{\nu} = \frac{v_{DB}^2}{DB},\quad \overline{a}_{DB}^{\tau} \perp \overline{\mathrm{DB}},$$

$\overline{a}_D$ este acceleraţie necunoscută.

- ***acceleraţia $\overline{a}_E$ a pistonului pompei***

$$E,\ D:\ \ \overline{a}_E = \overline{a}_D + \overline{a}_{ED}\,, \tag{10}$$

relaţie în care:

$\overline{a}_D$ este acceleraţie cunoscută:

$\overline{a}_{ED} = \overline{a}_{ED}^{\nu} + \overline{a}_{ED}^{\tau}$, $\overline{a}_{ED}^{\nu}$ are direcţie paralelă cu ED, sensul de la E spre D, modulul:

$$a_{ED}^{\nu} = \frac{v_{ED}^2}{ED},\quad \overline{a}_{ED}^{\tau} \perp \overline{\mathrm{ED}},\quad \overline{a}_E \parallel \overline{\mathrm{OE}}\,.$$

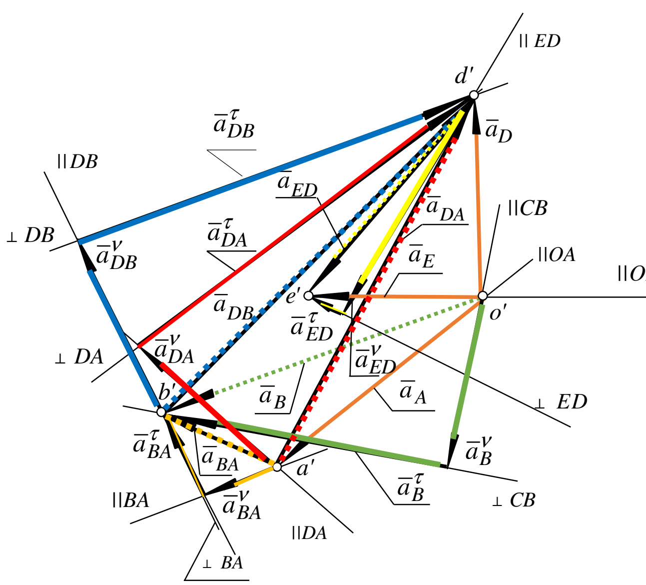


Fig. 11.40

Planul de acceleraţii (fig. 11.40) se construieşte astfel: Se alege o scară s_a a acceleraţiilor şi se reprezintă la scară, în polul o' al planului de acceleraţii, vectorul acceleraţie absolută $\overline{a}_A$. Prin extremitatea a' a vectorului $\overline{a}_A$ se trasează o paralelă la *BA,* pe care cu sensul de la *B* spre *A* se desenează la scara acceleraţiilor vectorul $\overline{a}_{BA}^{\nu}$. Prin extremitatea acestuia se trasează o perpendiculară pe BA. Prin o' se trasează o paralelă la *CB,* pe care cu sensul de la *B* spre *C*, se desenează la scara acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_B^{\nu}$. Prin extremitatea lui $\overline{a}_B^{\nu}$ se duce o perpendiculară pe *CB,* care întâlneşte în b' perpendiculara pe BA. Prin o' se trasează o paralelă la *CB,* pe care cu sensul de la *B* spre *C*, se desenează la scara acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_B^{\nu}$. Prin extremitatea lui $\overline{a}_B^{\nu}$ se duce o perpendiculară pe *CB,* care întâlneşte în b' perpendiculara pe BA. Punctul b' astfel obţinut, reprezintă extremitatea vectorului acceleraţie absolută $\overline{a}_B$.

Urmărind relaţiile (7) şi figura 11.40, se închid poligoanele pornind din o' spre b', obţinându-se vectorii: $\overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}$, $\overline{a}_B^{\tau}$, $\overline{a}_B$.

Pentru determinarea acceleraţiei absolute $\overline{a}_D$ a punctului *D* se trasează prin a' o paralelă la *DA,* pe care cu sensul de la *D* spre A, se desenează la scara acceleraţiei, vectorul $\overline{a}_{DA}^{\nu}$. Prin extremitatea acestuia se duce o perpendiculară pe DA. Apoi, prin b' se trasează o paralelă la *DB,* pe care cu sensul de la *D* spre *B*, se desenează la scara acceleraţiilor, vectorul $\overline{a}_{DB}^{\nu}$. Perpendiculara dusă prin extremitatea acestui vector întâlneşte în d' perpendiculara pe *DA* rămasă în suspensie. Punctul d' reprezintă extremitatea vectorului acceleraţie absolută $\overline{a}_D$.

Urmărind relaţiile (8) şi (9) şi figura 11.40, se închid poligoanele pornind din o' spre d', rezultând vectorii: $\overline{a}_{DA}^{\tau}$, $\overline{a}_{DA}$, $\overline{a}_{DB}^{\tau}$, $\overline{a}_{DB}$, $\overline{a}_D$.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Accelerația $\overline{a}_E$ a pistonului pompei se determină astfel: prin punctul d' se trasează o paralelă la *ED,* pe care cu sensul de la *E* spre *D*, se desenează la scara accelerațiilor, vectorul $\overline{a}_{ED}^{\nu}$. Prin extremitatea acestui vector se duce o perpendiculară pe *ED,* care întâlnește în e' paralela dusă prin o' la *OE*. Punctul e' reprezintă extremitatea vectorului accelerație absolută $\overline{a}_E$ a pistonului pompei.

Urmărind relațiile (10) și figura 11.40, se închid poligoanele pornind din o' spre e', rezultând vectorii accelerație: $\overline{a}_{ED}^{\tau}$, $\overline{a}_{ED}$, $\overline{a}_E$.

Accelerația pistonului pompei se obține transpunând în punctul *E* din planul mecanismului, vectorul $\overline{a}_E$ din planul de accelerații. Valoarea reală a acestei accelerații se determină utilizând scara accelerațiilor.

11.3 Probleme propuse

11.3.1. Cunoscând acceleraţiile extremităţilor unei bare AB aflată în mişcare plană se cere, să se determine acceleraţia mijlocului C al barei, dacă se cunosc acceleraţiile $\overline{a}_A$ şi $\overline{a}_B$ ale barei.

Răspuns:

$$\overline{a}_c = \frac{1}{2}\left(\overline{a}_A + \overline{a}_B\right); \qquad a_c = \frac{1}{2}\sqrt{a_A^2 + a_B^2 - 2a_A a_B \cos(\beta - \alpha)};$$

unde:

$$\widehat{\left(\overline{a}_A, \overline{a}_B\right)} = \pi - (\beta - \alpha).$$

11.3.2. Se consideră mecanismul patrulater din figura 11.41 şi se cer să se determine centroidele mişcării plane a barei CD.

Răspuns:

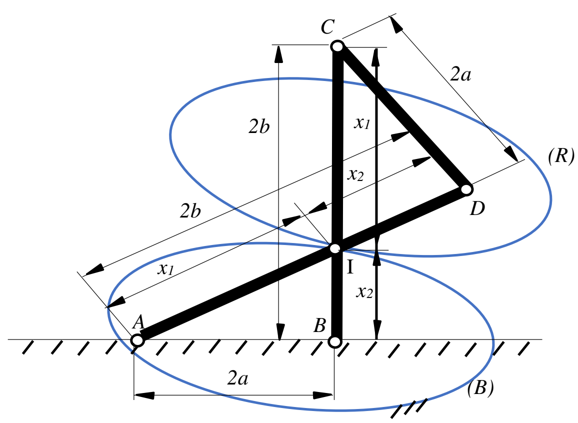


Fig. 11.41

Baza şi rostogolitoarea sunt elipse identice între ele, având semiaxele b şi $\sqrt{b^2 - a^2}$.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

12. MIŞCAREA DE ROTAŢIE A RIGIDULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX [9]

12.1 Consideraţii teoretice

12.1.1 Studiul geometric al mişcării

Un solid rigid (C) execută o ***mişcare de rotaţie în jurul unui punct fix*** *dacă un punct aparţinând acestuia, rămâne fix în tot timpul mişcării.* O astfel de mişcare a solidului rigid mai poartă şi denumirea de ***mişcare sferică***, întrucât traiectoria oricărui punct al rigidului (cu excepția punctului fix) este o curbă înscrisă pe o sferă. *Un rigid aflat în mişcare sferică posedă* ***trei*** *grade de libertate*. Numărul parametrilor independenţi care determină poziţia solidului rigid în spaţiu este astfel trei, aceşti parametri putând fi aleşi în diferite moduri.

Studiul mişcării solidului rigid în jurul unui punct fix presupune alegerea unui sistem cartezian de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ şi a unui sistem cartezian mobil $Oxyz$ solidar legat cu rigidul, ale căror origini coincid cu punctul fix (fig. 12.1). Cei trei parametri care poziţionează rigidul în spaţiu pot fi:

a) *trei din cele nouă cosinusuri directoare* ale axelor sistemului mobil în raport cu axele sistemului fix, între care există următoarele şase relaţii de dependenţă:

$$\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=\begin{cases}1; & i=j\\ 0; & i\neq j\end{cases}\quad i,j=1,2,3. \tag{12.1}$$

Cele nouă cosinusuri $\alpha_i,\beta_{i,}\gamma_i$ $(i=1,2,3)$ ale unghiurilor formate de grupurile de câte două axe carteziene, una aparţinând sistemului cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$, cealaltă sistemului cartezian mobil $Oxyz$, sunt cuprinse în tabelul 12.1.

b) *cele trei unghiuri ale lui Euler*: ψ*- unghi de precesie,* φ *- unghi de rotaţie proprie şi* θ *- unghi de nutaţie.*

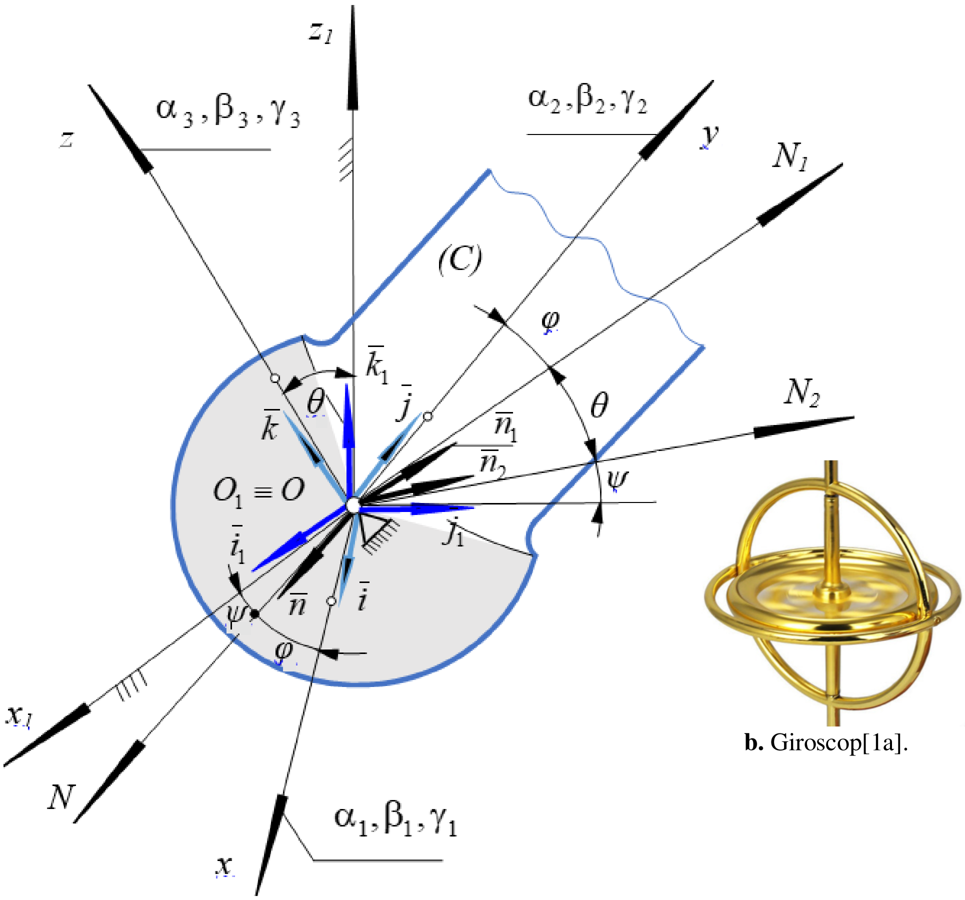
Ecuaţiile parametrice ale mişcării rigidului vor fi în acest caz:

$$\psi=\psi(t),\varphi=\varphi(t),\ \theta=\theta(t). \tag{12.2}$$

Pentru a defini unghiurile lui Euler, se consideră sistemele carteziene de referinţă $O_1x_1y_1z_1$ şi $Oxyz$, introduse în figura 12.1.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Se notează cu ON dreapta de intersecţie dintre planul cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ şi planul cartezian mobil $Oxyz$, numită *axă a nodurilor*. Axa nodurilor se roteşte în timpul mişcării rigidului în planul fix $O_1\,x_1\,y_1$ în jurul punctului fix O_1, ea rămânând în permanenţă perpendiculară pe planul definit de axele O_1z_1 şi Oz.



b. Giroscop[1a].

a.

Fig. 12.1

Unghiul ψ cuprins în planul cartezian fix $O_1\,x_1\,y_1$ este format de axele O_1x_1 şi *ON şi* poartă numele de ***unghi de precesie***.

Unghiul *φ* cuprins în planul cartezian mobi Oxy este format de axele ON şi *Ox şi* poartă numele de ***unghi de rotaţie proprie***.

Unghiul θ cuprins în planul mobil O_1z_1z este format de axele O_1z_1 şi Oz şi poartă numele de ***unghi de nutaţie***.

Cele nouă cosinusuri directoare ale axelor sistemului de referinţă mobil în raport cu axele sistemului de referinţă fix pot fi exprimate în funcţie de unghiurile ψ, φ, θ ale lui Euler (Tab.12.1 şi fig.12.1).

Tabelul 12.1

	Ox	***Oy***	***Oz***
O_1x_1	α_1	α_2	α_3
O_1y_1	β_1	β_2	β_3
O_1z_1	γ_1	γ_2	γ_3

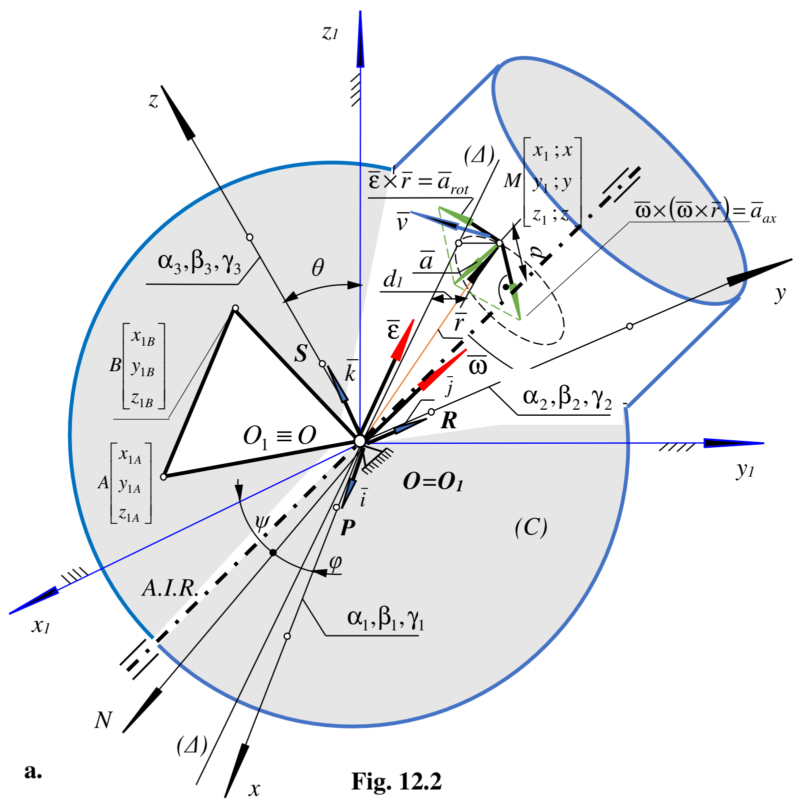


Fig. 12.2

Astfel, notând simplificat funcţiile trigonometrice *cosinus* = *c*, *sinus* = *s* şi urmărind figura 12.2, se obţin:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \bar{i}\cdot\bar{i}_1 = c\psi\, c\varphi - s\psi\, s\varphi\, c\theta \\
\alpha_2 &= \bar{j}\cdot\bar{i}_1 = -c\psi\, s\varphi - s\psi\, c\varphi\, c\theta \\
\alpha_3 &= \bar{k}\cdot\bar{i}_1 = s\psi\, s\theta \\
\beta_1 &= \bar{i}\cdot\bar{j}_1 = s\psi\, c\varphi + c\psi\, s\varphi\, c\theta \\
\beta_2 &= \bar{j}\cdot\bar{j}_1 = -s\psi\, s\varphi + c\psi\, c\varphi\, c\theta \\
\beta_3 &= \bar{k}\cdot\bar{j}_1 = -c\psi\, s\theta \\
\gamma_1 &= \bar{i}\cdot\bar{k}_1 = s\varphi\, s\theta \\
\gamma_2 &= \bar{j}\cdot\bar{k}_1 = c\varphi\, s\theta \\
\gamma_3 &= \bar{k}\cdot\bar{k}_1 = c\theta .
\end{aligned} \tag{12.3}$$

c) *trei din cele şase coordonate ale două puncte distincte A şi B aparţinând rigidului*. Poziţia în spaţiu a oricărui solid rigid fiind în mod univoc determinată de trei puncte necoliniare distincte aparţinând acestuia, în cazul rigidului din figura 12.2 se vor alege punctele O_1, A şi B, punctul O_1 fiind punctul fix al rigidului.

Între coordonatele punctelor A şi B există trei relaţii de dependenţă. Astfel,

$$\begin{aligned}
&O_1A = \sqrt{x_{1A}^2 + y_{1A}^2 + z_{1A}^2}\ , \quad O_1B = \sqrt{x_{1B}^2 + y_{1B}^2 + z_{1B}^2}\ , \\
&AB = \sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (y_{1B} - y_{1A})^2 + (z_{1B} - z_{1A})^2}\ ,
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Rezultă că, numai **trei** dintre aceste coordonate sunt independente şi constituie *coordonatele generalizate ale mişcării rigidului cu punct fix.*

12.1.2 Distribuţia de viteze

Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct arbitrar M aparţinând solidului rigid prezentat în figura 12.2. Punctul M este dat prin coordonatele sale x, y, z faţă de sistemul de referinţă mobil $Oxyz$. Se poate scrie relaţia:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ , \tag{12.5}$$

care, derivată în ambii membri în raport cu timpul, conduce la:

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r} \tag{12.6}$$

şi constituie ***legea de distribuţie a vitezelor*** *la mişcarea de rotaţie a solidului rigid în jurul unui punct fix.*

Punctele a căror viteză este nulă la un moment dat, se determină din ecuaţia vectorială $\overline{\omega}\times\overline{r}=0$, a cărei soluţie generală este:

$$\overline{r}=\lambda\overline{\omega} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}. \tag{12.7}$$

Rezultă că, *există o infinitate de puncte a căror viteză este nulă* şi cum sunt pe suportul vectorului $\overline{\omega}$, ele determină *o axă care trece prin punctul fix al rigidului*. Astfel, distribuţia de viteze în cazul mişcării rigidului cu punct fix este identică cu cea din cazul mişcării de rotaţie, ca şi cum rigidul s-ar roti în jurul axei ce coincide cu vectorul $\overline{\omega}$. Această axă poartă numele de ***axă instantanee de rotaţie* (A.I.R.)**, vectorul $\overline{\omega}$ nefiind altul decât viteza unghiulară de rotaţie a rigidului în jurul acestei axe. Vectorul $\overline{\omega}$ este variabil atât ca modul cât şi ca direcţie. Întrucât axa instantanee de rotaţie este coliniară cu vectorul $\overline{\omega}$, această axă îşi schimbă mereu poziţia în timpul mişcării rigidului.

Locul geometric al poziţiilor succesive pe care le ocupă A.I.R. în timpul mişcării sferice a solidului rigid, în raport cu sistemul de referinţă mobil Oxyz, este o suprafaţă conică legată invariabil de rigidul în mişcare, numită ***axoidă mobilă*** (A_m) (fig. 12.3).

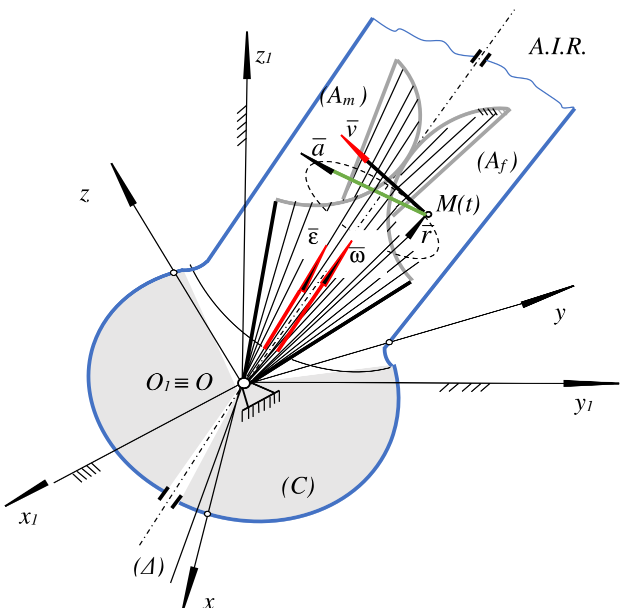


Fig. 12.3

Locul geometric al poziţiilor succesive pe care le ocupă A.I.R. în timpul mişcării sferice a rigidului, în raport cu sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, *este o suprafaţă conică fixă, numită* ***axoidă fixă*** (A_f) (fig. 12.3).

În timp ce solidul rigid *(C)* efectuează o mişcare de rotaţie în jurul punctului fix O_1, *axoida mobilă* (A_m) ***se rostogoleşte fără să***

alunece *peste axoida fixă* (A_f), generatoarea comună de contact dintre cele două axoide fiind în orice moment axa instantanee de rotaţie (*A.I.R.*), a cărei exprimare în sistemul de referinţă mobil *Oxyz* este dată de relația (12.7).

Vectorul viteză unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ având ca suport axa instantanee de rotaţie, se poate proiecta pe axele sistemului cartezian *Oxyz* legat solidar de rigid.

Se obţin astfel, componentele sale pe axele sistemului mobil care pot fi exprimate în funcţie de unghiurile lui Euler şi de derivatele lor în raport cu timpul.

În cazul mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui ax fix, reprezentând unghiul de rotaţie θ printr-un vector $\overline{\theta}$, el având ca suport axa de rotaţie, vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ se obţine din relaţia:

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\theta}(t)}{dt} = \dot{\overline{\theta}} \quad . \tag{12.8}$$

Acceptând ca şi coordonate generalizate la mişcarea sferică unghiurile lui Euler ψ, φ, θ, acestora le corespund vitezele generalizate $\dot{\overline{\psi}}, \dot{\overline{\varphi}}, \dot{\overline{\theta}}$. În figura 12.4 s-au introdus vectorii viteză unghiulară $\dot{\overline{\psi}}, \dot{\overline{\varphi}}, \dot{\overline{\theta}}$ după direcţii perpendiculare pe planele în care sunt conţinute unghiurile lui Euler.

Vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ corespunzător mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui punct fix O_1, având în vedere (12.8), poate fi scris sub forma:

$$\overline{\omega} = \dot{\overline{\psi}} + \dot{\overline{\varphi}} + \dot{\overline{\theta}} \tag{12.9}$$

De remarcat că, vectorii $\dot{\overline{\varphi}}$ şi $\dot{\overline{\theta}}$ nu rezultă din derivarea în raport cu timpul a vectorilor $\overline{\varphi}$ şi $\overline{\theta}$, ei având direcţie variabilă. Aceştia sunt introduşi în mod convenţional pe direcţii normale pe planele mobile în care sunt cuprinse unghiurile φ şi θ, având valorile date de către derivatele scalare $\dot{\varphi}$ şi $\dot{\theta}$ astfel că, se poate afirma că $\dot{\overline{\varphi}}$ şi $\dot{\overline{\theta}}$ reprezintă scalari cu caracter de vectori.

Componentele vectorului viteză unghiulară $\overline{\omega}$ pe axele sistemului de referinţă mobil *Oxyz* se obţin înmulţind succesiv scalar cu versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ relaţia (12.9). Astfel, având în vedere figura 12.4 şi notațiile simplificate pentru funcţiile *sinus* şi *cosinus,* rezultă:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\, s\varphi\, s\theta + \dot{\theta}\, c\varphi,\\
\omega_y &= \dot{\psi}\, c\varphi\, s\theta - \dot{\theta}\, s\varphi,\\
\omega_z &= \dot{\psi}\, c\theta + \dot{\varphi}\ .
\end{aligned} \tag{12.10}$$

Componentele vectorului viteză unghiulară pe axele sistemului de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ se obţin înmulţind scalar şi succesiv relaţia (12.9) cu versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$.

Se obţin astfel:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \dot{\varphi}\, s\theta\, s\psi + \dot{\theta}\, c\psi,\\
\omega_{y1} &= -\dot{\varphi}\, s\theta\, c\psi + \dot{\theta}\, s\psi,\\
\omega_{z1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} c\theta\ .
\end{aligned} \tag{12.11}$$

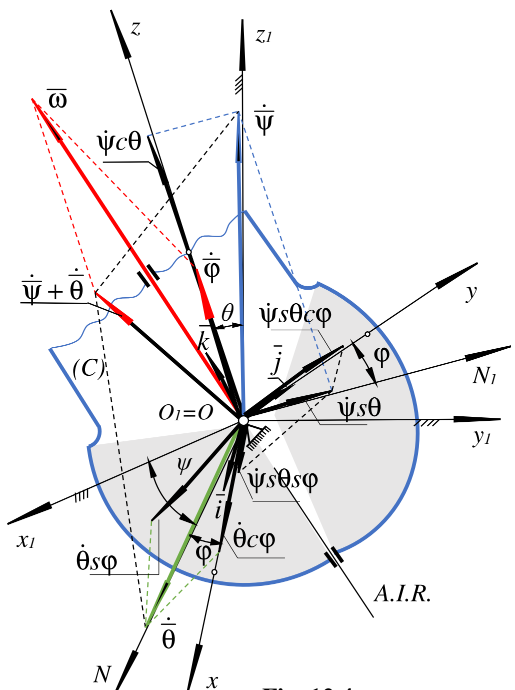


Fig. 12.4

Utilizând notaţiile din figura 12.1, se explicitează relaţia (12.6) faţă de sistemele carteziene $Oxyz$ şi $O_1x_1y_1z_1$, obţinând componentele scalare carteziene ale vectorului viteză $\bar{v}$ înregistrate faţă de aceste sisteme. Astfel,

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \qquad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \tag{12.12}$$

$$v_{x1} = \omega_{y1} z_1 - \omega_{z1} y_1\,, \quad v_{y1} = \omega_{z1} x_1 - \omega_{x1} z_1\,, \qquad v_{z1} = \omega_{x1} y_1 - \omega_{y1} x_1\,. \qquad (12.13)$$

12.1.3 Distribuţia de acceleraţii

Legea de distribuţie a acceleraţiilor *în cazul mişcării rigidului în jurul unui punct fix* se obţine derivând vectorial în raport cu timpul legea de distribuţie a vitezelor (12.6). Se obţine astfel:

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) \qquad (12.14)$$

sau

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + (\overline{\omega} \cdot \overline{r})\overline{\omega} - \omega^2 \overline{r}\,, \qquad (12.15)$$

întrucât,

$$\dot{\overline{v}} = \overline{a}\,, \quad \dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon}\,, \quad \dot{\overline{r}} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,. \qquad (12.16)$$

În cazul mişcării solidului rigid în jurul unui punct fix ***nu există****, în afară de punctul fix, alte puncte a căror acceleraţie să fie nulă.*

Explicitând relaţia (12.15) faţă de sistemul cartezian mobil *Oxyz* şi apoi faţă de sistemul cartezian fix $O_1 x_1 y_1 z_1$ din figura 12.1, se obţin expresiile componentelor carteziene ale acceleraţiei $\overline{a}$ faţă de cele două sisteme de referinţă.

Astfel,

$$\begin{aligned} a_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x\,, \\ a_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y\,, \\ a_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z \end{aligned} \qquad (12.17)$$

și

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= \varepsilon_{y_1} z_1 - \varepsilon_{z_1} y_1 + \omega_{x_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1\,, \\ a_{y} &= \varepsilon_{z_1} x_1 - \varepsilon_{x_1} z_1 + \omega_{y_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1\,, \\ a_{z_1} &= \varepsilon_{x_1} y_1 - \varepsilon_{y_1} x_1 + \omega_{z_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1\,. \end{aligned} \qquad (12.18)$$

Distribuţia de acceleraţii în cazul mişcării solidului rigid în jurul unui punct fix este o distribuţie specială, aceasta putându-se reduce la o distribuţie caracteristică mişcării de rotaţie numai în cazul când $\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}=0$, respectiv când unul dintre vectorii $\overline{\omega}$ sau $\overline{\varepsilon}$ este nul sau în cazul când cei doi vectori sunt coliniari.

În relaţia (12.14), componenta $\overline{\varepsilon}\times\overline{r}=\overline{a}_{rot}$ poartă numele de ***acceleraţie de rotaţie*** şi reprezintă un vector perpendicular pe planul definit de vectorii $\overline{\varepsilon}$ şi $\overline{r}$. Modulul său este egal cu produsul εd_1, în care: d_1- reprezintă distanţa de la punctul considerat la suportul (Δ) al acceleraţiei unghiulare $\overline{\varepsilon}$ (fig. 12.1).

Componenta $\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r})=\overline{a}_{ax}$, purtând numele de ***acceleraţie axipetă,*** este un vector perpendicular pe vectorul $\overline{\omega}$ şi are modulul egal cu $\omega^2 d$, unde: d - reprezintă distanţa de la punctul considerat până la suportul lui $\overline{\omega}$, iar sensul dinspre punct spre axa instantanee de rotaţie (*A.I.R.*) (fig. 12.1).

12.2 Probleme rezolvate [9]

12.2.1. O roată dinţată conică angrenează cu o roată dinţată fixă şi plană din structura mecanică a unui modul de rotaţie. Cunoscând raza roţii conice $r = 30\ mm$, unghiul la vârf $2\alpha = 60^\circ$ şi viteza unghiulară de rotaţie a înălţimii OB în jurul axei verticale Oy, $\omega_1 = 0{,}20\ (s^{-1})$ (fig. 12.5), se cer să se determine:

a) viteza şi acceleraţia de rotaţie a roţii conice;

b) vitezele şi acceleraţiile punctelor A, B şi C aparţinând roţii conice.

Soluţie:

a) Roata conică efectuează o mişcare de rotaţie (sferică) în jurul punctului fix O (fig. 12.5). Axa instantanee de rotaţie trece prin punctele O şi A astfel că, suportul vectorului viteză unghiulară $\overline{\omega}$ a roţii este axa Ox.

Notând cu $\overline{\omega}_1$ viteza unghiulară de rotaţie a înălţimii OB în jurul axei verticale Oy şi cu $\overline{\omega}_2$ viteza unghiulară de rotaţie relativă a roţii conice în jurul propriei axe, se pot scrie relaţiile:

$$\omega_2 = \omega_1 / \sin\alpha = 0{,}2/0{,}5 = 0{,}4 \quad (s^{-1}), \tag{1}$$

$$\omega = \omega_1 ctg\alpha = 0{,}2 \cdot 1{,}73205 = 0{,}34641 \quad (s^{-1})\,. \tag{2}$$

Viteza unghiulară instantanee de rotaţie a roţii conice în jurul punctului fix O, având în vedere figura 12.5 şi relaţia (2), este:

$$\overline{\omega} = -\omega_1 ctg\alpha\, \overline{j} = -0{,}34641\, \overline{j}\,. \tag{3}$$

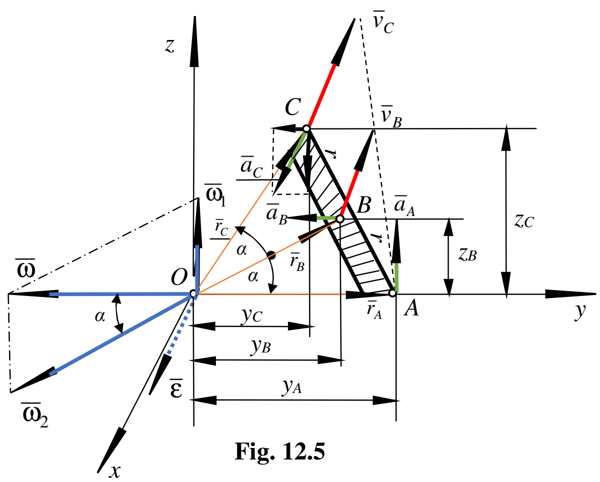


Fig. 12.5

Derivând (3) în raport cu timpul, rezultă accelerația unghiulară instantanee $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = -\omega_1 ctg\,\alpha\,\dot{\bar{j}} = -\omega_1 ctg\,\alpha\bar{\omega}_1 \times \bar{j} = \omega_1^2 ctg\alpha\,\bar{i} \quad . \tag{4}$$

Modulul accelerației unghiulare $\bar{\varepsilon}$ de rotație a roții conice se obține din (4) prin înlocuirea valorilor numerice. Astfel,

$$\varepsilon = \omega_1^2 ctg\,\alpha = 0{,}2^2 \cdot 1{,}73205 = 0{,}069282 \quad (s^{-2}). \tag{5}$$

b) Vitezele punctelor *A, B* și *C* se obțin cu relația (12.5) astfel:

- Viteza punctului *A* este:

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A = 0, \tag{6}$$

deoarece punctul *A* aparține axei instantanee de rotație.

- Viteza punctului *B* este:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = -\omega_1 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\bar{i} \tag{7}$$

sau, înlocuind cu valori numerice, se obține

$$v_B = \omega_1 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 0{,}2 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0{,}866^2}{0{,}5} = 0{,}09 \quad m/s^2; \tag{8}$$

- Viteza punctului *C* se obține cu relația:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \bar{r}_C = -2\omega_1 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\bar{i} = 2\bar{v}_B, \tag{9}$$

astfel că, modulul vitezei punctului *C*, conform cu (8), este:

$$v_C = 0{,}18 \; m/s^2 \; .$$

Accelerațiile punctelor *A, B* și *C* se obțin cu relațiile (12.14) astfel:

- Accelerația punctului *A* este

$$\bar{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1^2 ctg\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r}{\sin\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \omega_1^2 r \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\bar{k} \tag{10}$$

sau, înlocuind cu valorile numerice, se obține:

$$a_A = \omega_1^2 r \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0{,}2^2 \cdot 0{,}03 \frac{0{,}86602}{0{,}5^2} = 4{,}15689 \cdot 10^{-3}\ m/s^2; \tag{11}$$

- Accelerația punctului B este:

$$\bar{a}_B = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_B) \tag{12}$$

$$\bar{a}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1^2 ctg\alpha & 0 & 0 \\ 0 & r\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & r\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega_1 ctg\alpha & 0 \\ -\omega_1 r\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_1^2 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\bar{j} \tag{13}$$

sau, înlocuind cu valori numerice:

$$a_B = \omega_1^2 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 0{,}2^2 \cdot 0.03 \frac{0{,}86602^2}{0{,}5} = 1{,}79997 \cdot 10^{-3}\ m/s^2; \tag{14}$$

- Accelerația punctului C este:

$$\bar{a}_C = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1^2 ctg\alpha & 0 & 0 \\ 0 & r\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} & 2r\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega_1 ctg\alpha & 0 \\ -2\omega_1 r\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -2\omega_1^2 r \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\bar{j} - \omega_1^2 r \frac{\cos\ \alpha}{\sin^2\alpha}\bar{k} \end{aligned} \tag{16}$$

sau, înlocuind cu valori numerice:

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= -2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0{,}86602^2}{0{,}5}\bar{j} - 0{,}2^2 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0{,}86602}{0{,}5^2}\bar{k} = \\ &= -3{,}598 \cdot 10^{-3}\bar{j} - 4{,}157 \cdot 10^{-3}\bar{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

Modulul accelerației punctului C se determină din (17) astfel:

$$a_C = 10^{-3}\sqrt{(-3{,}598)^2 + (-4{,}157)^2} = 5{,}498 \cdot 10^{-3}\ m/s^2\ . \tag{18}$$

12.2.2. Un con circular de înălţime h şi unghiul la vârf 2α se rostogoleşte fără alunecare pe un plan, rotindu-se în jurul lui Oz cu viteza unghiulară constantă ω_1. Se cer, să se determine acceleraţiile $\overline{a}_{ax}$ şi $\overline{a}_{rot}$ ale punctului A situat la baza conului (fig. 12.6), precum şi viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$ de rotaţie a conului în jurul axei proprii.

Soluţie:

Axa instantanee de rotaţie este OB. Punctul B aparţinând acestei axe are viteza egală cu zero.

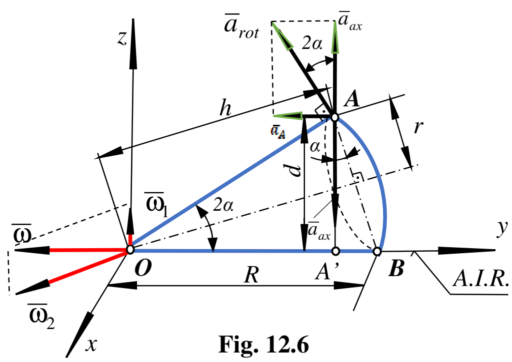


Fig. 12.6

Astfel,

$$\overline{v}_B = \overline{\omega} \times \overline{OB} = 0. \qquad (1)$$

Dar,

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 . \qquad (2)$$

Relaţia (1) conduce la:

$$\left|\overline{\omega}_1 \times \overline{OB}\right| = \left|-\overline{\omega}_2 \times \overline{OB}\right| ,$$

relaţie din care se obţine:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{R}{r} . \qquad (3)$$

Urmărind figura 12.6, se pot scrie relaţiile:

$$r = h\, tg\alpha, \qquad R = \frac{h}{\cos\alpha} , \qquad (4)$$

care, înlocuite în (3), conduc la:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sin\alpha} . \qquad (5)$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Accelerația axipetă $\overline{a}_{ax}$ are următoarele caracteristici:

– modulul:

$$a_{ax} = \omega^2 d = \omega_1^2 ctg^2\alpha \cdot 2r\cos\alpha = 2h\omega_1^2 \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (6)$$

având în vedere că:

$$\omega = \omega_1\, ctg\, \alpha, \quad d = 2r\cos\alpha, \quad r = h\, tg\alpha, \qquad (7)$$

relații obținute din figura 12.6;

– direcția este perpendiculară pe *OB* (fig. 12.6);
– sensul este către axa instantanee de rotație adică, de la *A* spre *A*´.

Accelerația de rotație $\overline{a}_{rot}$ se determină cu relația:

$$\overline{a}_{rot} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}, \qquad (8)$$

în care:

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}}, \quad \overline{\omega} = -\omega_1 ctg\alpha\overline{j}, \quad \overline{\varepsilon} = -\omega_1 ctg\alpha\dot{\overline{j}} = -\omega_1 ctg\alpha\overline{\omega}_1 \times \overline{j}, \qquad (9)$$
$$\overline{\varepsilon} = \omega_1^2 ctg\alpha\overline{i}, \quad \overline{r} = \overline{OA} = R\cos 2\alpha\overline{j} + R\sin 2\alpha\overline{k}.$$

Având în vedere (9), relația (8) devine:

$$\overline{a}_{rot} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_1^2 ctg\alpha & 0 & 0 \\ 0 & R\cos 2\alpha & R\sin 2\alpha \end{vmatrix} = R\omega_1^2 ctg\alpha\left(-\sin 2\alpha\overline{j} + \cos 2\alpha\overline{k}\right). \qquad (10)$$

Modulul accelerației de rotație este:

$$a_{rot} = \omega_1^2 R ctg\alpha = \omega_1^2 \frac{h}{\sin\alpha}. \qquad (11)$$

Direcția accelerației de rotație este perpendiculară pe generatoarea *OA* a conului (fig. 12.6).

12.2.3. Un corp (fig. 12.6) se roteşte în jurul unui punct fix $M_0(2,1,3)$ cu viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ de modul constant ($\omega = 25\ s^{-1}$). Să se determine viteza punctului $M(10,7,11)$ aparținând corpului în momentul în care cosinusurile directoare ale vectorului $\overline{\omega}$ sunt: $\alpha = 0{,}60$, $\beta = 0{,}48$, $\gamma = 0{,}64$.

Soluţie:

Viteza punctului *M,* conform cu (12.6), este:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \tag{1}$$

sau, exprimată sub formă matriceală:

$$v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} . \tag{2}$$

În relaţia (2),

$$\overline{r} = \overline{M_0 M} \Leftrightarrow x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = (x_1 - x_0)\overline{i} + (y_1 - y_0)\overline{j} + (z_1 - z_0)\overline{k} .$$

Proiecţiile vitezei punctului *M* pe axele sistemului cartezian *Oxyz* sunt:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \qquad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \qquad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{3}$$

Înlocuind datele numerice, se obţin:

$$\begin{aligned} &\omega_x = \omega \cdot \alpha = 25 \cdot 0{,}6 = 15\ rad/s\ , && x = x_1 - x_0 = 10 - 2 = 8\ cm \\ &\omega_y = \omega \cdot \beta = 25 \cdot 0{,}48 = 12\ rad/s\ , && y = y_1 - y_0 = 7 - 1 = 6\ cm\ , \\ &\omega_z = \omega \cdot \gamma = 25 \cdot 0{,}64 = 16\ rad/s\ , && z = z_1 - z_0 = 11 - 3 = 8\ cm \end{aligned} \tag{4}$$

care înlocuite în (3), conduc la:

$$\begin{aligned} v_x &= 12 \cdot 8 - 16 \cdot 6 = 0\ \ cm/s, \\ v_y &= 16 \cdot 8 - 15 \cdot 8 = 8\ \ cm/s, \\ v_z &= 15 \cdot 6 - 12 \cdot 8 = -6\ cm/s\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Modulul vitezei punctului *M* devine:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{64 + 36} = 10\ \ cm/s\ .$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

12.2.4. Un corp se roteşte în jurul axei ce trece prin originea *O* a unui sistem de referinţă cartezian *Oxyz* (fig. 12.7). Viteza punctului *A (1, 0, 1)* al corpului este egală cu $\overline{v}_A = 4\,m/s$. Unghiul α dintre viteza punctului *A* şi axa absciselor este de 45°, iar unghiul dintre viteza punctului *B (3, 4, 0)* şi axa absciselor este egal cu β, pentru care $\cos\beta = -0{,}8$. Să se afle viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$, viteza $\overline{v}_B$ a punctului *B* şi ecuaţia axei instantanee de rotaţie.

Soluţie:

Proiecţiile vitezei unui punct oarecare al rigidului pe axele unui sistem de referinţă mobil invariabil legat de corp sunt, în conformitate cu (12.12):

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \tag{1}$$

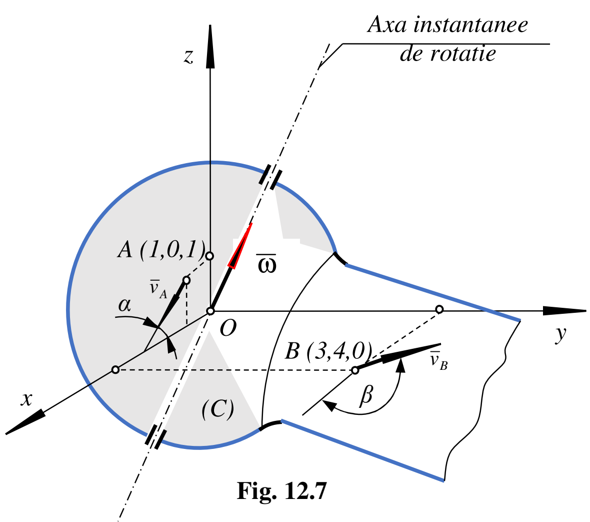


Fig. 12.7

care, aplicate pentru punctele *A* şi *B,* conduc la:

$$v_A \cos\alpha = \omega_y, \qquad 0 = \omega_z - \omega_x, \qquad -v_A \sin\alpha = -\omega_y \ .$$

$$v_B \cos\beta = -4\omega_z, \qquad v_B \sin\beta = 3\omega_z, \qquad 0 = 4\omega_x - 3\omega_y \ . \tag{2}$$

Rezolvând sistemul (2) şi înlocuind cu valori numerice, rezultă:

$$\omega_x = \omega_z = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\ \textit{(rad/s)}, \qquad \omega_y = 2\sqrt{2}\ \textit{(rad/s)}. \tag{3}$$

$$v_B = 7{,}5\sqrt{2} \qquad \textit{(m/s)}. \tag{4}$$

Vectorul viteză unghiulară instantanee $\overline{\omega}$, având în vedere (3), are expresia:

$$\overline{\omega} = \omega_x\overline{i} + \omega_y\overline{j} + \omega_z\overline{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}\right), \tag{5}$$

din care se obţine modulul:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{17}\quad \textit{(rad/s)}. \tag{6}$$

Ecuaţia axei instantanee de rotaţie este, conform cu (12.7):

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{7}$$

Înlocuind valorile lui ω_x, ω_y, ω_z date de (3) în (7), se obţine axa instantanee de rotaţie prin intersecţia a două plane de ecuaţii:

$$\frac{2x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{2z}{3} \tag{8}$$

sau

$$x = \frac{3}{4}y\ \ , x = z. \tag{9}$$

12.2.5. Legile de mişcare ale unui solid rigid în jurul unui punct fix O_1 sunt date de:

$\varphi = nt$, $\psi = \frac{\pi}{2} + ant$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, unde φ, ψ, θ reprezintă unghiurile lui Euler, iar a şi n sunt constante cunoscute. Să se determine proiecţiile vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ şi ale acceleraţiei unghiulare $\overline{\varepsilon}$ cu care rigidul se roteşte în jurul punctului fix pe axele unui sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$.

Să se determine de asemenea, valoarea parametrului a dacă planul fix $O_1x_1y_1$ reprezintă axoida fixă a rigidului.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

În conformitate cu (12.7), proiecţiile pe axele sistemului de referinţă fix ale vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ sunt:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\
\omega_{y1} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\
\omega_{z1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Având în vedere că:

$$\dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} = an, \quad \dot{\theta} = 0. \tag{2}$$

relaţiile (1) devin:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= n\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + ant\right) = n\frac{\sqrt{3}}{2}\cos ant \\
\omega_{y1} &= -n\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + ant\right) = n\frac{\sqrt{3}}{2}\sin ant \quad . \\
\omega_{z1} &= an + n\cos\frac{\pi}{3} = \frac{n}{3}(2a+1)
\end{aligned} \tag{3}$$

Acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}$ proiectată pe axele sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$ devine:

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_{x1}\overline{i}_1 + \varepsilon_{y1}\overline{j}_1 + \varepsilon_{z1}\overline{k}_1 = \dot{\omega}_{x1}\overline{i}_1 + \dot{\omega}_{y1}\overline{j}_1 + \dot{\omega}_{z1}\overline{k}_1\ , \tag{4}$$

întrucât,

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \dot{\omega}_{x1}\overline{i}_1 + \dot{\omega}_{y1}\overline{j}_1 + \dot{\omega}_{z1}\overline{k}_1\ .$$

Prin identificarea coeficienţilor versorilor în relaţia (4), se obţin componentele acceleraţiei unghiulare pe axele sistemului fix şi anume:

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_{x1}\ , \qquad \varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_{y1}\ , \qquad \varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_{z1}\ . \tag{5}$$

Având în vedere (3), relaţiile (5) devin:

$$\varepsilon_{x1} = -\frac{an^2}{2}\sqrt{3}\sin ant, \qquad \varepsilon_{y1} = \frac{an^2}{2}\sqrt{3}\cos ant, \qquad \varepsilon_{z1} = 0. \tag{6}$$

Ecuaţiile axei instantanee de rotaţie în raport cu sistemul de referinţă fix sunt similare cu (12.7). Astfel,

$$\frac{x_1}{\omega_{x1}} = \frac{y_1}{\omega_{y1}} = \frac{z_1}{\omega_{z1}}. \tag{7}$$

Introducând (3) în (7), se obţine:

$$\frac{2x_1}{\sqrt{3}\cos ant} = \frac{2y_1}{\sqrt{3}\sin ant} = \frac{3z_1}{2a+1}. \qquad (8)$$

Din relaţiile (8) se obţin succesiv relaţiile:

$$\sin ant = 2\frac{2a+1}{3\sqrt{3}}\frac{y_1}{z_1}, \qquad \cos ant = 2\frac{2a+1}{3\sqrt{3}}\frac{x_1}{z_1} \quad . \qquad (9)$$

Având în vedere relaţia trigonometrică:

$$\sin^2 ant + \cos^2 ant = 1, \qquad (10)$$

în care se introduc expresiile (9), se obţine *ecuaţia axoidei fixe*:

$$4(2a+1)^2 \cdot \left(x_1^2 + y_1^2\right) - 27z_1^2 = 0. \qquad (11)$$

În cazul în care planul fix $O_1x_1y_1$ este axoida fixă, atunci $z_1 = 0$, astfel că relatia (11) devine:

$$4(2a+1)^2 \cdot \left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0. \qquad (12)$$

Cum $x_1 \neq 0$ şi $y_1 \neq 0$, rezultă:

$$2a+1 = 0, \; a = -\frac{1}{2}. \qquad (13)$$

12.2.6. Să se determine ecuaţia axei instantanee de rotaţie şi modulul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ a unui solid rigid care efectuează o mişcare sferică, dacă sunt cunoscute la un moment dat (*t*) proiecţiile unui punct M_1 *(0, 0, 2)* pe axele unui sistem cartezian mobil legat invariabil de rigid:

$$v_{1x} = 1 \; m/s, \qquad v_{1y} = 2 \; m/s, \qquad v_{1z} = 0$$

şi direcţia vitezei punctului M_2 *(0, 1, 2)* dată prin cosinusurile directoare:

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{3}.$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

În conformitate cu (12.6), legea de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării sferice este:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \,. \qquad (1)$$

Proiectând (1) pe axele unui sistem cartezian mobil solidar cu rigidul, se obţin componentele:

$$v_x = z\omega_y - y\omega_z \,, \qquad v_y = x\omega_z - z\omega_x \,, \qquad v_z = y\omega_x - x\omega_y \,. \qquad (2)$$

Înlocuind datele problemei pentru punctele M_1 şi M_2 în relaţiile (2), se obţine sistemul:

$$\begin{array}{lll} 2\omega_y - 0 = 1 & 2\omega_y - \omega_z = -\dfrac{2}{3}v_2 & \\ 0 - 2\omega_x = 2 & 0 - 2\omega_x = \dfrac{2}{3}v_2 & \omega_x - 0 = -\dfrac{1}{3}v_2 \;. \end{array} \qquad (3)$$

Din sistemul (3) se obţin:

$$\omega_x = -1 \;\; rad/s, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \; rad/s, \quad \omega_z = 3 \;\; rad/s, \;\; v_2 = 3 \;\; rad/s. \qquad (4)$$

Modulul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ se determină astfel:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{\sqrt{41}}{2} \;. \qquad (5)$$

Axa instantanee de rotaţie are următoarele ecuaţii în raport cu sistemul mobil:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \;. \qquad (6)$$

Având în vedere (4), din (6) se obţin ecuaţiile planelor care intersectate dau axa instantanee de rotaţie şi anume:

$$x + 2y = 0 \,, \qquad 3x + z = 0 \,. \qquad (7)$$

12.2.7. Se consideră un solid rigid care efectuează o mişcare în jurul unui punct fix *O*. Să se determine viteza unui punct aparţinând rigidului ale cărui coordonate la un moment dat sunt: $x = -a\cos\varphi$, $\quad y = a\sin\varphi$, $\quad z = a$, $(a = ct.)$ şi să se arate că mărimea acestei viteze nu depinde de unghiul rotaţiei proprii φ.

Soluţie:

În conformitate cu (12.6), legea de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării în jurul unui punct fix este:

$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k} = \overline{\omega}\times\overline{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\overline{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\overline{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\overline{k}\,, \quad (1)$$

relaţie în care:

ω_x, ω_y, ω_z sunt proiecţiile vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$ pe axele unui sistem de referinţă mobil *Oxyz* legat invariabil de solidul rigid;

x, y, z sunt coordonatele unui punct aparţinând rigidului înregistrate faţă de sistemul mobil.

Având în vedere că proiecțiile vitezei unghiulare, în conformitate cu (12.10), sunt:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi,\\
\omega_y &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi,\\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\ .
\end{aligned} \quad (2)$$

și fiind date coordonatele unui punct al rigidului

$$x = -a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = a\,,$$

rezultă proiecțiile vitezei:

$$\begin{aligned}
v_x &= \omega_y z - \omega_z y = a\left[\dot{\psi}\sin(\theta-\varphi) - (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\right]\\
v_y &= \omega_z x - \omega_x z = -a\left[\dot{\psi}\cos(\theta-\varphi) + (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\right]\\
v_z &= \omega_x y - \omega_y x = a\dot{\psi}\sin\theta.
\end{aligned} \quad (3)$$

Introducând (3) în (1), se obţine:

$$\overline{v} = a\left[\dot{\psi}\sin(\theta-\varphi) - (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\right]\overline{i} - a\left[\dot{\psi}\cos(\theta-\varphi) + (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\right]\overline{j} + a\dot{\psi}\sin\theta\,\overline{k}\,. \quad (4)$$

Modulul vitezei este dat de:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \quad (5)$$

astfel, având în vedere (3), se obţine:

$$v = a\sqrt{\left[\dot{\psi}\sin(\theta-\varphi) - (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\right]^2 + \left[\dot{\psi}\cos(\theta-\varphi) + (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\right]^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta}\,,$$

$$v = a\sqrt{\dot{\psi}^2(1+\sin^2\theta) + (\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2 + 2\dot{\psi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\theta}\ . \quad (6)$$

Se observă din relația (6) că, mărimea vitezei dată de (6) nu depinde de unghiul rotaţiei proprii φ.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

12.2.8. O placă pătrată *OABC* de latură *a* se mişcă având punctul *O* fix astfel încât, latura *OA* descrie un plan fix rotindu-se cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}_1$. În acelaşi timp, pătratul se roteşte în jurul laturii *OA* cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}_2$. Se cer să se determine viteza unghiulară de rotaţie a plăcii, axoida fixă, axoida mobilă şi viteza punctului *C*. La momentul iniţial $t_0 = 0$ placa se situează chiar în planul fix (fig. 12.8).

Soluţie:

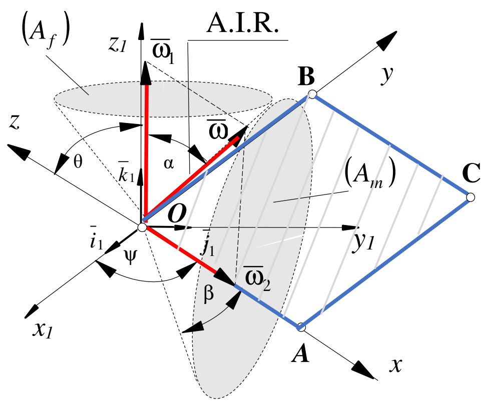


Fig. 12.8

Se alege un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încât, $O_1x_1y_1$ să reprezinte planul fix al mişcării, iar Ox_1 poziţia iniţială a lui *OA*. Sistemul de referinţă mobil este *Oxyz*. În acest caz, unghiurile lui Euler sunt date de expresiile:

$$\varphi = 0,\ \ \psi = \omega_1 t,\ \ \theta = \omega_2 t. \tag{1}$$

Vectorul $\overline{\omega}$ se poate exprima în raport cu cele două sisteme de referinţă, mobil şi fix, astfel:

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= \omega_2 \bar{i} + \omega_1 \sin\theta\, \bar{j} + \omega_1 \cos\theta\, \bar{k}\,, \\ \overline{\omega} &= \omega_2 \cos\psi\, \bar{i}_1 + \omega_2 \sin\psi\, \bar{j}_1 + \omega_1\, \bar{k}_1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Modulul lui $\overline{\omega}$ este:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \tag{3}$$

Axoida fixă este un con cu vârful în punctul *O* şi axa Oz_1. Generatoarea conului face cu axa Oz_1 unghiul α dat de relaţia:

$$tg\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}\,. \tag{4}$$

Axoida mobilă este alt con cu vârful în punctul O şi axa Ox. Generatoarea conului face cu axa Ox unghiul $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Având în vedere că:

$$\overline{OC} = \bar{r}_C = a\,\bar{i} + a\,\bar{j}, \tag{5}$$

viteza punctului C, conform cu (12.6), este:

$$\bar{v}_C = \overline{\omega} \times \bar{r}_C = -a\omega_1 \cos\theta\,\bar{i} + a\omega_1 \cos\theta\,\bar{j} + a(\omega_2 - \omega_1 \sin\theta)\bar{k} \ . \tag{6}$$

Modulul acestei viteze se obţine astfel:

$$v_C = a\sqrt{2\omega_1^2 \cos^2\theta + (\omega_2 - \omega_1 \sin\theta)^2} \ . \tag{7}$$

12.2.9. În figura 12.9 este prezentat un rulou conic care se rostogoleşte fără alunecare pe un suport conic circular.

Razele rolelor sunt $R = 10\sqrt{2}$ cm, iar unghiul la vârf este $2\alpha = 90^\circ$. Viteza centrului A al rolei din dreapta este $v_A = 20\ cm/s$. Să se determine vitezele şi acceleraţiile punctelor B şi C.

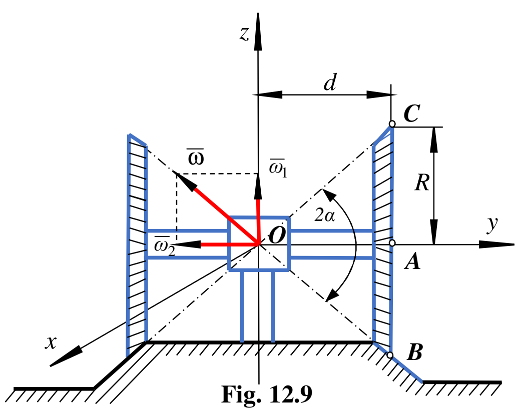


Fig. 12.9

Soluţie:

Întrucât punctul *B* este centru instantaneu de rotaţie pentru rola din dreapta, viteza lui va fi $\bar{v}_B = 0$. Cum *O* este punct fix, axa instantanee de rotaţie corespunzătoare poziţiei din figură a ruloului va fi axa care trece prin punctele *O* şi *B,* care au vitezele nule.

Înseamnă că, viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ are ca suport dreapta *OB*, ea având două componente: $\overline{\omega}_1$ care este viteza unghiulară de rotaţie a cadrului ruloului în jurul axei *Oz* şi $\overline{\omega}_2$ care este viteza unghiulară de rotaţie relativă a rolelor în jurul axei lor de simetrie. Astfel,

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 . \tag{1}$$

- Viteza instantanee a punctului *A,* conform cu (12.6), are expresia:

$$\bar{v}_A = \overline{\omega} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = -\omega_1 d\bar{i} . \tag{2}$$

Modulul vitezei $\bar{v}_A$ este:

$$v_A = \omega_1 d , \tag{3}$$

relaţie din care se obţine viteza unghiulară ω_1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{d} = \frac{v_A}{Rctg\alpha} = \frac{20}{10\sqrt{2}ctg45^\circ} = \sqrt{2} . \tag{4}$$

Din relaţia $tg\ 45^\circ = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ se obține

$$\omega_2 = \omega_1 = \sqrt{2} . \tag{5}$$

- Viteza instantanee a punctului *C* este:

$$\bar{v}_C = \overline{\omega} \times \overline{OC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & d & R \end{vmatrix} = -(\omega_1 d + \omega_2 R)\bar{i} . \tag{6}$$

Modulul acestei viteze se determină astfel:

$$v_C = \omega_1 d + \omega_2 R = \sqrt{2}\left(10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\right) = 40\ cm/s . \tag{7}$$

Având în vedere că: $\overline{\omega} = -\omega_2 \overline{j} + \omega_1 \overline{k}$, accelerația unghiulară instantanee se determină astfel:

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = -\sqrt{2}\dot{\overline{j}} = -\sqrt{2}\overline{\omega} \times \overline{j} = -\sqrt{2}\overline{\omega}_1 \times \overline{j} = 2\overline{i} \ . \tag{8}$$

- Accelerația instantanee a punctului *B*, conform cu (12.14), este:

$$\overline{a}_B = \overline{\varepsilon} \times \overline{OB} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OB}\right) = \overline{\varepsilon} \times \overline{OB} \tag{9}$$

întrucât $\overline{v}_B = \overline{\omega} \times \overline{OB} = 0$.

Având în vedere figura 12.8 și relația (8), se poate scrie:

$$\overline{a}_B = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & d & -R \end{vmatrix} = 2R\overline{j} + 2d\overline{k} = 20\sqrt{2}\left(\overline{j} + \overline{k}\right) \ . \tag{10}$$

Din (10) se obține modulul accelerației $\overline{a}_B$:

$$a_B = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 40 \ \ cm/s^2 \ . \tag{11}$$

- Accelerația instantanee a punctului C se exprimă astfel:

$$\overline{a}_C = \overline{\varepsilon} \times \overline{OC} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OC}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & d & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ d\omega_1 - R\omega_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{a}_C = -\left(2R + d\omega_1^2 + R\omega_1\omega_2\right)\overline{j} + \left(2d - d\omega_1\omega_2 - R\omega_2^2\right)\overline{k} \ . \tag{12}$$

Introducând în (12) valorile numerice, rezultă:

$$\overline{a}_C = -\left(2 \cdot 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \cdot 2 + 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)\overline{j} + \left(2 \cdot 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} \cdot 2 - 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)\overline{k}$$

$$\overline{a}_C = -60\sqrt{2}\overline{j} - 20\sqrt{2}\overline{k} \ . \tag{13}$$

Având în vedere (13), modulul accelerației $\overline{a}_C$ este:

$$a_C = 40\sqrt{5} \ m/s^2. \tag{14}$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

12.2.10. Un pod are o parte rotativă care este montată pe role conice (fig. 12.10). Axele rolelor conice sunt montate înclinat într-o ramă circulară, astfel că acestea se intersectează în centrul geometric *O* al suprafeţei de sprijin a rolelor.

Ştiind că raza rolei este $R = 25$ cm şi unghiul la vârf este 2α pentru care $\cos\alpha = \dfrac{84}{85}$, se cer să se determine: viteza şi acceleraţia unghiulară a rolelor, precum şi vitezele şi acceleraţiile punctelor *A, B,* şi *C,* unde punctul *C* este centrul

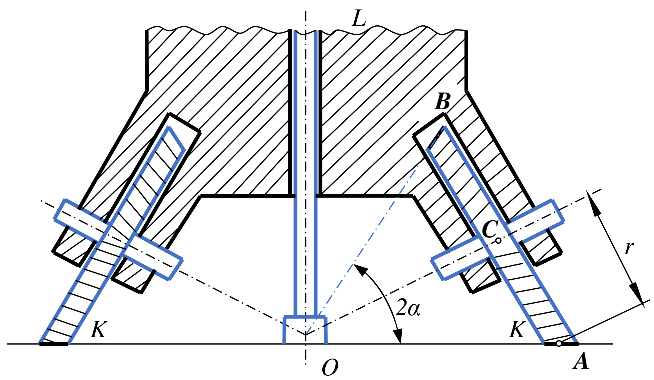


Fig. 12.10

roţii conice. Se cunoaşte că la un moment dat, viteza unghiulară ω_1 a ramei circulare în jurul axei verticale este egală cu $0{,}1$ rad/s.

Soluţie:

Deoarece punctul *A* reprezintă centrul instantaneu de rotaţie aferent roţii conice din dreapta (are viteza nulă), iar punctul *O* este fix, dreapta *OA* este axa instantanee de rotaţie corespunzătoare mişcării roţii în jurul punctului fix *O*. În acest fel, suportul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ este dreapta *OA*.

Ştiind că $\overline{\omega}_1$ este viteza unghiulară a ramei circulare în jurul axei verticale şi $\overline{\omega}_2$ este viteza unghiulară de rotaţie relativă a roţii conice în jurul axei sale de simetrie, se poate scrie:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 \,. \tag{1}$$

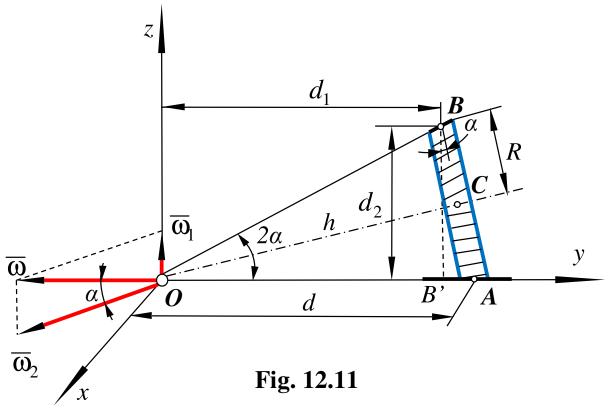


Fig. 12.11

Urmărind figura 12.11, se pot scrie relaţiile:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sin\alpha} = \frac{0,1}{\sqrt{1-(84/85)^2}} = 0,653 \quad rad/s. \qquad (2)$$

$$\omega = \omega_1 ctg\alpha = 0,1\frac{84/85}{\sqrt{1-(84/85)^2}} = 0,646 \quad rad/s. \qquad (3)$$

Având în vedere figura 12.11 şi relaţia (3), se obţine viteza unghiulară:

$$\overline{\omega} = -\omega_1 ctg\alpha\overline{j} = -0,646\overline{j} \qquad (4)$$

Acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}$ se obţine derivând în raport cu timpul viteza unghiulară. Astfel,

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = -0,646\dot{\overline{j}} = -0,646\overline{\omega}_1 \times \overline{j} = 0,646\omega_1\overline{i} = 0,0646\overline{i} \;. \qquad (5)$$

- Viteza instantanee a punctului *B* are expresia:

$$\overline{v}_B = \overline{\omega}\times\overline{OB} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -0,646 & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} = -0,646 d_2\overline{i} = -1,292R\cos\alpha\overline{i} \;, \qquad (6)$$

întrucât $d_2 = 2R\cos\alpha$.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Modulul vitezei $\bar{v}_B$ devine:

$$v_B = 12{,}92 R\cos\alpha = 12{,}92 \cdot 25 \cdot 84/85 = 31{,}92 \ \ cm/s. \qquad (7)$$

- Viteza instantanee a punctului C este:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{OC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -0{,}646 & 0 \\ 0 & R\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & R\cos\alpha \end{vmatrix} = -0{,}646 R\cos\alpha\bar{i} \ . \qquad (8)$$

Modulul vitezei centrului roţii se determină astfel:

$$v_C = 0{,}646 R\cos\alpha = 0{,}646 \cdot 25 \cdot 84/85 = 15{,}96 \quad cm/s \ . \qquad (9)$$

- Acceleraţia instantanee a punctului A este:

$$\bar{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{OA}\right) = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} \ , \qquad (10)$$

pentru că $\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{OA} = 0$.

Având în vedere figura 12.11 şi relaţia (5), se obţine:

$$\bar{a}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0{,}0646 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0{,}0646 d\bar{k} = 0{,}0646 \frac{R}{\sin\alpha}\bar{k} \ . \qquad (11)$$

Modulul acceleraţiei $\bar{a}_A$ are expresia:

$$a_A = 0{,}0646 \frac{R}{\sin\alpha} = 0{,}0646 \frac{25}{\sqrt{1-(84/85)^2}} = 10{,}559 \quad cm/s^2 \ . \qquad (12)$$

- Accelerația instantanee a punctului B se determină cu relația:

$$\overline{a}_B = \overline{\varepsilon} \times \overline{OB} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OB}\right) = \overline{\varepsilon} \times \overline{OB} + \overline{\omega} \times \overline{v}_B \ , \qquad (13)$$

care, având în vedere (4), (5) şi (6), devine:

$$\overline{a}_B = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0{,}0646 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -0{,}646 & 0 \\ -1{,}292 R\cos\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overline{a}_B = -0{,}0646 d_2 \overline{j} + \left(0{,}0646 d_1 - 0{,}834 R\cos\alpha\right)\overline{k} \ . \qquad (14)$$

Având în vedere că:

$$d_1 = R\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}, \qquad d_2 = 2R\cos\alpha, \qquad (15)$$

relația (14) se mai poate scrie şi sub forma:

$$\overline{a}_B = -0{,}0646 \cdot 2R\cos\alpha\overline{j} + \left(0{,}0646 R\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} - 0{,}834 R\cos\alpha\right)\overline{k} \ . \qquad (16)$$

Înlocuind în (16) cu valorile numerice, rezultă:

$$\overline{a}_B = -0{,}0646 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 84/85\overline{j} + \left(0{,}0646 \cdot 25\frac{(84/85)^2 - \left[1-(84/85)^2\right]}{\sqrt{1-(84/85)^2}} - 0{,}834 \cdot 25 \cdot 84/85\right)\overline{k}$$
$$= -3{,}192\overline{j} - 10{,}7\overline{k} \ . \qquad (17)$$

Modulul accelerației $\overline{a}_B$ se obține din (17) astfel:

$$a_B = \sqrt{(3{,}192)^2 + (10{,}7)^2} = 11{,}16 \quad cm/s^2 \quad .$$

- Accelerația instantanee a centrului C al roții conice se obține astfel:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\overline{a}_C = \overline{\varepsilon} \times \overline{OC} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OC}\right) = \overline{\varepsilon} \times \overline{OC} + \overline{\omega} \times \overline{v}_C \ , \tag{18}$$

Introducând în (18) relaţiile (4), (5) şi (8), se obţine:

$$\overline{a}_C = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0{,}0646 & 0 & 0 \\ 0 & R\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & R\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -0{,}646 & 0 \\ -0{,}646R\cos\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overline{a}_C = -0{,}0646R\cos\alpha\overline{j} + \left(0{,}0646R\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - 0{,}646^2 R\cos\alpha\right)\overline{k} \ . \tag{19}$$

Prin înlocuirea în relaţia (19) a valorilor numerice, se obţine:

$$\overline{a}_C = -0{,}0646 \cdot 25 \cdot 84/85\overline{j} + \left(0{,}0646 \cdot 25\frac{\left(84/85\right)^2}{\sqrt{1-\left(84/85^2\right)}} - 0{,}646^2 \cdot 25 \cdot 84/85\right)\overline{k} \ ,$$

$$\overline{a}_C = -1{,}596\overline{j} - 0{,}365\overline{k} \ . \tag{20}$$

Modulul acceleraţiei centrului C al roţii conice se obţine astfel:

$$a_C = \sqrt{1{,}596^2 + 0{,}365^2} = 1{,}64 \ cm/s^2 \ . \tag{21}$$

12.2.11. Să se studieze mişcarea unui trunchi de con de raze R şi r şi înălţime h care se roteşte în jurul axei verticale cu viteza unghiulară ω_1, mişcarea fiind de rostogolire pe un plan fix. Să se determine viteza şi acceleraţia unui punct oarecare A de pe periferia bazei mari (fig. 12.12). Se menţionează că, astfel de trunchiuri de con se întrebuinţează în tehnică sub denumirea de *galeţi* folosiţi la ghidarea mişcării de rotaţie în jurul verticalei macaralelor, a plăcilor turnate etc.

Soluţie:

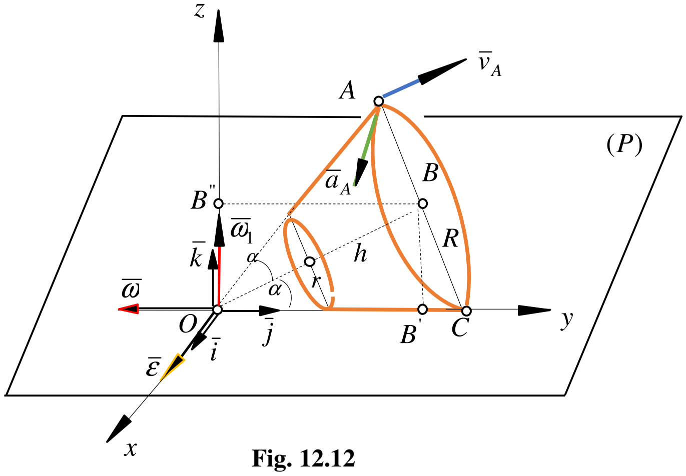


Fig. 12.12

Deoarece rostogolirea trunchiului de con pe planul (P) se face fără alunecare, generatoarea de contact a conului cu planul este axa instantanee de rotaţie. Viteza unghiulară $\overline{\omega}$ va rezulta din exprimarea în două moduri a vitezei punctului B care este centrul bazei mari a trunchiului de con şi care descrie un cerc de rază $BB^{''}$ situat în planul orizontal, cu viteza unghiulară ω_1, respectiv efectuează o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee de rotaţie OC. Astfel,

$$v_B = BB^{''}\omega_1 = BB^{'}\omega \ . \tag{1}$$

În relaţia (1) segmentele BB' şi BB'' se pot exprima astfel:

$$BB^{'} = R\cos\alpha = \frac{Rh}{\sqrt{h^2 + (R-h)^2}} \ , \quad BB^{''} = OB\cos\alpha = \frac{Rh^2}{(R-r)\sqrt{h^2+(R-h)^2}} \ . \tag{2}$$

Introducând relaţiile (2) în (1), rezultă:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\omega = \frac{h}{R-r}\omega_1 . \tag{3}$$

Pentru determinarea vitezei şi acceleraţiei punctului *A* se alege un sistem de referinţă triortogonal mobil *Oxyz* legat solidar cu trunchiul de con, axele sale având versorii $\bar{i}, \bar{j}$ şi $\bar{k}$. Originea sistemului este în punctul *O*. Urmărind figura, se pot scrie relaţiile:

$$\bar{r}_A = \overline{OA} = OAcos2\alpha\,\bar{j} + OAsin2\alpha\,\bar{k} \tag{4}$$

$$\bar{\omega} = -\frac{h}{R-r}\omega_1\bar{j}\ ;\ \ \bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} = \frac{h\omega_1^2}{R-r}\bar{i} . \tag{5}$$

Conform cu (12.6) şi (12.14), se determină viteza $\bar{v}_A$ şi acceleraţia $\bar{a}_A$ cu relaţiile:

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A\ ; \quad \bar{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_A) = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_A + \bar{\omega} \times \bar{v}_A . \tag{6}$$

Efectuând calcule rezultă:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= -\frac{h}{R-r}\omega_1 \cdot OA\sin 2\alpha\,\bar{i} = -\frac{2Rh^2\omega_1}{(R-r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\bar{i} . \\ \bar{a}_A &= -\frac{2Rh^2\omega_1^2}{(R-r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\bar{j} - \frac{Rh\omega_1^2\sqrt{h^2+(R-r)^2}}{(R-r)^2}\bar{k} . \end{aligned} \tag{7}$$

12.3 Probleme propuse

12.3.1. Un disc de rază r şi de grosime neglijabilă se rostogoleşte fără să alunece pe un plan orizontal *(π),* punctul de contact I descriind o traiectorie circulară de rază R, iar planul în care este conţinut discul este în permanenţă perpendicular pe planul *(π)* (fig. 12.13).

Centrul C al discului are o viteză $\overline{v}_C$ de modul constant. Se cere, să se determine următoarele:

a) traiectoria unui punct M care se găseşte pe disc la o distanţă ρ de centrul C al acestuia;

b) unghiurile lui Euler în funcţie de unghiul α care determină poziţia discului la un moment dat;

c) proiecţiile vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ ale discului pe axele sistemului de referinţă fix şi mobil, precum şi modulul acesteia;

d) axoidele mişcării;

e) viteza şi acceleraţia punctului M.

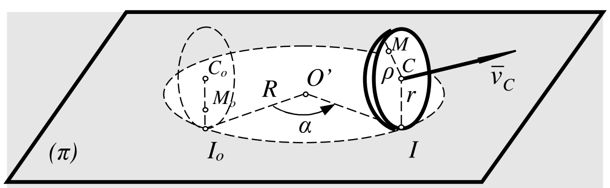


Fig. 12.13

Răspuns:

$$x_{1M}(t) = R\cos\frac{v_C}{R}t + \rho\sin\frac{v_C}{R}t\sin\frac{v_C}{r}t$$

$$y_{1M}(t) = R\sin\frac{v_C}{R}t - \rho\cos\frac{v_C}{R}t\sin\frac{v_C}{r}t\,, \quad \psi = \frac{v_C}{R}t\,, \quad \varphi = 0\,, \quad \theta = -\frac{v_C}{r}t$$

$$z_{1M}(t) = -\rho\cos\frac{v_C}{R}\,,$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\omega_{x1} = -\frac{v_C}{r}\cos\frac{v_C}{R}t, \quad \omega_{y1} = -\frac{v_C}{r}\sin\frac{v_C}{R}t, \quad \omega_{z1} = \frac{v_C}{R},$$

$$\omega = \frac{v_C\sqrt{R^2 + r^2}}{Rr},$$

$$\omega_x = -\frac{v_C}{r}, \quad \omega_y = -\frac{v_C}{R}\sin\frac{v_C}{r}t, \quad \omega_z = \frac{v_C}{R}\cos\frac{v_C}{r}t,$$

$$R^2 z_1^2 = r^2\left(x_1^2 + y_1^2\right), \quad r^2 z^2 = R^2\left(y^2 + z^2\right),$$

$$v_M = v_C\sqrt{\frac{\rho^2}{r^2} + 1 + \frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\frac{v_C}{r}t - \frac{2\rho}{r}\cos\frac{v_C}{r}t},$$

$$a_{rot} = \frac{v_C^2}{r}\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}\cos^2\frac{v_C}{r}t},$$

$$a_{ax} = v_C^2\sqrt{\rho^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2\sin^2\frac{v_C}{r}t + \frac{1}{R^2} + \frac{2\rho}{Rr}\cos\frac{v_c}{r}t\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\cos\frac{v_c}{R}t - \frac{1}{r}\cos^2\frac{v_c}{R}t\right) + \frac{1}{r^2}\cos^4\frac{v_c}{R}t}.$$

12.3.2. Un solid rigid având un punct fix execută o mişcare de precesie regulată, iar cele trei unghiuri ale lui Euler au următoarele legi de variaţie:

$$\varphi = at, \ \psi = bt, \ \theta = c. \tag{1}$$

Se cer să se calculeze componentele vectorilor viteză şi acceleraţie unghiulară $\overline{\omega}$ şi $\overline{\varepsilon}$, modulele acestora şi să se determine axoidele mişcării.

Răspuns:

$$\omega_x = b\sin at \sin c \qquad \omega_{x1} = a\sin c\sin bt$$
$$\omega_y = b\cos at \sin c \qquad \omega_{y1} = -a\sin c\cos bt$$
$$\omega_z = b\cos c + a\,, \qquad \omega_{z1} = b + a\cos c\,,$$

$$\omega = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos c}\,,$$

$$\varepsilon_{x_1} = ab\sin c\cos bt$$
$$\varepsilon_{y_1} = ab\sin c\sin bt$$
$$\varepsilon_{z_1} = 0\,,$$

$$\varepsilon_x = ab\cos at\sin c$$
$$\varepsilon_y = -ab\sin at\sin c$$
$$\varepsilon_z = 0\,,$$

$$\varepsilon = ab\sin c\,,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{a^2\sin^2 c}{a\cos c + b}z_1^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \frac{b^2\sin^2 c}{a\cos c + b}z^2 = 0\,.$$

12.3.3. Proiecţiile vectorului viteză unghiulară instantanee ale unui solid rigid care se mişcă în jurul unui punct fix *O,* pe axele sistemului *Oxyz* invariabil legat cu rigidul, sunt 2, 3 şi 4. Se cere ecuaţia axei instantanee de rotaţie faţă de acest sistem de axe.

Răspuns:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

12.3.4. Un con circular drept cu înălţimea h şi unghiul la vârf 2α se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal, el rotindu-se în jurul unei axe verticale ce trece prin vârful conului cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}_1$. Să se afle viteza şi acceleraţia unghiulară, viteza şi acceleraţiile de rotaţie şi axipetă a unui punct A de pe cercul de bază al conului, cerc aflat la distanţă maximă de planul orizontal (fig. 12.14).

Răspuns:

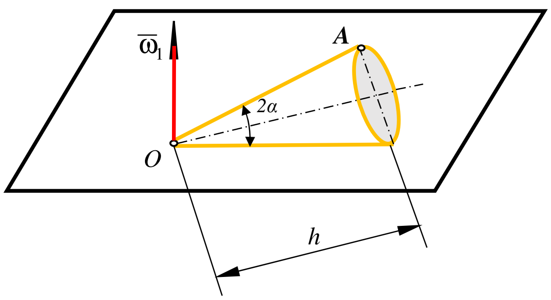


Fig. 12.14

$$\omega = \omega_1 ctg\alpha \,, \qquad a_{ax} = 2\omega_1^2 h \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \,,$$

$$\varepsilon = \omega_1^2 ctg\alpha \,,$$

$$v_A = 2h\omega_1 \cos\alpha \,, \qquad a_{rot} = 2\omega_1^2 h \cos\alpha \,.$$

12.3.5. Se consideră două conuri circulare drepte având generatoarele de lungimi egale $l = 30\ cm$, unghiurile la vârf 2α şi 2β unde $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Primul con este fix, iar al doilea se rostogoleşte peste cel fix cu viteza unghiulară $\omega_1 = 1{,}2\ s^{-1}$ în jurul axei de simetrie a conului fix. Cele două conuri au vârfurile în acelaşi punct O.

Se cer să se determine viteza şi acceleraţia unghiulară a conului mobil, precum şi viteza şi acceleraţia punctului M ce aparţine dreptei de intersecţie dintre planul bazei conului mobil cu planul format de cele două axe de simetrie ale conurilor, el fiind situat la o distanţă $M_oM = 10\ cm$ de circumferinţa cercului de bază (fig. 12.15).

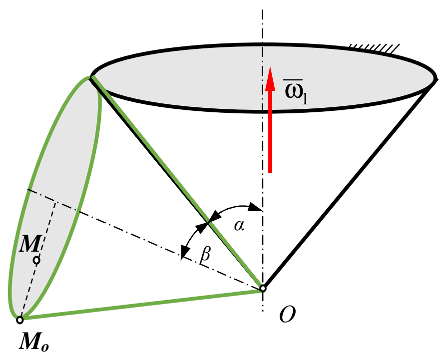


Fig. 12.15

Răspuns:

$\omega = 2{,}32\ s^{-1}$, $\varepsilon = 1{,}97\ s^{-2}$, $v_M = 40{,}2$ cm/s, $a_M = 64{,}2$ cm/s^2 .

12.3.6. Să se demonstreze că în cazul mişcării sferice a unui rigid, între vitezele $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ şi acceleraţiile $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ a două puncte A_1, A_2 aparţinând rigidului există relaţiile:

$$\overline{r}_2\overline{v}_1 + \overline{r}_1\overline{v}_2 = 0\ , \qquad \overline{r}_2\overline{a}_1 + \overline{r}_1\overline{a}_2 = -2\overline{v}_1\overline{v}_2\ ,$$
$$\overline{a}_1\overline{r}_1 = -v_1^2\ , \qquad \overline{a}_2\overline{r}_2 = -v_2^2\ ,$$

unde: $\overline{r}_1$ şi $\overline{r}_2$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor A_1 şi A_2 în raport cu punctul fix O.

13. MIŞCAREA GENERALĂ A SOLIDULUI RIGID [9]

13.1 Consideraţii teoretice

13.1.1 Studiul geometric al mişcării

În figura 13.1 s-a reprezentat un solid rigid liber aflat în *mişcare generală* şi trei sisteme carteziene de referinţă: sistemul fix, $O_1,x_1y_1z_1$, sistemul mobil $Oxyz$ legat invariabil de rigidul *(C)*, având originea plasată în punctul O aparţinând rigidului şi sistemul mobil $Ox'y'z'$ care execută o mişcare de translaţie, axele sale rămânând permanent paralele cu axele sistemului cartezian de referinţă fix $O_1,x_1y_1z_1$.

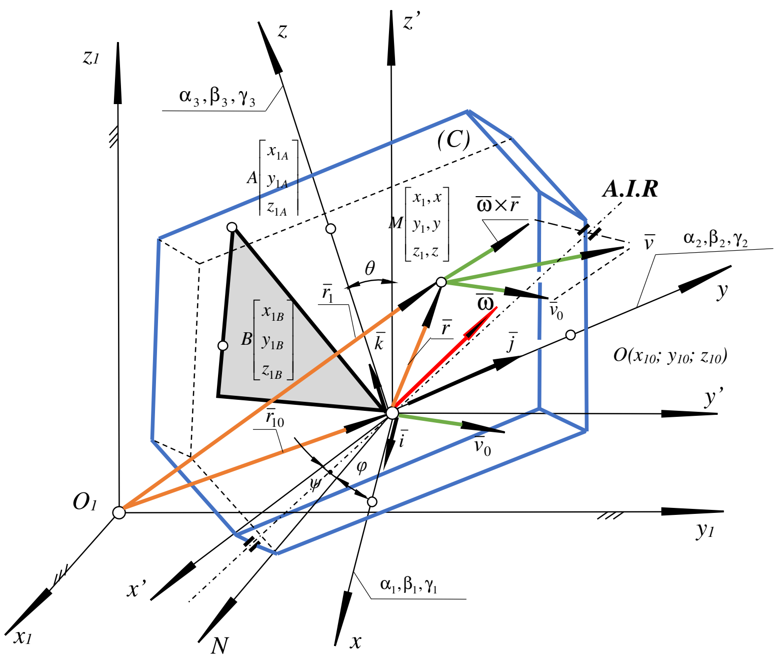


Fig. 13.1

Poziţia în spaţiu a unui astfel de rigid aflat în ***mişcare generală*** este determinată de ***şase parametri*** independenţi, rigidul posedând ***şase grade de libertate***.

Cei şase parametri independenţi pot fi aleşi în diferite moduri:

a) Se iau coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} ale originii O a sistemului cartezian mobil faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi *trei din cele nouă cosinusuri directoare ale axelor sistemului mobil Oxyz în raport cu axele sistemului fix* $O_1x_1y_1z_1$.

Între *cosinusurile directoare există şase relaţii de dependenţă* astfel încât, din cei doisprezece parametri (coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} şi nouă cosinusuri directoare α_i, β_i, γ_i, i=1, 2, 3) rămân doar şase parametri independenţi care poziţionează rigidul în spaţiu.

b) Se iau coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} ale originii mobile O şi *unghiurile lui Euler* ψ, φ, θ corespunzătoare sistemelor carteziene $Oxyz$, $Ox'y'z'$ sau $O_1x_1y_1z_1$. Ecuaţiile parametrice ale mişcării generale ale rigidului (C) sunt în acest caz:

$$x_{10} = x_{10}(t),\ y_{10} = y_{10}(t),\ z_{10} = z_{10}(t),\ \psi = \psi(t),\ \varphi = \varphi(t),\ \theta = \theta(t). \tag{13.1}$$

c) *Se aleg şase din cele nouă coordonate carteziene ale punctelor necoliniare O, A, B,* aparţinând rigidului *(C),* întrucât între cele nouă coordonate există trei relaţii de dependenţă.

Fie M un punct aparținând solidului rigid și x_1, y_1, z_1, respectiv x, y, z coordonatele lui înregistrate față de sistemul fix $O_1,x_1y_1z_1$, respectiv față de sistemul mobil $Oxyz$.

Proiectând relaţia dintre vectorii de poziţie $\overline{r}_1, \overline{r}_{10}, \overline{r}$ din figura 13.1

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_{10} + \overline{r}, \tag{13.2}$$

pe axele sistemului cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ şi ţinând seama de relațiile între cele nouă cosinusuri formate de către grupurile de câte două axe carteziene dintre care una aparţine sistemului fix $O_1\,x_1\,y_1\,z_1$, iar cealaltă sistemului mobil $Oxyz$, (tabelul 12.1), se obţine relaţia matriceală de legătură între coordonatele x_1, y_1,z_1 şi coordonatele x, y, z ale punctului M:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ y_{10} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ z_{10} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{13.3}$$

Din relaţia (13.3) se obţin expresiile coordonatelor punctului M aparţinând rigidului *(C)* înregistrate faţă de sistemul cartezian fix $O_1,x_1y_1z_1$:

$$x_1 = x_{10} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

$$y_1 = y_{10} + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$$

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$z_1 = z_{10} + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \tag{13.4}$$

În relaţiile (13.4) cele nouă cosinusuri directoare, conform cu (13.3), sunt funcţii de unghiurile lui Euler, care la rândul lor sunt funcţii cunoscute de timp. De asemenea, conform cu (13.1), coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10} sunt funcţii cunoscute de timp, iar coordonatele x, y, z sunt constante în timp, întrucât sistemul cartezian mobil $Oxyz$ este legat invariabil de solidul rigid. Rezultă astfel expresiile în funcţie de timp ale coordonatelor punctului M înregistrate faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$:

$$x_1 = x_1(t)\,; \quad y_1 = y_1(t)\,; \quad z_1 = z_1(t)\,. \tag{13.5}$$

Relația (13.5) reprezintă ***ecuaţiile parametrice ale mişcării punctului M*** în raport cu sistemul de referință fix.

13.1.2 Distribuţia vitezelor. Axoidele mişcării. Torsorul cinematic

Se consideră solidul rigid *(C)* aflat *în mişcare generală* la care se cunoaşte, la un moment dat, viteza $\overline{v}_0$ a unui punct O aparţinând rigidului şi viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ de rotaţie a rigidului în jurul punctului O (fig. 13.1).

Derivând vectorial în raport cu timpul, în ambii membrii, relaţia (13.2) între vectorii de poziţie reprezentaţi în figura 13.1, se obţine ***legea de distribuţie a vitezelor în cazul mişcării generale a solidului rigid:***

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}\ . \tag{13.6}$$

Termenii din relația (13.6) se explicitează astfel:

$$\dot{\overline{r}}_1 = \overline{v}\ , \qquad \dot{\overline{r}}_{10} = \overline{v}_0\ , \qquad \dot{\overline{r}} = \overline{\omega} \times \overline{r}_1\ . \tag{13.7}$$

Utilizând notaţiile din figura 13.1, se explicitează relaţia (13.6) faţă de sistemele carteziene $Oxyz$ şi $O_1,x_1y_1z_1$, obţinând componentele scalare carteziene ale vectorului viteză $\overline{v}$ înregistrate faţă de aceste sisteme de referinţă. Astfel,

$$v_x = v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y\,;\ \ v_y = v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z\,;\ \ v_z = v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x \tag{13.8}$$

şi

$$\begin{aligned} v_{x1} &= v_{ox1} + \omega_{y1}(z_1 - z_{10}) - \omega_{z1}(y_1 - y_{10}), \\ v_{y1} &= v_{oy1} + \omega_{z1}(x_1 - x_{10}) - \omega_{x1}(z_1 - z_{10}), \\ v_{z1} &= v_{oz1} + \omega_{x1}(y_1 - y_{10}) - \omega_{y1}(x_1 - x_{10}). \end{aligned} \tag{13.9}$$

Având în vedere legea de distribuţie a vitezelor (13.6), se pot stabili câteva ***proprietăţi ale distribuţiei de viteze în cazul mişcării generale***:

a) Legea de distribuţie a vitezelor rezultă din compunerea unei distribuţii de viteze corespunzătoare mişcării de translaţie a rigidului, efectuată cu viteza $\overline{v}_0$ a polului mobil O aparţinând rigidului şi a unei distribuţii de viteze corespunzătoare mişcării de rotaţie a rigidului în jurul lui O, rotaţie efectuată cu viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$;

b) Vectorul viteză unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ este acelaşi pentru toate punctele rigidului;

c) Proiecţia vitezei unui punct aparţinând rigidului pe suportul vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$ constituie un invariant faţă de poziţia polului de referinţă O şi poartă numele de *viteză instantanee minimă* $\overline{v}_{\min}$ (fig. 13.2).

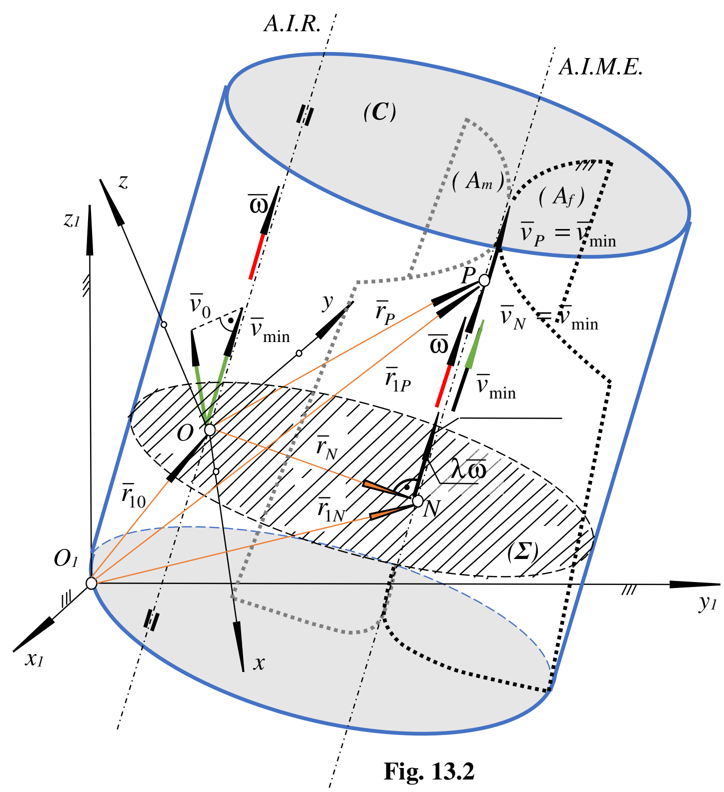


Fig. 13.2

Înmulţind scalar relaţia (13.6) în ambii membri cu versorul $\overline{u} = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$ al vitezei unghiulare, se obţine:

$$v_{\min} = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}_0}{\omega} = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}}{\omega}. \tag{13.10}$$

Viteza minimă poate fi exprimată şi cu ajutorul componentelor carteziene ale vectorilor $\overline{\omega}$ şi $\overline{v}$ pe axele sistemului mobil *Oxyz*. Astfel,

$$v_{\min} = \left(\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z\right) \Big/ \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\,; \tag{13.11}$$

d) Există puncte aparţinând solidului rigid a căror viteză $\overline{v}$ este egală cu viteza minimă $\overline{v}_{\min}$. Se pune problema determinării locului geometric al polilor *O* pentru care vectorii $\overline{v}_0$ şi $\overline{\omega}$ sunt coliniari. Astfel că, în urma unor calcule, se obţine relaţia:

$$\overline{r} - \left(\overline{\omega} \times \overline{v}_0\right) / \omega^2 = \lambda \overline{\omega}\ . \tag{13.12}$$

Expresia (13.12) arată că ***locul geometric*** căutat ***este o dreaptă*** ce trece prin punctul *N* şi care este paralelă cu vectorul viteză unghiulară instantanee $\overline{\omega}$. Această dreaptă poartă ***numele de axă instantanee a mişcării elicoidale (A.I.M.E.)*** (fig. 13.2).

Ecuaţia vectorială a A.I.M.E. este dată de (13.12), iar ***ecuaţia scalară a axei instantanee a mişcării elicoidale*** *raportată la sistemul de referinţă mobil* se obţine proiectând (13.12) pe axele acestui sistem. Se obţine astfel:

$$\frac{x - \dfrac{\omega_y v_{oz} - \omega_z v_{oy}}{\omega^2}}{\omega_x} = \frac{y - \dfrac{\omega_z v_{ox} - \omega_x v_{oz}}{\omega^2}}{\omega_y} = \frac{z - \dfrac{\omega_x v_{oy} - \omega_y v_{ox}}{\omega^2}}{\omega_z}\ . \tag{13.13}$$

Întrucât axa instantanee a mişcării elicoidale îşi modifică poziţia atât faţă de sistemul fix $O_1 x_1 y_1 z_1$, cât şi faţă de cel mobil *Oxyz* rezultă că aceasta generează în spaţiu două suprafeţe riglate.

Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de A.I.M.E. în raport cu sistemul de referinţă fix este o suprafaţă fixă, numită ***axoidă fixă (*** A_f ***).***

Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de A.I.M.E. în raport cu sistemul cartezian mobil este o suprafaţă mobilă, numită ***axoidă mobilă*** *(* A_m *).*

În timpul mişcării solidului rigid, *axoida mobilă* ***se rostogoleşte*** *peste axoida fixă, alunecând în acelaşi timp în lungul generatoarei comune* care este axa instantanee a mişcării elicoidale corespunzătoare momentului respectiv (fig. 13.2);

e) Nu există puncte aparţinând solidului rigid a căror ***viteză să fie nulă***.

Considerând vectorii $\overline{\omega}$ şi $\overline{v}_0$ ce caracterizează distribuţia de viteze în cazul unui solid rigid ca fiind elementele unui torsor numit *torsor cinematic*, se poate face analogie între torsorul de reducere corespunzător unui sistem de vectori oarecare şi *torsorul cinematic* $\tau_c\left(\overline{\omega}, \overline{v}_0\right)$ format din vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ şi vectorul viteză liniară instantanee $\overline{v}_0$. De remarcat că, vectorul $\overline{\omega}$ este acelaşi la un moment dat (*t*) pentru toate punctele rigidului, în timp ce vectorul $\overline{v}_0$ se schimbă odată cu schimbarea polului *O*. Toate noţiunile legate de reducerea unui sistem de vectori se pot transpune integral şi în cazul distribuţiei de viteze. Se poate vorbi astfel de: *moment minim echivalent* în cinematică cu viteza minimă $\overline{v}_{\min}$, *torsorul minim cinematic* $\left(\overline{\omega}, \overline{v}_{\min}\right)$ şi *axă centrală cinematică* (*A.I.M.E.*) etc.

Vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ şi viteza minimă $\overline{v}_{\min}$ se numesc *invarianţii torsorului cinematic*.

Legea de distribuţie a vitezelor (13.6) este de fapt transpunerea în cinematică a legii de variaţie a momentului rezultant la schimbarea polului de reducere.

13.1.3 Distribuţia acceleraţiilor. Polul acceleraţiilor

Se consideră solidul rigid *(C)* aflat *în mişcarea generală* la care se cunoaşte la un moment dat acceleraţia $\overline{a}_0$ a unui punct o aparţinând rigidului, viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară instantanee $\overline{\varepsilon}$ de rotaţie a acestuia în jurul punctului *O* (fig. 13.3).

Legea distribuţiei acceleraţiilor *în cazul mişcării generale a unui solid rigid* se obţine derivând vectorial în raport cu timpul ambii membri ai relaţiei (13.6). Rezultă astfel:

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) \tag{13.14}$$

sau

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \left(\overline{\omega} \cdot \overline{r}\right)\overline{\omega} - \omega^2 \overline{r}\,, \tag{13.15}$$

întrucât,

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a}\,, \quad \dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0\,, \quad \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}\,, \quad \dot{\bar{r}} = \bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{13.16}$$

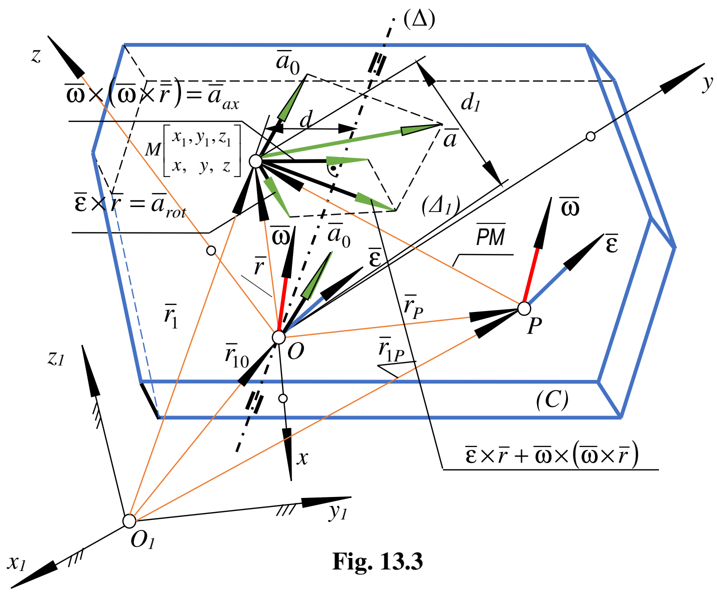


Fig. 13.3

Utilizând notaţiile din figura 13.3, se explicitează relaţia (13.15) faţă de sistemele de referinţă $Oxyz$ şi $O_1x_1y_1z_1$, obţinându-se expresiile componentelor carteziene ale acceleraţiei $\bar{a}$ faţă de cele două sisteme. Astfel,

$$\begin{aligned}
a_x &= a_{ox} + \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) - \omega^2 x,\\
a_y &= a_{oy} + \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) - \omega^2 y,\\
a_z &= a_{oz} + \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) - \omega^2 z,
\end{aligned} \tag{13.17}$$

$$\begin{aligned}
a_{x1} &= a_{ox1} + \varepsilon_{y1} z_1 - \varepsilon_{z1} y_1 + \omega_{x1}\left(\omega_{x1} x_1 + \omega_{y1} y_1 + \omega_{z1} z_1\right) - \omega^2 x_1,\\
a_{y1} &= a_{oy1} + \varepsilon_{z1} x_1 - \varepsilon_{x1} z_1 + \omega_{y1}\left(\omega_{x1} x_1 + \omega_{y1} y_1 + \omega_{z1} z_1\right) - \omega^2 y_1,\\
a_{z1} &= a_{oz1} + \varepsilon_{x1} y_1 - \varepsilon_{y1} x_1 + \omega_{z1}\left(\omega_{x1} x_1 + \omega_{y1} y_1 + \omega_{z1} z_1\right) - \omega^2 z_1.
\end{aligned} \tag{13.18}$$

Ultimele două componente din relaţia (13.14) reprezintă ***acceleraţiile de rotaţie şi axipetă***:

$$\bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \bar{a}_{rot}\,, \quad \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) = \bar{a}_{ax} \tag{13.19}$$

astfel încât legea de distribuţie a acceleraţiilor în cazul mişcării generale mai poate fi scrisă sub forma:

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{a}_{rot} + \overline{a}_{ax} \ . \tag{13.20}$$

Pe baza relaţiilor (13.19) şi (13.20) se pot stabili următoarele ***proprietăţi ale distribuţiei acceleraţiilor în cazul mişcării generale***:

a) Acceleraţia unui punct aparţinând rigidului are trei componente:

- o componentă numită *acceleraţie de translaţie,* reprezentată prin vectorul $\overline{a}_0$ care este acelaşi pentru toate punctele rigidului aflat în mişcare generală (fig. 13.3);
- o componentă numită *acceleraţie de rotaţie,* reprezentată prin vectorul $\overline{\varepsilon}\times\overline{r} = \overline{a}_{rot}$. Direcţia acestui vector este perpendiculară pe planul definit de vectorii $\overline{\varepsilon}$ şi $\overline{r}$, sensul este dat de regula burghiului, iar modulul se exprimă prin produsul εd_1, unde d_1 reprezintă distanţa de la punctul considerat până la suportul (Δ_1) al lui $\overline{\varepsilon}$;
- o componentă numită *acceleraţie axipetă,* reprezentată prin vectorul $\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}) = \overline{a}_{ax}$, care are următoarele caracteristici: direcţia este dată de perpendiculara coborâtă din punctul considerat pe suportul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$, sensul este de la punctul considerat către suportul lui $\overline{\omega}$, iar modulul se exprimă prin produsul $\omega^2 d$, unde s-a notat cu d distanţa de la punctul respectiv la suportul lui $\overline{\omega}$ (fig. 13.3).

b) Există în orice moment al mişcării generale a unui solid rigid un punct aparţinând acestuia a cărui acceleraţie $\overline{a}$ este egală cu 0.

În concluzie, **în cazul mişcării generale există în orice moment un punct a cărui acceleraţie este nulă** şi doar puncte a căror viteză este minimă, ***toate aparţinând unei axe numită axă instantanee a mişcării elicoidale***.

13.2 Probleme rezolvate [9]

13.2.1. Se consideră un cub manipulat de către un robot. Cunoscând la un moment dat viteza $\bar{v}_A$ a punctului *A*, ea fiind dirijată după diagonala *AH,* se cer să se determine viteza punctului *D* ştiind că este dirijată după muchia *AD,* precum şi viteza punctului *B* situată în planul *ABD* (fig. 13.4)

Soluţie:

În mişcarea generală a solidului rigid, proiecţiile vitezelor a două puncte aparţinând rigidului pe dreapta care uneşte cele două puncte sunt egale. Conform acestei proprietăţi, se poate scrie:

$$pr_{AD}(\bar{v}_A) = pr_{AD}(\bar{v}_D) \tag{1}$$

dar:

$$pr_{AD}(\bar{v}_A) = \left(\sqrt{2}/2\right)v_A, \quad pr_{AD}(\bar{v}_D) = v_D, \tag{2}$$

astfel că:

$$v_D = \left(\sqrt{2}/2\right)v_A . \tag{3}$$

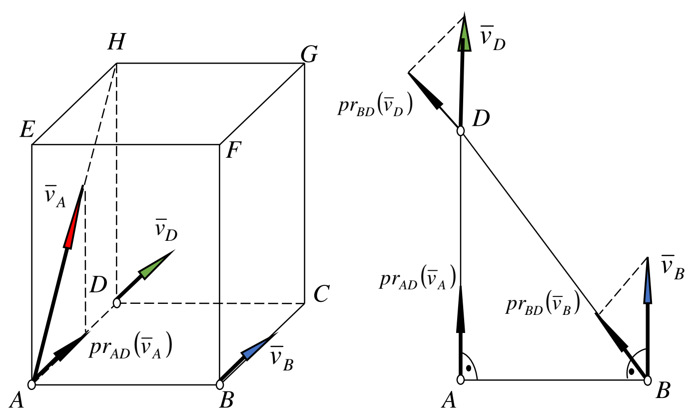


Fig. 13.4

Din figura 13.4b rezultă

$$pr_{AB}\left[\left(\sqrt{2}/2\right)v_A\right] = pr_{AB}(\bar{v}_B) . \tag{4}$$

Dar cum $pr_{AB}\left[\left(\sqrt{2}/2\right)v_A\right] = 0$, înseamnă că viteza $\overline{v}_B$ a punctului B este perpendiculară pe AB. Pe de altă parte, se poate scrie:

$$pr_{BD}\left(\overline{v}_D\right) = pr_{BD}\left(\overline{v}_B\right) \quad . \tag{5}$$

În relaţia (5) se înlocuieşte:

$$pr_{BD}\left(\overline{v}_D\right) = \left(\sqrt{2}/2\right)\left(\sqrt{2}/2\right)v_A, \quad pr_{BD}\left(\overline{v}_B\right) = \left(\sqrt{2}/2\right)v_B. \tag{6}$$

Din (5) şi (6) se obţine viteza v_B a punctului B:

$$v_B = \left(\sqrt{2}/2\right)v_A. \tag{7}$$

13.2.2. În mişcarea generală a unui solid rigid să se determine punctele pentru care:

a) acceleraţia este perpendiculară pe axa instantanee a mişcării elicoidale;

b) acceleraţia este paralelă cu axa instantanee a mişcării elicoidale;

Soluţie:

În conformitate cu (13.14), legea de distribuţie a acceleraţiilor la mişcarea generală a solidului rigid este:

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right) \ . \tag{1}$$

a) Pentru determinarea punctelor rigidului a căror acceleraţie este perpendiculară pe axa instantanee a mişcării elicoidale trebuie rezolvată ecuatia vectorială:

$$\overline{a}\cdot\overline{\omega} = 0, \quad \left[\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)\right]\cdot\overline{\omega} = 0 \ . \tag{2}$$

Efectuând produsele scalare în ecuaţia (2), se obţine:

$$\overline{a}_0\cdot\overline{\omega} + \left(\overline{\varepsilon}\times\overline{r}\right)\cdot\overline{\omega} + \left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)\right]\cdot\overline{\omega} = 0 \ . \tag{3}$$

Dar cum:

$$\left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)\right]\cdot\overline{\omega} = 0,$$

relaţia (3) devine:

$$\overline{a}_0 \cdot \overline{\omega} + \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) \cdot \overline{\omega} = 0 \ . \tag{4}$$

Exprimând vectorii din relaţia (4) prin componentele lor carteziene, se obţine:

$$a_{0x}\omega_x + a_{0y}\omega_y + a_{0z}\omega_z + \left(\varepsilon_y z - \varepsilon_z y\right)\omega_x + \left(\varepsilon_z x - \varepsilon_x z\right)\omega_y + \left(\varepsilon_x y - \varepsilon_y x\right)\omega_z = 0 \ . \tag{5}$$

Ordonând ecuaţia scalară (5) dupa coocrdonatele x , y şi z şi introducând notaţiile:

$$\begin{gathered} \varepsilon_z \omega_y - \varepsilon_y \omega_z = a_1 \,, \qquad \varepsilon_x \omega_z - \varepsilon_z \omega_x = b_1 \,, \qquad \varepsilon_y \omega_x - \varepsilon_x \omega_y = c_1 \,, \\ a_{0x}\omega_x + a_{0y}\omega_y - a_{0z}\omega_z = d_1 \,, \end{gathered} \tag{6}$$

se ajunge la ecuaţia planului:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 . \tag{7}$$

În concluzie, la mişcarea generală a solidului rigid există o infinitate de puncte, toate cuprinse într-un plan a cărui ecuaţie este (7), care au acceleraţiile perpendiculare pe axa instantanee de rotaţie.

b) Pentru determinarea punctelor unui rigid aflat în mişcare generală a căror acceleraţie este paralelă cu axa instantanee a mişcării elicoidale trebuie rezolvată ecuaţia vectorială:

$$\left[\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)\right] \times \overline{\omega} = 0 , \tag{8}$$

respectiv,

$$\overline{a}_0 \times \overline{\omega} + \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) \times \overline{\omega} + \left[\overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)\right] \times \overline{\omega} = 0 \ . \tag{9}$$

Rezolvarea ecuaţiei vectoriale (9) se face impunând următoarele conditii:

- originea O a sistemului mobil se alege în polul acceleraţilor, astfel că $\overline{a}_0 = 0$;
- axa Oz se alege după direcţia axei instantanee a mişcării elicoidale, astfel că:

$$\overline{\omega} = \omega \overline{k} \ . \tag{10}$$

Exprimând vectorii cuprinşi în ecuaţia vectorială (9) prin componentele lor carteziene, se pot scrie succesiv expresiile:

$$\overline{\omega}\times\overline{r}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\overline{i}+\omega x\overline{j} \tag{11}$$

$$\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=-\omega^2 x\overline{i}-\omega^2 y\overline{j} \tag{12}$$

$$\left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)\right]\times\overline{\omega}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -\omega^2 x & -\omega^2 y & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{vmatrix}=-\omega^3 y\overline{i}+\omega^3 x\overline{j} \tag{13}$$

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\left(\varepsilon_y z-\varepsilon_z y\right)\overline{i}+\left(\varepsilon_z x-\varepsilon_x z\right)\overline{j}+\left(\varepsilon_x y-\varepsilon_y x\right)\overline{k} \tag{14}$$

$$\left(\overline{\varepsilon}\times\overline{r}\right)\times\overline{\omega}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \varepsilon_y z-\varepsilon_z y & \varepsilon_z x-\varepsilon_x z & \varepsilon_x y-\varepsilon_y x\\ 0 & 0 & \omega\end{vmatrix}=\omega\left[\left(\varepsilon_z x-\varepsilon_x z\right)\overline{i}-\left(\varepsilon_y z-\varepsilon_z y\right)\overline{j}\right]. \tag{15}$$

Introducând (11)÷(15) în ecuaţia (9) şi identificând coeficienţii versorilor, se obţine sistemul:

$$\begin{aligned}&-\omega^2 x-\varepsilon_z y+\varepsilon_y z=0\\ &-\varepsilon_z x+\omega^2 y+\varepsilon_x z=0\ .\end{aligned} \tag{16}$$

Ecuaţiile sistemului (16) reprezintă ecuaţiile a două plane care intersectate conduc la o dreaptă.

Astfel că, în mişcarea generală a solidului rigid există o infinitate de puncte, toate aparţinând unei drepte de ecuaţie (16), care au acceleraţiile paralele cu axa instantanee a mişcării elicoidale.

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Se mentionează că, dreapta respectivă s-a determinat alegând originea O a sistemului mobil $Oxyz$ în polul acceleraţiilor şi axa Oz suprapusă peste axa instantanee a mişcării elicoidale.

13.2.3. Să se arate că, în cazul mişcării generale a solidului rigid (fig. 13.5) proiecţiile vitezelor a două puncte pe dreapta care uneşte cele două puncte sunt egale.

Soluţie:

În conformitate cu legea de distribuţie a vitezelor din cazul mişcării generale a solidului rigid, exprimată prin relaţia (13.6), se poate scrie pentru punctele A şi B (fig 13.5) relația:

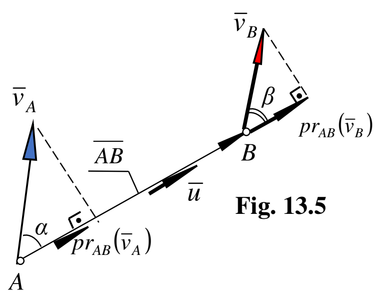


Fig. 13.5

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB} \ , \tag{1}$$

relaţie în care vectorul $\overline{r}$ din expresia (13.6) este $\overline{r} = \overline{AB}$.

Notând cu $\overline{u}$ versorul vectorului $\overline{AB}$ şi înmulţind scalar relația (1) cu $\overline{u}$, se obţine:

$$\overline{v}_B \cdot \overline{u} = \overline{v}_A \cdot \overline{u} + \left(\overline{\omega} \times \overline{AB}\right) \cdot \overline{u}. \tag{2}$$

În relaţia (2) produsul mixt $\left(\overline{\omega} \times \overline{AB}\right) \cdot \overline{u} = 0$, deoarece vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{u}$ sunt coliniari, astfel că

$$\overline{v}_B \cdot \overline{u} = \overline{v}_A \cdot \overline{u} \ , \tag{3}$$

respectiv:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \ , \tag{4}$$

adică, proiecțiile lor vor fi egale

$$pr_{AB} \overline{v}_A = pr_{AB} \overline{v}_B \ . \tag{5}$$

13.2.4. Un semifabricat manipulat de către un robot industrial este raportat la un sistem de referinţă triortogonal $Oxyz$ având originea într-un punct O aparţinând semifabricatului. Se ştie că, la un moment dat, vitezele a trei puncte *O(0,0,0)*, *A(1,1,0)* şi *B(1,1,1)* (fig. 13.6) sunt:

$$\bar{v}_0 = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k},\ \bar{v}_A = 3\bar{j} - \bar{k} \ \text{ şi } \ \bar{v}_B = -\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}.$$

Să se determine elementele torsorului de reducere cinematic în raport cu punctele axei instantanee a mişcării elicoidale ($\bar{\omega}$, $\bar{v}_{\min}$), precum şi această axă.

Soluţie:

Elementele torsorului cinematic de reducere în raport cu punctele axei instantanee a mişcării elicoidale sunt: viteza unghiulară instantanee de rotaţie $\bar{\omega}$ şi viteza minimă $\bar{v}_{\min}$, amândouă având direcţia axei instantanee.

În conformitate cu (13.6), componentele scalare carteziene ale vectorului viteză $\bar{v}$ a unui punct aparţinând semifabricantului şi înregistrate faţă de sistemul de referinţă *Oxyz* au expresiile:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

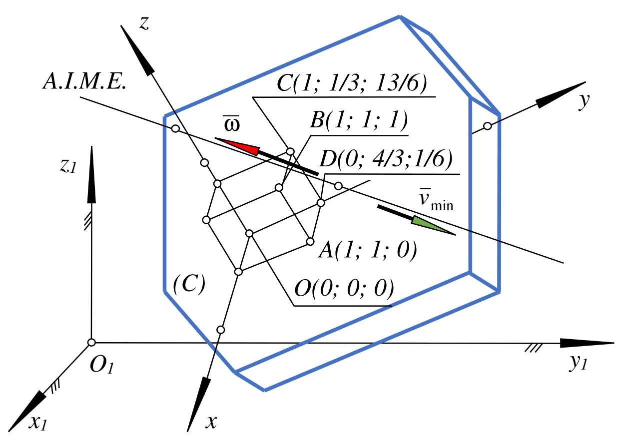


Fig. 13.6

În cazul punctelor *A* şi *B,* relaţiile (1) devin:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$-1 = 2 + \omega_y - \omega_z, \quad 0 = 2 - \omega_z$$
$$2 = \omega_z - \omega_x, \qquad 3 = 1 + \omega_z$$
$$-1 = -3\omega_x - \omega_y, \quad -1 = -3 + \omega_x - \omega_y. \tag{2}$$

Din (2) rezultă:

$$\omega_x = 1\,\text{rad}/s, \;\; \omega_y = -1\,\text{rad}/s, \;\; \omega_z = 2\,\text{rad}/s, \;\; \overline{\omega} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}. \tag{3}$$

Modulul vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$, ţinând cont de (3), este:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{6}\;\; rad/s. \tag{4}$$

Viteza minimă $\overline{v}_{\min}$, având în vedere (13.10), se determină cu relaţia: $\overline{v}_{\min} = (\overline{\omega} \cdot \overline{v}/\omega)\overline{u}$, unde $\overline{u} = \overline{\omega}/\omega$ este versorul axei instantanee a mişcării elicoidale, iar $\overline{v}$ este viteza instantanee a unui punct aparţinând solidului rigid (de exemplu, viteza punctului *A*). Astfel,

$$\overline{v}_{\min} = \left(\overline{\omega} \cdot \overline{v}_A / \omega^2\right)\overline{\omega} = -(5/6)\left(\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}\right)\;\; . \tag{5}$$

Analizând (3) şi (5) se constată că $\overline{\omega}$ şi $\overline{v}_{\min}$ sunt coliniari, dar de sens contrar.

Ecuaţia vectorială a axei instantanee a mişcării elicoidale (*A.I.M.E.*) este, conform cu (13.12):

$$\overline{r} - \left(\overline{\omega} \times \overline{v}_0\right)/\omega^2 = \lambda\overline{\omega}, \tag{6}$$

iar sub formă scalară se obţine proiectând (6) pe axele sistemului de referinţă mobil *Oxyz:*

$$\frac{x - \dfrac{\omega_y v_{oz} - \omega_z v_{oy}}{\omega^2}}{\omega_x} = \frac{y - \dfrac{\omega_z v_{ox} - \omega_x v_{oz}}{\omega^2}}{\omega_y} = \frac{z - \dfrac{\omega_x v_{oy} - \omega_y v_{ox}}{\omega^2}}{\omega_z}. \tag{7}$$

Introducând (3), (4) şi componentele vitezei $\overline{v}_0$ în (7), rezultă relaţiile:

$$x + y = 4/3, \quad 2x - z = -1/6. \tag{8}$$

care reprezintă *ecuaţiile axei instantanee* a mişcării elicoidale.

13.2.5. Se consideră un solid rigid *(C)* în mişcarea cea mai generală, aceasta fiind studiată cu ajutorul unui sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ şi al unui sistem de referinţă mobil *Oxyz,* legat invariabil de rigidul în mişcare.

Se cunosc la un moment dat, vitezele: $\overline{v}_0 = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{v}_A = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$ şi $\overline{v}_B = 5\overline{i} + 6\overline{j} - 2\overline{k}$ a trei puncte *O(0, 0, 0)*, *A(2, 1, 1)* şi *B(2, 0, 2)* aparţinând solidului rigid. Se cer să se determine elementele $\overline{\omega}$ şi $\overline{v}_{\min}$ ale torsorului cinematic de reducere în raport cu punctele axei instantanee a mişcării elicoidale, precum şi ecuaţiile acestei axe (fig. 13.7).

Soluţie:

Elementele torsorului cinematic de reducere a vectorului viteză instantanee în raport cu punctele axei instantanee a mişcării elicoidale sunt viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$ şi viteza minimă $\overline{v}_{\min}$, suportul lor fiind această axă.

Viteza unui punct oarecare aparţinând rigidului se determină cu relaţia:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r} \quad . \tag{1}$$

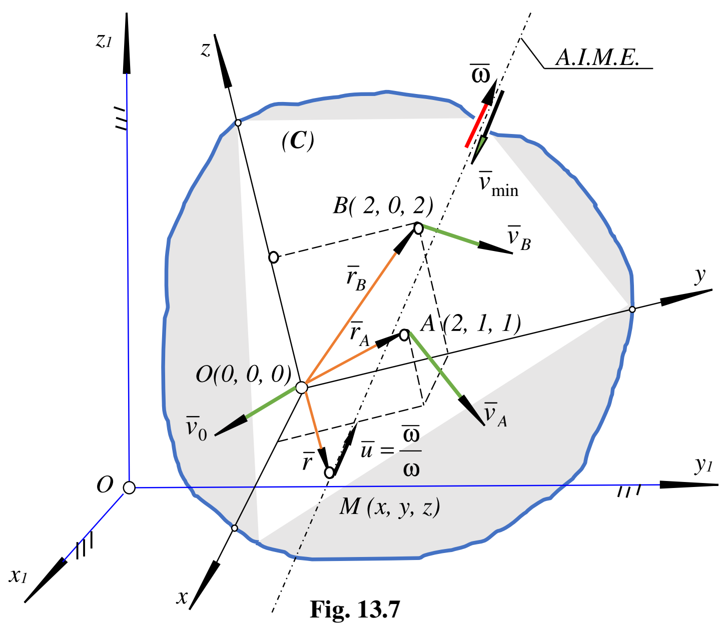


Fig. 13.7

Proiectând relaţia vectorială (1) pe axele sistemului de referinţă mobil, se obţin:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \tag{2}$$

Relaţiile scalare (2) aplicate pentru punctele A şi O, respectiv B şi O, devin:

$$\begin{aligned} 2 &= 3 + \omega_y \cdot 1 - \omega_z \cdot 1 & 5 &= 3 + \omega_y \cdot 2 - \omega_z \cdot 0 \\ 4 &= -2 + \omega_z \cdot 2 - \omega_x \cdot 1 & 6 &= -2 + \omega_z \cdot 2 - \omega_x \cdot 2 \\ -4 &= 0 + \omega_x \cdot 1 - \omega_y \cdot 2 & -2 &= 0 + \omega_x \cdot 0 - \omega_y \cdot 2 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Rezolvând sistemul (3) în necunoscutele ω_x , ω_y , ω_z, rezultă:

$$\begin{gathered} \omega_x = -2\, rad/s, \qquad \omega_y = 1\, rad/s, \qquad \omega_z = 2\, rad/s, \\ \overline{\omega} = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k} \ . \end{gathered} \tag{4}$$

Modulul vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$, luând în considerare (4), este:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 3 \quad rad/s. \tag{5}$$

Viteza minimă $\overline{v}_{\min}$ se determină cu relaţia (13.10) şi anume $\overline{v}_{\min} = \dfrac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}}{\omega} \overline{u}$, relaţie în care $\overline{u} = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$ este versorul axei instantanee a mişcării elicoidale, iar $\overline{v}$ este viteza instantanee a unui punct aparţinând rigidului (de exemplu, viteza punctului A). Astfel,

$$\overline{v}_{\min} = \frac{\overline{\omega} \cdot \overline{v}_A}{\omega^2} \overline{\omega} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4)}{9} \left(-2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}\right)$$

$$\overline{v}_{\min} = -\frac{8}{9}\left(-2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}\right) = -\frac{8}{9}\overline{\omega}. \tag{6}$$

În conformitate cu (13.13), ecuaţia axei instantanee a mişcării elicoidale este:

$$\frac{x - \dfrac{\omega_y v_{oz} - \omega_z v_{oy}}{\omega^2}}{\omega_x} = \frac{y - \dfrac{\omega_z v_{ox} - \omega_x v_{oz}}{\omega^2}}{\omega_y} = \frac{z - \dfrac{\omega_x v_{oy} - \omega_y v_{ox}}{\omega^2}}{\omega_z}. \tag{7}$$

Introducând (4), (5) şi componentele vitezei $\overline{v}_0$ în (7), rezultă:

$$\frac{x + \dfrac{4}{9}}{-2} = y - \frac{2}{3} = \frac{z - \dfrac{1}{9}}{2}, \tag{8}$$

sistem din care se obține succcesiv:

$$x+2y=\frac{8}{9};\quad 2y-z=\frac{11}{9}. \tag{9}$$

Relaţiile (9) reprezintă ecuaţiile a două plane care prin intersecţie dau *axa instantanee* a mişcării elicoidale.

13.2.6. În mişcarea generală a unui solid rigid să se arate că, există un punct a cărui acceleraţie este nulă. Distribuţia acceleraţiilor este aceeaşi ca şi cum solidul s-ar roti în jurul acestui punct cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}=\dot{\overline{\omega}}$.

Soluţie:

Expresia acceleraţiei unui punct M $\left(\overline{OM}=\overline{r}\right)$ aparţinând unui solid aflat în mişcare generală este, conform cu 13.15:

$$\overline{a}=\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{r}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right). \tag{1}$$

Dacă P este punctul de acceleraţie nulă, determinarea acestui punct presupune rezolvarea ecuaţiei vectoriale în necunoscuta $\overline{r}_P$ scrisă sub forma:

$$\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{r}_P+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}_P\right)=0. \tag{2}$$

Dacă se consideră vectorul $\overline{r}_P$ descompus după vectorii necoplanari şi concurenţi $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ şi $\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}$, expresia lui poate fi scrisă astfel:

$$\overline{r}_P=\lambda_1\overline{\omega}+\lambda_2\overline{\varepsilon}+\lambda_3\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}. \tag{3}$$

Înlocuind $\overline{r}_P$ în ecuaţia vectorială (2) şi proiectând această relaţie pe direcţiile vectorilor $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ şi $\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}$, se obţine sistemul:

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\begin{aligned}&(\overline{\omega}\cdot\overline{\varepsilon})\lambda_2+\varepsilon^2\lambda_3=-a_0^1\\&\omega^2\lambda_2+(\overline{\omega}\cdot\overline{\varepsilon})\lambda_3=-a_0^2\\&\lambda_1+\omega^2\lambda_3=-a_0^3.\end{aligned}\tag{4}$$

În sistemul (4) a_0^1, a_0^2 şi a_0^3 sunt scalarii rezultaţi din descompunerea vectorului $\overline{a}_0$ după direcţiile vectorilor $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ şi $\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}$.

Sistemul (4) este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Pentru ca sistemul (4) să fie compatibil, trebuie ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie diferit de zero:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & \overline{\omega}\cdot\overline{\varepsilon} & \varepsilon^2\\ 0 & \omega^2 & \overline{\omega}\cdot\overline{\varepsilon}\\ 1 & 0 & \omega^2\end{vmatrix}=(\overline{\omega}\cdot\overline{\varepsilon})^2-\omega^2\varepsilon^2=-(\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon})^2\neq 0\tag{5}$$

Întrucât, la mişcarea generală viteza unghiulară $\overline{\omega}$ variază ca modul şi direcţie, acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}$ nu poate fi coliniară cu $\overline{\omega}$. Astfel, determinantul Δ este diferit de zero şi în consecinţă, sistemul (4) este compatibil având o soluţie unică dată de valorile necunoscutelor scalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Introducând aceste valori în (3), se obţine vectorul de poziţie $\overline{r}_P$ al punctului P a cărui acceleraţie instantanee este nulă.

Raportând distribuţia de acceleraţii din cazul mişcării generale la punctul P de acceleraţie nulă, punct numit pol al acceleraţiilor, se obţine o distribuţie de acceleraţii specifică mişcării sferice, ca şi când rigidul ar avea ca punct fix polul acceleraţiilor.

Acceleraţia unui punct oarecare M al rigidului se poate exprima în acest caz astfel:

$$\overline{a}=\overline{\varepsilon}\times\overline{PM}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{PM}\right).\tag{6}$$

13.3 Probleme propuse

13.3.1. Să se determine sistemul de ecuaţii scalare din care se deduc la un moment dat coordonatele *x, y* şi *z* ale polului acceleraţiilor în cazul mişcării generale a solidului rigid.

Răspuns:

$$\begin{aligned}
\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right)x-\left(\omega_x\omega_y-\varepsilon_z\right)y-\left(\omega_z\omega_x+\varepsilon_y\right)z&=a_{0x}\\
-\left(\omega_x\omega_y+\varepsilon_z\right)x+\left(\omega_z^2+\omega_x^2\right)y-\left(\omega_y\omega_z-\varepsilon_x\right)z&=a_{0y}\\
-\left(\omega_z\omega_x-\varepsilon_y\right)x-\left(\omega_z\omega_y+\varepsilon_x\right)y+\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)z&=a_{0z}
\end{aligned}$$

13.3.2. Să se determine locul geometric al punctelor aparţinând unui rigid în mişcare generală pentru care acceleraţia este perpendiculară pe axa instantanee a mişcării elicoidale (fig. 13.8).

Răspuns:

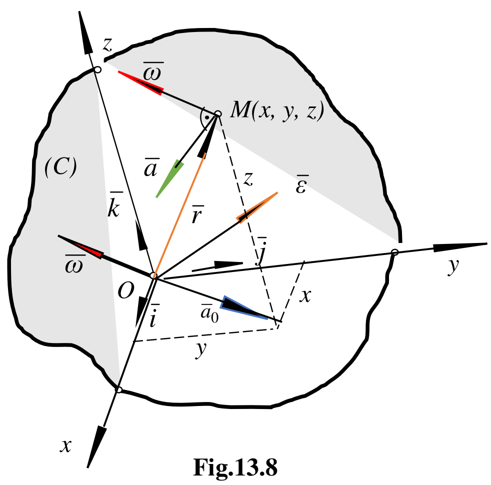


Fig.13.8

$$\left(\varepsilon_z\omega_y-\varepsilon_y\omega_z\right)x+\left(\varepsilon_x\omega_z-\varepsilon_z\omega_x\right)y+\left(\varepsilon_y\omega_x-\varepsilon_x\omega_y\right)z+\left(a_{0_x}\omega_x+a_{0_y}\omega_y+a_{0_z}\omega_z\right)=0$$

13.3.3. Să se determine locul geometric al punctelor aparţinând unui solid rigid în mişcare generală pentru care acceleraţia este paralelă cu axa instantanee a mişcării elicoidale. Se presupune că, axa *Oz* a sistemului *Oxyz* coincide cu suportul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ (fig. 13.9.)

Răspuns:

$$\begin{cases} \omega^2 x + \varepsilon_z y - \varepsilon_y z = 0 \\ \varepsilon_z x - \omega^2 y + \varepsilon_x z = 0. \end{cases}$$

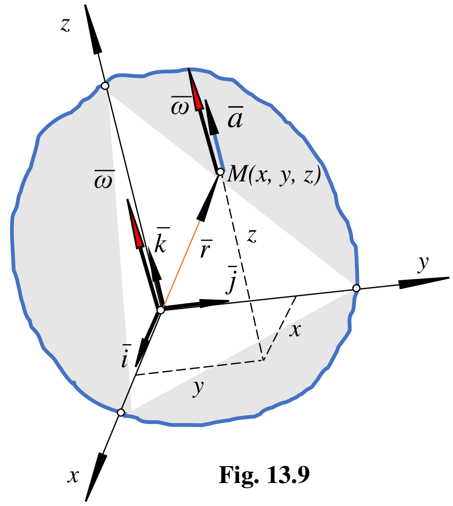


Fig. 13.9

13.3.4. Se presupune un solid rigid aflat în mişcare generală la care se cunosc la un moment dat parametrii cinematici: $\overline{a}_0, \overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$. Să se determine locul geometric al punctelor rigidului care la momentul considerat au acceleraţiile perpendiculare pe suportul vectorului acceleraţie unghiulară.

Răspuns: Ecuaţia locului geometric devine:

$$\overline{a}_0 \cdot \overline{\varepsilon} + (\overline{\omega} \cdot \overline{r})(\overline{\omega} \cdot \overline{\varepsilon}) - \omega^2 \overline{r} \cdot \overline{\varepsilon} = 0 .$$

13.3.5. În cazul unui solid rigid care efectuează o mişcare generală, să se determine locul geometric al punctelor rigidului care au acceleraţia $\overline{a}$ paralelă cu vectorul acceleraţie unghiulară $\overline{\varepsilon}$. Determinarea respectivului loc geometric se va face în ipoteza ca axa *Oz* a sistemului de referinţă mobil solidar cu rigidul, este suprapusă peste suportul vectorului $\overline{\varepsilon}$.

Răspuns: Locul geometric este o dreaptă de ecuaţii:

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \omega_x \omega_y) x - (\omega_z^2 + \omega_x^2) y + \omega_y \omega_z z - a_{0y} &= 0 \\ (\omega_y^2 + \omega_z^2) x + (\varepsilon - \omega_x \omega_y) y - \omega_z \omega_x z - a_{0x} &= 0 \end{aligned} .$$

B. MIŞCAREA ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINŢĂ MOBIL

14. MIŞCAREA RELATIVĂ [9]

14.1 Mişcarea relativă a punctului

14.1.1 Consideraţii teoretice

14.1.1.1 Introducere. Definiţii

În capitolele precedente s-a analizat mişcarea unui punct material şi a unui solid rigid în raport cu un sistem de referinţă presupus fix. În tehnică se întâlnesc frecvent cazuri *în care mişcarea trebuie raportată la un sistem de referinţă care se află în mişcare faţă de un sistem fix*. În aceste cazuri, se pune problema să se determine parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea punctului sau a solidului rigid în raport cu sistemul de referinţă fix, atunci când se cunosc parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea punctului sau a rigidului în raport cu sistemul de referinţă mobil şi parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea sistemului de referinţă mobil în raport cu sistemul fix. Astfel, se analizează mişcarea relativă a unui punct material sau a unui solid rigid.

În cadrul ***mişcării relative a punctului*** intervin următoarele noţiuni importante:

a) ***mişcarea absolută*** care este mişcarea punctului în raport cu sistemul de referinţă fix. În această mişcare traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului se numesc *traiectorie, viteză şi acceleraţie absolută* $(\Gamma_a, \bar{v}_a, \bar{a}_a)$;

b) ***mişcarea relativă*** definită ca mişcarea punctului în raport cu sistemul de referinţă mobil. În această mişcare traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului se numesc *traiectorie, viteză şi acceleraţie relativă* $(\Gamma_r, \bar{v}_r, \bar{a}_r)$;

c) ***mişcarea de transport*** este mişcarea punctului legat invariabil de sistemul de referinţă mobil în raport cu sistemul de referinţă fix, care în momentul respectiv coincide cu punctul a cărui mişcare se studiază. De fapt, această mişcare îi rămâne punctului după suspendarea mişcării relative. În această mişcare traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului se numesc *traiectorie, viteză şi acceleraţie de transport* $(\Gamma_t, \bar{v}_t, \bar{a}_t)$.

Fie *M* un punct în mişcare şi trei sisteme carteziene de referinţă, respectiv sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$, sistemul mobil *Oxyz* care efectuează o mişcare generală oarecare şi sistemul mobil $Ox'y'z'$, care efectuează o mişcare de translaţie astfel încât, axele sale rămân permanent paralele cu axele sistemului fix (fig. 14.1).

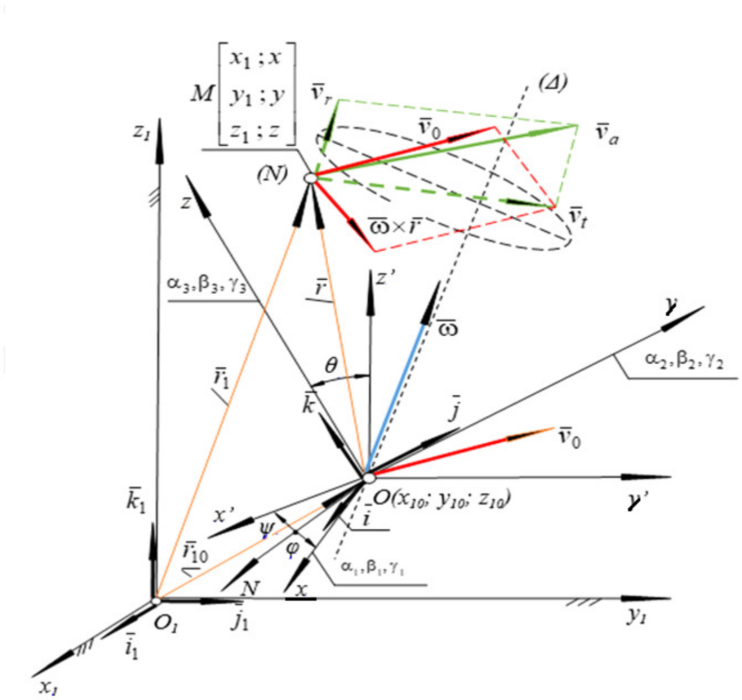


Fig. 14.1

În studiul ce urmează se notează:

$\bar{r}(x, y, z)$ – vectorul de poziţie al punctului M în raport cu originea O a sistemului de referinţă mobil;

$\bar{r}_{10}(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ – vectorul de poziţie al punctului O în raport cu originea O_1 a sistemului de referinţă fix;

$\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ – vectorul de poziţie al punctului M în raport cu originea O_1 a sistemului de referinţă fix;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – cosinusurile directoare ale axelor sistemului mobil în raport cu axele sistemului fix;

ψ, φ, θ – unghiurile lui Euler corespunzătoare sistemelor carteziene $Oxyz$ şi $O_1x_1y_1z_1$;

N – punctul solidar legat de sistemul mobil $Oxyz$, care coincide cu punctul M la momentul considerat (t).

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Între vectorii de poziţie $\bar{r}_1, \bar{r}_{10}$ şi $\bar{r}$, conform figurii 14.1, există relaţia:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r}, \tag{14.1}$$

Relația (14.1) proiectată pe axele sistemului cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ conduce la:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y_1 &= y_{10} + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z_1 &= z_{10} + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Se presupune că, se cunosc *ecuaţiile parametrice ale mişcării relative a punctului M:*

$$x = x(t)\ ; \quad y = y(t)\ ; \quad z = z(t)\ , \tag{14.3}$$

precum şi ecuaţiile parametrice ale mişcării de transport a sistemului mobil $Oxyz$:

$$\begin{aligned} &x_{10} = x_{10}(t); \quad y_{10} = y_{10}(t); \quad z_{10} = z_{10}(t) \\ &\psi = \psi(t); \ \varphi = \varphi(t); \ \theta = \theta(t). \end{aligned} \tag{14.4}$$

În conformitate cu relaţiile (14.3) stabilite în paragraful 14.1.1, se pot exprima cosinusurile directoare $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \ (i = 1,2,3)$ ale axelor sistemului de referinţă mobil $Oxyz$ în raport cu sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ în funcţie de unghiurile lui Euler. Introducând ecuaţiile funcţie de timp $\psi(t), \varphi(t), \theta(t)$ din (14.4) în relaţiile (14.3), se obţin funcţiile de timp $\alpha_i(t); \beta_i(t); \gamma_i(t), (i = 1,2,3)$, care împreună cu funcţiile de timp $x_{10}(t), y_{10}(t), z_{10}(t)$ din relaţiile (14.4) şi $x(t), y(t), z(t)$ din (14.3), se înlocuiesc în (14.2) pentru ca, în final, să se obţină *ecuaţiile parametrice ale mişcării absolute ale punctului M:*

$$x_1 = x_1(t); \ \ y_1 = y_1(t); \ \ z_1 = z_1(t)\,. \tag{14.5}$$

Relaţiile (14.2), respectiv (14.3), în ipoteza că x = const., y = const., z = const. reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului N presupus a fi legat invariabil de sistemul de referinţă mobil şi care coincide la momentul respectiv cu punctul M, deci sunt *ecuaţiile parametrice ale traiectoriei de transport* (Γ_t).

14.1.1.2 Compunerea vitezelor

În figura 14.1 s-a reprezentat punctul caracteristic *M* şi cele două sisteme de referinţă carteziene, respectiv $O_1x_1y_1z_1$ şi *Oxyz*. Câmpul vitezelor corespunzătoare mişcării de transport este determinat prin viteza $\overline{v}_0$ a polului de referinţă mobil şi caracterizează mişcarea de translaţie, precum şi prin vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$, care caracterizeză componenta de rotaţie a mişcării de transport.

Legea de compunere a vitezelor în cazul mişcării relative a punctului se obţine prin derivarea relaţiei vectoriale (14.1) în raport cu timpul, având în vedere că:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\,. \tag{14.6}$$

Derivata vectorului de poziţie $\overline{r}$, provenind din variaţia acestuia faţă de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$, are expresia:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{r} + \frac{\partial\overline{r}}{\partial t}. \tag{14.7}$$

Primul membru din relaţia (14.7) reprezintă *derivată totală* în raport cu timpul a vectorului $\overline{r}$ şi se numeşte *derivată absolută*, în timp ce ultimul termen notat cu $\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k}$, poartă numele de *derivată locală* sau *derivată relativă* a vectorului $\overline{r}$. Se poate spune că,

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} = \dot{x}\overline{\imath} + \dot{y}\overline{\jmath} + \dot{z}\overline{k}$$

exprimă viteza absolută a punctului *M* , în ipoteza că polul *O* ar fi fix și, deci, sistemul *Oxyz* ar executa, în acest caz, numai componenta de rotaţie a mişcării de transport cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$.

În urma derivării relaţiei (14.1), se obţine:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_0 + \overline{\omega}\times\overline{r} + \frac{\partial\overline{r}}{\partial t}. \tag{14.8}$$

În relaţia (14.8) vectorii $\overline{v}_0 + \overline{\omega}\times\overline{r} = \overline{v}_t$ reprezintă *viteza de transport* a punctului *N*, iar $\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} = \overline{v}_r$ reprezintă *viteza relativă* a punctului *M*.

Astfel, relaţia (14.8) de compunere a vitezelor în cadrul mişcării relative a punctului poate fi scrisă sub forma:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t \quad . \tag{14.9}$$

Conform cu (14.9), în mişcarea relativă a punctului material *viteza absolută a unui punct material este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă şi viteza de transport.*

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

14.1.1.3 Compunerea acceleraţiilor

În figura 14.2 s-au notat cu $\overline{v}_0, \overline{\omega}, \overline{a}_0, \overline{\varepsilon}$ parametrii cinematici ce definesc câmpul vitezelor şi al acceleraţiilor corespunzătoare mişcării de transport a sistemului *Oxyz*.

Dacă se derivează vectorial în raport cu timpul relaţia (14.8) şi se ţine seama că vectorii $\overline{r}$ şi $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial t}$ sunt variabili ca modul şi direcţie, deci li se aplică regula de derivare (14.7), se obţine:

$$\overline{a}_a = \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial t^2} + \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) + 2\overline{\omega} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial t}. \tag{14.10}$$

În relaţia (14.10), vectorul $\dfrac{\partial^2 \overline{r}}{\partial t^2} = \overline{a}_r$ - reprezintă derivata locală (relativă) a vectorului viteză relativă $\overline{v}_r$, deci este ***acceleraţia relativă*** a punctului *M*;

- expresia vectorială:

$$\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{a}_t \tag{14.11}$$

reprezintă acceleraţia punctului *N* legat invariabil de sistemul de referinţă mobil şi care coincide la momentul considerat cu punctul *M*, deci este ***acceleraţia de transport;***

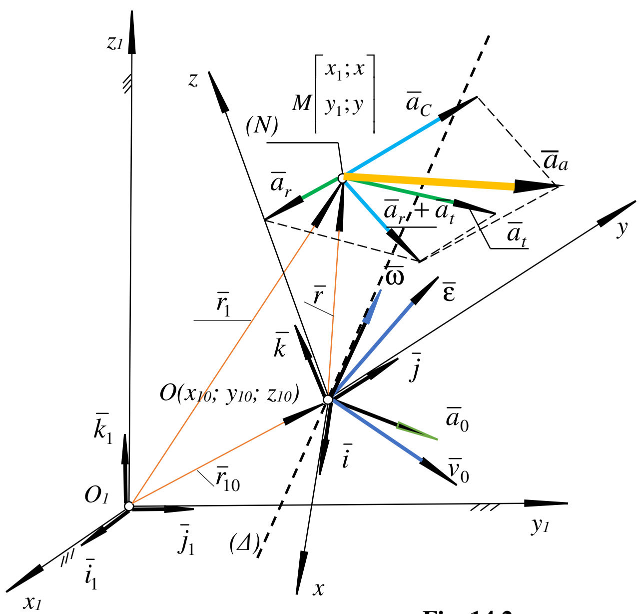


Fig. 14.2

- expresia vectorială (14.12) poartă numele de ***accelerație complementară*** sau ***accelerație Coriolis*.**

$$2\overline{\omega}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial t}=2\overline{\omega}\times\overline{v}_r=\overline{a}_c \quad . \tag{14.12}$$

Cu aceste precizări relaţia (14.10) ajunge la forma:

$$\overline{a}_a=\overline{a}_r+\overline{a}_t+\overline{a}_c \, . \tag{14.13}$$

Conform cu (14.13), *accelerația absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis.* Expresia (14.13) reprezentată grafic în figura 14.2 reprezintă *teorema lui Coriolis* sau *legea de compunere a accelerațiilor în mişcarea relativă a punctului*.

Acceleraţia Coriolis are, conform cu (14.12), direcţia perpendiculară pe planul format de vectorii $\overline{\omega}$ şi $\overline{v}_r$, sensul dat de regula produsului vectorial, iar modulul:

$$|\overline{a}_C|=2\omega v_r sin(\widehat{\overline{\omega},\overline{v}_r}) \quad . \tag{14.14}$$

De menționat că, accelerația complementară $\overline{a}_c$ **se anulează în trei cazuri**:

a) $\overline{\omega}=0$ - În acest caz mişcarea de transport a sistemului mobil *Oxyz* se reduce la o mişcare de translaţie.

b) $\overline{v}_r=0$ - În acest caz, punctul *M* este invariabil legat de sistemul *Oxyz*, deci nu există mişcare relativă.

c) $\overline{\omega}=\lambda\,\overline{v}_r$ - În acest caz viteza relativă este paralelă cu vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$.

14.2 MIŞCAREA RELATIVĂ A SOLIDULUI RIGID

14.2.1 Consideraţii teoretice

În cadrul cinematicii rigidului s-a studiat mişcarea solidului rigid în raport cu un sistem de referinţă fix, analizând distribuţia de viteze şi acceleraţii pentru mişcările particulare şi generală a rigidului. În cele ce urmează se analizează mişcarea solidului rigid raportat la un sistem de referinţă mobil.

Fie T_0 un sistem de referinţă considerat fix şi $T_1, T_2, ... T_n$, sunt *"n"* sisteme de referinţă mobile dintre care sistemul T_n este solidar cu solidul rigid *(C)*. Cunoscând

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

mişcarea solidului rigid în raport cu sistemul de referinţă mobil T_{n-1}, precum şi mişcările sistemele de referinţă mobile: T_{n-1} faţă de T_{n-2}, T_{n-2} faţă de T_{n-3}, ..., T_1 faţă de T_0, se cer să se determine legile de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor ale solidului rigid în raport cu sistemul de referinţă presupus fix.

Pentru a determina legile de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor în cadrul mişcării relative a solidului rigid, se va trata la început cazul când există numai două sisteme de referinţă mobile şi unul fix, urmând apoi a se generaliza rezultatele pentru cazul a "*n*" sisteme de referinţă.

În figura 14.3 a fost reprezentat rigidul *(C)* care execută *o mişcare generală* şi trei sisteme de referinţă carteziene: sistemul fix $T_0(O_0\ x_0\ y_0\ z_0)$, sistemul $T_1(O_1\ x_1\ y_1\ z_1)$ care execută o mişcare generală independentă de mişcarea solidului rigid şi sistemul mobil $T_2(O_2 x_2\ y_2\ z_2)$ legat invariabil de rigidul *(C)*.

S-au notat prin $(\overline{v}_{10}, \overline{\omega}_{10})$, respectiv $(\overline{a}_{10}, \overline{\varepsilon}_{10})$, parametrii cinematici care determină câmpul vitezelor şi al acceleraţiilor în cazul mişcării de transport a sistemului (T_1) faţă de sistemul (T_0) şi cu $(\overline{v}_{21}, \overline{\omega}_{21})$, respectiv $(\overline{a}_{21}, \overline{\varepsilon}_{21})$, parametrii cinematici care determină câmpul vitezelor şi al acceleraţiilor în cazul mişcării relative generale a reperului (T_2) şi al rigidului *(C)* faţă de sistemul (T_1).

Fie $\overline{r}_2$ vectorul de poziţie al unui punct *M* al rigidului în raport cu originea O_2 a sistemului (T_2) şi $\overline{r}_1$ vectorul de poziţie al unui punct *N* legat invariabil de sistemul de referinţă mobil (T_1), care coincide cu punctul *M* la momentul considerat (*t*), în raport cu originea O_1 a sistemului de referinţă (T_1).

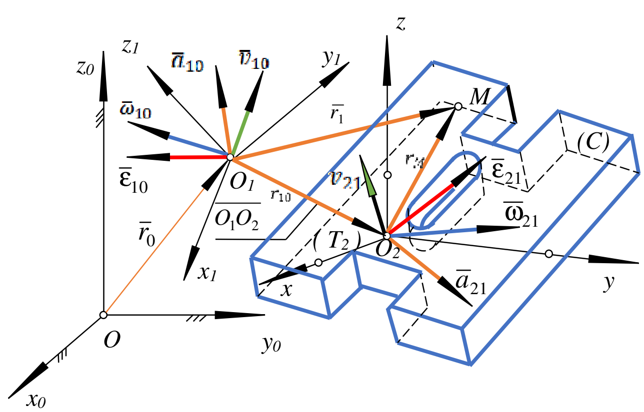


Fig. 14.3

14.2.2 Compunerea vitezelor

Solidul rigid *(C),* materializat printr-un obiect manipulat de către un robot, execută o mişcare relativă generală în raport cu sistemul (T_1), caracterizată de vectorii $\overline{v}_{21}$, $\overline{\omega}_{21}$, prin prisma vitezelor, astfel încât viteza relativă a punctului *M* aparţinând rigidului, în baza relaţiei (14.6), are expresia:

$$\overline{v}_r = \overline{v}_{21} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{r}_2 \ . \tag{14.15}$$

Considerând punctul *N* legat invariabil de sistemul (T_1), care coincide la momentul (t) cu punctul *M*, viteza de transport $\overline{v}_t$ a punctului *N* provenită din mişcarea generală de transport a sistemului (T_1) faţă de sistemul (T_0), are conform cu (14.6), expresia:

$$\overline{v}_t = \overline{v}_{10} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{r}_1 . \tag{14.16}$$

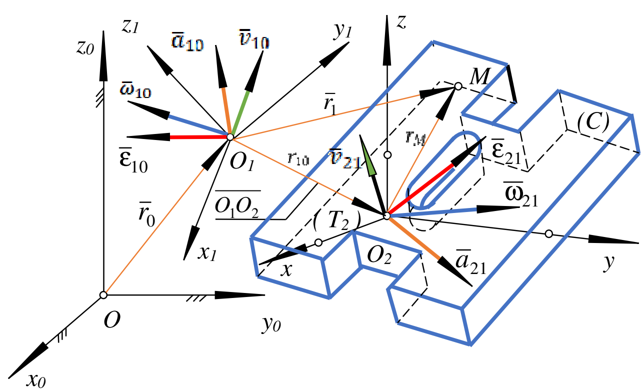


Fig. 14.3

Folosind legea de compunere a vitezelor (14.9) din cazul mişcării relative a punctului, rezultă *legea de compunere a vitezelor în mişcarea absolută a rigidului* faţă de reperul fix (T_0),

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{10} + \overline{v}_{21} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{r}_1 + \overline{\omega}_{21} \times \overline{r}_2 \tag{14.17}$$

$$\overline{v}_a = \sum_{i=1}^{2} \overline{v}_{i,\,i-1} + \sum_{i=1}^{2} \overline{\omega}_{i,\,i-1} \times \overline{r}_i \ . \tag{14.18}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Relaţia vitezelor (14.18) poate fi generalizată pentru cazul unui număr de n sisteme mobile (T_i) $(i=1, 2,\ldots n)$, dintre care sistemul (T_n) este solidar legat de solidul rigid *(C)* (fig. 14.4). În figură se notează cu $\left(\overline{v}_{i,\,i-1}, \overline{\omega}_{i,\,i-1}\right)$ parametrii cinematici ce caracterizează distribuţia vitezelor în cazul mişcării sistemului (T_i) faţă de sistemul (T_{i-1}) $(i=1, 2, \ldots, n)$. Viteza relativă a punctului M aparţinând rigidului *(C)*, conform cu (14.6), provenită din mişcarea generală a rigidului faţă de sistemul (T_{n-1}), are expresia:

$$\overline{v}_r = \overline{v}_{n,\,n-1} + \overline{\omega}_{n,\,n-1} \times \overline{r}_n . \tag{14.19}$$

Exprimând viteza faţă de sistemul de referinţă fix (T_0) a unui punct N solidar legat de sistemul de referinţă (T_{n-1}), care în momentul considerat (t) coincide cu punctul M, se obţine *legea de distribuţie a vitezelor de transport*.

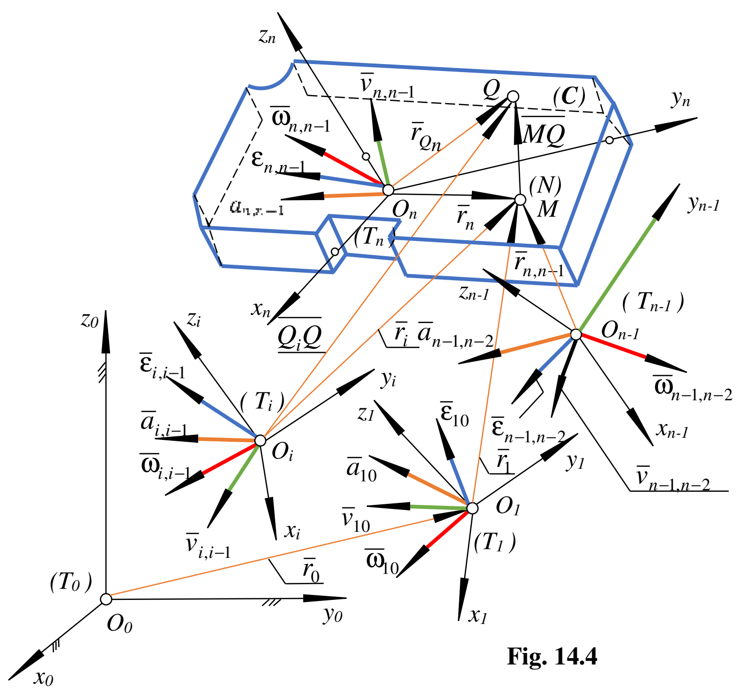


Fig. 14.4

Această lege de distribuţie ar reprezenta viteza absolută a punctului M în cazul existenţei unui număr de "$n-1$" sisteme mobile (T_i) $(i=1, 2, 3, \ldots, n-1)$, astfel că, în baza relaţiei (14.18), se poate scrie:

$$\overline{v}_t = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{v}_{i,\,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{\omega}_{i,\,i-1} \times \overline{r}_i \ . \tag{14.20}$$

Introducând (14.19) şi (14.20) în (14.9), se obţine *legea de compunere a vitezelor în cazul mişcării relative a solidului rigid (C):*

$$\overline{v}_a = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_{i,\,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{i,\,i-1} \times \overline{r}_i \, , \tag{14.21}$$

relaţie care exprimă *viteza absolută a unui punct oarecare M* aparţinând rigidului.

Utilizând relaţia vectorială (14.7) se poate determina *viteza unghiulară absolută* $\overline{\omega}_{na}$ a rigidului *(C)* faţă de sistemul fix (T_0). Astfel, se poate scrie:

$$\overline{\omega}_{na} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{i,\,i-1} \, . \tag{14.22}$$

Conform cu (14.22), *viteza unghiulară absolută* rezultată din mişcarea rigidului faţă de sistemul fix, *este suma vectorială a vitezelor unghiulare relative ale mişcărilor componente.*

14.2.3 Compunerea acceleraţiilor

În figura 14.3 s-au notat cu $(\overline{a}_{21}, \overline{\omega}_{21}, \overline{\varepsilon}_{21})$ parametrii cinematici care determină *câmpul acceleraţiilor în cazul mişcării generale relative a sistemului* (T_2) şi a rigidului faţă de reperul (T_1).

Acceleraţia relativă $\overline{a}_r$ a punctului *M* aparţinând rigidului *(C),* în baza relaţiei (14.14), are expresia:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_{21} + \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{r}_2 + \overline{\omega}_{21} \times (\overline{\omega}_{21} \times \overline{r}_2) \ . \tag{14.23}$$

De asemenea, în figura 14.3 s-au notat cu $(\overline{a}_{10}, \overline{\omega}_{10}, \overline{\varepsilon}_{10})$ parametrii cinematici care determină câmpul acceleraţiilor în cazul mişcării de transport a sistemului *(T_1)* faţă de sistemul *(T_0).*

Acceleraţia de transport $\overline{a}_t$ a punctului *N* solidar cu sistemul *(T_1),* provenită din mişcarea generală de transport a acestuia faţă de sistemul *(T_0)* are, în baza aceleiaşi relaţii (14.14), expresia:

$$\overline{a}_t = \overline{a}_{10} + \overline{\varepsilon}_{10} \times \overline{r}_1 + \overline{\omega}_{10} \times (\overline{\omega}_{10} \times \overline{r}_1) . \tag{14.24}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Accelerația complementară Coriolis, în baza relațiilor (14.12) și (14.15), are expresia:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_{10} \times \left(\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2\right). \tag{14.25}$$

Folosind legea de compunere a accelerațiilor (14.13) din cazul mișcării relative a punctului, rezultă legea de compunere a accelerațiilor în mișcarea absolută a rigidului față de sistemul fix *(T_0):*

$$\begin{aligned} \bar{a}_a = \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{10} \times \left(\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1\right) + \\ + \bar{\omega}_{21} \times \left(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2\right) + 2\bar{\omega}_{10} \times \left(\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2\right) \end{aligned} \tag{14.26}$$

sau, sub o formă generală:

$$\bar{a}_a = \sum_{i=1}^{2} \left[\bar{a}_{i,i-1} + \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \left(\bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i\right) + 2\bar{\omega}_{i-1,i-2} \times \left(\bar{v}_{i,i-1} + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i\right)\right]. \tag{14.27}$$

Relația de compunere a accelerațiilor (14.27) poate fi generalizată pentru cazul a "*n*" sisteme mobile *(T_i) ($i=1, 2, \ldots, n$)*, dintre care ultimul *(T_n)* este solidar legat de rigidul *(C),* aflat în mișcare generală (fig. 14.4). Se notează cu $\bar{a}_{i,i-1}$, $\bar{\omega}_{i,i-1},$ $\bar{\varepsilon}_{i,i-1}$ parametrii cinematici care determină câmpul accelerațiilor în cazul mișcării sistemului *(T_i)* față de sistemul *(T_{i-1})*. Accelerația relativă a punctului *M* aparținând rigidului *(C),* provenită din mișcarea acestuia față de sistemul *(T_{n-1})* are, conform cu (14.14), expresia:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{n,n-1} + \bar{\varepsilon}_{n,n-1} \times \bar{r}_n + \bar{\omega}_{n,n-1} \times \left(\bar{\omega}_{n,n-1} \times \bar{r}_n\right). \tag{14.28}$$

Accelerația de transport $\bar{a}_t$ a punctului *N,* solidar legat de sistemul $\left(T_{n-1}\right)$, provenită din mișcarea de transport a acestuia față de sistemul $\left(T_0\right)$, se scrie, în baza relației (14.14), astfel:

$$\bar{a}_t = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\bar{a}_{i,i-1} + \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \left(\bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i\right)\right] + 2\sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \left(\bar{v}_{i,i-1} + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i\right). \tag{14.29}$$

Această lege de distribuție a accelerațiilor ar reprezenta accelerația absolută a punctului *M* în cazul existenței unui număr de "*n* –*1*" sisteme mobile *(T_i) ($i=1, 2, \ldots, n-1$).*

Accelerația complementară Coriolis are, în baza relațiilor (14.12) și (14.19), expresia:

$$\overline{a}_c = 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\omega}_{j,j-1}\right) \times \left(\overline{v}_{n,n-1} + \overline{\omega}_{n,n-1} \times \overline{r}_n\right). \tag{14.30}$$

În relația (14.30) viteza unghiulară de transport $\overline{\omega}_{it}$, corespunzătoare componentei de rotație a mișcării sistemului (T_{i-1}) față de sistemul (T_0), are expresia:

$$\overline{\omega}_{it} = \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_{j,j-1} \;\; (i=1,2,\ldots,n). \tag{14.31}$$

Introducând (14.28), (14.29) și (14.30) în relația de compunere a accelerațiilor (14.13), se obține *legea de compunere a accelerațiilor în cazul mișcării relative a solidului rigid:*

$$\overline{a}_a = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{a}_{i,i-1} + \overline{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overline{r}_i + \overline{\omega}_{i,i-1} \times \left(\overline{\omega}_{i,i-1} \times \overline{r}_i\right)\right] + 2\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \overline{\omega}_{j,j-1} \times \left(\overline{v}_{i,i-1} + \overline{\omega}_{i,i-1} \times \overline{r}_i\right). \tag{14.32}$$

Accelerația unghiulară $\overline{\varepsilon}_{na}$ corespunzătoare componentei de rotație a mișcării absolute a solidului rigid *(C)* și a sistemului (T_n) față de sistemul (T_0), se obține derivând în raport cu timpul expresia (14.22) a vitezei unghiulare $\overline{\omega}_{na}$, corespunzătoare aceleiași mișcări absolute. Astfel,

$$\overline{\varepsilon}_{na} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \overline{\omega}_{j,j-1} \times \overline{\omega}_{i,i-1}\,. \tag{14.33}$$

Expresia (14.33) arată că, *accelerația unghiulară absolută se obține prin însumarea accelerațiilor unghiulare relative cu o accelerație complementară, ea fiind egală cu suma produselor vectoriale dintre vitezele unghiulare astfel ca primul factor să aibă indice inferior factorului al doilea.*

Relațiile (14.22), (14.32) și (14.33) exprimă parametrii cinematici ce caracterizează distribuția de accelerații în cazul mișcării absolute a unui rigid.

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

14.3 Probleme rezolvate [9]

14.3.1. Un punct M descrie dreapta (Δ) cu viteza constantă c, în timp ce dreapta (Δ) se roteşte în planul său în jurul capătului O cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 14.5). Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului M într-o poziţie oarecare, precum şi raza de curbură a traiectoriei.

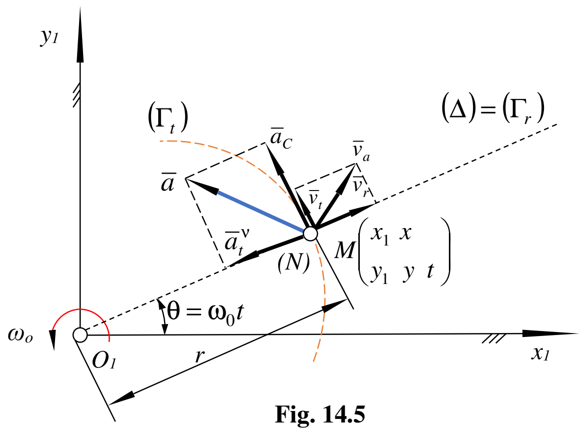


Fig. 14.5

Soluţie:

a) Traiectoria punctului M

În conformitate cu enunţul problemei, se poate scrie:

$$v_r = \dot{r} = c. \tag{1}$$

Integrând (1), se obţine:

$$r = ct + C_1 \;. \tag{2}$$

Pentru condiţii iniţiale nule, adică $t_0 = 0$, $r_0 = 0$, rezultă constanta de integrare nulă $C = 0$.

Astfel, coordonatele polare ale punctului M sunt:

$$r = ct,\ \theta = \omega_0 t \;. \tag{3}$$

Eliminând parametrul (t) din (3), se obţine ecuaţia polară a traiectoriei:

$$r = \frac{c}{\omega_0}\theta \;, \tag{4}$$

care este ecuația *spiralei lui Arhimede*.

b) Viteza absolută a punctului M

În conformitate cu (14.5), viteza absolută a punctului *M* este:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t \,. \tag{5}$$

În relaţia (5) se pot face următoarele precizări, urmărind figura 14.11 şi enunţul problemei:

$$\overline{v}_r = \overline{c}, \;\; \overline{v}_r = c\cos\omega_0\, t\,\overline{i}_1 + c\sin\omega_0\, t\,\overline{j}_1, \; v_r = c. \tag{6}$$

Viteza $\overline{v}_t$ de transport este viteza rezultată din mişcarea de rotaţie împreună cu bara, a unui punct *(N)* aparţinând barei şi care la momentul (*t*) coincide cu punctul *M*, mişcare efectuată cu viteza unghiulară ω_0. Se poate scrie astfel:

$$v_t = \omega_0\, r, \quad \overline{v}_t = -\omega_0\, r\sin\omega_0\, t\,\overline{i}_1 + \omega_0\, r\cos\omega_0\, t\,\overline{j}_1 \,. \tag{7}$$

Având în vedere (6) şi (7), relaţia (5) devine:

$$\overline{v}_a = (c\cos\omega_0 t - \omega_0 r\sin\omega_0\, t)\overline{i}_1 + \left(c\sin\omega_0 t + \omega_0 r\cos\omega_0 t\right)\overline{j}_1 \,, \tag{8}$$

din care se obţine modulul vitezei absolute, având în vedere că, $\overline{v}_r \perp \overline{v}_t$

$$v_a = \sqrt{c^2 + \omega_0^2 r^2} = c\sqrt{1+\theta^2} \,. \tag{9}$$

c) Acceleraţia absolută a punctului M

În conformitate cu (14.13), se poate scrie:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_c \,. \tag{10}$$

În relaţia (1) se fac următoarele precizări:

$$\overline{a}_r = \dot{\overline{v}}_r = 0 \;\; (\overline{v}_r = \overline{c} = \overline{ct.})$$

$\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau}$, $a_t^{\nu} = \omega_0^2 r$, $\overline{a}_t^{\nu}$ - are sensul de la , *spre* MO_1M, $\overline{MO_1} \parallel \overline{r}$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$a_t^{\tau} = \varepsilon r = 0, \quad \varepsilon = \dot{\omega}_0 = 0 \tag{11}$$

$$\bar{a}_t = -\omega_0\, r\,(\cos\omega_0\, t\,\bar{i}_1 + \sin\omega_0\, t\,\bar{j}_1),\ a_t = \omega_0^2 r\ ,$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_0 \times \bar{v}_r = 2\omega_0 c\,(-\sin\omega_0\, t\,\bar{i}_1 + \cos\omega_0\, t\,\bar{j}_1),\ a_c = 2\omega_0 c.$$

Având în vedere (10) şi (11), acceleraţia absolută a punctului *M* are expresia:

$$\bar{a}_a = -\omega_0\left(\omega_0 r\cos\omega_0 t + 2c\sin\omega_0 t\right)\bar{i}_1 + \omega_0\,(-\omega_0 r\sin\omega_0 t + 2c\cos\omega_0 t)\,\bar{j}_1$$

$$a_a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \omega_0\sqrt{\omega_0^2 r^2 + 4c^2}\,. \tag{12}$$

d) Raza de curbură a traiectoriei

<u>1. Prima metodă</u>

Se cunoaşte din geometrie analitică expresia:

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)^{3/2}}{\dot{x}_1\ddot{y}_1 - \dot{y}_1\ddot{x}_1}. \tag{13}$$

Urmărind figura 14.5 şi relaţiile (3), se pot scrie ecuaţiile carteziene parametrice ale traiectoriei absolute a punctului *M* şi anume:

$$x_1 = ct\cos\omega_0\, t\,, \quad y_1 = ct\sin\omega_0\, t. \tag{14}$$

Derivând de două ori în raport cu timpul relaţiile (14), se obţin:

$$\dot{x}_1 = c\cos\omega_0\, t - \omega_0\, ct\sin\omega_0\, t,\ \dot{y}_1 = c\sin\omega_0\, t + \omega_0\, ct\cos\omega_0\, t\,,$$

$$\ddot{x}_1 = -\left(2\omega_0\, c\sin\omega_0\, t + \omega_0^2 ct\cos\omega_0\, t\right),\ \ddot{y}_1 = 2\omega_0 c\cos\omega_0\, t - \omega_0^2 ct\sin\omega_0\, t\,. \tag{15}$$

Introducând (15) în (13), se obţine raza de curbură a traiectoriei:

$$\rho = \frac{\left(c^2 + \omega_0^2 r^2\right)^{3/2}}{\omega_0\left(2c^2 + \omega_0^2 r^2\right)}. \tag{16}$$

2. *Metoda a doua*

Mişcarea absolută a punctului M fiind o mişcare curbilinie, se poate scrie acceleraţia absolută a punctului prin componentele sale intrinseci. Astfel,

$$\bar{a}_a = \bar{a}_a^{\nu} + \bar{a}_a^{\tau}, \quad a_a^{\upsilon} = \frac{v_a^2}{\rho}, \quad a_a^{\tau} = \dot{v}_a . \tag{17}$$

Având în vedere (17), raza de curbură a traiectoriei absolute a punctului M este:

$$\rho = \frac{v_a^2}{a_a^{\upsilon}} = \frac{v_a^2}{\sqrt{a_a^2 - \dot{v}_a^2}}. \tag{18}$$

Derivând în raport cu timpul relaţia (9) şi avînd în vedere (9) şi (12), relaţia (18) devine:

$$\rho = \frac{\left(c^2 + \omega_0^2 r^2\right)^{3/2}}{\omega_0\left(2c^2 + \omega_0^2 r^2\right)}. \tag{19}$$

14.3.2. Să se studieze mişcarea unui punct pe o dreaptă *(Δ)* care trece prin originea O_1 a sistemului cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$. Dreapta *(Δ)* se roteşte în acelaşi timp în jurul punctului O_1. Să se determine expresiile vitezei şi acceleraţiei punctului M (fig. 14.6).

Soluţie:

- *Mişcarea relativă* este mişcarea punctului M pe dreapta *(Δ)*.
- *Mişcarea de transport* este mişcarea de rotaţie cu axa *(Δ)* a unui punct N aparţinând dreptei *(Δ),* care coincide cu punctul M la un moment dat. Prin compunerea celor două mişcări se obţine *mişcarea absolută*.

a) Viteza absolută a punctului.

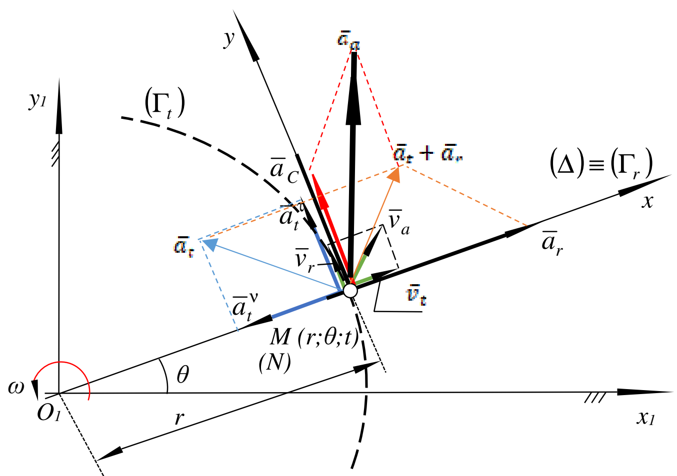


Fig. 14.6

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Conform cu (14.9), viteza absolută a punctului M este:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t \, . \tag{1}$$

În relaţia (1) se pot face precizările următoare:

$$v_r = \dot{r}, \; v_t = r\dot{\theta}, \; v_a = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \, . \tag{2}$$

b) Acceleraţia absolută a punctului.

Acceleraţia absolută a punctului se obţine, conform cu (14.13), din relaţia:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_c \, . \tag{3}$$

În relaţia (3) se fac următoarele precizări:

$a_r = \ddot{r}$, $\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\tau} + \overline{a}_t^{\nu}$, $\overline{a}_t^{\nu} \parallel \overline{MO_1}$, are sensul de la M spre O_1, $a_t^{\upsilon} = r\dot{\theta}^2$

$$a_t^{\tau} = r\ddot{\theta}, \; \overline{a}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r, \; a_C = 2\omega v_r = 2\dot{r}\dot{\theta} \, . \tag{4}$$

Alegând sistemele de referinţă, fix $O_1x_1y_1$ şi mobil Mxy ca în figură, se poate scrie:

$$\overline{a}_a = a_{ax}\overline{i} + a_{ay}\overline{j}, \; a_{ax} = a_r - a_t^{\nu} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \; a_{ay} = a_t^{\tau} + a_c = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},$$

$$a_a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2} \, . \tag{5}$$

Analizând relaţiile (2) şi (5), se observă că v_r şi v_t au expresiile componentelor polare v_ρ şi v_n ale vitezei punctului M, în timp ce a_{ax} şi a_{ay} au expresiile componentelor polare a_ρ şi a_n ale acceleraţiei punctului M.

14.3.3. Un punct M descrie cu o mişcare uniformă cu viteza unghiulară ω_0, periferia unui cerc de rază r, în acelaşi timp centrul cercului descrie o dreaptă perpendiculară pe planul cercului cu viteza constantă $\overline{u}$ (fig. 14.7). Se cer să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia absolută a punctului, precum şi raza de curbură a traiectoriei.

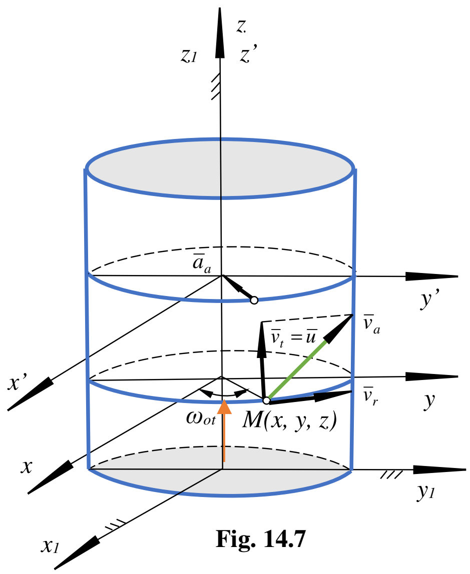


Fig. 14.7

Soluţie:

Traiectoria absolută a punctului *M* este o elice cilindrică dată de ecuaţiile parametrice:

$$x_1 = r\cos\omega_0 t\,; \quad y_1 = r\sin\omega_0 t\,;$$

$$z_1 = ut. \tag{1}$$

Mişcarea relativă este mişcarea punctului *M,* pe cercul de rază *r.* Mişcarea pe verticală cu viteza $\bar{u}$ a punctului *M,* presupus imobilizat pe cerc la un moment dat, reprezintă *mişcarea de transport*.

Viteza absoluta este, conform cu (14.9):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t\ . \tag{2}$$

În relaţia (2):

$$\bar{v}_r \perp \overline{OM}, \quad v_r = \omega_0 r, \quad \bar{v}_r = \omega_0 r(-\sin\omega_0 t\,\bar{i}_1 + \cos\omega_0 t\,\bar{j}_1),$$

$$v_t = u. \tag{3}$$

Astfel: $\bar{v}_a = -\omega_0 r\sin\omega_0 t\,\bar{i}_1 + \omega_0 r\cos\omega_0 t\,\bar{j}_1 + u\bar{k}_1\,,$ (4)

respectiv:

$$v_a = \sqrt{\omega_0^2 r^2 + u^2}\,.$$

Acceleraţia absolută, conform cu (14.13), este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C\ . \tag{5}$$

În relaţia (5) se fac următoarele precizări:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{\nu}\,, \quad a_r^{\tau} = \varepsilon_0 r = 0\,, \ (\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = 0)$$

$$\bar{a}_r^{\nu} \parallel \overline{MO}, \quad \bar{a}_r^{\nu} = -\omega_0^2 r(\cos\omega_0 t\,\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\,\bar{j}_1) \tag{6}$$

$$a_t = \dot{v}_t = \dot{u} = 0, \tag{7}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = 0 \tag{8}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

pentru că *mişcarea de transport* este o mişcare rectilinie ($\overline{\omega}_0 = 0$).
Introducând (6), (7) şi (8) în (5), rezultă:

$$\bar{a}_a = -\omega_0^2 r\left(\cos\omega_0 t\,\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\,\bar{j}_1\right)\,;\ a_a = \omega_0^2 r. \tag{9}$$

Pentru determinarea razei de curbură ρ se scriu următoarele relaţii:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_a^{\tau} + \bar{a}_a^{\nu},\ a_a = \sqrt{a_a^{\tau 2} + a_a^{\nu 2}}\,,\ a_a^{\tau} = \dot{v}_a,\ a_a^{\nu} = \frac{v_a^2}{\rho}. \tag{10}$$

Raza de curbură ρ se obţine din (10) şi are expresia:

$$\rho = \frac{v_a^2}{a_a^{\nu}} = \frac{v_a^2}{\sqrt{a_a^2 - \left(a_a^{\tau}\right)^2}}\ . \tag{11}$$

În relaţia (11): $\quad a_a^{\tau} = \dot{v}_a = 0$, întrucât $\ v_a = \sqrt{\omega_0^2 r^2 + u^2} = ct.$ (12)

Astfel, relaţia (11), ţinând cont de (4), (9) şi (12), devine:

$$\rho = \frac{v_a^2}{a_a} = \frac{\omega_0^2 r^2 + u^2}{\omega_0^2 r}. \tag{13}$$

14.3.4. Să se studieze mişcarea unui punct pe o dreaptă *(Δ)* paralelă cu *O₁x₁*, dreapta *(Δ)* deplasându-se paralel cu ea însăşi. Să se determine viteza şi acceleraţia punctului (fig. 14.8).

Caz particular: Mişcarea este uniformă. În acest caz, să se determine traiectoria punctului *M*.

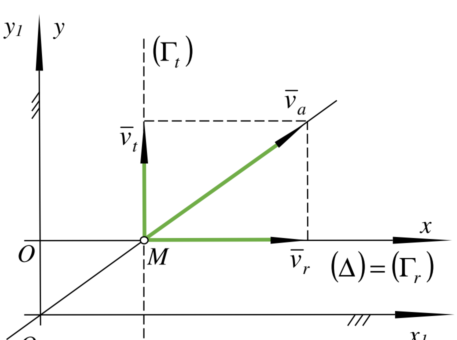


Fig. 14.8

Soluţie:

În conformitate cu (14.9) şi figura 14.8, viteza absolută a punctului *M* este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \ . \tag{1}$$

Acceleraţia absolută a punctului *M,* conform cu (14.13), are expresia:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \ . \tag{2}$$

În relaţia (2) se pot face următoarele precizări:

$$\bar{a}_r = \dot{\bar{v}}_r,\ \bar{a}_t = \dot{\bar{v}}_t,\ \bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0, \tag{3}$$

astfel că:

$$\bar{a}_a = \dot{\bar{v}}_r + \dot{\bar{v}}_t \tag{4}$$

Caz particular: Dacă mişcarea punctului *M* este uniformă, atunci:

$$\bar{v}_a = ct.,\ \bar{a} = \dot{\bar{v}}_a = 0. \tag{5}$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului, în acest caz, sunt:

$$x = v_r t,\ \ y = v_t t + y_0 \ . \tag{6}$$

Eliminând din (6) parametrul timp (*t*), se obţine ecuaţia carteziană a traiectoriei:

$$y = \frac{v_t}{v_r} x + y_0, \tag{7}$$

care este o dreaptă cu panta $tg\alpha = \frac{v_t}{v_r}$.

14.3.5. Un disc circular greu cade sub acţiunea gravitaţiei şi în acelaşi timp se roteşte în jurul centrului său *O* cu viteza unghiulară constantă ω_0. În momentul iniţial centrul discului coincide cu originea O_1 a sistemului de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, iar punctul *M* de pe periferia discului se află pe axa O_1x_1. Să se studieze mişcarea punctului *M* (fig. 14.9).

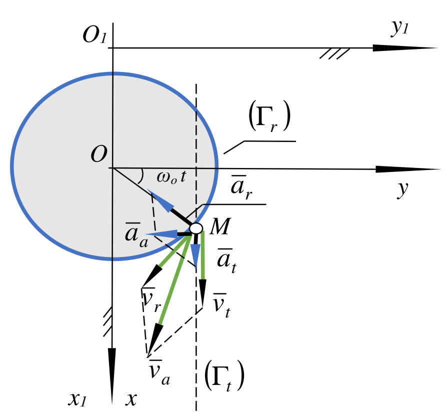


Fig. 14.9

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

Mişcarea de rotaţie a punctului M este *mişcarea relativă*, în timp ce mişcarea rectilinie împreună cu discul a unui punct N al discului, care coincide cu punctul M la momentul considerat, este *mişcarea de transport*.

a) Viteza absolută a punctului

Expresia vitezei absolute a punctului M este:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t . \tag{1}$$

relaţie în care:

$$v_r = \omega_0 r, \quad \overline{v}_r = \omega_0 r(\cos\omega_0 t\, \overline{i}_1 - \sin\omega_0 t\, \overline{j}_1),$$

$$v_t = gt, \quad \overline{v}_t = gt\overline{i}_1 ,$$

$$\overline{v}_a = (\omega_0 r \cos \omega_0 t + gt)\overline{i}_1 - \omega_0 r \sin \omega_0 t\, \overline{j}_1 ,$$

$$v_a = \sqrt{\omega_0^2 r^2 + g^2 t^2 + 2 g r\omega_0 t \cos \omega_0 t} . \tag{2}$$

b) Acceleraţia absolută a punctului

Expresia acceleraţiei absolute a punctului M este:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_c . \tag{3}$$

În relaţia (3) se pot face următoarele precizări:

$\overline{a}_r = \overline{a}_r^{\nu} + \overline{a}_r^{\tau}$, $\overline{a}_r^{\nu} \parallel \overline{MO}$ are sensul de la M spre O,

$$a_r^{\nu} = \omega_0^2 r,\ a_r^{\tau} = \varepsilon_0 r = 0\ (\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = 0)$$

$$\overline{a}_r = -\omega_0^2 r(\sin\omega_0 t\, \overline{i}_1 + \cos\omega_0 t\, \overline{j}_1),\ \ a_t = \dot{v}_t = g,\ \overline{a}_c = 2\overline{\omega}_t \times \overline{v}_r = 0 \tag{4}$$

pentru că $\overline{\omega}_t = 0$.

Urmărind relaţiile (4) şi figura 14.9, se poate scrie:

$$\overline{a}_a = \left(g - \omega_0^2 r \sin \omega_0 t\right)\overline{i}_1 - \omega_0^2 r \cos \omega_0 t \overline{j}_1, a_0 = \sqrt{g^2 + \omega_0^4 r^2 - 2g\omega_0^2 r \sin \omega_0 t} . \tag{5}$$

14.3.6. Un punct M se deplasează pornind din poziţie verticală cu viteza uniformă $\bar{u}$ de-a lungul unei raze r a unui disc circular. Discul se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal, având viteza $\bar{v}_0$ a centrului său constantă. Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului M pentru o poziţie a razei pe care se află punctul, poziție înclinată cu unghiul α faţă de verticală (fig. 14.10).

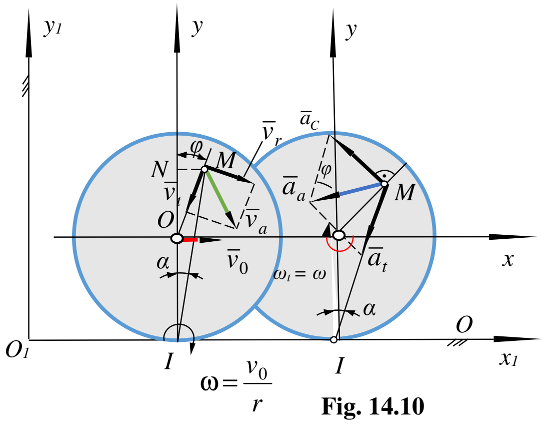


Fig. 14.10

Soluţie:

În figura 14.10 s-au introdus două sisteme de referinţă, respectiv sistemul fix $O_1x_1y_1$ şi sistemul mobil Oxy. Punctul M este poziţionat la un moment dat prin raza vectoare care trece prin centrul instantaneu de rotaţie I al discului, înclinată cu unghiul α faţă de verticală sau de vectorul de poziţie în sistemul Oxy înclinat cu unghiul φ faţă de Oy.

Între unghiurile α şi φ se poate stabili o relaţie de legătură determinată astfel:

$$MN = IM\ sin\alpha = OM\ sin\varphi,\ OM = r - ut,\ \sin\alpha = \frac{r-ut}{IM}\sin\varphi,$$

$$\cos\alpha = \frac{IN}{IM} = \frac{r + OM\cos\varphi}{IM},\ \cos\alpha = \frac{r+(r-ut)\cos\varphi}{IM}. \tag{1}$$

Mişcarea relativă este mişcarea punctului de-a lungul razei discului.

Mişcarea de transport este mişcarea punctului N al discului împreună cu acesta şi care la momentul considerat este suprapus peste punctul M.

a) Viteza absolută

Viteza absolută se obţine cu relaţia:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{2}$$

în care

$$\bar{v}_r = \bar{u} = -u(\sin\ \ \bar{i}_1 + \cos\ \ \bar{j}_1)\,,$$

$$v_t = \omega IM = \frac{v_0}{r}IM,\ \bar{v}_t = \frac{v_0}{r}IM(\cos\alpha\bar{i}_1 - \sin\alpha\,\bar{j}_1). \tag{3}$$

Având în vedere (3) şi (4), se obţine viteza absolută a punctului M astfel:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\bar{v}_a = \left\{\frac{v_0}{r}\left[r + (r-ut)\cos\varphi\right] - u\sin\varphi\right\}\bar{i}_1 - \left[\frac{v_0}{r}(r-ut)\sin\varphi\sin\alpha + u\cos\varphi\right]\bar{j}_1 . \quad (4)$$

b) Accelerația absolută

Accelerația absolută a punctului M se obține cu relația:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \, , \quad (5)$$

în care:

$$a_r = \dot{v}_r = 0, \; v_r = u = ct. ,$$

$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\nu} + \bar{a}_t^{\tau}$, $\bar{a}_t^{\nu}$ - are sensul de la M spre I, direcție ∥, $\overline{IM}$ $\quad a_t^{\upsilon} = \omega^2 IM = \frac{v_0^2}{r^2} IM$,

$$a_t^{\tau} = \varepsilon IM = 0, \, \varepsilon = \dot{\omega} = 0, \, \omega = \frac{v_0}{r} = ct. \quad (6)$$

$$\bar{a}_t = -\frac{v_0^2}{r^2}\left\{(r-ut)\sin\varphi\,\bar{i}_1 + \left[r + (r-ut)\cos\varphi\right]\bar{j}_1\right\}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = -2\frac{v_0 u}{r}\cos\varphi\,\bar{i}_1 + 2\frac{v_0 u}{r}\sin\varphi\,\bar{j}_1 .$$

Cu relațiile (5), expresia (4) a accelerației absolute devine:

$$\bar{a}_a = -\left[\frac{v_0^2}{r^2}(r-ut)\sin\varphi + 2\frac{v_0 u}{r}\cos\varphi\right]\bar{i}_1 + \left\{2\frac{v_0 u}{r}\sin\varphi - \frac{v_0^2}{r^2}\left[r + (r-ut)\cos\varphi\right]\right\}\bar{j}_1 . \quad (7)$$

14.3.7. O dreaptă OA se mişcă în jurul unei axe orizontale Oy cu viteza constantă ω. În acelaşi timp, planul vertical care conţine dreapta se roteşte cu aceeaşi viteză unghiulară ω în jurul axei verticale Ox. Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a unui punct M aparţinând dreptei OA, punct situat la distanţa $OM = r$ de punctul O (fig. 14.11).

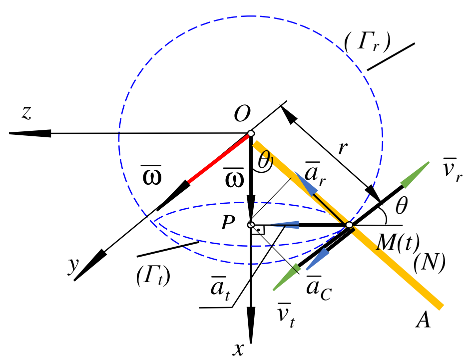


Fig. 14.11

Soluţie:

Mişcarea relativă este mişcarea de rotaţie a punctului M în jurul axei Oy.

Mişcarea de transport este mişcarea de rotaţie în jurul lui Ox a unui punct N aparţinând planului vertical care conţine dreapta OA şi care este suprapus la momentul considerat peste punctul M.

a) Viteza absolută

Având în vedere că:

$$v_r = \omega r,\ \ \bar{v}_r = -\omega r\left(\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{k}\right),\ \ v_t = \omega PM = \omega r\sin\theta,\ \bar{v}_t = \omega r\sin\theta\bar{j}, \qquad (1)$$

viteza absolută a punctului M este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t\,,$$

$$\bar{v}_a = \omega r(\sin\theta\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j} - \cos\theta\bar{k}),\quad v_a = \omega r\sqrt{1+\sin^2\theta}. \qquad (2)$$

b) Acceleraţia absolută

Urmărind enunţul problemei şi figura 14.11, se pot face următoarele precizări:

$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{\nu},\ \ a_r^{\tau} = \varepsilon r = 0,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 0\quad a_r^{\upsilon} = \omega^2 r\ ,O$, $\bar{a}_r^{\nu}$ are direcţie ‖ OM şi sens de la O spre M

$\bar{a}_r = \omega^2 r(-\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{k})$

$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\tau} + \bar{a}_t^{\nu},\ \bar{a}_t^{\nu} \parallel \overline{MP},$ are sensul de la M spre P

$$a_t^{\upsilon} = \omega^2 MP = \omega^2 r\sin\theta, \qquad (3)$$

$\bar{a}_t^{\tau} \perp \overline{MP}, a_t^{\tau} = \varepsilon MP = 0, \varepsilon = \dot{\omega} = 0, \omega = ct.$

$\bar{a}_t = \omega^2 r\sin\theta\bar{k}.$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 2\omega^2 r\cos\theta\bar{j}.$$

Având în vedere relaţiile (14.13) şi relaţiile (3), acceleraţia absolută a punctului M este:

$$\bar{a}_a = \omega^2 r(-\cos\theta\bar{i} + 2\cos\theta\,\bar{j} + 2\sin\theta\bar{k}),\ a_a = \omega^2 r\sqrt{4+\cos^2\theta}\ . \qquad (4)$$

14.3.8. Un mobil M se mişcă pe o dreaptă *(Δ)* conform legii de mişcare $OM = s = k\sin\omega t$. În acelaşi timp, dreapta *(Δ)* se roteşte în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 14.12). Să se determine viteza şi acceleraţia punctului M şi raza de curbură a traiectoriei.

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

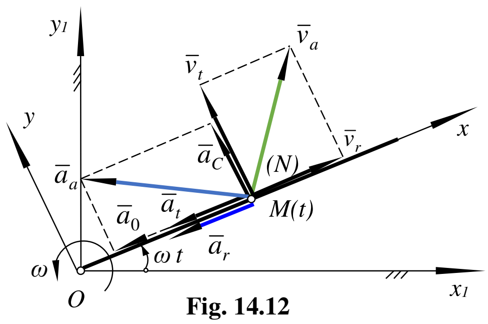


Fig. 14.12

Mişcarea punctului *M* de-a lungul dreptei *(Δ)* este *mişcarea relativă.*

Mişcarea unui punct *N* aparţinând dreptei *(Δ)* împreună cu aceasta, care la momentul considerat este suprapus peste punctul *M,* este *mişcarea de transport*.

a) Viteza absolută

Întrucât traiectoria mişcării relative este rectilinie şi cea a mişcării de transport este circulară, se pot scrie relaţiile:

$$v_r = \dot{s} = k\omega \cos \omega t,\ v_t = \omega s = k\omega \sin \omega t\ . \tag{1}$$

În conformitate cu relaţiile (14.9) şi (1), se poate determina viteza absolută a punctului *M* astfel:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t\ ,\quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = k\omega\,. \tag{2}$$

b) Acceleraţia absolută

Având în vedere relaţiile:

$$a_r = \dot{v}_r = -k\omega^2 \sin \omega t\,,$$

$\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\tau} + \overline{a}_t^{\nu}$, $\overline{a}_t^{\nu} \parallel \overline{MO}$, are sensul de la *M* spre *O*, $a_t^{\upsilon} = k\omega^2 \sin \omega t$,

$$\overline{a}_t^{\tau} \perp \overline{MO},\ a_t^{\tau} = \varepsilon MO = 0, \varepsilon = \dot{\omega} = 0, \omega = ct. \tag{3}$$

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r\,,\quad a_c = 2\omega v_r = 2k\omega^2 \cos \omega t,$$

se poate determina, conform cu (14.13), acceleraţia absolută a punctului *M* astfel:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_c + \overline{a}_t, \quad a_a = \sqrt{(a_r + a_t)^2 + a_c^2}, \quad a_a = 2k\omega^2 . \tag{4}$$

c) Raza de curbură a traiectoriei

Raza de curbură a traiectoriei este data de:

$$\rho = \frac{v_a^2}{\sqrt{a_a^2 - \dot{v}_a^2}} . \tag{5}$$

Având în vedere (2), se obţine $\dot{v}_a = 0$ *(k = ct., ω = ct.)*, astfel că (5) devine:

$$\rho = \frac{v_a^2}{a_a} . \tag{6}$$

Introducând în (6) valorile obţinute în (2) şi (4), se obţine:

$$\rho = \frac{k}{2}. \tag{7}$$

14.3.9. Un con circular drept de rază r şi unghi la vârf α se roteşte în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω_0. O sferă mică punctiformă se deplasează cu viteza $v = pt$ într-un canal practicat de-a lungul generatoarei AB a conului. Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia absolută a sferei mici (fig. 14.13).

Soluţie:

În figura 14.13 se aleg sistemele de referinţă fix $O_1x_1z_1y_1$ şi mobil $Oxyz$, in care $O \equiv O_1$. Mişcarea sferei mici M de-a lungul generatoarei AB a conului constituie *mişcarea relativă*. Mişcarea împreună cu conul a unui punct N al conului, care la momentul considerat coincide cu punctul M, este *mişcarea de transport*.

a) ***Traiectoria absolute***

Coordonatele x_1, y_1, z_1 ale mobilului M înregistrate faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ se obţin prin proiectarea segmentului AM pe axele acestui sistem astfel:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$x_1 = \frac{1}{2} pt^2 \sin\alpha \cos\omega_0 t\,,\; y_1 = \frac{1}{2} pt^2 \sin\alpha \sin\omega_0 t\,,\; z_1 = h - \frac{1}{2} pt^2 \cos\alpha . \qquad (1)$$

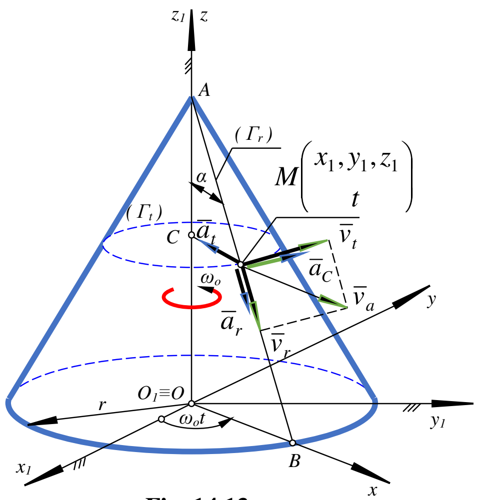


Fig. 14.13

b) Viteza absolută

În conformitate cu (14.9), viteza absolută a sferei mici *M* este dată de relaţia:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t\,, \qquad (2)$$

în care: $\bar{v}_r = pt \sin\alpha(\cos\omega_0 t \bar{i}_1 + \sin\omega_0 t \bar{j}_1) - pt\cos\alpha \bar{k}_1$

$$v_t = \omega_0 CM,\; CM = AM\sin\alpha = \frac{1}{2} pt^2 \sin\alpha,\; v_t = \frac{1}{2} p\omega_0 t^2 \sin\alpha \qquad (3)$$

$$\bar{v}_t = \frac{1}{2} p\omega_0 t^2 \sin\alpha\left(-\sin\omega_0 t\bar{i}_1 + \cos\omega_0 t\bar{j}_1\right).$$

Având în vedere (3), viteza absolută se poate scrie:

$$\bar{v}_a = pt\sin\alpha\left[\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 t \sin\omega_0 t\right)\bar{i}_1 + \left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\omega_0 t\cos\omega_0 t\right)\bar{j}_1\right] - pt\cos\alpha\bar{k}_1$$

$$v_a = \frac{pt}{2}\sqrt{4 + \omega_0^2 t^2 \sin^2\alpha}\,. \qquad (4)$$

c) Acceleraţia absolută

Acceleraţia absolută a sferei mici *M* are expresia:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_c \,. \tag{5}$$

În relaţia (5) se fac următoarele precizări:

$$a_r = \dot{v}_r = p,\ \overline{a}_r = p\sin\alpha\left(\cos\omega_0 t\overline{i}_1 + \sin\omega_0 t\,\overline{j}_1\right) - p\cos\alpha\overline{k}_1$$

$$\overline{a}_t = \overline{a}_t^\tau + \overline{a}_t^\nu,\ \overline{a}_t^\nu \parallel \overline{MC},\ \text{are sensul de la } M \text{ spre } C$$

$$\overline{a}_t^\upsilon = -\frac{1}{2}pt^2\omega_0^2\sin\alpha(\cos\omega_0 t\overline{i}_1 + \sin\overline{\omega}_0 t\overline{j}_1)$$

$$\overline{a}_t^\tau = \varepsilon_0\overline{MC} = 0,\ \varepsilon = \dot{\omega}_0 = 0,\ \omega_0 = ct.$$

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_0 \times \overline{v}_r = 2pt\omega_0\sin\alpha\left(-\sin\omega_0 t\overline{i}_1 + \cos\omega_0 t\,\overline{j}_1\right). \tag{6}$$

Având în vedere (6), relaţia (5) devine:

$$\overline{a}_a = p\sin\alpha\left[\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0^2 t^2\cos\omega_0 t - 2\omega_0 t\sin\omega_0 t\right)\overline{i}_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0^2 t^2\sin\omega_0 t + 2\omega_0 t\cos\omega_0 t\right)\overline{j}_1\right] - p\cos\alpha\overline{k}_1$$

$$a_a = \frac{p}{2}\sqrt{4 + \left(12 + \omega_0^2 t^2\right)\omega_0^2 t^2\sin^2\alpha}\,. \tag{7}$$

14.3.10. Se consideră un cadru dreptunghiular de laturi *a* şi *2a* pe a cărui latură *a* se află un tub, în interiorul căruia se deplasează un punct material (o bilă) *M* care pleacă din punctul *O* după legea $OM = s(t) = 18\cdot\sin\frac{\pi}{4}t\ \ cm.$ În acelaşi timp, cadrul se roteşte în planul său în jurul colţului O_1 după o lege de mişcare $\varphi(t) = 2t^3 - t^2\ rad$. Se cer să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului material *M* pentru cazul când $t_1 = \frac{2}{3}s$ şi $a = 25cm$ (fig. 14.14).

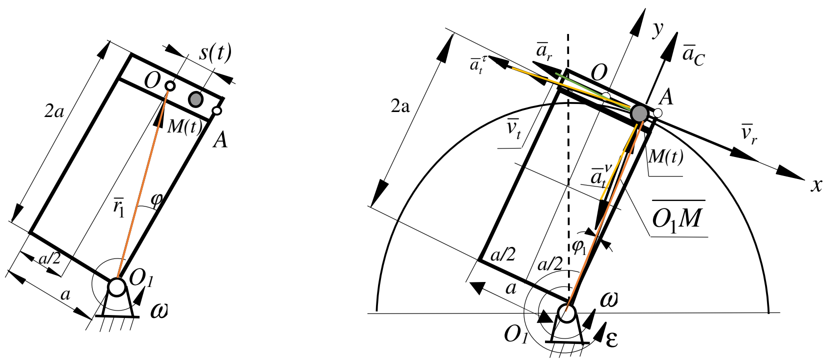
Soluţie:

Mişcarea punctului *O* în raport cu tubul este *mişcarea relativă*, iar mişcarea de rotaţie a punctului *M* solidar legat de tub la un moment dat, mişcare în jurul punctului fix O_1, este *mişcarea de transport*.

Viteza şi acceleraţia unghiulară ale cadrului sunt:

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 2t\,,\ \omega = 1{,}33\, s^{-1},$$
$$\varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 2\,,\ \varepsilon = 6\, rad/s^2. \tag{1}$$



a. **Fig. 14.14** b.

În conformitate cu (14.9), *viteza absolută* a punctului *M* se exprimă cu relaţia:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t\ . \tag{2}$$

În continuare, se pot scrie succesiv relaţiile:

$$v_r = \dot{s} = \frac{9}{2}\pi \cos\frac{\pi}{4}t = 12{,}24\, cm/s\,, \tag{3}$$

$$OM = s(t) = 18 \cdot \sin\frac{\pi}{4}t = 9\, cm,$$

$$v_t = \omega \cdot O_1M = 2\left(3t^2 - t\right)\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2} - s\right)^2} = \left(3t^2 - t\right)\sqrt{17a^2 - 4as + 4s^2} = 66{,}66\, cm/s, \tag{4}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 - 2v_r v_t \cos\ _1}\,. \tag{5}$$

Înlocuind în relaţia (5) timpul $t_1 = \frac{2}{3}s$, lungimea a = 25 cm şi unghiul φ_1 care se determină din triunghiul dreptunghic *OAM*:

$$\cos\varphi_1 = \frac{O_1A}{O_1M} = \frac{2a \cdot 2}{\sqrt{17a^2 - 4as + 4s^2}} = 0{,}75\ , \tag{6}$$

se obţine:

$$v_a = 58{,}04\, m/s \tag{7}$$

Conform cu (14.13), *accelerația absolută* a punctului *M* este:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau} + \overline{a}_c . \qquad (8)$$

Accelerația relativă este:

$$a_r = \dot{v}_r = -\frac{9}{8}\pi^2 \sin\frac{\pi}{4}t, \quad a_r = -\frac{9\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} = -5{,}55\ cm/s^2 . \qquad (9)$$

Accelerația Coriolis are, conform cu (14.12), expresia:

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}\times\overline{v}_r . \qquad (10)$$

Modulul accelerației Coriolis este:

$$a_c = 2\omega\cdot v_r = 18\pi t(3t-1)\cdot\cos\frac{\pi}{4}t = 32{,}6\,cm/s^2 . \qquad (11)$$

Traiectoria de transport fiind circulară, accelerația de transport se poate exprima astfel:

$$\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau} . \qquad (12)$$

Componentele intrinseci ale accelerației de transport au expresiile vectoriale:

$$\overline{a}_t^{\nu} = -\overline{O_1M}\cdot\omega^2 \ , \ \ \overline{a}_t^{\tau} = \overline{\varepsilon}\times\overline{O_1M} \ . \qquad (13)$$

Modulele acestor vectori sunt:

$$a_t^{\nu} = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{17a^2 - 4as + 4s^2} = 88{,}663\,cm/s^2 ,$$

$$a_t^{\tau} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{17a^2 - 4as + 4s^2} = 300{,}72\ cm/s^2 \qquad (14)$$

Proiectând accelerațiile pe axele sistemului mobil de referință *xOy,* rezultă:

$$\begin{cases} a_{a_x} = -a_r - a_t^{\tau}\cos\varphi_1 + a_t^{\upsilon}\sin\varphi_1 = -172{,}57 \quad cm/s^2 \\ a_{a_y} = -a_t^{\tau}\sin\varphi_1 - a_t^{\upsilon}\cos\varphi_1 + a_c = -232{,}37 \quad cm/s^2 \end{cases} \qquad (15)$$

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2} = 289{,}44\ cm/s^2 . \qquad (16)$$

14.3.11. Se consideră cadrul triunghiular din figura 14.15a și un punct material *M* care se deplasează în interiorul unui tub, solidar cu cadrul, înclinat față de verticală cu unghiul $\alpha = 30^{\circ}$. Se cunosc $O_1M = s\sin\alpha$ și legile pentru mișcările relativă și de transport, respectiv: $s = OM = 16 - 8\cos 3\pi t\ \ cm$ și rotirea cadrului în

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

jurul axei verticale cu unghiul $\varphi = 0{,}9t^3 - 9t^2\, rad$. Se cere să se determine poziţia, viteza şi acceleraţia absolută a punctului *M* la momentul $t = t_1 = \frac{2}{9}\ s$.

Soluţie:

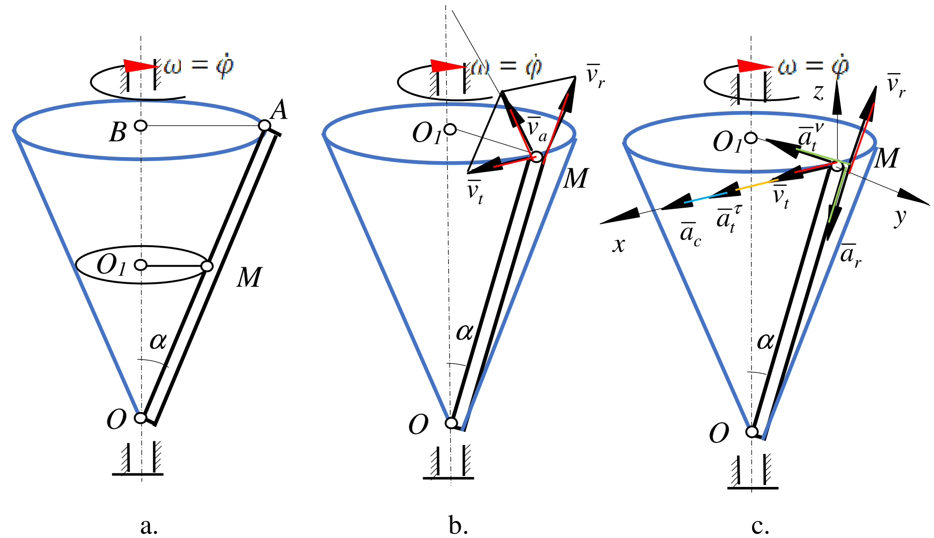


Fig. 14.15

Având în vedere enunţul problemei, se pot determina vitezele şi acceleraţiile unghiulare astfel:

$\omega = \dot{\varphi} = \omega = 2{,}7t^2 - 18t$, $\omega = -3{,}87\ s^{-1}$, $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 5{,}4t - 18$, $\varepsilon = -16{,}8$ rad/s^2 .

Viteza absolută a punctului *M* este:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t\ . \tag{1}$$

În relaţia (1):
$$v_r = \dot{s} = 24\pi \sin 3\pi t = 65{,}2\ cm/s \tag{2}$$

$$v_t = \omega \cdot O_1M = \left(2{,}7t^2 - 18t\right)\cdot\left(16 - 8\cos 3\pi t\right)\sin\alpha = 88{,}70\ cm/s, \tag{3}$$

astfel că:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = 110{,}08\ cm/s. \tag{4}$$

Acceleraţia absolută a punctului *M* se poate scrie sub forma:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau} + \overline{a}_c. \tag{5}$$

În relaţia (5):

- *acceleraţia relativă* este: $a_r = \dot{v}_r = 72\pi^2 \cos 3\pi t = -355\, cm/s^2$; (6)

- *acceleraţia Coriolis* este: $\overline{a}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$, (7)

$$a_c = 2\omega \cdot v_r \sin(180-\alpha) = 61\, cm/s^2 \quad (8)$$

- *acceleraţia de transport* este: $\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau}$. (9)

Componentele intrinseci ale *acceleraţiei de transport* se exprimă astfel:

$$\overline{a}_t^{\nu} = -\overline{O_1M} \cdot \omega^2 \;;\; \overline{a}_t^{\tau} = \overline{\varepsilon} \times \overline{O_1M} \quad . \quad (10)$$

Modulele componentelor acceleraţiilor normală şi tangenţială sunt:

$$a_t^{\nu} = \omega^2 s \sin\alpha = 171{,}63\, cm/s^2 \;, \quad a_t^{\tau} = \varepsilon \cdot s \sin\alpha = 192{,}53\, cm/s^2 . \quad (11)$$

Proiectând acceleraţiile pe axele sistemului de referinţă *Mxyz,* rezultă:

$$\begin{cases} a_{a_x} = a_c + a_t^{\tau} = 253{,}53 \\ a_{a_y} = -a_t^{\nu} + a_r \cos 60 = 5{,}87 \\ a_{a_z} = -a_r \sin 60 = -307{,}07 \end{cases} \quad (12)$$

Iar *acceleratia absolută* devine

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2 + a_{a_z}^2} = 398{,}25\, cm/s^2 . \quad (13)$$

14.3.12. O roată de rază r se rostogoleşte fără alunecare pe altă roată de rază R la exteriorul sau interiorul ei. Să se determine vitezele unghiulare absolute în ambele cazuri, ştiind că manivela O_1O_2 ce leagă centrele celor două roţi se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 14.16 şi fig. 14.17).

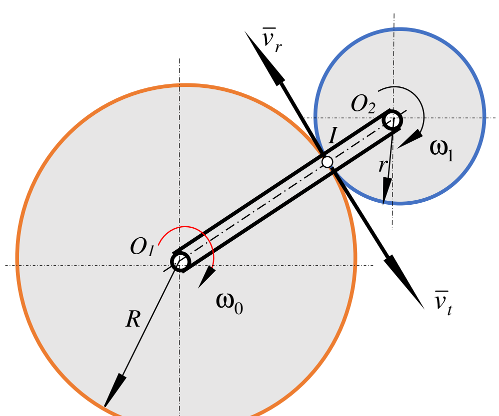


Fig. 14.16

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Soluţie:

a) roata de rază r la exteriorul roţii de rază R (fig. 14.16).

Punctele roţii r au *o mişcare relativă* faţă de manivela O_1O_2, iar mişcarea de rotaţie a manivelei cu viteza unghiulară ω_0 a acestor puncte, presupuse legate invariabil de manivelă la momentul considerat, constituie *mişcarea de transport*.

Punctul de tangenţă al celor două roţi este centrul instantaneu de rotaţie I , care având viteza nulă, conduce la:

$$v_r = v_t \,. \tag{1}$$

Dar cum $v_r=\omega_1 r$ şi $v_t=\omega_o R$, se obţine:

$$\omega_1 = \frac{R}{r}\omega_0 \,. \tag{1a}$$

Viteza unghiulară absolută ω este în acest caz:

$$\omega_{a_1} = \sum_{i=1}^{2}\omega_i = \omega_0 + \omega_1 = \frac{R+r}{r}\omega_0 . \tag{2}$$

b) roata de rază r în interiorul roţii de rază R (fig. 14.17)

Viteza unghiulară absolută este în acest caz:

$$\omega_{a_2} = \sum_{i=1}^{2}\omega_i = \omega_1 - \omega_0 = \frac{R-r}{r}\omega_0 , \tag{3}$$

având direcţia şi sensul vitezei unghiulare ω_1.

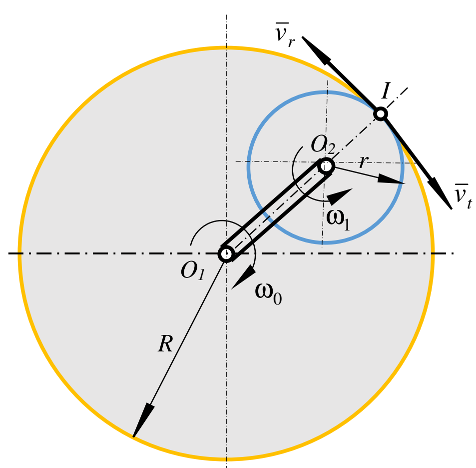


Fig. 14.17

14.3.13. În jurul centrului O_1 se roteşte manivela O_1O_3 pe care sunt fixate axele a trei roţi dinţate angrenate între ele în O_1,O_2 şi O_3, de raze r_1, r_2 şi r_3. Roata O_1 fiind fixă,să se determine viteza unghiulară ω_3 a roţii O_3 faţă de manivelă şi viteza ei unghiulară absolută, ştiind că manivela O_1O_3 se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 14.18). Să se generalizeze pentru cazul a „*n*” roţi.

Soluţie:

a) Determinarea vitezelor unghiulare ω_3' ***şi*** ω_n'

Roata O_3 are o *mişcare relativă* faţă de manivela O_1O_3, iar rotaţia manivelei cu viteza unghiulară constantă ω în jurul lui O_1 constituie *mişcarea de transport*.

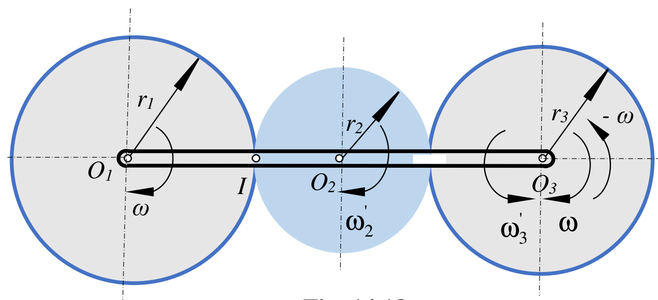


Fig. 14.18

Luând în considerare numai mişcările relative ale roţilor şi punând condiţia ca viteza centrului instantaneu de rotaţie I să fie nulă, se obţin relaţiile evidente:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2' r_2, \ \omega_2' r_2 = \omega_3' r_3,$$

din care:

$$\omega_3' = \frac{r_1}{r_3}\omega. \tag{1}$$

Ţinând seama şi de sensul de rotaţie, relaţia (1) devine:

$$\omega_3' = (-1)^3 \frac{r_1}{r_3}\omega = -\frac{r_1}{r_3}\omega. \tag{2}$$

În general, pentru n roţi rezultă:

$$\omega_n' = (-1)^n \frac{r_1}{r_n}\omega. \tag{3}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

b) Determinarea vitezelor unghiulare absolute ω_3 şi ω_n

Pentru a determina viteza unghiulară absolută ω_3 se introduc în O_3 doi vectori de rotaţie egali şi de sens contrar, $\overline{\omega}$ şi $-\overline{\omega}$. Rotaţia ω din O_1 şi $-\omega$ din O_3 dau un cuplu de rotaţie care este egal în modul cu o viteză de translaţie $\omega \cdot O_1O_3$ a barei O_1O_3. În O_3 au rămas două rotaţii, ω_3' şi ω, de aceeaşi direcţie, dar de sens contrar. Astfel, viteza unghiulară absolută ω_3 va fi, luând în considerare (2):

$$\omega_3 = \omega - \omega_3' = \frac{r_3 - r_1}{r_3}\omega. \tag{4}$$

Pentru cazul a "*n*" roţi rezultă:

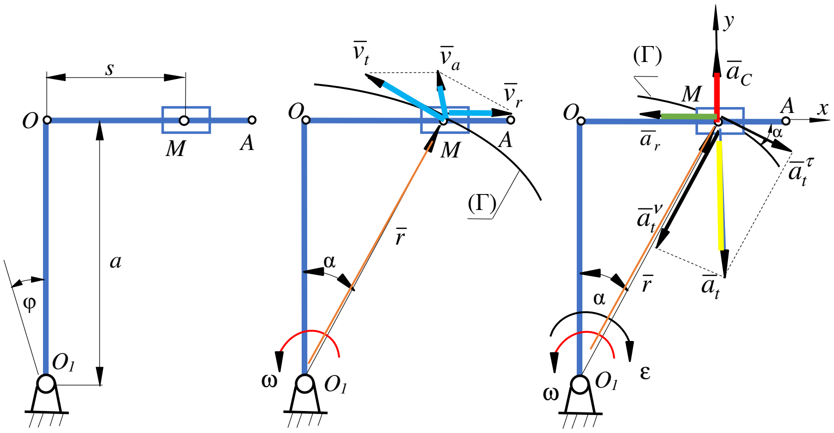
$$\omega_n = \frac{r_n + (-1)^n r_1}{r_n}\omega. \tag{5}$$

14.3.14. Se dă un cursor *M* care se deplasează pe bara cotită O_1OA cu unghiul $\theta = 90^\circ$, $O_1O = a = 20\,cm$ după legea de mişcare $OM = s(t) = 20\sin\pi t\ cm$. În acelaşi timp, bara se roteşte în jurul punctului fix O_1 după legea $\varphi(t) = t - 0.5t^2$, în sens trigonometric. Se cere, să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului *M* la momentul $t = t_1 = \frac{1}{3}s$ (fig. 14.19).

Soluţie:

Mişcarea cursorului *M* din punctul *O,* spre punctul *A,* este *mişcarea relativă*, conform legii $s(t) = 20\sin\pi t$.

Mişcarea de transport este mişcarea punctului *M* care coincide cu cadrul şi cursorul la momentul (*t*) (mişcarea cursorului simultană cu cadrul dacă încetează *mişcarea relativă*), adică o mişcarea circulară dată de legea: $\varphi(t) = t - 0.5t^2$, ea având viteza şi acceleraţia unghiulară $\omega = \dot{\varphi} = 1 - t\ \ 1/s$ şi $\varepsilon = \dot{\omega} = -1\ rad/s^2$ pe cercul de rază $O_1M = \sqrt{a^2 + s^2}\ \ cm$.



a. b. c.

Fig. 14.19

Viteza absolută a punctului *M* este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \ . \tag{1}$$

În relaţia (1):

$$v_r = \dot{s} = 20\pi \cos \pi t = 31{,}416 \ cm/s, \tag{2}$$

$$v_t = \omega \cdot O_1M = (1-t) \cdot \sqrt{a^2 + (20 \sin \pi t)^2} = 17{,}638 \ cm/s, \tag{3}$$

iar,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha)} \ , \tag{4}$$

unde unghiul $\alpha = OO_1M$. Urmărind figura 14.20b. se poate scrie:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} = 0{,}76 \ , \ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0{,}65 \ . \tag{5}$$

Prin înlocuire în relaţia (4) a relaţiilor (2), (3) şi (5) şi a datelor din enunţul problemei, rezultă:

$$v_a = 36 \ \ cm/s^2 \ . \tag{6}$$

- *Acceleraţia absolută* a punctului *M* (fig. 14.23c.), se poate scrie astfel:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t^\nu + \bar{a}_t^\tau + \bar{a}_c \ . \tag{7}$$

În relaţia (7):

- *Acceleraţia relativă* este: $a_r = \dot{v}_r = \left| -20\pi^2 \sin \pi t \right| = 170{,}57 \, cm/s^2$ (8)

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

- *Acceleraţia Coriolis* este dată de relaţia:

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}\times\overline{v}_r\ , \tag{9}$$

respectiv:

$$a_c = 2\omega\cdot v_r = 41{,}888\,cm/s^2 \tag{10}$$

- *Acceleraţia de transport* se poate exprima în funcţie de componentele sale intrinseci astfel:

$$\overline{a}_t = \overline{a}_t^{\nu} + \overline{a}_t^{\tau}\ . \tag{11}$$

Componentele intrinseci se pot exprima cu relaţiile:

$$\overline{a}_t^{\nu} = -\overline{O_1M}\cdot\omega^2\ ,\quad \overline{a}_t^{\tau} = \overline{\varepsilon}\times\overline{O_1M}\ . \tag{12}$$

Modulele *componentelor normală şi tangenţială* sunt:

$$a_t^{\nu} = \left|-\overline{O_1M}\cdot\omega^2\right| = (1-t)^2\sqrt{a^2+(20\sin\pi t)^2} = 11{,}76\,cm/s^2\ , \tag{13}$$

$$a_t^{\tau} = \left|\varepsilon\cdot O_1M\right| = \sqrt{a^2+(20\sin\pi t)^2} = 26{,}457\,cm/s^2\ . \tag{14}$$

Proiectând acceleraţiile pe axele sistemului de referinţă *Mxyz,* rezultă:

$$\begin{cases} a_{a_x} = -a_r - a_t^{\nu}\sin\alpha + a_t^{\tau}\cos\alpha = -158{,}11\ \ cm/s^2 \\ a_{a_y} = a_c - a_t^{\nu}\cos\alpha - a_t^{\tau}\sin\alpha = 15{,}75\ \ cm/s^2 \end{cases}. \tag{15}$$

Acceleraţia absolută are modulul:

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2} = 158{,}89\,cm/s^2\ . \tag{16}$$

14.3.15. Bara *OM* de lungime *p* este articulată perpendicular în *O* pe axa unui cilindru de rază *R*. La capătul barei este aşezată liber o roată de rază $r = R - p$ situată în planul barei (perpendiculară pe axa cilindrului), tangentă interior la cilindru. Să se afle pe cale grafică, punctul de pe circumferinţa roţii mici a cărui viteză trece prin punctul *A*, extremitatea diametrului perpendicular pe *OM* şi să se determine analitic această viteză, ştiind că bara *OM* se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 14.20).

Soluţie:

a) Determinarea grafică a punctului M_1 a cărui viteză trece prin punctul A

Viteza punctului M_1 are direcţia perpendiculară pe dreapta IM_1, punctul *I* fiind centrul instantaneu de rotaţie. Dar cum viteza lui M_1 trebuie să treacă şi prin *A*, punctul căutat se află la intersecţia dreptei *AN* cu cercul de rază $r = R - p$,

N fiind punctul de intersecţie al dreptei *OM* cu acest cerc (unghiul din M_1 este de $\frac{\pi}{2}$ astfel că, triunghiul INM_1 trebuie înscris într-un semicerc).

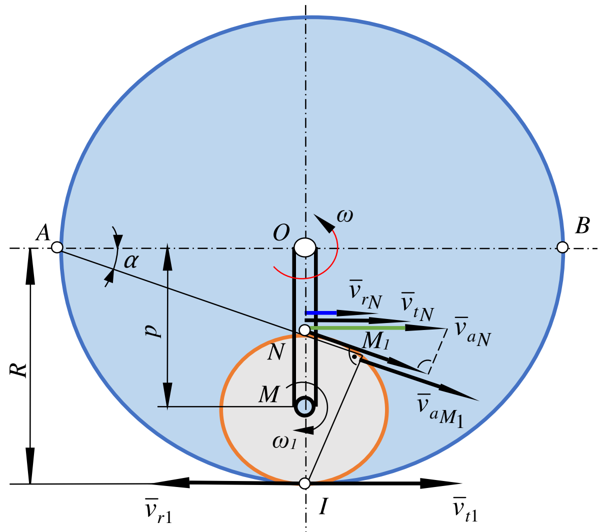


Fig. 14.20

b)Determinarea analitică a vitezei punctului M_1

Viteza centrului instantaneu de rotaţie este nulă astfel că, din condiţia $v_{r_I} = v_{t_I}$, se obţine:

$$\omega_1 = \frac{R}{R-p}\omega, \tag{1}$$

întrucât, $v_{r_1} = \omega_1 r$ şi $v_{t_1} = \omega_1 (R-p)$.

- *Viteza absolută a punctului N* este: $\bar{v}_{aN} = \bar{v}_{rN} + \bar{v}_{tN}$. (2)

În relaţia (2) se fac precizările:

$$v_{rN} = \omega_1 (R-p),\ \ v_{tN} = \omega[p-(R-p)] = \omega(2p-R). \tag{3}$$

Dar cum $\bar{v}_{rN}$ şi $\bar{v}_{tN}$ sunt coliniare şi de acelaşi sens, viteza absolută a punctului *N*, luând în considerare (1) şi (3), devine:

$$v_{aN} = v_{rN} + v_{tN} = \omega_1 (R-p) + \omega(2p-R) = 2\,\omega\, p. \tag{4}$$

- *Viteza punctului M_1* se află aplicând proprietatea conform căreia, proiecţiile vitezelor a două puncte pe dreapta care uneşte aceste puncte sunt egale. Astfel,

$$v_{aM_1} = v_{aN}\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{OA}{AN} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2p - R)^2}} \tag{5}$$

$$v_{aM_1} = \frac{2pR}{\sqrt{R^2 + (2p - R)^2}}\,\omega . \tag{6}$$

14.3.16. O roată O_2 de rază r se rostogoleşte fără să alunece în interiorul altei roţi O_1 de rază $2r$, roată care este fixă. De roata mobilă O_2 este legată tija AB prin articulaţia B. Să se determine viteza şi acceleraţia tijei AB, ştiind că manivela O_1O_2 se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 14.21).

Soluţie:

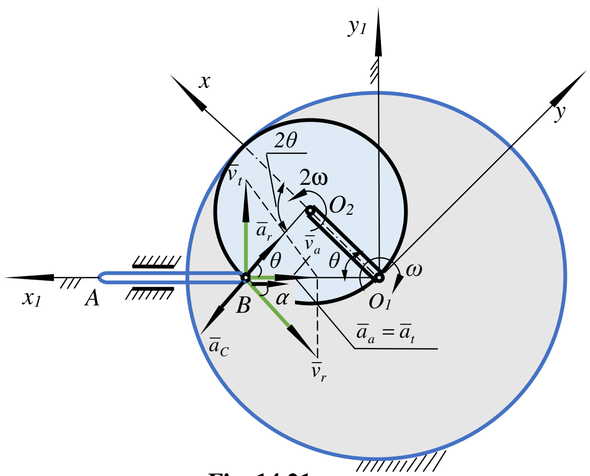


Fig. 14.21

Mişcarea culisei B pe roata O_2, deci mişcarea lui B faţă de un sistem de referinţă legat invariabil de manivela O_1O_2 de care se presupune imobilizată culisa B la momentul considerat, constituie *mişcarea de transport*.

- *Viteza absolută a culisei B* este, conform cu (14.9),

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t . \tag{1}$$

În relaţia (1) se fac următoarele precizări:

$$\bar{v}_r = -2\omega r\left(\sin\theta\,\bar{i}_1 + \cos\theta\,\bar{j}_1\right) \tag{2}$$

$$v_t = \omega\cdot O_1B = 2\omega r\cos\theta, \quad \bar{v}_t = 2\omega r\cos\theta\,\bar{j}_1 . \tag{3}$$

Astfel, *viteza absolută*, luând în considerare (1), (2) şi (3), devine:

$$\bar{v}_a = -2\omega r \sin\theta \bar{i}_1 , \quad v_a = 2\omega r \sin\theta . \tag{4}$$

Întrucât vectorul $\bar{v}_a$ reprezintă viteza unui punct de pe tija AB şi are direcţia acesteia, mişcarea de translaţie a tijei din punctul de vedere al vitezelor este dată de acest vector.

- *Acceleraţia absolută a culisei B* este, conform cu (14.13):

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c . \tag{5}$$

În această relaţie se pot preciza:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{\nu}, \ a_r^{\tau} = 0 \ (\varepsilon_1 = 2\dot{\omega} = 0), \ a_r^{\upsilon} = 4\omega^2 r$$

$$\bar{a}_r = 4\omega^2 r(-\cos\theta \bar{i}_1 + \sin\theta \bar{j}_1) \tag{6}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\tau} + \bar{a}_t^{\nu}, \ a_t^{\tau} = 0 \ (\varepsilon = \dot{\omega} = 0), \ a_t^{\upsilon} = \omega^2 \cdot O_1B = 2\omega^2 r\cos\theta$$

$$\bar{a}_t = -2\omega^2 r\cos\theta \bar{i}_1 \tag{7}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 4\omega^2 r(\cos\theta \bar{i}_1 - \sin\theta \bar{j}_1). \tag{8}$$

Astfel, acceleraţia absolută introducând (6), (7) şi (8) în (5), devine:

$$\bar{a}_a = -2\omega^2 r\cos\theta \bar{i}_1, \ a_a = 2\omega^2 r\cos\theta. \tag{9}$$

Deci, tija AB are o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}_a$ şi acceleraţia $\bar{a}_a$, date de (4) şi (9).

14.3.17. Bara AB de lungime $2a$ se roteşte într-un plan fix în jurul capătului A cu viteza unghiulară constantă ω_1 , în sensul acelor de ceasornic. La capătul B al barei este montată pe un ax perpendicular pe bară, o roată de rază a care se roteşte în acelaşi plan, dar în sens contrar cu viteza unghiulară constantă ω în raport cu bara. Să se determine viteza unghiulară ω astfel încât, acceleraţia absolută a punctului M al roţii, suprapus la un moment dat peste bară, să fie nulă (fig. 14.22).

Soluţie:

Punctele roţii, deci şi punctul *M,* au *mişcare relativă de rotaţie* faţă de capătul *B* al barei.

Mişcarea de transport este efectuată împreună cu bara de către punctul *N* al barei care este suprapus la un moment dat peste punctul *M* al roţii.

În consecinţă, traiectoriile relativă şi de transport sunt cercuri de rază *a,* unul cu centrul în *B,* celălalt cu centrul în *A*.

Acceleraţia absolută a punctului *M* este, conform cu (14.13):

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c . \tag{1}$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

În relaţia (1) se fac următoarele precizări:

$\bar{a}_r = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^\nu,\ a_r^\upsilon = \omega^2 a$, $\bar{a}_r^\nu$ - direcția paralelă cu MB şi sensul de la M spre B

$a_r^\tau = \varepsilon a = 0,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 0,\ \omega = ct.$

$\bar{a}_r = \omega^2 a \bar{i}_1,$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^\tau + \bar{a}_t^\nu,\ \bar{a}_t^\upsilon \parallel \overline{MA}, \text{ are sensul de la } M \text{ spre } A,\ a_t^\upsilon = \omega_1^2 a \qquad (2)$$

$$a_t^\tau = \varepsilon_1 a = 0,\ \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0,\ \omega_1 = ct.$$

$$\bar{a}_t = -\omega_1^2 a \bar{i}_1,$$

$$\bar{a}_c = 2\omega_1 \times \bar{v}_r = -2\omega\omega_1 a \bar{i}_1,\ a_c = 2\omega\omega_1 a.$$

Având în vedere (2), relaţia (1) devine:

$$\bar{a}_a = (\omega^2 a - \omega_1^2 a - 2\omega\omega_1 a)\bar{i}_1 . \qquad (3)$$

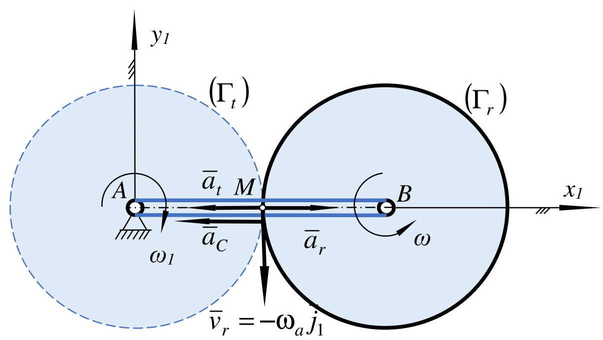


Fig. 14.22

Impunând ca $\bar{a}_a$ să fie nulă, se determină viteza unghiulară ω din ecuaţia:

$$\omega^2 - 2\omega\omega_1 - \omega_1^2 = 0. \qquad (4)$$

se obţine astfel:

$$\omega = \omega_1(1 \pm \sqrt{2}). \qquad (5)$$

Soluţia posibilă, având în vedere enunţul problemei, este:

$$\omega = \omega_1(1 + \sqrt{2}). \qquad (6)$$

14.3.18. Axa unei roţi conice de rază r intersectează axa geometrică a unei alte roţi dinţate plane de rază $2r$, în centrul O al acesteia. Ştiind că roata conică se rostogoleşte peste cea plană cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$, să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ a roţii plane în aşa fel ca mişcarea de rotaţie rezultantă să aibă suportul vitezei unghiulare $\bar{\omega}_a$ suprapus peste generatoarea OA. Să se determine şi mărimea vitezei unghiulare $\bar{\omega}_a$ (fig. 14.23).

Soluţie:

Mişcarea relativă este mişcarea de rotaţie a roţii conice cu $\overline{\omega}_1$ în jurul axei proprii.

Mişcarea de transport rezultă din mişcarea de rostogolire cu $\overline{\omega}_0$ a roţii conice faţă de roata plană.

Mişcarea rezultantă a acestor două mişcări este o mişcare de rotaţie efectuată cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$, care are ca suport axa *OI* instantanee de rotaţie.
Înseamnă că:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1 . \tag{1}$$

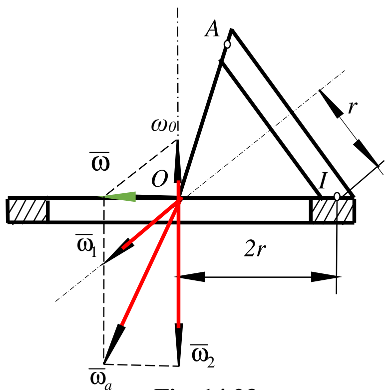


Fig. 14.23

Luând în considerare doar mişcările efectuate cu $\overline{\omega}_0$ şi $\overline{\omega}_1$, punctul *I* este centru instantaneu de rotaţie astfel că, se poate scrie:

$$2r\omega_0 = r\omega_1,\ \omega_1 = 2\omega_0 . \tag{2}$$

Mărimea ω a vitezei unghiulare este:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} = \sqrt{3}\omega_0 . \tag{3}$$

Mişcarea de rotaţie cu $\overline{\omega}$ a roţii conice faţă de roata plană este o *mişcare relativă*, în timp ce mişcarea de rotaţie datorată vitezei unghiulare $\overline{\omega}_2$ este o *mişcare de transport*. Astfel, în baza relaţiei (14.22) şi a figurii 14.23, se poate scrie:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega} + \overline{\omega}_2,\ \omega_a = \frac{\omega}{\cos 60^o} = 2\omega = 2\sqrt{3}\omega_0,\ \omega_2 = \omega ctg30^o = 3\omega_0 . \tag{4}$$

14.3.19. O bară *OA* se roteşte într-un plan în jurul articulaţiei fixe *O* astfel încât să fie respectată legea de mişcare $\alpha = \alpha_0 + \omega t$. O a doua bară *AB* se roteşte în jurul punctului *B* astfel încât unghiul β să varieze după legea $\beta = \beta_0 + \omega t$, $\omega = ct$. Ştiind

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

că $OA = l$ şi $AB = l_1$, să se determine vitezele unghiulare de rotaţie ale barelor OA şi AB, precum şi viteza absolută a capătului B al barei AB (fig. 14.24).

Soluţie:

Mişcarea relativă rezultă din mişcarea barei AB faţă de bara OA. *Mişcarea de transport* este mişcarea punctului N solidar cu bara OA împreună cu aceasta şi care, la momentul considerat, este suprapus peste capătul B al barei AB.

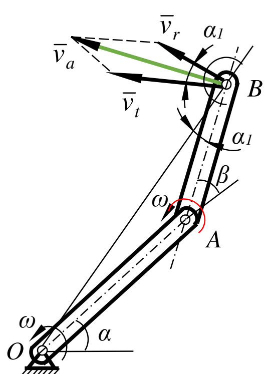


Fig. 14.24

a) Determinarea vitezelor unghiulare

Vitezele unghiulare de rotaţie a barei OA în jurul lui O, respectiv a barei AB în jurul lui A, se determină prin derivare în raport cu timpul a legilor de mişcare ale celor două bare. Astfel,

$$\omega_0 = \dot{\alpha} = \omega, \ \omega_A = \dot{\beta} = \omega. \tag{1}$$

b) Viteza absolută a punctului B

Având în vedere precizările făcute privind mişcările relativă şi de transport, se pot scrie relaţiile:

$$v_r = \omega_A l_1 = \omega l_1, \bar{v}_r \perp \overline{AB}, v_t = \omega_0 \cdot OB = \omega\sqrt{l^2 + l_1^2 + 2ll_1 \cos\beta}, \bar{v}_t \perp \overline{OB},$$

întrucât,

$$OB = \sqrt{l^2 + l_1^2 + 2ll_1 \cos\beta} \text{ din triunghiul } OAB. \tag{2}$$

În conformitate cu (14.9) şi (2), viteza absolută a punctului B este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t, \ v_a = \omega\sqrt{l_1^2 + OB^2 + 2l_1 OB \cos\alpha_1}. \tag{3}$$

Din triunghiul OAB se obţine:

$$\cos\alpha_1 = \frac{OB^2 + l_1^2 - l^2}{2l_1 \cdot OB}, \tag{4}$$

astfel că:

$$v_a = \omega\sqrt{l^2 + 4l_1^2 + 4l_1 l \cos\beta}. \tag{5}$$

14.3.20. Se dă un robot industrial constituit dintr-un modul de rotaţie (1), un modul de translaţie (2) şi dispozitivul de prehensiune (3), a cărui schemă cinematică structurală este prezentată în figura 14.25. Cunoscând legile de mişcare $q_1=q_1(t)$; $q_2=q_2(t)$ ale modulelor componente şi parametrii constructivi l_1 şi l_2, se cer să se determine viteza şi acceleraţia absolută a centrului de greutate O_2 al modulului de translaţie.

Soluţie:

În figura 14.26 s-au ales două sisteme de referinţă având originea comună în centrul O_1, care este centrul de greutate al modulului de rotaţie şi anume: un sistem fix $O_1x_1y_1z_1$ şi un sistem mobil $Oxyz$ legat invariabil de braţul robotului.

- *Mişcarea relativă* este mişcarea centrului de greutate O_2 al modulului de translaţie în raport cu sistemul de referinţă mobil $Oxyz$;

Mişcarea de transport este mişcarea înregistrată faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ a unui punct N aparţinând braţului robotului, care la momentul considerat coincide cu punctul O_2;

- *Mişcarea absolută* este mişcarea punctului O_2 în raport cu sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$.

În conformitate cu (14.9), viteza absolută a punctului O_2 are expresia:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{1}$$

în care:

$$\bar{v}_r = \dot{q}_2 \bar{j},\ \bar{v}_t = -\dot{q}_1 (l_2 + q_2) \bar{i}\,. \tag{2}$$

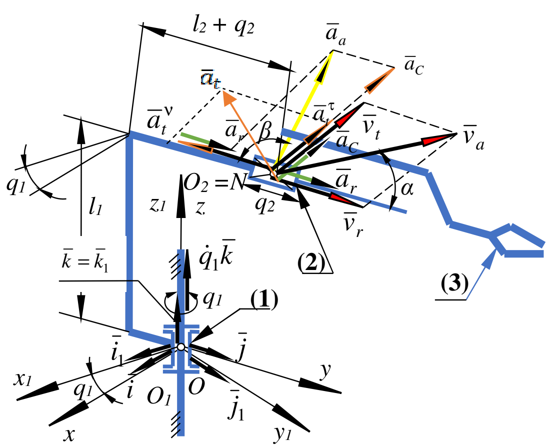


Fig. 14.25

[9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Având în vedere (1), (2) şi figura 14.25, se pot determina modulul şi direcţia *vitezei absolute*. Astfel,

$$v_a = \sqrt{\dot{q}_1^2 (l_2 + q_2)^2 + \dot{q}_2^2} \tag{3}$$

$$tg\alpha = \dot{q}_1 (l_2 + q_2) / \dot{q}_2 . \tag{4}$$

Acceleraţia absolută a centrului de greutate O_2 al modulului de translaţie are, în conformitate cu (14.13), expresia:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \tag{5}$$

în care:

$$\bar{a}_r = \ddot{q}_2 \bar{j} \tag{6}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{t\nu} + \bar{a}_{t\tau} , \quad \bar{a}_{t\nu} = -\dot{q}_1^2 (l_2 + q_2) \bar{j} , \quad \bar{a}_{t\tau} = -\ddot{q}_1^2 (l_2 + q_2) \bar{i} , \tag{7}$$

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \bar{i} . \tag{8}$$

Introducând (6), (7) şi (8) în (5), rezultă:

$$\bar{a}_a = -[\ddot{q}_1 (l_2 + q_2) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2] \bar{i} + [\ddot{q}_2 - \dot{q}_1^2 (l_2 + q_2)] \bar{j} . \tag{9}$$

Din relaţia (9) şi figura 14.26 se pot determina modulul şi direcţia acceleraţiei absolute a punctului O_2 astfel:

$$a_a = \sqrt{[\ddot{q}_1 (l_2 + q_2) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2]^2 + [\ddot{q}_2 - \dot{q}_1^2 (l_2 + q_2)]^2} , \tag{10}$$

$$tg\beta = [\ddot{q}_1 (l_2 + q_2) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2] / [\dot{q}_1^2 (l_2 + q_2) - \ddot{q}_2] . \tag{11}$$

14.3.21. Pentru bascularea braţului unui manipulator sau robot industrial în plan vertical, se poate utiliza modulul de basculare (rotaţie) prezentat în figura 14.26.

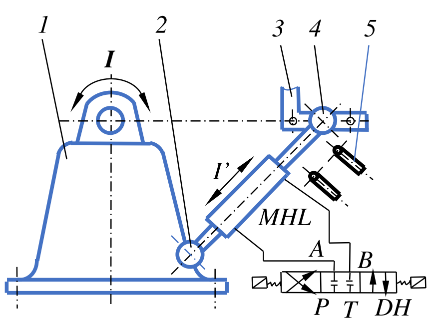


Fig. 14.26

Mişcarea de basculare ***I*** se obţine cu un motor hidraulic liniar *MHL* comandat prin distribuitorul *DH*. Cunoscând dimensiunile constructive l_1 şi l_2 (fig. 14.26), precum şi viteza unghiulară ω_1 de rotaţie a braţului în jurul axului orizontal ce trece prin punctul *O*, se cer vitezele unghiulare ω_2 şi ω_3 de rotaţie în jurul axelor orizontale ce trec prin punctele *A* şi *B* şi viteza absolută $\bar{v}_a$ a centrului de greutate *C* al cilindrului 3.

Soluţie:

Având în vedere figura 14.26, datorită vitezei relative de deplasare a pistonului montat pe tija 2 a cilindrului hidraulic 3, tija pistonului are o *mişcare absolută* în jurul axei orizontale ce trece prin punctul A cu viteza unghiulară ω_2, cilindrul hidraulic 3 are o *mişcare de rotaţie relativă* faţă de braţul robotului în jurul axei orizontale ce trece prin B cu viteza unghiulară ω_3, în timp ce braţul robotului se roteşte în jurul axului ce trece prin O cu viteza unghiulară ω_1.

Elementele cinematice ω_2, ω_3 şi $\bar{v}_a$ se vor determina în funcţie de unghiul φ, unghi care poziţionează modulul la un moment dat, precum şi de viteza unghiulară de rotaţie ω_1.

Aplicând teorema sinusului în triunghiul OAB, se obţine:

$$\frac{AB}{\sin\varphi} = \frac{l_1}{\sin\psi} = \frac{l_2}{\sin\theta}. \tag{1}$$

Având în vedere (1) şi figura 14.26, se obţin relaţiile:

$$\sin\psi = \frac{l_1 \sin\varphi}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi}} \tag{2}$$

$$\sin\theta = \frac{l_2 \sin\varphi}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi}} \quad . \tag{3}$$

Se derivează în raport cu timpul relaţiile (2) şi (3) şi se obţin vitezele unghiulare ω_2 şi ω_3:

$$\omega_2 = \omega_1 l_2 \frac{-\cos\varphi\left(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi\right) + 2l_1 l_2 \sin^2\varphi}{\left(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi\right)\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi - l_2^2 \sin^2\varphi}}, \tag{4}$$

$$\omega_3 = \omega_1 l_1 \frac{\cos\varphi\left(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi\right) - 2l_1 l_2 \sin^2\varphi}{\left(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi\right)\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi - l_2^2 \sin^2\varphi}}. \tag{5}$$

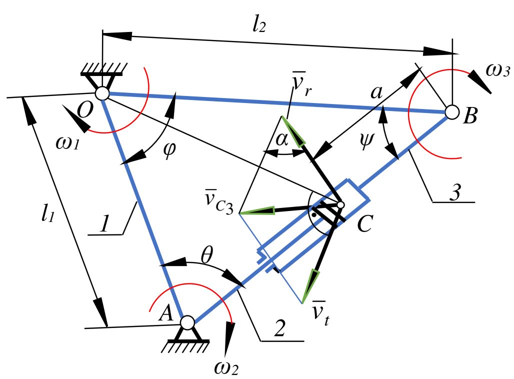


Fig. 14.27

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Viteza absolută $\bar{v}_a$ (fig. 14.27) a centrului de greutate al elementului (3) se determină cu relaţia vectorială:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t\ , \tag{6}$$

în care *valorile vitezelor relativă şi de transport* sunt date de expresiile:

$$v_r = \omega_1 a l_1 \frac{\cos\ \varphi(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\ \varphi) - l_1 l_2 \sin^2 \varphi}{(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\ \varphi)\sqrt{(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\ \varphi - l_1^2 \sin^2 \varphi)}}, \tag{7}$$

$$v_t = \omega_1 \sqrt{\frac{(l_2^2 + a^2)(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi) - 2al_2(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi - l_1^2 \sin^2\varphi)}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi}}. \tag{8}$$

Modulul vitezei absolute $\bar{v}_a$, având în vedere (6) - (8), este:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 - 2v_r v_t \cos\alpha} \tag{9}$$

relaţie în care, conform figurii 14.27, *cosα* are valoarea:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(l_2^2 + a^2)(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi) - 2al_2(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi - l_1^2 \sin^2\varphi) - l_1^2 l_2^2 \sin^2\varphi}{(l_2^2 + a^2)(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi) - 2al_2(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi - l_1^2 \sin^2\varphi)}}. \tag{10}$$

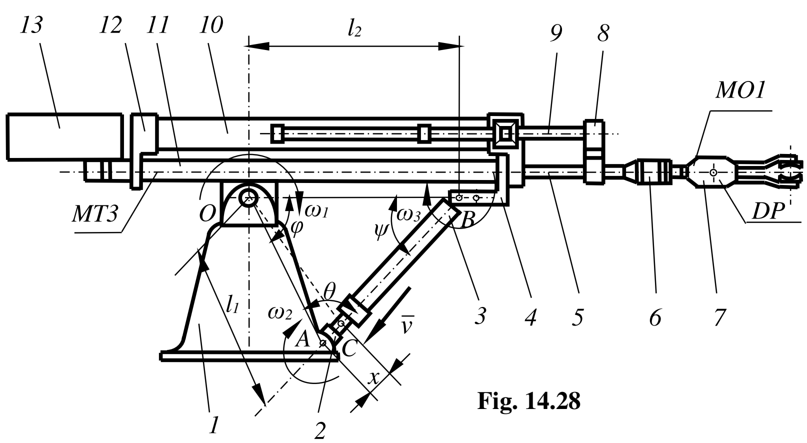


Fig. 14.28

Modulul de basculare, prezentat schematic în figura 14.27, constituie parte componentă a robotului industrial electrohidraulic VIPAS 1. În figura 14.28 se prezintă, în principiu, asamblarea modulului cu braţul robotului, în structura căruia intră: modulul de translaţie MT3, modulul de orientare MO1 şi dispozitivul de prehensiune acţionat pneumatic.

14.4 Probleme propuse

14.4.1. Un punct M porneşte din vârful O al unui con şi se mişcă uniform pe generatoarea conului cu viteza $\overline{u}$, în timp ce conul se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$. Să se afle mărimea vitezei şi acceleraţiei absolute a punctului M după (t) secunde de la începutul mişcării (fig. 14.29).

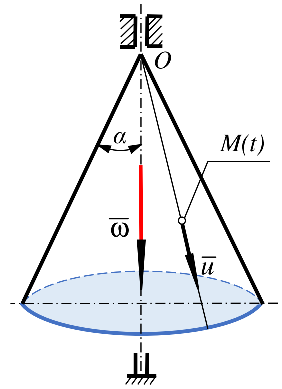


Fig. 14.29

Răspuns:

$$v_a = u\sqrt{1+\omega^2 t^2 \sin^2 \alpha}$$
$$a_a = \omega u \sin \alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}.$$

14.4.2. Un tub drept orizontal se roteşte în jurul unei axe verticale cu viteza unghiulară constantă ω. În tub se găseşte o bilă care alunecă în lungul axei tubului după legea:

$$r = \frac{k}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right),$$

unde: r reprezintă distanţa de la bilă până la axa de rotaţie a tubului. Să se determine modulul vitezei şi al acceleraţiei absolute a bilei în funcţie de r (fig. 14.30).

Răspuns:

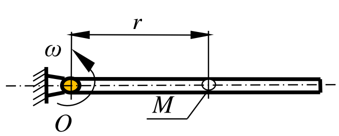


Fig. 14.30

$$v_a = \omega\sqrt{2r^2 - k^2}, \; a_a = 2\omega^2\sqrt{r^2 - k^2}.$$

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

14.4.3. Un punct M se mişcă uniform pe un cerc de rază r, în sensul acelor de ceasornic, făcând n_1 ture pe secundă; cercul se roteşte în acelaşi timp şi în jurul centrului său în sens opus, cu n rotaţii pe secundă. Să se determine valoarea acceleraţiei absolute a punctului M.

Răspuns: $a_a = r\pi^2 4(n - n_1)^2$.

14.4.4. Pe o coardă AB a unui disc (fig. 14.31), care se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui ax perpendicular în centrul O pe planul discului, se deplasează un punct M care a pornit din mijlocul C al coardei cu viteza relativă constantă $\overline{u}$. Distanţa de la centrul O al discului până la coarda AB este a. Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului M în funcţie de x.

Răspuns:

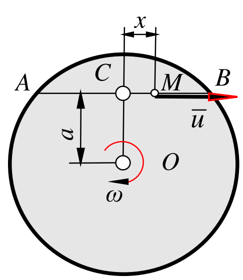


Fig. 14.31

$$v_a = \sqrt{\omega^2 x^2 + (u + \omega a)^2};$$

$$a_a = \omega\sqrt{\omega^2 x + (2u + \omega a)^2}.$$

14.4.5. O bară cotită în unghi drept OAB se roteşte în sens orar, cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul articulaţiei fixe O şi intersectează în punctul M bara fixă CD. Să se determine pe cale grafică viteza şi acceleraţia punctului M în mişcarea sa pe cele două bare (fig. 14.32) într-o poziţie oarecare (r, d şi ω se aleg arbitrar).

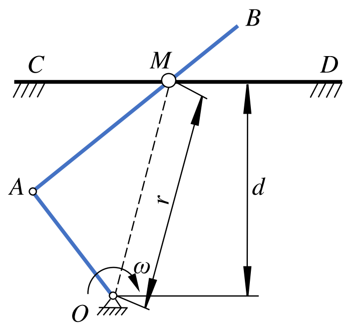


Fig. 14.32

14.4.6. Se consideră mecanismul din figura 14.33 format din barele O_1M şi O_2N articulate cilindric în punctele O_1 şi O_2 şi legate între ele prin culisa M. Să se determine grafic vitezele şi acceleraţiile culisei M, pentru poziţia mecanismului aleasă arbitrar, în următoarele cazuri:

a) Bara $O_1 M$ se roteşte cu ω_1 constant în jurul lui O_1;

b) Bara $O_2 N$ se roteşte cu ω_2 constant în jurul lui O_2.

Rotaţiile vor fi alese în ambele sensuri posibile.

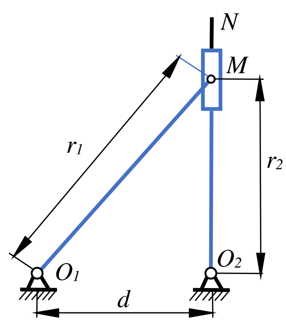


Fig. 14.33

14.4.7. Se consideră cadrul dreptunghiular *ABCD* ($AD = a$) din figura 14.34 care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = \omega_0$ (ω_0 = constant) şi un punct material *M* care cade liber (cu acceleraţia $\overline{g}$) în interiorul tubului *CD* solidar cu cadrul şi paralel cu axa verticală de rotaţie. Se cer să se determine pentru punctul *M* viteza absolută $\overline{v}_a$ şi acceleraţia absolută $\overline{a}_a$ la momentul (t).

 [9] Ispas, V., Pop, A. F., 2009.

Răspuns:

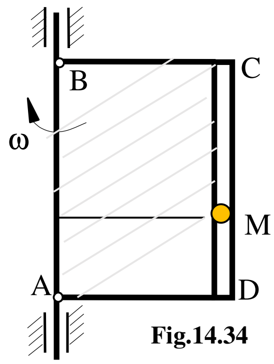


Fig.14.34

$$v_a = \sqrt{a^2\omega_0^2 + g^2t^2}\ ;$$
$$a_a = \sqrt{g^2 + \omega^4 a^2}\ .$$

14.4.8. Se consideră cadrul semicircular *AB* de rază *R* care se roteşte cu viteza unghiulară ω = ω_0 (constantă) în jurul unui diametru vertical, precum şi un punct material *M* care se deplasează pe arcul *AB* solidar cu cadrul, plecând din M_0 cu viteza constantă v_0. Se cer să se determine pentru *M* viteza absolută $\bar{v}_a$ şi acceleraţia absolută $\bar{a}_a$ la momentul (*t*) (fig. 14.35).

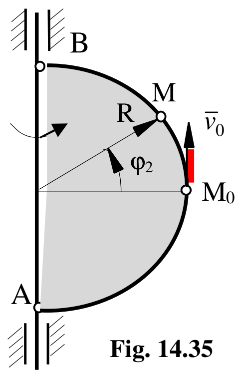


Fig. 14.35

Răspuns:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 R^2 \cos^2\varphi_2}\ .$$
$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R} + R\omega_0^2\right)^2 + \left(4\omega_0^2 v_0^2 + \frac{v_0^4}{R^2}\sin^2\varphi_2\right)}\ .$$

III. DINAMICA

15. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL [5]

Dinamica este a treia parte a mecanicii teoretice şi cea mai complexă dintre acestea, ea ocupându-se cu studiul mişcării unui punct material, corp (solid rigid) sau sistem de corpuri (solide rigide) ținând cont de caracterul material şi de cauzele care produc mişcarea. Dinamica punctului material studiază cauzele mişcării punctului material/rigidului aflat sub acțiunea unor forțe şi a cărui mişcare se raportează la un sistem de referință inerțial.

15.1 Principiile dinamicii newtoniene

15.1.1 Noţiuni introductive

În mecanică, pentru a evidenția mişcarea corpurilor este necesară alegerea unui *sistem de referință (reper),* acesta putând fi *fix* sau *mobil*. Din această cauză proprietățile mişcării depind de sistemul de referință utilizat. În mecanică cel mai convenabil este să se aleagă un *sistem de referinţă inerţial* față de care este valabilă legea lui Newton şi față de care *un punct material liber se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteză constantă în modul şi orientare*.

Trebuie ținut cont de faptul că sistemele de corpuri şi corpurile care ne înconjoară se găsesc în interacţiune directă, iar interacțiunea dintre corpuri este prezentă printr-un vector numit forţă. Inițial, pentru simplificarea demonstrațiilor corpul/solidul rigid se va reduce la un punct material liber de dimensiuni neglijabile şi aflat sub acțiunea forţelor exterioare.

15.1.2 Principiile dinamicii

Legile lui Newton sau **principiile fundamentale ale mecanicii** sunt *trei legi* sau *principii ale fizicii* care redau o legătură directă între forțele care acționează asupra unui punct material sau corp şi mişcarea acelui punct/corp (solid rigid). Aceste principii au fost enunțate pentru prima dată de Isaac Newton prin prisma continuării experimentelor efectuate de Galilei. Aceste trei legi sau principii formează baza mecanicii clasice, experimentate de Newton pentru a explica mişcarea obiectelor fizice. De asemenea, Newton a arătat că aceste legi în combinație cu legea atracției universale, redau legile lui Kepler privind mişcarea planetelor. De menționat că toate aceste principii se referă la *corpuri macroscopice* care se mişcă cu viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid ($3 \cdot 10^8$ m/s), iar dacă această valoare este depăşită, atunci mişcările lor se supun mecanicii relativiste a lui Einstein.

În cele ce urmează, se vor enunța principiile mecanicii sau principiile lui Newton care constituie adevăruri și care nu trebuie demonstrate sau verificate.

- *Principiul I* sau *Principiul inerţiei*. Un punct material tinde să-şi menţină starea de repaus relativ sau de mişcare rectilinie şi uniformă atât timp cât nu se află sub acţiunea unor forţe exterioare.

- *Principiul II* sau *Principiul fundamental al dinamicii*. Variaţia în timp (*dt*) a mărimii impuls $\bar{p}$ a unui punct material este egală cu forţa rezultantă $\bar{F}$ ce acţionează asupra acestuia.

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} = m \cdot \bar{a}\,. \tag{15.1}$$

- *Principiul III* sau *Principiul acţiunii şi reacţiunii sau Principiul forței*.

Pentru două corpuri care se află în interacţiune, forţele ce acționează în parte asupra acestora sunt egale ca mărime, dar opuse ca sens. Aceste forţe se numesc *acţiune* şi *reacţiune* şi ele acționează asupra a două corpuri diferite.

15.2 Dinamica punctului material liber

Unul din scopurile urmărite la mişcarea dinamică a unui corp este determinarea *ecuației de mişcare* a lui sau a *ecuației traiectoriei*. Pentru a studia şi demonstra această problemă, în demonstrații se porneşte de la principiul al II-lea al dinamicii care ne permite scrierea ecuației diferențiale a mişcării. Ecuația diferențială rezultată va fi de ordinul al II-lea. De obicei, pentru soluționarea ei se apelează la condițiile inițiale ale mişcării cunoscute, în scopul determinării constantelor de integrare rezultate.

$$m\overline{a} = \overline{F} \ . \tag{15.2}$$

unde: m - masa punctului material;

$\overline{a}$ - accelerația punctului material;

$\overline{F}$ - rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului material.

Relația (15.2) este cunoscută ca *ecuația fundamentală a dinamicii*.

În dinamică forța $\overline{F}$ depinde de următoarele variabile: vectorul de poziție $\overline{r}$, viteza $\overline{v}$ şi de timp (*t*) astfel:

$$\overline{F} = \overline{F}\left(\overline{r}, \overline{v}, t\right) \ . \tag{15.3}$$

Cum accelerația şi viteza au relațiile: $\overline{a} = \ddot{\overline{r}}$; $\overline{v} = \dot{\overline{r}}$, ecuația (15.3) devine:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}\left(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t\right) \ . \tag{15.4}$$

Dinamica punctului material poate aborda rezolvarea problemelor în două moduri, de obicei numite *prima* şi *a doua problemă fundamentală a dinamicii,* ele fiind detaliate în cele ce urmează.

Simplist spus, *prima problemă* se referă la aflarea forțelor cunoscând ecuațiile mișcării, iar a *doua problemă* se referă la aflarea ecuațiilor de mișcare dacă se cunosc forțele.

- ***Problema directă*** sau *prima problemă fundamentală a dinamicii punctului material*:

Se cunosc ecuațiile de mișcare a punctului material și se determină forța $\bar{F}$ care imprimă punctului material de masă *m* mișcarea din figura 15.1.

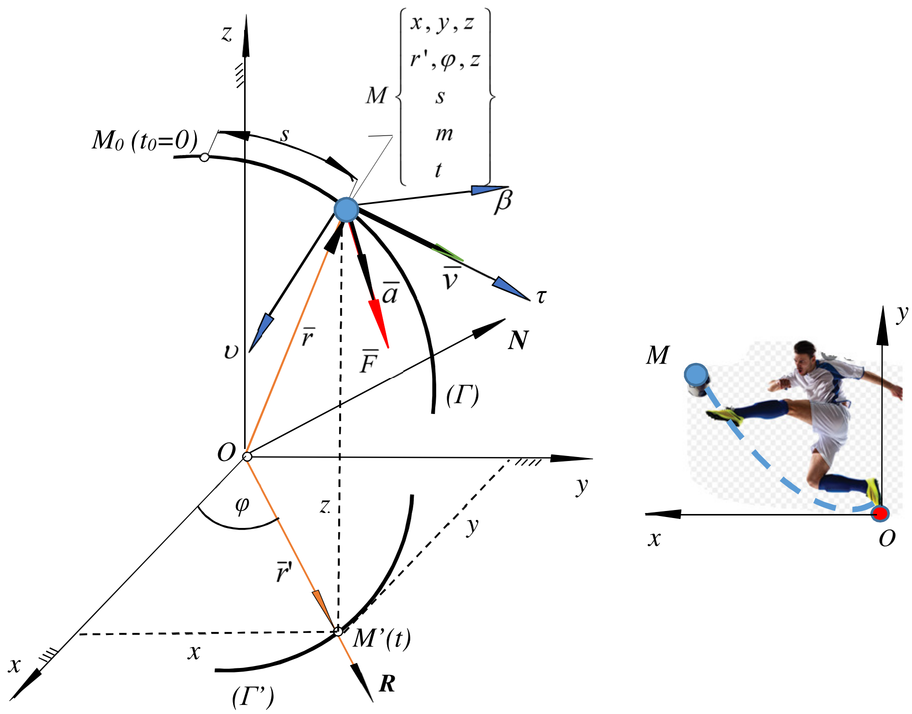


Fig. 15.1

Ecuațiile mișcării punctului material exprimate în diferite sisteme de coordonate, au următoarele forme:

$$\begin{cases} x = x(t) & \textit{(sistem de coordonate cartezian)} \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{15.5}$$

$$\begin{cases} r' = r'(t) & \textit{(sistem de coordonate cilindric)} \\ \varphi = \varphi(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{15.6}$$

$$s = s(t) \qquad \textit{(sistem de coordonate intrinseci)} \tag{15.7}$$

Proiectând ecuația vectorială (15.4) pe axele diferitelor sisteme de referință și ținând cont de relațiile (15.5) – (15.7), se obține forța $\bar{F}$ ca modul și direcție. Astfel,

- *În sistem de coordonate cartezian*

$$F_x = m\ddot{x}\,;\;\; F_y = m\ddot{y}\,;\; F_z = m\ddot{z}\,;$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,; \cos(\bar{F}, Ox) = \tfrac{F_x}{F};\; \cos(\bar{F}, Oy) = \tfrac{F_y}{F};\; \cos(\bar{F}, Oz) = \tfrac{F_z}{F}. \quad (15.8)$$

- *În sistem de coordonate cilindric*

$$F_r = m\left(\ddot{r}' - r'\dot{\varphi}^2\right); \quad F_n = m\left(r'\ddot{\varphi} + 2\dot{r}'\dot{\varphi}\right); \quad F_n = m\ddot{z}\,;$$

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_n^2 + F_z^2}\,;\; cos(\bar{F}, OR) = \frac{F_r}{F};\; cos(\bar{F}, ON) = \frac{F_n}{F};\;\; cos(\bar{F}, OZ) = \frac{F_z}{F}. \quad (15.9)$$

- *În sistem de coordonate intrinsec*

$$F_\tau = m\ddot{s}\,;\;\; F_\vartheta = \frac{\dot{s}^2}{\rho};\; F_\beta = 0\,;$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_\vartheta^2 + F_\beta^2}\,;\; \cos(\bar{F}, M\tau) = \tfrac{F_\tau}{F}; \quad \cos(\bar{F}, M\vartheta) = \tfrac{F_\vartheta}{F};\; \cos(\bar{F}, M\beta) = 0\,. \quad (15.10)$$

• ***Problema inversă*** sau *a doua problemă fundamentală a dinamicii punctului material*

Se determină ecuația vectorială sau ecuațiile scalare ale traiectoriei punctului material, cunoscând forța, poziția și viteza punctului la un moment dat prin vectorul de poziție:

$$r = r\,(t)\,. \quad (15.11)$$

Ecuația vectorială a mișcării punctului material se poate afla printr-o dublă integrare a ecuației (15.2).

Proiectând ecuația (15.2) pe axele diferitelor sisteme de coordonate, se obțin ecuațiile diferențiale scalare ale mișcării punctului material. Astfel, *a) în coordonate carteziene:*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}; \tag{15.12}$$

b) în coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} m(\ddot{r}' - r'\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(r'\ddot{\varphi} + 2\dot{r}'\dot{\varphi}) = F_n \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}; \tag{15.13}$$

c) în coordonate intrinseci:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\vartheta \\ 0 = F_\beta \end{cases}. \tag{15.14}$$

O particularitate a mişcării este cazul în care traiectoria punctului este o curbă plană de ecuație ($z = 0$) astfel că, în sistemele de ecuaţii (15.12) – (15.14) nu apare coordonata z. În cazul mişcării rectilinii, ecuaţia devine: $m\ddot{x}=F$.

În acest al doilea caz, este cunoscută forța $\bar{F}$ care acționează asupra punctului, ea fiind funcție de timp, poziție și viteza punctului, respectiv sunt cunoscute și proiecțiile acestei forțe pe axele sistemului de referință ales. Se va studia mișcarea punctului material raportată la sistemul de referință cartezian. Forța $\bar{F}$ are expresia:

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t). \tag{15.15}$$

astfel, componentele carteziene ale forței sunt:

$$\begin{cases} F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \tag{15.16}$$

Pentru **a putea determina ecuaţiile mişcării, trebuie cunoscute condiţiile inţiale ale mişcării la momentul iniţial (t_0),** ele fiind date prin poziția inițială a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi viteza inițială $\bar{v}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, adică la momentul ($t_0$):

$$t_0 = 0, \qquad \begin{matrix} x = x_0\,,\; y = y_0\,, & z = z_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0\,,\; \dot{y} = \dot{y}_0\,, & \dot{z} = \dot{z}_0 \end{matrix}, \tag{15.17}$$

Se doreşte determinarea *ecuaţiilor de mişcare ale punctului material M*:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)\ . \tag{15.18}$$

Rezolvarea problemei se face plecând de la ecuaţiile diferenţiale (15.12) în care se introduc în membrul doi pentru F_x, F_y, F_z, expresiile (15.16). Se obţin astfel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\ . \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \tag{15.19}$$

Prin integrarea sistemului (15.19), rezultă coordonatele punctului în funcţie de timp şi de şase constante de integrare (C_i , $i = 1 \div 6$).

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\ . \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \tag{15.20}$$

Pentru determinarea celor şase constante de integrare se derivează în funcție de timp relaţiile (15.20), obținând:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\ . \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \tag{15.21}$$

Introducând condițiile inițiale ale mișcării în relațiile (15.20) și (15.21), se obțin constantele de integrare C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 din sistemul:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\
y_0 &= y_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\
z_0 &= z_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\
\dot{x}_0 &= \dot{x}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\
\dot{y}_0 &= \dot{y}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\
\dot{z}_0 &= \dot{z}_0(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)
\end{aligned} . \tag{15.22}$$

Astfel,

$$C_i = C_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), i = 1 \div 6 \tag{15.23}$$

Constantele de integrare astfel determinate se înlocuiesc în relaţiile (15.20), rezultând ecuaţiile de mişcare ale punctului material M:

$$\begin{aligned}
x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\
y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\
z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)
\end{aligned}$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) . \tag{15.24}$$

15.3 Dinamica punctului material aflat sub acţiunea forţei centrale

Se înțelege prin ***forţă centrală*** a unui punct material, o forţă care acţionează asupra acestuia şi *la care suportul ei trece în permanenţă printr-un punct fix numit centrul forței.* Mişcarea unui punct sub acţiunea unei forţe centrale se numeşte ***mişcare centrală.*** Problema mișcării punctului sub acțiunea unei forțe centrale este descrisă de **ecuația lui Binét**. Acesta prin studiile sale din 1831, cuprinse în lucrările „*Memorii asupra determinării mișcării orbitelor planetelor și cometelor*” și „*Memorii despre inegalitățile seculare ale mișcării planetelor*” din 1840, şi-a făcut cunoscute studiile privind demonstrarea ecuației care îi poartă numele.

În figura 15.2 se consideră un punct aflat sub acțiunea forței centrale $\overline{F}$ care trece prin punctul O. Se notează cu $\overline{\rho}$ - versorul vectorului de poziţie $\overline{r} = \overline{OM}$, astfel că forţa $\overline{F}$ se poate scrie:

$$\overline{F} = F\overline{\rho} . \tag{15.25}$$

Dacă forța din relația (15.25) este pozitivă $F > 0$, se va numi ***forţă repulsivă*** sau ***de respingere***, în caz contrar $F < 0$ se va numi ***forţa de atracţie*** sau ***atractivă***.

În continuare, se studiază mișcarea centrală a punctului *M*.

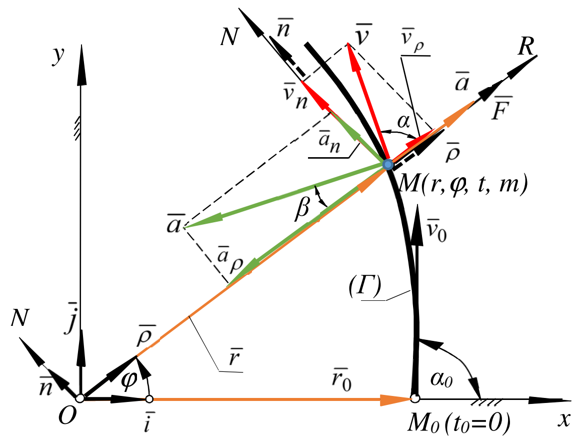


Fig. 15.2

15.3.1 Proprietăţile punctului material aflat în mişcare centrală

Pentru demonstrarea *primei proprietăți a mişcării centrale* se apelează la ecuaţia fundamentală a dinamicii dată de (15.2), care înmulțită vectorial la stânga cu vectorul de poziție $\bar{r}$ ($\bar{r}$ şi $\bar{F}$ sunt vectori coliniari), va deveni succesiv:

$$\bar{r}\times| \quad m\bar{a} = \bar{F} \tag{15.26}$$

$$\bar{r}\times m\bar{a} = \bar{r}\times\bar{F} = 0 \;\; |:m \quad . \tag{15.27}$$

Relația (15.27) se împarte cu masa *m* şi se transformă succesiv astfel:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times\bar{v})=\dot{\bar{r}}\times\bar{v}+\bar{r}\times\dot{\bar{v}}=\bar{v}\times\bar{v}+\bar{r}\times\bar{a}=\bar{r}\times\bar{a},$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times\bar{v})=0\ . \tag{15.28}$$

aşadar, $$\bar{r}\times\bar{v}=\overline{C};\ \overline{C}=\text{vector constant.} \tag{15.29}$$

Dacă relaţia (15.29) se înmulțeste scalar cu $\bar{r}$, se obţine *ecuaţia unui plan*:

$$\bar{r}\cdot(\bar{r}\times\bar{v})=\bar{r}\cdot\overline{C}=0\ . \tag{15.30}$$

Se consideră că proiecţiile vectorului constant $\overline{C}$ pe axele sistemului de referință *Oxyz* sunt C_x, C_y, C_z, *O* fiind centrul forțelor. Astfel, ecuaţia (15.30) devine:

$$C_x x+C_y y+C_z z=0\ . \tag{15.31}$$

Relaţia (15.31) reprezintă *ecuaţia unui plan care trece prin originea O şi care plan este normal pe vectorul* $\bar{C}$. Se desprinde astfel, *prima proprietate a mişcării centrale* şi anume: *Traiectoria unui punct material liber acţionat de o forţă centrală este plană, mişcarea având loc într-un plan ce conţine centrul forţelor.*

Pentru demonstrarea altor proprietăți ale mişcarii centrale şi pentru simplificarea studiului, se alege un sistem de referință polar (*RMN*) (fig. 15.2). Proiectând ecuaţia (15.26) pe direcţiile versorilor $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$ (fig. 15.2), se obţin ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării centrale, scrise sub forma:

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F \\ m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=0 \end{cases}. \tag{15.32}$$

A doua ecuaţie a sistemului (15.32) se poate scrie succesiv astfel:

$$r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}=\frac{1}{r}(r^2\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\dot{\varphi})=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=0\ . \tag{15.33}$$

Ținând cont că vectorul de poziție $\bar{r}$ este finit, rezultă că:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)=0, \tag{15.34}$$

de unde rezultă:

$$r^2\dot{\varphi}=C(const.)\,. \tag{15.35}$$

În mecanică, pentru a exprima semiprodusul vectorial $\bar{r}\times\bar{v}$ se introduce o mărime notată cu $\overline{\Omega}$:

$$\overline{\Omega}=\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}\text{, respectiv }\Omega=\frac{1}{2}r\,v\sin\alpha=\frac{1}{2}r\,v_n\,. \tag{15.36}$$

Relația (15.36) este numită ***viteză areolară***. Înlocuind în expresia vitezei areolare componenta vitezei $v_n = r\dot{\varphi}$, rezultă:

$$\Omega=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=\frac{1}{2}C\,. \tag{15.37}$$

Astfel că prin relaţia (15.37) rezultă cea de *a doua proprietate a mişcării centrale* *dată de viteza areolară*: *În mişcarea centrală, viteza areolară este constantă* sau *raza vectoare mătură arii egale în intervale de timp egale.*

Constanta *C*, care intervine în relaţiile (15.35) – (15.37) poartă numele de ***constanta ariilor*** şi se determină ţinând seama de condiţiile iniţiale ale mişcării.

$$C=r^2\dot{\varphi}=r\,v\sin\alpha=r_0\,v_0\sin\alpha_0\,. \tag{15.38}$$

Se înlocuieşte cea de a doua ecuaţie a sistemului (15.32) cu ecuaţia (15.38) și se obține:

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F \\ r^2\dot{\varphi} = C \end{cases} . \tag{15.39}$$

Din relația (15.39) se obțin soluţiile căutate la mişcarea centrală, respectiv: $r = r(t)$; $\varphi = \varphi(t)$ care sunt *ecuațiile parametrice ale traiectoriei* sau *ecuaţiile de mişcare* în coordonate polare. Prin eliminarea parametrului (t) din aceste ecuații, se obține *ecuaţia traiectoriei* sub formă explicită sau implicită:

$$r = r(\varphi),\ f(r, \varphi) = 0 . \tag{15.40}$$

Pentru simplificarea calculelor, se înlocuieşte sistemul dat cu o ecuaţie diferenţială având funcţia r şi variabila φ, astfel că sistemul (15.39) devine:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \\ \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m} \end{cases} . \tag{15.41}$$

Analizând prima ecuație a sistemului (15.41) şi efectuând calculele rezultă:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} , \tag{15.42}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} . \tag{15.43}$$

Înlocuind (15.43) în a doua ecuaţie din (15.41) şi notând:

$$u = \frac{1}{r} , \tag{15.44}$$

rezultă ***ecuaţia lui Binét,*** care este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F}{mC^2u^2}\ . \tag{15.45}$$

Ecuația (15.45) este ecuaţia traiectoriei unui punct material. Prin integrarea acesteia se obțin soluțiile:

$$u = u(\varphi, C_1, C_2)\ . \tag{15.46}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se impun condiţiile iniţiale ale mişcării, acestea fiind cunoscute la momentul $t_0 = 0$. Astfel, pentru $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$, $v = v_0$, rezultă:

$$r_0 = \frac{1}{u(\varphi_0, C_1, C_2)}\ . \tag{15.47}$$

Pentru că viteza la un moment dat este în funcţie de unghiul polar φ, aceasta devine:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_n^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{C^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}} = C\sqrt{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2}\ . \tag{15.48}$$

Introducând în (15.48) condițiile inițiale ale mișcării, având în vedere (15.46), se obține viteza inițială v_0, a cărei expresie este:

$$v_0 = C\sqrt{[u'(\varphi_0, C_1, C_2)]^2 + [u(\varphi_0, C_1, C_2)]^2}\ . \tag{15.49}$$

Din relaţiile (15.47) şi (15.49) se obţin constantele de integrare C_1 şi C_2 în funcţie de r_0, v_0 şi φ_0. Înlocuindu-le în (15.47), rezultă *ecuaţia traiectoriei de mişcare* sub formă polară:

$$r = \frac{1}{u(\varphi, r_0, v_0, \varphi_0)} \text{ sau } r = r(\varphi)\ . \tag{15.50}$$

Din a doua relație a sistemului (15.39), se poate scrie expresia:

$$dt = \frac{1}{C}r^2 d\varphi\ , \tag{15.51}$$

care va conduce prin integrare la soluția:

$$t = \frac{1}{C}\int r^2(\varphi)d\varphi + C_3 \,. \qquad (15.52)$$

Constanta de integrare C_3 se deduce impunând condiţia ca la momentul: $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$. Introducând expresia $C_3 = C_3(\varphi_0)$ în (15.52), se obţine:

$$\varphi = \varphi(t) \,. \qquad (15.53)$$

Având în vedere (15.53), relația (15.50) devine:

$$r = r(t) \,. \qquad (15.54)$$

***Utilitatea practică a cunoaşterii ecuaţiei lui Binét* a condus la determinarea *vitezelor cosmice*:**

Viteza cosmică se referă la viteza minimă necesară unei nave spaţiale ca să se rotească în jurul Pământului și să nu fie influențată de gravitaţia Terrei sau să poată părăsi sistemul solar. Tot Newton şi-a dat seama că un proiectil lansat cu o viteză suficient de mare va putea să se rotească în jurul Pământului pe o orbită geostaționară. Dacă viteza acestuia va crește și mai mult, vehiculul ar putea părăsi definitiv Pământul. Astfel, s-au demonstrat cele trei valori ale vitezelor cosmice fără să se insiste asupra demonstrării valorii acestora. În continuare, se prezintă cele trei viteze cosmice:

Prima viteză cosmică este aproximativ **7,9 km/s**.

A doua viteză cosmică este aproximativ **11,2 km/s**, fiind viteza necesară a unei nave spaţiale pentru a părăsi definitiv Pământul.

A treia viteză cosmică este aproximativ **16,7 km/s**, fiind viteza minimă a unei nave spaţiale pentru a ieşi din sistemul solar.

15.4 Dinamica punctului material supus la legături

Legătura este dată prin orice constrângere de natură geometrică sau fizică.

Conform axiomei legăturilor, orice legătură poate fi suprimată și înlocuită cu forţe de legătură sau reacţiuni care să producă acelaşi efect asupra punctului material. Astfel, prin eliminarea legăturilor de orice fel, mişcarea unui punct material devine mişcare liberă.

Exemple de legături la care este supus un punct material pot fi: rezemarea pe o suprafaţă sau pe o curbă. Pentru simplificarea studiului punctului material, se consideră că suprafața (curba) este *fixă* şi *indeformabilă în timp*.

Fie un punct material M de masă *m* aflat pe o suprafață aspră (Σ), asupra căruia acționează forțele exterioare $\overline{F}_i$, $i = 1 \div n$, a căror rezultantă este $\overline{R}(R_x, R_y, R_z)$. Se va analiza *mişcarea punctului pe suprafața aspră* (fig.15.3) considerând ca forțe de legătură reacțiunea normală la suprafaţă notată cu $\overline{N}$ şi componenta tangenţială notată cu $\overline{T}$. Forța $\overline{N}$ este numită *reacţiune normală* și are direcţia normalei la suprafaţă şi modulul N necunoscut, iar forța $\overline{T}$ este numită *forţă de frecare* și are sensul contrar vectorului viteză şi modulul egal cu produsul dintre coeficientul frecării de alunecare μ şi mărimea reacţiunii normale N, adică $T = \mu N$.

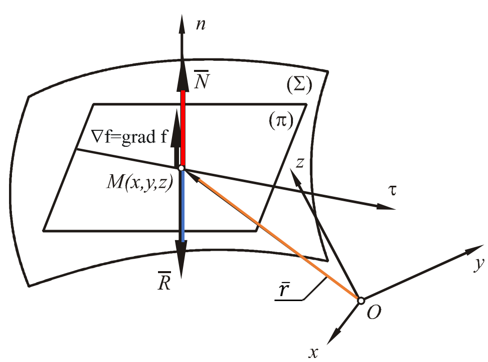


Fig. 15.3

Analizând cazul particular al unui punct material aflat în mişcare pe *o curbă aspră* (Γ) sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare date de rezultantă $\overline{R}$, forţa de legătură are două componente: *componenta normală* $\overline{N}$ situată în planul normal la curbă, determinarea ei solicitând cunoaşterea a doi parametri prin care să i se precizeze direcţia şi modulul și *componenta tangenţială* $\overline{T}$, având direcția vitezei, dirijată în sens contrar acesteia.

Ecuaţia vectorială a mişcării în acest caz devine:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{R} + \overline{N} + \overline{T} \ , \tag{15.55}$$

unde: $\overline{R}\left(R_x, R_y, R_z\right)$ reprezintă vectorul rezultant a forţelor exterioare date, care acţionează asupra punctului material.

15.4.1 Mişcarea punctului material pe o suprafaţă aspră

În cazul mişcării punctului material *pe o suprafață aspră* cele două componente ale forței de legătură sunt date de relațiile:

$$\overline{N} = \lambda \nabla f \ , \tag{15.56}$$

$$\overline{T} = -\mu N \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \ . \tag{15.57}$$

Modulul N al reacțiunii normale se obține din (15.56) astfel:

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \ . \tag{15.58}$$

Ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării obținute din proiectarea relaţiei (15.55) pe axele sistemului de referinţă ales *Oxyz*, sunt următoarele:

$$m\ddot{x} = R_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - \mu\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$m\ddot{y} = R_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} - \mu\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad . \tag{15.59}$$

$$m\ddot{z} = R_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} - \mu\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

La relațiile (15.59) se adaugă şi ecuaţia suprafeţei:

$$f(x,y,z) = 0\ , \tag{15.60}$$

astfel că sistemul format din (15.59) și (15.60) în necunoscutele *(Rx, Ry, Rz)* şi λ poate fi rezolvat.

15.4.2 Mişcarea punctului material pe o curbă

În cele ce urmează, se analizează mişcarea punctului pe o *curbă aspră* sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare de rezultantă $\bar{R}$, ale cărei ecuații sunt: $f_1(x,y,z) = 0$, $f_2(x,y,z) = 0$.

Fie (Γ) o curbă aspră și un punct M în mișcare pe această curbă. Aplicând axioma legăturilor, se introduc forțele de legătură $\overline{N}$ și $\overline{T}$, exprimate astfel:

$$\overline{N} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2\ , \tag{15.61}$$

$$\overline{T} = -\mu N\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\,. \tag{15.62}$$

Modulul reacțiunii normale N, având în vedere (15.61), este:

$$N = \sqrt{\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}\,. \tag{15.63}$$

Ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării pe axele sistemului de referinţă *Oxyz* pot fi scrise astfel:

$$m\ddot{x}=R_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}-\mu\sqrt{\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}\,\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$
$$m\ddot{y}=R_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}-\mu\sqrt{\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}\,\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$
$$m\ddot{z}=R_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}-\mu\sqrt{\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}\,\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$
(15.64)

La relaţiile (15.64) se adaugă ecuaţiile curbei:

$$f_1(x,y,z) = 0,\ f_2(x,y,z) = 0\,. \qquad (15.65)$$

Cunoscând condițiile inițiale ale mișcării, prin integrarea ecuaţiilor diferențiale (15.59) sau (15.64) și utilizarea relațiilor (15.61) și (15.65), se obţin *ecuaţiile de mişcare ale punctului material pe o suprafaţă* sau *curbă aspră,* precum și parametri λ *sau* λ_1, λ_2. *Ecuațiile de mișcare ale punctului* se obțin de forma:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (15.66)$$

15.5 Pendulul simplu

Una din cele mai des întâlnite aplicații ale dinamicii punctului material este pendulul matematic.

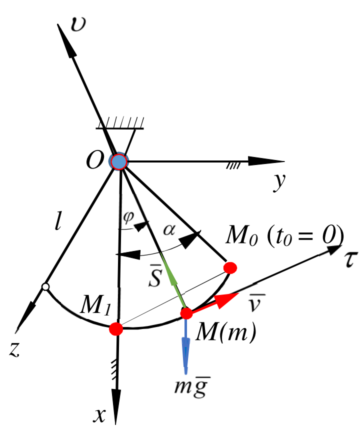
Pendulul matematic sau ***pendulul simplu*** este constituit dintr-un punct material suspendat printr-un fir ideal (perfect flexibil, inextensibil şi fără greutate) care oscilează într-un plan vertical, în jurul unui punct de suspensie sub acţiunea propriei greutăţi, toate acestea în ipoteza neglijării forţelor de frecare.

Dacă pendulului i se imprimă o mişcare de balans (oscilaţie), se va observa, în cele ce urmează, că *perioada de oscilaţie* (*T*) este aceeaşi pentru o lungime dată şi nu este influenţată de greutatea suspendată, respectiv masa pendulului sau între anumite limite, de amplitudinea oscilaţiei.

Această aplicație este întâlnită des la construcţia instrumentelor de măsurare a timpului, precum a pendulelor şi a orologiilor (fig. 15.4b.) etc. De asemenea, prin măsurarea perioadei oscilaţiilor care este influenţată de gravitaţie, se poate calcula ca aplicație valoarea acceleraţiei gravitaţionale ($\bar{g}$) in diferite zone geografice ale Pământului.

În studiu, se consideră un punct material M de masă m (fig. 15.4a.), suspendat în plan vertical printr-un fir flexibil şi inextensibil de lungime l şi care oscilează în jurul punctului de suspensie O, având un unghi φ față de verticală şi o mişcare caracteristică unui pendul matematic. Pendulul este lăsat să oscileze din poziţia inițială în care unghiul $\varphi = \alpha$, fără viteză inițială. Analizarea mişcării punctului material M se face raportat la un sistem de referință intrinsec $M\tau\upsilon\beta$.

Studiul urmăreşte obţinerea *ecuaţiei mişcării* oscilatorii a punctului M şi a *perioadei oscilaţiilor* T.



a.

b.

Fig. 15.4

Se observă din figura 15.4a că asupra punctului M acţionează pe lângă greutatea $\bar{G} = m\bar{g}$ şi forța de legătură $\bar{S}$, numită ***tensiune din fir***, rezultată prin suprimarea legăturii din fir.

Astfel că necunoscutele problemei sunt *ecuaţia diferenţială a mişcării* şi *tensiunea din fir*. În demonstrare se pleacă de la legea a doua a lui Newton și anume:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{S} \ . \tag{15.67}$$

În relația (15.67) accelerația $\bar{a}$ se înlocuiește cu componentele sale intrinseci după axele $M\tau$ şi $M\upsilon$, cunoscute din cinematică și anume: $a_\tau = l\varepsilon = l\ddot{\varphi}; \quad a_\upsilon = l\omega^2 = l\dot{\varphi}^2$. Proiectând relația vectorială (15.67) pe axele $M\tau$ şi $M\upsilon$ se obțin ecuațiile diferențiale scalare:

$$ml\ddot{\varphi} = -mgsin\varphi \ , \tag{15.68}$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = S - mgcos\varphi \ . \tag{15.69}$$

În continuare, se studiază două cazuri ale mişcării pendulului matematic şi anume:

- cazul *micilor oscilații* când unghiul $\varphi \leq 5^0$ şi cazul *marilor oscilații* când unghiul $\varphi > 5^0$.

a) În primul caz, se analizează mişcarea punctului material în cazul **micilor oscilaţii** pentru ($\varphi \leq 5^0$) la care se pot face aproximaţiile, în conformitate cu dezvoltările în serii de tip Taylor: $\sin\varphi \approx \varphi; \cos\varphi \approx 1$. Astfel ecuația (15.68), după unele calcule, devine:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \ . \tag{15.70}$$

Dacă se notează în ecuația (15.70):

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}} \ , \tag{15.71}$$

soluţiile ecuaţiei sunt:

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1cos(pt) + C_2sin(pt) \\ \dot{\varphi} &= -pC_1sin(pt) + pC_2cos(pt) \end{aligned} \tag{15.72}$$

Impunând condiţiile iniţiale cunoscute la momentul $t_0 = 0$, respectiv $\varphi_0 = \alpha$ și $\dot{\varphi}_0 = 0$, se deduc constantele de integrare $C_1 = \alpha$, $C_2 = 0$. Astfel, ***ecuaţia mişcării oscilatorii*** devine:

$$\varphi = \alpha cos(pt) \, , \tag{15.73}$$

în care: p – este pulsaţia mişcării;

α – este amplitudinea unghiulară.

Perioada micilor oscilaţii ale pendulului se determină cu relația:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{15.74}$$

Din relația (15.74) se observă că *în cazul micilor oscilaţii, acestea sunt izocrone (au aceeaşi perioadă) şi că perioada variază liniar cu radicalul lungimii pendulului, nedepinzând de masa acestuia.*

Din a doua ecuație (15.69) se poate determina tensiunea S din *fir*,

$$S = mgcos\varphi + ml\dot{\varphi}^2 \tag{15.75}$$

b) În cazul al doilea, respectiv cel al **marilor oscilații** pentru $\varphi > 5^0$, perioada oscilaţiilor se aproximează astfel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \, . \tag{15.76}$$

Se notează cu: A – amplitudinea metrică a mișcării, $A = M_0M_1$ și cu $sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{A}{2l}$, astfel relația (15.76) corespunzătoare perioadei T în cazul marilor oscilații devine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\frac{A^2}{l^2}\right) \, . \tag{15.77}$$

Din relațiile (15.74) şi (15.77) se pot deduce *acceleraţiile gravitaţionale în cazul micilor* şi *marilor oscilaţii,* respectiv:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad . \tag{15.78}$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\left(1 + \frac{1}{16}\frac{A^2}{l^2}\right)^2 \quad . \tag{15.79}$$

În conformitate cu [3], cunoscând accelerațiile gravitaționale la Polul Pământului (9.831 m/s^2) şi la Ecuator (9.781 m/s^2), se determină accelerația gravitațională într-o locație geografică, dar cu condiția determinării inițiale a variației geografice pentru un grad latitudine şi cunoscând latitudinea nordică a acelei locații.

15.6 Dinamica mişcării relative a punctului material

Pentru studiul mişcării relative se consideră un punct material *M,* de masă *m*, asupra căruia acţionează un sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i$, $i = 1 \div n$, acestea având rezultanta $\bar{F}$. Mişcarea este raportată la două sisteme de referinţă şi anume: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi altul mobil *Oxyz.* Punctul material se află într-o mişcare oarecare (fig. 15.5).

Se consideră cunoscută mişcarea sistemului de referinţă mobil în raport cu sistemul de referinţă fix, definită de parametri geometrici și cinematici ($\bar{r}_0, \bar{v}_0, \bar{a}_0, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$). Studiul analizează mişcarea punctului material *M* faţă de sistemul de referinţă mobil, respectiv urmărește determinarea *ecuaţiilor de mişcare relativă* ale punctului material *M* scrise sub forma:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{15.80}$$

La mişcarea absolută, punctul material *M* se mişcă după legea lui Newton respectiv:

$$m\bar{a}_a = \bar{F} \quad . \tag{15.81}$$

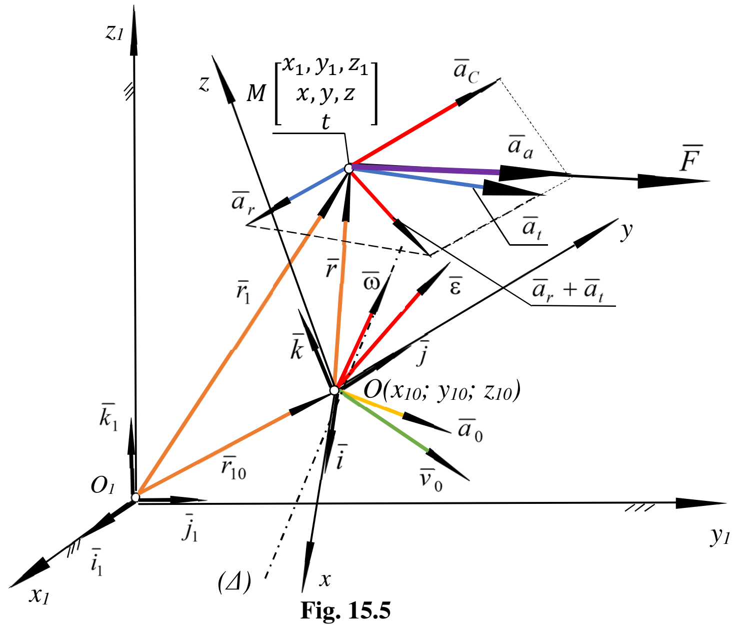


Fig. 15.5

La studiul *mişcării relative a punctului* au fost definite următoarele accelerații:

$\bar{a}_a$ - este *acceleraţia absolută* a punctului *M* în raport cu sistemul de referinţă fix;

$\bar{a}_t$ - este *acceleraţia de transport* a punctului *M;*

$\bar{a}_r$ - este *acceleraţia relativă* a punctului *M;*

$\bar{a}_c$ - este *acceleraţia Coriolis* a punctului *M.*

Conform *legii de compunere a acceleraţiilor în mişcarea relativă* a punctului material, *accelerația absolută* a punctului are expresia:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \ . \tag{15.82}$$

Se înlocuiește acceleraţia absolută $\bar{a}_a$ în relaţia (15.81) şi se obţine:

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_t + m\bar{a}_c = \bar{F} \ , \tag{15.83}$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c \ . \tag{15.84}$$

Se înlocuiesc *accelerația de transport* $\bar{a}_t$ şi *accelerația Coriolis* $\bar{a}_C$ cu expresiile: $\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ și $\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ și se introduc notațiile $\bar{F}_{jt}$ și $\bar{F}_{jc}$ astfel:

$$-m\bar{a}_t = -m[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})] = \bar{F}_{jt}\ , \tag{15.85}$$

$$-m\bar{a}_c = -m[2\bar{\omega}\times\bar{v}_r] = \bar{F}_{jc}\ , \tag{15.86}$$

Cu notaţiile (15.84) – (15.86), ecuaţia (15.83) devine:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_{jt} + \bar{F}_{jc}\ . \tag{15.87}$$

În ecuația (15.87) vectorii $\bar{F}_{jt}, \bar{F}_{jc}$ se numesc ***forţă inerţială de transport*** şi ***forţă inerţială Coriolis***, având expresiile (15.85) şi (15.86). Ecuaţia (15.87) se numeşte ***ecuaţia fundamentală a mişcării relative*** a punctului material.

Ca şi observație, comparând (15.87) cu (15.81), rezultă că mişcarea relativă a punctului se tratează analog cu mişcarea absolută cu deosebirea că, în membrul doi al ecuaţiei diferenţiale vectoriale trebuie adăugate pe lângă rezultanta forţelor exterioare $\bar{F}$ şi forţa inerţială de transport $\bar{F}_{jt}$, precum şi forţa inerţială Coriolis $\bar{F}_{jc}$.

În cazul *punctului material supus la legături*, forţa $\bar{F}$ conţine atât rezultanta forţelor date $\bar{R}$ cât şi reacţiunea forțelor de legătură $\bar{R}_l$. Astfel,

$$\bar{F} = \bar{R} + \bar{R}_l; \quad \bar{R} = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i; \quad \bar{R}_l = \bar{N} + \bar{T}; \quad \bar{T} = -\mu N\frac{\bar{v}_r}{|\bar{v}_r|}\ . \tag{15.88}$$

Proiectând ecuaţia vectorială (15.87) pe axele sistemului de referinţă ales *Oxyz* şi ţinând seama de (15.88), se obţin *ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării relative* a punctului material:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_x + R_{lx} + F_{tx} + F_{cx} \\ m\ddot{y} &= R_y + R_{ly} + F_{ty} + F_{cy} \\ m\ddot{z} &= R_z + R_{lz} + F_{tz} + F_{cz} \end{aligned}\ . \tag{15.89}$$

La relațiile (15.89) se adaugă şi ecuaţiile legăturii punctului material. Astfel, studiul se face ca și în cazul unui *punct material liber*.

Prin dubla integrare a ecuaţiilor (15.89) şi ţinând seama de condiţiile iniţiale ale mişcării precizate mai jos la momentul (t_0):

$$t_0 = 0, \qquad \begin{matrix} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0, & \dot{y} = \dot{y}_0, & \dot{z} = \dot{z}_0 \end{matrix}, \tag{15.90}$$

se obţin *ecuaţiile mişcării relative a punctului material M,* respectiv:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \ . \tag{15.91}$$

- Dacă vorbim de *punctul material legat,* se iau în considerare şi ecuaţiile legăturii şi forţa de legătură $R_l = \sqrt{N^2 + T^2}$.

- Dacă viteza relativă şi acceleraţia relativă sunt nule $\bar{v}_r = 0, \bar{a}_r = 0,$ punctul material se găseşte în *repaus relativ* faţă de sistemul de referinţă mobil. Deoarece $\bar{F}_{jc} = -m(2\bar{\omega} \times \bar{v}_r),$ rezultă în acest caz că $\bar{F}_{jc} = 0$, iar ecuaţia (15.87) devine:

$$\bar{F}_{jt} + \bar{F} = 0 \ . \tag{15.92}$$

Relaţia (15.92) exprimă *condiţia vectorială a* ***repausului relativ,*** adică *în cazul repausului relativ, suma vectorială dintre rezultanta forţelor date şi de legătură care acţionează asupra punctului material şi forţa inerţială de transport este nulă.*

Condiția necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia diferenţială (15.87) să ia forma ecuaţiei diferenţiale absolute este:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} \ . \tag{15.93}$$

$$\overline{F}_{jt} + \overline{F}_{jc} = 0 \ . \tag{15.94}$$

$$-m\left[\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) + 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r\right] = 0 \ , \tag{15.95}$$

Ecuaţia (15.95) este adevărată dacă:

$$\overline{a}_0 = 0, \ \overline{\omega} = 0, \ \overline{\varepsilon} = 0 \ , \tag{15.96}$$

respectiv, dacă *mişcarea de transport a sistemului de referinţă mobil este o mişcare de translaţie, rectilinie şi uniformă. Doar în acest caz,* ecuaţia mişcării relative a punctului material are aceeaşi formă ca şi în cazul mişcării absolute. În aceste condiții, sistemul de referinţă mobil care satisface condiţiile (15.96) devine *sistem de referinţă inerţial*.

15.7 Probleme rezolvate

15.7.1. Să se determine legea mişcării unui punct material M de masă m, (fig. 15.6) care se mişcă în câmp gravitațional de la înălțimea h, cu viteza inițială v_0 şi care face cu orizontala un unghi α.

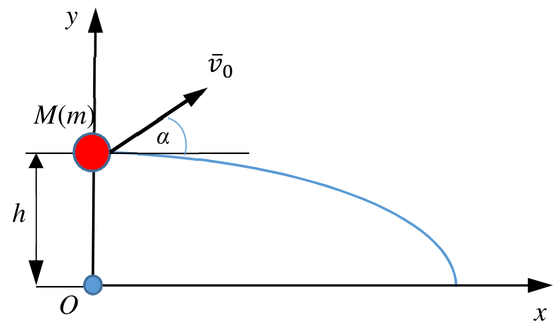


Fig. 15.6

Soluție:

La momentul inițial $t_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.
Dacă se aplică teorema a doua a lui Newton:

$$m\bar{a} = \bar{R} \,, \tag{1}$$

Mișcarea punctului este în planul xOy. Proiectând (1) pe axele sistemului Ox și Oy se obțin ecuațiile diferențiale:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg; \quad m\ddot{z} = 0 \,, \tag{2}$$

relațiile (2) prin împărțire la masa m sunt rescrise sub forma:

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g; \quad \ddot{z} = 0 \,. \tag{3}$$

Printr-o dublă integrare a ecuațiilor diferențiale (3) şi ținând cont de condițiile inițiale date de problemă la momentul $t_0 = 0$, se scriu succesiv următoarele relații:

$$\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = C_1\,; \;\; \rightarrow x = C_1 t + C_2, \qquad (4)$$
$$C_1 = v_0 cos\alpha; \quad C_2 = 0\,.$$

$$\ddot{y} = -g \rightarrow \dot{y} = -gt + C_3\,; \;\; \rightarrow y = \frac{-gt^2}{2} + C_3 t + C_4\;, \qquad (5)$$
$$C_3 = v_0 sin\alpha; \quad C_4 = h\,.$$

Înlocuind constantele de integrare C_i, $i = 1 \div 4$ în relațiile (4)-(5) rezultă *ecuațiile parametrice ale mișcării punctului M*: $x = x(t)$, $y = y(t)$ astfel,

$$x = v_0 t\, cos\alpha; \qquad y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t sin\alpha + h\;. \qquad (6)$$

Eliminând din relațiile (5) parametrul (t), se obține *ecuația traiectoriei* mişcării dată de relatia (8):

$$t = x / v_0 cos\alpha. \qquad (7)$$
$$y = \frac{-g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2 + x\, tg\alpha + h\,. \qquad (8)$$

15.7.2. Să se determine legea mişcării unui punct material *M* de masă *m*, care se mişcă în câmp gravitațional, el fiind aruncat vertical de la înălțimea *H* cu viteza inițială v_0 pe verticală (fig. 15.7).

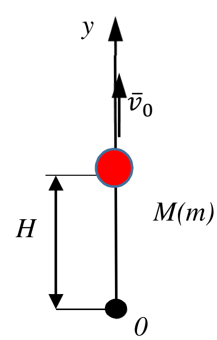


Fig. 15.7

Soluție:

La momentul inițial $t_0 = 0$, $y_0 = H$, $v_{0y} = v_0$.
Dacă se aplică teorema a doua a lui Newton, se poate scrie:

$$m\bar{a} = \bar{R}\ . \tag{1}$$

Proiectând relația (1) pe axa Oy, se obține:

$$m\ddot{y} = -mg. \tag{2}$$

Din relația (2) rezultă prin împărtirea la masa m:

$$\ddot{y} = -g. \tag{3}$$

Integrând de două ori ecuația diferențială (3) şi ținând cont de condițiile inițiale date ale mişcării la momentul $t_0 = 0$, se pot scrie succesiv următoarele relații:

$$\ddot{y} = -g \rightarrow \dot{y} = -gt + C_1\ ;\ \rightarrow y = \frac{-gt^2}{2} + C_1 t + C_2\ , \tag{4}$$

$$C_1 = v_0;\ \ C_2 = H.$$

În final, după înlocuirea constantelor de integrare C_1, C_2 în relația (4), ecuația mişcării devine:

$$y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t + H\ . \tag{5}$$

15.8 Probleme propuse

15.8.1. Se consideră un punct material *A* de masă *m* care se deplasează pe o suprafaţă orizontală $A_0A_1 = L$, cu frecare ($\mu \neq 0$), pornind din punctul A_0 cu viteza iniţială v_0 dată de figura 15.8. Se cere să se studieze legea de mişcare a punctului material pe distanța A_0A_1 [4].

Fig. 15.8 [4]

Răspuns:

$$x(t) = -\mu g\frac{t^2}{2} + v_0 t; \quad legea\ de\ mişcare$$

15.8.2. Se consideră un punct material *A* de masă *m* care se deplasează pe un plan înclinat de unghi *α*, cu frecare ($\mu \neq 0$), pe linia de cea mai mare pantă, pornind din punctul A_0 cu viteza iniţială v_o dată (fig. 15.9) [4]. Se cer:

a) Să se determine *legea de mişcare la urcare* a punctului.

b) Să se determine *legea de mişcare la coborâre* a punctului dacă $\mu < tg\alpha$.

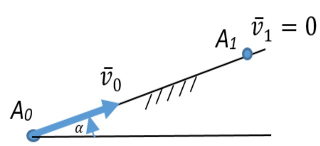


Fig. 15.9 [4]

Răspuns:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}(sin\alpha + \mu \cdot cos\alpha)gt^2; \quad legea\ de\ mişcare\ la\ urcare;$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(sin\alpha - \mu \cdot cos\alpha)gt^2; \quad legea\ de\ mişcare\ la\ coborare.$$

15.8.3. Se consideră un punct material *A* de masă *m* care se deplasează pe o suprafaţă cilindrică interioară de rază *R*, fără frecare (μ = 0), pornind din punctul A_0 cu viteza iniţială v_o (fig. 15.10). Se cer să se studieze legea de mişcare a punctului material şi reacțiunea din punctul *A*.

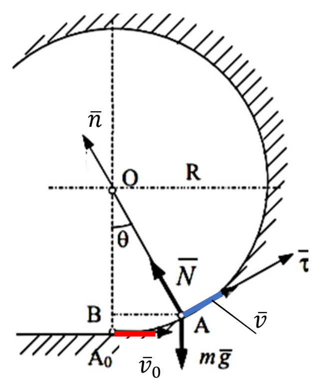


Fig. 15.10

Răspuns:

$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 - cos\theta)}$ *legea de mişcare.*

$N(\theta) = mg(3cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}$ *reacțiunea din punctul A.*

16. NOŢIUNILE FUNDAMENTALE ŞI TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE DINAMICII [5]

În vederea rezolvării problemelor de dinamică prin metoda directă sau inversă, a fost necesară introducerea unor mărimi mecanice, numite *mărimi fundamentale* ale dinamicii. Acestea sunt:

- *lucrul mecanic;*
- *puterea mecanică;*
- *randamentul mecanic;*
- *energia cinetică;*
- *energia potențială şi mecanică;*
- *impulsul;*
- *momentul cinetic.*

16.1 Lucrul mecanic

Lucrul mecanic *este mărimea mecanică ce reprezintă măsura transferului de energie între două stări ale unui sistem material sau rigid.* Această energie este rezultatul unui efort şi depinde de factori precum munca depusă, drumul parcurs pentru aceasta şi poziția reciprocă a sistemului sau a rigidului între cele două poziții.

În cele ce urmează, se va prezenta lucrul mecanic în diferite situații, respectiv influențat de tipul forțelor care acționează asupra punctului material, a sistemelor de puncte materiale sau a solidelor rigide.

16.1.1 Lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material

Se consideră în figura 16.1 un punct material M care se deplasează pe traiectoria curbilinie (Γ) sub acţiunea unui sistem de forţe variabile şi a căror rezultantă este $\overline{F}$. La momentul (t), punctul material se află în poziţia M definită de vectorul de poziţie $\overline{r}$, iar la momentul $(t+\Delta t)$ punctul se află în poziţia M_1 definită de vectorul de poziţie $(\overline{r}+\Delta\overline{r})$.

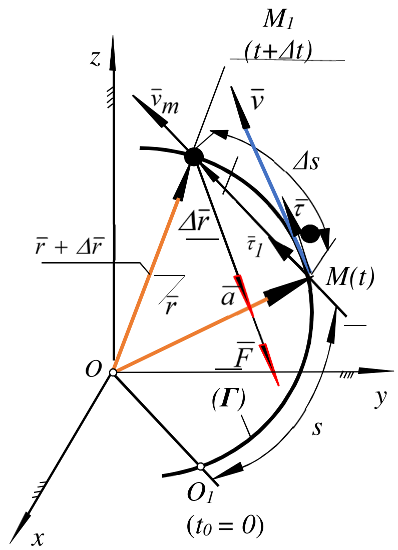


Fig. 16.1

Lucrul mecanic elementar al forţei $\overline{F}$ corespunzător deplasării elementare $d\overline{r}$ este o mărime notată cu dL şi este egală cu produsul scalar dintre forţa $\overline{F}$ şi deplasarea elementară $d\overline{r}$, adică

$$dL=\overline{F}\cdot d\overline{r}\,. \tag{16.1}$$

Deoarece $d\bar{r}=\bar{v}\cdot dt,\ dr=ds=v\cdot dt$, expresia lucrului mecanic elementar se mai poate scrie:

$$dL=\bar{F}\cdot\bar{v}dt=Fvdt\,cos\alpha=Fds\,cos\alpha\,, \tag{16.2}$$

unde α - este unghiul dintre vectorul forţă şi vectorul viteză.

Expresiile analitice ale vectorilor $\overline{F}$, $d\overline{r}$ și $\overline{v}$ în raport cu sistemul de referință *Oxyz* sunt:

$$\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k} \quad \text{şi} \quad \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\,, \tag{16.3}$$
$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k}\,,$$

și folosirea expresiilor analitice ale vectorilor $\overline{F}, d\overline{r}$ și $\overline{v}$, determină transformarea relațiilor (16.1), (16.2) și 16.3 în formele:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_x v_x dt + F_y v_y dt + F_z v_z dt\,. \tag{16.4}$$

$$dL = \overline{F} \cdot \overline{v} dt = \left(F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right)dt\,. \tag{16.5}$$

Dacă se analizează mişcarea produsă de un *cuplu de moment* $\overline{M}$, cu unghiul de rotație θ în planul său de rotație şi având $\overline{u}$ versorul normalei la acest plan, se poate scrie în cazul mișcărilor de rotație, unde $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, conform cu (16.2), relația:

$$dL = \overline{F} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{r})dt = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{\omega} dt = \overline{M}_0 \cdot d\overline{\theta}\,. \tag{16.6}$$

Prin analogie cu (16.4), relația (16.6) devine:

$$dL = M_x d\theta_x + M_y d\theta_y + M_z d\theta_z = \left(M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z\right)dt. \tag{16.7}$$

unde: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – reprezintă proiecțiile vitezei unghiulare pe axele sistemului de referință *Oxyz*.

Câteva din *proprietățile lucrului mecanic elementar* sunt descrise în cele ce urmează:

- Lucrul mecanic elementar este o mărime scalară având unitatea de măsură în sistemul internaţional *Joule* [*J*].

$$1J = 1Nm$$

- Lucrul mecanic elementar este pozitiv atunci când unghiul $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ şi se mai numeşte *lucru mecanic motor*.
- Lucrul mecanic elementar este negativ atunci când unghiul $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ şi se mai numeşte *lucru mecanic rezistent.*
- Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rezultă că $dL = 0$ şi se numeşte *lucru mecanic nul*.

Corespunzător unei deplasări finite a punctului material aflat între două poziții A şi B pe traiectoria curbilinie (Γ) şi sub acţiunea forţei variabile $\overline{F}$, **lucrul mecanic finit** sau **total** are expresia:

$$L_{A-B} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int_A^B F ds\, cos\alpha = \int_{t_A}^{t_B} Fvdt\, cos\alpha\,. \quad (16.8)$$

iar ***lucrul mecanic total*** sau ***finit*** *în cazul unui* ***cuplu de forțe*** este:

$$L_{\theta_1-\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{M}_0\, d\bar{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_0\, d\theta\, cos\beta = \int_{t_1}^{t_2} M_0 \omega\, dt\, cos\beta =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} (M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z) dt\ . \quad (16.9)$$

În relația (16.9) s-a notat cu β - unghiul dintre $\overline{M}_0$ (momentul cuplului) şi $\overline{\omega}$ (viteza unghiulară), iar $d\bar{\theta} = \bar{\omega} dt$.

În concluzie, *lucrul mecanic finit depinde atât de variația forței cât şi de forma traiectoriei.*

16.1.2 Lucrul mecanic al forţelor conservative

În cazul în care forța $\bar{F}$ este o *forță conservativă* aceasta va proveni dintr-o *funcţie de forţă* notată cu $U = U(x, y, z)$ şi va depinde numai de coordonatele punctului de aplicaţie al forţei. În acest caz, lucrul mecanic elementar va deveni:

$$\bar{F} = gradU = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}\ . \quad (16.10)$$

Având în vedere expresia forței $\bar{F}$ din relația (16.3), respectiv din relația (16.10), se obțin componentele carteziene F_x, F_y, F_z ale forței conservative scrise sub forma:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}\ . \tag{16.11}$$

Pentru ca o forță $\bar{F}$ să fie *forță conservativă*, trebuie să îndeplinească condiţiile lui Cauchy, adică,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\ . \tag{16.12}$$

Detaliind, se obțin relațiile:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}. \tag{16.12a}$$

Analiza acestor relații conduce la concluzia că o funcție de forță U este conservativă dacă ordinea de derivare este indiferentă.

Lucrul mecanic elementar al forţei conservative $\overline{F}$ devine:

$$dL = \bar{F} d\bar{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU\ , \tag{16.13}$$

iar *lucrul mecanic finit* are expresia:

$$L_{A-B} = \int_A^B \overline{F} d\bar{r} = \int_A^B dU = U_B - U_A\ . \tag{16.14}$$

unde: $U_A = U(x_A, y_A, z_A)$, $U_B = U(x_B, y_B, z_B)$.

De menționat că, în conformitate cu relația (16.14), este că: *lucrul mecanic total al forţei conservative* este *independent* de *forma traiectoriei*, *depinzând numai de poziţia iniţială şi finală a punctului de aplicaţie al forţei* (un exemplu de forţă conservativă este forţa de greutate).

16.1.3 Lucrul mecanic al unei forţe elastice

În cazul forțelor elastice, lucrul mecanic va fi dependent de poziția inițială şi finală a unui resort (arc), ceea ce se demonstrează în cele ce urmează. Se consideră în figura 16.2 un arc ideal, el având constanta de elasticitate *k*. Se va nota cu *x* alungirea arcului şi cu $F_e = kx$ forţa elastică care-l deformează.

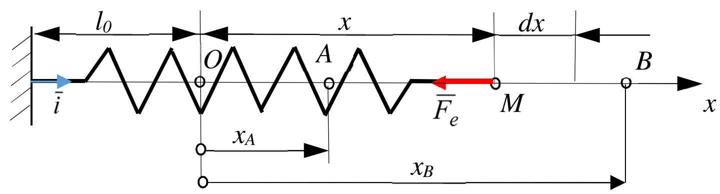


Fig. 16.2

Având în vedere figura 16.2, se pot scrie relațiile:

$$\overline{F}_e = -kx\overline{i}\,;\;\; d\overline{r} = dx\overline{i}\,;\;\; dL = -kxdx \;\; . \tag{16.15}$$

Lucrul mecanic finit, corespunzător unei alungiri *x* a arcului este:

$$L = \int_0^x -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2 \;\; . \tag{16.16}$$

iar *lucrul mecanic finit,* corespunzător alungirii arcului *între două poziţii A* şi *B* ale capătului său, devine:

$$L_{A-B} = \int_{x_A}^{x_B} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right) \;\; . \tag{16.17}$$

Astfel că, *lucrul mecanic produs de o forță elastică este dependent de pozițiile inițială şi finală între care se deformează arcul / resortul.*

16.1.4 Lucrul mecanic al forţelor interioare

Asupra unui solid rigid acționează şi forțe interne sau interioare, astfel că se definește noțiunea de lucru mecanic al forțelor interioare. Fie două puncte materiale M_i, M_j aparţinând unui sistem de puncte materiale. Forţele interioare care apar în sistemul de puncte materiale sunt notate cu $\overline{F}_{ij}, \overline{F}_{ji}$. Vectorii de poziţie ai punctelor în raport cu punctul fix O sunt $\overline{r}_i, \overline{r}_j$ (fig. 16.3). Conform principiului acţiunii şi reacţiunii forțele $\overline{F}_{ji} = -\overline{F}_{ij}$.

Lucrul mecanic elementar corespunzător forţelor interioare $\overline{F}_{ij}, \overline{F}_{ji}$ şi deplasărilor elementare ale celor două puncte va fi:

$$dL_{\text{int}} = \overline{F}_{ij} d\overline{r}_i + \overline{F}_{ji} d\overline{r}_j = \overline{F}_{ij} d\overline{r}_i - \overline{F}_{ji} d\overline{r}_j = \overline{F}_{ij} d\left(\overline{r}_i - \overline{r}_j\right) = \overline{F}_{ij} d\left(\overline{M_j M_i}\right) = -\overline{F}_{ij} d\left(\overline{M_i M_j}\right). \tag{16.18}$$

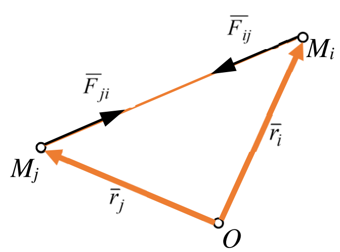


Fig. 16.3

Deoarece forțele sunt coliniare cu vectorul $\overline{M_i M_j}$, $\overline{F}_{ij} = \lambda \overline{M_i M_j}$, astfel că,

$$dL_{int} = -\lambda \overline{M_i M_j} \cdot d\left(\overline{M_i M_j}\right) = -\frac{\lambda}{2} d\left(\overline{M_i M_j}\right)^2 = -\frac{\lambda}{2} d\left|\overline{M_i M_j}\right|^2 . \tag{16.19}$$

Dacă punctele materiale ar aparţine unui solid rigid, distanţa dintre puncte $\left|\overline{M_i M_j}\right| = const.$ În acest caz, $dL_{int} = 0$. Se poate spune că, *suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor interioare, în cazul unui solid rigid, este nulă* pentru orice deplasare a solidului rigid.

16.1.5 Lucrul mecanic al unui sistem de forţe care acţionează asupra unui solid rigid

Se consideră un solid rigid liber (S) aflat *în mişcare generală* şi supus acţiunii unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i, i = 1 \div n$, pentru care elementele torsorului de reducere $\bar{\bar{\tau}}(\bar{R}, \bar{M}_0)$, în raport cu originea O legată invariabil de rigid, sunt date de relațiile:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \qquad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i \,. \tag{16.20}$$

Se notează cu $\bar{v}_0$ viteza punctului O şi cu $\bar{\omega}$ viteza unghiulară relativă de rotație a solidului rigid față de punctul O.

Se doreşte să se determine lucrul mecanic elementar al sistemului de forţe corespunzător deplasării $d\bar{r}_{10}$ a punctului O şi a rotaţiei elementare $d\theta$ a rigidului în jurul punctului O (fig. 16.4).

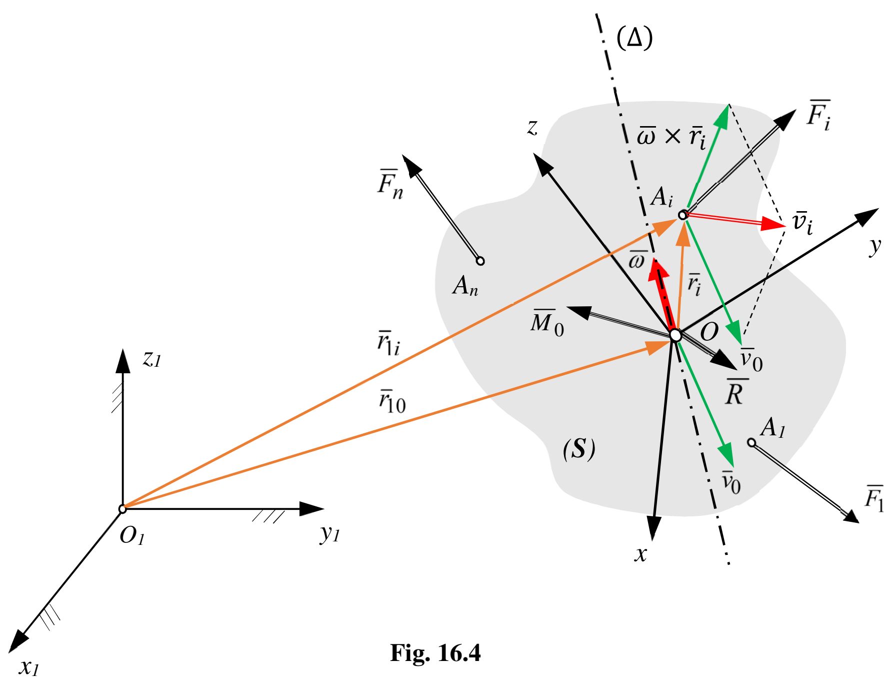


Fig. 16.4

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i d\bar{r}_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \bar{v}_i dt \ . \tag{16.21}$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i \ , \tag{16.22}$$

Înlocuind relaţia (16.22) în (16.21), se obţine succesiv:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i dt = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \bar{v}_0 dt + \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \cdot \bar{\omega} dt$$

$$= \bar{R} \cdot \bar{v}_0 dt + \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} dt = \bar{R} \cdot \bar{d}r_{10} + \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta},$$

adică,

$$dL = \bar{R} \cdot d\bar{r} + \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta} \ . \tag{16.23}$$

Relația (16.23) reprezintă *lucrul mecanic elementar* al unui sistem de forțe care acționează asupra unui *solid rigid* aflat *în mişcare generală* cu viteza inițială $\bar{v}_0$ şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$ la un moment dat. Cazurile particulare ale lucrului mecanic elementar din mişcarea generală sunt prezentate în cele ce urmează.

Cazuri particulare ale lucrului mecanic elementar

a) ***Mişcarea sferică*** – polul *O* este considerat articulație sferică

$\bar{v}_0 = 0,\ d\bar{r}_{10} = 0$, iar relația (16.23) devine:

$$dL = \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta} \ . \tag{16.24}$$

b) ***Mişcarea de rotație în jurul unui ax fix –*** *Oz* este considerată axa fixă

$$dL = \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta} = M_z \cdot d\theta \ . \tag{16.25}$$

c) ***Mişcarea de translație*** unde $\bar{\omega} = 0$ aşadar, lucrul mecanic elementar în mişcarea de translație devine:

$$dL = \bar{R} \cdot d\bar{r} \ . \tag{16.26}$$

16.2 Puterea mecanică

O altă mărime mecanică fundamentală şi scalară ce caracterizează lucrul mecanic transferat unui sistem în unitatea de timp este ***puterea mecanică*** sau astfel spus, puterea mecanică arată capacitatea unei forţe de a efectua lucru mecanic în timp.

Puterea mecanică se exprimă prin raportul dintre lucrul mecanic elementar *dL* şi timpul elementar *dt* în care s-a efectuat acesta. Astfel,

$$P = \frac{dL}{dt} = \bar{R} \cdot \bar{v}_0 + \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \ . \tag{16.27}$$

unde: $\bar{R} \cdot \bar{v}_0$ - corespunde *componentei de translație* a mişcării produsă de sistemul de forțe a cărui vector rezultant este:

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i \ ; \tag{16.27a}$$

$\bar{M}_0 \cdot \bar{\omega}$ - corespunde *componentei de rotație*, rezultată din rotația rigidului în jurul lui *O*, produsă de momentul rezultant $\bar{M}_0$.

Relația (16.27) exprimă *puterea mecanică în cazul unui solid rigid aflat în mişcare generală*, sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare.

Dacă solidul are doar *mişcare de translație,* atunci componenta $\bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} = 0$, iar puterea mecanică devine:

$$P = \frac{dL}{dt} = \bar{R} \cdot \bar{v}_0 \ . \tag{16.28}$$

Dacă solidul are o *mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe* ce trece prin polul O, respectiv o mişcare de rotaţie instantanee în jurul axei mobile care trece permanent prin punctul O (cazul mişcării sferice), $\bar{v}_0 = 0$, astfel că puterea mecanică devine:

$$P = \frac{dL}{dt} = \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \quad . \tag{16.29}$$

Puterea este o mărime scalară şi pozitivă, negativă sau nulă, ea constituind o caracteristică de bază a tuturor maşinilor.

Unitatea de măsură pentru putere în sistemul internaţional este *Watt*-ul, $1W = 1\frac{J}{s}$. În practică, se întâlneşte deseori ca unitate de măsură *calul putere (CP):*

$$1kW = 1{,}36CP$$

În continuare, sunt preferate câteva exprimări tehnice ale puterii în funcție de alte mărimi ca de exemplu, momentul motor M_c.

- Se dau: *puterea unui motor* şi *turaţia sa*. Momentul motor Mc este:

$$M_c = \frac{30}{\pi n} P \quad [\mathrm{Nm}] \; . \tag{16.30}$$

- Se dau: *puterea P* în CP şi *turaţia n* în *rot/min.* Momentul motor M_c este:

$$M_c = 7027 \frac{P}{n} \quad [\mathrm{Nm}] \; . \tag{16.31}$$

- Se dau: *puterea P* în *kW* şi *turaţia n* în *rot/min.* Momentul motor M_c este:

$$M_c = 9554 \frac{P}{n} \quad [\mathrm{Nm}] \; . \tag{16.32}$$

16.3 Randamentul mecanic

În practică, dar şi în viaţa de zi cu zi, ne interesează ca funcționarea unei maşini să fie în parametri optimi şi cu o rentabilitate bună. Astfel că, funcționarea oricărei maşini în regimul permanent este caracterizată de câteva mărimi explicitate în cele ce urmează:

- *lucru mecanic motor* L_m, respectiv o *putere motoare* P_m, mărimi care-i permit maşinii să dezvolte un lucru mecanic util sau o putere utilă;

- *lucru mecanic util* L_u, respectiv o *putere utilă* P_u, mărimi măsurate la elementul de ieşire din maşină.

- Diferenţa dintre lucru mecanic motor şi util ($L_m – L_u = L_p$) se numeşte *lucru mecanic pierdut*, iar diferența dintre puteri ($P_m – P_u = P_p$) se numeşte *putere pierdută*.

Raportul dintre lucru mecanic util şi cel motor este egal cu raportul dintre puterea utilă şi motoare şi se numeşte ***randament mecanic***. Randamentul se notează cu η și este o mărime mecanică adimensională.

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{P_u}{P_m} = \frac{L_m - L_P}{L_m} = \frac{P_m - P_p}{P_m} = 1 - \varphi \ . \tag{16.33}$$

unde: coeficientul φ, dat de relaţia (16.33), se numeşte *coeficient de pierdere* şi are valoarea:

$$\varphi = \frac{L_p}{L_u} = \frac{P_p}{P_m} \ . \tag{16.34}$$

Dacă se vorbeşte de noțiunea de *lanț de mașini*, se ține seama dacă acestea sunt legate în *serie* sau în *paralel*.

Randamentul total al unui lanţ de maşini sau mecanisme **legate în serie** este egal cu produsul randamentului maşinilor lanţului:

$$\eta = \prod_{i=1}^{n} \eta_i \ . \tag{16.35}$$

Randamentul total al unui lanţ de maşini sau mecanisme **legate în paralel** este egal cu suma produselor dintre randamentele fiecărei maşini a lanţului şi cotă parte din puterea absorbită de maşină, respectiv din totalul puterii motoare ce alimentează întregul lanț:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \ \eta_i \cdot \alpha_i . \tag{16.36}$$

În relația (16.36), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ şi $L_{m1} = \alpha_1 \cdot L_m; \ldots \ L_{mi} = \alpha_i \cdot L_m; \ldots$

Ca şi observație, se poate afirma că în viața cotidiană nu se întâlnesc maşini sau echipamente cu randament de 100%, datorită acestui coeficient de pierdere φ (16.34) care, în general, este dat prin pierderea de căldură.

16.4 Energia cinetică

16.4.1 Definiţii

Se consideră în figura 16.5 un punct material *M* de masă *m* care se deplasează sub acţiunea unei forţe $\overline{F}$ pe o traiectorie curbilinie (Γ), având la momentul (*t*) viteza $\bar{v}$.

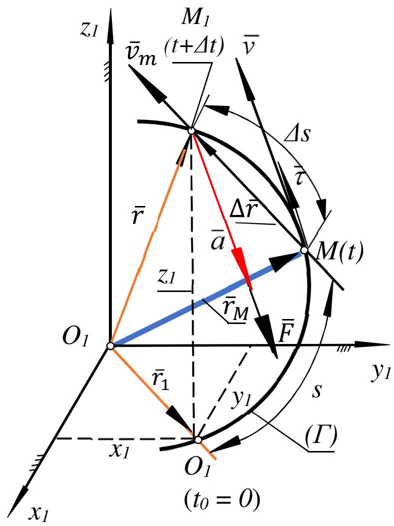


Fig. 16.5

Se numeşte ***energie cinetică a punctului material***, mărimea mecanică scalară ce caracterizează capacitatea de transformare a mişcării în lucru mecanic şi se exprimă prin semiprodusul dintre masa şi pătratul vitezei punctului.

Energia cinetică se notează cu *Ec* și are, în acest caz, expresia:

$$E_c = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right), \qquad (16.37)$$

în care, v – este modulul vitezei instantanee a punctului material [m/s];

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – sunt componentele vitezei pe axele sistemului de referință;

m – este masa punctului material [kg].

Unitatea de măsură a energiei cinetice în sistemul internaţional este *Joule* [J]. Generalizând studiul la un sistem discret de puncte materiale, ***energia cinetică a unui sistem de puncte materiale*** M_i de mase m_i, având vitezele instantanee $\bar{v}_i$ ($i = 1 \div n$), care se mişcă sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare față de un sistem de referință fix, este:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) . \quad (16.38)$$

Un *solid rigid (S)* poate fi considerat format dintr-o infinitate de puncte materiale de *masă elementară dm,* având vitezele $\bar{v}$. Energia cinetică în cazul solidului rigid este dată de aceeaşi relaţie (16.38), în care se înlocuieşte semnul $\sum$ cu $\int$, viteza $\bar{v}_i = \bar{v}$ și $m_i = dm$. Astfel, energia cinetică a solidului rigid devine:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} \bar{v}^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} v^2 dm . \quad (16.39)$$

16.4.2 Teorema lui König pentru energie cinetică

Se consideră un solid rigid (S), de masă M, aflat în mişcare generală sub acțiunea forțelor exterioare, mişcare caracterizată de parametrii cinematici $\bar{v}_C$ și $\bar{\omega}$, care reprezintă viteza instantanee a centrului de masă C al rigidului și viteza unghiulară de rotație relativă a acestuia în jurul centrului maselor.

Se consideră cunoscut momentul de inerție mecanic $J_{\Delta c}$ al rigidului în raport cu axa (Δ_c), axă care trece prin C și constituie suportul lui $\bar{\omega}$ (fig. 16.6).

Conform legii de distribuție a vitezelor în cazul mişcării generale viteza este $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$. Având în vedere că punctul O este suprapus peste C, $\bar{v} = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \overline{r'}$. Energia cinetică în cazul solidului rigid prezentat în figura 16.6, se determină succesiv astfel:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} \bar{v}^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} (\bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}')^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(S)} v_c^2 dm + \int_{(S)} \bar{v}_c \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}')\, dm + \frac{1}{2}\int_{(S)} (\bar{\omega} \times \bar{r}')^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{v}_c^2 \int_{(S)} dm + (\bar{v}_c \times \bar{\omega}) \cdot \int_{(S)} \overline{r'} dm + \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(S)} \left(r'^2 sin^2\alpha\right) dm \,. \qquad (16.40)$$

În relația (16.40)

$$\int_{(S)} dm = M;$$

$$\int_{(S)} (\bar{\omega} \times \bar{r}')^2\, dm = \int_{(S)} \omega^2 d^2 dm = \omega^2 \int_{(S)} d^2\, dm = \omega^2 J_{\Delta c}, \qquad (16.41)$$

în care d - este distanța punctului M la suportul axei (Δ_c) a lui $\bar{\omega}$.

Cu relațiile (16.41), ***energia cinetică a solidului rigid în mişcare generală*** devine:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta_c} \omega^2. \qquad (16.42)$$

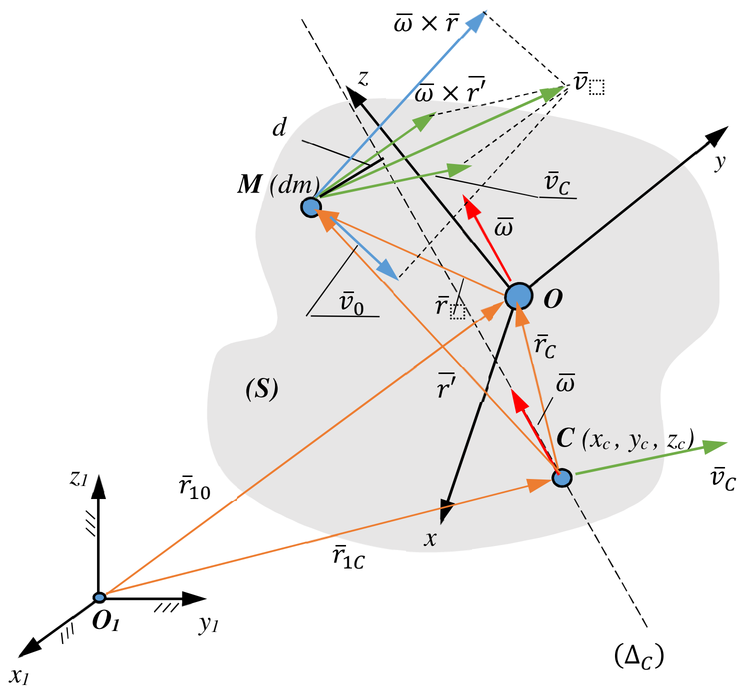


Fig. 16.6

Relația (16.42) exprimă ***teorema lui König privind energia cinetică a unui solid rigid aflat în mişcare generală***.

Dacă se cunosc momentele de inerție mecanice axiale şi centrifugale J_x, J_y, J_z şi J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} , precum şi componentele vectorilor $\bar{v}_c$ şi $\bar{\omega}$ pe axele sistemului mobil *Oxyz* solidar cu rigidul, se poate determina o altă formă de exprimare a energiei cinetice a solidului rigid aflat în mişcare generală.

$$\begin{aligned} E_c = \frac{1}{2}\big[&M\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2\right) + J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 + \\ &+2M\cdot x_c\left(v_{0y}\omega_z - v_{0z}\omega_y\right) + 2M\cdot y_c\left(v_{0z}\omega_x - v_{0x}\omega_z\right) + \\ &+2M\cdot z_c\left(v_{0x}\omega_y - v_{0y}\omega_x\right) - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x\big]\ . \end{aligned} \tag{16.43}$$

16.4.3 Energia cinetică în cazul unor mişcări particulare ale solidului rigid

Particularizând mişcarea generală a solidului rigid (*S*) la mişcări particulare ale acestuia, va rezulta energia cinetică *Ec* specifică fiecăreia din aceste mişcări.

a) ***Energia cinetică în mişcarea de translaţie a rigidului***

Se consideră un solid rigid (*S*) de masă *M*, având viteza centrului de masă $\bar{v}_c$ şi aflat în mişcare de translaţie ($\bar{\omega} = 0$). În acest caz,

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_c^2\ . \tag{16.44}$$

Energia cinetică a unui solid rigid aflat în mişcare de translaţie *este egală cu energia cinetică a centrului de masă în care se află concentrată întreaga masă M a corpului.*

b) ***Energia cinetică la mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul unei axe fixe***

În cazul mişcării de rotație a rigidului în jurul unei axe fixe, viteza este:

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Întroducând această expresie de viteză în relația (16.39), se obține succesiv:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} \bar{v}^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} |\bar{\omega} \times \bar{r}|^2 \, dm =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{(S)} \omega^2 r^2 sin^2\alpha \, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(S)} d^2 dm = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2, \qquad (16.45)$$

pentru că: $|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r sin\alpha = \omega d,$ iar $d = r sin\alpha$, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ este aceeași la un moment dat pentru toate punctele rigidului, fapt care permite extragerea de sub integrală a acesteia, iar $\int_{(S)} d^2 dm = J_\Delta$ reprezintă momentul de inerție mecanic al rigidului în raport cu axa de rotație (Δ).

Astfel, *energia cinetică a unui solid rigid care se rotește în jurul unui ax fix* are expresia:

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \ . \qquad (16.46)$$

c) *Energia cinetică la mişcarea de roto-translaţie a rigidului*

Se consideră un solid rigid (*S*) de masă *M,* aflat în mișcare de roto-translație sub acțiunea unui sistem de forțe date. Pentru determinarea energiei cinetice a rigidului, se cunosc: viteza $\bar{v}_0$ a unui punct *O* situat pe axa mișcării de roto-translație, momentul de inerție mecanic axial J_{Δ_O} al rigidului în raport cu axa (Δ_O) a mișcării și viteza unghiulară $\bar{\omega}$ de rotație a rigidului în jurul axei respective. Trebuie menționat că la un moment dat al mișcării, vectorii $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sunt aceeași pentru toate punctele rigidului. Acest fapt permite extragerea lor de sub integrală în calculele care urmează.

Legea de distribuție a vitezelor la mișcarea de roto-translație este: $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$. Cum în expresia energiei cinetice apare factorul v^2, se ridică la pătrat în ambii membrii relația vitezelor, obținându-se succesiv:

$$\bar{v}^2 = (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r})^2 = \bar{v}_0{}^2 + 2\bar{v}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 \ . \qquad (16.47)$$

Se fac următoarele precizări:

$$\bar{v}^2 = v^2;\ \ \bar{v}_0^2 = v_0^2;\ \ \bar{v}_0(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega}(\bar{r} \times \bar{v}_0) = \bar{r}(\bar{v}_0 \times \bar{\omega}) = 0\,, \qquad (16.47a)$$

pentru că la mișcarea de roto-translație vectorii $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sunt coliniari pe aceeași axă (Δ_O) a mișcării.

$(\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = |\bar{\omega} \times \bar{r}|^2 = \omega^2 r^2 sin^2\alpha = \omega^2 d^2$, unde $d = rsin\alpha$ și reprezintă distanța punctelor rigidului la axa (Δ_O), măsurată pe perpendiculara la aceasta.

În conformitate cu (16.39), energia cinetică a rigidului, având în vedere (16.47) și precizările anterioare, devine:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} v^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} v_0^2 dm + \frac{1}{2}\int_{(S)} \omega^2 d^2 dm =$$
$$= \frac{1}{2} v_0^2 \int_{(S)} dm + \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(S)} d^2 dm = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta_O}\omega^2, \qquad (16.48)$$

pentru că: $\int dm = M$, masa întregului rigid, $\int_{(S)} d^2 dm = J_{\Delta_O}$, este momentul de inerție mecanic al rigidului în raport cu axa (Δ_O) de roto-translație.

Se menționează că mărimile v_0 și ω s-au extras de sub integrale, pentru că ele sunt comune la un moment dat pentru toate punctele solidului rigid, iar energia cinetică este o mărime instantanee, adică se determină la un anumit moment al mișcării.

Astfel, expresia energiei cinetice a rigidului aflat în mișcare de roto-translație este:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta 0}\omega^2\ . \qquad (16.49)$$

În cazul solidului rigid aflat în *mişcare de roto-translație energia cinetică Ec are două componente:* ***o componentă de translație*** *generată de* $\bar{v}_0$ *și o* ***componentă de rotație*** *a rigidului în jurul axei fixe* (Δ_O) *cu viteza unghiulară* $\bar{\omega}$.

d) *Energia cinetică la mişcarea plan-paralelă*

Se consideră o placă (P), aflată în mişcare plan-paralelă, de masă M, având viteza centrului de masă $\overline{v}_c$, momentul de inerţie mecanic axial $J_{\Delta c}$ în raport cu axa $(\Delta_C) \perp (P)$ în centrul de masă şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ (fig. 16.7a).
În conformitate cu teorema lui König pentru energia cinetică, se poate scrie:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta c} \omega^2 \,. \tag{16.50}$$

Cunoscând viteza centrului maselor: $v_c = \omega \cdot IC = \omega d$, se obţine:

$$E_c = \frac{1}{2}\omega^2 (J_{\Delta c} + M d^2) = \frac{1}{2} J_{\Delta 1} \omega^2 \;,$$

respectiv, $$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta_1} \omega^2. \tag{16.51}$$

pentru că $J_{\Delta_c} + M d^2 = J_{\Delta_1}$, conform teoremei lui Steiner.

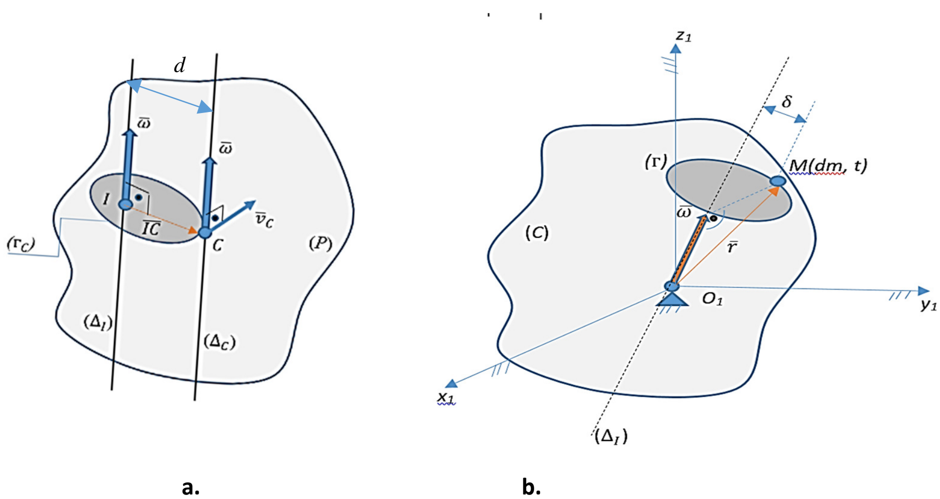


Fig. 16.7

e) *Energia cinetică la mişcarea sferică (mişcarea în jurul unui punct fix)*

În cazul mişcării sferice (fig. 16.7b), viteza $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ se înlocuiește în expresia energiei cinetice dată de relația (16.39), se fac apoi calcule succesive, rezultând:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} \bar{v}^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} |\bar{\omega} \times \bar{r}|^2 \, dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} \omega^2 r^2 sin^2\alpha \, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(S)} (r^2 sin^2\alpha) \, dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} \delta^2 dm = \frac{1}{2} J_{\Delta}\omega^2, \tag{16.52}$$

pentru că: $|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r \, sin\alpha = \omega\delta$, unde $\delta = r sin\alpha,$ $\int_{(S)} \delta^2 dm = J_{\Delta_I},$
În final, expresia *energiei cinetice la mișcarea sferică* devine:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta_I}\omega^2 \, . \tag{16.53}$$

În această relație J_{Δ_I} - este momentul de inerție mecanic axial al rigidului în raport cu axa instantanee de rotație (Δ_I), care constituie suportul vitezei unghiulare instantanee. În expresiile anterioare s-a extras ω^2 de sub integrală pentru că la un moment dat, viteza unghiulară este aceeași pentru toate punctele rigidului, iar energia cinetică se determină la acel moment.

Dacă se ține seama de *legea de variaţie a momentelor de inerţie mecanice în raport cu axe concurente,* se poate scrie relația:

$$J_{\Delta} = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\alpha\gamma \ , \tag{16.54}$$

în care *α, β* şi *γ* sunt cosinusurile directoare ale axei (*Δ*), J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} sunt momentele de inerție mecanice axiale și centrifugale componente ale matricei de inerție, iar componentele scalare ale vitezei unghiulare sunt:

$$\alpha\omega = \omega_x ; \quad \beta\omega = \omega_y ; \quad \gamma\omega = \omega_z \ , \tag{16.55}$$

În acest caz, energia cinetică a rigidului se exprimă cu relația:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x\right). \qquad (16.56)$$

În cazul particular, în care axele sistemului de referinţă mobil sunt *axe principale de inerţie* atunci, momentele de inerţie mecanice centrifugale sunt nule şi relaţia (16.56) devine:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right). \qquad (16.57)$$

16.5 Impuls

O altă mărime mecanică importantă în studiul dinamicii punctului material şi nu numai, este *impulsul mecanic* notat ($\bar{p}\ sau\ \bar{h}$) numit şi *cantitatea de mişcare* sau *moment liniar*. În general, pentru punct material se abordează literele mici, iar pentru sistem de puncte materiale şi solid rigid literele mari ($\bar{P}\ sau\ \bar{H}$). Impulsul sau "cantitate de mişcare" a fost definită de filozoful şi matematicianul francez R. Descartes în anul 1645 şi a fost preluată ulterior şi utilizată de I. Newton în 1686 pentru formularea principiilor fundamentale ale dinamicii.

Notă: Impulsul punctului material este notat cu $\bar{p}$, iar impulsul sistemelor de puncte materiale sau a solidului rigid și a sistemelor de solide rigide se notează cu litera $\bar{P}$.

a) Impulsul unui punct material

Se consideră un *punct material M* de masă *m*, care se deplasează sub acțiunea unei forțe pe o traiectorie curbilinie (*Γ*), având la un momentul (*t*) viteza $\bar{v}$ (fig. 16.8). Se defineşte ca *impulsul $\bar{p}$* sau *cantitatea de mişcare a punctului material* un vector egal cu produsul dintre masa punctului şi viteza sa.

Astfel,

$$\bar{p} = m\bar{v} \ . \qquad (16.58)$$

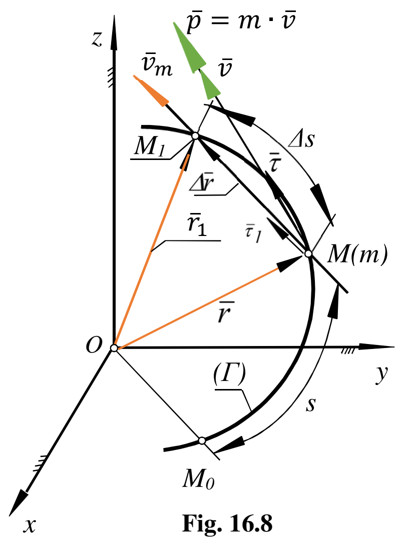


Fig. 16.8

Se alege un sistem de referinţă cartezian *Oxyz* şi se proiectează relația (16.58) pe axele acestui sistem. Prin identificarea coeficienților versorilor în relația respectivă, se obțin componentele scalare ale impulsului, exprimate astfel:

$$p_x = m\dot{x}\,; \;\; p_y = m\dot{y}\,; \;\; p_z = m\dot{z}\,. \tag{16.59}$$

În relația (16.59), se notează cu $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ componentele carteziene ale vitezei punctului *M* pe axele sistemului de referință ales.

Unitatea de măsură a impulsului este *[kg m/s].*

b) *Impulsul unui sistem de puncte materiale*

În cazul unui *sistem discret de puncte materiale* M_i de mase m_i, $i = 1 \div n$ şi vitezele $\bar{v}_i$, sistem aflat în mişcare, impulsul sistemului este egal cu suma impulsurilor punctelor materiale.

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \bar{r}_i) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(m_i \bar{r}_i) =$$
$$= M\frac{d\bar{r}_c}{dt} = M\bar{v}_c. \qquad (16.60)$$

pentru că: $\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}$; $m_i = ct.$; $\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i = \bar{r}_c \sum_{i=1}^{n} m_i = M\bar{r}_c$, $\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$. (16.61)

Astfel, *impulsul unui sistem de puncte materiale* este:

$$\bar{P} = M\bar{v}_c\,. \qquad (16.62)$$

Relația (16.62) poate fi proiectată pe axele sistemului de referință ales *Oxyz* şi se obțin proiecțiile impulsului pe aceste axe:

$$P_x = M\dot{x}_c; \quad P_y = M\dot{y}_c; \quad P_z = M\dot{z}_c\,. \qquad (16.63)$$

Impulsul total al unui sistem de puncte materiale este egal *cu impulsul centrului de masă al sistemului discret de puncte materiale în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului*, în conformitate cu relația (16.62).

c) Impulsul solidului rigid

În cazul unui solid rigid format dintr-o infinitate de mase elementare *dm*, semnul sumă se înlocuiește cu cel de integrală, se fac apoi următoarele înlocuiri: $m_i = dm$, $\bar{v}_i = \bar{v}$ și $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$. Înlocuind aceste precizări în prima formă a relației (16.60), se obține succesiv:

$$\bar{P} = \int_{(S)} \bar{v}\, dm = \int_{(S)} \frac{d\bar{r}}{dt} dm = \int_{(S)} \frac{d}{dt}(\bar{r} dm) = \frac{d}{dt}\int_{(S)} \bar{r} dm = \frac{d}{dt} M\bar{r}_c =$$
$$= M\frac{d\bar{r}_c}{dt} = M\bar{v}_c,$$

pentru că $\bar{r}_c = \frac{\int_{(S)} \bar{r} dm}{\int_{(S)} dm}$, de unde $\int_{(S)} \bar{r}\, dm = M\bar{r}_c$. (16.63a)

Astfel, impulsul solidului rigid devine:

$$\bar{P} = \int_{(S)} \bar{v} dm = M\bar{v}_c \,. \qquad (16.64)$$

16.6 Moment cinetic

16.6.1 Definiţii

a) Momentul cinetic al unui punct material

Fie un punct material *M* de masă *m* care se deplasează sub acțiunea unei forțe pe traiectoria curbilinie (*Γ*), având la un momentul (*t*) viteza $\bar{v}$.

Prin definiţie, *momentul cinetic al unui punct material* aflat în mişcare în raport cu un pol fix *O,* este egal cu *momentul vectorului impuls față de acelaşi pol O*.

Astfel:

$$\bar{k}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} \;. \qquad (16.65)$$

Proiecţiile acestui vector pe axele unui sistem de referință *Oxyz* vor fi:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \,; \quad k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \,; \quad k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \,. \qquad (16.66)$$

Caracteristicile vectorului moment cinetic $\bar{k}_0$ al punctului material sunt:

- *Punctul de aplicație* se află în polul *O*;
- *Direcția* este normală pe planul definit de vectorul de poziție $\bar{r}$ şi de impulsul $\bar{p}$;
- *Sensul* este dat de regula produsului vectorial;
- *Modulul* este: $k_0 = |\bar{r} \times m\bar{v}| = mvr \sin(\widehat{\bar{r}, m\bar{v}})$. (16.67)

Unitatea de măsură pentru momentul cinetic în SI este [$kg\ m^2/s$].

Notă: În cazul punctului material, momentul cinetic se notează cu $\bar{k}_0$, iar în cazul sistemelor de puncte materiale și a solidului rigid, momentul cinetic se notează cu $\bar{K}_0$.

b) Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale

Prin definiţie, *momentul cinetic al unui sistem discret de puncte materiale* M_i de mase m_i aflat în mişcare sub acțiunea unor forțe având vitezele $\bar{v}_i$ (fig. 16.9) în raport cu un punct fix O, *este egal cu suma momentelor cinetice ale punctelor determinate în raport cu acelaşi pol.*

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \ . \tag{16.68}$$

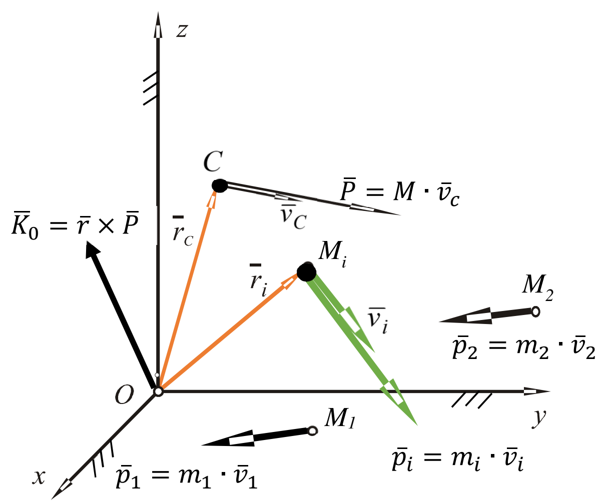


Fig. 16.9

c) Momentul cinetic al unui solid rigid

În cazul unui solid rigid (S) aflat în mişcare generală sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, fiecare punct de masă elementară dm aparţinând acestuia este caracterizat de viteza $\bar{v}$, de impulsul $d\bar{p}$ şi de vectorul de poziție propriu $\bar{r}$ astfel că, se defineşte momentul cinetic față de polul fix O prin relaţia:

$$d\bar{K}_0 = \bar{r} \times d\bar{p} = \bar{r} \times \bar{v}dm\ . \tag{16.69}$$

Prin integrarea relației (16.69), se obține:

$$\bar{K}_0 = \int \bar{r} \times \bar{v}dm\ . \tag{16.70}$$

Dacă raportăm momentul cinetic al rigidului aflat în *mişcare relativă* faţă de centrul maselor, acesta este:

$$\bar{K}_c = \int_{(S)} (\ \bar{r} \times (\bar{v} - \bar{v}_c))dm = \int_{(S)} (\ \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}))dm\ . \tag{16.71}$$

Relaţia (16.71) se poate scrie şi matriceal sub forma:

$$\begin{bmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \quad \text{sau}\ \ [\bar{K}_c] = [J] \cdot [\bar{\omega}]. \tag{16.72}$$

unde *[J]* - este *tensorul de inerție*:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \tag{16.73}$$

şi se numeşte *matricea momentelor de inerţie* sau *tensorul inerţial*.

În cele ce urmează se va demonstra că *momentul cinetic al unui solid rigid faţă de centrul de masă C* este acelaşi, atât în mişcare absolută cât şi în mişcarea relativă a solidului rigid (fig. 16.10).

Astfel că se va nota cu $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct *M* aparținând solidului rigid în raport cu centrul de masă *C = O* şi cu $\bar{v}$ - viteza absolută a punctului *M,* astfel că momentul cinetic al solidului rigid calculat în raport cu centrul de masă *C* va fi:

$$\overline{K}_c = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v} dm \,. \tag{16.74}$$

unde: $\bar{v}$ – este viteza absolută a punctului M; $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_c$;

$\bar{v}_r$ – este viteza relativă a punctului M în raport cu C;

$\bar{v}_c$ – este viteza centrului de masă a solidului rigid.

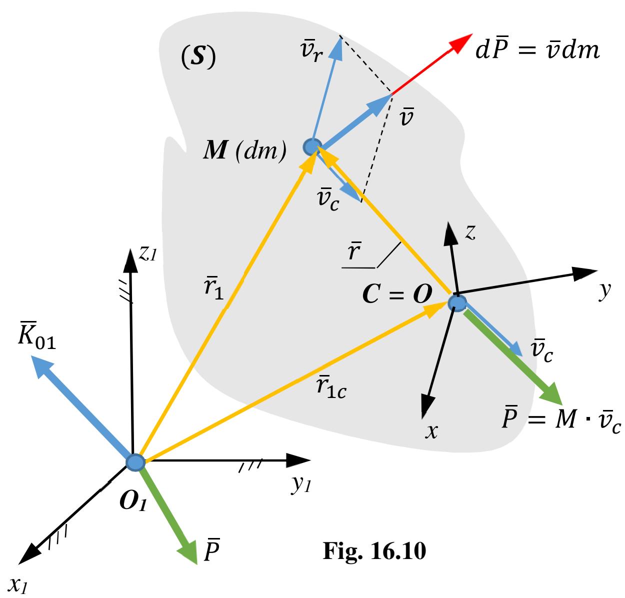


Fig. 16.10

Ținând cont de relația (16.71), relația (16.74) devine:

$$\overline{K}_c = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v}_r dm + \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v}_c dm \,. \tag{16.75}$$

unde:

$$\int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v}_c dm = \int_{(S)} \bar{r} dm \times \bar{v}_c = M \cdot \overline{OC} \times \bar{v}_c = 0, \tag{16.76}$$

pentru că, $\int_{(S)} \bar{r} dm = M \cdot \overline{OC} = 0$, $O \equiv C$.

Astfel,

$$\overline{K}_c = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v}_r dm \,. \tag{16.77}$$

Relația (16.77) demonstrează că *momentul cinetic al unui rigid (S), raportat la centrul de masă C, are aceeaşi formă atât în mişcarea absolută* (16.74), *cât şi în cea relativă* (16.77).

Trebuie menționat că, deoarece vitezele punctelor solidului rigid depind de tipul mişcării rigidului, expresiile momentelor cinetice vor diferi în funcție de mişcare.

16.6.2 Momentul cinetic în cazul unor mişcări particulare ale solidului rigid

a) Momentul cinetic în *mişcarea de translaţie*

Se consideră un solid rigid *(S)* aflat în ***mişcare de translaţie,*** având masa *M* şi viteza instantanee a centrului de masă $\bar{v}_c$. La un momentul (*t*), vitezele tuturor punctelor rigidului vor fi aceleaşi şi vom avea:

$$\overline{K}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v}_c \, dm = \int_{(S)} (\bar{r} dm) \times \bar{v}_c = \bar{r}_c \times M\bar{v}_c = \bar{r}_c \times \bar{P},$$

$$\overline{K}_0 = \bar{r}_c \times \bar{P}. \tag{16.78}$$

Relația (16.78) arată că, *momentul cinetic în cazul unui solid rigid aflat în mişcare de translație este egal cu momentul cinetic al centrului de masă C în care se presupune concentrată întreaga masă a rigidului, ambele determinate în raport cu acelaşi pol O.* Se observă că în cazul mişcării de translație a unui rigid, momentul cinetic în raport cu centrul maselor *C* este nul pentru că viteza relativă $\bar{v}_r$ față de centrul de masă este nulă.

b) Momentul cinetic în *mişcarea de rotaţie în jurul unui punct fix*

Se consideră un solid rigid (*S*) care efectuează o mişcare de rotație în jurul unui punct fix *O*, aparținând solidului rigid şi care are cunoscută viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$. Se consideră că originile sistemului fix şi mobil coincid (O = O_1) precum şi vectorii de poziție $\overline{r}_1 = \overline{r}$. Momentul cinetic al solidului rigid poate fi exprimat în funcție de momentele de inerţie mecanice (axiale şi centrifugale) raportate la axele sistemului de referinţă mobil *Oxyz*.

$$\overline{K}_0 = \int_{(S)} \overline{r} \times \overline{v} dm \,. \tag{16.79}$$

Având în vedere *legea de distribuție a vitezelor în cazul mişcării sferice a rigidului* (rotația în jurul unui punct fix):

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}. \tag{16.80}$$

se poate scrie

$$\overline{K}_0 = \int_{(S)} \overline{r} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})\, dm = \int_{(S)} \overline{r}^2 \overline{\omega} dm - \int_{(S)} (\overline{\omega} \cdot \overline{r})\, \overline{r} dm, \tag{16.81}$$

relație în care:

$$\overline{K}_0 = K_x \overline{i} + K_y \overline{j} + K_z \overline{k}; \quad \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}; \quad \overline{\omega} = \omega_x \overline{i} + \omega_y \overline{j} + \omega_z \overline{k}. \tag{16.82}$$

Matriceal, prima ecuaţie a relaţiei (16.81) se va scrie:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \quad \text{sau } [\overline{K}_0] = [J] \cdot [\overline{\omega}]. \tag{16.83}$$

.

Din relaţia (16.83) rezultă:

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \,; \tag{16.84}$$

$$K_y = J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{yx} \omega_x \,;$$

$$K_z = J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y \,.$$

Dacă axele sistemului de referinţă mobil coincid cu axele principale de inerție corespunzătoare polului O, atunci momentele de inerție mecanice centrifugale (J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}) sunt nule, iar expresiile (16.84) devin:

$$K_x = J_x\omega_x; \quad K_y = J_y\omega_y\ ; \quad K_z = J_z\omega_z\ . \tag{16.85}$$

c) Momentul cinetic la *mişcarea de rotaţie in jurul unui ax fix*

Se consideră un solid rigid (*S*) aflat în ***mişcare de rotaţie în jurul unui ax fix*** (*Δ*). Se cunosc momentele de inerţie mecanice axiale şi centrifugale în raport cu axele sistemului de referinţă mobil *Oxyz,* legat invariabil de solidul rigid şi viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$. Momentul cinetic $\overline{K}_0$ al rigidului se poate determina deoarece această mişcare este o particularizare a mişcării sferice, cu observația că axa instantanee de rotație devine în acest caz fixă în spațiu.

În cazul în care axa $(\Delta) = Oz$, $\omega_x = \omega_y = 0$; $\omega_z = \omega$, iar proiecțiile momentului cinetic pe axele sistemului de referință vor deveni:

$$K_x = -J_{xz}\omega; \quad K_y = -J_{yz}\omega; \quad K_z = J_z\omega\ . \tag{16.86}$$

- dacă axa $(\Delta) = Oz$ şi axa Oz este axă principală de inerţie, respectiv $\omega_x = \omega_y = 0$ şi $J_{xz} = J_{yz} = 0$, atunci proiecțiile momentului cinetic pe axele sistemului de referință vor deveni:

$$K_x = K_y = 0;\ K_z = J_z\omega; \quad \overline{K}_0 = J_z\omega \cdot \overline{k}. \tag{16.87}$$

d) Momentul cinetic la *mişcarea plan-paralelă*

În cazul ***mişcării plan paralele*** *distribuția de viteze se obține prin suprapunerea a două câmpuri de mişcări şi anume, o mişcare de translație cu viteza* $\bar{v}_0$ *a unui punct arbitrar O aparținând rigidului şi o mişcare de rotație cu viteza unghiulară* $\overline{\omega}$ *în jurul unui ax perpendicular pe planul mişcării în punctul O*. Corespunzător celor două câmpuri de viteze, momentul cinetic al rigidului se va determina ca o sumă de două momente cinetice.

Dacă se raportează distribuția de viteze la centrul instantaneu de rotație *I* sau *CIR*, se va obține o distribuție de viteze a rigidului specifică unei mişcări de rotație pură în jurul unei axe (Δ_I) normală pe planul mişcării în punctul *I*. Astfel că, dacă considerăm placa mobilă (P_m) în mişcare în planul fix $O_1x_1y_1z_1$, ea având viteza centrului de masă $\overline{v}_C$ şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$, cunoscând și momentul de inerţie mecanic axial J_z, în raport cu axa Oz a sistemului de referinţă mobil $Oxyz$ (fig. 16.11), se pot deduce expresiile momentului cinetic raportat la polul O, la centrul de masă C şi la polul O_1.

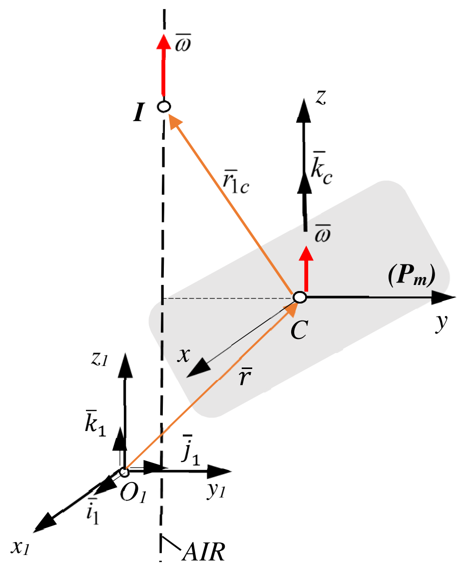


Fig. 16.11

În cazul mişcării plane a unei plăci (P_m) în planul fix $O_1x_1y_1$ ordonata z a tuturor punctelor rigidului este nulă şi momentele de inerție mecanice centrifugale sunt nule ($J_{zx} = J_{zy} = 0$), de unde rezultă că componentele scalare ale <u>*momentului cinetic* în *raport cu polul O*</u> legat invariabil de placa (P_m) sunt:

$$K_x = K_y = 0;\ K_z = J_z\omega;\ \ \overline{K}_0 = J_z\omega \cdot \overline{k}. \tag{16.88}$$

- *<u>momentul cinetic raportat la centrul de masă C</u>* devine:

$$\overline{K}_c = J_z\omega\overline{k}, \tag{16.89}$$

$$K_c = J_z\omega\,.$$

- *relația lui Kőnig pentru momentul cinetic raportat la polul O_1* devine:

$$\overline{K}_{01} = \bar{r}_{1c} \times M\bar{v}_c + \overline{K}_c = \left[M\left(x_{1c}v_{c_{y1}} - y_{1c}v_{c_{x1}}\right)\right]\bar{k}\,. \quad (16.90)$$

e) **Momentul cinetic la *mişcarea de roto-translație***

Fie un solid rigid aflat în ***mişcare de roto-translație*** având masa M şi momentele de inerție mecanice axiale şi centrifugale J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} în raport cu un sistem de referință cartezian mobil $Oxyz$. În acest caz, viteza $\bar{v}$ a unui punct M aparținând rigidului va avea două componente rectangulare, una $(\bar{v}_0)$ orientată paralel cu axa mişcării şi datorată mişcării de translație, a doua $(\bar{\omega} \times \bar{r})$ situată în planul normal pe axa mişcării de roto-translație şi se datorează mişcării de rotație a rigidului în jurul acestei axe cu viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$.

Expresia momentului cinetic $\overline{K}_0$ raportat la polul O este:

$$\overline{K}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r})dm = \int_{(S)} (\bar{r}dm) \times \bar{v}_0 + \bar{\omega}\int_{(S)} r^2 dm - \int_{(S)} (\bar{\omega}\cdot\bar{r})\bar{r}dm = \bar{r}_c \times M\bar{v}_0 + \bar{\omega}\int_{(S)} r^2 dm - \int_{(S)} (\bar{\omega}\cdot\bar{r})\cdot\bar{r}dm\,, \quad (16.91)$$

unde: $\bar{r}_c \times M\bar{v}_0$ – reprezintă momentul cinetic al solidului rigid corespunzător mişcării de translație în lungul axei mişcării de roto-translație;

iar $\bar{\omega}\int_{(S)} r^2 dm - \int_{(S)} (\bar{\omega}\cdot\bar{r})\cdot\bar{r}dm$ – reprezintă momentul cinetic al rigidului corespunzător mişcării de rotație în jurul axei mişcării.

Ținând cont de expresia (16.91), rezultă că proiecțiile momentului cinetic pe axele sistemului de referință $Oxyz$ sunt:

$$\begin{aligned} K_x &= M\left(y_c v_{0z} - z_c v_{0y}\right) + J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z; \\ K_y &= M(z_c v_{0x} - x_c v_{0z}) + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x\,; \\ K_z &= M\left(x_c v_{0y} - y_c v_{0x}\right) + J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{xy}\omega_y\,. \end{aligned} \quad (16.92)$$

Expresiile (16.92) pot fi scrise şi matriceal astfel:

$$[K_0] = [\hat{s}] \cdot [v_0] + [J_0] \cdot [\omega] \quad . \tag{16.93}$$

unde:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}; \quad [v_0] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}; [\,\omega] = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

$$[\hat{s}] = \begin{bmatrix} 0 & -Mz_c & My_c \\ Mz_c & 0 & -Mx_c \\ -My_c & Mx_c & 0 \end{bmatrix}; \ matricea\ antisimetric\breve{a}$$

iar $$[J_0] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}; \ tensorul\ inerțial$$

De menționat este faptul că, relațiile (16.92) *sunt valabile şi în cazul mişcării generale a solidului rigid, dar se menționează că în acest caz $\overline{v}_0$ şi $\overline{\omega}$ sunt variabile ca direcție şi modul*, mişcarea de rotație relativă fiind în jurul axei instantanee de rotație.

16.6.3 Teorema lui König pentru momentul cinetic

Se consideră un solid rigid (*S*) aflat în **mişcare generală** faţă de un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ şi care are la un moment (*t*) viteza centrului de masă $\overline{v}_C$ şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ (fig. 16.12). Se cunoaşte masa *M* a corpului, precum şi momentele de inerţie mecanice ale acestuia în raport cu sistemul de referinţă *Oxyz,* sistem legat invariabil de solidul rigid (*S*). Se doreşte, să se determine relaţia dintre momentul cinetic al corpului faţă de punctul fix O_1 şi momentul cinetic al corpului aflat în mişcarea relativă faţă de centrul de masă *C*.

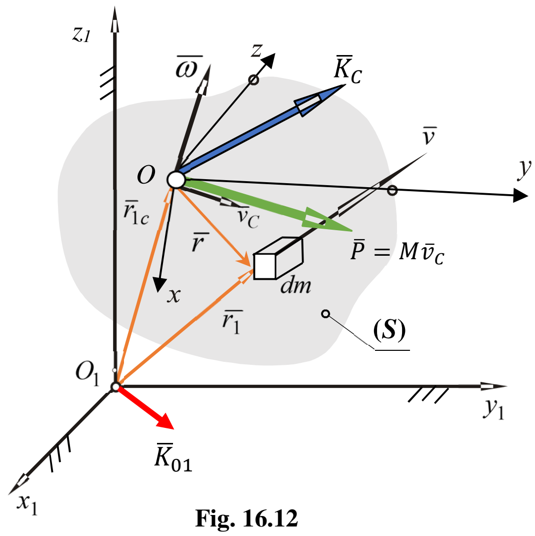


Fig. 16.12

Se pot scrie succesiv relațiile următoare, conform figurii 16.12 și expresia mometului cinetic devine:

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_{1c} + \overline{r}; \quad \overline{v} = \overline{v}_c + \overline{\omega} \times \overline{r};$$

$$\overline{K}_{01} = \int_{(S)} (\overline{r}_{1c} + \overline{r}) \times (\overline{v}_c + \overline{\omega} \times \overline{r}) dm =$$

$$= \int_{(S)} \overline{r}_{1c} \times \overline{v}_c dm + \int_{(S)} \overline{r}_{1c} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) dm + \int_{(S)} \overline{r} \times \overline{v}_c dm + \int_{(S)} \overline{r} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) dm$$

$$= \overline{r}_{1c} \times \overline{v}_c \int_{(S)} dm + \overline{r}_{1c} \times \overline{\omega} \times \int_{(S)} \overline{r} dm + \left(\int_{(S)} \overline{r} dm \right) \times \overline{v}_c +$$

$$+ \int_{(S)} \overline{r} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) dm. \tag{16.94}$$

unde: $\int_{(S)} dm = M$; $\int_{(S)} \overline{r} dm = M \cdot \overline{r}_c = 0$; $\int_{(S)} \overline{r} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) dm = \overline{K}_c$, relaţia (16.94) devine:

$$\overline{K}_{01} = \overline{r}_{1c} \times M\overline{v}_c + \overline{K}_c \,. \tag{16.95}$$

Relaţia (16.95) exprimă ***teorema lui König pentru momentul cinetic*** conform căreia, *momentul cinetic al unui solid rigid în raport cu un punct fix O_1 este egal cu suma dintre momentul cinetic al centrului de masă în care se consideră concentrată întreaga masă a solidului şi momentul cinetic $\overline{K}_c$ rezultat din mişcarea de rotație a rigidului față de axa instantanee de rotație.*

16.7 Teoremele fundamentale ale dinamicii

Teoremele fundamentale ale dinamicii constituie o urmare firească a mărimilor dinamice fundamentale prezentate, iar rolul acestora este de a ajuta la rezolvarea problemelor de dinamică. Cele trei teoreme fundamentale ale dinamicii sunt:

a. *Teorema impulsului (în general, aplicată la mişcările rectilinii ale punctelor)* cu extensia sa *de la mişcarea rigidului* numită în acest caz, *Teorema mişcării centrului de masă;*

b. *Teorema momentului cinetic (aplicată la mişcări de rotație a corpurilor);*

c. Iar cea mai generală, care le include pe primele două, este *Teorema energiei cinetice (aplicată la mişcărilor corpurilor, indiferent dacă sunt rectilinii sau de rotație sau combinații ale acestora).*

16.7.1 Teorema de variaţie a energiei cinetice

Se consideră un *sistem de puncte materiale M_i* (fig. 16.13) având masele m_i, vitezele $\overline{v}_i$, acceleraţiile $\overline{a}_i$ şi vectorii de poziţie $\overline{r}_i$, mişcarea fiind raportată la un sistem de referinţă cartezian fix notat *Oxyz*. Sistemul de puncte materiale se află în mişcare sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\overline{F}_i^{ext}$ (i = $1 \div n$). Asupra punctului M_i acţionează forţa exterioară $\overline{F}_i^{ext}$ şi rezultanta forţelor interioare, $\overline{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ij}$, $(j = 1 \div n)$, cu care celelalte puncte n-1 interacţionează cu punctul M_i.

Pentru fiecare punct material se va scrie legea fundamentală a dinamicii:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{int} \, . \tag{16.96}$$

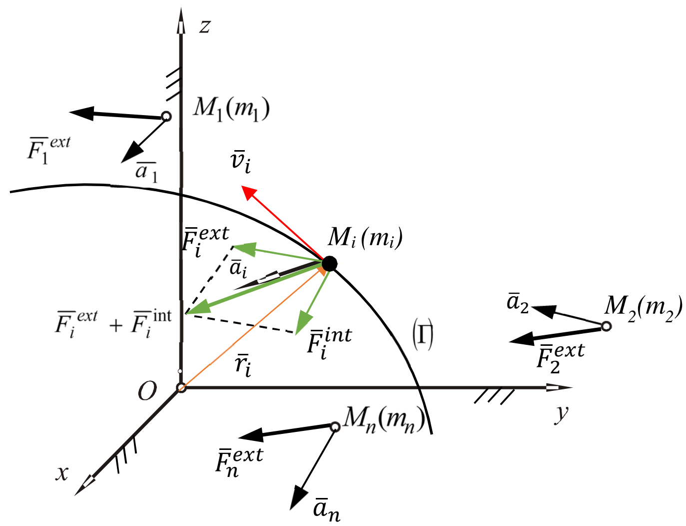


Fig. 16.13

Înmulţind scalar ambii membrii ai relaţiei (16.96) cu $d\bar{r}_i$ şi însumând relaţiile obţinute pentru $i = 1 \div n$, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \cdot d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{int} \cdot d\bar{r}_i \ . \qquad (16.97)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \, d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} d\bar{r}_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i d\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = dE_c \ . \qquad (16.98)$$

Ținând seama că: $\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}$ şi $\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$ membrii relației (16.97) devin:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext} d\bar{r}_i = dL^{ext} \ ; \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{int} d\bar{r}_i = dL^{int} \qquad (16.99)$$

unde: dL^{ext}, dL^{ext} reprezintă lucrul mecanic al forţelor exterioare, respectiv interioare.

Se obţine:

$$dE_c = dL^{ext} + dL^{int} \ . \tag{16.100}$$

Relaţia (16.100) reprezintă ***teorema de variaţie a energiei cinetice sub formă elementară*** sau ***diferenţială în cazul unui sistem de puncte materiale,*** astfel că *variaţia elementară a energiei cinetice, a unui sistem de puncte materiale într-un interval de timp elementar (dt) este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare şi lucrul mecanic elementar al forţelor interioare corespunzător deplasărilor elementare $d\bar{r}_i$, ale sistemului de puncte materiale.*

Integrând relaţia (16.100), se obţine *forma finită* sau *integrală a teoremei de variaţie a energiei cinetice* pentru un sistem discret de puncte materiale:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}^{ext} - L_{1-2}^{int} \ . \tag{16.101}$$

unde: E_{c1} este energia cinetică a sistemului la momentul t_1 [J];

E_{c2} este energia cinetică a sistemului la momentul t_2 [J];

L_{1-2}^{ext} reprezintă lucrul mecanic total al forţelor exterioare în intervalul de timp t_2-t_1 [J];

L_{1-2}^{int} reprezintă lucrul mecanic total al forţelor interioare în intervalul de timp t_2-t_1 [J].

Expresiile (16.100) şi (16.101) sunt adevărate şi în cazul unui solid rigid, cu observația că lucrul mecanic elementar dat de forțele interioare în acest caz, este nul:

$$dL^{int} = 0; \ \ L_{1-2}^{int} = 0. \tag{16.102}$$

Forma diferenţială a teoremei de variaţie a energiei cinetice, în acest caz, devine:

$$dE_c = dL^{ext} \, . \tag{16.103}$$

cu forma finită:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}^{ext} \, . \tag{16.104}$$

16.7.2 Teorema impulsului

În cele ce urmează, se va demonstra ***teorema impulsului în cazul unui sistem de puncte materiale*** care puncte sunt o generalizare a punctului material, rezultatele fiind aplicate şi la un solid rigid sau sisteme de solide rigide.

Se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i, aflat în mişcare cu vitezele şi acceleraţiile ($\bar{v}_i$, $\bar{a}_i$) sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i^{ext}, i = 1 \div n$. Asupra punctului M_i acţionează atât forţa $\bar{F}_i^{ext}, i = 1 \div n$, cât şi rezultanta forţelor interioare $\bar{F}_i^{int} = \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}$, $j = 1 \div n$, $j \neq i$ cu care celelalte puncte interacţionează cu punctele M_i (fig. 16.14).

Se menționează că pentru fiecare punct din sistemul de puncte materiale este valabil principiul al doilea al mecanicii, scris sub forma:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{\text{int}} \quad . \qquad (16.105)$$

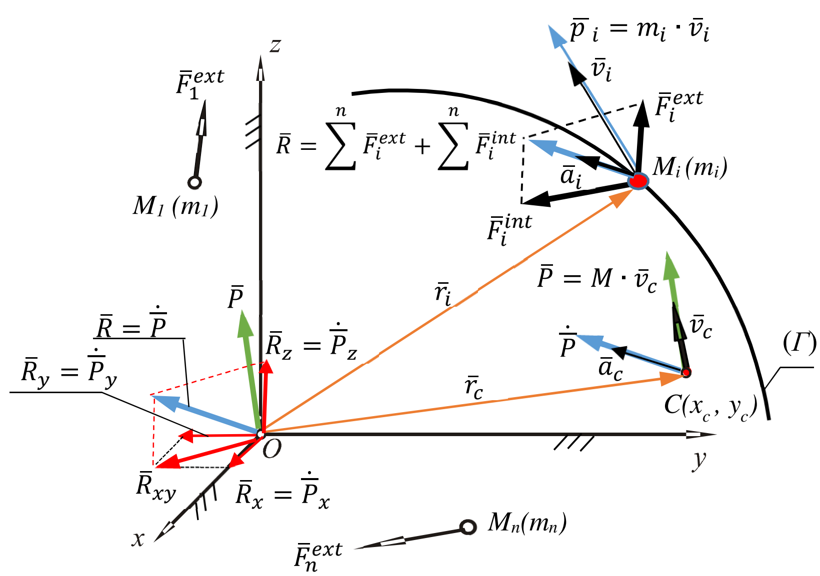


Fig. 16.14

Scriind relaţii de forma (16.105) pentru toate punctele sistemului şi însumându-le membru cu membru se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{\text{int}} \quad . \tag{16.106}$$

unde: $\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$ şi înlocuită în (16.106), conduce la:

$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \frac{d}{dt}(\bar{P}) = \dot{\bar{P}}$, care este derivata în raport cu timpul a vectorului impuls total, iar

$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext} = \bar{R}^{ext}$ - este vectorul rezultant al forţelor exterioare;

$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{int} = 0$ - este nulă, deoarece forţele interioare sunt două câte două egale în modul, având acelaşi suport şi sensuri contrare.

Ținând cont de cele precizate, se obține:

$$\dot{\bar{P}} = \bar{R}^{ext} \ . \tag{16.107}$$

Relaţia (16.107) reprezintă ***teorema de variaţie a impulsului pentru un sistem de puncte materiale***, respectiv *derivata în raport cu timpul a vectorului impuls total al unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul rezultant al forţelor exterioare aplicate punctelor sistemului.*

Deoarece: $\bar{P} = M\bar{v}_c$ va rezultă:

$$\dot{\bar{P}} = M\dot{\bar{v}}_c = M\bar{a}_c \ . \tag{16.108}$$

unde: M – este masa sistemului de puncte materiale [kg];

$\bar{v}_c$ - este viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale [m/s];

$\bar{a}_c$ - este acceleraţia centrului de masă [m/s^2].

$$M\bar{a}_c = \bar{R}^{ext} \, . \tag{16.109}$$

Teorema de variaţie a impulsului sub forma (16.109) poartă numele de ***teorema mişcării centrului maselor***, respectiv *centrul de masă al unui sistem de puncte materiale are mişcarea ca un singur punct a cărui masă este egală cu masa totală a sistemului, când asupra acestuia ar acţiona vectorul rezultant a forţelor exterioare*. Relaţia (16.109) se poate scrie sub formă scalară:

$$\dot{P}_x = M\ddot{x}_c = R_x^{ext}\,;\;\; \dot{P}_y = M\ddot{y}_c = R_y^{ext}\,;\quad \dot{P}_z = M\ddot{z}_c = R_z^{ext}\,. \tag{16.110}$$

Integrând relaţia (16.109) la momentele t_1 şi t_2, obţinem ***forma finită a teoremei impulsului***:

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{R}^{ext} dt\,, \tag{16.111}$$

unde:

$$\bar{P}_1 = M\bar{v}_{c1};\quad \bar{P}_2 = M\bar{v}_{c2}\;. \tag{16.112}$$

O particularizare a teoremei este atunci când vectorul rezultant al forţelor exterioare este nul sau proiecţia acestuia pe o axă fixă este nulă ($\overline{R}^{ext} = 0$). În aceste cazuri, *impulsul total,* respectiv proiecţia acestuia pe acea axă este invariabilă în timp, adică *se conservă*. Ținând cont de această precizare, se obțin următoarele integrale prime:

$$\bar{P} = M\bar{v}_c = \bar{C}, \tag{16.113}$$

respectiv,

$$P_x = C_1;\;\; P_y = C_2;\;\;\; P_z = C_3\;. \tag{16.114}$$

Dacă $P_y = P_z = 0$, respectiv $P_x = C_1$ atunci *centrul de masă are o mişcare rectilinie şi uniformă sau în particular, rămâne în repaus*, respectiv proiecţia centrului maselor pe acea axă se mişcă uniform sau rămâne pe loc.

Analog, celor demonstrate la un sistem de puncte materiale, se poate demonstra teorema de variaţie a impulsului pentru un solid rigid sau pentru un sistem de rigide.

16.7.3 Teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu un punct fix

În figura 16.15 se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i aflat în mişcare cu vitezele şi acceleraţiile instantanee ($\bar{v}_i$, $\bar{a}_i$), sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i^{ext}$ $(i = 1 \div n)$.

Asupra punctului M_i acţionează atât forţele exterioare, cât şi rezultanta forţelor interioare:

$$\bar{F}_i^{int} = \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \quad (j = 1 \div n),\ j \neq i\ . \tag{16.115a}$$

Pentru fiecare punct material din sistem este valabil principiul al doilea al mecanicii, scris sub forma:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int} \tag{16.115}$$

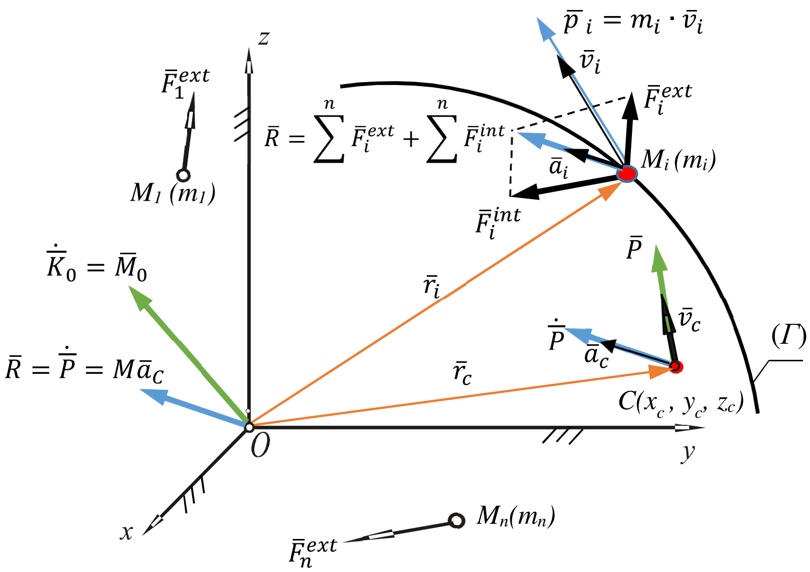


Fig. 16.15

Înmulţind vectorial la stânga cei doi membrii ai relaţiei (16.93) cu $\bar{r}_i$ şi însumând relaţiile, se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int}\ . \tag{16.116}$$

Termenii din relația (16.116) se iau pe rând, se transformă succesiv:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum_{1=1}^{n} \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \dot{\bar{K}}_0 \, ,$$

deoarece,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum_{1=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i),$$

iar

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) = \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \bar{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \bar{r}_i) = \bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i + $$
$$+ \bar{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \bar{r}_i),$$

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \, , \qquad (16.116a)$$

unde: $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} = \bar{M}_0^{ext}$ - este momentul rezultant al forţelor exterioare faţă de polul *O*.

$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int} = 0$ - este zero deoarece forţele interioare sunt două câte două egale în modul şi de sensuri opuse.

Cu aceste precizări, relația (16.116) ajunge la forma:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0^{ext} \, . \qquad (16.117)$$

Relaţia (16.117) reprezintă ***teorema momentului cinetic în raport cu un punct fix pentru un sistem de puncte materiale.*** Conform acesteia, *derivata vectorială în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, calculată faţă de un punct fix O, este egală cu momentul rezultant al sistemului forţelor exterioare aplicate punctelor sistemului raportat la polul O.*

Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu un punct fix este nul ($\overline{M}_0^{ext} = 0$) atunci:

$$\dot{\bar{K}}_0 = 0 \quad deci \ \bar{K}_0 = const. \qquad (16.118)$$

respectiv *momentul cinetic se conservă*. Ecuaţia (16.118) este o integrală primă a teoremei momentului cinetic. Sub *formă scalară, ecuaţiile* (16.117) se scriu astfel:

$$\dot{K}_x = M_x^{ext}; \quad \dot{K}_y = M_y^{ext}; \quad \dot{K}_z = M_z^{ext}. \qquad (16.119)$$

Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu o axă fixă este nul, atunci faţă de axa respectivă momentul cinetic se conservă.

$$\text{Ex:} \quad M_y^{ext} = 0;\ \dot{K}_y = 0 \ \ deci \quad K_y = ct. \tag{16.120}$$

Integrând relaţia (16.117), se ajunge la ***forma finită a teoremei de variaţie a momentului cinetic*** respectiv:

$$\bar{K}_{02} - \bar{K}_{01} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_0^{ext} dt. \tag{16.121}$$

16.7.3.1 Teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu centrul maselor

În cele ce urmează se va demonstra că teorema de variație a momentului cinetic este aproximativ identică sub aceeaşi formă, ca cea demonstrată în paragraful anterior din mişcarea relativă a sistemului de puncte materiale sau aplicată la solidul rigid, caz în care operatorul $suma$ se va transforma în $integrala$.

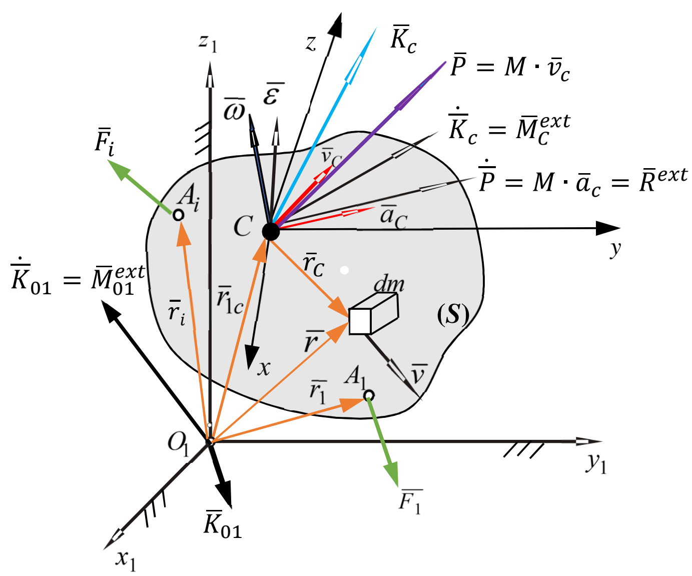


Fig. 16.16

Astfel că, se consideră un solid rigid (*S*) aflat în mişcare în raport cu un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i^{ext}$ $(i = 1 \div n)$. De solidul rigid (*S*) este invariabil legat un sistem de referinţă mobil *Cxyz* cu originea în centrul maselor *C* (fig. 16.16).

Se urmăreşte determinarea relaţiei dintre momentul cinetic al corpului în mişcarea relativă faţă de centrul de masă *C* şi momentul rezultant al forţelor exterioare faţă de acelaşi punct. Utilizând teorema lui König pentru momentul cinetic şi derivând în raport cu timpul în ambii membrii ai relației, se obține:

$$\dot{\bar{K}}_{01} = \dot{\bar{r}}_{1c} \times M\bar{v}_c \quad + \bar{r}_{1c} \times M\bar{a}_c + \dot{\bar{K}}_c \,. \tag{16.122}$$

Conform teoremei momentului cinetic faţă de punctul fix O_1 şi a teoremei mişcării centrului de masă, rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_{01} = \bar{M}_{01}^{ext} \;; \quad M\bar{a}_c = \bar{R}^{ext} \,. \tag{16.123}$$

relații în care:

$\bar{M}_{01}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{1i} \times \bar{F}_i^{ext}$ - este momentul rezultant al forţelor exterioare faţă de O_1;

$\bar{R}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext}$ - este vectorul rezultant al forţelor exterioare, iar:

$$\dot{\bar{r}}_{1c} \times M\bar{v}_c = \bar{v}_c \times M\bar{v}_c = 0 \,.$$

Astfel, relaţia (16.123) devine:

$$\bar{M}_{01}^{ext} = \bar{r}_{1c} \times \bar{R}^{ext} + \dot{\bar{K}}_c \quad \text{sau} \quad \dot{\bar{K}}_c = \bar{M}_{01}^{ext} - \bar{r}_{1c} \times \bar{R}^{ext} \,. \tag{16.124}$$

Luând în considerare legea de variaţie a momentului rezultant la schimbarea polului de reducere, se poate scrie:

$$\bar{M}_{01}^{ext} = \bar{M}_c^{ext} + \bar{r}_{1c} \times \bar{R}^{ext}; \quad \bar{M}_c^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} \,. \tag{16.125}$$

Introducând (16.125) în (16.124), se obține:

$$\dot{\bar{K}}_c = \bar{M}_C^{ext}. \tag{16.126}$$

Relaţia (16.126) exprimă ***teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu centrul maselor***, respectiv *derivata în raport cu timpul a vectorului moment cinetic al unui sistem de puncte materiale aflate în mişcare relativă faţă de centrul de masă al sistemului, este egală cu momentul rezultant al forţelor exterioare calculat în raport cu acelaşi centru de masă al sistemului.*

Integrarea relaţiei (16.126) conduce la ***forma finită a teoremei momentului cinetic raportat la centrul maselor*** şi anume:

$$\bar{K}_{c2} - \bar{K}_{c1} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_c^{ext} dt \ . \qquad (16.127)$$

16.8 Probleme rezolvate

16.8.1. Asupra unui punct material *M* de masă *m* lansat în plan vertical *Oxy* (fig. 16.17) acţionează o forţă $\overline{F} = kx$ proporţională cu masa şi distanța punctului faţă de *O*, acesta fiind considerat punct fix. La momentul $t_0 = 0$, punctul se află la o anumită cotă $y_0 = 0$ pe axa *Oy* având viteza iniţială $\overline{v}_0$, paralelă cu axa *Ox*. Se cere să se studieze traiectoria de mişcare a punctului material *M* utilizând teorema impulsului.

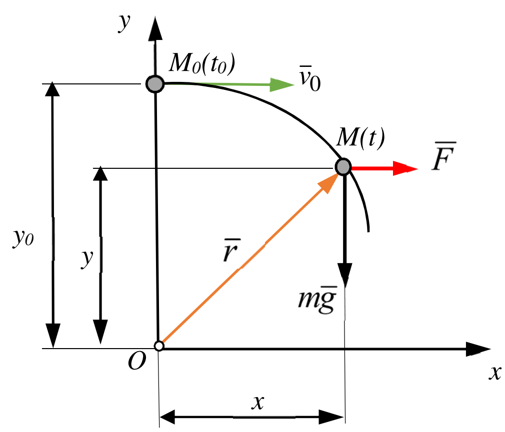


Fig. 16.17

Soluţie:

Pentru a studia mişcarea punctului material *M* trebuie definită ecuaţia parametrilor de mişcare şi traiectoria de mişcarea a punctului *M*.

Pentru rezolvare se va pleca de la una din teoremele fundamentale ale dinamicii, respectiv teorema impulsului:

$$m\bar{a} = \bar{R}. \tag{1}$$

dar, $\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}$; $x = x(t, C_1, C_2)$, $y = y(t, C_3, C_4)$; (2)

unde: $\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} = F\bar{i} + mg\bar{j}$, respectiv $\bar{R} = kx\bar{i} - mg\bar{j}$,

$$m\ddot{x} = R_x; \quad m\ddot{y} = R_y$$

așadar

$$m\ddot{x} = kx\,; \quad m\ddot{y} = -mg \tag{3}$$

se împart cu masa *m* relațiile (3)

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \tag{4}$$

se notează: $\frac{k}{m} = \omega^2$.

Se trec ecuațiile diferențiale de ordinul doi din relația (4) la ecuațiile omogene corespunzătoare, ale cărei soluții sunt:

$$x = e^{rt}; \quad \dot{x} = re^{rt}; \quad r^2 - \omega^2 = 0 \ \rightarrow r = \pm\,\omega\,, \tag{5}$$

se înlocuieşte cu:

$$x = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t}; \quad \dot{x} = \omega(C_1e^{\omega t} - C_2e^{-\omega t})\,. \tag{6}$$

Pentru aflarea *constantelor de integrare* se apelează la condițiile inițiale ale mişcării:

la momentul: $t_0 = 0,\ x = x_0 = 0,\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0\,;$ (7)

$$y = y_0 = d, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = 0$$

Înlocuind relaţiile (7) în (6), vor rezulta constantele de integrare:

$$C_1 = C_2 = \frac{v_0}{2\omega}\ , \tag{8}$$

Efectuând o dublă integrare a celei de a doua ecuații diferențială a sistemului (4), se obține:

$$\dot{y} = -gt + C_3$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4\ . \tag{9}$$

Introducând în (9) condițiile inițiale ale mișcării, se obțin constantele de integrare C_3, C_4 și anume:

$$C_3 = 0 \text{ și } C_4 = \text{d}. \tag{10}$$

Ecuațiile parametrice de mișcare a punctului se obțin din prima relație (6) și a doua relație (9), în care se introduc constantele de integrare.

Forma acestor ecuații este:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{\omega}\left(\dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right) = \dfrac{v_0}{\omega} sh(\omega t) \\ y = \dfrac{-gt^2}{2} + d \end{cases}$$ *ecuații parametrice de mişcare.* (11)

Dacă se elimină timpul (t) din relațiile (11) se obține *ecuația traiectoriei punctului material* care în acest caz, va fi o parabolă.

16.8.2. Un sistem de corpuri de greutăți $\overline{Q}$ şi $\overline{P}$ legate printr-un fir, se mişcă conform figurii 16.18. Corpul de greutate $\overline{P}$ se află inițial la distanța y_0 față de sol şi trage corpul de greutate $\overline{Q}$, acesta mişcându-se pe un plan orizontal fix a cărui coeficient de frecare la alunecare este μ. La momentul inițial t_0, sistemul se află în repaus. Se cer să se determine legile de mişcare ale celor două corpuri, precum şi tensiunea din fir.

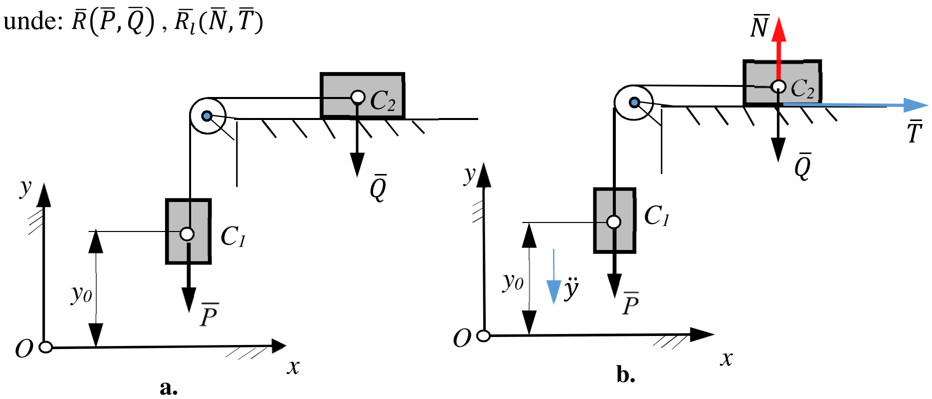
Soluţie:

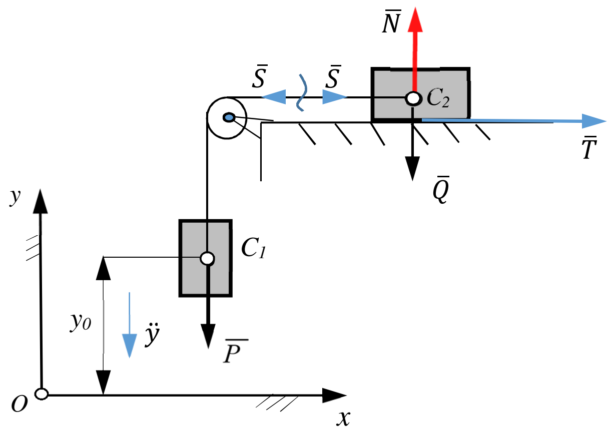
a. Determinarea legilor de mişcare

Pentru rezolvare se aplica *Teorema mişcării centrului maselor*:

$$\dot{\bar{P}}' = m\bar{a} = \bar{R} + \bar{R}_l \quad . \tag{1}$$

unde: $\bar{R}(\bar{P}, \bar{Q})$, $\bar{R}_l(\bar{N}, \bar{T})$





c.

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}; \quad \bar{R}_l = \bar{N} + \bar{T} \quad \text{şi} \quad \bar{a}(\ddot{x}, \ddot{y}). \tag{2}$$

Ecuațiile rezultate ca proiecții scalare pe axe (fig. 16.18b), sunt:

$$Ox: T - P = m_1 \ddot{x} \ . \tag{3}$$

Pentru corpul de greutate $\bar{Q}$:

$$N = Q, \ \ T = \mu N = \mu Q.$$

$$Oy: P = m_2 \ddot{y} \ . \tag{4}$$

Din ecuațiile diferențiale obținute, rezultă:

$$\mu Q - P = \frac{Q}{g}\ddot{x} \qquad \text{şi} \qquad -P = \frac{P}{g}\ddot{y} \rightarrow \ddot{y} = -g \ . \tag{5}$$

Relațiile (5) reprezintă *ecuațiile diferențiale de mişcare ale sistemului de corpuri*.

Ecuțiile parametrice ale mişcării sunt $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi vor rezulta din relațiile (5) printr-o dublă integrare astfel:

$$\dot{x} = \frac{(\mu Q - P)g}{Q} t + C_1 \ ; \qquad x = \frac{(\mu Q - P)g}{Q} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

$$\dot{y} = -gt + C_3 \quad ; \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{6}$$

Pentru aflarea *constantelor de integrare* se apelează la condițiile inițiale ale mişcării, respectiv la momentul $t_0 = 0$:

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0 \quad \text{şi} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = y_0\,; \tag{7}$$

Înlocuind (7) în (6) rezultă constantele de integrare.

$$C_1 = C_2 = C_3\,, \quad C_4 = y_0\,. \tag{8}$$

care înlocuite în (6), conduc la

$$\dot{x} = \frac{(\mu Q - P)g}{Q} t; \quad x = \frac{(\mu Q - P)g}{Q}\frac{t^2}{2} \quad ; \quad \dot{y} = -gt \quad ; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + y_0. \tag{9}$$

b. Determinarea tensiunii din fir

Tensiunea *S* din fir (fig. 16.18c) se poate afla prin aplicarea *Teoremei energiei cinetice:*

$$E_{c1} - E_{c0} = L_{0-1}\,. \tag{10}$$

unde:

$$Ec_0 = 0;\ Ec_1 = E_P + E_Q;\ L_{0-1} = L_p + L_Q\,. \tag{11}$$

$$Ec_1 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{P}{g}\frac{v^2}{2} + \frac{Q}{g}\frac{v^2}{2}\,. \tag{12}$$

$$L_{0-1} = (P - T) \cdot y_0 = y_0 \cdot (P - \mu Q)\,. \tag{13}$$

Egalând (12) cu (13), conform cu (10), rezultă:

$$\frac{v^2}{2}\left(\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\right)=y_0(P-\mu Q)\ . \tag{14}$$

Aplicând calcule diferențiale relației (10), se scrie $\Delta E_c = \Delta L$. Ținând cont că:

$$y_0 = vdt \tag{15}$$

se obține:

$$avdt\left(\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\right)=vdt(P-\mu Q)\ . \tag{16}$$

Din (14) rezultă accelerația cu care cade corpul de greutate $\bar{P}$:

$$a = \ddot{y} = \frac{(P-\mu Q)}{\left(\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\right)}\ . \tag{17}$$

Aplicând teorema impulsului (1) proiectată pe verticală pentru corpul de greutate $\bar{P}$, rezultă:

$$P-S=m_1 a \ \rightarrow P-S=\frac{P}{g}a \quad \rightarrow \ (tensiunea\ in\ fir)\ S=P-\frac{P}{g} \tag{18}$$

16.8.3. Se consideră o bară AB de lungime l şi greutate $\bar{G}$ care face cu orizontala unghiul α (fig. 16.19) şi care se deplasează cu frecările (μ_1 şi μ_2) pe sol şi pe un perete vertical. Bara se află inițial în repaus.

Să se afle legea de mişcare şi forțele de legătură pentru bară.

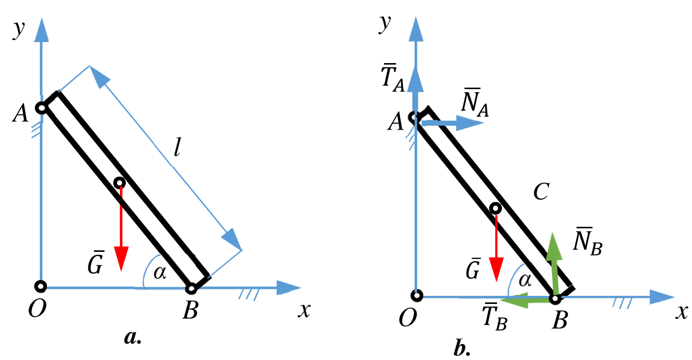


Fig. 16.19

Soluţie:

Pentru rezolvare, se aplică *Teorema momentului cinetic şi Teorema mişcării centrului maselor* raportate la centrul maselor *C* (fig. 16.19).
Se observă că bara execută o mişcare plan-paralelă cu o rotaţie $\alpha = \alpha(t)$ şi translaţii cu $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\dot{\overline{P'}} = M\bar{a}_c = \bar{R} \qquad \text{şi} \qquad \dot{\overline{K}}_c = M_c. \tag{1}$$

$$\dot{\overline{K}}_c = J_c^{bara}\ddot{\alpha} = \frac{G}{g}\cdot\frac{l^2}{12}\ddot{\alpha}\ ; \quad \text{unde:} \quad J_c^{bara} = \frac{G}{g}\cdot\frac{l^2}{12};$$

$$M_c = N_A\frac{l}{2}sin\alpha - T_A\frac{l}{2}cos\alpha + N_B\frac{l}{2}cos\alpha - T_B\frac{l}{2}sin\alpha\ , \tag{2}$$

respectiv

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{l^2}{12}\cdot\ddot{\alpha} = N_A\frac{l}{2}sin\alpha - T_A\frac{l}{2}cos\alpha + N_B\frac{l}{2}cos\alpha - T_B\frac{l}{2}sin\alpha. \tag{3}$$

Proiectând pe axele sistemului de referinţă relaţia (1) a teoremei mişcării centrului maselor şi ţinând cont de figura 16.19b, rezultă:

$$Ox: \qquad ma_x = R_x \rightarrow \frac{G}{g}\ddot{x} = N_A - T_B \rightarrow \ddot{x} = \frac{(N_A - T_B)\cdot g}{G}$$

$$Oy: \qquad ma_y = R_y \rightarrow \frac{G}{g}\ddot{y} = N_B + T_A - G \rightarrow \ddot{y} = \frac{(N_B + T_A - G)\cdot g}{G}\ . \tag{4}$$

În relațiile (2): $T_A = \mu_1 N_A$ şi $T_B = \mu_2 N_B$; (5)

$$x = \frac{l}{2}\cos\alpha ; \quad y = \frac{l}{2}\sin\alpha \ . \tag{6}$$

Prin derivări successive, rezultă:

$$\ddot{x} = \frac{l}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha ; \quad \ddot{y} = -\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha. \tag{7}$$

Egalând (4) cu (7) şi ținând cont de (3), rezultă sistemul de trei ecuații în necunoscutele N_A, N_B şi unghiul α:

$$\frac{(N_A - \mu_2 N_B)\cdot g}{G} = \frac{l}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha$$

$$\frac{(N_B + \mu_1 N_A - G)\cdot g}{G} = -\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha. \tag{8}$$

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{l^2}{12}\cdot\ddot{\alpha} = N_A\frac{l}{2}sin\alpha - \mu_1 N_A\frac{l}{2}cos\alpha + N_B\frac{l}{2}cos\alpha - \mu_2 N_B\frac{l}{2}sin\alpha.$$

Efectuând calculele, se obțin:

$$N_B(\alpha) = \frac{\frac{-\mu_1}{G}\left(\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) + g + \left(-\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha\right)}{\frac{g}{G}(1+\mu_1\mu_2)} \tag{9}$$

$$N_A(\alpha) = \frac{G}{g}\cdot\left[\left(\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) + \frac{\mu_2 g}{G}\ \cdot\right.$$
$$\left. = \left(\frac{\frac{-\mu_1}{G}\left(\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) + g + \left(-\frac{l}{2}\ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{l}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha\right)}{\frac{g}{G}(1+\mu_1\mu_2)}\right)\right]$$

(10)

Prin înlocuirea relațiilor (9) şi (10) în a treia ecuație a sistemului (8), rezultă legea de mişcare a barei dată de: $\alpha = \alpha(t)$ dintr-o ecuație diferențială liniară de ordinul doi a cărui termen $\dot{\alpha}^2$ se neglijează pentru deplasările mici. Astfel,
$A\ddot{\alpha} + B\alpha = 0$, a cărei soluție este de forma:

$$\alpha = e^{-2t}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)\,. \tag{11}$$

Analitic, trecând de la soluția omogenă (r) la cea generală, rezultă soluția finală α.

Înlocuind (11) în relațiile (9) şi (10), rezultă forțele de legătură N_A şi N_B.

16.8.4. Se consideră un sistem de solide rigide (fig.16.20) [4] format din corpurile de greutăți $\overline{P_1}, \overline{P_2}$, unde $\overline{P_1} > \overline{P_2}$ şi un troliu articulat în punctul O de greutate $\bar{G}$ şi raze r şi R, corpurile fiind legate între ele printr-un fir flexibil şi inextensibil. Se neglijează frecarea din articulația O, precum şi frecarea firului cu troliul. Se cere să se calculeze accelerația unghiulară ε a troliului, astfel încât corpul de greutate $\overline{P_1}$ să coboare cu accelerația $\bar{a}_1$ cunoscută la momentul t_1.

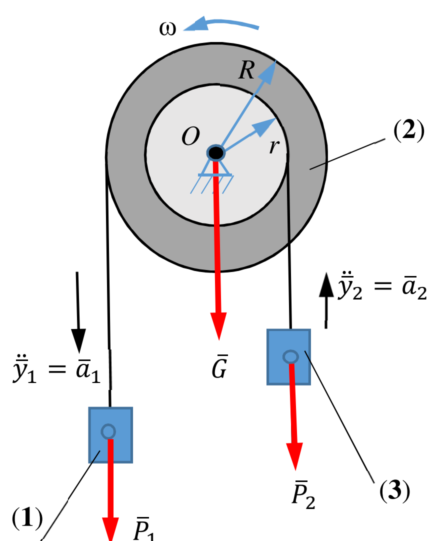


Fig. 16.20

Soluţie:

Pentru rezolvare se aplică *teorema momentului cinetic* pentru troliul (2).

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 \; . \qquad (1)$$

Prin înlocuirea scalară a fiecărui termen al relației (1), se obțin:

$$M_0 = -P_2 r + P_1 R \; . \qquad (2)$$

$$\dot{K}_0 = (J_r + J_R)\varepsilon \; . \qquad (3)$$

Egalând relațiile (2) şi (3), conform cu (1) şi ținând cont că momentul de inerție mecanic al unui disc este: $J = MR^2/2$, rezultă ecuația:

$$\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{Mr^2}{2}\right) \cdot \varepsilon = -P_2 r + P_1 R \; , \qquad (4)$$

care se poate scrie

$$\left(\frac{\frac{G}{g}R^2}{2} + \frac{\frac{G}{g}r^2}{2}\right) \cdot \varepsilon = -P_2 r + P_1 R \; . \qquad (5)$$

Din relația (5) se obține accelerația unghiulară ε a troliului.

$$\varepsilon = \frac{(P_1 R - P_2 r)\cdot 2g}{G\cdot(R^2 + r^2)} \quad [\mathrm{rad/s^2}] \; . \qquad (6)$$

16.8.5. Se consideră acelaşi sistem de solide rigide din problema 16.8.4. format din corpurile de greutăți $\overline{P_1}, \overline{P_2}$, unde $\overline{P_1} > \overline{P_2}$ şi un troliul articulat în punctul *O* de greutate $\bar{G}$ şi raze *r* şi *R*, corpurile fiind legate între ele printr-un fir flexibil şi inextensibil. Se neglijează frecarea din articulația *O,* precum şi frecarea firului cu troliul şi se cunoaşte viteza unghiulară $\overline{\omega}$ a troliului, considerându-se că sistemul pleacă din repaus.

Se cere să se calculeze deplasarea y_2 a corpului de greutate $\overline{P_2}$ în acelaşi interval de timp *(t_1)*, astfel încât corpul de greutate $\overline{P_1}$ să coboare cu accelerația $\overline{a}_1$ cunoscută la momentul t_1.

Soluţie:

Pentru rezolvare se aplică *teorema energiei cinetic în formă finită*. Se ține cont de faptul că energia cinetică E_c în mişcare de *rotație* este egală cu $E_c = J\omega^2/2$, iar în mişcarea *rectilinie* este $E_c = mv^2/2$.

$$E_{c\_final} - E_{c\_initial} = L_{initial\_final} \ . \tag{1}$$

Sistemul de corpuri este constituit din trei corpuri la care energiile cinetice sunt:

$$E_{c1\_initial} = E_{c2\_initial} = E_{c3\_initial} = 0 \ . \tag{2}$$

$$E_{c\_final} = E_{c1\_final} + E_{c2\_final} + E_{c3\_final}. \tag{3}$$

$$L_{initial\_final} = L_1 + L_2 + L_3 \ \ . \tag{4}$$

Egalând (3) cu (4) şi înlocuindu-le în (1), se poate scrie

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} = P_1 y_1 + 0 - P_2 y_2. \tag{5}$$

Se ştie că în mişcare rectilinie uniform variată $y_1 = v_1 t_1 \ = \frac{a_1 t_1^2}{2}$

și momentul de inerție mecanic la troliu este:

$$J = (J_R + J_r) = \frac{\frac{G}{g}R^2}{2} + \frac{\frac{G}{g}r^2}{2} = \frac{G}{2g}(R^2 + r^2). \quad (6)$$

Înlocuind (6) în (5), rezultă:

$$\frac{P_1 a_1^2 t_1^2}{4g} + \frac{G}{4g}(R^2 + r^2) \cdot \omega^2 + \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{y_2^2}{t_1^2} = P_1 \frac{a_1 t_1^2}{2} - P_2 y_2 \quad (7)$$

$$\frac{P_2}{2g \cdot t_1^2} \cdot y_2^2 + P_2 \cdot y_2 + \left(\frac{P_1 a_1^2 t_1^2}{4g} + \frac{G}{2g}(R^2 + r^2) \cdot \omega^2 - P_1 \frac{a_1 t_1^2}{2}\right) = 0\ . \quad (8)$$

Prin rezolvarea ecuației de gradul doi dată de relația (8) în necunoscuta y_2 va rezulta deplasarea cerută. Se iau în considerare doar soluțiile pozitive.

$$y_{2(1,2)} = -gt_1^2 + \frac{gt_1^2 \sqrt{P_2^2 - 4\frac{P_2}{2g \cdot t_1^2} \cdot \left(\frac{P_1 a_1^2 t_1^2}{4g} + \frac{G}{2g}(R^2 + r^2) \cdot \omega^2 - P_1 \frac{a_1 t_1^2}{2}\right)}}{P_2}\ . \quad (9)$$

16.8.6. Se dă punctul *M* care se mişcă conform figurii 16.21 [4]. Să se determine mişcarea punctului material *M* aflat la extremitatea barei de lungime *l* care oscilează fără frecare în *O,* precum şi viteza şi perioada de oscilație a acestuia.

Soluție:

Pentru aflarea vitezei se va aplica *teorema energiei cinetice*.

$$Ec_f - Ec_i = L_{i-f}\ . \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot BB_0\ ; \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgl \cdot cos\alpha. \quad (3)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - cos\alpha); \quad (4)$$

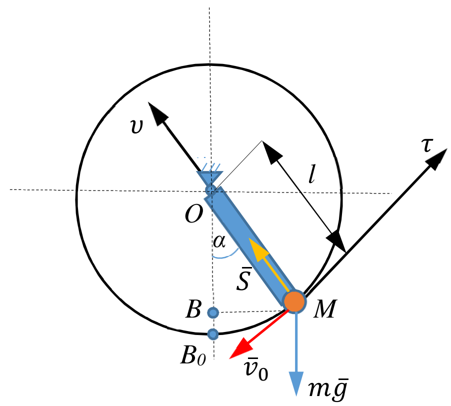


Fig. 16.21 [4]

Pentru viteza inițială $v_0 = 0$, viteza devine:

$$v^2 = 2gl(1 - cos\alpha); \tag{5}$$

Unghiul α este unghiul pentru poziția de echilibru a punctului la un moment dat (t) şi se obține:

$$cos\alpha = 2gl - v_0^2/2gl \, . \tag{6}$$

Pentru ca punctul material să oscileze, trebuie ca valoarea unghiului $\alpha = \pi$, $\cos \alpha = -1$, de unde rezultă:

$$v_0^2 < 4gl \, . \tag{7}$$

La limită, când $v_0^2 = 4gl$, viteza punctului material M se va anula în punctul limită superior al traiectoriei circulare, iar dacă $v_0^2 > 4gl$ punctul M se va roti pe cerc la infinit, în cazul absenței frecărilor.

Aplicând teorema impulsului pentru punctul M conform legii lui Newton şi considerând sistemul de referință intrinsec, se poate scrie:

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \rightarrow \quad m\bar{a} = \bar{G} + \bar{S}\,. \tag{8}$$

Ținând cont că în cazul micilor oscilații pentru $\propto = 5^0$, $\sin \propto = \propto$, iar $cos \propto = 1$, acestea se vor înlocui în relațiile următoare.

Relația (8) se proiectează după cele două axe ale sistemului intrinsec şi se obține:

$$ma_\tau = -mgsin \propto \quad \rightarrow \quad ml\ddot{\alpha} = -mgl\,. \tag{9}$$

Împărțind relația (9) cu masa şi ordonând-o după unghiul $\propto$, se obține legea de mişcare a punctului *M* şi soluția acestuia. Astfel,

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0\,. \tag{10}$$

Soluția ecuației (10) după o serie de calculi este:

$$\propto = \propto' \cos(\omega t + \propto_0)\,, \quad unde \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{11}$$

Perioada mişcării este ca şi în cazul pendulului matematic:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{ , nu depinde de masa } m. \tag{12}$$

16.9 Probleme propuse

16.9.1. Se dă un sistem de trei corpuri care porneşte din repaus sub acțiunea forțelor proprii. Sistemul este compus dintr-un disc (*1*) de raza *R* și greutatea $\bar{Q}$ ce se deplasează pe un plan orizontal, coeficientul de frecare la rostogolire fiind (*s*), iar de originea lui este legat printr-un fir flexibil şi inextensibil discul (*2*) de rază *r* al unui troliu a cărui moment de inerție *J,* este cunoscut. De cealaltă parte a firului este corpul (*3*) de greutate $\bar{P}$, care coboară pe un planul înclinat de unghi α, cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind (μ). Se cer: să se schițeze figura şi să se afle accelerația mişcării corpului de greutate $\bar{P}$ pe planul înclinat, precum şi tensiunile din fire.

Răspuns:

$$J\frac{a}{R} = S_1R - S_2r, \quad \text{unde } S_1 \text{ și } S_2 \text{ sunt tensiuni în fire}$$

$$a = \frac{P(sin\alpha - \mu cos\alpha) - \frac{Qsr}{R^2}}{\frac{3Qr^2}{2gR^2} + \frac{P}{g} + \frac{J}{R^2}}.$$

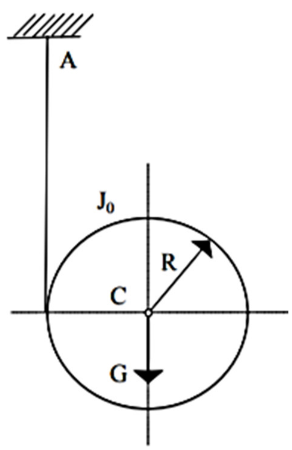


Fig. 16.22 [4]

16.9.2. Se consideră un disc omogen de rază R şi greutate G având înfăşurat pe circumferinţa sa un fir fixat în punctul *A* (fig. 16.22). Discul este lăsat să cadă liber pe verticală plecând din repaus. Se cer să se determine legea de mişcare şi tensiunea din fir.

Răspuns:

$$S = \frac{G}{3}; \quad \text{unde } S \text{ este tensiune în fir.}$$

Legea de mişcare față de centrul discului este: $\frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\ddot{\varphi} = SR.$

17. DINAMICA SOLIDULUI RIGID [5]

În mecanică, noţiunea de *solid sau corp rigid* reprezintă o idealizare a celei de solid, considerându-se cazul în care acesta este nedeformabil, adică distanţa dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică, indiferent de forţele exterioare care acţionează asupra corpului.

Descoperirile în ceea ce priveşte mişcarea solidului rigid au fost făcute prin studiile lui Leonhard Euler (1758), respectiv mişcarea unui corp rigid, având o distribuţie de masă arbitrară în spaţiu, se caracterizează printr-o ecuaţie diferenţială care implică doar trei constante şi momentele de inerţie legate de axa principală de inerţie a corpului. Excepţie, este cazul *solidului rigid asimetric* care este caracterizat prin mai mulţi factori geometrici (de exemplu, mişcarea moleculară). În completarea studiului lui Euler a venit Lie-Poisson cu dinamica corpului rigid liber care utilizează integratorii, ei fiind derivaţi pentru aflarea parametrilor mişcării.

17.1 Dinamica rigidului liber şi a rigidului supus la legături

a) Solidul rigid liber

Se consideră un solid rigid liber (*S*), de masă *M*, aflat în mişcare generală sub acţiunea sistemului de forţe exterioare $\bar{F}_i$ ($i = 1 \div n$). Mişcarea rigidului se va raporta la sistemele de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ ai cărui versori sunt $(\bar{i}_1, \bar{j}, \bar{k}_1)$ şi mobil *Cxyz,* acesta fiind solidar legat de rigid și având versorii $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, precum şi sistemul mobil *Cx'y'z'*, unde *C* este centrul maselor rigidului. Sistemul de referinţă *Cxyz* are axele paralele cu axele sistemului de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$.

Un solid rigid aflat în mişcare generală este caracterizat de *şase parametri independenţi*: rezultaţi din trei *translaţii* (x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}) şi trei *rotaţii* (θ, ψ, φ) astfel, ecuaţiile parametrice ale mişcării sunt:

$$x_{1c} = x_{1c}(t); \; y_{1c} = y_{1c}(t); \; z_{1c} = z_{1c}(t) \; ; \qquad (17.1)$$

$$\theta = \theta(t);\ \psi = \psi(t),\ \varphi = \varphi(t).$$

În figura 17.1 setul de unghiuri (θ, ψ, φ) se numeşte set de *unghiuri Euler*, unde:

- unghiul ψ, numit *unghi de precesie* este unghiul pe care axa nodurilor *ON* îl face cu axa *OX´*.

Axa nodurilor rezultă din intersecţia planului mobil *OxY´* cu planul *Oxy*.

- unghiul θ, numit *unghi de nutaţie* este unghiul dintre axa *Oz* şi *OZ´*.
- unghiul φ, numit *unghi de rotaţie proprie* este unghiul dintre axa *Ox* şi axa nodurilor *ON*.

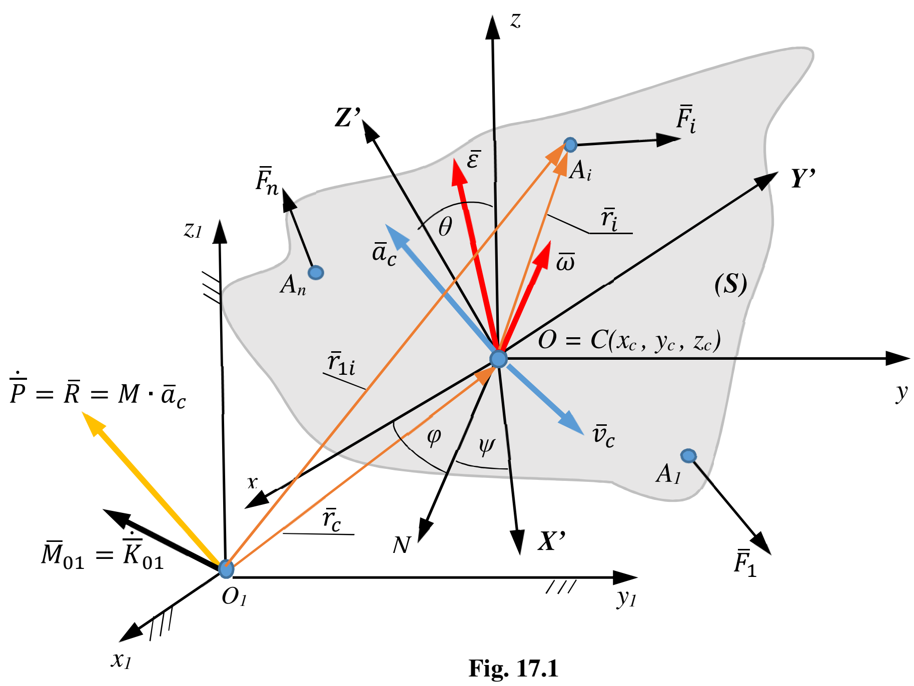


Fig. 17.1

În mişcarea generală a unui solid rigid direcțiile axelor sistemului de referință mobil *Cxyz* față de sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ sunt date de unghiurile lui Euler sau de nouă *cosinusuri directoare* (α_i, β_i, γ_i), $i = 1 \div 3$.

Între cosinusurile directoare există şase relații de interdependență scrise astfel:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1. \tag{17.2}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = 0\ ,\ i, j = 1 \div 3;\ i \neq j. \tag{17.2a}$$

În final, doar *trei cosinusuri directoare rămân independente,* pentru că între cele nouă cosinusuri directoare există șase relații de dependență.

În studiul mişcării dinamicii solidului rigid se aplică două din cele trei teoreme fundamentale prezentate în capitolul precedent, respectiv *teorema impulsului* şi *teorema momentului cinetic*:

$$\dot{\bar{P}} = \bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\ ; \qquad \dot{\bar{K}}_{01} = \bar{M}_{01} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{1i} \times \bar{F}_i\ . \tag{17.3}$$

Relațiile (17.3) reprezintă *ecuațiile diferențiale ale mişcării rigidului aflat în mişcare generală*.

Dacă ne referim la centrul maselor, prima relație (17.3), devine:

$$M\bar{a}_c = \bar{R}. \tag{17.4}$$

Această relație proiectată pe axele sistemului de referință fix, conduce la ecuațiile diferențiale:

$$M\ddot{x}_{1c} = R_{x_1} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ;\ \ M\ddot{y}_{1c} = R_{y_1} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\ ;\ \ M\ddot{z}_{1c} = R_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\ . \tag{17.5}$$

Pentru simplificarea studiului, se consideră că sistemul de referință *Cxyz,* este un sistem inerțial de referință și se cunosc momentele de inerție mecanice axiale şi centrifugale (J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}) ale solidului rigid.

În acest caz, pentru a exprima relația a doua din (17.3) este nevoie de momentul cinetic al rigidului raportat la centrul de masă *C*. Menționând că versorii axelor sistemului de referință *Cxyz* sunt variabili în timp ca direcție, derivatele lor în raport cu timpul sunt date de ***relațiile lui Poisson,*** scrise sub forma:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}\ . \tag{17.6}$$

Având în vedere (16.85), vectorul moment cinetic $\bar{K}_c$ se poate scrie astfel:

$$\bar{K}_c = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}\ . \tag{17.7}$$

Derivând relația (17.7) şi ținând cont de (17.6), rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_c = J_x \varepsilon_x \bar{i} + J_y \varepsilon_y \bar{j} + J_z \varepsilon_z \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix}. \tag{17.8}$$

Identificând în ambii membri coeficienții versorilor în relația (17.8), se obțin componentele scalare ale vectorului $\dot{\bar{K}}_c$ pe axele sistemului de referință mobil *Cxyz*:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{C_X} &= J_x \varepsilon_x + \omega_y \omega_z (J_z - J_y)\ ; \\ \dot{K}c_y &= J_y \varepsilon_y + \omega_z \omega_x (J_x - J_z)\ ; \\ \dot{K}c_z &= J_z \varepsilon_z + \omega_x \omega_y (J_y - J_x)\ . \end{aligned} \tag{17.9}$$

Ținând cont de legea de variație a momentului cinetic la schimbarea polului, se poate obține prin derivare, teorema momentului cinetic raportată la polul O_1, și având în vedere că: $\dot{\bar{r}}_{1C} \times \bar{P} = \bar{v}_C \times M \bar{v}_C = 0$. Astfel,

$$\dot{\bar{K}}_{01} = \dot{\bar{K}}_c + \bar{r}_{1c} \times \dot{\bar{P}}\ . \tag{17.10}$$

În relația (17.10)

$$\dot{\bar{P}} = M \bar{a}_c = M\left(\ddot{x}_{1c} \bar{i}_1 + \ddot{y}_{1c} \bar{j}_1 + \ddot{z}_{1c} \bar{k}_1\right). \tag{17.11}$$

Relația (17.11) este exprimată în raport cu sistemul de referință fix.

Proiectând teorema momentului cinetic (a doua rel. (17.3)) pe axele sistemului de referință fix, se obțin următoarele ecuații diferențiale scalare:

$$\left[J_x\varepsilon_x + \left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z\right]\alpha_1 + \left[J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z\right]\alpha_2 + \\ +\left[J_z\varepsilon_z + \left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_x\right]\alpha_3 + M\cdot(y_{1c}\ddot{z}_{1c} - z_{1c}\ddot{y}_{1c});$$

(17.12)

$$\left[J_x\varepsilon_x + \left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z\right]\beta_1 + \left[J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z\right]\beta_2 + \\ +\left[J_z\varepsilon_z + \left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_x\right]\beta_3 + M\cdot(z_{1c}\ddot{x}_{1c} - x_{1c}\ddot{z}_{1c});$$

$$\left[J_x\varepsilon_x + \left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z\right]\gamma_1 + \left[J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z\right]\gamma_2 + \\ + \left[J_z\varepsilon_z + \left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_x\right]\gamma_3 + M\cdot(x_{1c}\ddot{y}_{1c} - y_{1c}\ddot{x}_{1c}).$$

Relațiile (17.5) şi (17.12) constituie *un sistem de şase ecuații cu şase necunoscute care caracterizează mişcarea liberă a unui solid rigid.*

b) Solid rigid supus la legături

În cele ce urmează, se analizează mişcarea solidului rigid supus la legături.

Se consideră un solid rigid (*S*) (fig. 17.1) supus la legături, mişcarea acestuia fiind raportată la un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$. Asupra solidului rigid acționează un sistem de forțe exterioare $\bar{F}_i$, $i = 1 \div n$.

În studiul dinamic al unui solid rigid supus la legături (ex. reazem simplu, articulație sferică, încastrare spatială, legături prin bare sau fire etc.), mișcarea se reduce la studiul dinamic al rigidului liber, după ce acesta este eliberat de legături prin componente forțe şi/sau momente corespunzătoare legăturilor.

Aplicând *teorema momentului cinetic* şi *teorema mişcării centrului de masă* în raport cu punctul O_1, se pot scrie ecuațiile următoare:

$$\dot{\bar{P}} = \bar{R} + \bar{R}_l ,$$

$$\dot{\bar{K}}_{01} = \bar{M}_{01} + \bar{M}_{01}^{l}, \quad (17.13)$$

în care $\bar{R}$, $\bar{M}_{01}$ - sunt elementele torsorului de reducere a forțelor exterioare;

$\bar{R}_l$, $\bar{M}_{01}^{l}$ - sunt elementele torsorului de reducere a forțelor şi momentelor de legătură.

Dacă mişcarea solidului rigid este compatibilă cu legăturile, atunci numărul gradelor de libertate trebuie să fie mai mic sau egal cu şase.

Se menționează faptul că în funcție de tipul legăturii la care este supus un solid rigid, mişcarea generală poate fi *particularizată* la mişcări precum:

- mişcarea de translație;
- mişcarea de rotație în jurul unui ax fix (cu mişcarea de şurub);
- mişcarea sferică;
- mişcarea plan-paralelă.

17.2 Dinamica solidului rigid aflat în mişcare de translație

Se consideră un solid rigid (*S*) de masa M, aflat în mişcare de translație sub acțiunea forțelor exterioare $\bar{F}_i, i = 1 \div n$. Mişcarea acestuia se raportează la două sisteme carteziene de referință, respectiv, unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil *Oxyz* legat solidar cu rigidul, acesta inițial având axele paralele cu sistemul de referință fix. Din studiul mişcării se observă că acest sistem se mişcă paralel cu el însuşi. Astfel că, mişcarea de *translație* va fi caracterizată de *trei parametri* independenți:

$$x_{1c} = x_{1c}(t), \ y_{1c} = y_{1c}(t) \ , z_{1c} = z_{1c}(t) \ . \quad (17.14)$$

Un rigid este într-o ***mişcare de translație*** dacă în orice moment toate punctele sale descriu traiectorii egale identice, paralele între ele.

Din cele două relații (17.13), se va aplica în acest caz, doar prima (rigidul nu se roteşte, deci teorema momentului cinetic devine $\dot{\bar{K}}_c = 0$). Aşadar, se reduce sistemul forțelor exterioare şi de legătură, care acționează asupra rigidului, în raport cu centrul maselor C şi se aplică *teorema mişcării centrului maselor* raportată la acesta.

$$M\bar{a}_c = \bar{R} + \bar{R}_l, \tag{17.15}$$

relație în care: $\bar{R}\left(\bar{F}_{i_{x_1}}, \bar{F}_{i_{y_1}}, \bar{F}_{i_{z_1}}\right)$ - este vectorul rezultant al forțelor exterioare;

$\bar{R}_l\left(\bar{F}_{j_{x_1}}, \bar{F}_{j_{y_1}}, \bar{F}_{j_{z_1}}\right)$ - este vectorul rezultant al forțelor de legătură.

Relația (17.15) proiectată pe axele sistemului de referință fix, conduce la ecuațiile diferențiale scalare caracteristice mişcării de translație, scrise sub forma:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{1c} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_{x_1}} + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{j_{x_1}}, \\ M\ddot{y}_{1c} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_{y_1}} + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{j_{y_1}}, \\ M\ddot{z}_{1c} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_{z_1}} + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{j_{z_1}}. \end{aligned} \tag{17.16}$$

Relațiile (17.16) se integrează de două ori şi, ținând cont de condițiile inițiale ale mişcării, se obțin ecuațiile mişcarii de translație a solidului rigid.

17.3 Dinamica rigidului aflat în mişcare de rotație în jurul unui ax fix

Se consideră un solid rigid (S) de masă M, care în punctele O_1 şi O_2 are două articulaţii sferice. Asupra rigidului acţionează un sistem de forţe exterioare date $\bar{F}_i, i = 1 \div n$. Singura mişcare posibilă este rotaţia în jurul unui ax definit de punctele O_1 şi O_2 (fig. 17.2).

Sistemul de forţe exterioare se compune din forţele exterioare şi cuplurile date, care se mai numesc *cupluri motoare* şi din forţele şi cuplurile care se opun mişcării numite *cupluri rezistente*.

Se cer să se determine ecuaţia diferenţială a mişcării rigidului şi reacţiunile din cele două lagăre $\bar{R}_{l_1}\left(R_{l_{1x}}, R_{l_{1y}}, R_{l_{1z}}\right)$, $\bar{R}_{l_2}\left(R_{l_{2x}}, R_{l_{2y}}, R_{l_{2z}}\right)$, respectiv din punctele O_1 şi O_2. Se cunoaşte distanţa $O_1O_2 = h$. În studiu, se va elibera corpul de legăturile din O_1 şi O_2, acestea înlocuindu-se cu reacţiunile $\bar{R}_{l_1}, \bar{R}_{l_2}$.

Un solid rigid execută o ***mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe*** dacă în orice moment există două puncte fixe în spaţiu aparţinând rigidului.

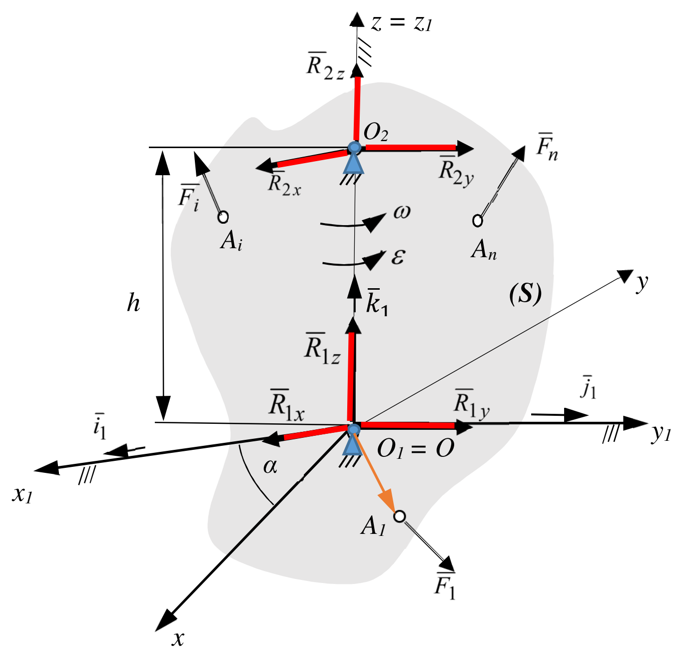


Fig. 17.2

În figura 17.2 se folosesc notațiile:

$\overline{R}$ – este vectorul rezultant al forţelor exterioare;

$\overline{R}_{l_1}$ – este vectorul rezultant al forţelor de legătură din articulația O_1;

$\overline{R}_{l_2}$ – este vectorul rezultant al forţelor de legătură din articulația O_2;

$\overline{M}_0$ – este vectorul moment rezultant al forţelor exterioare;

$\overline{M}_{l_0}$ – este vectorul moment rezultant al forțelor de legătură.

Studiul mişcării se face aplicând două din teoremele fundamentale ale dinamicii, respectiv *teorema mişcării centrului maselor* şi *teorema momentului cinetic,* scrise sub forma:

$$M\bar{a}_c = \bar{R} + \bar{R}_{l_1} + \bar{R}_{l_2}\ , \tag{17.17}$$

$$\dot{\overline{K}}_0 = \overline{M}_0 + \overline{M}_{l_0}. \tag{17.18}$$

În continuare, se fac precizări asupra vectorilor din relațiile (17.17), (17.18). Astfel,

$$\begin{gathered}
\bar{R} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = R_x\bar{\imath} + R_y\bar{\jmath} + R_z\bar{k}\ ,\\
\overline{M}_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_1} \times \bar{F}_i = M_x\bar{\imath} + M_y\bar{\jmath} + M_z\bar{k}\ ,\\
\bar{R}_{l_1} = R_{l_1x}\bar{\imath} + R_{l_1y}\bar{\jmath} + R_{l_1z}\bar{k}\ ,\\
\bar{R}_{l_2} = R_{l_2x}\bar{\imath} + R_{l_2y}\bar{\jmath} + R_{l_2z}\bar{k}\ ,\\
\overline{M}_{l_0} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overline{OO_2} \times \bar{R}_{l_2} = -hR_{2y}\bar{\imath} + hR_{2x}\bar{\jmath}\ ,
\end{gathered} \tag{17.19}$$

$$\bar{a}_c = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) = (-\varepsilon y_c - \omega^2 x_c)\,\bar{\imath} + (\varepsilon x_c - \omega^2 y_c)\,\bar{\jmath}\ ,$$

$$\overline{K}_0 = -J_{zx}\omega\bar{\imath} - J_{zy}\omega\bar{\jmath} + J_z\omega\bar{k}. \tag{17.20}$$

Derivând vectorial în raport cu timpul relația (17.20), se obţine:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{K}}_o &= \frac{\partial \overline{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \overline{K}_0 = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(-J_{zx}\omega\bar{\imath} - J_{zy}\omega\bar{\jmath} + J_z\omega\bar{k}\right) + \omega\bar{k} \times \left(-J_{zx}\omega\bar{\imath} - J_{zy}\omega\bar{\jmath} + J_z\omega\bar{k}\right)\\
&= \left(-J_{zx}\varepsilon + J_{zy}\omega^2\right)\bar{\imath} + \left(-J_{zy}\varepsilon - J_{zx}\omega^2\right)\bar{\jmath} + J_z\varepsilon\bar{k}.
\end{aligned} \tag{17.21}$$

Scalar, ecuaţia vectorială (17.17) este obţinută utilizând relaţiile (17.19), respectiv ecuația vectorială (17.18) se poate scalariza utilizând relațiile (17.19) și (17.21). Se obține astfel, sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c = R_x + R_{l_{1x}} + R_{l_{2x}} \\ M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c = R_y + R_{l_{1y}} + R_{l_{2y}} \\ 0 = R_z + R_{l_{1z}} + R_{l_{2z}} \\ -J_{zx}\varepsilon + J_{zy}\omega^2 = M_x - hR_{l_{2y}} \\ -J_{zy}\varepsilon - J_{zx}\omega^2 = M_y + hR_{l_{2x}} \\ J_z\varepsilon = M_z \end{cases} . \tag{17.22}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului (17.22) rezultă:

$$J_z\varepsilon = M_z$$
$$J_z\ddot{\varphi} = M_z \ ,$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{M_z}{J_z} = 0 \, . \tag{17.23}$$

Relaţia (17.23) reprezintă *ecuaţia diferenţială a mişcării de rotaţie a solidului rigid în jurul unui ax fix.*

Pentru a determina parametrul unghiular al mişcării, respectiv unghiul φ, se integrează de două ori relaţia (17.23) şi se utilizează condițiile inițiale ale mișcării pentru determinarea constantelelor de integrare. Condițiile inițiale sunt:

la momentul $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$ şi $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$.

Se obține astfel, *legea de mișcare* a solidului rigid:

$$\varphi = \varphi(t, \omega_0, \varphi_0).$$

În studiul mişcării de rotație a rigidului în jurul unui ax fix sunt șase ecuații și șapte necunoscute, astfel că problema este nedeterminată. ***Pentru a elimina nedeterminarea, se înlocuieşte articulaţia sferică din O_2 cu o articulaţie cilindrică.***

În acest caz,

$$\bar{R}_{l_1}\left(R_{l_{1x}}, R_{l_{1y}}, R_{l_{1z}}\right), \bar{R}_{l_2}\left(R_{l_{2x}}, R_{l_{2y}}, R_{l_{2z}}\right), \text{unde } R_{l_{2z}} = 0.$$

Rezolvând primele cinci ecuaţii ale sistemului (17.22), se obţin *reacțiunile din articulațiile O_1* și O_2 sub forma:

$$R_{l_{1x}} = \frac{M_y}{h} - R_x + \left(\frac{J_{zy}}{h} - My_c\right)\varepsilon + \left(\frac{J_{zx}}{h} - Mx_c\right)\omega^2$$

$$R_{l_{1y}} = -\frac{M_x}{h} - R_y - \left(\frac{J_{zx}}{h} - Mx_c\right)\varepsilon + \left(\frac{J_{zy}}{h} - My_c\right)\omega^2$$

$$R_{l_{2x}} = -\frac{M_y}{h} - \frac{J_{zy}}{h}\varepsilon - \frac{J_{zx}}{h}\omega^2$$

$$R_{l_{2y}} = \frac{M_x}{h} + \frac{J_{zx}}{h}\varepsilon - \frac{J_{zy}}{h}\omega^2$$

$$R_{l_{1z}} + R_{l_{2z}} = -R_z \ . \tag{17.24}$$

Forțele de legătură se determină astfel:

$$R_{l_1} = \sqrt{R_{l_{1x}}^2 + R_{l_{1y}}^2 + R_{l_{1z}}^2}\ , \qquad R_{l_2} = \sqrt{R_{l_{2x}}^2 + R_{l_{2y}}^2 + R_{l_{2z}}^2}\ . \tag{17.25}$$

Datorită apariției reacţiunilor din O_1 şi O_2, respectiv $\bar{R}_{l_1}\left(R_{l_{1x}}, R_{l_{1y}}, R_{l_{1z}}\right)$, $\bar{R}_{l_2}\left(R_{l_{2x}}, R_{l_{2y}}, R_{l_{2z}}\right)$, lagărele se vor uza în timp, de aceea valoarea acestora trebuie să fie cât mai mică.

Analizând sistemul de ecuații (17.22), se desprind două tipuri de reacțiuni, respectiv *reacțiuni statice* şi *reacțiuni dinamice*.

În cazul în care ε = 0 și ω = 0, forțele de legătură din O_1 și O_2 se numesc *reacțiuni statice* și au valorile:

$$R^s_{l_{1x}} = \frac{M_y}{h} - R_x; \quad R^s_{l_{1y}} = -\frac{M_x}{h} - R_y; \quad R^s_{l_{1z}} = -R_z\,;$$

$$R^s_{l_{2x}} = -\frac{M_y}{h}; \quad R^s_{l_{2y}} = \frac{M_x}{h}; \quad R^s_{l_{2z}} = 0\,. \qquad (17.26)$$

Componentele *dinamice ale reacţiunilor* sunt:

$$R^d_{l_{1x}} = \left(\frac{J_{zy}}{h} - My_c\right)\varepsilon + \left(\frac{J_{zx}}{h} - Mx_c\right)\omega^2$$

$$R^d_{l_{1y}} = -\left(\frac{J_{zx}}{h} - Mx_c\right)\varepsilon + \left(\frac{J_{zy}}{h} - My_c\right)\omega^2$$

$$R^d_{l_{1z}} = 0$$

$$R^d_{l_{2x}} = -\frac{J_{zy}}{h}\varepsilon - \frac{J_{zx}}{h}\omega^2$$

$$R^d_{l_{2y}} = -\frac{J_{zx}}{h}\varepsilon - \frac{J_{zy}}{h}\omega^2$$

$$R^d_{l_{2z}} = 0\ . \qquad (17.27)$$

Solidul rigid aflat în mişcare de rotaţie în jurul unui ax fix la care componentele dinamice ale reacţiunilor din articulaţii sunt nule este ***echilibrat dinamic***.

Egalând cu zero componentele dinamice ale reacţiunilor, se obţin două sisteme de ecuaţii liniare şi omogene în necunoscutele ε, ω^2.

$$R^d_{l_{1x}} = 0; \qquad R^d_{l_{2x}} = 0;$$
$$R^d_{l_{1y}} = 0; \qquad R^d_{l_{2y}} = 0. \qquad (17.27a)$$

Condiţiile ca acestea să admită soluţii, înafară de soluția banală, sunt:

$$\begin{vmatrix} \frac{J_{zy}}{h} - My_c & \frac{J_{zx}}{h} - Mx_c \\ -\frac{J_{zx}}{h} + Mx_c & \frac{J_{zy}}{h} - My_c \end{vmatrix} = 0\,; \qquad (17.28)$$

şi

$$\begin{vmatrix} -\frac{J_{zy}}{h} & -\frac{J_{zx}}{h} \\ \frac{J_{zx}}{h} & -\frac{J_{zy}}{h} \end{vmatrix} = \frac{J_{yz}^2+J_{zx}^2}{h} = 0\,. \tag{17.29}$$

Ecuațiile (17.28) și (17.29) pot fi satisfăcute doar dacă:

$$J_{zx} = J_{zy} = 0 \quad ; \qquad x_c = y_c = 0; \tag{17.30}$$

Astfel, se pot face două constatări privind **echilibrarea unui solid rigid** și anume:

1. Dacă condiţiile (17.30) sunt îndeplinite, numai atunci axa de rotaţie O_1O_2 este axă principală şi centrală de inerţie şi *solidul rigid este echilibrat **dinamic***.

2. Dacă $x_c = y_c = 0$, rezultă că *solidul rigid este echilibrat* doar ***static***.

De menționat că dacă ambele constatări precizate anterior sunt îndeplinite, solidul rigid este echilibrat atât static, cât şi dinamic. ***Un solid rigid este echilibrat static şi dinamic*** *dacă axa de rotație este axă principală de inerție şi centrul de masă C al rigidului este pe această axă*.

17.4 Dinamica rigidului în mişcarea de roto-translaţie. Mişcarea de şurub

Se consideră un solid rigid (S) (fig.17.3) de masă M aflat în mişcare de roto-translație sub acțiunea sistemului de forțe exterioare $\bar{F}_i$ ($i = 1 \div n$). Mişcarea rigidului se raportează la sistemele de referință fix $O_1x_1y_1z_1$, având versorii axelor $(\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$ şi mobil $Oxyz$ solidar legat de rigid, având versorii axelor $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Fie punctul C centrul maselor rigidului.

Un solid rigid execută o ***mişcare de roto-translație*** dacă fiecare punct al său execută o mişcare de rotație în jurul unei axe (Δ), caracterizată de parametri cinematici ω și ε şi o mişcare de translație rectilinie de-a lungul axei (Δ), fiind caracterizată prin viteza $\bar{v}_0$ şi accelerația $\bar{a}_0$ ale unui punct O, care aparține rigidului şi în acelaşi timp aparținând şi axei (Δ).

Se consideră pe axa (*Δ*) originea sistemelor de referință O_1 și *O*, precum şi două articulații cilindrice reprezentate prin punctele *A* şi *B*. Prin suprimarea celor două articulații, se introduc forțele de legătură R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}.

Se consideră că sunt cunoscute momentele de inerție mecanice axiale şi centrifugale (J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}) ale solidului rigid.

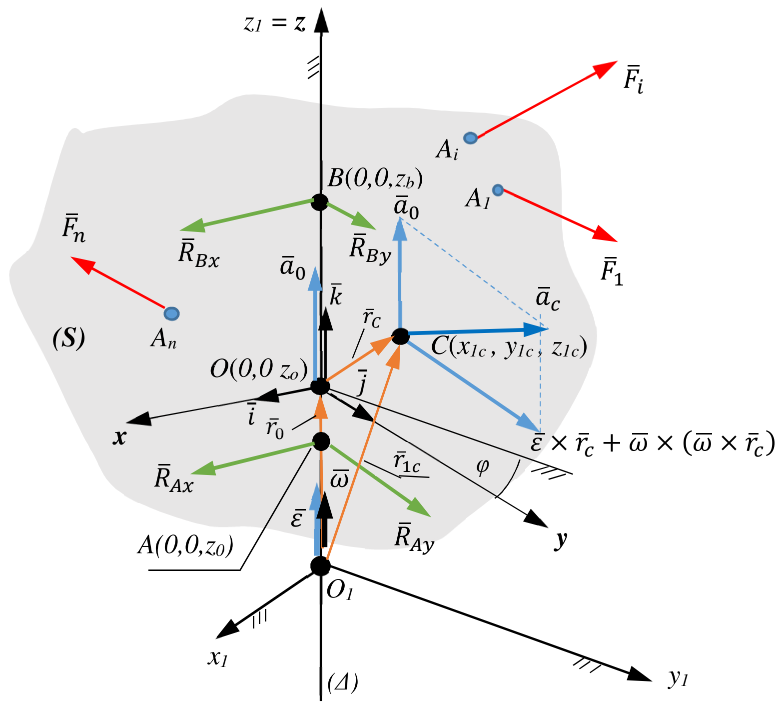


Fig. 17.3

Parametrii de mişcare în cazul mişcării de roto-translație sunt doi, respectiv coordonata z_0 de pe axa (*Δ*) şi unghiul φ. Dacă aceşti doi parametri sunt cunoscuți, mişcarea este perfect determinată. Coordonata mişcării punctului *O* față de sistemul de referință fix, respectiv față de originea O_1, este z_0.

Ecuațiile de mișcare a rigidului sunt:

$$z_0 = z_0(t), \quad \varphi = \varphi(t)\ . \tag{17.31}$$

Pentru studiul mişcării se aplică două din teoremele fundamentale ale dinamicii (*teorema mişcării centrului maselor* şi *teorema momentului cinetic*) scrise astfel:

$$M\bar{a}_c = \bar{R} + \bar{R}_l\ , \tag{17.32}$$

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 + \bar{M}_{l0}\ . \tag{17.33}$$

În aceste relații: M – este masa rigidului (S);

$\bar{a}_c -$ este accelerația centrului de masa C;

$\bar{R} -$ este vectorul rezultant al forțelor exterioare;

$\bar{M}_0 -$ este momentul rezultant al forțelor exterioare;

$\bar{R}_l -$ este vectorul rezultant al forțelor de legătură;

$\bar{M}_{l0} -$ este momentul rezultant al forțelor de legătură;

$\bar{\bar{\tau}}_0(\bar{R}, \bar{M}_0)$ – este torsorul de reducere al forțelor exterioare;

$\bar{\bar{\tau}}_{0l}(\bar{R}_l, \bar{M}_{l0})$ – este torsorul de reducere al forțelor de legătură;

$\bar{K}_0 -$ este momentul cinetic al rigidului, raportat la polul O.

$$\bar{a}_c = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c). \tag{17.34}$$

Proiectând relațiile (17.32) şi (17.33) pe axele sistemului de referință mobil și identificând coeficienții versorilor în cei doi membri ai relațiilor respective, se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
-M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c &= R_x + R_{Ax} + R_{Bx} \\
M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c &= R_y + R_{Ay} + R_{By} \\
Ma_0 &= R_z \\
-J_{zx}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{cx} - z_A R_{Ay} - z_B R_{By} \\
-J_{yz}\varepsilon - J_{zx}\omega^2 &= M_{cy} + z_A R_{Ax} + z_B R_{Bx}
\end{aligned} \tag{17.35}$$

$$J_z\varepsilon = M_{cz} \,. \tag{17.36}$$

Sistemul (17.36) reprezintă un sistem compatibil cu mişcarea şi este perfect determinat având şase ecuații cu şase necunoscute variabile în raport cu timpul (a_0, ε, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}).

Din a treia expresie a relației (17.36), se obține:

$$a_0 = \frac{R_z}{M} \rightarrow \ddot{z}_0 = \frac{R_z}{M} \,. \tag{17.37}$$

Din (17.37), printr-o dublă integrare, se află legea de mişcare $z_0 = z_0(t)$ a rigidului în mişcarea de roto-translație, utilizând şi condițiile inițiale ale mişcării pentru aflarea constantelor de integrare.

Din a şasea ecuație a sistemului (17.36), se obține prin integrare, a doua lege de mişcare a rigidului în mişcarea de roto-translație $\varphi = \varphi(t)$. Pentru determinarea constantelor de integrare se folosesc condițiile inițiale ale mişcării.

Transpuse succesiv explicațiile anterioare, se pot scrie relațiile:

$$J_z\varepsilon = M_{cz} \rightarrow J_z\ddot{\varphi} = M_{cz} \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{M_{cz}}{J_z}. \tag{17.38}$$

În final, legile de mişcare ale solidului rigid aflat în mişcare de roto-translației pot fi obținute din relațiile (17.37) şi (17.38) prin integrare și determinare a constantelor de integrare, utilizând condițiile inițiale ale mișcării.

Prin aflarea legilor mişcării rigidului şi a reacțiunilor din articulațiile cilindrice din punctele A şi B, mişcarea de roto-translație este pe deplin studiată.

$$\begin{gathered} R_{Ax} = R_{Ax}(t); \qquad R_{Ay} = R_{Ay}(t)\,; \\ R_{Bx} = R_{Bx}(t); \qquad R_{By} = R_{By}(t)\,; \\ z_A = z_{A0} + z_0(t); \qquad z_B = z_{B0} + z_0(t)\,; \\ \varphi = \varphi(t). \end{gathered} \tag{17.39}$$

Pentru studiul mişcării solidului rigid raportat la sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, se folosesc proiecţiile reacţiunilor R_A , R_B din punctele A şi B pe axele sistemului de referinţă fix. Dacă C aparţine axei (Δ), se aplică teoremele fundamentale ale dinamicii raportate la centrul de masa C.

În acest caz, sistemul de ecuaţii (17.36) devine:

$$\begin{aligned} 0 &= R_x + R_{Ax} + R_{Bx} \\ 0 &= R_y + R_{Ay} + R_{By} \\ Ma_0 &= R_z \, . \end{aligned} \tag{17.40}$$

$$\begin{aligned} -J_{zx}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{cx} - (z_A - z_c)R_{Ay} - (z_B - z_c)R_{By} \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{zx}\omega^2 &= M_{cy} + (z_A - z_c)R_{Ax} + (z_B - z_c)R_{Bx} \\ J_z\varepsilon &= M_{cz}. \end{aligned}$$

Din sistemul de ecuaţii (17.40) rezultă necunoscutele ce caracterizează mişcarea de roto-translaţie faţă de sistemul de referinţă fix.

Mişcarea de roto-translaţie a solidului rigid are un *caz particular* şi anume, ***mişcarea de şurub.*** La mişcarea de şurub între cei doi parametri independenţi ai mişcării de roto-translaţie z_0 şi φ există o dependenţă:

$$z_0 = \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi \quad \text{, unde } p \text{ – este pasul şurubului .} \tag{17.41}$$

Dacă relaţia (17.41) se derivează succesiv de două ori în raport cu timpul, se află relaţia de dependenţă între parametri cinematici ai mişcării de şurub (ε , a_0).

Pentru ca solidul rigid să execute o mişcare de şurub, una din cele două articulaţii cilindrice de pe axa (Δ) (de exemplu articulaţia din A) se va modifica astfel încât, translaţia să fie dependentă de rotaţia rigidului. În acest fel, *în punctul A va apărea suplimentar a treia reacţiune* R_{Az} , iar sistemul de ecuaţii (17.36) devine:

$$
\begin{aligned}
-M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c &= R_x + R_{Ax} + R_{Bx} \\
M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c &= R_y + R_{Ay} + R_{By} \\
M a_0 &= R_z + R_{Az} \\
-J_{zx}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{cx} - z_A R_{Ay} - z_B R_{By} \\
-J_{yz}\varepsilon - J_{zx}\omega^2 &= M_{cy} + z_A R_{Ax} + z_B R_{Bx} \\
J_z \varepsilon &= M_{cz} \quad .
\end{aligned}
\tag{17.42}
$$

Ținând cont de (17.41) şi (17.42), se obțin necunoscutele mişcării de şurub în număr de şapte (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}, $\square_0$, (z_0) şi $\varepsilon\,(\varphi)$) .

17.5 Dinamica mişcării plan-paralele a rigidului

Dinamica solidului rigid aflat în *mişcare plan-paralelă* este una din cele mai des întâlnită în practică, la mecanisme (de exemplu la şeping, la mişcarea traversei roților de locomotivă etc.).

Se consideră o placă (P_m) de masă M aflată în mişcare într-un plan fix $O_1x_1y_1z_1$ sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i, i = 1 \div n$, forțele fiind coplanare cu placa (fig.17.4). *Cxyz* este planul mobil care se mişcă odată cu placa (unde C – este centrul de masă al plăcii).

Un solid rigid execută o ***mişcare plan-paralelă*** dacă în orice moment al său există trei puncte necoliniare distincte conținute în acelaşi plan fix.

Un solid rigid aflat în mişcare plan-paralelă este definit ca poziție prin *trei parametri independenți*.

Se cunosc condiţiile iniţiale ale mişcării la momentul $t_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_{1c} = x_{1_{C0}};\ \ y_{1c} = y_{1_{C0}};\ \ \varphi = \varphi_0 \\
\dot{x}_{1c} = \dot{x}_{1_{C0}};\ \ \dot{y}_{1c} = \dot{y}_{1_{C0}};\ \ \dot{\varphi} = \omega_0 \ \ .
\end{aligned}
\tag{17.43}
$$

Se cer să se determine ecuaţiile diferenţiale de mişcare a plăcii, respectiv:

$$
x_{1c} = x_{1c}\,(t); \qquad y_{1c} = y_{1c}\,(t); \qquad \varphi = \varphi\,(t)\,. \tag{17.44}
$$

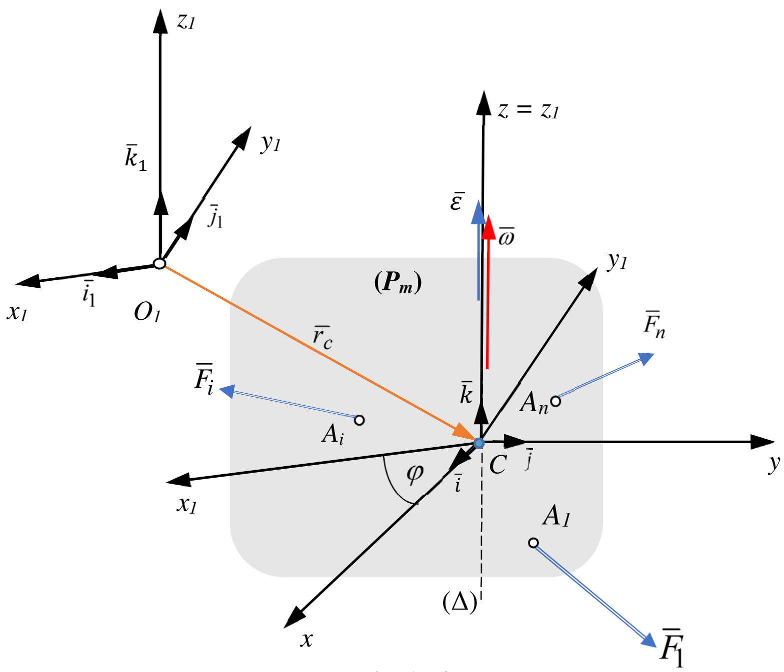


Fig. 17.4

În mişcarea plan-paralelă se consideră că solidul rigid execută o translație cu accelerația centrului maselor $\bar{a}_c$ şi o rotație cu unghiul φ în jurul unei axe (Δ) perpendiculară pe planul mişcării, mişcare caracterizată de parametri $\overline{\omega}, \bar{\varepsilon}$. Pentru determinarea ecuaţiilor diferenţialelor în cazul plăcii aflată în mişcare plană, se aplică *teorema mișcării centrului maselor* şi *teorema momentului cinetic*, scrise astfel:

$$M\ddot{x}_{1c} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix_1} = R_{x_1}; \quad M\ddot{y}_{1c} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy_1} = R_{y_1};$$

$$J_\Delta \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_c \ , \tag{17.45}$$

unde:

M – este masa plăcii [kg];

J_{Δ} – este momentul de inerţie mecanic axial al plăcii [kg m^2];

x_{1c}, y_{1c} – sunt coordonatele punctului C din planul fix;

φ – este unghiul de rotaţie situat între axele Cx_1 și Cx (fig. 17.4);

$\overline{F}_{ix_1}, \overline{F}_{ix_2}$ – sunt proiecţiile pe axele Cx şi Cy ale forţelor exterioare $\overline{F}_i$ [N];

$\overline{M}_c$ – este momentul rezultant al forțelor exterioare în raport cu polul C.

Prin integrarea relaţiilor (17.45) şi ţinând seama de condiţiile iniţiale date, se obţin *legile mişcării plan-paralele* în cazul solidului rigid şi anume:

$$x = x(t); y = y(t); \varphi = \varphi(t)\,; \tag{17.46}$$

17.6 Dinamica mişcării sferice a solidului rigid

Alt tip de mişcare a solidului rigid cu aplicații în practică este cea a *solidului rigid cu punct fix,* numită și *mişcare sferică.*

17.6.1 Ecuațiile diferențiale ale mişcării sferice

Se consideră un solid rigid (S) (fig.17.5) care, sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = 1 \div \mathrm{n}$, execută o *mişcare sferică* în jurul unui punct fix în spațiu. În **mişcarea sferică**, traiectoria fiecărui punct al rigidului este o curbă situată pe suprafața unei sfere cu centrul în punctul fix. Mişcarea rigidului raportează la două sisteme de referință, respectiv unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil $Oxyz$ solidar legat cu rigidul, având originile O_1 și O în punctul fix al rigidului.

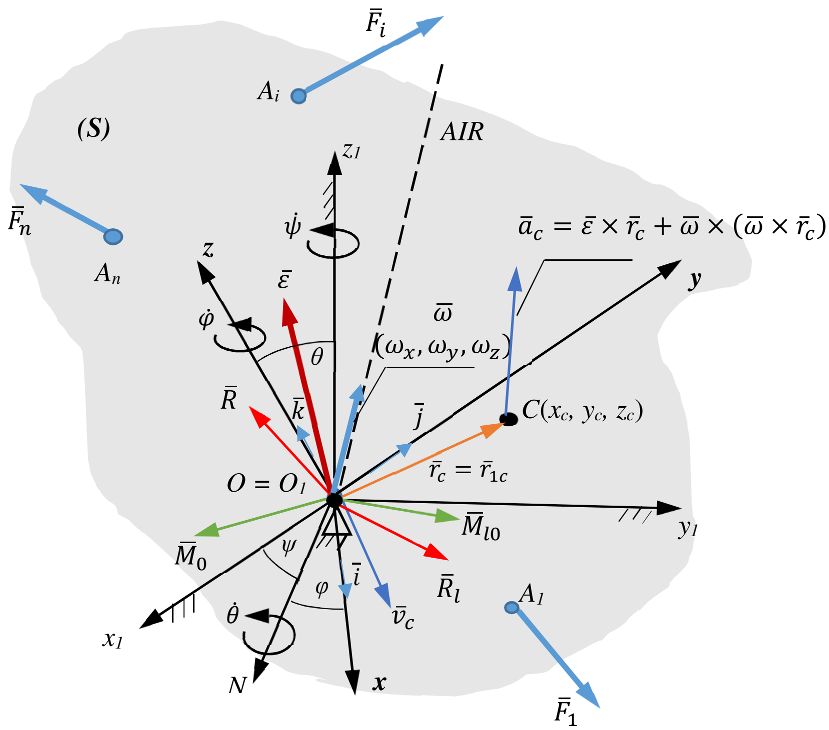


Fig. 17.5

Mişcarea sferică a rigidului (S) este caracterizată de parametri cinematici $\overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$ ai căror suporți trec prin punctul fix O_1. Singura legătură a rigidului este în punctul fix O_1 în care este o articulație sferică care suprimă rigidului cele trei translații. Astfel, rigidul aflat în *mişcare sferică* are trei rotații în jurul axelor unui sistem de referință cu originea în O_1.

Un astfel de rigid are *trei grade de libertate*, poziția sa fiind definită de trei parametri independenți (de exemplu *unghiurile lui Euler* (φ, θ, ψ)).

Legile de mişcare ale solidului rigid aflat în mișcare sferică pot fi:

$$\psi = \psi(t), \; \theta = \theta(t), \; \varphi = \varphi(t). \tag{17.47}$$

În cele ce urmează se vor prezenta *ecuațiile dinamice ale lui Euler*.

17.6.2 Ecuaţiile dinamice ale lui Euler

Torsorul de reducere al forțelor exterioare în punctul O este: $\bar{\bar{\tau}}(\bar{R}, \bar{M}_0)$ conform cu (17.48),

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\,; \quad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r} \times \bar{F}_i\,, \tag{17.48}$$

iar echivalentul acestuia este torsorul forțelor de legătură dat de: $\bar{\bar{\tau}}'(\bar{R}_l, \bar{M}_{l0})$.

Presupunând articulația sferică din punctul O cu frecare neglijabilă, se cer să se determine *ecuaţiile dinamice de mişcare şi reacţiunile din legătura punctului O.*

Pentru studiul mișcării sferice se aplică *teorema mișcării centrului maselor* şi *teorema momentului cinetic,* scrise astfel:

$$M\bar{a}_c = \bar{R} + \bar{R}_l, \quad de\ unde: \quad \bar{R}_l = M\bar{a}_c - \bar{R}$$

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0. \tag{17.49}$$

Conform legii de distribuție a accelerațiilor la mișcarea sferică, se poate scrie:

$$\bar{a}_c = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c).$$

Ecuațiile vectoriale (17.49) proiectate pe axele sistemului de referință mobil, conduc la sistemul:

$$\begin{cases} R_{l_x} = -R_x + M\left[-\left(\omega_z^2 + \omega_y^2\right)x_c + \left(\omega_x\omega_y - \varepsilon_z\right)y_c + \left(\omega_x\omega_z + \varepsilon_y\right)z_c\right] \\ R_{l_y} = -R_y + M\left[-\left(\omega_x^2 + \omega_z^2\right)y_c + \left(\omega_x\omega_y + \varepsilon_z\right)x_c + \left(\omega_y\omega_z - \varepsilon_x\right)z_c\right] \\ R_{l_z} = -R_z + M\left[-\left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right)z_c + \left(\omega_x\omega_z - \varepsilon_y\right)x_c + \left(\omega_y\omega_z + \varepsilon_x\right)y_c\right] \\ J_x\varepsilon_x + \left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z = M_x \\ J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y \\ J_z\varepsilon_z + \left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_x = M_z\ . \end{cases} \tag{17.50}$$

Ultimele trei ecuații din sistemul (17.50) se numesc *ecuaţiile diferenţiale ale mişcării rigidului cu punct fix* sau ***ecuaţiile dinamice ale lui Euler***. Acestea au fost obținute în ipoteza în care sistemul de referință mobil *Oxyz,* solidar cu rigidul, este sistem principal de inerție.

Ecuațiile dinamice ale lui Euler se pot utiliza pentru rezolvarea a două probleme fundamentale reciproce: *directă* și *inversă*, ale dinamicii rigidului. În ecuațiile dinamice ale lui Euler apar componentele carteziene ω_x, ω_y, ω_z ale vitezei unghiulare $\overline{\omega}$, care poate fi scrisă astfel:

$$\overline{\omega} = \omega_x \overline{i} + \omega_y \overline{j} + \omega_z \overline{k} \,,$$

$$\overline{\omega} = \dot{\overline{\psi}} + \dot{\overline{\theta}} + \dot{\overline{\varphi}} = \dot{\psi}\overline{k}_1 + \dot{\theta}\overline{n} + \dot{\varphi}\overline{k} \;. \tag{17.51}$$

a) **Problema inversă** la care se dau legile de variație ale momentului rezultant al forțelor direct aplicate asupra rigidului:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) \\ M_y &= M_y\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) \\ M_z &= M_z\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) . \end{aligned} \tag{17.52}$$

și condițiile inițiale ale mişcării, adică la momentul:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad \psi = \psi_0\,, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \;. \end{aligned} \tag{17.53}$$

Se cer să se determine ecuaţiile mişcării:

$$\psi = \psi(t)\,, \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{17.54}$$

Din relaţiile (17.51), după efectuarea unor calcule matematice, rezultă componentele scalare ale vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ şi ale accelerației unghiulare $\overline{\varepsilon}$ pe axele sistemului de referință mobil:

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\psi} sin\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} sin\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} cos\theta + \dot{\varphi}\end{cases}$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \ddot{\psi}\ sin\theta sin\varphi + \ddot{\theta} cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta} cos\theta sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi} sin\varphi + \dot{\varphi}\dot{\psi} sin\theta cos\varphi \\ \varepsilon_y = \ddot{\psi}\ sin\theta cos\varphi - \ddot{\theta} sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta} cos\theta cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi} cos\varphi - \dot{\varphi}\dot{\psi} sin\theta sin\varphi \\ \varepsilon_z = \ddot{\psi}\ cos\theta + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta} sin\theta\end{cases} \tag{17.55}$$

Înlocuind relaţiile (17.55) în sistemul de ecuaţii (17.50), se obțin funcțiile:

$$f_1\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}\right) = 0,\ f_2\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}\right) = 0,$$

$$f_3\left(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}\right) = 0\ . \tag{17.56}$$

În urma integrării sistemului de ecuații diferențiale (17.56), rezultă legile *mişcării* sau *ecuațiile de mişcare ale solidului*, date de relațiile (17.47).

<u>Integrarea nu poate fi efectuată în orice condiții</u> *deoarece intervin factori necunoscuți, aşa că se va apela la trei cazuri particulare prin simplificarea acestora* şi anume:

Cazul 1: Euler – Poinsot ($M_x = M_y = M_z = 0$)

Cazul 2: Lagrange – Poisson ($x_c = y_c = 0$ şi $J_x = J_y$)

Cazul 3: Sofia Kovalevskaia ($z_c = 0$ şi $J_x = J_y = 2J_z$).

Aceste cazuri sunt prezentate detaliat în literatura de specialitate.

b) **<u>Problema directă</u>** la care se dau ecuaţiile mişcării

$\varphi = \varphi(t)$; $\theta = \theta(t)$; $\psi = \psi(t)$ şi se cer reacţiunile $\bar{R}_l\left(R_{lx}, R_{ly}, R_{lz}\right)$ şi momentele rezultante $\bar{M}_{l0}\left(M_{lx}, M_{ly}, M_{lz}\right)$. Dacă articulația sferică a rigidului este fără frecare, atunci $\bar{M}_{l0} = 0$.

Pentru rezolvarea problemei directe, se scriu relațiile (17.50) sub forma:

$$[I_s]\cdot\bar{\varepsilon}+\bar{\omega}\times[I_s]\cdot\bar{\omega}=\bar{M}_0\ , \tag{17.57}$$

în care

$$[I_s]=\begin{bmatrix}J_x & 0 & 0\\ 0 & J_y & 0\\ 0 & 0 & J_z\end{bmatrix};$$

$$[I_s]\cdot\bar{\varepsilon}=\begin{bmatrix}J_x & 0 & 0\\ 0 & J_y & 0\\ 0 & 0 & J_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix};$$

$$\bar{M}_0=\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix};$$

$$\bar{\omega}\times[I_s]\cdot\bar{\omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_x\omega_x\\ J_y\omega_y\\ J_z\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(J_z-J_y)\omega_y\omega_z\\ (J_x-J_z)\omega_x\omega_z\\ (J_y-J_x)\omega_y\omega_x\end{bmatrix} \tag{17.58}$$

Înlocuind relaţiile (17.58) în (17.57), se obține:

$$\begin{bmatrix}J_x\varepsilon_x\\ J_y\varepsilon_y\\ J_z\varepsilon_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(J_z-J_y)\cdot\omega_y\omega_z\\ (J_x-J_z)\cdot\omega_x\omega_z\\ (J_y-J_x)\cdot\omega_y\omega_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix}. \tag{17.59}$$

Scalar, relaţia (17.59) se poate scrie:

$$\begin{aligned}M\ddot{x}_c&=R_x+R_{l_x}\\ M\ddot{y}_c&=R_y+R_{l_y}\\ M\ddot{z}_c&=R_z+R_{l_z}\\ J_x\varepsilon_x+(J_z-J_y)\omega_y\omega_z&=M_x\\ J_y\varepsilon_y+(J_x-J_z)\omega_x\omega_z&=M_y\\ J_z\varepsilon_z+(J_y-J_x)\omega_y\omega_x&=M_z\end{aligned}\ . \tag{17.60}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (17.60), numit *sistem de ecuaţii dinamice Euler,* se obțin necunoscutele: $R_{lx},R_{ly},R_{lz},\varphi,\theta,\psi$. Aşa cum s-a specificat şi la sistemul (17.59), similar cu (17.60), există doar trei cazuri de integrare ale acestuia.

17.6.3 Mişcarea de precesie regulată

*Un solid rigid execută o **mişcare sferică de precesie regulată*** (fig.17.6) dacă viteza unghiulară de precesie, viteza unghiulară de rotaţie proprie şi unghiul de

nutaţie θ sunt constante sau altfel spus, dacă unghiurile lui Euler îndeplinesc condițiile (17.61).

$$\psi = \omega_1 \cdot t + \psi_0; \qquad \varphi = \omega_2 \cdot t + \varphi_0; \qquad \theta = \theta_0. \tag{17.61}$$

Din relaţiile (17.61), utilizând (17.55), rezultă:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_1 sin\theta sin\varphi \\ \omega_y = \omega_1 sin\theta cos\varphi \\ \omega_z = \omega_1 cos\theta + \omega_2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \omega_1 \omega_2 sin\theta cos\varphi \\ \varepsilon_y = -\omega_1 \omega_2 sin\theta sin\varphi \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases}; \tag{17.62}$$

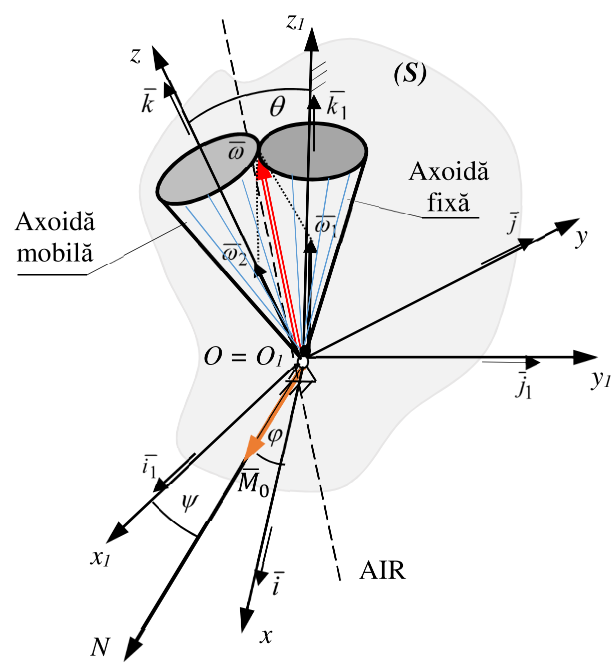


Fig. 17.6

Înlocuind relaţiile (17.62) în (17.50), se obţin:

$$M_x = \left[J_x\omega_2 + \left(J_z - J_y\right)(\omega_1 cos\theta + \omega_2)\right]\omega_1\, sin\theta cos\varphi$$

$$M_y = -\left[J_y\omega_2 + (J_z - J_x)(\omega_1 cos\theta + \omega_2)\right]\omega_1\, sin\theta sin\varphi \qquad (17.63)$$

$$M_z = \left(J_y - J_x\right)\omega_1^2\, sin^2\theta\, sin\varphi cos\varphi.$$

Considerând că momentele de inerție $J_x = J_y$, relaţiile (17.63) devin:

$$\begin{cases} M_x = \left[J_z + \left(J_z - J_y\right)\frac{\omega_1}{\omega_2} cos\theta\right]\omega_1\omega_2 sin\theta cos\varphi \\ M_y = -\left[J_z + (J_z - J_x)\frac{\omega_1}{\omega_2} cos\theta\right]\omega_1\omega_2 sin\theta sin\varphi \\ M_z = 0 \end{cases} . \qquad (17.64)$$

Din relaţiile (17.64) rezultă că momentul rezultant $\overline{M}_0$ este dirijat după axa nodurilor *ON,* astfel că:

$$tg\varphi = -\frac{M_y}{M_x}$$

$$\overline{M}_0 = \left[J_z + (J_z - J_x)\frac{\omega_1}{\omega_2} cos\theta\right]\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$$

$$M_0 = \left[J_z + (J_z - J_x)\frac{\omega_1}{\omega_2} cos\theta\right]\omega_1\omega_2 sin\theta\,. \qquad (17.65)$$

Dacă $\omega_2 >> \omega_1$, rezultă expresiile vectoriale şi scalare ale lui $\overline{M}_0$:

$$\overline{M}_0 = J_z(\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2), \qquad (17.66)$$

$$M_0 = J_z\omega_1\omega_2 sin\theta.$$

Pentru a avea o ***mişcare de precesie regulată*** la un solid rigid care se roteşte în jurul unui punct fix după axa de rotaţie (*AIR*), este necesar ca momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra rigidului să fie plasat pe axa nodurilor, acesta având expresia dată de relaţia (17.66). În acest caz, viteza unghiulară de rotație proprie ω_2 este mult mai mare decât viteza unghiulară de precesie ω_1 $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \cong 0\right)$.

O aplicaţie a mişcării de precesie regulată este *giroscopul* care va fi prezentată ca o primă problemă în paragraful Probleme rezolvate.

17.7 Probleme rezolvate

17.7.1. Giroscopul

În cele ce urmează, se va prezenta giroscopul, care este o aplicație a mișcării sferice.

Giroscopul – este un rigid cu un punct fix O, al cărui elipsoid de inerție ($J_x = J_y$) este în mișcare de rotaţie cu *viteza unghiulară de rotație proprie* ω_2 faţă de axa mobilă Oz solidară cu rigidul, rigid care se rotește în jurul lui Oz_1 cu *viteza unghiulară de precesie* ω_1 foarte mare, asupra lui acţionând doar greutatea proprie $\bar{G}$. În unele cazuri centrul de greutate C coincide cu punctul O al axei de rotaţie (fig.17.7) [5], [11].

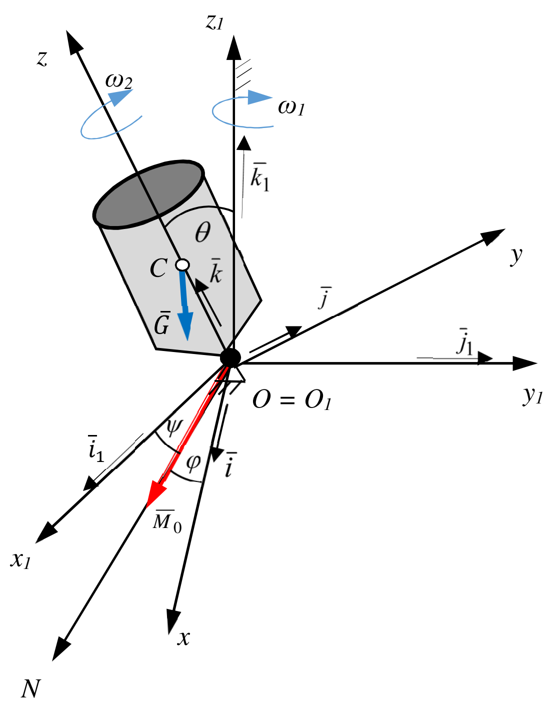


Fig. 17.7

Soluţie:

Mişcarea solidului rigid este de tipul Euler – Poinsot, deci momentul rezultant al forțelor exterioare în raport cu O_1 este nul ($M_{l_0} = 0$), iar axa giroscopului este axă permanentă de rotație ($M_x = M_y = 0$). Dacă şi momentul $M_z = 0$, rezultă că $\varepsilon = 0$ deci $\omega = ct$. şi mişcarea giroscopului este una uniformă.

Se notează cu: $\omega_x = \omega_1;\ \omega_y = \omega_2;\ \omega_z = \omega_0.$

Mişcarea giroscopului trebuie să fie una *stabilă*, aceasta însemnând că dacă perturbăm poziția axei de rotație în vecinătatea poziției stabile, axa va reveni la poziția neperturbată.

Dacă se iau în considerare ultimele trei ecuații din sistemul (17.60), conform cu condițiile Euler – Poinsot, acestea se transformă în:

$$J_x\varepsilon_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = 0;$$

$$J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = 0\ ; \tag{17.67}$$

$$J_z\varepsilon_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = 0.$$

Dacă axa de rotație a rigidului este *axă principală de inerție,* atunci $J_x = J_y$, iar relațiile (17.67) devin:

$$J_x\varepsilon_x + (J_z - J_x)\omega_y\omega_z = 0;$$

$$J_x\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = 0; \tag{17.68}$$

$$J_z\varepsilon_z = 0\ .$$

Din cea de a treia relație a sistemului (17.68) rezultă că $\varepsilon_z = 0$, respectiv $\omega_z = \omega_0 = ct.$, astfel încât:

$$J_x \varepsilon_x + (J_z - J_x)\omega_y \omega_0 = 0 \,,$$

$$J_x \varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_0 \omega_x = 0 \,. \tag{17.69}$$

Prin derivarea în raport cu timpul a celei de a doua relații (17.69), se obține ecuația:

$$J_x \frac{d\varepsilon_y}{dt} + (J_x - J_z)\varepsilon_x \omega_0 = 0 \,, \tag{17.70}$$

din care:

$$\varepsilon_x = \frac{J_x \frac{d\varepsilon_y}{dt}}{(J_z - J_x)\omega_0} \,,$$

Înlocuind şi efectuând calcule în (17.69), rezultă:

$$J_x^2 \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \omega_0^2 \omega_y (J_z - J_x) = 0 \,. \tag{17.71}$$

Relația (17.71) reprezintă o ecuație diferențială în ω_y, ea fiind o ecuație diferențială de ordinul doi, cu coeficienți constanți.
Dacă se notează:

$$u = \frac{J_z - J_x}{J_x} \cdot \omega_0 \,, \tag{17.72}$$

prin înlocuire în (17.71), se obține soluția acestei ecuații, scrisă astfel:

$$\omega_y = C_1 \cos(ut) + C_2 \sin(ut). \tag{17.73}$$

Înlocuind (17.73) în ecuația a doua din (17.69), se obține:

$$\omega_x = \pm(C_1 \sin(ut) - C_2 \cos(ut)) \,. \tag{17.74}$$

În relația (17.74) semnul „+" este pentru cazul în care $J_z > J_x$, iar semnul minus „-„ pentru cazul în care $J_z < J_x$.

Utilizând condițiile inițiale ale mişcării, respectiv la momentul $t_0 = 0$, $\omega_x = \omega_{xo}$ şi $\omega_y = \omega_{y0}$, se află constantele de integrare C_1 şi C_2.

$$C_1 = \omega_{yo} \text{ şi } C_2 = \pm\, \omega_{xo} \;. \tag{17.75}$$

Înlocuind (17.75) în (17.73) şi (17.74), se obțin formele finale ale expresiilor lui ω_x și ω_y.

$$\omega_y = \omega_{y_0}\cos(ut) \pm \omega_{x_0}\sin(ut)\;, \tag{17.76}$$

$$\omega_x = \pm\omega_{x_0}\sin(ut) \pm \omega_{y_0}\cos(ut).$$

În relația (17.76) ω_{x_0} şi ω_{y_0} sunt foarte mici, iar funcțiile *sin* şi *cos* au valori limitate în intervalul [-1;1] în timpul mişcării. Astfel, rezultă că ω_x şi ω_y au o influență mică asupra mișcării giroscopului. Înseamnă că principala viteză unghiulară de care depinde mişcarea giroscopului este $\omega_z = \omega_0$. Această condiție face ca giroscopul să aibă întrebuințări ca *stabilizator al mişcării* în cazul avioanelor, navelor etc.

Un alt mod de prezentare a stabilității giroscopului este dacă se ține cont doar de momentul rezultant M_o al forțelor exterioare. Expresia acestui moment este:

$$\bar{M}_0 = \overline{OC} \times \bar{G} = h\bar{k} \times \left(-G\bar{k}_1\right) = \bar{n}\, Gh\, sin\theta\;. \tag{17.77}$$

$$M_0 = Gh\, sin\theta.$$

Se fac următoarele notații:

$$\bar{M}_{j0} = -\dot{\bar{K}}_0$$

$$\bar{M}_0 + \bar{M}_{j0} = 0. \tag{17.78}$$

Se fac următoarele notații și calcule privind momentele care apar la mișcarea giroscopică, în care $\bar{M}_{jo}$ - este vectorul moment rezultant al forţelor de inerţie.

$$\bar{M}_g = \bar{M}_{jo}$$

$$\bar{M}_g = -J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = J_z \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 \,,$$

Modulul momentului M_g devine:

$$M_g = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta \,, \tag{17.79}$$

și se obține viteza unghiulară ω_1 a giroscopului:

$$\omega_1 = \frac{Gh}{J_z \omega_2} .$$

Relația (17.79) arată că pentru $\omega_2 \gg$ foarte mare, viteza unghiulară $\omega_1 \ll$ este foarte mică. De asemenea, cu cât punctul *C* este mai aproape de punctul *O* (*h* = *OC mic*) viteza unghiulară $\omega_2 \gg$ este foarte mare. Un impediment care poate apărea practic în acest caz, ar fi prezența frecărilor din lagărele giroscopului care vor încetini, respectiv micşora valoarea vitezei unghiulare ω_2.

17.7.2. O placă omogenă dreptunghiulară *OABC* de greutate $\overline{G}$ şi dimensiuni *a* x *b* este articulată cilindric în punctele *O* şi *C* şi execută o rotație pură în jurul axei fixe (*Δ*) cu o viteză unghiulară ω = const. (fig. 17.8) [11]. Neglijând frecările din articulațiile *O* şi *C,* să se determine reacțiunile dinamice din aceste articulații.

Soluţie:

Pentru rezolvarea cerințelor problemei se aplică *Teorema impulsului* și *Teorema momentului cinetic*.

Placa execută o mișcare de rotație pură în jurul axei *(Δ),* astfel că *Teorema impulsului* sau *Teorema mișcării centrului maselor* devine în acest caz:

$$M\bar{a}_c = \bar{R} + \bar{R}_l \tag{1}$$

unde:

$$a_c = -\omega^2 R = -\omega^2 \frac{a}{2} \ . \tag{2}$$

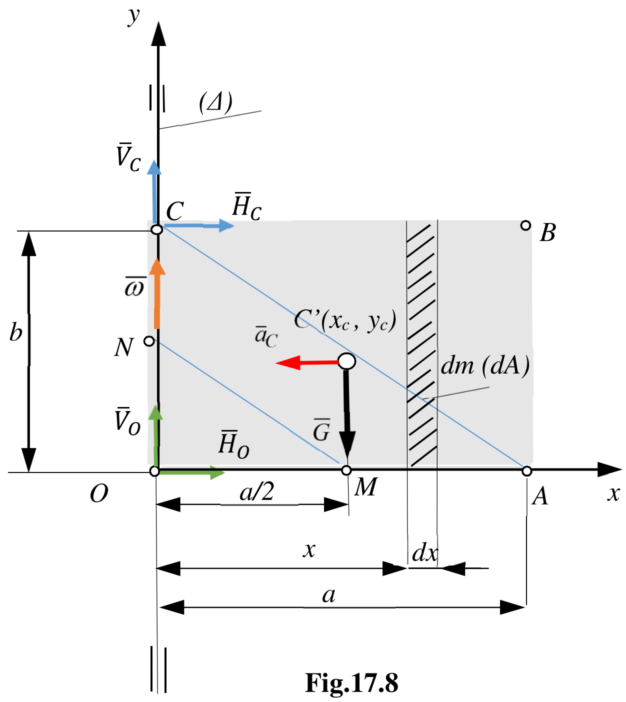


Fig.17.8

Proiectând ecuația (1) după axele sistemului de referință *Oxy*, se obțin ecuațiile scalare:

$$Ox\!: H_c + H_0 = -\omega^2 M \frac{a}{2} = -\omega^2 G/g \frac{a}{2} \ . \tag{3}$$

$$Oy\!: V_c + V_0 - G = 0 \ . \tag{4}$$

Necunoscutele problemei sunt H_o, V_o, H_c, V_c, respectiv *reacțiunile dinamice din articulațiile O și C.*

$$R_0 = \sqrt{V_0^2 + H_0^2} \ \ și \ \ R_C = \sqrt{V_C^2 + H_C^2} \ . \tag{5}$$

Aplicând *teorema momentului cinetic* corespunzătoare solidului rigid, se poate scrie:

$$\dot{\bar{K}}_0 = J_\Delta \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times (J_\Delta \times \bar{\omega}) = \bar{M}_0 + \bar{M}_{l0}. \tag{6}$$

Pentru că $\overline{\omega}$ este constant, $\bar{\varepsilon}=0$ şi relația (6) poate fi scrisă matriceal astfel:

$$\dot{\overline{K}}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega\\ 0 & 0 & 0\\ -\omega & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\omega J_{xy}\\ -\omega J_y\\ -\omega J_{zy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega^2 J_{zy}\\ 0\\ \omega^2 J_{xy}\end{bmatrix}. \tag{7}$$

unde:

$$\begin{bmatrix}-\omega^2 J_{zy}\\ 0\\ \omega^2 J_{xy}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega^2 J_{xy}\end{bmatrix};$$

$$J_{xy}=\int xydm=\int xy\frac{G}{g}\cdot\frac{1}{ab}dA=\frac{G}{g}\cdot\frac{1}{ab}\left(\int xy^2dx\right), \tag{8}$$

iar

$$dm=\ \rho\cdot dA=\frac{M}{A}dA=\frac{G}{g}\cdot\frac{1}{ab}(ydx)\ . \tag{9}$$

Din asemănarea *ΔMNO* şi *ΔACO* rezultă:

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\rightarrow y=\frac{x\cdot b}{a}\ . \tag{10}$$

Înlocuind (10) în (8), se obține:

$$J_{xy}=\frac{G}{g}\cdot\frac{1}{ab}\int_0^a x\cdot x^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2dx=\frac{G}{g}\cdot\frac{ab}{4}\ . \tag{11}$$

Înlocuind (11) în (7) şi ținând cont de (6), rezultă:

$$\text{O: }\omega^2 J_{xy}=-G\frac{a}{2}-V_c\frac{a}{2}-H_c b$$

$$\text{C: }\ \omega^2 J_{\Delta c}=-V_c\frac{a}{2}-H_c\frac{b}{2}-V_o\frac{a}{2}+H_o\frac{b}{2}. \tag{12}$$

Utilizând *teorema lui Steiner*, se poate scrie:

$$J_{\Delta c}=J_{xy}+M\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{G}{g}\frac{ab}{2}; \tag{13}$$

Înlocuind (11) şi (13) în (12), se obțin relațiile:

$$\text{O: }\ \ \omega^2\left(\frac{G}{g}\cdot\frac{ab}{4}\right)=-G\frac{a}{2}-V_c\frac{a}{2}-H_c b.$$

$$\text{C:}\quad \omega^2\left(\frac{G}{g}\cdot\frac{ab}{2}\right) = -V_c\frac{a}{2} - H_c\frac{b}{2} - V_o\frac{a}{2} + H_o\frac{b}{2}\,. \tag{14}$$

Din ecuațiile (3), (4) şi (13), rezolvând sistemul de patru ecuații cu necunoscutele H_0, V_0, H_c, V_c, rezultă reacțiunile dinamice din punctele O şi C cerute de problemă şi date de relația (5).

17.7.3. Se consideră un sistem mecanic format din următoarele corpuri din figura 17.9 [11]: un disc drept, omogen, de raza R și greutate $\overline{G}$, articulat cilindric în punctul O notat cu (*1*); un alt disc drept, omogen, de raza R și greutate $\overline{G}$ notat cu (*2*) și o prismă de greutate $\overline{G}$ suspendată în centrul maselor C al discului (*2*) notată cu (*3*). Între cele două discuri legătura este asigurată printr-un fir flexibil, inextensibil și de masă neglijabilă. Inițial, întreg sistemul se află în repaus. Asupra discului (*1*) acționează un moment motor $\overline{M}_0$ = ct. în sensul dat în figură. Neglijând frecările, se cere să se determine accelerația prismei (*3*) și tensiunile din fire.

Soluţie:

Determinarea parametrilor cinematici la discurile 1 și 2.

Discul 1- execută mişcare de rotație:

$$v_1 = \omega_1 R \;\rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{2\dot{y}}{R} \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2\ddot{y}}{R}\quad. \tag{1}$$

Discul 2 execută *o mișcare plan-paralelă:*

$$v_2 = \omega_2 R \;\rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{R} = \frac{2\dot{y}}{R} \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2\ddot{y}}{R}\,. \tag{2}$$

Izolând fiecare corp din sistem, se introduc forțele exterioare, de legătură și interioare corespunzătoare (fig.17.10).

Se observă la discul (*2*) că:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R}{2R} \rightarrow v_1 = 2v_2\,. \tag{3}$$

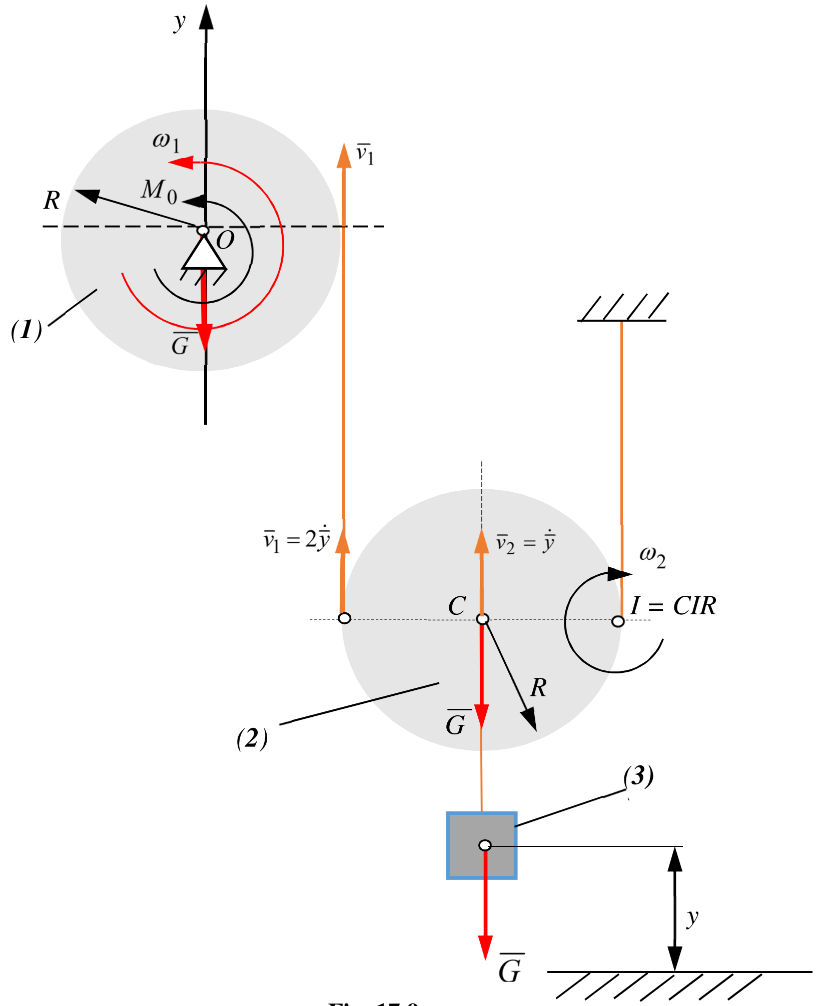


Fig. 17.9

Pentru rezolvarea cerințelor se apelează la teoremele fundamentale ale dinamicii. Se aplică întâi, *teorema mișcării centrului maselor* din care rezultă tensiunea S_2 a firului în funcție de accelerația cerută, astfel *pentru discul (1)* se obțin ecuațiile:

$$M\bar{a}_c = \bar{R}$$

$$\frac{G}{g}\ddot{y} = S_2 - G \quad \to S_2 = \frac{G}{g}\ddot{y} + G \ . \tag{4}$$

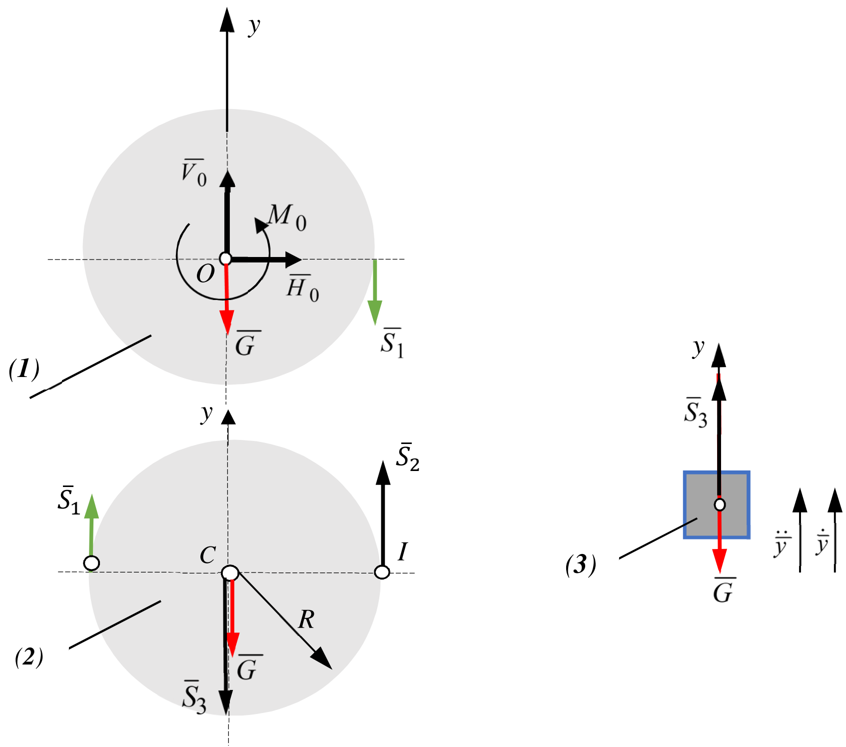


Fig. 17.10

Pentru discul 2 - Se aplică *teorema momentului cinetic* în raport cu *CIR*:

$$\dot{K}_{\Delta I} = M_{\Delta I}, \tag{5}$$

în care:

$$\dot{K}_{\Delta I} = J_{\Delta I}\varepsilon_2, \tag{6}$$

iar

$$M_{\Delta I} = S_1 2R - S_3 R - GR \ . \tag{7}$$

unde:

$J_{\Delta I} = J_{\Delta c} + Ml^2$, conform Teoremei lui Steiner.

Astfel (7) devine:

$$J_{\Delta I}\varepsilon_2 = 2S_1R - S_3R - GR, \tag{8}$$

relație în care $J_{\Delta I}$ are expresia:

$$J_{\Delta I} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3GR^2}{2g} \ . \tag{9}$$

Înlocuind în (8) pe (9), se obține:

$$2S_1R - S_3R - GR = \frac{3}{2}\frac{GR^2}{g}\frac{\ddot{y}}{R} \ . \tag{10}$$

- Se aplică *teorema momentului cinetic* în raport cu axa *Oz*:

$$\dot{K}_z = M_z, \tag{11}$$

în care

$$\dot{K}_z = J_z\varepsilon_1, \tag{12}$$

$$M_z = M_0 - S_1R \ . \tag{13}$$

Astfel (13) devine:

$$O\colon \frac{MR^2}{2}\frac{2\ddot{y}}{R} = M_0 - S_1R \ ,$$

$$\frac{GR}{g}\frac{\ddot{y}}{R} = M_0 - S_1R. \tag{14}$$

Pentru corpul (3) – se poate scrie *teorema mișcării centrului maselor*, din care rezultă tensiune S_3 a firului în funcție de accelerația cerută:

$$m\ddot{y} = S_3 - G; \qquad \frac{G}{g}\ddot{y} = S_3 - G; \tag{15}$$

$$S_3 = G + \frac{G}{g}\ddot{y},$$

astfel că (10), devine:

$$2S_1R - \left(G + \frac{G}{g}\ddot{y}\right)R - GR = \frac{3}{2}\frac{GR^2}{g}\frac{\ddot{y}}{R}, \tag{16}$$

de unde:

$$S_1 = G + \frac{G}{2g}\ddot{y} + \frac{3}{4}\frac{G}{g}\ddot{y} \ . \tag{17}$$

Din relațiile (14) și (16) rezultă accelerația corpului (3):

$$\ddot{y} = \frac{4}{9}\frac{g(M_0 - GR)}{GR}. \tag{18}$$

Dacă $\ddot{y} \geq 0$ *–corpul urcă,* respectiv $M_0 \geq GR$.

17.7.4. Sistemul mecanic din figura 17.11 (inițial în repaus) este format din următoarele corpuri: o prismă de greutate $\overline{P}$, un disc de rază *R*, omogen și de greutate $\overline{Q}$, articulat cilindric în centrul maselor *O* şi o bară *AB*, omogenă de lungime *2l* și greutate $\overline{G}$ ale cărei capete *AB* se deplasează fără frecare pe două ghidaje fixe și perpendicular [11]. Legătura dintre corpuri este realizată printr-un fir flexibil și inextensibil. Se cere viteza prismei $\bar{P}$ la coborâre.

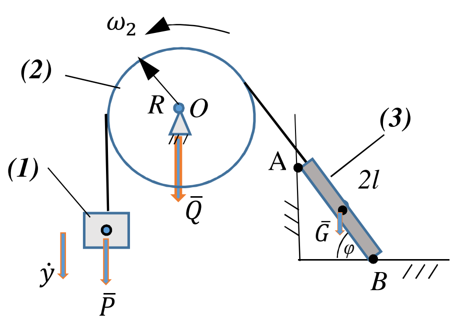


Fig. 17.11

Soluţie:

La momentul inițial sistemul se află în repaus $(\varphi = \varphi_0)$. Bara *AB* execută o mişcare plan-paralelă, astfel:

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \omega_2 R \\ &\dot{y} = \omega_3 IB = \omega_3 2l\cos\varphi \end{aligned} ; \tag{1}$$

Pentru rezolvare se va aplica *teorema energiei cinetice*:

$$E_{C2} - E_{C1} = L_{1-2} . \tag{2}$$

$E_{C1} = 0$ (sistemul inițial se află în repaus)

$$E_{C2} = E_{Ccorp1} + E_{Ccorp2} + E_{Ccorp3} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{QR^2}{2g}\frac{\dot{y}^2}{R^2} + \\ + \frac{1}{2}\left(G\frac{4l^2}{12g} + \frac{Gl^2}{g}\right)\frac{\dot{y}^2}{4l^2\cos^2\varphi} \quad . \qquad (3)$$

unde:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\dot{y} = \omega R \rightarrow \omega = \frac{\dot{y}}{R}$$

$$J_{disc} = \frac{MR^2}{2} \,.$$

Lucrul mecanic este:

$$L_{1-2} = P \cdot 2l(sin\varphi - sin\varphi_0) - Gl(sin\varphi - sin\varphi_0) \;. \qquad (4)$$

Având în vedere (3) și (4), din relația (2) se obține viteza prismei (3), astfel:

$$\dot{y}^2 = \frac{(2Pl-Gl)(sin\varphi - sin\varphi_0)}{\frac{P}{2g}+\frac{Q}{4g}+\frac{G}{6g}\frac{1}{cos^2\varphi}} \,, \qquad (5)$$

$$v_y = \dot{y} = \sqrt{\frac{(2Pl-Gl)(sin\varphi - sin\varphi_0)}{\frac{P}{2g}+\frac{Q}{4g}+\frac{G}{6g}\frac{1}{cos^2\varphi}}} . \qquad (6)$$

18. MECANICA ANALITICĂ [5]

18.1 Generalități

Mecanica analitică este cea mai complexă parte a mecanicii din punct de vedere matematic, ea utilizând mult calculul diferențial şi integral. *Leibniz* şi *Newton* sunt considerați primii cercetători ai calculului diferențial și integral care au exprimat matematic legile de mişcare ale punctului material, ale sistemelor de puncte materiale şi ale solidelor rigide, apărând astfel o nouă ramură a mecanicii teoretice numită **mecanică analitică**.

Ideile lui Newton au fost preluate mai târziu şi dezvoltate de *Daniel Bernoulli*, *Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert,* care este şi autorul principiului care îi poartă numele (*principiul lui D'Alembert*). De asemenea, o contribuție importantă a avut în dezvoltarea mecanicii analitice şi *Joseph-Louis Lagrange,* care a dat o altă formă ecuațiilor diferențiale ale mişcării. De asemenea și *Pierre-Simon Laplace* își aduce aportul în mecanica analitică prin contribuțiile sale substanțiale în mecanica cerească.

Altfel spus, toate aceste contribuții conduc la apariția mecanicii analitice sau lagrangiene, care este o aprofundare a mecanicii newtoniene inițiată în anul 1788 de matematicianul Joseph Louis Lagrange.

Se poate spune că ***Mecanica analitică*** *îşi propune să stabilească metode directe de determinare a ecuațiilor de mişcare în care să nu apară forțele de legătură şi să exprime acest sistem de ecuații sub forma generală (forma canonică),* oricare ar fi problema de mecanică studiată.

De menționat că *în Mecanica analitică, legăturile se consideră ideale.* Rezolvarea problemelor prin metodele **mecanicii analitice** se bazează pe următoarele **principii**:

a. *principii diferențiale* cum ar fi *principiul lui D'Alembert*, *principiul lucrului mecanic virtual*, *principiul lui Gauss* sau a celei mai mici constrângeri;

b. *principii integrale* sau *variaționale* cum ar fi *principiul lui Hamilton*, *principiul lui Maupertuis* sau *principiul minimei acțiuni*.

Câteva din aceste principii se vor studia în cele ce urmează, începând cu definiția unui grad de libertate şi a unei legături.

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem de solide rigide sau ale unui rigid este dat de numărul parametrilor geometrici independenți (distanțe, unghiuri) care determină univoc, la un moment dat, poziția lor. Parametri geometrici independenți având "*n*" grade de libertate şi care determină poziția se mai numesc *coordonate generalizate,* ale căror derivate în raport cu timpul se numesc *viteze şi accelerații generalizate*.

18.1.1 Legături

Legătura – reprezintă o constrângere geometrică sau fizică a poziţiei punctelor materiale ce alcătuiesc sistemul. Aceste resticţii pot fi exprimate analitic sub forma unor relaţii, fie între *deplasări finite* (coordonate), fie între *deplasări infinitezimale* (diferențialele coordonatelor).

Exemple: 1. Condiţia ca un punct material să rămână pe o *suprafaţă* este:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \\ \nabla f \cdot d\bar{r} = 0 \end{cases} \text{ restricții privind coordonatele punctului material} \quad (18.1)$$

$$P(x, y, z)dx + R(x, y, z)dy + Q(x, y, z)dz = 0 \ . \quad (18.2)$$

Pentru ca să fie integrabilă, relaţia (18.2), trebuie satisfăcute relaţiile lui Cauchy, scrise astfel:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \ . \quad (18.3)$$

Din relaţiile (18.1) – (18.3) rezultă:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}\ ;\ \ Q = \frac{\partial f}{\partial y}\ ;\ \ R = \frac{\partial f}{\partial z}\ . \tag{18.4}$$

În cazul unui *sistem de puncte materiale, legăturile* se exprimă prin “*p*” relaţii diferenţiale de forma:

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}dx_1 + \alpha_{12}dy_1 + \alpha_{13}dz_1 + \ldots + \alpha_{1,3n-2}dx_n + \alpha_{1,3n-1}dy_n + \alpha_{1,3n}dz_n = 0 \\
\alpha_{21}dx_1 + \alpha_{22}dy_1 + \alpha_{23}dz_1 + \ldots + \alpha_{2,3n-2}dx_n + \alpha_{2,3n-1}dy_n + \alpha_{2,3n}dz_n = 0 \\
\vdots \\
\alpha_{p1}dx_1 + \alpha_{p2}dy_1 + \alpha_{p3}dz_1 + \ldots + \alpha_{p,3n-2}dx_n + \alpha_{p,3n-1}dy_n + \alpha_{p,3n}dz_n = 0,
\end{gathered} \tag{18.5}$$

unde: $a_{ij} = a_{ij}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n);\ \ i = 1 \div p;\ \ j = 1 \div 3n;\quad p \le 3n$.

Pentru ca sistemul (18.5) să fie independent, rangul matricei coeficienţilor deplasărilor infinitezimale trebuie să fie egal cu *p*, respectiv să existe cel puțin un determinant cu *p* - linii şi *p* – coloane, diferit de zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{13,n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{23,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots a_{p3,n} \end{vmatrix} = rang\, p \ \ \neq 0 \tag{18.6}$$

Clasificarea legăturilor:

1. ***Din punct de vedere analitic:***

a) Legături olonome – în acest caz cele *p* ecuaţii ale sistemului (18.5) sunt independente şi integrabile. *Numărul gradelor de libertate în deplasări finite este egal cu numărul gradelor de libertate în deplasări infinitezimale* (*h* = *3n* – *p*), cu alte cuvinte sunt legăturile care impun restricții pozițiilor şi nu vitezelor. Aceste legături sunt de forma:

$$f_i(x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n) = 0\,, \quad unde \quad i = 1 \div p. \tag{18.6a}$$

b) Legături neolonome – în acest caz, *toate sau o parte din cele p ecuaţii ale sistemului* (18.5) *sunt neintegrabile*. Se propune $k < p$ relaţii integrabile, rezultând $p - k$ relaţii neintegrabile. Numărul gradelor de libertate în deplasări finite este $h' = 3n-k$, iar în deplasări infinitezimale numărul gradelor de libertate este $k < p$, $h'' = 3n-p$, de unde rezultă că $h' > h''$. Astfel că în deplasări neolonome, numărul gradelor de libertate în deplasări finite h' este mai mare decât în deplasări infinitezimale h'', respectiv sunt legături care impun restricţii şi poziţiilor şi vitezelor rigidului, adică sunt de forma:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \tag{18.6b}$$

c) Legături critice – când *numărul gradelor de libertate în deplasări finite este mai mic decât în deplasări infinitezimale*. Se propun p relaţii independente, ca urmare, numărul gradelor de libertate în deplasări finite este $h' = 3n - p$. Dacă rangul matricei este $k < p$, atunci numărul gradelor de libertate în deplasări infinitezimale este $h'' = 3n-k$; de unde rezultă $h'' > h'$.

2. ***Din punct de vedere a dependenţei de timp:***

a) Legături scleronome – sunt cele în expresia cărora *timpul nu apare explicit*, în cazul în care legătura nu îşi schimbă caracteristica geometrică sau cinematică, fiind fixă şi nedeformabilă:

$$f(x, y, z) = 0.$$

b) Legături reonome – sunt cele în expresia cărora *timpul apare explicit,* adică legătura variază în timp după o anumită lege, independentă de forţele care acţionează asupra rigidului:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Se poate spune că în funcţie de dependenţa de timp, legăturile se clasifică în **legături scleronome** (independente de timp) şi **legături reonome** (dependente de timp).

În cele ce urmează se vor specifica câteva exemple de legături din cele explicitate anterior astfel:

- Legătură olonomă şi scleronomă:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0\,;$$

- Legătură olonomă şi reonomă:

$$(x - at)^2 + (y - at)^2 + (z - at)^2 - (r - at)^2 = 0\,.$$

- Legătură neolonomă şi scleronomă:

$$P(x, y, z, dt)dx + R(x, y, z, dt)dy + Q(x, y, z, dt)dz + T(x, y, z, dt)dt = 0\,.$$

Sistemul (18.5) în cazul legăturilor reonome devine:

$$\begin{aligned} &a_{ij} = a_{ij}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t); \quad i = \overline{1, p}; \quad j = \overline{1,3n}; \quad p \le 3n \\ &b_i = b_i(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t); \end{aligned} \qquad (18.7)$$

18.2 Principiul lui D'Alembert

18.2.1 Forţa de inerţie. Torsorul forţelor de inerţie

Se consideră un factor motor care acționează ca o forță exterioară $\bar{F}$, asupra unui punct material *M*, de masă *m*, astfel că sub acțiunea forței, punctul se mişcă cu accelerația $\bar{a}$. Conform cu principiul acțiunii şi reacțiunii, forței $\bar{F}$ i se opune o reacțiune egală şi de sens contrar notată cu $(-m\bar{a})$. Această reacțiune se va numi *forță de inerție*.

Se numeşte ***forţă de inerţie*** notată $\bar{F}_j$, o forţă egală cu produsul dintre masa şi acceleraţia punctului luată cu semn schimbat:

$$\overline{F}_j = -m\overline{a}\ .\qquad(18.8)$$

Forța de inerție **nu acționează asupra punctului**, ci **asupra factorului motor**. Forța $\bar{F}$ şi forța de inerție $\bar{F}_j$ au acelaşi suport de acțiune. Ele nu se anulează reciproc, deoarece nu sunt aplicate aceluiaşi corp.

Pentru studiu, se consideră sistemul de puncte materiale din figura 18.1 format din "n" puncte materiale de mase m_i, i =1÷n, aflate în mişcare sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i^{ext}$, i =1÷n şi de legătură. Conform principiului al doilea al dinamicii, pentru fiecare punct al sistemului se poate scrie o relație de forma:

$$\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int} = m_i\bar{a}_i.\qquad(18.9)$$

Notând $\bar{F}_{ji} = -m_i\bar{a}_i$ ca forță de inerție, relația (18.9) devine:

$$\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int} - m_i\bar{a}_i = 0\,.\qquad(18.10)$$

Torsorul de reducere al forțelor de inerție, notat cu $\bar{\bar{\tau}}_{jo}\left(\bar{R}_j,\ \bar{M}_{jo}\right)$, are următoarele elemente:

- vectorul rezultant: $$\bar{R}_j = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-m_i\bar{a}_i)\,;\qquad(18.11)$$

- momentul rezultant: $$\bar{M}_{j0} = \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times (-m_i\cdot\bar{a}_i).$$

Înlocuind $\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$ în prima relație (18.11), se obține:

$$\bar{R}_j = -\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\bar{P}_i = -\dot{\bar{P}} = -M\bar{a}_c.\qquad(18.12)$$

Din relaţia (18.12) rezultă că *vectorul rezultant al forţelor de inerţie, în cazul unui sistem de puncte materiale, este egal cu derivata în raport cu timpul a impulsului total al sistemului luată cu semnul minus.*

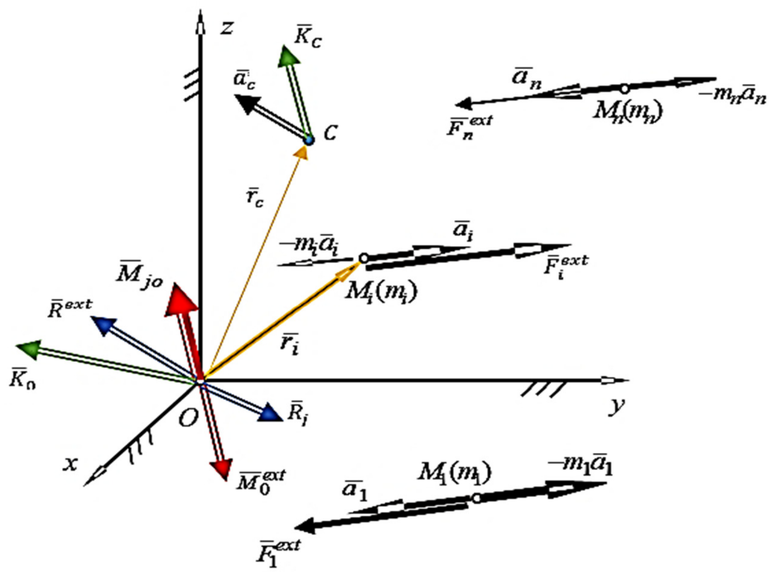


Fig. 18.1

Înlocuind $\bar{a}_i$ în a doua relație (18.11), se obține:

$$\bar{M}_{j0} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \left(-m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \bar{K}_{0i} = -\dot{\bar{K}}_0. \tag{18.13}$$

Relația (18.13) arată că *vectorul moment rezultant al forţelor de inerţie, în cazul unui sistem de puncte materiale, este egal cu derivata în raport cu timpul a vectorului moment cinetic în raport cu acelaşi pol O, luată cu semnul minus.*

Relația (18.13) se aplică şi în cazul în care raportarea se face la centrul de masă al sistemului de puncte materiale, adică:

$$\bar{M}_{jc} = -\dot{\bar{K}}_c \,. \tag{18.14}$$

18.2.2 Principiul lui D'Alembert. Metoda cineto-statică

Se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i (fig. 18.1). Se va demonstra principul lui D'Alembert pornind de la relaţia (18.10) și anume:

$$\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int} - m_i \bar{a}_i = 0 \,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n}(-m_i \bar{a}) = 0 \,. \tag{18.15}$$

Relaţia (18.15) devine, ținând cont că:

$$\bar{R}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{ext}; \;\; \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{int} = 0; \quad \bar{R}_j = \sum_{i=1}^{n}(-m_i \bar{a}) \,;$$

$$\bar{R}^{ext} + \bar{R}_j = 0 \,. \tag{18.16}$$

Înmulţind relaţia (18.16) cu vectorul de poziție $\bar{r}_i$, se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times (-m_i \bar{a}) = 0 \,, \tag{18.17}$$

$$\bar{M}_0^{ext} + \bar{M}_{j0} = 0 \,. \tag{18.18}$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int} = 0$, forțele interioare fiind perechi de două câte două, egale și de sens contrar, plasate pe același suport. În relațiile (18.16) și (18.18) se fac precizările:

$\bar{R}^{ext}, \bar{R}_j$ - sunt vectorii rezultanți ai forţelor exterioare şi ai forţelor de inerţie;

$\bar{M}_0^{ext}, \bar{M}_{j0}$ - sunt vectorii moment rezultant ai forţelor exterioare şi de inerţie.

Relaţiile (18.16) şi (18.18) reprezintă ***ecuaţiile dinamice de echilibru fictiv*** sau de ***echilibru cineto-static*** şi reprezintă ***principiul lui D'Alembert,*** exprimat astfel:

Un sistem de puncte materiale sau un solid rigid aflat în mişcare, se află în orice moment în echilibru dinamic fictiv sub acțiunea forţelor *exterioare date, a forțelor de legătură aferente legăturilor sistemului, precum și a forțelor de inerție.*

Spus altfel,

- *În cazul unui sistem de puncte materiale sau solid rigid în mișcare,* ***torsorul forțelor exterioare și de legătură echilibrează torsorul forțelor de inerție***.

Dacă punctul *O* devine centrul maselor, în conformitate cu (18.18) se poate scrie:

$$\bar{M}_C^{ext} + \bar{M}_{jC} = 0\,, \tag{18.18a}$$

relație în care:

- $\bar{M}_C^{ext}$ este vectorul moment rezultant al forțelor exterioare raportat la C (centrul de masă);
- $\bar{M}_{jC}$ este vectorul moment rezultant al forțelor de inerție.

Metoda cineto-statică ***reduce problema de dinamică la o problemă de statică*** ***în rezolvarea căreia se parcurg următoarele etape***:

- se determină relațiile dintre parametri cinematici de ordinul I și II (viteze și accelerații) a corpului studiat;
- se separă corpurile suprimând legăturile interioare și exterioare;
- se introduc forțele / momentele de legătură;
- se introduc forțele / momentele de inerție;
- se scriu ecuațiile de echilibru dinamic fictiv pentru fiecare corp separat din sistem;
- se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale din care rezultă necunoscutele (accelerații și forțe de legătură).

18.3 Principiul lucrului mecanic virtual

Principiul deplasărilor virtuale *- reprezintă o metodă generală de rezolvare a problemelor de dinamică cu ajutorul deplasărilor virtuale și a lucrului mecanic virtual. Acest principiu* nu ia în considerare forțele de legătură.

La început acestui capitol, se definesc noțiunile de deplasare elementară virtuală și lucrul mecanic virtual.

Deplasarea elementară virtuală sau ***deplasare virtuală*** – este deplasarea unui punct dintr-o poziție M, într-o poziţie infinit apropiată (M_1), deplasare presupusă, dar neexecutată. Deplasarea elementară virtuală se notează cu $\delta\bar{r}$ (fig.18.2).

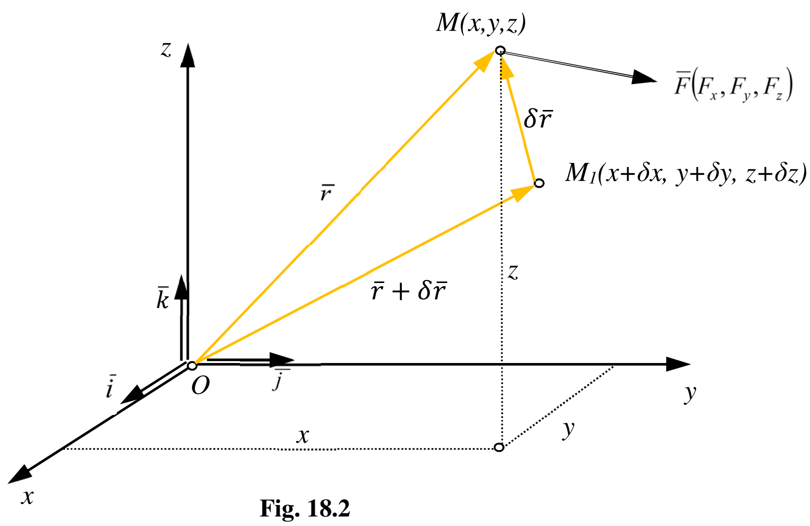


Fig. 18.2

Dacă în urma deplasării, legăturile punctului se distrug, *deplasarea se numeşte incompatibilă cu legăturile*, iar dacă acestea rămân intacte, deplasarea se numeşte *compatibilă cu legăturile*.

De exemplu, în cazul unui ***punct obligat să rămână pe o suprafaţă*** orice deplasare în planul tangent este compatibilă cu legăturile, iar toate deplasările care nu sunt în acest plan sunt incompatibile cu legăturile.

Într-un sistem de referinţă cartezian vectorul de poziţie este dat de:

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z, t), \tag{18.18b}$$

iar *deplasarea virtuală* este notată cu:

$$\delta\bar{r} = \delta x\bar{i} + \delta y\bar{j} + \delta z\bar{k}\ . \tag{18.18c}$$

Fiind explicitată noțiunea de deplasare elementară virtuală, se poate defini noțiunea de lucru mecanic virtual.

Lucrul mecanic virtual al unei forţe este produsul scalar dintre forţa $\overline{F}$ şi deplasarea virtuală $\delta\overline{r}$. Lucrul mecanic virtual se notează cu δL și are expresia:

$$\delta L = \overline{F}\,\delta\overline{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \ . \tag{18.19}$$

Pentru studiul lucrului mecanic virtual se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i, sistem supus la legături şi care se află în mişcare sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare $\overline{F_i}$, $i = 1 \div n$ care îi imprimă acestuia o acceleraţie $\overline{a}_i$ (fig.18.3).

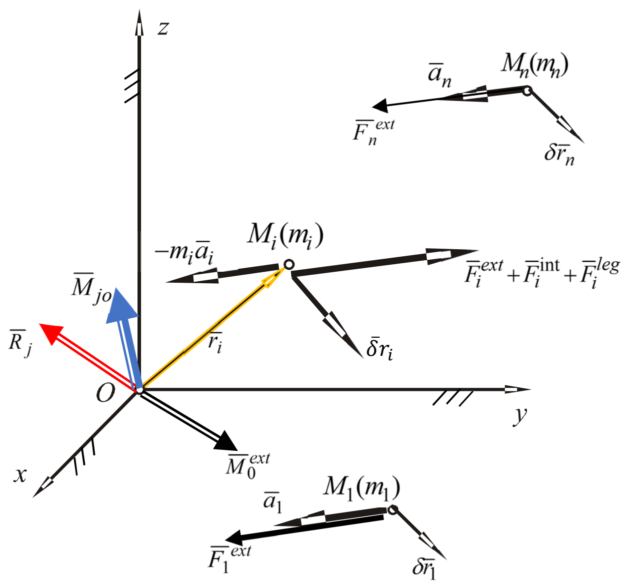


Fig. 18.3

Conform principiului al II-lea al dinamicii punctului, pentru fiecare punct al sistemului material se poate scrie o relație de forma:

$$m_i\overline{a}_i = \overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{\text{int}} + \overline{F}_i^{leg} \ . \tag{18.20}$$

În această relație,

$\overline{F}_i^{ext}$ - reprezintă forţa exterioară dată;

$\overline{F}_i^{\text{int}}$ - reprezintă forţa interioară rezultată din interacțiunea punctului M_i cu celelalte *n-1* puncte ale sistemului;

$\overline{F}_i^{leg}$ - reprezintă forţa de legătură exterioară rezultată prin suprimarea legăturii (legăturilor) exterioare ale punctului M_i.

Scrisă astfel, relația (18.20) devine:

$$\overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{\text{int}} + \overline{F}_i^{leg} - m_i\overline{a}_i = 0 \,. \tag{18.21}$$

Dacă se consideră o deplasare virtuală $\delta\overline{r}_i$ şi relaţia (18.21) va fi înmulţită scalar cu aceasta, va rezulta:

$$\overline{F}_i^{ext} \cdot \delta\overline{r}_i + \overline{F}_i^{\text{int}} \cdot \delta\overline{r}_i + \overline{F}_i^{leg} \cdot \delta\overline{r}_i - \left(m_i\overline{a}_i\right)\cdot \delta\overline{r}_i = 0 \,. \tag{18.22}$$

Aplicând relația (18.22) la toate punctele sistemului și însumând relațiile obținute, se ajunge la:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{ext} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\text{int}} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{leg} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(- m_i\overline{a}_i\right)\cdot \delta\overline{r}_i = 0 \,. \tag{18.23}$$

Relaţia (18.23) exprimă ***principiul deplasărilor virtuale*** sau ***principiul lucrului mecanic virtual*** pentru un sistem de puncte materiale aflate în mişcare.

În cazul *unui sistem de puncte materiale* aflat în mişcare şi supus la legături, *suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţelor exterioare date, ale forțelor de legătură interioare şi exterioare și ale forțelor de inerţie, este nulă pentru orice deplasare virtuală compatibilă sau incompatibilă cu legăturile.*

În studiul lucrului mecanic virtual privind un <u>*solid rigid,*</u> $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{int} \cdot \delta\overline{r}_i = 0$, conform relației (16.19) aplicată solidului rigid.

Astfel, în cazul solidului rigid relația (18.23) devine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{ext} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{leg} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(- m_i\overline{a}_i\right)\cdot \delta\overline{r}_i = 0 \,. \tag{18.24}$$

Dacă corpul este supus la *legături ideale*, $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{leg} \cdot \delta\overline{r}_i = 0$, astfel că relația (18.24) devine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{ext} \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(- m_i\overline{a}_i\right)\cdot \delta\overline{r}_i = 0 \,. \tag{18.25}$$

Relația (18.25) exprimă *forma dinamică a principiului deplasărilor virtuale*, conform căreia, în cazul mișcării unui rigid supus la legături ideale, lucrul mecanic virtual elementar corespunzător forțelor exterioare, de inerție și unor deplasări elementare virtuale compatibile cu legăturile rigidului este nul. Principiul deplasărilor virtuale exprimat de relația (18.25) se aplică la rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor.

Dacă sistemul de puncte materiale este supus la legături ideale și se află în repaus ($\bar{a}_i=0$) şi, respectiv, lucrul mecanic virtual al forţelor interioare este nul, se obţine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{ext} \cdot \delta \overline{r}_i = 0 \ . \tag{18.26}$$

Relația (18.26) exprimă *principiul deplasărilor virtuale "sub formă statică"*, aplicat problemelor de statica sistemelor.

Astfel, în cazul unui sistem de puncte materiale aflat în echilibru, supus la legături ideale, suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţelor interioare şi ale forţelor exterioare date și de legătură este nulă, pentru orice deplasare virtuală $\delta\overline{r}_i$ compatibilă cu legătura.

Avantajul rezolvării problemelor utilizând principiul lucrului mecanic virtual este că se elimină din studiu, forțele de legătură.

18.4 Ecuaţiile lui Lagrange

Metodele general aplicate sistemelor de puncte materiale, solidului rigid sau sistemelor de rigide ***nesupuse frecărilor,*** sunt cele care folosesc *ecuaţiile lui Lagrange.*

18.4.1 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa I

Se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i, aflat în mişcare sub acțiunea unui sistem de forţe exterioare $\overline{F_i}$, $i = 1 \div n$ şi supus la legături olonome fără frecare. Sistemul material la un moment *(t)* este definit de *h* parametri geometrici independenţi, numiţi ***coordonate generalizate*** $(q_1, q_2, q_3, \dots q_k, \dots q_h)$.

Vitezele şi acceleraţiile se exprimă în funcţie de aceste coordonate generalizate şi se vor numi *viteze şi acceleraţii generalizate*:

$$(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots \dot{q}_k, \dots \dot{q}_h); \qquad (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \dots \ddot{q}_k, \dots \ddot{q}_h) \tag{18.27}$$

Se doreşte să se determine *ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sistemului de puncte materiale.*

Vectorul de poziţie al punctului M_i este $\bar{r}_i$ şi depinde de coordonatele generalizate q_k, $k = 1 \div h$, iar în cazul legăturilor reonome depinde şi de timpul (t):

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots q_k, \dots q_h, t). \tag{18.28}$$

Deplasarea virtuală $\delta\bar{r}_i$ *compatibilă cu legătura* punctului M_i, este:

$$\delta\bar{r}_i = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k + \dots + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h}\delta q_h = \sum_{k=1}^{h}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\ . \tag{18.29}$$

În conformitate cu forma dinamică a principiului deplasărilor virtuale, se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{F}_i - m_i\bar{a}_i)\cdot\delta\bar{r}_i = 0 \tag{18.30}$$

Înlocuind relaţia (18.29) în (18.30), se obține:

$$\sum_{k=1}^{h}\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{F}_i - m_i\bar{a}_i)\cdot\frac{\delta\bar{r}_i}{\delta q_k}\right]\delta q_k = 0. \tag{18.31}$$

În cazul legăturilor olonome pentru cele h deplasări virtuale, deplasările δq_k sunt independente şi toate pot fi considerate nule, mai puţin una.

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{k-1} = \dots = \delta q_h = 0\,;\ \delta q_k \neq 0,\ k = 1 \div h\,. \tag{18.32}$$

Astfel relaţia (18.32) se poate scrie sub forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{F}_i - m_i\bar{a}_i)\cdot\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k}\,, \quad k = 1 \div h\,, \tag{18.33}$$

care reprezintă *ecuaţiile lui Lagrange de speţa I.*

18.4.2 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa II

Ecuațiile lui Lagrange de speța I pot fi aduse *la o altă formă* utilizând artificiile introduse de Lagrange. În acest sens, se consideră un sistem de puncte materiale M_i de mase m_i, aflat în mişcare sub acțiunea unui sistem de forţe exterioare $\bar{F}_i$, $i = 1 \div n$, supus la legături olonome fără frecare.

Ca şi în primul caz, sistemul material la un momentul *(t)* este definit de *h* parametri geometrici independenţi, numiţi ***coordonate generalizate*** $(q_1, q_2, q_3, ... q_k, ... q_h)$. Vitezele şi acceleraţiile exprimate în funcție de aceste coordonate generalizate se numesc *viteze* și *accelerații generalizate,* depinzând de $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, ... \dot{q}_k, ... \dot{q}_h)$, respectiv de $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, ... \ddot{q}_k, ... \ddot{q}_h)$.

Se urmărește să se determine *ecuaţiile diferenţiale de mişcare* pentru sistemul de puncte materiale aflat în studiu.

În demonstrația ecuaţiilor lui *Lagrange de speţa II* se pleacă de la relația (18.33), respectiv prima formă a ecuațiilor lui Lagrange, din care :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \quad k = 1 \div h \ . \tag{18.34}$$

Se notează:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k \qquad \text{- numită } \textbf{\textit{forță generalizată}} \tag{18.35}$$

şi se înlocuiește accelerația $\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$ se obține astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \quad k = 1 \div h \ . \tag{18.36}$$

Înlocuind relaţiile (18.35) și (18.36) în (18.34), se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k. \tag{18.37}$$

Folosind regula de derivare a unui produs, relaţia (18.37) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right) = Q_k. \tag{18.38}$$

unde: $\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}.$

Se observă că,

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad . \tag{18.39}$$

Pentru a demonstra:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}, \tag{18.40}$$

se derivează $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$ în raport cu timpul (t) și $\bar{v}_i$ în raport cu q_k, obținând:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_k}\dot{q}_k + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_h . \tag{18.41}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_k}\dot{q}_k + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_h . \tag{18.42}$$

Se observă că membrii doi ai relațiilor (18.41) și (18.42) sunt aceeași, astfel egalându-i şi luând în considerare (18.40), rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = Q_k . \tag{18.43}$$

$$\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\bar{v}_i^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) \quad , \tag{18.44}$$

$$\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\bar{v}_i^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{v_i^2}{2}\right).$$

Înlocuind în (18.43) expresiile: $\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$ şi $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}$ din (18.44), se obține:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{v_i^2}{2}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = Q_k \tag{18.45}$$

sau prin transformări succesive, la forma:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2} = Q_k\,. \tag{18.46}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\bar{v}_i^2}{2} = E_c$ - este energia cinetică a sistemului, (18.47)

relația (18.46) se poate scrie astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k\,,\ k = 1 \div h\,. \tag{18.48}$$

Relaţia (18.48) reprezintă ***ecuaţiile lui Lagrange de speţa II***.

De menționat că:

- Ecuaţiile lui Lagrange de speţa II sunt ecuaţii diferenţiale scalare, iar pentru calculul energiei cinetice E_c se exprimă coordonatele x_i, y_i, z_i în funcţie de coordonatele generalizate $q_1, q_2, \dots q_h$ și se derivează în raport cu timpul, obținând:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\ ; \qquad \dot{y}_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\ ; \qquad z_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\ ;$$

apoi,

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right). \tag{18.49}$$

- De asemenea, *forța generalizată* se poate determina fie cu relația $Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$, fie se va da o deplasare virtuală $\delta\bar{r}$ sistemului de puncte materiale în care deplasarea variază doar după coordonata q_k, pentru ca apoi forța generalizată să se determine astfel:

$$Q_k = \frac{\delta_k L}{\delta q_k} \quad \text{şi} \quad \delta L = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{h} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{h} Q_k \delta q_k \ . \tag{18.49a}$$

Lucrul mecanic virtual în condițiile

$\delta q_1 = \delta q_2 = \cdots = \delta q_{k-1} = \cdots = \delta q_h = 0 \ ; \ \delta q_k \neq 0, \ k = 1 \div h$, este:

$$\delta_k L = Q_k \delta q_k \ . \tag{18.50}$$

18.4.3 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa II în cazul forţelor conservative

Este interesant de prezentat în continuare, studiul *ecuațiilor lui Lagrange de speța a II-a în cazul forțelor conservative* [11], forţe care derivă dintr-o funcţie de forţă *U*:

$$\bar{F}_i = gradU_i = \nabla U_i. \tag{18. 51}$$

În conformitate cu (16.11), o forță conservativă $\bar{F}_i$ are componentele scalare date de relațiile:

$$F_{ix} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}; \quad F_{iy} = \frac{\partial U_i}{\partial y_i}; \quad F_{iz} = \frac{\partial U_i}{\partial z_i}. \tag{18.52}$$

Conform cu (18.37) și (18.50), forța generalizată Q_k are expresia:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial q_k} \ . \tag{18.53}$$

Se notează *funcția de forță* cu *U*, unde: $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$ și se obține succesiv:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{\partial U}{\partial q_k} \ . \tag{18.54}$$

Înlocuind relaţia (18.54) în (18.48), se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \ . \qquad (18.55)$$

Notând cu *L funcția lui Lagrange* sau *potențialul cinetic*, a cărui expresie este:

$$L = E_c + U, \qquad (18.56)$$

se fac următoarele precizări:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}, \qquad (18.57)$$

pentru că $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$, întrucât funcția de forță nu depinde de vitezele generalizate $\dot{q}_k$, ci doar de coordonatele generalizate q_k .

Înlocuind relaţia (18.57) în (18.55), se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad k = 1 \div h \, . \qquad (18.58)$$

Relaţia (18.58) reprezintă *ecuaţia lui Lagrange de speța a II-a în cazul forţelor conservative*.

18.5 Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton

Apelând la principii integrale sau variaționale, în mecanica analitică sunt importante și **ecuațiile canonice ale lui Hamilton**. Pentru abordarea lor se consideră un sistem de "*n*" puncte materiale M_i de mase m_i, supus la legături olonome ideale care are *h* grade de libertate. Sistemul se află în mişcare sub acţiunea forţelor conservative exterioare $\bar{F}_i$, $i = 1 \div n$. Se cer să se determine *ecuaţiile canonice ale lui Hamilton*. Pentru demonstrarea acestora se pleacă de la relaţia (18.54), în care se notează:

$$p_k = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \,, \tag{18.59}$$

unde: p_k – este o mărime scalară numită ***impuls generalizat*** şi are relația:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \,. \tag{18.60}$$

Ecuaţiile (18.59) și (18.60) formează un sistem de *2h* ecuații diferențiale de ordinul I. Ele pot fi aduse sub o altă formă utilizând ***funcţia Hamilton, notată cu H****:*

$$H = \sum_{k=1}^{h} p_k \dot{q}_k - L \,; \quad L = L(q_1, q_2, \dots q_h, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_h) \,. \tag{18.61}$$

Considerând o deplasare virtuală elementară ($\delta\bar{r}$), variația elementară a funcției lui Lagrange se determină prin diferențierea funcției *L.* Se obține astfel:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) \,. \tag{18.62}$$

Înlocuind în relaţia (18.62) relațiile (18.59) şi (18.60), se obţine:

$$\partial L = \sum_{k=1}^{h} (\dot{p}_k \delta q_k + p_k \delta \dot{q}_k), \quad \text{în care:} \quad \delta \dot{q}_k = \delta(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k \delta p_k \tag{18.63}$$

Se înlocuiește (18.63) în (18.62) și se obține relația:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{h} [\dot{p}_k \delta q_k + \delta(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k \delta p_k], \tag{18.64}$$

din care se poate scrie: $\delta\left(\sum_{k=1}^{h} p_k \dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^{h} (\dot{q}_k \, \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k)$

sau, având în vedere relația care definește *funcția lui Hamilton*,

$$\delta H = \sum_{k=1}^{h} (\dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k) \,. \tag{18.65}$$

În relația (18.65) impulsurile generalizate (p_k) depind de coordonatele și vitezele generalizate. Astfel,

$$p_k = p_k(q_1, q_2, \dots q_h,\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_h\ ); \qquad k = 1 \div h \tag{18.66}$$

iar vitezele generalizate depind de coordonatele și impulsurile generalizate,

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_1, q_2, \dots q_h,\ p_1, p_2, \dots p_h\ ); \qquad k = 1 \div h\,, \tag{18.67}$$

Astfel,

$$L = L(q_1, q_2, \dots q_h,\ p_1, p_2, \dots p_h\ ); \quad k\ = 1 \div h, \tag{18.68}$$

$$H = H(q_1, q_2, \dots q_h,\ p_1, p_2, \dots p_h\ ); \qquad k\ = 1 \div h\,. \tag{18.69}$$

Ţinând cont de (18.65), se obţine:

$$\delta H = \sum_{k=1}^{h} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right). \tag{18.70}$$

Din compararea relaţiilor (18.65) şi (18.70), rezultă ***ecuaţiile canonice ale lui Hamilton***:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\ ; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\ ; \quad k = 1 \div h\,. \tag{18.71}$$

Prin integrarea celor *2h* ecuații diferențiale (18.71) şi luând în considerare condiţiile iniţiale ale mişcării, rezultă *coordonatele generalizate* şi *impulsurile generalizate* ale mişcării în funcție de timp.

18.6 Probleme rezolvate

18.6.1. Se cere să se determine cu ajutorul *ecuaţiilor lui Lagrange,* perioada micilor oscilaţii ale centrului unei sfere de rază *r* şi masa *m* care sferă se rostogolește fără alunecare în interiorul unui cilindru de rază *R* [4] (fig.18.4).

Soluţie:

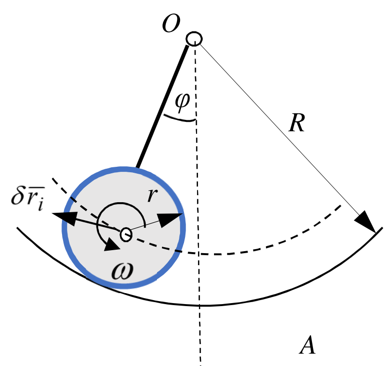


Fig. 18.4 [4]

Conform *teoremei lui König,* energia cinetică *Ec* a discului este:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad . \tag{1}$$

În relația (1),

$$v_A = (R - r)\dot{\varphi}; \quad \dot{\varphi} = \omega; \qquad \omega = \frac{v_A}{R - r}; \quad J_A = \frac{2}{5} m r^2 \ . \tag{2}$$

Înlocuind relaţiile (2) în (1), se obține energia cinetică

$$E_c = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 \ . \tag{3}$$

Funcţia de forţă *U* se poate exprima astfel:

$$U = mgz = mg(R - r)\cos\varphi \, . \tag{4}$$

Ecuaţiile lui Lagrange de speța a II-a, se pot scrie astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right)=Q_i;\quad Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{5}$$

$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\varphi}=-mg(R-r)\sin\varphi . \tag{6}$$

Din relaţia (6) se obține perioada de oscilație a pendulului și anume:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\ \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$$
$$T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}\ . \tag{7}$$

18.6.2. Se dă mecanismul de basculare [5] din figura 18.5 la care se neglijează frecările, el reprezentând brațul unui robot industrial. Se cunoaşte rezultanta forțelor de greutate $\bar{G}$, a elementelor din care se compune brațul, precum şi parametri constructivi (l_1, l_2 şi α) ai acestuia. Să se determine valoarea forței $\bar{F}$ care solicită tija pistonului (*3*) când sistemul este oprit, pentru poziția dată de parametri l (distanța de la polul O la axa centrală a forțelor) şi q – unghiul de basculare.

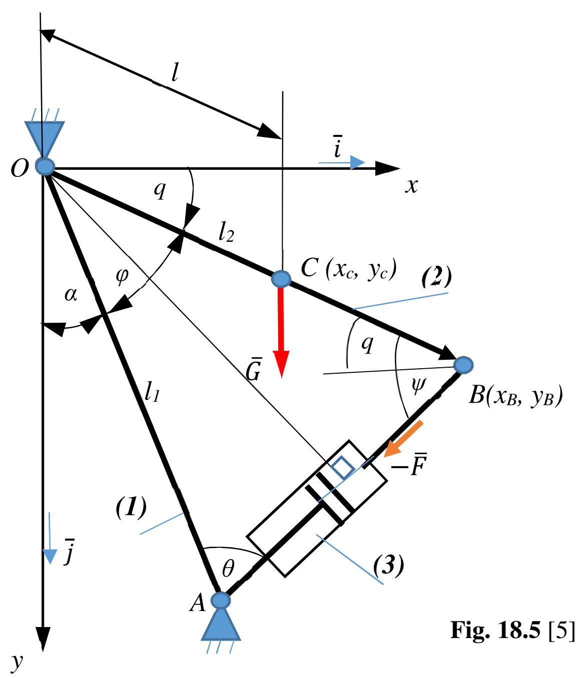


Fig. 18.5 [5].

Soluţie:

În rezolvare se pleacă de la principiul deplasărilor virtuale sub formă statică, cunoscând parametri l şi q pentru poziția de echilibru şi neglijând frecările.

Brațul robotului este considerat compatibil cu legăturile, deci $\delta q \neq 0$.

$$\delta L = \bar{G} \cdot \delta y_c + \bar{F} \cdot \delta \bar{r}_B = 0\ . \tag{1}$$

În relația (1) se fac următoarele precizări:

$$y_c = l\, sin\, q; \quad \delta y_c = l \cos q \delta q\ , \tag{2}$$

$$\bar{G} = Gcos(\psi - q)\bar{i} - Gcos(\psi - q)\bar{j}, \tag{3}$$

$$\bar{r}_B = l_2 \cos q\ \bar{i} + l_2 \sin q\ \bar{j}\ , \tag{4}$$

$$\delta \bar{r}_B = -l_2 \sin q\ \delta q\, \bar{i} + l_2 \cos q\ \delta q\, \bar{j}\ . \tag{5}$$

Înlocuind (2) și (5) în (1), se obține:

$$\delta L = \{Gl \cos q\ - Fl_2[\sin q \cos(\psi - q) + \cos q\ sin(\psi - q)]\}\delta q = 0\ . \tag{6}$$

Deoarece se consideră $\delta q \neq 0$ și ținând cont că:

$$\sin q \cos(\psi - q) + \cos q\ sin(\psi - q) = \sin \psi\ . \tag{7}$$

rezultă că

$$Gl \cos q\ - Fl_2 \sin \psi = 0\ . \tag{8}$$

Aplicând teorema sinusului în triunghiul *OAB,* rezultă unghiul ψ:

$$\frac{AB}{sin\varphi} = \frac{l_1}{sin\psi} = \frac{l_2}{sin\theta}\ ,$$

$$unde\text{: } \sin\psi = \frac{l_1 sin\varphi}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 cos\varphi}} \text{ și } \psi = \frac{\pi}{2} - (\alpha + q). \tag{9}$$

Efectuând calculele, valoarea forței *F* este:

$$F = \frac{l \cos q \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \sin(\alpha + q)}}{l_1 l_2 cos(\alpha + q)} G \ . \tag{10}$$

18.7 Probleme propuse

18.7.1. Se consideră sistemul de bare articulate din fig. 18.6 [4], [11] la care în capătul barei *AB* acţionează o forţă orizontală $\overline{P}$ (se neglijează frecarea din articulaţii), iar forțele G_1, G_2 şi *P* sunt cunoscute. Se dau dimensiunile barelor $AB = 2l$, $OA = l$. Se cere să se găsească poziţia de echilibru a sistemului folosind principiul lucrului mecanic virtual.

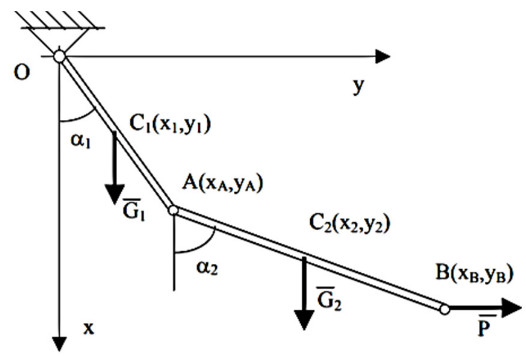


Fig. 18.6

Răspuns:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{2P}{G_1+2G_2}; \qquad tg\,\alpha_2 = \frac{P}{G_2}$$

18.7.2. Se consideră sistemul format dintr-un troliu de raze *R* şi *r* de greutate G_3, pe circumferinţele troliului fiind înfăşurate două fire inextensibile de care sunt prinse două greutăţi G_1 şi G_2 (fig. 18.7) [4]. Se presupune că troliul este omogen şi se neglijează frecările. Sistemul este lăsat liber, plecând din repaus. Se cere legea de mişcare a sistemului şi tensiunile din cele două fire folosind principiul lucrului mecanic virtual şi principiul lui D'Alembert.

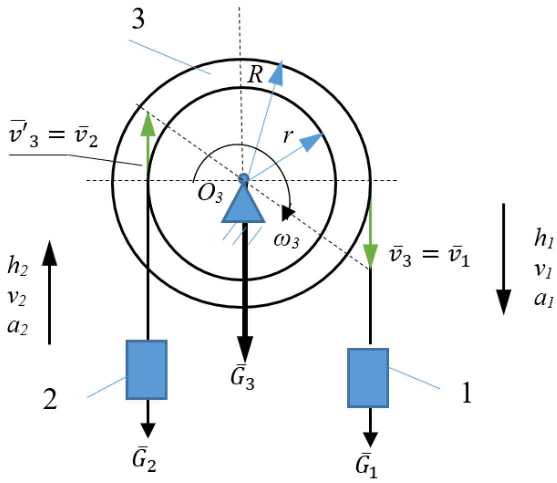


Fig. 18.7 [4]

Răspuns:

$$a_1 = \frac{G_1 - \frac{r}{R} G_2}{G_1 + \frac{r^2}{R^2} G_2 + \frac{G_3}{2}} g;$$

$$S_1 = G_1 \left(1 - \frac{a_1}{g}\right); \qquad S_2 = G_2 \left(1 + \frac{r}{R} \frac{a_1}{g}\right) \quad .$$

19. CIOCNIRI ŞI PERCUŢII[11]

Studiul ciocnirilor a apărut ca o necesitate a tehnicii, pentru că întâlnim fenomenul de ciocnire cu efectele lui faste sau nefaste atât în tehnică cât şi în viața cotidiană (fig. 19.1). Ciocnirile se regăsesc în diverse domenii ca de exemplu: chimia prin ciocnirea a doi atomi, fizica la ciocnirea a două corpuri (ciocnirea vehiculelor), astronomie prin ciocnirea a două corpuri cereşti, în tehnica industrială prin ciocnirea a două unelte sau ciocnirea unealtă - produs ca de exemplu forjă, stanță, la ciocnirea vagoanelor etc.

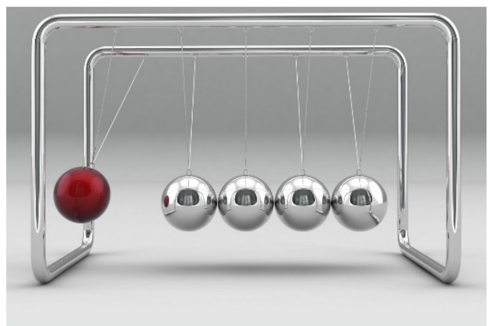


Fig. 19.1 [9a]

Din punctul de vedere a deformării corpurilor, ciocnirile se clasifică în *ciocniri plastice* şi *ciocniri elastice*. În viața reală se întâlnesc mai des ciocnirile de tipul *cvasielastice*.

În mecanica teoretică, respectiv dinamica sistemelor de puncte materiale şi solide rigide, variația vitezelor (liniare sau unghiulare) este relativ mică însă, în condițiile în care acestea au o variaţie finită mare într-un interval de timp foarte scurt (Δt) atunci apare fenomenul de *ciocnire* sau *şoc*.

Ca să se înțeleagă fenomenul de ciocnire, în cele ce urmează este necesar a se explicita noțiunile specifice acesteia, respectiv proprietățile care o caracterizează.

19.1 Forţă de percuţie. Percuţie

Se consideră un punct material *A* (fig.19.2) de masă *m*, izolat şi aparţinând unui sistem de puncte materiale aflat în mişcare.

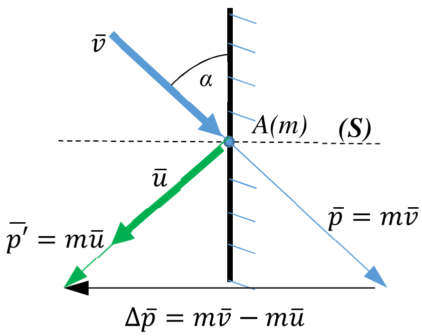


Fig. 19.2

Punctul *A* se ciocneşte de un perete fix (plastic). Dacă la începutul ciocnirii la momentul (t_1) are viteza $\bar{v}$, iar la sfârşitul ciocnirii la momentul (t_2) are viteza $\bar{u}$, se dorește analizarea forțelor care apar în timpul ciocnirii. În timpul ciocnirii asupra punctului acționează rezultanta forțelor exterioare notată cu $\bar{R}$ şi reacţiunea $\bar{R}'$ datorată peretelui. Forţa cautată se numeşte *forță de percuție (forță percutantă).*

Studiul se va face aplicând una din teoremele fundamentale ale dinamicii, respectiv teorema impulsului sub formă finită. Astfel,

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_{t_1}^{t_2}(\overline{R'} + \bar{R})dt. \tag{19.1}$$

Deoarece forţele care apar în timpul fenomenului de ciocnire sunt foarte mari într-un timp relativ scurt, se va neglija rezultanta forțelor exterioare $\bar{R} = 0$, ca având valoare mică față de forțele percutante.

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_{t_1}^{t_2}\bar{R}'dt. \tag{19.2}$$

În timpul foarte scurt cât durează ciocnirea (t_1 - t_2) valoarea forţei $\bar{R}'$creşte foarte repede la începutul ciocnirii (***faza comprimării***) şi atinge o valoare foarte mare, după care descreşte la valoarea zero (***faza destinderii***).

Astfel, se poate spune că ciocnirea are trei faze: ***faza comprimării, faza ciocnirii propriu-zise*** și ***faza destinderii.***

În continuare, se notează cu $\overline{F_m}$ forţa medie dezvoltată în intervalul de timp (t_1- t_2).

Astfel, membrul al doilea al relației (19.2) se va scrie:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R}' dt = \bar{F}_m(t_2 - t_1)\ . \tag{19.3}$$

Înlocuind (19.3) în (19.2), se obține:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{F}_m(t_2 - t_1)\ . \tag{19.4}$$

În continuare, se numeşte ***forţă de percuţie*** sau ***forţă percutantă*** acea forţă care apare în fenomenele de ciocnire, iar vectorul notat $\overline{\mathbb{P}}$ se numeşte ***percuţie***, având expresia dată de relația:

$$\overline{\mathbb{P}} = \int_{t_2}^{t_1} \bar{F} dt = \bar{F}_m\,(t_2 - t_1)\ . \tag{19.5}$$

Pentru a studia ciocnirile indiferent de tipul şi condițiile în care acestea apar, e nevoie de enunțarea câtorva ipoteze simplificatoare.

19.2 Ipoteze simplificatoare aplicate în cazul ciocnirilor

Pentru a putea studia ciocnirile, studiul acestora ar fi dificil dacă s-ar implica toți factorii care le pot influența, se recurge la câteva *ipoteze simplificatoare*:

a) Variația timpului în momentul ciocnirii este foarte mică;

b) Forțele percutante sunt foarte mari având variații rapide;

c) În studiul ciocnirilor **se neglijează** alte forțe date (greutăți, forțe elastice etc.), ținându-se cont doar de forțele care produc ciocnirea;

d) În studiul ciocnirilor **corpurile nu au mişcări** de translație, rotație sau combinații ale acestora, ele doar se deformează;

e) Pentru percuțiile forțelor de legătură se aplică principiul acțiunii și reațiunii;

f) În studiul ciocnirilor se consideră că pentru două corpuri de materiale cunoscute, **raportul** dintre componentele normale ale percuțiilor din faza de destindere $\overline{\mathbb{P}}^{initial}$ și de compresie $\overline{\mathbb{P}}^{final}$ este constant.

$$\frac{\overline{\mathbb{P}}^{initial}}{\overline{\mathbb{P}}^{final}} = k\ . \tag{19.6}$$

În relația (19.6) constanta ***k*** (se mai notează și cu ***e***) se numeşte *coeficient de restituire a percuției* sau *coeficient de elasticitate la ciocnire,* acesta având valori cuprinse între 0 – 1. Astfel:

- ***k* = 0** (la **ciocnirea perfect elastică);**
- ***k* = 1** (la **ciocnirea plastică)**
- la **ciocnire cvasielastică,** întâlnită în majoritatea cazurilor reale, coeficientul k este cuprins între $\mathbf{0 < k < 1}$.

Pentru a determina coeficientul de restituire k, se iau ca exemplu două cuburi de laturi diferite (l şi L) de mase m_1 şi m_2, cu $m_1 < m_2$ şi cu centrele de greutate O_1 şi O_2 (fig.19.3). Se analizează trei faze ale ciocnirii: *faza comprimării, faza ciocnirii propriu-zise* şi *faza destinderii.*

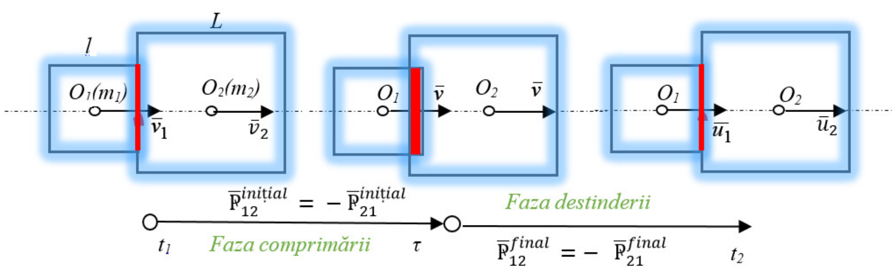


Fig. 19.3

$$\overline{\mathrm{F}}_{12}^{inițial} = -\overline{\mathrm{F}}_{21}^{inițial}$$

$$\overline{\mathrm{F}}_{12}^{final} = -\overline{\mathrm{F}}_{21}^{final}$$

Notă: În cazul <u>**ciocnirilor centrice a două sfere**</u> se definesc următoarele noțiuni:

- **Linia de ciocnire** – Normala comună la suprafețele sferelor care vin în contact în timpul ciocnirii.

- **Ciocnirea dreaptă –** Dacă vitezele punctelor de contact au aceeași direcție cu linia de ciocnire.

- **Ciocnirea oblică -** Dacă vitezele punctelor de contact au direcția înclinată la un anumit unghi față de linia de ciocnire.

Se consideră că între cuburi are loc o ciocnire *perfect plastică* şi centrică (fig.19.3) (cele două corpuri rămân în contact după ciocnire şi suporturile vitezelor centrelor de masă a cuburilor se află pe axa acestora, având mişcări de translaţie). Se cere *să se determine coeficientul de restituire plastică la ciocnire k.*

Se notează cu: $\bar{v}_1, \bar{v}_2 -$ sunt vitezele celor două cuburi înainte de ciocnire;

$\bar{u}_1, \bar{u}_2 -$ sunt vitezele celor două cuburi după ciocnire.

$\bar{\mathrm{P}}_{12}^{inițial}$ *și* $\bar{\mathrm{P}}_{21}^{inițial}$ $-$ reprezintă percuţiile interioare dintre cele două cuburi în timpul ciocnirii, în faza de comprimare;

$\bar{\mathrm{P}}_{12}^{final}$ *şi* $\bar{\mathrm{P}}_{21}^{final}$ $-$ reprezintă percuţiile interioare dintre cele două cuburi în timpul ciocnirii, în faza de destindere.

Conform principiului acţiunii şi a reacţiunii se pot scrie relațiile:

$$\bar{\mathrm{P}}_{12}^{comprimare} = - \bar{\mathrm{P}}_{21}^{comprimare}; \quad \bar{\mathrm{P}}_{12}^{destindere} = - \bar{\mathrm{P}}_{21}^{destindere}. \quad (19.7)$$

Descrierea fenomenului de ciocnire exclude momentul ciocnirii când vitezele celor două corpuri sunt egale, analizând strict faza de comprimare şi destindere.

Studiul fenomenului ciocnirii se face aplicând teorema impulsului pentru faza de comprimare şi faza de destindere. Astfel:

$$m_1 v - m_1 v_1 = -\mathrm{P}_{12}^{comprimare} = -\mathrm{P}^{comprimare}; \qquad \textit{faza de comprimare}$$

$$m_2 v - m_2 v_2 = \mathrm{P}_{21}^{comprimare} = \mathrm{P}^{comprimare};$$

$$(19.8)$$

$$m_1 u_1 - m_1 v = -\mathrm{P}_{12}^{destindere} = -\mathrm{P}^{destindere}; \qquad \textit{faza de destindere}$$

$$m_2 u_2 - m_2 v = \mathrm{P}_{21}^{destindere} = \mathrm{P}^{destindere}.$$

Viteza v se obține din relațiile (19.8) și are expresia:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \ . \qquad (19.9)$$

Expresiile percuțiilor în cazul comprimării şi destinderii cuburilor sunt:

$$\mathrm{P}^{comprimare} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \qquad \mathrm{P}^{destindere} = \frac{m_1 m_2 (u_2 - u_1)}{m_1 + m_2}. \qquad (19.10)$$

Coeficientul de restituire *k* sau *e,* având în vedere relațiile (19.8) și (19.10), se obține astfel:

$$k = \frac{\mathrm{P}^{destindere}}{\mathrm{P}^{comprimare}} = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \ . \qquad (19.11)$$

19.3 Teoreme fundamentale în cazul ciocnirilor

În cele ce urmează, se vor demonstra teoremele fundamentale ale dinamicii aplicate la ciocniri. Pentru aceasta, în figura 19.4 este reprezentat un sistem de puncte materiale, sistem supus acțiunii unui sistem de forţe exterioare percutante $\bar{F}_i^{ext}, \ i = 1 \div n$. Asupra punctului material M_i de masă m_i acţionează percuţia exterioară şi interioară notate cu $\bar{\mathrm{P}}_i^{ext}, \bar{\mathrm{P}}_i^{int}$. Pentru fiecare punct M_i se va scrie teorema impulsului obținându-se relații de forma:

$$m_i \bar{u}_i - m_i \bar{v}_i = \bar{\mathrm{P}}_i^{int} + \bar{\mathrm{P}}_i^{ext}, \qquad (19.12)$$

pe care însumându-le, conduc la:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathrm{P}}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathrm{P}}_i^{ext} \ . \qquad (19.13)$$

În relația (19.13) notațiile reprezintă:

$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i$ − este impulsul la începutul ciocnirii (la momentul t_1);

$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u}_i$ − este impulsul la sfârşitul ciocnirii (la momentul t_2).

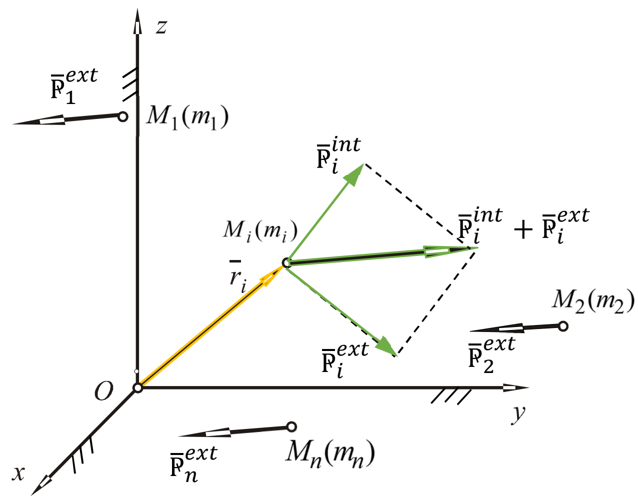


Fig. 19.4

iar percuția $\overline{\mathbb{F}}_i^{int} = 0$, deoarece forţele de percuţie interioare sunt două câte două egale şi de semn contrar.

Astfel, primii trei termeni din relaţia (19.13) sunt:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \overline{\mathbb{F}}_1 \; ; \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u}_i = \overline{\mathbb{F}}_2 \; ; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbb{F}}_i^{int} = 0. \tag{19.14}$$

Cu aceste precizări, relaţia (19.13) devine:

$$\overline{\mathbb{F}}_2 - \overline{\mathbb{F}}_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbb{F}}_i^{ext} \, . \tag{19.15}$$

S-a obținut astfel, ***prima teoremă fundamentală a ciocnirilor*** conform căreia, *variaţia impulsului unui sistem de puncte materiale în timpul unei ciocniri este egală cu suma percuţiilor exterioare care acţionează asupra acestuia.*

Ca şi ipoteză simplificatoare, se consideră că în timpul foarte scurt în care are loc ciocnirea, poziţiile punctelor materiale care formează sistemul nu se modifică.

În continuare, se înmulţeşte relaţia (19.13) cu vectorul de poziţie $\bar{r}_i$ al punctului M_i şi se însumează membru cu membru relațiile obținute. Se obține astfel relația:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{\mathrm{P}}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{\mathrm{P}}_i^{ext}, \qquad (19.16)$$

în care:

$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{K}_{01}$ – este momentul cinetic al sistemului de puncte materiale în raport cu punctul O, înainte de ciocnire;

$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{u}_i = \bar{K}_{02}$ - este momentul cinetic al sistemului de puncte materiale în raport cu punctul O, după ciocnire;

$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{P}_i^{int} = 0$ - este momentul rezultant al percuțiilor interioare, care fiind egale două câte două şi de sens contrar, plasate pe același suport, fac ca acest moment să fie nul.

Ținând seama de relațiile anterioare, relaţia (19.16) se transformă în:

$$\bar{K}_{02} - \bar{K}_{01} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{\mathrm{P}}_i^{ext}. \qquad (19.17)$$

Relaţia (19.17) reprezintă ***a doua teoremă fundamentală a ciocnirilor*** (teorema momentului cinetic). Conform acesteia, *variaţia momentului cinetic total în timpul unei ciocniri este egală cu suma momentelor percuţiilor exterioare ale sistemului de puncte, cele două momente, cinetic și rezultant al percuțiilor exterioare, fiind determinate în raport cu același punct O.*

Înmulţind relația (19.13) cu $\bar{u}_i$, se obține:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u}_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i\, \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{P}}_i^{int} \cdot \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{P}}_i^{ext} \cdot \bar{u}_i. \qquad (19.18)$$

Relația (19.18) poate fi transformată în urma unor calcule, astfel:

$$\frac{1}{2}m_i\bar{u}_i{}^2 + \frac{1}{2}m_i(\bar{u}_i - \bar{v}_i)^2 - \frac{1}{2}m_i\bar{v}_i{}^2 = \bar{F}_i^{int} \cdot \bar{u}_i + \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{u}_i; \qquad (19.19)$$

Pentru n puncte materiale:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{u}_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_i{}^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{int} \cdot \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{u}_i. \qquad (19.20)$$

În relația (19.20) se pot face următoarele precizări:

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_i{}^2 = E_{c1}$ - este energia cinetică a sistemului de puncte materiale la începutul ciocnirii;

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{u}_i{}^2 = E_{c2}$ - este energia cinetică a sistemului de puncte materiale la sfârşitul ciocnirii;

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i)^2 = E_{cp}$ - este energia cinetică a sistemului de puncte materiale corespunzătoare vitezelor pierdute;

În ipoteza în care:

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{u}_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_i{}^2 = 0$, relația (19.20) devine:

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{int} \cdot \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{u}_i = 0\,.$$

Respectiv, pentru un solid rigid cu percuțiile interioare $\bar{F}_i^{int} = 0$ și exterioare $\bar{F}_i^{ext} = 0$, precum și în absența frecărilor, se obține:

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{cp}\,. \qquad (19.21)$$

Relaţia (19.21) se aplică sistemelor de corpuri cu legături rigide (neelastice) și fără frecare și este cunoscută sub numele de ***relaţia lui Carnot*** *conform căreia, energia cinetică pierdută prin ciocnire este egală cu energia cinetică corespunzătoare vitezelor pierdute.*

Cazuri particulare ale ciocnirilor

1. **Cazul** în care $E_{c2} - E_{c1} = E_{cp}$ se întâlneşte doar în situațiile în care:

- *sistemul nu are percuţii exterioare*, iar *cele interioare corespund unor legături care nu produc lucru mecanic*;
- *sistemul este rigid,* respectiv $\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbb{F}}_i^{int} \cdot \bar{u}_i = 0$ şi *brusc i se introduce condiţia de mişcare de rostogolire fără alunecare* pentru unul sau mai multe puncte, astfel mişcarea este efectuată după curbe sau suprafeţe cu sau fără frecare.

2. Un alt ***caz particular al ciocnirilor este ciocnirea oblică.*** Pentru exemplificare, se consideră două sfere cu centrele O_1 şi O_2 de mase m_1 şi m_2 cu $m_1 < m_2$ (fig. 19.5), care au vitezele înainte de ciocnire $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Se va studia cazul în care cele două sfere se vor afla într-o ciocnire oblică, ele având unghiurile inițiale α_1 şi α_2 față de orizontala O_1O_2. Se presupune că la contactul dintre sfere nu apar forţe de frecare şi, ca urmare, nici percuţii tangenţiale astfel că percuţia interioară va avea direcţia centrelor sferelor. Se cer *vitezele sferelor după ciocnire* (fig. 19.6).

Se descompun vitezele $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ale sferelor în două componente, o componentă normală a vitezelor notate $\bar{v}_{n1}, \bar{v}_{n2}$ şi o componentă tangentială cu notațiile $\bar{v}_{t1}, \bar{v}_{t2}$, pentru fiecare sferă în parte. Astfel,

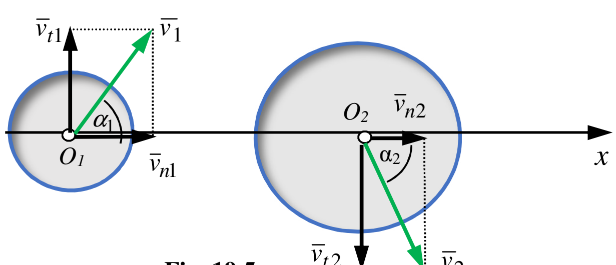


Fig. 19.5

$$v_{n1} = v_1 cos\alpha_1; \quad v_{t1} = v_1 sin\alpha_1$$

$$v_{n2} = v_2 cos\alpha_2; \quad v_{t2} = v_2 sin\alpha_2 \ . \tag{19.22}$$

Vitezele tangențiale după ciocnire se vor nota cu $\bar{u}_{t1}, \bar{u}_{t2}$ care prin ciocnire nu se modifică, aşadar:

$$u_{t1} = v_{t1}; \quad u_{t2} = v_{t2}. \tag{19.23}$$

Pentru rezolvare se va aplica *teorema impulsului la ciocniri* pentru cele două faze, respectiv faza de comprimare şi de destindere:

$$\begin{aligned} m_1 v_n - m_1 v_{n1} &= -\mathrm{P}^{comprimare}; \\ m_2 v_n - m_2 v_{n2} &= \mathrm{P}^{comprimare}; \\ m_1 u_{n1} - m_1 v_n &= -\mathrm{P}^{destindere}; \\ m_2 u_{n2} - m_2 v_n &= \mathrm{P}^{destindere} \ . \end{aligned} \tag{19.24}$$

Coeficientul de restituire la ciocnire devine:

$$e = \frac{\overline{\mathrm{P}}^{final}}{\overline{\mathrm{P}}^{initial}} \ . \tag{19.25}$$

Din relaţiile (19.24) se obţin componentele normale ale vitezelor u_{n1}, u_{n2} pentru cele două sfere după ciocnire, respectiv:

$$\begin{cases} u_{n1} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1n} + (1+e) m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} \\ u_{n2} = \frac{(m_2 - e m_1) v_{2n} + (1+e) m_1 v_{1n}}{m_1 + m_2} \end{cases} . \tag{19.26}$$

Vitezele finale după ciocnire închid unghiurile β_1 și β_2 cu direcţia O_1O_2 (fig.19.6), unghiuri ce pot fi determinate cu relaţiile:

$$tg\beta_1 = \frac{u_{t1}}{u_{n1}} \ ; \quad tg\beta_2 = \frac{u_{t2}}{u_{n2}} \quad . \tag{19.27}$$

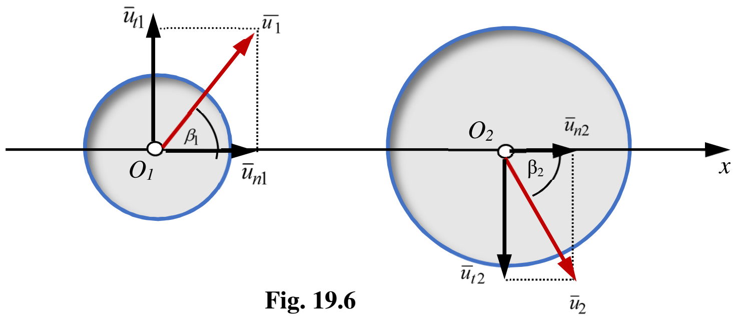


Fig. 19.6

3. Un alt *caz particular al acestei ciocniri oblice* este cazul când o sferă loveşte un perete cu viteza $\bar{v}_1$, făcând un unghi α cu normala în punctul de contact şi la care componenta $v_1 \sin\alpha$ după direcţia peretelui nu se modifică. Cealaltă componentă îşi schimbă sensul şi devine ($ev_1 \cos\alpha$). Astfel că viteza bilei după ciocnire va fi:

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 sin^2\alpha + e^2 v_1^2 cos^2\alpha} = v_1\sqrt{sin^2\alpha + e^2 cos^2\alpha} \le v_1 \,. \qquad (19.28)$$

Această viteză (u_1) după ciocnire va face cu normala peretelui unghiul β_1, obținut din relația:

$$tg\beta_1 = \frac{1}{e} tg\alpha \,. \qquad (19.29)$$

19.4 Ciocnirea unui corp cu un solid rigid aflat în mişcare de rotaţie în jurul unui ax fix şi supus unei percuţii exterioare. Centru de percuţie [11]

În cele ce urmează, se va analiza alt caz *particular al ciocnirilor* şi anume, *ciocnirea unui solid rigid aflat în mişcare de rotație în jurul unui ax fix* [11] cu un corp oarecare. Se consideră un corp *(S)* care se roteşte cu viteza unghiulară $\bar{\varpi}$ în jurul axei fixe O_1O_2, având masa M şi momentele de inerţie mecanice axiale şi centrifugale J_x, J_y, J_z şi J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}. Centrul de greutate (C) al corpului este conţinut în planul xOz. La momentul t_1 corpul este ciocnit în punctul A cu percuţia $\bar{P}_A$ (fig. 19.7). Se cer să se determine viteza unghiulară $\overline{\varpi}'$ a corpului după ciocnire, precum şi percuţiile $\overline{\mathbb{P}}_1, \overline{\mathbb{P}}_2$ din cele două articulaţii cilindrice O_1 şi O_2 . Se notează impulsul solidului rigid cu $\overline{H}$.

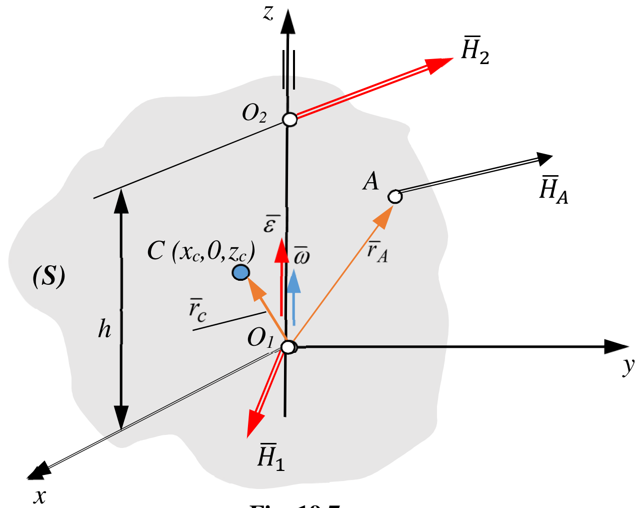


Fig. 19.7

Pentru a rezolva problema, se aplică *teorema impulsului* şi *a momentului cinetic în cazul ciocnirilor*:

$$\overline{\mathbb{P}}_2 - \overline{\mathbb{P}}_1 = \overline{H}_A + \overline{H}_1 + \overline{H}_2\ ; \tag{19.30}$$

$$\dot{\overline{K}}_{02} - \dot{\overline{K}}_{01} = \overline{r}_A \times \overline{H}_A + \overline{O_1O_2} \times \overline{H}_2\ ,$$

relații în care:

$\overline{\mathbb{P}}_2, \overline{\mathbb{P}}_1$ – sunt percuțiile date de forțele exterioare;

$\overline{H}_A, \overline{H}_1, \overline{H}_2$ – sunt impulsurile datorate mişcării.

$$\overline{H}_1 = M\overline{v}_c = M(\overline{\varpi} \times \overline{r}_c) = M \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_c & 0 & z_c \end{vmatrix} = M\omega x_c \overline{j}; \tag{19.31}$$

$$\overline{H}_2 = M\overline{u}_c = M(\overline{\omega'} \times \overline{r}_c) = M \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega' \\ x_c & 0 & z_c \end{vmatrix} = M\omega' x_c \overline{j}; \tag{19.32}$$

şi

$$\overline{H}_A = H_{Ax}\overline{i} + H_{Ay}\overline{j} + H_{Az}\overline{k};\;\; \overline{H}_1 = H_{1x}\overline{i} + H_{1y}\overline{j} + H_{1z}\overline{k};$$

$$\overline{H}_2 = H_{2x}\overline{i} + H_{2y}\overline{j} + H_{2z}\overline{k}\;. \tag{19.33}$$

Explicitând momentele cinetice ale corpurilor, se poate aplica teorema momentului cinetic la ciocniri, exprimată prin relația (19.31). Astfel,

$$\dot{\overline{K}}_{02} - \dot{\overline{K}}_{01} = \overline{r}_A \times \overline{H}_A + \overline{O_1O_2} \times \overline{H}_2. \tag{19.34}$$

$$\overline{K}_{01} = -J_{zx}\omega\overline{i} - J_{zy}\omega\overline{j} + J_z\omega\overline{k};\quad \overline{K}_{02} = -J_{zx}\omega'\overline{i} - J_{zy}\omega'\overline{j} + J_z\omega'\overline{k}; \tag{19.35}$$

$$\overline{r}_A \times H_A = \left(y_A H_{Az} - z_A H_{Ay}\right)\overline{i} + (z_A H_{Ax} - x_A H_{Az})\overline{j} + \left(x_A H_{Ay} - y_A H_{Ax}\right)\overline{k}\;; \tag{19.36}$$

$$\overline{OO_2} \times \overline{H}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & h \\ H_{2x} & H_{2y} & H_{2z} \end{vmatrix} = -hH_{2y}\overline{i} + hH_{2x}\overline{j}\;. \tag{19.37}$$

Proiecțiile ecuațiilor (19.30) și (19.34) pe axele sistemului de referință *Oxyz,* sunt:

$$H_{Ax} + H_{1x} + H_{2x} = 0;\; H_{Ay} + H_{1y} + H_{2y} = 0;\;\; H_{Az} + H_{1z} + H_{2z} = 0\;.$$

$$\begin{aligned} y_A H_{Az} - z_A H_{Ay} - hH_{2y} &= -J_{zx}(\omega' - \omega); \\ z_A H_{Ax} - x_A H_{Az} + hH_{2x} &= -J_{zy}(\omega' - \omega)\;; \\ x_A H_{Ay} - y_A H_{Ax} &= J_z(\omega' - \omega). \end{aligned} \tag{19.38}$$

Din relațiile (19.38) rezultă necunoscutele: viteza unghiulară de rotație *ω'* şi percuțiile din punctele O_1 şi O_2, în cazul în care în cel puțin unul din puncte este articulație cilindrică. În oricare alt caz, problema devine nedeterminată.

$$\omega' = \omega + \frac{x_A H_{Ay} - y_A H_{Ax}}{J_z} \;. \tag{19.39}$$

$$H_{2x} = -\frac{1}{h}\left[z_A H_{Ax} - x_A H_{Az} + J_{zy}(\omega' - \omega)\right];$$

$$H_{2y} = \frac{1}{h}\left[y_A H_{Az} - z_A H_{Ay} + J_{zx}(\omega' - \omega)\right];$$

$$H_{1x} = \frac{1}{h}\left[z_A H_{Ax} - x_A H_{Az} + J_{zy}(\omega' - \omega)\right] - H_{Ax}; \tag{19.40}$$

$$H_{1y} = -\frac{1}{h}\left[y_A H_{Az} - z_A H_{Ay} + J_{zx}(\omega' - \omega)\right] - H_{Ay} + Mx_c(\omega' - \omega);$$

$$H_{1z} + H_{2z} = -H_{Az}; \quad H_{2z} = 0; \;\; și \;\; H_{1z} = -\,H_{Az}. \tag{19.41}$$

(în cazul articulațiilor cilindrice din O_1 și O_2).

Se ridică o problemă de natură tehnică și anume că existența percuțiilor din articulațiile O_1 şi O_2 aduc uzuri ale acestora așadar, acestea trebuie eliminate, respectiv $\mathbb{P}_1 = 0$ şi $\mathbb{P}_2 = 0$. Există trei cazuri care pot fi studiate și anume:

Caz. 1 $\quad H_{Ax} = 0; \;\; H_{Az} = 0; \;\; H_{Ay} = Mx_c(\omega' - \omega)$ (19.42)

(în acest caz, există o *percuție perpendiculară pe planul determinat de axa de rotație şi centrul maselor*);

Caz. 2 $\quad J_{yz} = 0$ (19.43)

(în acest caz, *axa de rotație este axă principală de inerție pentru punctul din planul căruia aparține percuția şi aceasta axă este perpendiculară pe axa de rotație şi o intersectează*);

Caz. 3 $\quad x_A = \frac{J_z}{Mx_c}; \;\; z_A = \frac{J_{xz}}{Mx_c}; \;\; y_A - nedeterminat$ (19.44)

Punctul de aplicație al percuției exterioare trebuie să se găsească pe o dreaptă perpendiculară pe planul determinat de axa de rotație şi centrul maselor, dreaptă rezultată la intersecția planelor. În acest caz, orice punct al acestei drepte devine *centru de percuție* având coordonatele:

$$x = \frac{J_z}{Mx_c}; \quad z = \frac{J_{xz}}{Mx_c} \;. \tag{19.45}$$

19.5 Probleme rezolvate

19.5.1. O bilă de masă *m* (fig. 19.8) [11] este legată de un fir de lungime *l*. Pornind din repaus, aflată sub un unghi α și sub acţiunea greutăţii proprii, bila ciocneşte în punctul *A* o bară omogenă *OA* = *l* de masă *2m* aflată în repaus, în poziţie verticală. Coeficientul de restituire al acestei ciocniri este $e_1 = 0{,}5$.

După ciocnire, bara *OA* începe să se rotească în jurul punctului *O*, iar atunci când ajunge în poziţie orizontală, ea se ciocneşte cu un opritor fix *B* ($OB = \frac{3}{4}l$). În urma ciocnirii, înclinarea maximă a barei faţă de orizontală este β ($\alpha \neq \beta$).

Să se calculeze unghiul de înclinare maximă al firului după ciocnire, respectiv unghiul β şi coeficientul de restituire e_2, la ciocnirea barei *OA* cu opritorul din *B*.

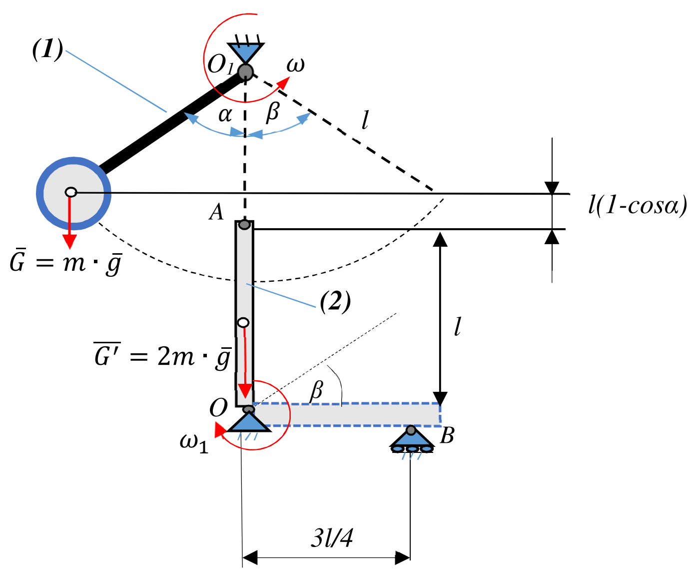


Fig. 19.8

Soluție:

Pentru bilă se notează cu:

ω' – este viteza unghiulară cu care se rotește bara din O_1 cu bila în jurul articulației O_1 după ciocnire;

v_1 – este viteza bilei înainte de ciocnire;

$u_1 = v'_1$ – este viteza bilei după ciocnire;

$v_2 = 0$ – este viteza capătului *A* al barei *OA* înainte de ciocnire (bara în repaus);

$u_2 = \omega' l$ – este viteza capătului *A* al barei *OA* după ciocnire;

$e_1 = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$ – este coeficientul de restituire la ciocnire între bilă și bara *OA*.

Aplicând *teorema energiei cinetice pentru bilă* înainte de ciocnire, rezultă:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}. \tag{1}$$

Deoarece, $E_{c2} = 0$, se obține:

$$-\frac{1}{2}mv_1^2 = -mgl(1 - cos\alpha), \tag{2}$$

de unde rezultă:

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}\ . \tag{3}$$

Plecând de la expresia coeficientului de restituire: $e_1 = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{\omega' l - v'_1}{v_1 - 0}$ (4)

și aplicând *teorema de conservare a impulsului* pentru bilă:

$$\Delta\bar{P} = 0, \quad \bar{P}_2 - \bar{P}_1 = 0\ ; \quad \text{se obține} \quad \bar{P}_2 = \bar{P}_1\ , \tag{5}$$

respectiv,

$$mv'_1 l + \frac{2ml^2}{3}\omega' = mv_1 l\ . \tag{6}$$

Din relațiile (4) și (6) se obțin viteza unghiulară și viteza bilei după ciocnire cu bara *OA*. Astfel,

$$\omega' = \frac{3v_1}{2l} = \frac{9}{10l}\sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}\ ,$$

$$v'_1 = \frac{2}{5}\sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}\ . \tag{7}$$

Pentru mişcarea bilei după ciocnire, se aplică *teorema de variaţie a energiei cinetice*.

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgl(1 - cos\beta), \text{ din care rezultă: } \beta = arccos\frac{2l + 4cos\alpha}{25}. \tag{8}$$

În relaţia (8), β - reprezintă unghiul de înclinare maxim al firului după ciocnire.

Pentru bară:

ω_1' − este viteza unghiulară cu care se rotește bara *OA* în jurul articulației *O* după ciocnire;

$v_1 = 0$ − este viteza capătului *A* al barei *OA* înainte de ciocnire;

$u_1 = \omega_1' l$ − este viteza capătului *A* al barei *OA* după ciocnire;

$v_2 = \omega_1 l$ − este viteza capătului *B* al barei *OB* înainte de ciocnire;

$u_2 = 0$ − este viteza capătului *B* al barei după ciocnire (bara se oprește);

$e_2 = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$ − este coeficientul de restituire la ciocnire între bara *OA* și bara *OB*.

Pentru rezolvare, se pleacă de la relația coeficientului de restituire:

$$e_2 = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{0 - \omega_1' l}{0 - \omega_1 l} \quad . \tag{9}$$

- Pentru determinarea vitezei unghiulare ω_1 a barei, viteză cu care se ajunge în poziție orizontală, se aplică *teorema de variație a energiei cinetice* în mișcarea de rotație:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}\,; \tag{10}$$

relație în care:

$$E_{c2} = \frac{1}{2} J_0 \omega'^2 = \frac{1}{2}\frac{2ml^2}{3}\omega'^2\,, \tag{11}$$

unde $J_0 = \frac{2ml^2}{3}$ - este moment de inerție mecanic axial al barei *OA*,

$$E_{c1} = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{2ml^2}{3}\omega_1^2\,; \tag{12}$$

$$L_{1-2} = 2mg\frac{l}{2}. \tag{13}$$

Înlocuind relațiile (11), (12) și (13) în (10), rezultă viteza unghiulară a barei înainte de ciocnire:

$$\frac{1}{2}\frac{2ml^2}{3}(\omega_1^2 - \omega'^2) = 2mg\frac{l}{2}\,, \tag{14}$$

adică,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(462 - 162cos\alpha)g}{10\sqrt{l}}}. \tag{15}$$

- Se aplică în continuare, *teorema de variaţie a energiei cinetice* între poziţia orizontală şi poziţia determinată de unghiul β a barei *OA* (poziţie în care viteza unghiulară este nulă, bara se oprește).

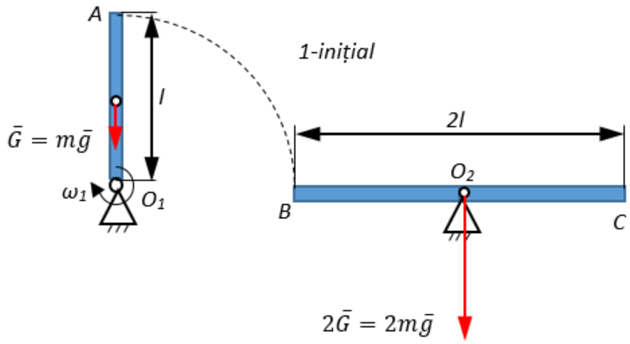
$$0 - \frac{1}{2}\frac{2ml^2}{3}\omega_1' = -2mg\frac{l}{2}sin\beta \ . \tag{16}$$

Conform relațiilor (9) și (16), după efectuarea calculelor, rezultă coeficientul de restituire la ciocnire a barei *OA* și viteza unghiulară după ciocnire:

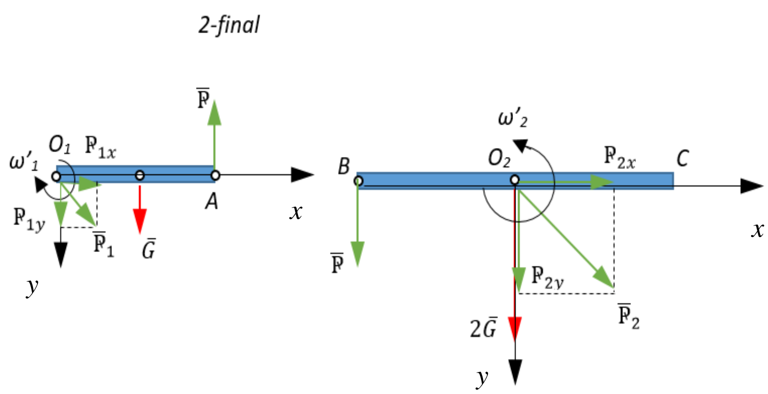
$$\omega_1' = 10\sqrt{-\frac{sin\beta}{2(77 - 27cos\alpha)}}, \tag{17}$$

$$e_2 = \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \sqrt{\frac{(462 - 162cos\alpha)g}{10\sqrt{l}}} \ . \tag{18}$$

19.5.2. O bară omogenă O_1A [11] de lungime l şi greutate $\overline{G}$, aflată în repaus, porneşte din poziţie verticală şi ciocneşte cu *A* capătul *B* al unei bare omogene *BC* de lungime $2l$ şi greutate $2G$ (fig. 19.9a), barele fiind articulate în O_1 şi O_2 . Bara *BC* este inițial în repaus în poziţie orizontală. Se cer să se determine: vitezele unghiulare după ciocnire ale celor două bare şi percuţiile din articulaţii. Coeficientul de restituire al percuţiei este $e = 2/3$.



a.



b.

Fig. 19.9

Soluţie:

- viteza ω_1 a barei O_1A în poziţie orizontală se va determina aplicând *teorema de variaţie a energiei cinetice* în mișcarea de rotație:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{1-2}\,; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Gl^2}{3g}\omega_1^2 - 0 = \frac{Gl}{2}\,; \tag{2}$$

Din (2) rezultă:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \tag{3}$$

- pentru studiul ciocnirii se izolează cele două bare, introducându-se în articulaţiile O_1 și O_2, precum şi în punctul de ciocnire $A = B$, percuţiile $\bar{P}_2, \bar{P}_1, \bar{P}$. Percuţiile sunt perpendiculare pe planul format de axa de rotaţie şi centrul de masă.

- pentru determinarea vitezelor unghiulare după ciocnire $\omega_1' \ \omega_2'$ şi a percuţiei $\bar{P}$, se va aplica *teorema de variaţie a momentului cinetic* pentru fiecare bară separat, în raport cu articulaţia proprie.

Astfel,

$$\dot{\bar{K}}_2 - \dot{\bar{K}}_1 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{P}_i \ . \tag{4}$$

Pentru bara O_1A:

$$\frac{Gl^2}{3g}(\dot{\omega}_1' - \dot{\omega}_1) = -Pl \, . \tag{5}$$

Pentru bara *BC*:

$$\frac{2G \cdot 4l^2}{12g}\dot{\omega}_2' = Pl \, , \quad \text{unde } \frac{2G \cdot 4l^2}{12g} = J_0 \ . \tag{6}$$

Coeficientul de restituire este *e* are expresia:

$$e = \frac{2}{3} = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{\omega_2' l - \omega_1' l}{\omega_1 l}. \tag{7}$$

unde: ω_1, ω_1'- sunt vitezele unghiulare ale barei O_1A înainte și după ciocnire;

ω_2' - este viteza unghiulară a barei *BC* după ciocnire.

Din sistemul de ecuații format de (5), (6) şi (7) rezultă soluțiile:

$$\omega_1' = -\frac{1}{9}\sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad \omega_2' = \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad P = \frac{10G}{27}\sqrt{\frac{3l}{g}} \ . \tag{8}$$

- Pentru determinarea *percuţiilor din articulaţiile O_1 și O_2* se aplică succesiv, *teorema de variație a impulsului* pentru fiecare bară în parte, ale cărei proiecții pe axe sunt:

Bara O_1A:

$$P_{1x} - P = G\frac{l}{2(\omega_1' - \omega_1)}; \tag{9}$$

$$P_{1y} = 0; \tag{10}$$

de unde rezultă, având în vedere (9) se obține:

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_{1x} = -\frac{5G}{27}\sqrt{\frac{3l}{g}}\ . \tag{11}$$

Percuţia $\overline{\mathbb{P}}_1$ are sens contrar axei alese *O_1x,* pentru că a rezultat cu semnul minus.

Bara *BC*: *Teorema de variație a impulsului* pentru bara BC proiectată pe axele sistemului de referință ales, devine:

$$\mathbb{P} + \mathbb{P}_{2y} = 0; \tag{12}$$

$$\mathbb{P}_{2x} = 0; \tag{13}$$

Din relațiile (9), (12) și (13), se obține:

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_{2y} = -\mathbb{P} = -\frac{10G}{27}\sqrt{\frac{3l}{g}}\ . \tag{14}$$

19.6 Probleme propuse

19.6.1. De la înălţimea H începe să cadă o bilă elastic pe pana de unghi α. Simultan pana (fig. 19.10) începe să se mişte orizontal cu acceleraţia $\bar{a}$. Să se determine intervalul de timp dintre prima şi a doua ciocnire a bilei cu pana, dacă ele au avut loc în acelaşi punct de pe suprafaţa penei.

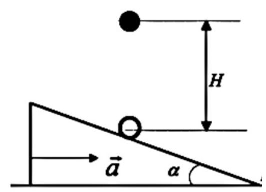


Fig. 19.10

Răspuns:

$$H' = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}cos\alpha.$$

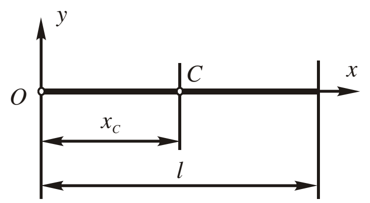
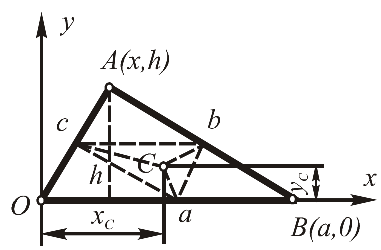
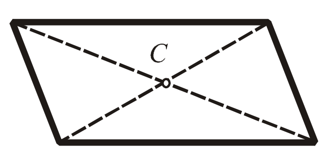
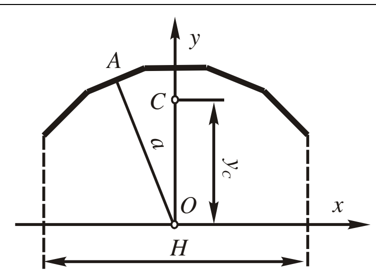
19.6.2. Două bile de mase m_1 şi m_2 ($m_1 > m_2$) se mişcă cu vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ pe orizontală până se ciocnesc. Se cunoaşte că viteza v_1 este de patru ori mai mare decât viteza v_2. După o ciocnire perfect elastică, bila m_1 se opreşte. Să se determine raportul dintre cele două mase în acest caz.

Răspuns:

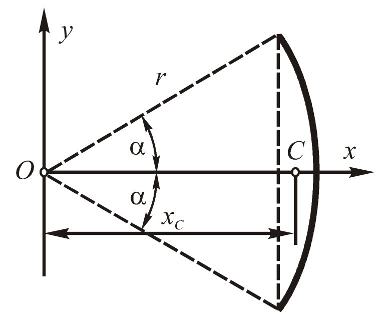
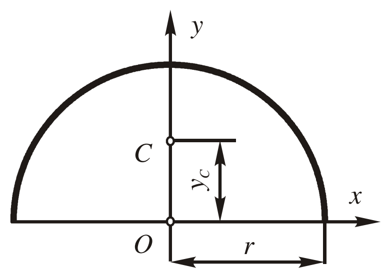
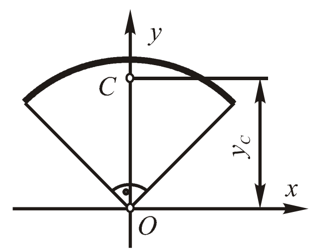
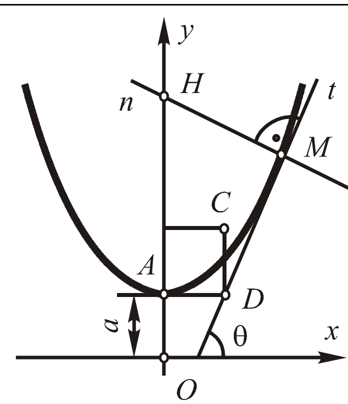
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$

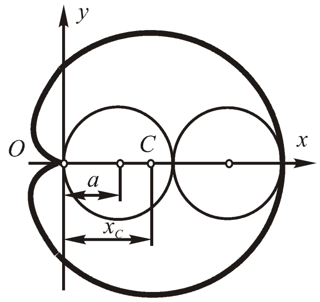
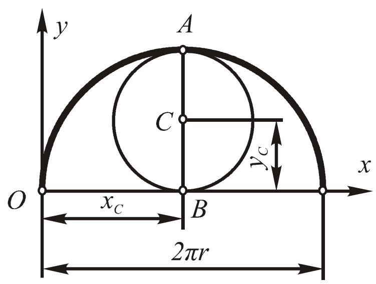
ANEXA 1. Tabel cu centrele de greutate ale diferitelor figuri şi corpuri geometrice

a. Linii omogene

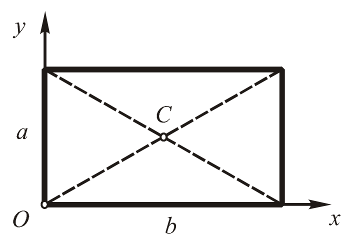
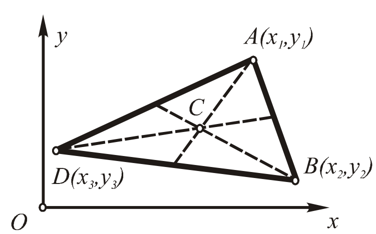
Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Linia dreaptă		$x_C = \frac{1}{2} l$
Conturul triunghiului		Intersecţia bisectoarelor triunghiului median $x_C = \frac{a(a+2b)+x(c-b)}{2(a+b+c)}$ $y_C = \frac{h}{2}\frac{b+c}{a+b+c}$
Conturul paralelogramului (dreptunghiului, rombului)		La intersecţia diagonalelor
Contur poligonal regulat		$y_C = OC = \frac{aH}{L}$ a – apotema OA H – proiecţia conturului poligonal pe axa Ox L – lungimea conturului

Anexa 1 (continuare)

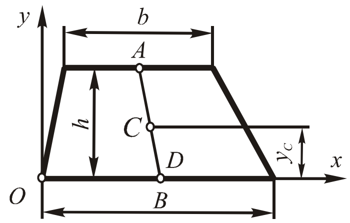
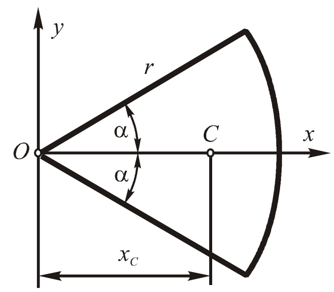
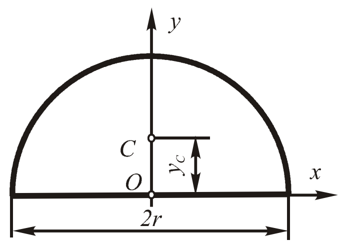
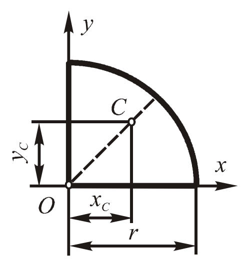
Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Arc de cerc		$x_C = OC = r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ (α în radiani)
Semicerc		$y_C = \dfrac{2r}{\pi} = 0{,}6366\ r$
Sfert de cerc		$y_C = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\ r$
Arcul de lănţişor		$x_C = AD$ $y_C = \dfrac{OH}{2}$ D – intersecţia tangentei în M cu orizontala în A H – intersecţia normalei în M cu Oy a – parametrul lănţişorului

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Cardioida	 $r = 2a(1+\cos\theta)$ - ecuația cardioidei	$x_C = \dfrac{8a}{5}$
Cicloida		$x_C = \pi r$ $y_C = \dfrac{4}{3}r$ r – raza cercului $r = \dfrac{1}{2}AB$

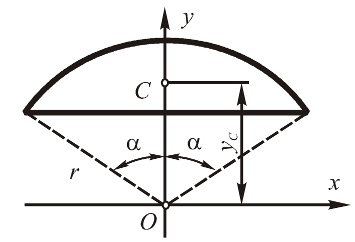
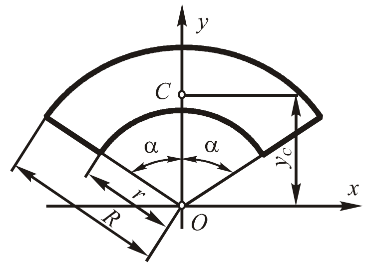
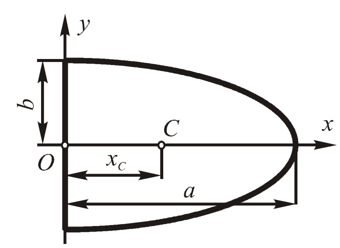
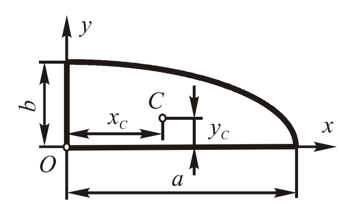
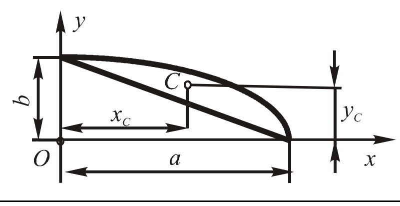
b. Suprafeţe omogene

Drep- tunghi		$x_C = \dfrac{b}{2}$ $y = \dfrac{a}{2}$
Triunghi		$x_C = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $y_C = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ C este la intersecția medianelor

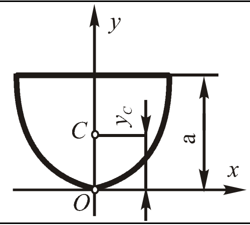
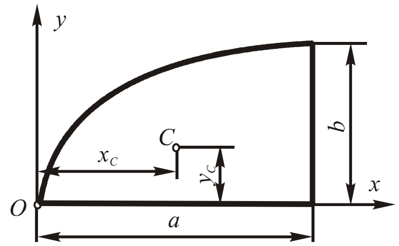
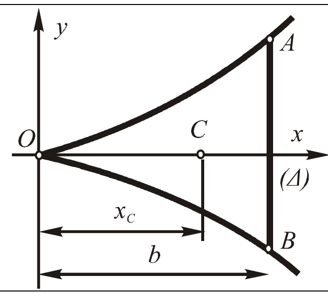
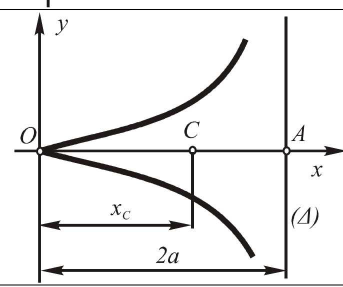
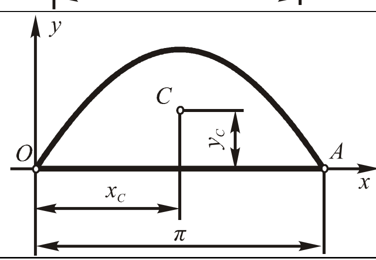
Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Trapez		$y_C = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b}$ *C* se găseşte pe segmentul *AD*, *A* şi *D* fiind mijloacele bazelor
Sector de cerc		$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (α în radiani)
Semicerc		$y_C = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244\ r$
Sfert de cerc		$x_C = \frac{4r}{3\pi}$ $y_C = \frac{4r}{3\pi}$

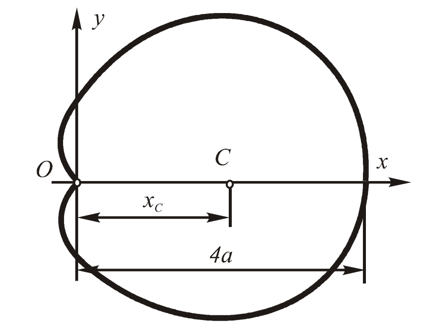
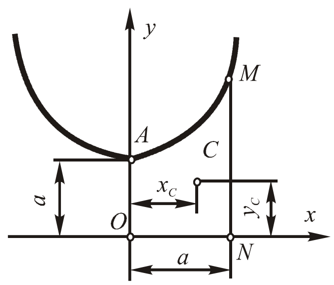
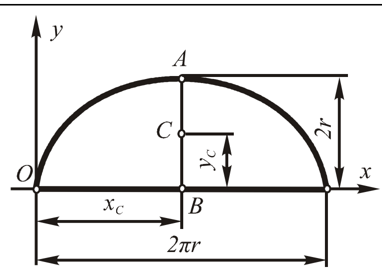
Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Segment de cerc		$y_C = \frac{4}{3}\frac{r\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$ (α în radiani)
Porţiune de coroană circulară		$y_C = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 r^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (α în radiani)
Semi-elipsă		$x_C = \frac{4a}{3\pi}$
Sfert de elipsă		$x_C = \frac{4a}{3\pi}$ $y_C = \frac{4b}{3\pi}$
Segment de elipsă		$x_C = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$ $y_C = \frac{2b}{3(\pi - 2)}$

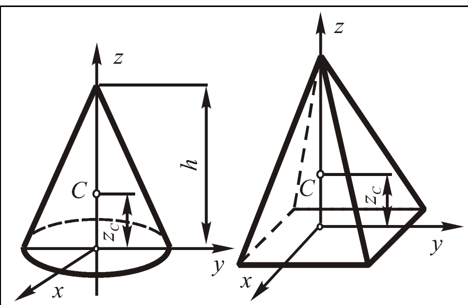
Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Parabola $y = x^2$		$y_C = \frac{3}{5}a = 0{,}6\,a$
Jumătate de parabolă		$x_C = \frac{3}{5}a$ $y_C = \frac{3}{8}b$
Parabola semicu-bică $ay^2 = x^3$ Aria suprafeţei OAB		$x_C = \frac{5}{7}b$
Cisoida		$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ $x_C = \frac{5}{3}a$ *C* este centrul de greutate al ariei suprafeţei limitată de ramurile şi asimptota ei (Δ)
Sinusoida $y = \sin x$		$x_C = \frac{\pi}{2}$ $y_C = \frac{\pi}{8}$

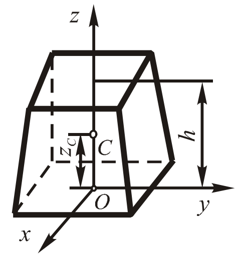
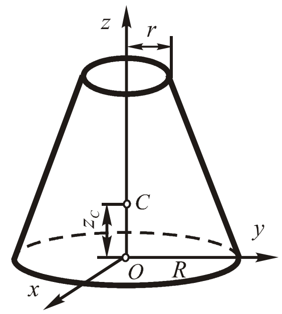
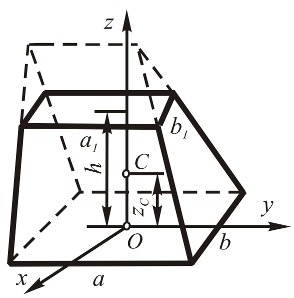
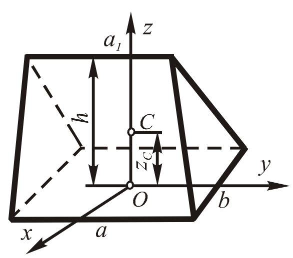
Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Cardioida		$r=2a(1+\cos\theta)$ - ecuaţia cardioidei $x_C=\dfrac{11}{6}a$
Aria suprafeţei *OAMN* a lănţişo-rului		$y=-\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $x_C=\dfrac{2a}{e+1}$ $y_C=\dfrac{a}{8}\dfrac{e^4+4e^2-1}{e(e^2-1)}$
Cicloida		$x_C=\pi r$ $y_C=\dfrac{5}{6}r$

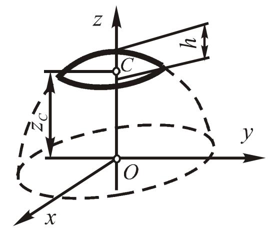
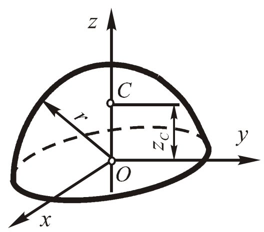
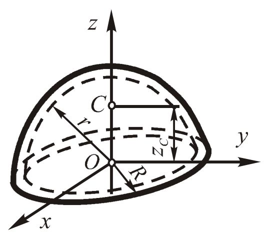
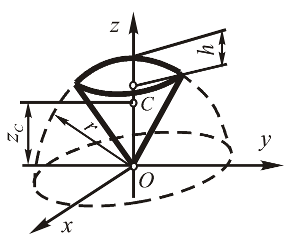
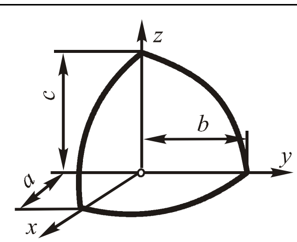
c. Volume omogene

Con şi piramidă		$z_C=\dfrac{h}{4}$

Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Trunchi de piramidă		$z_C = \frac{h}{4}\frac{S_B + 2\sqrt{S_B S_b} + 3S_b}{B + \sqrt{S_B S_b} + S_b}$ S_B - suprafaţa bazei mari S_b - suprafaţa bazei mici h - înălţimea trunchiului de piramidă
Trunchi de con circular		$z_C = \frac{h}{4}\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$
Obelisc		$z_C = \frac{h}{2}\frac{a(b+b_1)+a_1(b+3b_1)}{b(2a+a_1)+b_1(a+2a_1)}$
Pană		$z_C = \frac{h}{2}\frac{(a+a_1)}{2a+a_1}$

Anexa 1 (continuare)

Corpul, figura şi sistemul de coordonate		Coordonatele centrului de greutate
Calotă sferică		$z_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$ Formulă valabilă şi pentru elipsoidul de revoluţie de axă egală cu diametrul sferei
Emisferă		$z_C = \frac{3}{8} r$
Emisferă goală		$z_C = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$
Sector sferic		$z_C = \frac{3}{8}(2r-h)$
Elipsoid octant		$x_C = \frac{3}{8} a$ $y_C = \frac{3}{8} b$ $z_C = \frac{3}{8} c$

ANEXA 2. Tabel cu momentele de inerţie ale diferitelor figuri şi corpuri geometrice

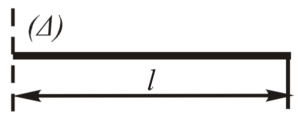
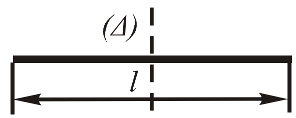
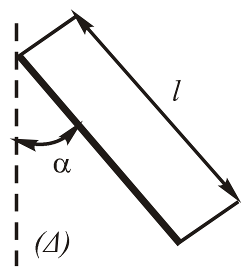
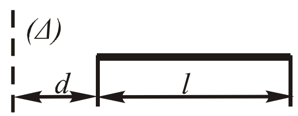
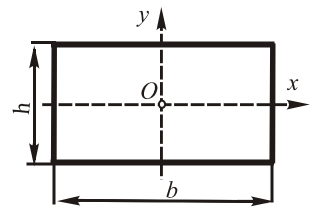
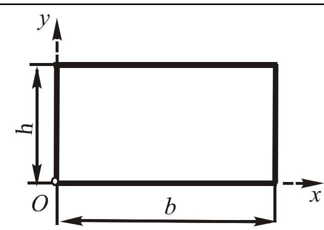
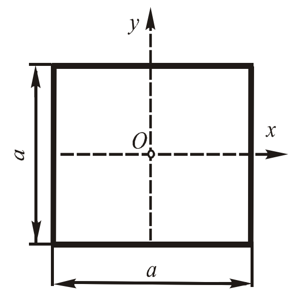
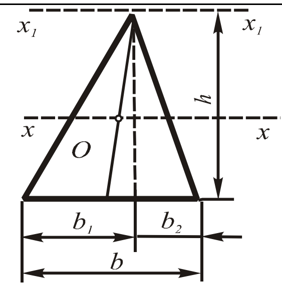
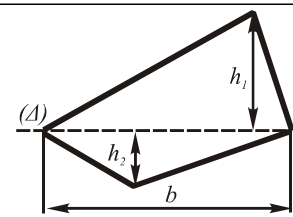
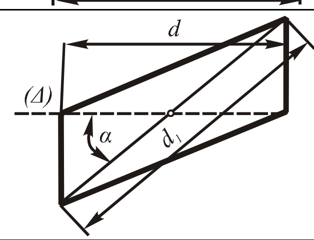
Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Linii		Axa Δ	$\frac{l^3}{3}$	$M\frac{l^3}{3}$
		Axa Δ	$\frac{l^3}{12}$	$M\frac{l^3}{12}$
		Axa Δ	$\frac{l^3}{3}\sin^2\alpha$	$M\frac{l^3}{3}\sin^2\alpha$
		Axa Δ	$\frac{l}{3}\left(3d^2+3dl+l^2\right)$	$M\left(d^2+dl+\frac{l^2}{3}\right)$

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Dreptunghi		Axa centrală Ox	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}Mh^2$
		Axa centrală Oy	$\frac{1}{12}b^3h$	$\frac{1}{12}Mb^2$
		Axa Ox	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{3}Mh^2$
		Axa Oy	$\frac{1}{3}b^3h$	$\frac{1}{3}Mb^2$
Pătrat		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{12}a^4$	$\frac{1}{12}Ma^2$
		Latura a	$\frac{1}{3}a^4$	$\frac{1}{3}Ma^2$

Anexa 2 (continuare)

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Triunghi		Baza b	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}Mh^2$
		Axa Ox	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{18}Mh^2$
		Axa Ox_1	$\frac{1}{4}bh^3$	$\frac{1}{2}Mh^2$
		Înălţimea h	$\frac{1}{12}\left(b_1^3+b_2^3\right)h$	$\frac{1}{6b}M\left(b_1^3+b_2^3\right)$
Patrulater neregulat		Axa Δ	$\frac{1}{12}b\left(h_1^3+h_2^3\right)$	$\frac{1}{6}M\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1+h_2}$
Paralelogram		Axa Δ	$\frac{1}{48}da_1^3\sin^3\alpha$	$\frac{1}{24}Md_1^2\sin^2\alpha$

Anexa 2 (continuare)

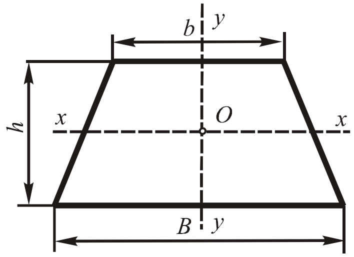
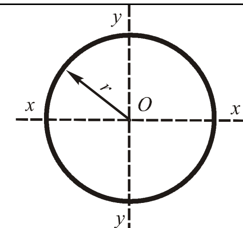
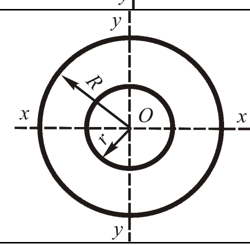
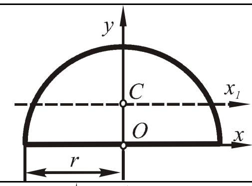
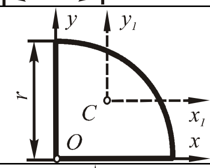
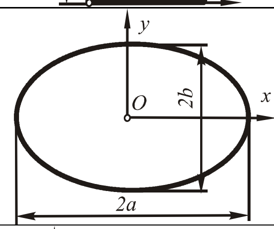
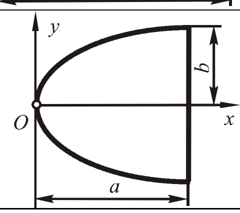
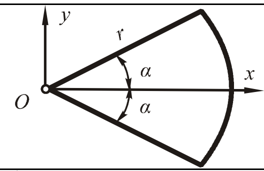
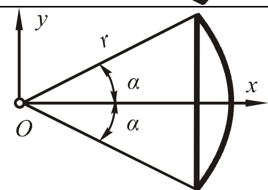
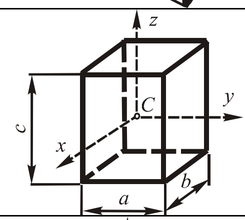
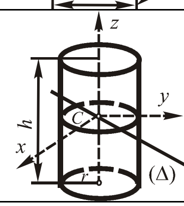
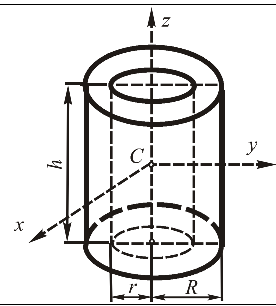
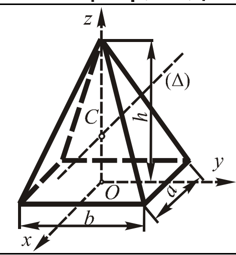
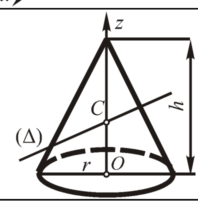
Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Trapez isoscel		Baza mare B	$\frac{1}{12}h^3(B+3b)$	$\frac{1}{6}Mh^2\frac{B+3b}{B+b}$
		Baza mică b	$\frac{1}{12}h^3(3B+b)$	$\frac{1}{6}Mh^2\frac{3B+b}{B+b}$
		Axa Ox	$\frac{1}{36}h^3\frac{B^2+4Bb+b^2}{B+b}$	$\frac{1}{18}Mh^2\frac{B^2+4Bb+b^2}{(B+b)^2}$
		Axa Oy	$\frac{1}{48}h\frac{B^4-b^4}{B-b}$	$\frac{1}{24}M\left(B^2+b^2\right)$
Cerc		Polul O	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$\frac{1}{2}M^2r$
		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{4}\pi r^4$	$\frac{1}{4}Mr^2$
Coroană circulară		Polul O	$\frac{1}{2}\pi\left(R^4-r^4\right)$	$\frac{1}{2}M\left(R^2+r^2\right)$
		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{4}\pi\left(R^4-r^4\right)$	$\frac{1}{2}M\left(R^2+r^2\right)$

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Semicerc		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{8}\pi r^4$	$\frac{1}{4}Mr^2$
		Axa Cx_1	$\pi r^4\left(\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi^2}\right)$	$Mr^2\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)$
Sfert de cerc		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{16}\pi r^4$	$\frac{1}{4}Mr^2$
		Axa Cx_1 Axa Cy_1	$r^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)$	$\frac{1}{4}Mr^2\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$
Elipsa		Axa mare Ox	$\frac{1}{4}\pi ab^3$	$\frac{1}{4}Mb^2$
		Axa mică Oy	$\frac{1}{4}\pi a^3 b$	$\frac{1}{4}Ma^2$
Parabola		Axa Ox	$\frac{4}{15}ab^3$	$\frac{1}{5}Mb^2$
		Axa Oy	$\frac{4}{7}a^3 b$	$\frac{3}{7}Ma^2$

Anexa 2 (continuare)

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Sector circular		Axa Ox	$\frac{1}{8}r^4(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4}Mr^2\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
		Axa Oy	$\frac{1}{8}r^4(2\alpha+\sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4}Mr^2\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
Segment de cerc		Axa Ox	$\frac{r^4}{8}\sin 2\alpha-\frac{4}{3}\left(\sin 2\alpha+\frac{1}{6}\sin 4\alpha\right)$	$\frac{Mr^2}{4}\left(1-\frac{1}{6}\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right)$
		Axa Oy	$\frac{1}{8}r^4\left(2\alpha-\frac{1}{2}\sin 4\alpha\right)$	$\frac{Mr^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right)$
Paralelipiped		Axa Cx	$\frac{1}{12}abc\left(b^2+c^2\right)$	$\frac{1}{12}M\left(b^2+c^2\right)$
		Axa Cy	$\frac{1}{12}abc\left(c^2+a^2\right)$	$\frac{1}{12}M\left(c^2+a^2\right)$
		Axa Cz	$\frac{1}{12}abc\left(a^2+b^2\right)$	$\frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$
Cilindru		Axa Cz	$\frac{1}{2}\pi r^2 h$	$\frac{1}{2}Mr^2$
		Axa Cx Axa Cy Axa Δ	$\frac{1}{12}\pi r^2 h\left(3r^2+h^2\right)$	$\frac{1}{12}M\left(3r^2+h^2\right)$

Anexa 2 (continuare)

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Cilindru gol		Axa Cz	$\frac{1}{2}\pi h\left(R^4 - r^4\right)$	$\frac{1}{2}M\left(R^2 + r^2\right)$
		Axa Cx Axa Cy	$\frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)h}{4}\cdot$ $\cdot\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$	$\frac{1}{12}M\left(3R^2 + 3r^2 + h^2\right)$
Piramidă dreptunghiu-lară		Axa Oz	$\frac{1}{60}abh\left(a^2 + b^2\right)$	$\frac{1}{20}M\left(a^2 + b^2\right)$
		Axa Δ	$\frac{1}{60}abh\left(b^2 + \frac{3h^2}{4}\right)$	$\frac{1}{80}M\left(4b^2 + 3h^2\right)$
Con circular drept		Axa Oz	$\frac{1}{10}\pi r^4 h$	$\frac{3}{10}Mr^2$
		Axa Δ	$\frac{1}{20}\pi r^2 h\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right)$	$\frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right)$

Anexa 2 (continuare)

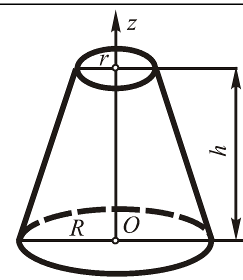
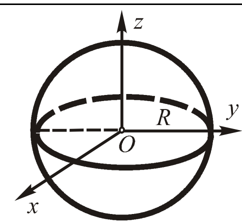
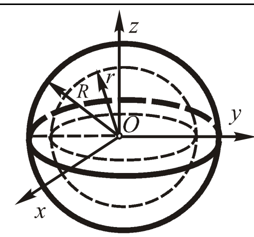
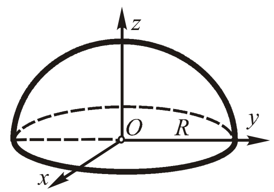
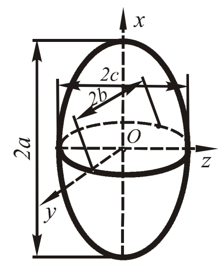
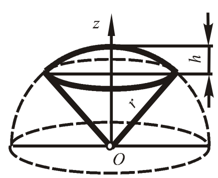
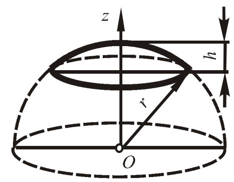
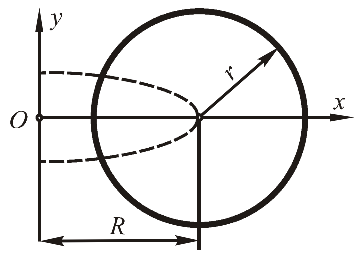
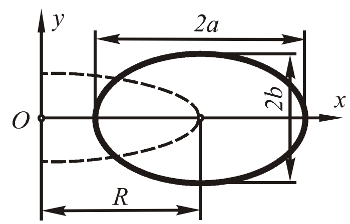
Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Trunchi de con		Axa z	$\frac{1}{10}\pi h\frac{R^5-r^5}{R-r}$	$\frac{3}{10}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
Sferă		Polul O	$\frac{4}{5}\pi R^5$	$\frac{3}{5}MR^2$
		$I_x=I_y=I_z$	$\frac{8}{15}\pi R^5$	$\frac{2}{5}MR^2$
		Tangenta	$\frac{28}{15}\pi R^5$	$\frac{7}{5}MR^2$
Sferă goală		Polul O	$\frac{4}{5}\pi\left(R^5-r^5\right)$	$\frac{3}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
		Axa x Axa y	$\frac{8}{15}\pi\left(R^5-r^5\right)$	$\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Emisferă		Axa Ox Axa Oy Axa Oz	$\frac{4}{15}\pi R^5$	$\frac{2}{5}MR^2$
Elipsoid		Polul O	$\frac{4}{15}\pi abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$	$\frac{1}{5}M\left(a^2+b^2+c^2\right)$
		Axa Ox	$\frac{4}{15}\pi abc\left(b^2+c^2\right)$	$\frac{1}{5}M\left(b^2+c^2\right)$
		Axa Oy	$\frac{4}{15}\pi abc\left(a^2+c^2\right)$	$\frac{1}{5}M\left(a^2+c^2\right)$
		Axa Oz	$\frac{4}{15}\pi abc\left(a^2+b^2\right)$	$\frac{1}{5}M\left(a^2+b^2\right)$
Sector sferic		Axa Oz	$\frac{2}{15}\pi r^2h^2(3r-h)$	$\frac{1}{5}Mh(3r-h)$

Anexa 2 (continuare)

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Segment de sferă		Axa *Oz*	$\frac{1}{30}\pi h^3\left(20r^2 - 15rh + 3h^2\right)$	$\frac{Mh}{10}\cdot\frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r - h}$
Tor circular		Axa *Oy*	$\frac{1}{2}\pi^2 Rr^2\cdot\left(4R^2 + 3r^2\right)$	$\frac{1}{4}M\left(4R^2 + 3r^2\right)$
		Axa *Ox*	$\frac{1}{4}\pi^2 Rr^2\cdot\left(4R^2 + 5r^2\right)$	$\frac{1}{8}M\left(4R^2 + 5r^2\right)$
Tor eliptic		Axa *Oy*	$\frac{1}{2}\pi^2 Rab\cdot\left(4R^2 + 3a^2\right)$	$\frac{1}{4}M\left(4R^2 + 3a^2\right)$
		Axa *Ox*	$\frac{1}{4}\pi^2 Rab(4R^2 + 3a^2 + 2b^2)$	$\frac{1}{8}M\left(4R^2 + 3a^2 + 2b^2\right)$

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan, Şt., *Culegere de probleme de mecanică,* Editura Tehnică Bucureşti, 1964.

2. Bălan, Şt., *Probleme de mecanică,* Ediţia a III-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.

3. Fodor G., Cristea A.F., *Mecanică Aplicată*. *Lucrări de laborator*, Cluj-Napoca, ed. UTPRESS, 2019.

4. Huidu Teodor, Marin Cornel, *Probleme rezolvate de mecanică*, Ed. Macarie, 2001, ISBN 973 - 8135 - 60 – 5, pg. 261.

5. Ispas, V., Popa L., Bălan B., Arghir M., *Mecanică teoretică*. *Dinamică*, Atelierul de Multiplicare a Institutului Politehnic, Cluj-Napoca, 1989.

6. Ispas, V. ş.a., *Mecanica*, Editura Dacia, 1997.

7. Ispas, V., Detesan, O.A., *Probleme de mecanica*, EDP, București, 2006.

8. Ispas, V., Deteşan, O. A., Petrişor, S. M., *Mecanică- Statică*, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2007.

9. Ispas, V., Pop, A. F., *Probleme de mecanică*. *Cinematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2009.

10. Ispas, V., Deteşan O. A., Pop (Cristea) A. F. *Probleme de Mecanică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2010.

11. Itul Tiberiu Pavel, Haiduc Nicolae, *Mecanică*, Ed. UTPress, Cluj-Napoca 2012, ISBN 978-973-662-704-0, pg. 309.

https://ro.scribd.com/doc/48166013/Probleme-rezolvate-de-Mecanica-II-Itul-Haiduc (accesate 28 octombrie 2024)

12. Itul T. P., Fodor G., *Mecanică*, *Statică, Cinematică, Dinamică*, Ed. UTPress, Cluj-Napoca 2014, ISBN 978-973-662-965-5.

13. Luca D., Stan C., *Mecanică Clasică*, Editura Alexandru Myller, ISBN (10) 973-86987-7-4; ISBN (13) 978-973-86987-7-4 517.9, pg. 350, 2007.

14. Lefter C. G., *Ecuații diferențiale şi sisteme dinamice*, Editura Alexandru Myller Iaşi, p. 102, 2006 (https://www.math.uaic.ro/~lefter/lefter-files/edsd.pdf - accesată ianuarie 2023).

15. J. Mahecha, Mecanica Clasica Avanzada, DOI: 10.13140/RG.2.1.2009.0006, Edition: 1, Publisher: Universidad de Antioquia, Editor: Editorial Universidad de Antioquia, ISBN: ISBN: 958-655-847-9, 2006.

16. Meshcheksky, I.V., *Collection of Problems in Theoretical Mechanics*, Moscow, 1960.

17. Popescu, P., Bălan, B., *Mecanica*, Atelierul de multiplicare al Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1971.

18. Negrean I. şi alții, *Mecanică Teoretică. Teorie şi Aplicații*, Ed. Utpress, Cluj-Napoca, 2012.

19. Popescu, P. ş.a., *Culegere de probleme de mecanică tehnică. Statica,* Atelierul de multiplicare al Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1978.

20. Precupeanu A., *Bazele analizei matematice*, editura CANOVA, pp.530, ISBN/COD:973-96099-6-1, 1995.

21. Ripianu, A., ş.a., Mecanică tehnică. Cinematică. Culegere de probleme, Atelierul de multiplicare al Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1986.

22. Sarian, M., ş.a., *Probleme de mecanică*, Ediţia a II-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

23. Sima, P., *Culegere de probleme de mecanică tehnică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

24. Stan, A., Grumăzescu, M., *Mecanică tehnică. Culegere de probleme*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1953.

25. Stoenescu, A., Ripianu, A., Atanasiu, M., *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

26. Tudosie, C., *Mecanică teoretică*, Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, 1972.

27. Ţiţeica, Gabriela., *Probleme de mecanică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

28. Ursu-Fischer N. , *Elemente de mecanică analitică*, Ed. Casa Cărții de Ştiință, Cluj-Napoca, 2015, ISBN 978-606-17-0820-8.

29. Vâlcovici, V., Bălan, Şt., Voinea, R., *Mecanica teoretică,* Ediţia a II-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

30. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V., *Mecanica,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[1a] https://biblioteca.utcluj.ro/files/carti-online-cu-coperta/501-5.pdf, (imagine_accesat octombrie 2024);

[2a] https://mobmob.ro/preturi/sistem-de-dus-incastrat-rune-bento-gold, (imagine_accesat octombrie 2024);

[3a] https://www.google.com/search?q=mecanisme+in+miscare+de+translatie&tbm=isch&ved=2ahUKEwipjaXatJTzAhUI_aQKHbcPCtkQ2-cCegQIABAA&oq=mecanisme+in+miscare+de+translatie&gs_lcp=CgNpbWcQAzoICAAQgAQQsQM6CwgAEIAEELEDEIMBOgUIABCABDoECAAQQzoGCAAQCBAeOgQIABAeUMiGB1jQwAdg8cQHaABwAHgAgAHGAYgBtRqSAQUyMi4xMpgBAKABAaoBC2d3cy13aXotaW1nwAEB&sclient=img&ei=FhdMYamqF4j6kwW3n6jIDQ&bih=603&biw=1229&rlz=1C1CAFA_enRO777RO777#imgrc=iRFQrHFHme8wFM, (imagine_accesat octombrie 2024);

[4a] https://pixabay.com/ro/illustrations/search/rotor/, (accesat octombrie 2024);

[5a] https://www.aliexpress.com/item/1005001280427033.html?dp=261591-156683.1099553&aff_fcid=0d7ee500e2d3473dae43f7b7e83a708f-1632380090894-09894&aff_fsk&aff_platform=api-new-product-detail&sk&aff_trace_key=0d7ee500e2d3473dae43f7b7e83a708f-1632380090894-09894&terminaccessed62596da3Januarydccec7c9c7a687d, (imagine_accesat octombrie 2024);

[6a] http://www.quarq.ro/experiment/referat_model.pdf (imagine_ accesat octombrie 2024);

[7a] https://sites.google.com/site/cursdemecanica/capitolul-8-aplicatii-ale-staticii-in-tehnica/8d (imagine_accesat octombrie 2023);

[8a] https://view.livresq.com/view/5f5ced50582a6801661d6799/ (imagine_ accesat octombrie 2024).

[9a] https://www.descopera.org/perpetuum-mobile-de-ce-nu-functioneaza/ (imagine_accesat 30 octombrie 2024).