

Raluca GÂLGĂU
Mircea ORTELECAN



GEODEZIE ELIPSOIDALĂ



U.T.PRESS
Cluj- Napoca, 2025
ISBN 978-606-737-771-2

Raluca GÂLGĂU

Mirecea ORTELECAN

GEODEZIE ELIPSOIDALĂ



U.T.PRESS

Cluj - Napoca, 2025

ISBN 978-606-737-771-2



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Prof.dr.ing. Ioel Vereş
Conf.dr.ing. Sanda Mărioara Naş

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2025 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-771-2

PREFAȚĂ

Geodezia, știința care se ocupă cu determinarea formei și dimensiunilor Pământului, a cunoscut o dezvoltare spectaculoasă în ultimele decenii, odată cu perfecționarea tehnologiilor de observare și cu introducerea metodelor numerice avansate. Modelarea elipsoidală a Pământului a devenit o etapă esențială în majoritatea aplicațiilor geodezice moderne, de la măsurători terestre de înaltă precizie la sistemele globale de poziționare (GNSS).

Lucrarea de față, dedicată geodeziei elipsoidale, își propune să ofere un cadru teoretic solid și coerent pentru înțelegerea fenomenelor și relațiilor matematice care guvernează măsurătorile pe un elipsoid de rotație. Cartea este structurată într-o manieră progresivă, pornind de la conceptele introductive și istorice, trecând prin elemente fundamentale precum sistemele de coordonate, razele de curbură, arcele elementare, până la metodele de reducere a observațiilor și soluționarea problemelor geodezice fundamentale.

Fiecare capitol a fost conceput pentru a răspunde atât cerințelor academice, cât și nevoilor practice ale studenților, cercetătorilor și specialiștilor din domeniu. În cuprinsul lucrării sunt tratate teme esențiale, cum ar fi:

- utilizarea elipsoidului de referință și parametrizarea sa matematică;
- coordonatele geodezice și transformările aferente;
- calcule de suprafețe și volume pe elipsoid;
- teoria liniei geodezice;
- corecțiile geodezice în raport cu suprafața elipsoidului;
- metodele de rezolvare a triunghiurilor elipsoidice și a problemelor inverse.

Această lucrare își propune nu doar să transmită cunoștințe, ci și să stimuleze gândirea critică și capacitatea de aplicare a noțiunilor teoretice în contexte practice și de cercetare.

Mulțumesc tuturor colegilor și studenților care au oferit feedback în fazele inițiale ale redactării și sper ca această carte să devină un instrument util și valoros în formarea profesională și cercetarea geodezică.

Autorii

CUPRINS

PREFAȚĂ.....	2
CAPITOLUL 1.	5
INTRODUCERE ÎN GEODEZIE.....	5
1.1. Definiția și obiectivele geodeziei.....	6
1.2. Istoria geodeziei: de la modelul sferic la cel elipsoidal	10
1.3. Suprafețe de referință.....	12
1.4 Unități de măsură utilizate în geodezie	24
1.5 Domenii de aplicare ale geodeziei elipsoidale	34
1.6 Importanța modelării precise a Pământului.....	36
CAPITOLUL 2.	40
ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ.....	40
2.1 Parametrii elipsoidului de rotație. Legături între parametri.....	41
2.2 Modele de elipsoizi utilizate în geodezie.....	43
CAPITOLUL 3.	49
SISTEME DE COORDONATE UTILIZATE ÎN GEODEZIA ELIPSOIDALĂ	49
3.1 Sistemul de coordonate geografice	49
3.2 Sistemul de coordonate geodezice.....	50
3.3 Sistemul de coordonate carteziene tridimensionale (XYZ).....	51
3.4 Sistemele de coordonate locale topocentrice	52
3.5 Sistemele de referință globale și locale	52
CAPITOLUL 4.	54
RAZELE DE CURBURĂ.....	54
4.1 Secțiunea meridiană sau Raza mică de curbura (M).....	54
4.2 Secțiunea primului vertical sau Raza mare de curbura (N)	56
4.3 Raza de curbura a unei secțiuni normale oarecari în funcție de razele de curbura principale și azimutul geodezic A	57
4.4 Raza de curbura medie Gauss	58
CAPITOLUL 5.	61
ARCE ELEMENTARE	61
5.1 Lungimea arcului de meridian.....	62
5.2 Lungimea arcului de paralel	68
CAPITOLUL 6.	71
CALCULUL ARIILOR ȘI VOLUMELOR PE ELIPSOID	71
6.1 Aria totală a elipsoidului	71

6.2 Volumul total al elipsoidului.....	71
6.3 Aria unui trapez pe elipsoid	72
CAPITOLUL 7.....	74
SECȚIUNI NORMALE PE ELIPSOID	74
7.1 Linia geodezică	77
7.2 Caracteristicile liniei geodezice	78
7.3 Utilizarea liniei geodezice în geodezie și cartografie	78
7.4 Poziția liniei geodezice față de secțiunile normale reciproce.....	78
7.5 Corecția de reducere la linia geodezică	80
7.6 Calculul liniei geodezice.....	82
7.7 Importanța liniei geodezice	84
CAPITOLUL 8.	85
REDUCEREA OBSERVAȚIILOR GEODEZICE PE SUPRAFAȚA ELIPSOIDULUI DE REFERINȚĂ	85
8.1 Reducerea observațiilor azimutale	87
8.2 Corecția datorată deviației verticalei	89
8.3 Reducerea determinărilor astronomice pe elipsoidul de referință	93
CAPITOLUL 9.	96
PROBLEME GEODEZICE FUNDAMENTALE	96
9.1 Problema geodezică directă.....	97
9.2. Problema geodezică inversă	101
CAPITOLUL 10.	116
REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE ELIPSOIDICE MICI.....	116
10.1 Generalități.....	116
10.2 Excesul sferic al unui triunghi elipsoidal mic	117
10.3 Metoda Soldner (Aditamentelor).....	119
10.4 Metoda Legendre (dezvoltării în serie)	121
BIBLIOGRAFIE.....	125

CAPITOLUL 1.

INTRODUCERE ÎN GEODEZIE

Primele idei ferm documentate despre geodezie datează de la Thales din Milet (c.625-c.547 î.Hr.), Anaximandru din Milet (c.611-c.545 î.Hr.) și școala lui Pitagora (c.580-c.500 î.Hr.). Printre studenții greci ai geodeziei s-au numărat Aristotel (384-322 î.Hr.), Eratostene (276-194 î.Hr.) – prima determinare rezonabil de precisă a dimensiunii pământului, dar luată în serios abia 17 secole mai târziu – și Ptolemeu (c.75-151 d.Hr.). În Evul Mediu, lipsa de cunoaștere a dimensiunii reale a pământului l-a determinat pe Toscanelli (1397-1482) la faimoasa sa interpretare greșită a lumii (Figura 1), care l-ar fi atras pe Columb în prima sa călătorie spre vest.

La scurt timp după aceea, a început epoca de aur a explorării și, odată cu ea, utilizarea determinării poziției prin mijloace astronomice. Întinderea reală a lumii a fost dezvăluită, pentru a fi fost aproape de predicția lui Eratostene, iar oamenii au început să caute îmbunătățiri cantitative suplimentare ale modelului lor conceptual al pământului. Acest lucru a dus la noi măsurători pe suprafața pământului de către un olandez Snellius (în 1610) și un francez Picard (în 1670) și prima îmbunătățire a rezultatelor lui Eratostene. Cititorul interesat poate găsi detalii fascinante despre cele mai vechi evenimente geodezice în [Berthon și Robinson, 1991]. Cam în același timp, noțiunea de gravitație a pământului a început să se formeze prin eforturile olandezului Stevin (1548-1620), italienilor Galileo (1564-1642) și Borelli (1608-1679), englezului Horrox (1619-1641), culminând cu teoria gravitației a lui Newton (1642-1727). Teoria lui Newton a prezis că globul pământului ar trebui să fie ușor oblat din cauza rotirii pământului în jur axa sa polară. Un francez Cassini (1625-1712) a contestat această predicție; în consecință, Academia Franceză de Științe a organizat două expediții, în Peru și în Laponia, sub conducerea lui Bouguer și Maupertuis, pentru a măsura două arcuri meridiene.

Rezultatele au confirmat validitatea predicției lui Newton. În plus, aceste măsurători ne-au dat prima definiție a unui metru, ca o parte a zece milionime din cadranul pământului. Timp de două sute de ani, de la mijlocul secolului al XVIII-lea, geodezia a cunoscut o creștere fără precedent în aplicarea sa. Determinarea poziției prin mijloace terestre și astronomice a fost necesară pentru realizarea hărților și acest serviciu a fost furnizat în mod natural de geodeziști, iar imaginea unui geodezist, ca fiind doar un furnizor de poziții, a supraviețuit în unele cercuri până astăzi. Între timp, evoluția geodeziei ca știință a continuat cu contribuții ale lui LaGrange

(1736-1813), Laplace (1749-1827), Fourier (1768-1830), Gauss (1777-1855) – susținut de unii geodeziști ca fiind adevăratul fondator al științei geodezice, Bessel (1784-1846), Coriolis (1792-1843), Stokes (1819-1903), Poincaré (1854-1912) și Albert Einstein. Pentru o descriere a acestor contribuții, [Vaníček și Krakiwsky, 1986, Secțiunea 1.3]

1.1. Definiția și obiectivele geodeziei

Conform etimologiei grecești, cuvântul Geodezie γεωδαισία sau *geodaisia* (literal, „diviziunea Pământului”) sau a împărți Pământul. Marele geodez german F.R. Helmert (F.R. Helmert, 1884) a definit Geodezia ca fiind: "știința măsurării și reprezentării suprafeței Pământului".

Geodezia este o știință matematică a Pământului care se ocupă cu măsurarea și reprezentarea geometriei, studiul formei, gravitatea și orientarea spațială a Pământului în format 3D care variază temporal.

Geodezia este o știință interdisciplinară care utilizează măsurători spațiale și aeriene de la distanță și de la sol pentru a studia forma și dimensiunea Pământului, a planetelor și a sateliților lor și a schimbărilor lor; să definească cu precizie poziția și viteza punctelor sau obiectelor de la suprafață sau care orbitează planeta, într-un sistem de referință terestru realizat, și să aplice aceste cunoștințe la o varietate de aplicații științifice și ingineresti, folosind matematica, fizica, astronomia și informatica." (M. Lemmens, 2011).

Potrivit conținutului problemelor de care se ocupă, geodezia se împarte în:

- **geodezia fizică**—studiază câmpul gravitației și figura pământului, necesare pentru definirea unor suprafețe de referință și a sistemelor de coordonate;
- **geodezia elipsoidală** – studiază suprafața elipsoidului, ca suprafață matematică, precum și metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafața elipsoidului de referință;
- **geodezia geometrică clasică sau poziționarea geodezică (triangulația geodezică)** – se ocupă cu proiectarea și materializarea în teren a rețelelor geodezice, cu metodele și instrumentele folosite la efectuarea observațiilor în rețele geodezice, precum și cu prelucrarea observațiilor efectuate în rețele;
- **astronomia geodezică de poziție** - are ca scop determinarea directă a coordonatelor geografice a punctelor, folosind metodele astronomice;
- **geodezia spațială** - tratează probleme legate de folosirea observațiilor simultane ale sateliților artificiali, dintr-una sau mai multe stații, sau a observațiilor

fotografice, laser, Doppler, în scopul determinării parametrilor orbitelor sateliților artificiali, determinării coordonatelor stațiilor într-un sistem unic de coordonate, determinarea figurii, forme și a câmpului gravific terestru etc.

Rezolvarea problemei fundamentale a geodeziei și anume determinarea forme și dimensiunilor Pământului se poate realiza prin următoarele metode:

- metode geometrice, care constau din măsurători de arce de meridian și paralele, măsurători complexe în rețele de triangulație, trilateratie și poligonometrie în scopul deducerii parametrilor de bază care definesc suprafața de referință;
- metode dinamice (fizice) care se ocupă cu determinarea accelerației gravitației și a variației acestuia, în scopul determinării suprafeței de nivel a câmpului gravitațional al pământului;
- metode astrono-geodezice și cu sateliți artificiali ai Pământului, care au ca scop determinarea directă a coordonatelor geografice ale punctelor geodezice și respectiv determinarea coordonatelor geocentrice ale punctelor de stație și ale sateliților.

Obiectivele Geodeziei

Obiectivele geodeziei pot fi împărțite în mai multe categorii, în funcție de domeniile de aplicare:

1. Determinarea forme și dimensiunilor Pământului

- Măsurători globale: Estimarea și modelarea forme generale a Pământului (elipsoid sau geoid).
- Stabilirea parametrilor elipsoidului de referință: Rază ecuatorială, rază polară, grad de aplatizare.
- Reprezentarea geoidului: Descrierea suprafeței echipotențiale a câmpului gravitațional care corespunde nivelului mediu al mării.

2. Studiul câmpului gravitațional al Pământului

- Analiza variațiilor gravitaționale: Studiarea variațiilor locale și globale ale gravitației pentru a înțelege structura internă a Pământului.
- Aplicarea în geofizică: Identificarea zonelor de masă anormală (de exemplu, bazine oceanice, munți) și relația cu structura tectonică.

3. Stabilirea unui sistem global de referință

- Coordonate spațiale: Definirea unui sistem coerent de coordonate (latitudine, longitudine, altitudine) pentru întreaga suprafață a Pământului.
- Geodezie satelitară: Utilizarea sateliților (ex. GPS, GLONASS, Galileo) pentru a determina poziții precise pe suprafața Pământului.
- Sisteme de referință internaționale: Dezvoltarea și întreținerea unor sisteme precum WGS84, ITRF, utilizate la nivel global pentru navigație, cartografie și alte aplicații.

4. Monitorizarea și gestionarea schimbărilor globale

- Mișcări tectonice: Studiul deplasării plăcilor tectonice și al activității seismice.
- Schimbări climatice: Monitorizarea variațiilor nivelului mării, retragerii ghețarilor și a altor fenomene legate de schimbările climatice.
- Deformări ale scoarței terestre: Observarea efectelor vulcanismului, cutremurelor și altor procese naturale asupra suprafeței Pământului.

5. Sprijinirea cartografiei și infrastructurii geospațiale

- Cartografiere precisă: Crearea și întreținerea hărților topografice și tematice.
- Sisteme de informații geografice (GIS): Asigurarea datelor geodezice pentru infrastructuri geospațiale utilizate în urbanism, agricultură, transport și alte domenii.
- Planificare și construcții: Stabilirea reperelor geodezice pentru proiecte de inginerie civilă, construcții și cadastru.

6. Geodezia aplicată

- Navigație și transport: Furnizarea coordonatelor exacte pentru transport terestru, aerian și maritim.
- Exploatarea resurselor naturale: Determinarea poziției și delimitării resurselor naturale (ex. petrol, gaze, minerale).
- Aplicații militare: Sprijinirea operațiunilor militare prin determinarea poziției exacte și a câmpului gravitațional.

7. Dezvoltarea și utilizarea tehnologiilor avansate

- Teledetecție: Utilizarea datelor din sateliți și senzori pentru observații globale ale suprafeței Pământului.
- Interferometrie radar: Studiarea deformărilor la scară milimetrică a suprafeței terestre.
- Integrarea datelor: Utilizarea algoritmilor avansați pentru combinarea datelor geodezice, gravitaționale și topografice.

Geodezia are un rol central în înțelegerea Pământului și în dezvoltarea infrastructurilor globale. Prin realizarea acestor obiective, contribuie la avansarea cunoștințelor științifice și la soluționarea unor probleme practice în multiple domenii.

Geodezia elipsoidală

Geodezia elipsoidală este știința care stabilește parametri geometrici și ecuațiile parametrice ale elipsoidului de referință (suprafața matematică cu ajutorul căreia se asimilează suprafața Pământului) și de asemenea studiază metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafața elipsoidului considerat.

Geodezia elipsoidală este acea parte din geodezie care se ocupă cu studiul suprafeței elipsoidale de rotație, de referință, a suprafeței fizice a Pământului, precum și cu determinarea riguroasă a formei și dimensiunilor suprafeței matematice curbe a Pământului.

În cadrul geodeziei elipsoidale este cuprinsă și studierea suprafeței elipsoidului în general, ca suprafață matematică, pentru a obține fundamentarea metodelor de rezolvare a problemelor geodezice. De menționat, de asemenea, că în mod obișnuit, rezolvările pe elipsoid au în vedere numai coordonatele geodezice, urmând ca determinarea altitudinilor să fie realizată în mod separat. Această separare, dintre determinările de φ și λ pe de o parte și de H^e pe de altă parte, a fost condiționată în special de dificultățile care caracterizează utilizarea în bloc a unghiurilor zenitale și respectiv a unghiurilor (direcțiilor) orizontale, distanțelor ș.a. Cele două categorii de măsurători geodezice sunt influențate în mod diferit de fenomenul de refracție atmosferică și, ca urmare, au precizii și domenii de utilizare diferite.

Numeroase lucrări elaborate în ultimele decenii și probabil și încă multe altele din deceniile care vin, repun și vor repune în discuție posibilitățile concrete de elaborare a unor *rețele geodezice tridimensionale*, a căror prelucrare să permită elaborarea simultană, în mod unitar, a celor trei coordonate φ , λ , H^e , care descriu poziția punctelor pe suprafața Pământului.

Din considerente de ordin didactic expunerea din manual se va opri la cazul curent întâlnit în practica geodezică, de separare a așa-numitei *probleme planimetrice* de *problema altitudinii*, prin care se determină poziția punctelor geodezice. Se înțelege că noțiunea de *problemă planimetrică* este improprie, deoarece se operează cu coordonatele geodezice φ și λ , care se referă la suprafața elipsoidului de referință și nu la un plan oarecare.

Inconsecvența poate fi acceptată deoarece transcalcularea coordonatelor φ și λ în coordonate plane nu reprezintă dificultăți deosebite.

Pentru a face legătură cu literatura de specialitate, din alte țări, trebuie menționat că, deși studiază aceleași probleme, geodezia elipsoidală, este întâlnită sub denumirea de **geodezie matematică** (Jordan W. și Eggert O. 1958), **geodezie geometrică** (Heiskanen W. și Moritz H. 1967) și **geodezie sferoidală** (Zakatov 1976).

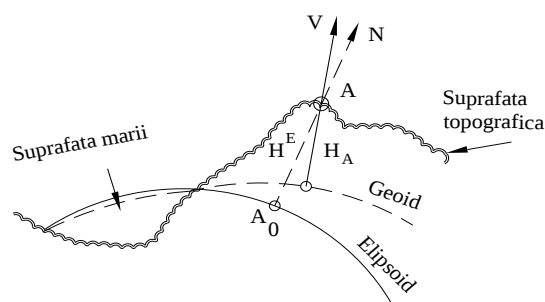


Fig.1.1. Secțiune prin suprafața topografică

1.2. Istoria geodeziei: de la modelul sferic la cel elipsoidal

Geodezia este știința care se ocupă cu studiul formei, dimensiunilor și câmpului gravitațional al Pământului. Dezvoltarea acestei științe a fost marcată de trecerea de la utilizarea modelului sferic al Pământului la cel elipsoidal, o evoluție esențială pentru înțelegerea exactă a formei și mărimii planetei noastre.

1.2.1 Modelul Sferic

- **Antichitatea:** În cele mai vechi timpuri, Pământul era considerat plat. Primele idei despre forma sferică a Pământului au apărut în Grecia antică. Pitagora (sec. VI î.Hr.) și Aristotel (sec. IV î.Hr.) au susținut ideea că Pământul este sferic, bazându-se pe observații astronomice și fenomene naturale.

- Eratostene (sec. III î.Hr.): A fost primul care a calculat circumferința Pământului folosind măsurători ale umbrei și unghiurilor solare. El a presupus că Pământul are o formă perfect sferică.
- Evul Mediu: În această perioadă, ideea Pământului sferic a fost menținută în Europa, deși a fost contestată în unele regiuni.

1.2.2 Trecerea de la sferă la elipsoid

- Descoperirile din perioada modernă timpurie:
- Începând cu secolul XVII, oamenii de știință au început să observe că modelul sferic nu explica complet toate fenomenele naturale. Măsurătorile distanțelor și observațiile gravitaționale sugerau că Pământul nu este o sferă perfectă.
- Isaac Newton (1687) a teoretizat, în lucrarea sa Principia Mathematica, că Pământul este un elipsoid aplatizat la poli, datorită forței centrifuge generate de rotația sa.
- Primele măsurători geodezice:
- În secolul XVIII, expediții științifice organizate în Franța și Peru (Ecuador) au confirmat ipoteza lui Newton. Măsurătorile arătau că meridianele aveau lungimi diferite, iar Pământul este mai aplatizat la poli decât la ecuator.
- Aceste măsurători au condus la adoptarea unui model elipsoidal pentru descrierea formei Pământului.

1.2.3. Dezvoltarea geodeziei moderne

- Elipsoidul de referință:
- În secolul XIX, geodezia a progresat datorită dezvoltării instrumentelor de măsurare și a matematicii avansate. Elipsoidul a devenit modelul de bază folosit pentru reprezentarea formei Pământului.
- Elipsoidul de referință este un model matematic idealizat al Pământului, definit prin parametri precum raza ecuatorială și gradul de aplatizare.
- Măsurători globale:
- În secolul XX, utilizarea sateliților și a tehnologiilor GPS a permis obținerea de date mult mai precise despre forma și dimensiunile Pământului. Aceste

măsurători au demonstrat că Pământul are o formă neregulată, denumită geoid, care se abate de la modelul elipsoidal.

1.2.4. Modelul Geoidului și Utilizarea Modelului Elipsoidal

- Geoidul: Reprezintă suprafața echipotențială a câmpului gravitațional al Pământului, care corespunde nivelului mării extins în întreaga lume. Geoidul este o reprezentare mai exactă a formei Pământului, însă datorită complexității sale, elipsoidul continuă să fie utilizat pentru aplicații practice.
- Sisteme moderne:
- În prezent, elipsoidul este utilizat ca referință pentru sisteme de coordonate globale, cum ar fi WGS84 (folosit de GPS).
- Comparativ, modelul geoidului este folosit pentru analize detaliate ale câmpului gravitațional și pentru corecțiile altimetrice.

Trecerea de la modelul sferic la cel elipsoidal reprezintă o etapă crucială în dezvoltarea geodeziei, permițând o reprezentare mult mai precisă a formei și dimensiunilor Pământului. Această evoluție a fost posibilă datorită progresului tehnologic și științific și rămâne fundamentală pentru aplicațiile moderne în navigație, cartografie și studii geofizice.

1.3. Suprafețe de referință

Reprezentarea suprafeței Pământului, cu neregularitățile deosebit de variate pe care le prezintă, nu se poate realiza fidel, ci doar prin intermediul unor generalizări, bazate pe anumite legi sau convenții, astfel încât suprafața considerată să fie cât mai apropiată de realitate.

Din punct de vedere geometric, suprafața fizică a Pământului (fig.1.1.) este neregulată. și se numește suprafață topografică. Pe această suprafață se execută toate măsurătorile geodezice care, în vederea calculelor și a reprezentării suprafeței pe planul de proiecție, se reduc la suprafața elipsoidului de referință.

Un punct situat pe suprafața fizică a Pământului este supus la acțiunea a două forțe principale: forța centrifugă, datorită rotației Pământului în jurul axei sale, și forței de atracție terestră. Rezultanta acestor forțe principale, la care trebuie să adăugăm și forțele de atracție ale altor planete, este o forță denumită *gravitate* sau greutate, a cărei direcție este dată de poziția firului cu plumb, după care se realizează întotdeauna calarea instrumentelor geodezice.

Această primă direcție fundamentală din natură, la care se referă orice măsurătoare geodezică, trebuie luată în considerare la adoptarea și folosirea diferitelor sisteme de referință.

*Suprafața construită astfel încât să fie perpendiculară, în oricare din punctele sale, pe direcția gravitației, se numește, **suprafață de nivel**.* (Clairaut și Laplace).

Din infinitatea acestor suprafețe de nivel cea mai importantă o constituie geoidul.

Geoidul

Având în vedere că 2/3 din suprafața Pământului este acoperită de ape, iar cota medie a uscatului este de aproximativ 700 m, neglijabilă în raport cu raza Pământului (6371 km), forma generală a Pământului este dată de suprafața apelor oceanelor și mărilor, în stare liniștită, prelungită imaginar pe sub continente. Această suprafață poartă numele de geoid (denumire introdusă de I.B.Listing în 1873) și reprezintă suprafața de nivel zero, față de care se determină înălțimile punctelor.

Geoidul reprezintă o suprafață de nivel care are proprietatea că în orice punct al său direcția forței de greutate, dată de firul cu plumb, este perpendiculară pe această suprafață. Deoarece, direcțiile forței de greutate depind și de acțiunea atracției maselor dispuse neregulat în interiorul Pământului, rezultă, că din punct de vedere geometric, forma suprafeței geoidului este foarte complicată și nu poate fi considerată ca o suprafață matematică pe care să se execute diferite calcule în vederea rezolvării unor probleme geodezice.

Geoidul este în esență figura Pământului extrasă de caracteristicile sale topografice. Este o suprafață de echilibru idealizată a apei de mare, suprafața nivelului mediu al mării în absența curenților și a variațiilor de presiune a aerului și a continuat sub masele continentale. Spre deosebire de un elipsoid de referință, geoidul este neregulat și prea complicat pentru a servi drept suprafață de calcul pentru rezolvarea problemelor geometrice precum poziționarea punctului. Separarea geometrică dintre geoid și un elipsoid de referință se numește *ondulație geoidală* și variază global între ± 110 m pe baza elipsoidului GRS 80.

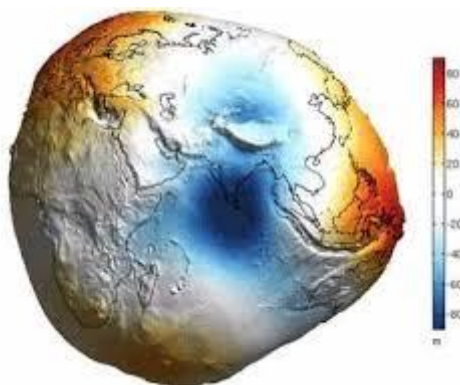


Fig. nr. 1.2 Geoidul

Geoidul reprezintă forma reală a Pământului, este o figură echipotențială, perpendiculară în orice punct al ei la direcția accelerației gravitaționale adică la verticala locului dată de firul cu plumb.

Geoidul este definit ca fiind suprafața nivelului mediu al mărilor și oceanelor în repaus, extins pe sub continente, la care se raportează verticala locului.

În concluzie, suprafața geoidului este neregulată datorită eterogenității masei Pământului, denivelărilor scoarței terestre și curenților oceanici. În acest sens este necesar ca geoidul să fie definit față de o figură geometrică cât mai apropiată de forma lui, acesta este elipsoidul de rotație.

Elipsoidul

În urma cercetărilor teoretice și a prelucrării datelor obținute prin măsurători astrono-geodezice, s-a constatat că cea mai apropiată figură matematică de geoid este elipsoidul de rotație.

Pe baza măsurărilor graduale, executate în vederea determinării elipsoidului Krasovski, s-a constatat că Pământul este de fapt un elipsoid triaxial, care are, pe lângă turtirea de la pol, o turtire la ecuator, la longitudinea vestică de 15.4^0 . Acest lucru face ca ecuatorul să nu mai fie un cerc ci, o elipsă care are între semiaxe sale o diferență de $69,5 \pm 0.8\text{m}$.

Utilizarea elipsoidului triaxial ar complica foarte mult calculele geodezice și cartografice, motiv pentru care Pământul este considerat un elipsoid biaxial. Pentru lucrările geodezice pe suprafețe mici, în vederea simplificării calculelor, Pământul poate fi aproximat cu o sferă de rază medie.

În (fig.1.1) sunt prezentate cele trei suprafețe amintite mai sus: suprafața topografică, geoidul și elipsoidul. Se constată că, în zona mărilor și oceanelor elipsoidul se situează deasupra geoidului, iar în zona uscatului se găsește sub geoid.

Un elipsoid este o suprafață matematică care este folosită pentru a aproxima forma Pământului. Este definită ca mulțime de puncte astfel încât suma distanțelor de la punct la două puncte fixe, numite focare, este o constantă.

Elipsoidul este un corp obținut prin rotația unei elipse, adică un fel de sferă turtită la poli și bombată la ecuator. Este mai ușor de folosit, de exemplu în proiecțiile cartografice, deoarece suprafața sa este "mai dreaptă", nu prezintă denivelări ca geoidul. Așadar, elipsoidul de rotație este o formă a Pământului calculată matematic, nu este forma reală. Parametrii care definesc un elipsoid de rotație sunt:

- semiaxa mare (raza ecuatorială),
- semiaxa mică (raza polară),
- turtirea,
- excentricitatea,
- raza de curbură polară.

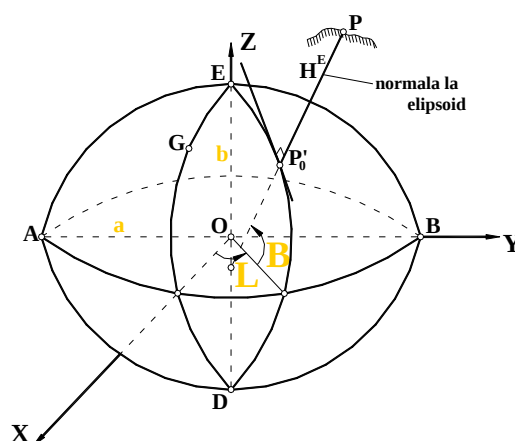


Fig. nr. 1.3. Elipsoid de rotație

Măsurătorile efectuate în vederea determinării dimensiunilor unui elipsoid de referință cât mai apropiate de cele ale geoidului, au dat valori în concordanță cu numărul de măsurători și distribuția lor pe suprafața Pământului precum și cu nivelul științei și tehnicii la data respectivă.

După opiniile unor geodezi, nepotrivirile în înălțime dintre geoid și elipsoidul determinat și poziționat în corpul Pământului poate să ajungă până la 100-150m. Trebuie menționat, că abaterea suprafeței terestre față de geoid este mult mai mare și este dată de cotele absolute ale punctelor suprafeței fizice ale terenului.

Neconcordanțele existente între suprafețele menționate nu pot fi neglijate și de aceea, trebuie să se țină seama de nesuprapunerea acestor suprafețe. Din această cauză, datele măsurate direct pe suprafața topografică vor fi proiectate pe suprafața elipsoidului de referință, prin aplicarea corecțiilor aferente. După proiectarea datelor geodezice (unghiuri, lungimi, diferențe de nivel) pe suprafața de referință se poate face prelucrarea matematică riguroasă, prin care se determină coordonatele unor puncte poziționate pe suprafața topografică, proiectate pe suprafața de referință.

Suprafața de referință care aproximează cel mai bine suprafața geoidului și a cărei axă de rotație coincide cu axa de rotație a Pământului, iar centrul său geometric coincide cu centrul

de masă a Pământului se numește **elipsoid terestru general**. Acest elipsoid are o valoare de principiu, o noțiune teoretică, fiind limita către care tind determinările concrete ale elipsoizilor de referință.

În decursul timpului, diverși geodezi au determinat diferite serii de valori ale dimensiunilor elipsoidului de referință.

În tabelul 1.1 sunt date câteva din rezultatele cele mai importante ale dimensiunilor elipsoizilor de referință.

Tabelul 1.1

Denumirea elipsoidului de referință	Anul	Semiaxa mare “ a ” (km)	Turtirea “ f ”	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6.377,39715	1:299,1528	1873-1916
Clarke	1880	6.378,243	1:293,465	1916-1930
Hayford	1909	6.378,388	1:297,0	1930-1951
Krasovski	1940	6.378,245	1:298,3	1951-
WGS 84	1984	6.378,137	1:298,257223563	1992-

Cvasigeoidul

Cvasigeoidul este utilizat de multe țări ca suprafață de referință pentru altitudini, sistemul de altitudini care utilizează această suprafață ca referință este sistemul de altitudini normale.

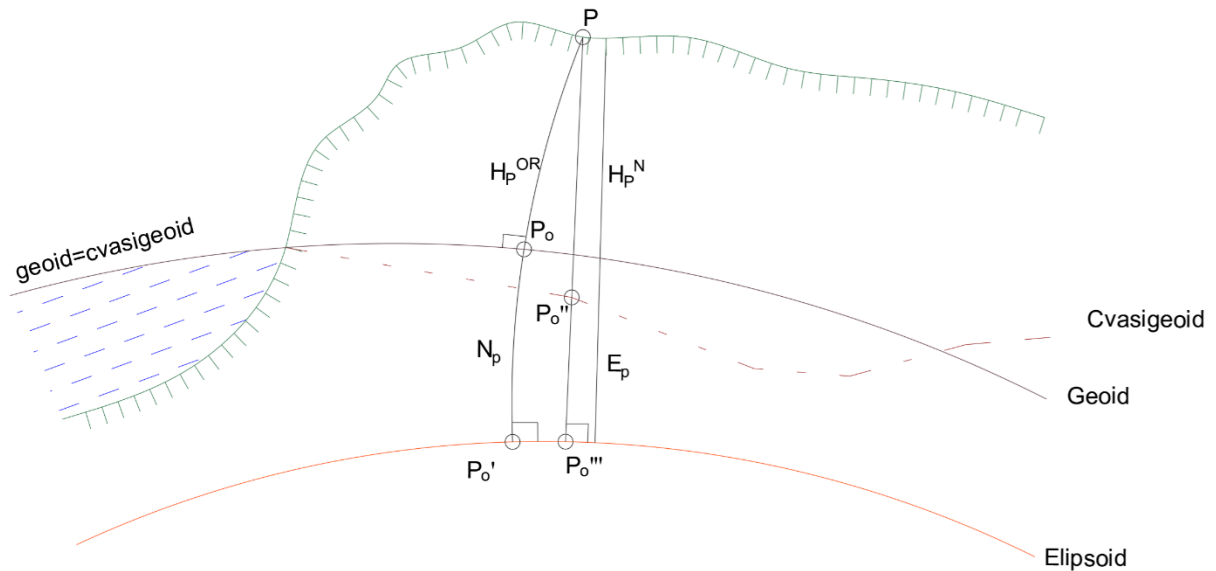


Fig. nr. 1.4 Legătura geoid-elipsoid-cvasigeoid

Toate observațiile geodezice se efectuează pe suprafața fizică a Pământului, care datorită faptului că nu poate fi definită matematic, nu poate fi utilizată ca atare în calculi. Funcție de scopul urmărit, de precizia impusă, suprafața terestră se aproximează cu diverse figuri care pot fi, mai mult sau mai puțin, descrise matematic: geoid, cvasigeoid, elipsoid de rotație, sferă, teluroid. Observațiile efectuate sunt raportate la verticala locului.

Cvasigeoidul este suprafața astfel construită încât segmentul de normală la elipsoid să fie egal cu anomalia altitudinii în orice punct în care se cunoaște această valoare.

Cvasigeoidul este o suprafață teoretică utilizată în geodezie pentru a descrie forma Pământului în raport cu nivelul mediu al mării, însă cu un grad mai mare de detaliu și adaptare pentru aplicații locale. El este folosit pentru a corela mai bine datele topografice și altimetrice în raport cu câmpul gravitațional al Pământului. Este o aproximare mai simplă a geoidului, dar este mai utilă pentru anumite aplicații practice.

Cvasigeoidul este definit ca fiind o suprafață echipotențială a câmpului gravitațional al Pământului, dar diferă de geoid prin modul în care ia în considerare distanțele verticale. În timp

ce geoidul este strict legat de nivelul mediu al mării extins pe toată suprafața globului, cvasigeoidul folosește o metodă de calcul mai simplă care poate fi mai eficientă în anumite aplicații regionale sau naționale.

Caracteristici principale

1. Relația cu geoidul:
 - Cvasigeoidul este o suprafață apropiată de geoid, dar definită matematic într-un mod care o face mai ușor de utilizat pentru măsurători și calcule altimetrice.
 - Diferența dintre cvasigeoid și geoid este de ordin milimetric sau centimetric și depinde de complexitatea reliefului și de distribuția densității în interiorul Pământului.
2. Reprezentare gravitațională:
 - Reprezintă o suprafață pentru care potențialul gravitațional al Pământului este constant.
 - Este folosit pentru a converti altitudinile elipsoidale (obținute din GPS) în altitudini normale, care sunt utilizate în cartografie și inginerie.
3. Simplificare regională:
 - Cvasigeoidul este utilizat mai frecvent în aplicații regionale, unde precizia ridicată a modelului geoidului nu este necesară, dar trebuie menținută o corelație gravitațională bună.

Utilizări ale cvasigeoidului

1. Transformarea altitudinilor elipsoidale:
 - Sistemele globale, cum ar fi GPS, oferă altitudini în raport cu un elipsoid de referință (ex. WGS84). Pentru aplicații practice, aceste altitudini trebuie convertite în altitudini normale sau ortometrice, ceea ce se face utilizând cvasigeoidul.
2. Cartografie națională:
 - În multe țări, cvasigeoidul este folosit pentru sistemele de referință altimetrică națională, deoarece acesta poate integra mai bine datele topografice locale.
3. Proiecte de inginerie civilă:
 - Cvasigeoidul ajută la stabilirea precisă a înălțimilor pentru proiecte precum construcția de drumuri, căi ferate, baraje și alte infrastructuri.

4. Aplicații regionale și locale:
 - Cvasigeoidul este adaptat pentru regiuni mai mici, oferind o soluție mai practică decât un model geoid global, care poate fi prea complex.

Relația între elipsoid, geoid și cvasigeoid

- Elipsoidul de referință: O suprafață matematică simplificată, utilizată ca bază pentru sistemele de coordonate globale (ex. WGS84).
- Geoidul: O reprezentare fizică a formei Pământului, care urmează nivelul mediu al mării și este influențată de distribuția maselor interne.
- Cvasigeoidul: O aproximare matematică a geoidului, optimizată pentru calcule altimetrice și aplicații regionale.

Cvasigeoidul este un concept intermediar între elipsoid și geoid, fiind utilizat pentru a oferi soluții practice în măsurători și aplicații locale. Deși este mai puțin precis decât geoidul în ceea ce privește descrierea detaliată a câmpului gravitațional, cvasigeoidul este preferat în multe situații datorită simplității și eficienței sale.

Teluroidul

Teluroidul se definește ca fiind tot o formă de geoid a Terrei, mai exact un aspect specific al acestuia: S-a observat că turtirea geoidului este mai pronunțată la Polul Sud decât la Polul Nord și mai pronunțată la latitudinile medii din emisfera nordică decât la latitudinile medii din emisfera sudică. Deci Pământul ar semăna cu o pară, formă botezată terroid sau teluroid. Este foarte interesant faptul că turtirile terroidului apar la latitudinile unde predomină continentele, iar bombările apar la latitudinile unde predomină bazinele oceanice. Probabil acestea din urmă sunt mai predispuse la centrifugare.

Teluroidul este definit ca suprafață a cărei înălțime deasupra elipsoidului geocentric de referință este egală cu înălțimea terenului deasupra geoidului în orice punct al său.

Teluroidul este un concept geodezic utilizat pentru a descrie o suprafață intermediară între geoid și elipsoid, având ca scop reprezentarea matematică a formei Pământului prin metode simplificate. Acesta este utilizat mai ales în contextul transformărilor altimetrice și al aplicațiilor geodezice regionale.

Teluroidul este o suprafață definită matematic, care urmărește îndeaproape geoidul, dar nu coincide complet cu acesta. Diferența constă în faptul că teluroidul este o aproximare bazată

pe poziționarea unui punct de observație pe suprafața fizică a Pământului, fiind utilizat pentru calcule mai rapide și simplificate.

Caracteristici principale

1. Legătura cu alte suprafețe geodezice:
 - Teluroidul este poziționat între elipsoidul de referință și geoid.
 - Spre deosebire de geoid, care este definit de nivelul mediu al mării și de câmpul gravitațional, teluroidul este mai apropiat de suprafața topografică reală a Pământului.
2. **Rol matematic:**
 - Teluroidul este utilizat în geodezie pentru a aproxima geoidul și a simplifica calculele legate de câmpul gravitațional și altitudini.
 - Este determinat prin corecții aplicate altitudinilor normale sau ortometrice în raport cu geoidul.
3. **Utilizare regională:**
 - Teluroidul este cel mai frecvent utilizat în regiuni cu variații topografice semnificative, unde o reprezentare exactă a geoidului este dificilă sau inutilă pentru aplicațiile practice.

Diferențe între elipsoid, geoid, teluroid și cvasigeoid

1. Elipsoidul de referință:
 - O suprafață matematică simplă, utilizată pentru sisteme globale de coordonate.
 - Exemple: WGS84, GRS80.
2. Geoidul:
 - O suprafață fizică, care corespunde nivelului mediu al mării extins pe toată planeta, influențată de câmpul gravitațional al Pământului.
3. Cvasigeoidul:
 - O aproximare matematică a geoidului, utilizată pentru aplicații regionale și pentru transformarea altitudinilor elipsoidale în altitudini normale.
4. Teluroidul:
 - O suprafață intermediară între elipsoid și geoid, mai apropiată de suprafața fizică a Pământului. Este folosit pentru calcule simplificate, mai ales în studiile topografice.

Aplicațiile teluroidului

1. Corectarea altitudinilor:
 - Utilizat în transformarea altitudinilor normale sau elipsoidale în raport cu nivelul mediu al mării.
2. Aplicații regionale:
 - Teluroidul este folosit pentru calcule geodezice în zone cu topografie complexă sau în situațiile în care geoidul este dificil de determinat.
3. Geodezie practică:
 - Este important în proiectele de inginerie civilă, cartografie și alte aplicații care necesită măsurători altimetrice precise.

Teluroidul este un concept geodezic util pentru reprezentarea simplificată a relației dintre suprafața fizică a Pământului, geoid și elipsoid. Prin această aproximare matematică, el permite corectarea altitudinilor și simplificarea calculelor geodezice, mai ales în aplicații regionale sau în zone cu variații topografice semnificative.

Planul de proiecție. În rețelele de triangulație de îndesire, datorită numărului extrem de mare al punctelor, nu se mai pot folosi comod calculele pe elipsoid sau pe sfera medie, fiind necesară adoptarea unei suprafețe plane, prin adoptarea unui anumit *sistem de proiecție cartografică*.

Planul de proiecție este o suprafață geometrică plană utilizată în cartografie și geodezie pentru a reprezenta suprafața curbă a Pământului într-un sistem bidimensional. Este un element esențial al proiecțiilor cartografice, care transformă coordonatele de pe suprafața sferică sau elipsoidală a Pământului în coordonate plane, utilizabile pentru realizarea hărților.

Planul de proiecție este utilizat pentru a reprezenta punctele, liniile și suprafețele Pământului într-un mod convenabil pentru măsurători, analize și reprezentări vizuale. Alegerea planului de proiecție influențează direct:

1. Acuratețea măsurărilor.
2. Tipul de deformări (de arii, distanțe, unghiuri) care apar în urma proiecției.
3. Domeniul de aplicare al hărții (local, regional, global).

Tipuri de planuri de proiecție

În funcție de geometria utilizată, planul de proiecție poate fi configurat în mai multe moduri:

1. Plan tangential

- Planul este tangential la suprafața Pământului într-un punct sau de-a lungul unei linii (meridian sau ecuator).
 - Utilizare: Proiecții azimutale sau polare.
2. Plan secant
 - Planul intersectează suprafața elipsoidului sau sferei de referință, reducând deformările pe regiuni mai mari.
 - Utilizare: Proiecții conice și cilindrice.
 3. Plan echidistant
 - Se păstrează o distanță constantă de la un punct central (de exemplu, în proiecțiile azimutale echidistante).

Tipuri de proiecții în funcție de planul de proiecție

1. Proiecții azimutale
 - Planul de proiecție este perpendicular pe axa care trece prin centrul Pământului.
 - Utilizate pentru regiuni circulare mici, cum ar fi zone polare.
2. Proiecții cilindrice
 - Planul de proiecție este o suprafață cilindrică tangentială sau secantă față de Pământ.
 - Utilizate pentru reprezentarea zonelor ecuatoriale sau a întregului glob (ex. proiecția Mercator).
3. Proiecții conice
 - Planul de proiecție este o suprafață conică plasată deasupra elipsoidului sau sferei Pământului.
 - Utilizate pentru zone aflate între poli și ecuator (de exemplu, proiecția Lambert).

Proprietăți asociate planului de proiecție

1. Scara
 - Reprezintă raportul dintre distanțele de pe plan și cele de pe suprafața reală a Pământului.
 - Planul de proiecție este selectat pentru a minimiza deformările pe o anumită regiune.
2. Deformările

- Orice proiecție introduce deformări (ale ariei, unghiurilor sau distanțelor).

Planul de proiecție influențează natura acestor deformări.

3. Orientarea

- Planul poate fi orientat în funcție de punctul central sau zona de interes (poli, ecuator, regiuni continentale).

Alegerea planului depinde de:

1. Dimensiunea zonei reprezentate:

- Hărți globale (proiecții cilindrice).
- Hărți regionale (proiecții conice).
- Hărți locale (proiecții azimutale).

2. Tipul de aplicație:

- Navigație maritimă și aeriană: proiecții conforme (preservă unghiurile).
- Cartografie tematică: proiecții echivalente (preservă ariile).

3. Forma zonei de interes:

- Zone lungi și înguste: proiecții conice.
- Zone circulare: proiecții azimutale.

Exemple de utilizări practice

1. Sistemele de coordonate naționale:

- Sistemul Stereo70 în România folosește o proiecție plană stereografică pentru cartografierea națională.

2. Cartografie tematică:

- Hărți climatice, geologice sau agricole care necesită anumite tipuri de conservare (ariile sau distanțele).

3. Navigație:

- Proiecția Mercator este folosită frecvent pentru hărțile maritime, datorită capacității de a conserva unghiurile.

Planul de proiecție este un element fundamental în realizarea hărților și în analiza geospațială. Alegerea corectă a acestuia asigură o reprezentare adecvată a suprafeței Pământului, minimizând deformările și optimizând aplicabilitatea hărților în funcție de scopurile practice.

Din anul 1951, în țara noastră a fost folosit sistemul de *proiecție conformă Gauss – Kruger*, suprafața țării fiind cuprinsă în fusele 34 și 35 cu meridianele axiale de 21° și 27° , iar din anul 1970 s-a trecut la *proiecția stereografică 1970*.

1.4 Unități de măsură utilizate în geodezie

Sistemul internațional de unități

Pentru unificarea unităților de măsură utilizate în diferitele domenii ale fizicii, în 20 mai 1875, 17 țări au creat Convenția Metrului (în 1997 Convenția număra 48 de state printre care și România).

Reprezentanții țărilor membre ale Convenției Metrului se întrunesc periodic (de regulă la patru ani) în **Conferința Generală de Măsuri și Greutăți** (CGPM – Conférence Générale de Poids et Mesures) care adoptă rezoluții privind unitățile de măsură. De asemenea, CGPM numește Comitetul Internațional de Măsuri și Greutăți (CIPM – Comité International de Poids et Mesures), format în prezent din 18 persoane reprezentând diferite state membre ale Convenției Metrului. Principala misiune a CIPM constă în asigurarea unificării la nivel mondial a unităților de măsură, acționând direct, sau prin propuneri supuse CGPM. De asemenea, sub autoritatea CIPM se află Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți (BIPM – Bureau International de Poids et mesures), un ansamblu de laboratoare de cercetări în domeniul metrologiei, având sediul în Sèvres –Paris, susținut financiar de țările membre ale Convenției Metrului.

Sistemul Internațional de Unități (SI), utilizat în aproape toate țările lumii, a fost adoptat de CGPM la întrunirea din anul 1960 și a cunoscut mai multe modificări ulterioare, mai ales în definiția unităților de măsură, pentru a răspunde progreselor tehnologice și necesității eliminării unor posibilități de interpretare.

Unitățile SI sunt împărțite în două clase:

1. Unitățile de bază (Tabelul 11.1), în număr de șapte, considerate independente din punct de vedere dimensional;

2. Unitățile derivate (Tabelul 11.2), formate prin combinarea unităților de bază, conform relațiilor algebrice care leagă mărimile respective.

Unele unități derivate (Tabelul 11.3) au denumiri și simboluri proprii, care pot fi utilizate în locul celor formate prin combinarea denumirilor și simbolurilor unităților de bază. Pentru

scrierea unităților SI se folosesc simboluri (tabelele 11.1, 11.2, 11.3). Pentru formarea multiplilor și submultiplilor zecimali ai unităților SI se folosesc prefixe SI (Tabelul 11.4). În utilizarea denumirilor, simbolurilor și prefixelor unităților de măsură trebuie respectate mai multe reguli specifice:

*Simbolurile unităților nu sunt urmate de punct (nu sunt prescurtări);

*Denumirile unităților se scriu cu litere latine mici, chiar dacă provin din nume proprii (newton, pascal, watt, hertz, kelvin, joule, amper etc.);

*Simbolurile se scriu cu litere latine drepte mici, dacă nu derivă dintr-un nume propriu

(**m** - metru, **s** - secundă, **cd** - candelă, **rad** - radian, **t** - tonă etc.);

*Prima (sau unica) literă a unui simbol se scrie cu litere latine drepte mari, dacă derivă dintr-un nume propriu (**K** - kelvin, **A** - amper, **V** - volt, **W** - watt, **Wb** - weber, **N** - newton, **J** - joule, **Pa** - pascal, **T** - tesla etc.);

*Pentru „pătrat” și „cub” se utilizează cifrele ² și respectiv, ³ „ridicate” (de exemplu, se scrie km² și nu kmp);

*Produsul a două unități se notează folosind semnul „·” (de exemplu, pentru amper oră se scrie A·h și nu Ah);

*Raportul a două unități se notează folosind semnul „/” sau puteri negative de exemplu, m/s² sau m·s⁻²);

*Simbolul unității se separă printr-un spațiu de numărul de dinaintea sa (de exemplu, 1,324 m și nu 1,324m).

Unitățile SI de bază

Tabelul 1.2

Mărimea de bază	Numele unității	Simbolul	Definiția unității
Lungime	metru	m	Lungimea traseului parcurs de lumină în vid în $1/299792458$ dintr-o secundă
Masă	kilogram	kg	Masa prototipului internațional sub forma unui cilindru din platină-iridium, păstrat în laboratoarele BIPM
Timp	secundă	s	Durata necesară producerii a 9192631770 perioade a radiației corespunzătoare trecerii între două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133
Curent electric	amper	A	Intensitatea unui curent care, menținut între doi conductori paraleli cu distanța de 1 m între ei, produce o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newton pe metru
Temperatură termodinamică	kelvin	K	$1/273,17$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei
Cantitate de substanță	mol	mol	Cantitatea de materie conținând atâtea entități elementare (atomi, molecule, ioni, electroni etc.), câți atomi sunt în 0,012 kg. de carbon 12

Intensitate luminoasă	candelă	cd	Intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența de $540 \cdot 10^{12}$ hertzi și a cărei intensitate energetică în această direcție este de 1/683 wați pe steradian
-----------------------	---------	----	---

Unități și derivate (exemple)

Tabelul 1.3

Mărimea derivată	Numele unității	Simbolul
arie	metru pătrat	m^2
volum	metru cub	m^3
viteză	metru pe secundă	m/s
acelerație	metru pe secundă la pătrat	m/s^2

Unități și derivate, având denumiri și simboluri proprii (exemple)

Tabelul 1.4.

Mărimea derivată	Numele unității	Simbolul	Expresia în unități SI de bază
unghi plan	radian	rad	$m \cdot m^{-1}$
unghi solid	steradian	sr	$m^2 \cdot m^{-2}$
frecvență	hertz	Hz	s^{-1}
forță	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
presiune, tensiune mecanică	pascal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie, lucru mecanic, cantitate de căldură	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$

Putere, flux energetic	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
------------------------	------	---	-----------------------------

Prefixe pentru multiplii și submultiplii unităților SI

Tabelul 1.5

Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da	10^{-24}	yocto	y

1.4.1 Unități de măsură în afara sistemului internațional

În activitatea practică se utilizează unități care nu fac parte din SI, dar sunt larg răspândite și au un rol deosebit de important. O parte dintre aceste unități sunt prezentate în tabelul A.5, fiind incluse cel mai des în lucrările topografice și geodezice. Unitățile **ar** și **hectar**, folosite pentru a exprima aria terenurilor, se numără printre cele nerecomandate în documentele CGPM, ca și **mila marină** și **nodul**, care sunt încă utilizate în navigația maritimă și aeriană ca unități de lungime și, respectiv viteză.

În lucrările topografice și geodezice se măsoară și se utilizează frecvent mărimi unghiulare. Marea majoritate a instrumentelor folosite în acest scop, folosesc gradele

centesimale (cercul are 400 de grade, unghiul drept are 100 de grade, gradul are 100 de minute, minutul are 100 de secunde). Încă nu există o normă oficială privind simbolurile gradului centesimal și ai submultiplilor săi. În mai multe publicații tehnice ca simbol al gradului centesimal se utilizează **gon** cu submultiplul **mgon** (1 miligon = 10^{-3} gon = 10 secunde centesimale).

Unități folosite împreună cu SI

Tabelul 1.6

Denumirea	Simbolul	Echivalența în unități SI
minut	min	1 min = 60 s
oră	h	1 h = 60 min = 3600 s
zi	d	1 d = 24 h = 86 400 s
grad	$^{\circ}$	$1^{\circ} = (\pi/180) \text{ rad}$
minut	'	$1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
secundă	''	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
litru	l sau L	1 L = 1 dm ³ = 10^{-3} m ³
Milă marină		1 milă marină = 1 852 m
nod		1 nod = 1 milă marină pe oră = (1 852/3 600) m/s
angström	Å	1 Å = 0,1 nm = 10^{-10} m
ar	a	1 a = 1 dam ² = 10 ² m ²
hectar	ha	1 ha = 1 hm ² = 10 ⁴ m ²

1.4.2 Unități de măsură utilizate în trecut pe teritoriul româniei

Pe teritoriul actual al României s-au folosit în decursul timpului unități de măsură diverse pentru exprimarea lungimilor și ariilor, situație întâlnită, de altfel, în marea majoritate a țărilor europene. Unele dintre aceste unități, de exemplu **stânjenul**, au valori diferite în funcție de timp și de aria geografică.

De asemenea, nu a existat o tratare uniformă a multiplilor și submultiplilor. De exemplu, **palma** un submultiplu al stânjenului, a fost subîmpărțită, în diferite zone geografice și în diferite momente istorice, în 8, în 10 sau în 12 degete.

a. Unități de lungime

Principalele unități de măsură, utilizate în lucrările topo-geodezice și cadastrale pentru exprimarea lungimilor au fost:

***În Țara Românească (Muntenia):**

- **Stânjenul Șerban – Vodă**, introdus de Principele Șerban –Vodă Cantacuzino în anul 1681 sau 1684. Inițial, stânjenul era divizat în **8 palme**, palma în **8, 10**, sau **12 degete**, degetul în **10 linii**. După 1836 și până la introducerea sistemului metric, inginerii hotarnici au adoptat ca subdiviziuni ale stânjenului Șerban-Vodă, 10 palme, 100 de degete, 1000 de linii.
- **Stânjenul Constantin – Vodă**, introdus de Principele Constantin Brâncoveanu în anul 1700 era divizat în **8 palme**, palma în **8** sau în **10** degete, degetul în **10 linii**. A cunoscut o utilizare relativ limită.

***În Moldova:**

- **Stânjenul moldovenesc** (sau stânjenul gospod), introdus după anul 1700. Era divizat în 8 palme, palma în **8 palmace**, palmacul în **12 linii**.

***În Transilvania și Bucovina** s-au utilizat unități austriece:

- **Stânjenul austriac** (sau **klafter**) era divizat în **6 picioare** (sau **fuse**), piciorul în **12 țoli** (zoll), țolul în **12 linii**, linia în **12 scrupule**.

***În Dobrogea** s-au utilizat unități turcești:

- **Arșinul mimarilor** (sau **stânjenul turcesc**) era divizat în **24 parmace**, parmacul în **12 haturi**, hatul în **12 nohtale**.

În tabelul 11.6 este prezentată echivalența în metri a unităților de lungime amintite mai sus.

Unități de lungime utilizate pe teritoriul României

Tabelul 1.7

Provincia	Unitatea	Echivalența (metri)	Multipli și submultipli
Țara Românească	stânjen Șerban - Vodă	1,9665	palmă = 1/10 stânjeni
			deget = 1/10palme
			linie = 1/10degete
			prăjină = 3stânjeni

Provincia	Unitatea	Echivalența (metri)	Multipli și submultipli
	stânjen Constantin – Vodă	2,020	palma = 1/8 stânjeni
			deget = 1/8 palme
			linie = 1/10 degete
			prăjină = 3 stânjeni
Moldova	stânjen gospod	2,230	palma = 1/8 stânjeni
			palma = 1/8 palme
			linie = 1/12 palmace
			prăjină = stânjeni
Transilvania și Bucovina	stânjen austriac	1,896484	picior = 1/6 stânjeni
			țol = 1/12 picioare
			linie = 1/12 țoli
			scrupul = 1/12 linii
			prăjină(ruth) = 10 picioare
			milă austriacă = 4000 stânjen
Dobrogea	stânjen turcesc (arșinul mimarilor)	0,758	parma = 1/24 stânjeni
			hat = 1/12 parmace
			nohtală = 1/12 haturi
	arșin (cotul bazarului)	0,680	rup = 1/8 arșini
			ghirahă = 1/2 rupi

b. Unități de arie

Unitățile de arie utilizate în trecut pe teritoriul României sunt, de regulă, derivate din unitățile de lungime adoptate în perioadele și provinciile respective.

***În Țara Românească (Muntenia):**

- **Pogonul**, este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 24 prăjini (72 stânjeni) și cu lățimea de 6 prăjini (18 stânjeni), adică 1296 de stânjeni pătrați.
- **Prăjina pogonească**, este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 6 prăjini (18 stânjeni) și cu lățimea de 1 prăjină (3 stânjeni), adică 54 stânjeni pătrați, respectiv $1/24$ pogoane.

***În Moldova:**

- **Falca** (sau **falcea**), este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 80 prăjini (240 stânjeni) și cu lățimea de 4 prăjini (12 stânjeni), adică 2880 stânjeni pătrați.
- **Prăjina fâlcească**, este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 2 prăjini (6 stânjeni), adică 36 stânjeni pătrați, respectiv $1/80$ fâlci.

***În Transilvania și Bucovina:**

Iugărul (sau **jugărul**), este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 24 prăjini (40 stânjeni), adică 1600 stânjeni pătrați.

***În Dobrogea:**

Donumul, este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 40 stânjeni, adică 1600 stânjeni pătrați.

Unități de arie utilizate pe teritoriul României

Tabelul 1.8

Provincia	Unitatea	Echivalența	Submultipli
Țara Românească	pogon	5011,790	prăjină pogonească = $1/24$ pogoane
			stânen pătrat = $1/1296$ pogoane
Moldova	falcă	14321,952	prăjină fâlcească = $1/80$ fâlci
			stânen pătrat = $1/2880$ fâlci
Transilvania și Bucovina	iugăr	5754,618	stânen pătrat = $1/1600$ iugăre

1.5 Domenii de aplicare ale geodeziei elipsoidale

Geodezia elipsoidală reprezintă ramura geodeziei care utilizează elipsoidul de referință pentru a descrie forma Pământului și pentru a realiza măsurători precise în raport cu acest model matematic. Această disciplină are o gamă largă de aplicații practice și științifice, contribuind la dezvoltarea mai multor domenii.

1. Sisteme de coordonate globale și naționale

- Definirea sistemelor de referință:
- Geodezia elipsoidală stă la baza stabilirii sistemelor globale de coordonate, precum WGS84 (utilizat de GPS), sau a sistemelor naționale, cum este ETRS89 în Europa.
- Elipsoidul permite conversia coordonatelor tridimensionale într-un sistem bidimensional utilizabil pentru cartografie.
- Navigație și poziționare globală:
- Toate sistemele moderne de poziționare prin satelit (GPS, Galileo, GLONASS) folosesc modele elipsoidale pentru determinarea poziției exacte pe suprafața Pământului.

2. Cartografie

- Proiecții cartografice:
- Geodezia elipsoidală este utilizată pentru realizarea hărților precise, prin transformarea coordonatelor tridimensionale de pe elipsoid în coordonate plane (folosind diverse proiecții cartografice).
- Acest lucru permite crearea hărților tematice, topografice și geologice.
- Rețele cartografice naționale:
- Majoritatea hărților naționale folosesc elipsoidul ca suprafață de referință, ceea ce permite o reprezentare unitară și standardizată a teritoriului.

3. Infrastructuri geospațiale și Sisteme de Informații Geografice (GIS)

- Integrarea datelor geospațiale:
- Modelele elipsoidale sunt fundamentale în GIS, unde datele din surse diferite trebuie integrate pe un sistem unitar.
- Permite analiza și reprezentarea informațiilor spațiale pentru planificarea urbană, agricultură, transporturi etc.
- Analiza geospațială:
- Geodezia elipsoidală ajută la calcularea distanțelor, ariilor și unghiurilor pe suprafața Pământului cu precizie mare, contribuind la studiile spațiale și planificare.

4. Navigație și transport

- Navigație aeriană și maritimă:
 - Modelele elipsoidale permit determinarea traseelor optime, precum liniile ortodromice (cele mai scurte trasee între două puncte de pe glob).
 - Sunt utilizate în planificarea rutelor aeriene și maritime.
- Transport terestru:
 - Modelele geodezice bazate pe elipsoid sunt folosite în construirea rețelilor de drumuri și căi ferate, unde este necesară alinierea cu precizie.

5. Geodezia satelitară

- Determinarea poziției sateliților:
- Orbitele sateliților sunt calculate în raport cu un elipsoid de referință, ceea ce permite poziționarea exactă în sistemele de navigație globală.
- Măsurători gravitaționale:
- Elipsoidul este folosit ca referință pentru a analiza variațiile gravitației și pentru a crea modele ale geoidului și cvasigeoidului.

6. Aplicații militare și securitate

- Poziționare și cartografiere:
- Sistemele militare de ghidare și cartografiere folosesc geodezia elipsoidală pentru stabilirea precisă a coordonatelor și a distanțelor.
- Analiza câmpului de vizibilitate:
- Calcularea liniei de vizibilitate pentru aplicații radar, sisteme de apărare și comunicații.

7. Studii climatice și schimbări globale

- Monitorizarea nivelului mării:
- Geodezia elipsoidală permite corelarea măsurătorilor altimetrice satelitare cu elipsoidul de referință pentru a monitoriza variațiile nivelului mării.
- Deformări ale scoarței terestre:
- Utilizarea modelelor elipsoidale în analiza mișcărilor tectonice și a efectelor cutremurelor sau vulcanismului.

8. Aplicații ingineresti și construcții

- Delimitarea și măsurarea terenurilor:
- Modelele elipsoidale sunt esențiale pentru cadastru și măsurători de teren precise.
- Construcții de infrastructură:

- Proiectele de construcție, precum barajele, podurile și tunelurile, folosesc date elipsoidale pentru alinierea și poziționarea exactă.

9. Explorarea resurselor naturale

- Explorări geologice:
- Geodezia elipsoidală este utilizată în studierea zăcămintelor de petrol, gaze naturale sau minerale, prin corelarea datelor gravitaționale și magnetice.
- Planificarea exploatării resurselor:
- Permite poziționarea corectă a instalațiilor de extracție și evaluarea impactului asupra mediului.

10. Educație și cercetare

- Studii academice:
- Modelele elipsoidale sunt utilizate în geodezie, geofizică și alte științe Pământului pentru a studia structura și dinamica planetei.
- Cercetare științifică:
- Geodezia elipsoidală contribuie la modelarea câmpului gravitațional, la înțelegerea mișcărilor crustale și la îmbunătățirea sistemelor globale de poziționare.

Geodezia elipsoidală este esențială pentru numeroase domenii de activitate, de la navigație și cartografie până la construcții și cercetări științifice. Prin utilizarea modelului elipsoidal, permite măsurători extrem de precise și optimizarea aplicațiilor geospațiale într-o lume din ce în ce mai dependentă de tehnologia poziționării globale.

1.6 Importanța modelării precise a Pământului

Modelarea precisă a Pământului este esențială pentru înțelegerea, reprezentarea și utilizarea corectă a datelor geospațiale. Deoarece Pământul nu este perfect sferic, ci un geoid cu variații topografice și gravitaționale complexe, o modelare adecvată este fundamentală pentru aplicații științifice, economice și sociale.

1. Navigație și Poziționare Globală

- Sisteme de poziționare prin satelit (GPS, Galileo, GLONASS):
- Aceste sisteme depind de modele precise ale Pământului, cum ar fi elipsoidul de referință (WGS84), pentru a oferi coordonate exacte.
- Fără o modelare precisă, erorile de poziționare ar putea depăși zeci de metri, afectând aplicații precum navigația auto, aeriană și maritimă.
- Rutare optimă:

- Determinarea rutelor cele mai scurte (de exemplu, ortodromice) necesită un model precis al Pământului.

2. Cartografie și Sisteme de Informații Geografice (GIS)

- Crearea de hărți exacte:
- Modelele precise ale Pământului sunt fundamentale pentru proiectarea hărților care să minimizeze deformările în funcție de scopul lor (ex. păstrarea ariilor, distanțelor sau unghiurilor).
- Analize geospațiale:
- În GIS, datele din diferite surse trebuie integrate într-un sistem comun bazat pe un model precis al Pământului.

3. Monitorizarea Schimbărilor Globale

- Schimbări climatice:
- Modelarea Pământului permite monitorizarea variațiilor nivelului mării, retragerii ghețarilor și altor fenomene asociate schimbărilor climatice.
- Monitorizarea tectonică:
- Precizia modelelor este esențială pentru observarea mișcărilor plăcilor tectonice, predicția cutremurelor și analiza deformărilor crustale.

4. Aplicații în Inginerie și Construcții

- Proiecte de infrastructură:
- Construirea drumurilor, podurilor, căilor ferate și barajelor necesită date precise despre forma și dimensiunile Pământului pentru planificare și execuție.
- Delimitarea terenurilor:
- Cadastrul și măsurătorile topografice se bazează pe modele geodezice precise pentru a evita conflictele legate de proprietate.

5. Geodezia Satelitară și Gravimetria

- Măsurători ale câmpului gravitațional:
- Modelarea Pământului este necesară pentru determinarea variațiilor câmpului gravitațional, ceea ce contribuie la studiile geofizice și la înțelegerea structurii interne a planetei.
- Orbitele sateliților:

- Calcularea exactă a traiectoriilor sateliților și a altitudinii lor depinde de un model precis al formei Pământului.

6. Dezvoltarea și Managementul Resurselor

- Explorarea resurselor naturale:
- Modelele precise ale Pământului ajută la localizarea zăcămintelor de petrol, gaze și minerale.
- Agricultură și utilizarea terenurilor:
- Planificarea utilizării terenurilor și gestionarea resurselor agricole necesită date altimetrice și topografice corecte.

7. Securitate și Aplicații Militare

- Navigație militară:
- Modelele precise sunt esențiale pentru calcularea traiectoriilor, ghidarea rachetelor și operațiunile de recunoaștere.
- Simulări strategice:
- Planificarea operațiunilor militare depinde de hărți și date precise bazate pe modele exacte ale Pământului.

8. Cercetare Științifică și Educație

- Înțelegerea proceselor planetare:
- Modelele Pământului sunt esențiale pentru studiile geofizice, climatice și tectonice.
- Educație și instruire:
- Utilizarea modelelor precise ajută la învățarea conceptelor de bază din geografie, geodezie și alte științe ale Pământului.

9. Aplicații Economice și Sociale

- Planificare urbană:
- Modelele geodezice ajută la planificarea orașelor și la implementarea infrastructurilor moderne.
- Gestionarea dezastrelor naturale:

- Hărțile bazate pe modele precise sunt utilizate pentru evaluarea riscurilor și planificarea măsurilor de intervenție în caz de inundații, alunecări de teren sau cutremure.

10. Standardizare Globală

- Compatibilitatea internațională:
- Modelele precise permit standardizarea sistemelor de coordonate la nivel global, facilitând cooperarea între țări și organizații.

Modelarea precisă a Pământului este crucială pentru multiple domenii, de la navigație și infrastructură la cercetare științifică și securitate. Aceasta asigură acuratețe, interoperabilitate și eficiență, contribuind la dezvoltarea durabilă a societății. Fără o reprezentare exactă a formei și dimensiunilor Pământului, multe dintre tehnologiile moderne și procesele economice ar fi mult mai dificil de realizat.

CAPITOLUL 2.

ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ

În cadrul cursurilor de geodezie, elipsoidul este un subiect central, fiind folosit pentru a modela forma Pământului cu mai mare precizie decât un model sferic. Elipsoidul de referință, numit și elipsoid geodezic, este ales astfel încât să se apropie cât mai mult de forma reală a Pământului, ținând cont de aplatizarea sa la poli.

Elipsoidul este o suprafață matematică tridimensională, utilizată în geodezie, geofizică și alte științe ale Pământului pentru a aproxima forma Pământului. Este o generalizare a sferei, având raze diferite pe direcția ecuatorială și polară, ceea ce îi conferă o formă ușor turtită la poli.

Definiția matematică a elipsoidului

Un elipsoid poate fi definit prin ecuația generală:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

unde:

- a - este semiaxa mare (raza ecuatorială),
- b - este semiaxa mică (raza polară),
- x, y, z - sunt coordonatele unui punct de pe suprafața elipsoidului.

Elipsoidul utilizat în geodezie este un elipsoid de rotație, generat prin rotația unei elipse în jurul axei sale minore.

Tipuri de elipsoizi

1. Elipsoidul de rotație: -este utilizat în geodezie, fiind o aproximare simplificată a formei reale a Pământului.
2. Elipsoidul triaxial: este o formă mai complexă, cu trei axe inegale ($a \neq b \neq c$), utilizat mai rar.

2.1 Parametrii elipsoidului de rotație. Legături între parametri

Pentru prezentarea formulelor și dezvoltărilor ulterioare este necesară prezentarea parametrilor geometrici prin care se poate defini, un elipsoid de rotație (Fig. 2.1.):

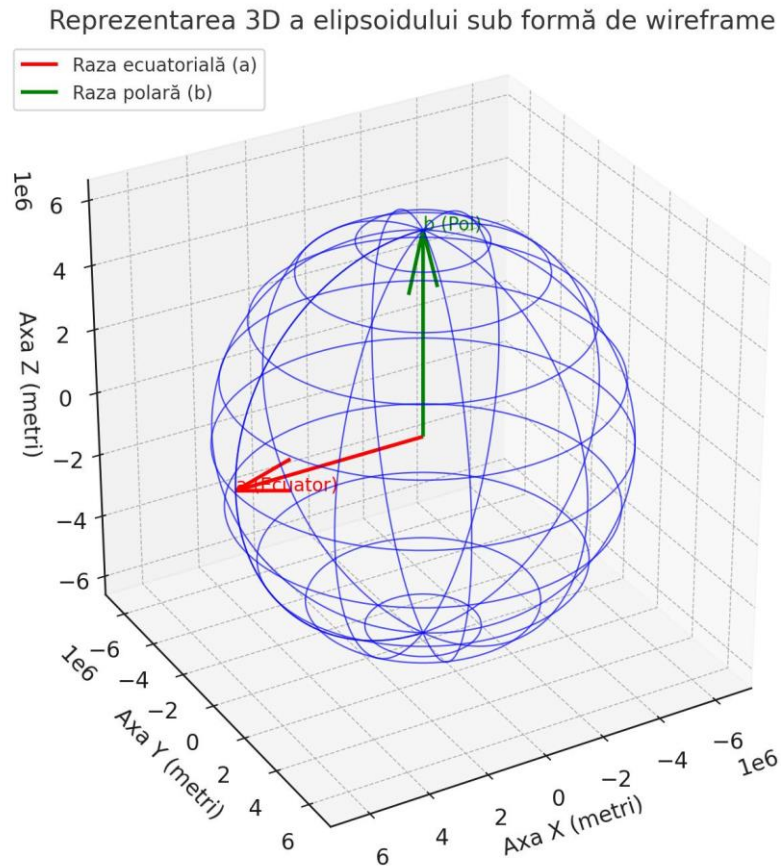


Fig. 2.1. Reprezentarea elipsoidului de referință sub formă wireframe

1. a – semiaxa mare (raza ecuatorială);

$$(2.1)$$

2. b – semiaxa mică (raza polară);

$$(2.2)$$

3. $f = \frac{a-b}{a}$ – turtirea geometrică;

$$(2.3)$$

4. $E = \sqrt{a^2 - b^2}$ – excentricitatea liniară;

$$(2.4)$$

5. $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ – prima excentricitate (numerică);

$$(2.5)$$

$$6. \quad e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} - \text{a doua excentricitate (numerică);} \quad (2.6)$$

$$7. \quad c = \frac{a^2}{b} - \text{raza de curbură polară.} \quad (2.7)$$

Observație: Turtirea - este o măsură a gradului de applatizare a elipsoidului la poli și se calculează ca diferența relativă dintre semiaxa mare (a) și semiaxa mică (b).

Excentricitatea este o altă măsură a devierii elipsoidului de la o formă sferică și este legată de applatizare.

Excentricitatea elipsoidului măsoară cât este de turtit elipsoidul .

Elipsoidul de rotație poate fi definit prin doi parametri geometrici, dintre care unul trebuie să fie liniar (lungime). Primii trei parametri se mai numesc și *parametri principali*. În lucrări mai dezvoltate se utilizează și alți parametri geometrici.

Între parametrii geometrici ai elipsoidului de rotație se pot stabili cu ușurință următoarele relații principale de legătură:

$$b = a(1 - f); \quad (2.8)$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2); \quad (2.9)$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{1 + e'^2}}; \quad (2.10)$$

$$e^2 = 2f - f^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}; \quad (2.11)$$

$$e'^2 = \frac{2f - f^2}{(1 - f)^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad (2.12)$$

$$c = \frac{a}{1 - f} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2} = b(1 + e'^2); \quad (2.13)$$

$$e = \frac{E}{a}; \quad (2.14)$$

$$e' = \frac{E}{b}; \quad (2.15)$$

Prin dezvoltări în serie se obține de asemenea:

$$f = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \dots = \frac{e'^2}{4} - \frac{3e'^4}{8} + \dots \quad (2.16)$$

Elipsoidul de referință, este elipsoidul folosit la un moment dat, într-o țară sau în mai multe țări, pentru rezolvarea problemelor geodezice. Acesta este un elipsoid de rotație cu turtire mică la poli. Reamintind că parametrii geometrici ai elipsoidului de rotație au fost definiți anterior, în *Tabelul 3.1*, se prezintă valorile numerice ale parametrilor a și f pentru elipsoizii de referință care au fost utilizați în decursul anilor în țara noastră, precum și pentru elipsoidul caracteristic *Sistemului Mondial de Referință WGS-84* folosit actualmente în geodezia cu sateliți.

2.2 Modele de elipsoizi utilizate în geodezie

Fiecare elipsoid de referință are dimensiuni specifice care se potrivesc cu anumite regiuni sau scopuri. Cele mai cunoscute modele includ:

- WGS84 - utilizat în navigația globală (inclusiv GPS).
- GRS80 - folosit pentru standardele internaționale de geodezie.
- Clarke 1866 - utilizat în Statele Unite în unele aplicații mai vechi.

Elipsoizi de referință utilizați în România

Tabelul

2.1

Denumirea elipsoidului de referință	Anul determinării	Semiaxa mare a	Turtirea numerică f	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6337397.115	1:299.1528	1873 – 1916
Clarke	1880	6378243.000	1:293.5	1916 – 1930
Hayford	1909	6378388.000	1:297.0	1930 – 1951
Krasovski	1942	6378245.000	1:298.3	1951 – prezent
WGS-84	1984	6378137.000	1:298.257223563	1990 – prezent

Importanța elipsoidului în geodezie

În cursurile de geodezie, elipsoidul de referință este folosit pentru:

- **Calculul coordonatelor geografice** (latitudine, longitudine, altitudine), esențiale în cartografie.
- **Măsurători de distanțe și arii:** Modelele elipsoidale permit o aproximare mai exactă a dimensiunilor reale ale Pământului.
- **Sistemele de coordonate:** Pe baza elipsoidului se definesc sisteme de referință precum WGS84 (folosit la nivel global, inclusiv în GPS) sau GRS80 (în geodezie).

Cunoașterea parametrilor și caracteristicilor elipsoidului este esențială pentru specialiștii în geodezie, deoarece toate calculele pentru determinarea pozițiilor, distanțelor și altitudinilor depind de acest model geometric aproximativ al formei Pământului.

Ecuatiile parametrice ale elipsei meridiane

Ecuția generală a unui elipsoid de rotație, exprimată sub formă implicită:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (2.17)$$

este puțin folosită în geodezia elipsoidală. În mod frecvent se operează cu ecuațiile parametrice, în funcție de coordonatele geodezice B și L , adică:

$$\begin{aligned} X &= X(B, L); \\ Y &= Y(B, L); \\ Z &= Z(B). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pentru deducerea acestora este util să se determine, în prealabil, ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane: $x = x(B)$, $z = z(B)$, deoarece legătura dintre coordonatele X , Y , Z și respectiv x , z (Fig. 2.2) este imediată:

$$\begin{aligned} X &= x \cos L; \\ Y &= y \sin L; \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (2.19)$$

În formulele de mai sus s-au notat

$$x \equiv r = OeS'; \quad z = S'S = OS^{(3)}. \quad (2.20)$$

Pentru deducerea formulelor de calcul utilizăm o figură ajutătoare:

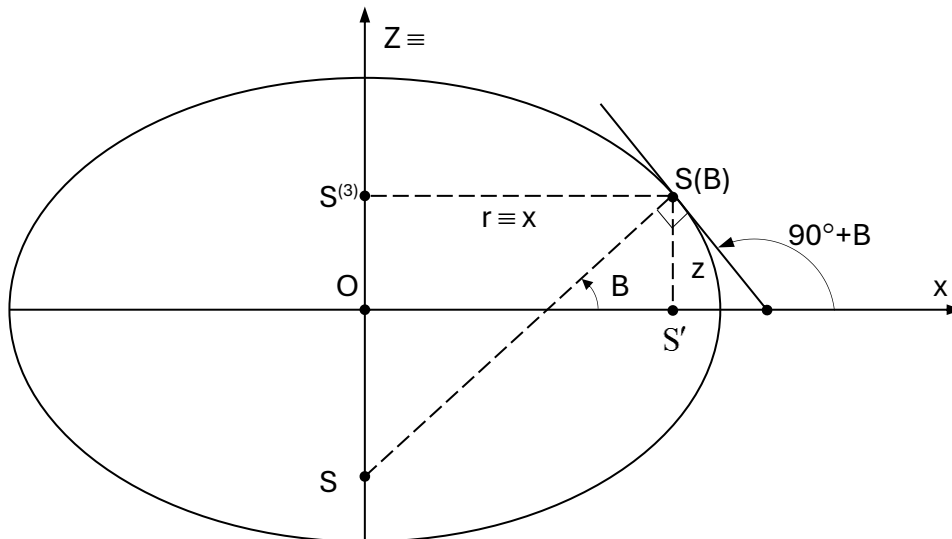


Fig 2.2. Ecuațiile parametrice ale elipsei meridiene.

Așa cum este cunoscut, ecuația elipsei meridiene sub formă implicită este:

$$f(x, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (2.21)$$

Dacă se folosește un alt parametru geometric în locul semiaxei mici:

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \quad (2.22)$$

rezultă:

$$x^2 + \frac{z^2}{1-e^2} - a^2 = 0. \quad (2.23)$$

Se preferă formulele parametrice ale elipsei în care intervine singurul parametru al punctului S (latitudinea geodezică B).

Coeficientul unghiular al tangentei la elipsă în punctul S este:

$$\operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg} B. \quad (2.24)$$

Acest coeficient unghiular poate fi exprimat și analitic ca fiind egal cu prima derivată a funcției (2.18) de două variabile. Diferențiala totală a acestei funcții este:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (2.25)$$

Din expresia de mai sus rezultă prima derivată a funcției. a cărei semnificație este panta tangentei la curbă:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f'x}{f'z} = -\operatorname{ctg} B. \quad (2.26)$$

Sau sub forma:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (2.27)$$

Efectuând calculele necesare rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{1-e^2}; \quad (2.28)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{\frac{2z}{1-e^2}} = -\frac{x(1-e^2)}{z}. \quad (2.29)$$

Din (2.29) și (2.26) se obține o primă relație de legătură între coordonatele x și z :

$$\frac{x(1-e^2)}{z} = \operatorname{ctg} B; \quad (2.30)$$

$$x(1-e^2) = z \operatorname{ctg} B. \quad (2.31)$$

Înlocuind acest rezultat în ecuația (2.23) rezultă:

$$x^2 + \frac{x^2(1-e^2)}{1-e^2} \cdot \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} - a^2 = 0 \quad (2.32)$$

și, în continuare:

$$x^2(\cos^2 B + \sin^2 B - e^2 \sin^2 B) = a^2 \cos^2 B; \quad (2.33)$$

$$x^2(1-e^2 \sin^2 B) = a^2 \cos^2 B. \quad (2.34)$$

adică:

$$x(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2} = a \cos B. \quad (2.35)$$

Dacă se introduce notația consacrată:

$$W = (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}. \quad (2.36)$$

se obține:

$$x = \frac{a \cos B}{W}. \quad (2.37)$$

Se poate demonstra. după calcule simple:

$$\frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \quad (2.38)$$

unde funcția V este. de asemenea. utilizată frecvent:

$$V = (1 + e'^2 \sin^2 B)^{1/2}. \quad (2.39)$$

În acest fel coordonata x se poate exprima și sub forma:

$$x = \frac{c \cos B}{V}. \quad (2.40)$$

Introducând relațiile (2.27) și respectiv (2.40) în formula (2.31) se obțin expresiile de determinare a coordonatei z în funcție de latitudinea B:

$$z = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cdot \frac{1 - e^2}{\cos B} \cdot \sin B; \quad (2.41)$$

$$z = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cdot \sin B \Rightarrow z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} = \frac{c(1 - e^2) \sin B}{V}. \quad (2.42)$$

În concluzie. ecuațiile parametrice ale elipsei meridiene sunt:

$$x = \frac{a \cos B}{W} = \frac{c \cos B}{V}; \quad (2.43)$$

$$z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} = \frac{c(1 - e^2) \sin B}{V}. \quad (2.44)$$

2.3. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație

Revenind la observațiile de la începutul paragrafului anterior și înlocuind în ecuațiile (2.22) rezultatele obținute cu relațiile (2.45) și (2.46) se obțin ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a \cos B \cos L}{W} = \frac{c \cos B \cos L}{V}; \\
 Y &= \frac{a \cos B \sin L}{W} = \frac{c \cos B \sin L}{V}; \\
 Z &= \frac{a(1-e^2) \sin B}{W} = \frac{c(1-e^2) \sin B}{V}.
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

CAPITOLUL 3.

SISTEME DE COORDONATE UTILIZATE ÎN GEODEZIA
ELIPSOIDALĂ

Geodezia elipsoidală utilizează mai multe sisteme de coordonate pentru a reprezenta pozițiile punctelor de pe sau în apropierea suprafeței Pământului. Aceste sisteme sunt fundamentale pentru măsurători precise, cartografie, navigație și alte aplicații geodezice.

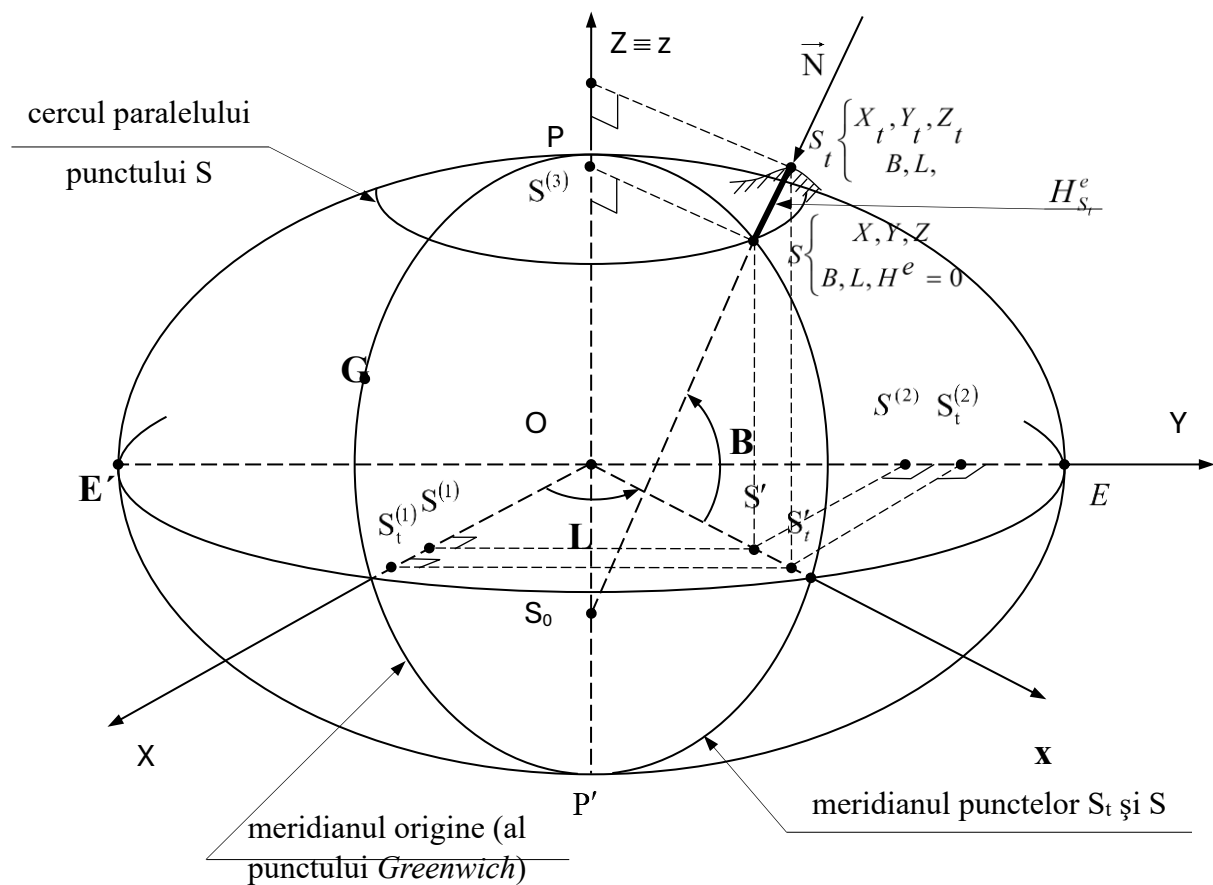


Fig. 3.1. Sisteme de coordonate utilizate frecvent în geodezia elipsoidală.

Iată principalele sisteme de coordonate utilizate în geodezie:

3.1 Sistemul de coordonate geografice

Acest sistem se bazează pe un elipsoid de referință și utilizează trei coordonate pentru a localiza un punct:

- **Latitudine (φ):** unghiul dintre planul ecuatorului și linia care unește centrul elipsoidului cu punctul respectiv, măsurat în grade (de la -90° la $+90^\circ$).

- **Longitudine (λ):** unghiul între planul meridianului de referință (meridianul Greenwich) și meridianul punctului respectiv, măsurat în grade (de la -180° la $+180^\circ$).
- **Altitudine (H):** distanța verticală de la suprafața elipsoidului până la punctul respectiv, măsurată de obicei în metri.

3.2 Sistemul de coordonate geodezice.

Sistemul de coordonate geodezice este cel mai utilizat în geodezia elipsoidală și se bazează pe elipsoidul de referință.

- a) *Latitudinea geodezică* – este unghiul format de normala la elipsoid $\vec{N}$ cu planul ecuatorului (sensul pozitiv de măsurare a latitudinii B este de la ecuator spre normală). Rezultă că există latitudini nordice și respectiv latitudini sudice.
- Valorile variază între -90° (Polul Sud) și $+90^\circ$ (Polul Nord)
- b) *Longitudinea geodezică* – este unghiul diedru format de meridianul punctului S_t considerat și meridianul origine.

Meridianul unui punct reprezintă secțiunea determinată prin elipsoid de către un plan care trece prin punctul considerat și prin axa polilor PP' .

Ca meridian origine este acceptat unanim *meridianul geodezic* al observatorului astronomic *Greenwich*. Acest observator este utilizat și în astronomie (îndeplinește rolul de origine pentru longitudinile astronomice și respectiv pentru timp – așa numitul *time universal* notat TU).

- Valorile variază între -180° și $+180^\circ$

Atenție. Coordonatele geodezice B. L. nu definesc poziția în spațiu a punctului S_t ci doar a normalei $\vec{N}$ la elipsoid. Pentru definirea în spațiu a punctului S_t mai este necesară o mărime:

- c) *Altitudinea geodezică* $H_{S_t}^e$:- distanța dintre suprafața elipsoidului și punctul de interes măsurată de-a lungul normalei la elipsoid
- Poate fi pozitivă (deasupra elipsoidului) sau negativă (sub elipsoid)

$$H_{S_t}^e = SS_t. \quad (3.1)$$

3.3 Sistemul de coordonate carteziane tridimensionale (XYZ)

Acest sistem utilizează un sistem de axe carteziane tridimensionale, cu originea în centrul elipsoidului de referință. Coordonatele sunt:

- **X**: distanța punctului față de planul meridianului de origine.
- **Y**: distanța față de planul ecuatorului în direcția est-vest.
- **Z**: distanța față de planul ecuatorului în direcția nord-sud (coincide cu axa de rotație a Pământului, orientată spre Polul Nord).

Pentru simplificarea notațiilor renunțăm la indicele inferior e la sistemul cartezian.

- originea O a sistemului se află în centrul elipsoidului de referință;
- axa X și axa Y sunt situate în planul ecuatorului elipsoidului;
- axa X este situată în meridianul geodezic al celebrului observator astronomic *Greenwich* situat în apropierea *Londrei* (meridianul zero sau meridianul origine);

Prin punctul S_t se poate duce o singură normală la elipsoid $\vec{N}$, care nu trece prin centrul elipsoidului decât în următoarele cazuri particulare:

- punctul S_t se află în P sau P' ;
- punctul S_t se află pe ecuator (deci există o infinitate de puncte).
- normala $\vec{N}$ intersectează elipsoidul în punctul S .

Observații:

În *geodezia cu sateliți* se determină coordonatele carteziane X_t Y_t Z_t ale punctului S_t de pe suprafața fizică:

$$X_t = O_e S_t^{(1)}; Y_t = O_e S_t^{(2)}; Z_t = O_e S_t^{(3)}. \quad (3.2)$$

În *geodezia elipsoidală* se operează cu puncte raportate pe elipsoidul de referință, de genul punctului S , ale cărui coordonate carteziane sunt:

$$X = O_e S^{(1)}; Y = O_e S^{(2)}; Z = O_e S^{(3)}. \quad (3.3)$$

Acest sistem este util pentru calcule tridimensionale și este folosit de sistemele de referință globale, cum ar fi WGS84, pentru a exprima pozițiile punctelor într-o formă ușor de transformat în alte sisteme de coordonate.

Relația cu coordonatele geodezice:

Coordonatele carteziene (X, Y, Z) pot fi calculate din coordonatele geodezice (φ, λ, H) folosind următoarele formule:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + H) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= [(N(1 - e^2) + H)] \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

unde:

- N este raza de curbură a elipsoidului în planul normal (raza mare de curbură)
- e^2 este prima excentricitate a elipsoidului.

3.4 Sistemele de coordonate locale topocentrice

Acest sistem este utilizat pentru aplicații locale și este definit în raport cu un punct de referință pe suprafața Pământului.

Componentele coordonatelor topocentrice:

- Nord (N sau X): Direcția către Polul Nord geografic.
- Est (E sau Y): Direcția perpendiculară pe Nord, în plan orizontal.
- Zenit (Z): Direcția perpendiculară pe suprafața Pământului, orientată vertical în sus.

În unele cazuri, se utilizează sisteme de coordonate locale, adaptate pentru o anumită regiune sau țară. Aceste sisteme de coordonate sunt de obicei construite pe baza unui elipsoid regional de referință (ex. elipsoidul Krasovsky pentru Europa de Est). Sistemele de coordonate locale sunt preferate pentru acuratețea pe zone restrânse și sunt adesea utilizate în lucrări de inginerie, cadastru și planificare urbană.

3.4.1 Sistemul ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed)

Acest sistem de coordonate are originea în centrul Pământului și un sistem de axe fixe în raport cu planeta. ECEF este utilizat în navigația prin satelit și în GPS, deoarece oferă o referință globală stabilă și permite o interfață facilă între datele satelitare și cele terestre.

3.5 Sistemele de referință globale și locale

Sistemele de referință definesc poziția și orientarea elipsoidului de referință. Exemple includ:

- **WGS84 (World Geodetic System 1984):** sistemul de referință utilizat în GPS, care oferă o acuratețe ridicată la nivel global.
- **ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989):** folosit în Europa și fixat pe placa tectonică europeană.
- **NAD83 (North American Datum 1983):** utilizat în America de Nord, având un elipsoid de referință adaptat acestei regiuni.

Importanța utilizării diferitelor sisteme de coordonate

- **Navigație:** Sistemele de coordonate geodezice și GPS sunt esențiale pentru navigație aeriană, maritimă și terestră.
- **Cartografie:** Reprezentările hărților se bazează pe coordonate geodezice transformate în coordonate plane prin proiecții cartografice.
- **Geodezie spațială:** Sistemele carteziene și ecliptice sunt fundamentale pentru studii astronomice și orbitale.
- **Topografie locală:** Sistemul topocentric este utilizat în lucrări de cadastru și măsurători detaliate pe teren.

Sistemele de coordonate utilizate în geodezia elipsoidală sunt indispensabile pentru măsurători precise, analiză geospațială și reprezentare cartografică. Alegerea sistemului depinde de aplicația specifică, fie că este vorba de studii globale, regionale sau locale.

Fiecare dintre aceste sisteme de coordonate și de referință este conceput pentru scopuri și domenii de aplicare diferite, asigurând flexibilitate și precizie în geodezie și aplicațiile sale.

CAPITOLUL 4.

RAZELE DE CURBURĂ

Prin normala $\vec{N}$ într-un punct oarecare de pe suprafața elipsoidului pot trece o infinitate de plane. denumite *plane normale* (deoarece conțin $\vec{N}$). Aceste plane intersectează elipsoidul după o infinitate de secțiuni. denumite *secțiuni normale*.

Secțiunile care nu trec prin normală (care nu conțin normala) se numesc *secțiuni înclinate* (ex.: secțiunea perpendiculară pe axa polilor. care intersectează elipsoidul după cercul paralel al punctului respectiv).

Dintre secțiunile normale posibile una are raza de curbură maximă și una are raza de curbură minimă; acestea se numesc *secțiuni normale principale* și au proprietatea de a fi perpendiculare între ele.

4.1 Secțiunea meridiană sau Raza mică de curbură (M)

Secțiunea meridiană (care, așa cum se va arăta în continuare are raza de curbură minimă) este reprezentată de meridianul punctului S.

Secțiunea meridiană are forma unei elipse. fiind obținută din intersecția planului meridian cu elipsoidul de rotație. Raza de curbură a acestei elipse se notează cu M:

$$M = \lim_{\Delta B \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta B} = \frac{ds}{dB}. \quad (4.1)$$

în care ds este *elementul de arc de elipsă*:

$$ds^2 = dx^2 + dz^2. \quad (4.2)$$

Rezultă astfel:

$$M = \sqrt{\left(\frac{dx}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dB}\right)^2}. \quad (4.3)$$

Calculul derivatelor necesare în relația (4.3) se realizează prin considerarea formulelor (4.1) și respectiv (4.2). Astfel. de exemplu. prima derivată din (4.3) este:

$$\frac{dx}{dB} = a \left[-\sin B(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cos B(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2e^2 \sin B \cos B \right]. \quad (4.4)$$

Care, după transformări simple. devine:

$$\frac{dx}{dB} = -\frac{a \sin B(1 - e^2)}{W^3}. \quad (4.5)$$

Analog. se poate calcula și cealaltă derivată necesară. rezultând:

$$\frac{dz}{dB} = \frac{a(1 - e^2) \cos B}{W^3}. \quad (4.6)$$

În acest fel se poate determina expresia razei de curbură a elipsei meridiane:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}. \quad (4.7)$$

Prin transformări simple se poate deduce expresia:

$$W^2 = (1 - e^2)V^2. \quad (4.8)$$

astfel încât. prin considerarea și a relației (4.3) rezultă o altă posibilitate de exprimare a razei de curbură a elipsei meridiane:

$$M = \frac{c}{V^3}. \quad (4.9)$$

Se observă că raza de curbură a elipsei meridiane crește odată cu creșterea latitudinii geodezice B. de la ecuator spre pol.

La ecuator. unde $B = 0^\circ$. rezultă:

$$\begin{aligned} W_{0^\circ} &= 1; \\ M_{0^\circ} &= a(1 - e^2) < a. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La pol. unde $B = 90^\circ$. rezultă:

$$\begin{aligned} V_{90^\circ} &= 1; \\ M_{90^\circ} &= c > a. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Secțiunea primului vertical sau Raza mare de curbura (N)

Este reprezentată de secțiunea normală perpendiculară pe secțiunea meridiană. Secțiunea primului vertical și secțiunea înclinată a paralelului în punctul considerat au aceeași tangentă. Se obține astfel legătura dintre raza de curbură a primului vertical notată cu N și raza de curbură a paralelului notată r , legătură care satisface o celebră teoremă a lui **Meusnier**, din geometria suprafețelor:

$$r = N \cos B. \quad (4.12)$$

Deoarece $r \equiv x$, se obține în continuare, prin utilizarea relațiilor (4.8):

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \quad (4.13)$$

Din cele de mai sus rezultă semnificația geometrică a razei de curbură a primului vertical $N = SS_0$ în Fig. 3.2.

Se observă că și raza de curbură a primului vertical are o variație de la ecuator la pol, crescând în mărime odată cu creșterea argumentului B :

La ecuator, unde $B = 0^\circ$, rezultă:

$$\begin{aligned} W_{0^\circ} &= 1; \\ N_{0^\circ} &= a; \quad M_{0^\circ} = a(1 - e^2) < a; \quad M_{0^\circ} < N_{0^\circ}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La pol, unde $B = 90^\circ$, rezultă:

$$\begin{aligned} V_{90^\circ} &= 1; \\ N_{90^\circ} &= c > a; \quad M_{90^\circ} = c; \quad M_{90^\circ} = N_{90^\circ}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Numai la pol cele două raze de curbură principale M și N sunt egale. În celelalte situații raportul dintre razele de curbură ale secțiunilor normale principale va fi:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B \geq 1. \quad (4.16)$$

Rezultă $N \geq M$, motiv pentru care raza de curbură N a primului vertical se mai numește și *marea normală*.

Raza de curbura a secțiunii meridiene (M) precum și raza de curbura a secțiunii primului vertical (N) se pot calcula în funcție de parametrii elipsoidului a, e^2 și de latitudinea B a punctului S (sunt funcții de poziția punctului pe un anumit elipsoid dat).

4.3 Raza de curbura a unei secțiuni normale oarecare în funcție de razele de curbura principale și azimutul geodezic A

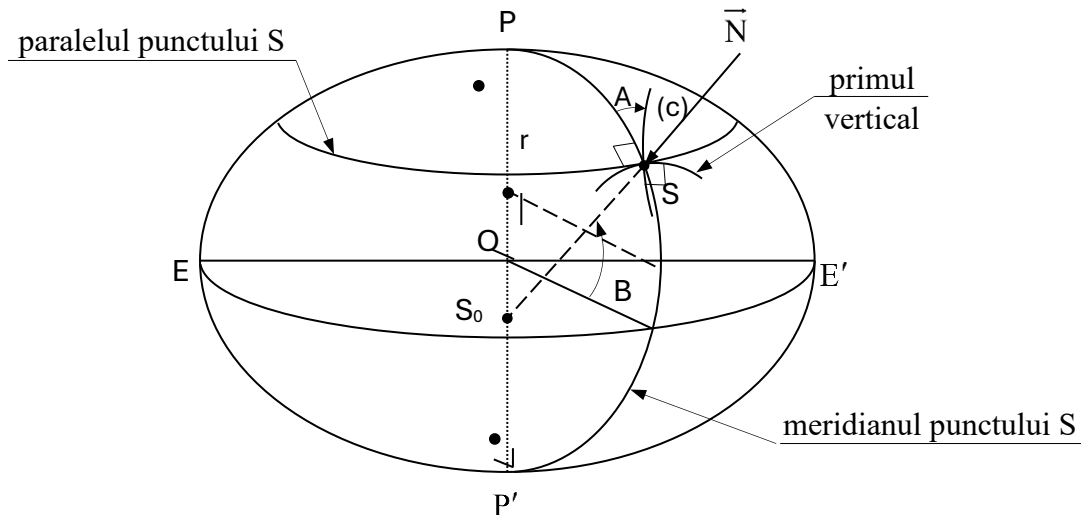


Fig. 4.1 Razele de curbura a secțiunilor normale.

Se consideră un punct S pe elipsoid (situat pe un anumit meridian și pe un anumit paralel). Prin acest punct se poate duce normala $\vec{N}$ la suprafață (o unică posibilitate). Prin normală trec o infinitate de plane normale, care intersectează elipsoidul după *secțiuni normale*, fiecare având o altă rază de curbura.

Azimutul A este unghiul format de curba c (direcția SS') cu direcția nord a meridianului. Se poate demonstra *formula Euler* de calcul a razei de curbura a unei secțiuni normale, de azimut A:

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} \quad (4.17)$$

Din relația de mai sus se observă că raza de curbura a unei secțiuni normale oarecare este exprimată în funcție de azimutul său A și, în cazul elipsoidului de rotație, de curburile secțiunii meridianului (M) și, respectiv, a primului vertical (N).

Așa cum este cunoscut, valorile extreme ale funcției $\frac{1}{R_A}$ se determină efectuându-se prima derivată în raport de variabila considerată (A), care se egalează apoi cu zero:

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{R_A} \right) = \frac{1}{MN} (-2N \cos A \sin A + 2M \sin A \cos A) = \frac{1}{MN} \sin 2A (M - N) = 0. \quad (4.18)$$

Rezultă că valorile extreme ale funcției (4.17) au loc în următoarele două cazuri. (deoarece $MN \neq \infty$):

Cazul I:

$\sin 2A = 0$. ceea ce se poate realiza în două situații: $A = 0^\circ$ și atunci secțiunea normală avută în vedere este secțiunea meridiană și respectiv pentru $A = 100^\circ$ și atunci secțiunea normală considerată este secțiunea primului vertical. ceea ce s-a demonstrat în paragraful anterior.

Cazul II:

$M = N$. situație întâlnită la poli. conform celor demonstrate în paragraful anterior. astfel încât se poate scrie:

$$M_{90^\circ} = N_{90^\circ} = c = \frac{a^2}{b}. \quad (4.19)$$

motivație pentru care c s-a numit *raza de curbură polară* (3.1).

Observație: Din situația examinată la *cazul I*. rezultă că secțiunile normale principale sunt perpendiculare între ele.

4.4 Raza de curbură medie Gauss

Media aritmetică a razelor de curbură ale secțiunilor normale care trec printr-un punct situat pe elipsoid. atunci când numărul acestor secțiuni tinde către infinit. se numește *rază medie de curbură* sau *rază medie Gauss*. notată R :

$$R = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{\frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}}. \quad (4.20)$$

Pentru a realiza media aritmetică din relația (4.20) utilizăm următoarea schiță ajutătoare:

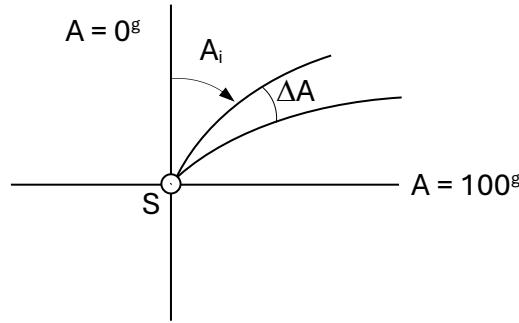


Fig. 4.2 Raza medie Gauss.

Privind în lungul normalei $\vec{N}$ care trece prin punctul S. meridianul ($A = 0^\circ$) și primul vertical ($A = 100^\circ$) se reprezintă într-un plan tangent la elipsoid. în acest punct. prin linii drepte. Celelalte secțiuni normale (de azimut oarecare A_i) se reprezintă prin curbe. Intervalul dintre acestea este considerat finit (mic) ΔA în Fig 4.2.

La limită. când $\Delta A \rightarrow 0$. suma din relația (4.20) se poate înlocui cu următoarea integrală:

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} N}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{1}{\cos^2 A}}{1 + \left(\sqrt{\frac{M}{N}} \tan A \right)^2} dA. \quad (4.21)$$

Pentru calculul ultimei integrale. se introduce următoarea schimbare de variabilă:

$$\sqrt{\frac{M}{N}} \tan A = t \Rightarrow \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{1}{\cos^2 A} dA = dt. \quad (4.22)$$

cu corespondența dintre limitele celor două variabile A și respectiv t :

$$A = 0 \Rightarrow t = 0 ; A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \infty. \quad (4.23)$$

Atunci expresia razei medii **Gauss** (3.68) devine:

$$R = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \arctg t \Big|_0^\infty = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \sqrt{MN}. \quad (4.24)$$

Introducând în ultima formulă relațiile (4.7) și (4.13). rezultă că în punctul S considerat. raza medie **Gauss** este:

$$R = \frac{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{W^2} = \frac{c}{V^2}. \quad (4.25)$$

Raza medie **Gauss** variază. de asemenea. în funcție de latitudinea geodezică B. înregistrând la fel cu M și N. o creștere de la ecuator ($B = 0^\circ$) la pol ($B = 90^\circ$):

$$R_{0^\circ} = b < a; \quad R_{90^\circ} = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = c > a. \quad (4.26)$$

Raza medie **Gauss** are o aplicabilitate deosebită în *geodezie* și în *cartografia matematică*.

CAPITOLUL 5.

ARCE ELEMENTARE

Fie punctele A_1 și A_2 (situate pe același meridian) și respectiv A_1 și A_3 (situate pe același paralel). așa cum este reprezentat în figura următoare:

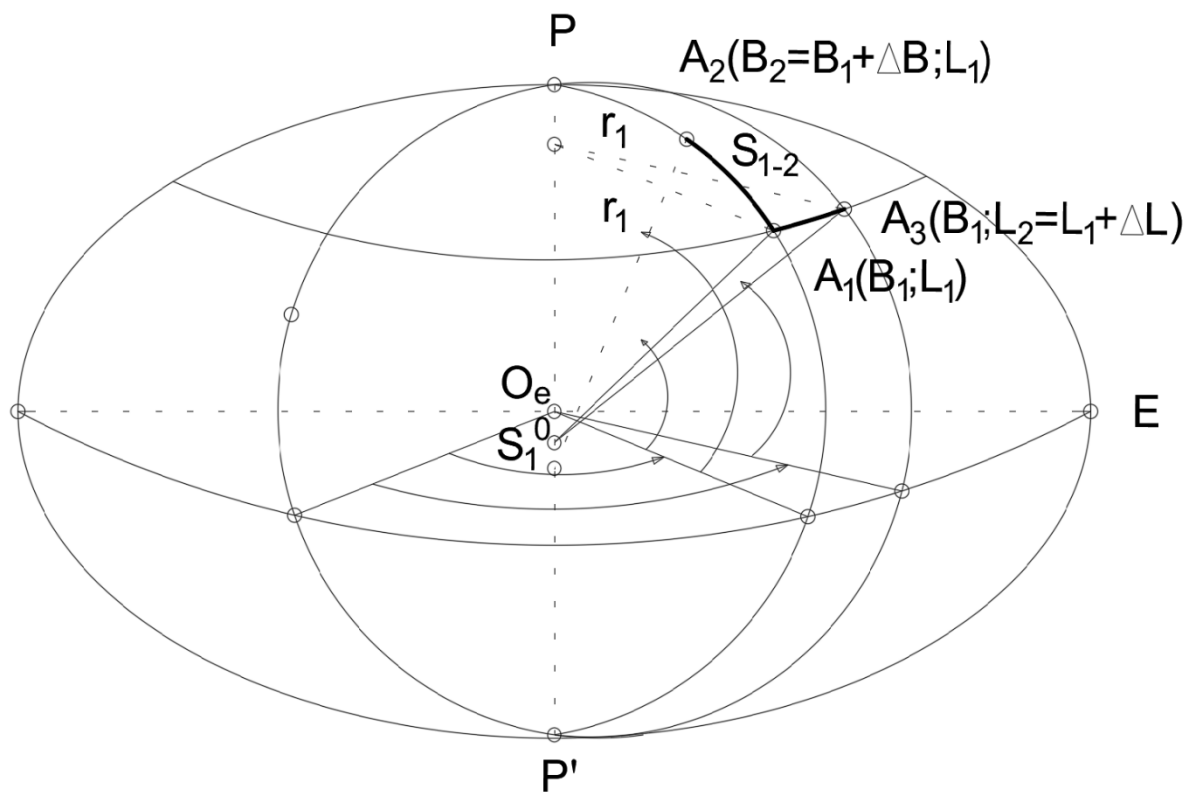


Fig. nr. 5.1 Arc de meridian si arc de paralel

Se va presupune că punctele A_1 , A_2 și A_3 sunt finit apropiate. astfel încât arcul de meridian s_{1-2} (dintre A_1 și A_2) și respectiv arcul de paralel s_p (dintre A_1 și A_3) sunt considerate finit mici și denumite *arce elementare*.

5.1 Lungimea arcului de meridian

Un arc de meridian reprezintă o porțiune a unei linii de longitudine (meridian) pe suprafața Pământului, măsurată între două puncta.

Lungimea arcului de meridian reprezintă distanța de-a lungul unui meridian (linia imaginară care leagă Polul Nord și Polul Sud) între două puncte aflate la diferite latitudini pe suprafața Pământului. Aceasta este o măsură esențială în geodezie și cartografie, pentru că ajută la calculul distanțelor precise pe suprafața Pământului, luând în considerare forma specifică a Pământului.

Cum se calculează lungimea arcului de meridian?

În practică ,se determină în general, lungimea arcului de meridian dintre două puncte de latitudine cunoscută ,iar un caz particular este lungimea arcului de meridian plecând de la ecuator.

Datorită formei elipsoidale a Pământului, meridianele nu sunt cercuri perfecte, ci elipse. Aceasta înseamnă că lungimea unui arc de meridian între două puncte nu este constantă și variază în funcție de latitudine. Pentru a calcula lungimea unui arc de meridian, trebuie să ținem cont de următoarele aspecte:

1. Forma elipsoidului terestru: Pământul este un elipsoid ușor turtit la poli și bombat la ecuator, având raze diferite la poli și la ecuator.
2. Elementele elipsoidului: În geodezie, elipsoidul de referință (de exemplu, WGS84, folosit în GPS) are două valori esențiale:
 - Semi-axa mare (a): Raza la ecuator.
 - Semi-axa mică (b): Raza la poli.
3. Excentricitatea elipsoidului: Acest parametru exprimă diferența dintre semi-axa mare și semi-axa mică și influențează calculul lungimii arcului de meridian.

Pentru a determina lungimea unui arc de meridian între două latitudini, trebuie să folosim formule matematice specifice care includ variabile. În mod simplificat, pentru un unghi de latitudine ϕ sau B , lungimea arcului de meridian S de la ecuator până la latitudinea ϕ poate fi aproximată prin integrarea formulei ce ține cont de forma elipsoidului.

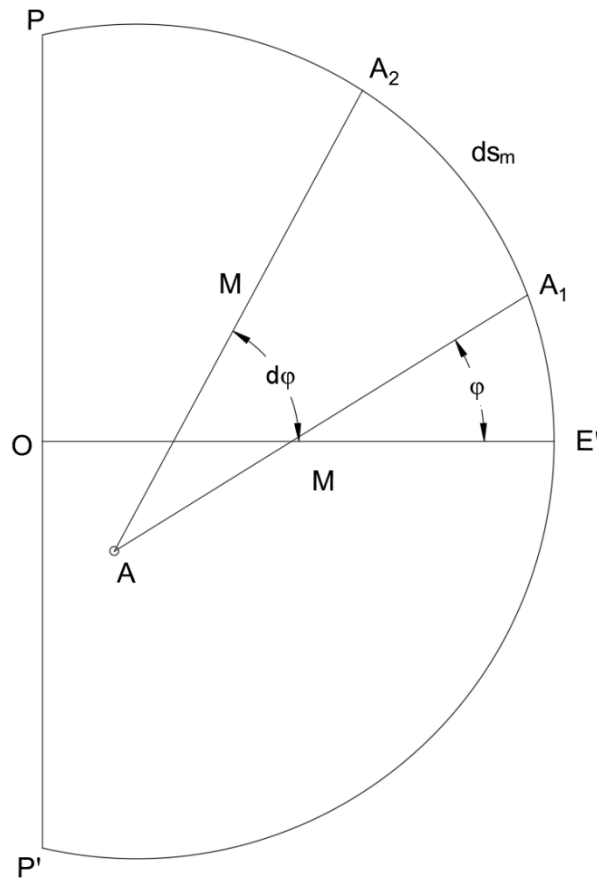


Fig. nr. 5.2 Arc de meridian

$$ds = \widehat{A_1 A_2}$$

$$M = AA_1 = AA_2$$

Se consideră elementul de arc al elipsei meridiene (ds_m), dintre punctul A_1 , de latitudine φ și punctul A_2 infinit apropiat de latitudine $\varphi + d\varphi$.

Considerând egalitatea se poate stabili lungimea arcului de meridian cuprinsă între două puncte " A_1 " și " A_2 " de latitudini " B_1 " și " B_2 ", situate pe elipsoidul de referință:

$$S_{1-2} = \int_{A_1}^{A_2} ds = \int_{B_1}^{B_2} M dB \quad (5.1)$$

Unde: M este raza de curbură a meridianului de latitudine B

Introducând în (5.1) expresia razei mici de curbură se obține :

$$S_{1-2} = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} (1-e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB \quad (5.2)$$

Integrala obținută poate fi rezolvată, utilizând dezvoltările în serie ale expresiei de sub integrală.

Astfel:

$$\begin{aligned} (1-e^2 \sin^2 B)^{-3/2} &= 1 + (-1) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{e^2 \sin^2 B}{1!} + (-1)^2 \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}-1\right) \frac{e^4 \sin^4 B}{2!} + \\ &+ (-1)^3 \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}-1\right) \left(-\frac{3}{2}-2\right) \frac{e^6 \sin^6 B}{3!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{105}{48} e^6 \sin^6 B + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se știe că:

$$\sin^2 B = 1 - \cos 2B \Rightarrow \sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B \quad (5.4)$$

$$\sin^4 B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \sin^6 B &= (\sin^2 B)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \\ &+ 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2B\right) + 3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} \cos 2B\right)^2 + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} \cos 2B\right)^3 = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B \end{aligned} \quad (5.6)$$

Înlocuind relațiile (5.4), (5.5), (5.6) în relația (5.3) se obține:

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = A' - B' \cos 2B + C' \cos 4B - \\ - D' \cos 6B + E' \cos 8B \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

în care expresiile coeficienților A' , B' , ..., E' au fost calculate de Bagratunii (1962) și sunt prezentate în cele ce urmează:

$$A' = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots$$

$$B' = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \dots$$

$$C' = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots$$

$$D' = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \dots$$

$$E' = \frac{315}{16384}e^8 \quad (5.8)$$

În limita aproximațiilor acceptate, integrala (5.3) devine:

$$\begin{aligned} S_{1-2} = a(1 - e^2) \left(A' \frac{(B_2 - B_1)^0}{\rho^0} - \frac{B'}{2} (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \right. \\ \left. + \frac{C'}{4} (\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \frac{D'}{6} (\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \right. \\ \left. + \frac{E'}{8} (\sin 8B_2 - \sin 8B_1) \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se înlocuiesc coeficienții A' , B' , ..., E' cu noile valori date de produsul acestora cu parametri elipsoidului de referință, se obțin expresiile noilor coeficienți:

$$\begin{aligned} P = a(1 - e^2)A', Q = a(1 - e^2)\frac{B'}{2}, R = a(1 - e^2)\frac{C'}{4} \\ S = a(1 - e^2)\frac{D'}{6}, T = a(1 - e^2)\frac{E'}{8} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Relația de calcul a lungimii arcului de meridian între punctele menționate anterior va avea următoarea formă:

$$\begin{aligned}
S_{1-2} = P \frac{(B_2 - B_1)^0}{\rho^0} - Q(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \\
+ R(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - S(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \\
+ T(\sin 8B_2 - \sin 8B_1) - \dots
\end{aligned}
\quad (5.11)$$

Observații:

- pentru necesitățile practice dezvoltările în serie se realizează până la termenul care conține e^8 ;
- în relația de calcul a coeficientului “P” nu a fost introdus factorul de transformare “p” întrucât valoarea acestuia variază de la grade sexagesimale la cele centezimale pentru grade, minute sau secunde și în acest caz implicit și coeficientul “P” ar lua valori diferite.

Pentru a calcula lungimea unui arc de meridian de la ecuator până la poziția unui punct de latitudine “B”, în relația (5.10) se consideră $B_1=0$, iar $B_2=B$, astfel se obține:

$$S_{0-2} = P \frac{B^0}{\rho^0} - Q \sin 2B + C \sin 4B - D \sin 6B + E \sin 8B - \dots \quad (5.12)$$

Pentru elipsoidul Krasovski și W.G.S.84 valorile calculate ale coeficienților (5.8) sunt prezentate în tabelul 1.2, iar pentru coeficienții din relația (5.9) în tabelul 1.3.

Tabelul 5.1

Coeficienți	Krasovski	W.G.S.84
A'	1.005051773893630	1.005052501779130
B'	0.005062377645064	0.005063108582191
C'	0.000010585604075	0.000010588647947
D'	0.000000020808196	0.000000020817179
E'	0.000000000038591	0.000000000038613

Tabelul 5.2

Coeficienți	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P	6367558.496817900	6367449.145766540
Q	16036.480221834	16038.508614987
R	16.766413165	16.770934156
S	0.021971904	0.021980996
T	0.000030562	0.000030579

Atunci când, la calculul coeficientului “P” se ține seama de factorul de transformare “p”, de la grade, minute sau secunde la radiani, valorile acestui coeficient sunt prezentate în tabelele 5.3 și 5.4. Valorile celorlalți coeficienți se regăsesc în tabelul 5.2

Tabelul 5.3

Coeficient	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P^0	111134.861082813	111132.952546927
P'	1852.247684714	1852.215875782
P''	30.870794745	30.870264596

Tabelul 5.4

Coeficient	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P^g	100021.374974532	100019.657292234
P^c	1000.213749745	1000.196572922
P^{cc}	10.002137497	10.001965729

Exemple de aplicații ale arcului de meridian

- Cartografie: În realizarea hărților, calculul arcurilor de meridian ajută la realizarea proiecțiilor cartografice corecte și la transpunerea coordonatelor geografice în coordonate plane.
- Geodezie și topografie: Calculul distanțelor și arcelor de meridian este esențial pentru determinarea pozițiilor exacte pe suprafața Pământului și pentru măsurători precise.
- Navigație: Cunoașterea distanțelor de-a lungul meridianelor este importantă pentru navigarea eficientă și calcularea rutelor, în special în aviație și navigația maritimă.

Astfel, lungimea arcului de meridian este o măsurătoare complexă și esențială în domeniile care necesită precizie în poziționarea și măsurarea la nivel global.

5.2 Lungimea arcului de paralel

Lungimea arcului de paralel reprezintă distanța măsurată de-a lungul unui paralel între două puncte, de obicei între două meridiane care delimitează o diferență de longitudine. Spre deosebire de meridiane, care au toate aceeași lungime (întinderea de la Polul Nord la Polul Sud), paralelele variază în lungime în funcție de latitudine, fiind cele mai mari la ecuator și scăzând pe măsură ce ne apropiem de poli.

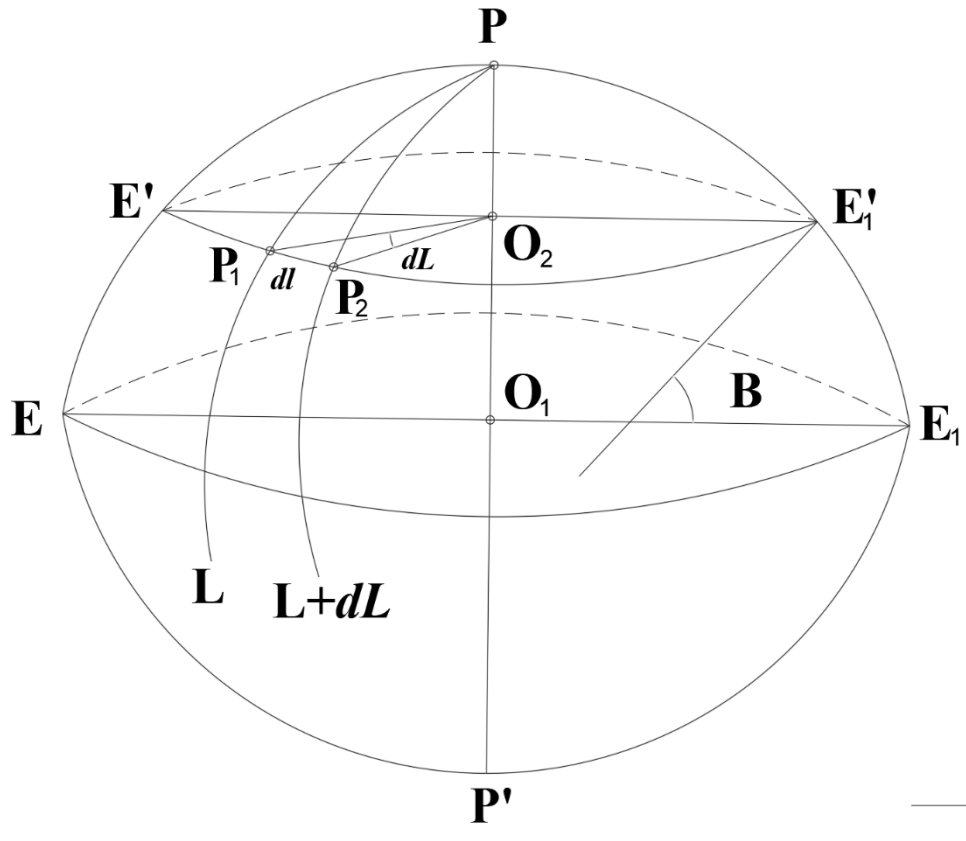


Fig.5.3 Lungimea arcului de paralel

Cum se calculează lungimea arcului de paralel?

Lungimea unui arc de paralel depinde de latitudinea la care se află acel paralel. Întrucât Pământul este un elipsoid, iar paralelele sunt cercuri situate pe acest elipsoid, lungimea arcului de paralel va scădea proporțional cu cosinusul latitudinii..

Observatie: Cosinusul latitudinii ($\cos(B)$) ajustează lungimea arcului în funcție de poziția latitudinală. La ecuator ($B=0$), cosinusul este 1, deci arcul de paralel este maxim.

La poli ($B=90^\circ$), cosinusul este 0, deci lungimea arcului de paralel devine zero, deoarece meridianele se întâlnesc într-un singur punct.

Pe o paralelă de rază “ r ” și de latitudine “ B ” se consideră punctul “ P_1 ” de longitudine “ L ” și punctul “ P_2 ” de longitudine $L+dL$, (fig.1.2). În această situație, lungimea arcului elementar de paralel va fi dată relația :

$$dl = r dL \quad (5.13)$$

Observatie Diferența de longitudine (dL) este importantă pentru că lungimea arcului depinde de distanța dintre cele două meridiane de-a lungul paralelului.

Atunci când, punctele “P₁” și “P₂” se află la o distanță finită, longitudinile lor fiind “L₁” și “L₂” se poate stabili lungimea arcului de paralel integrând egalitatea (5.13), respectiv :

$$l_{1-2} = r \int_{L_1}^{L_2} dL = \frac{R(L_2-L_1)^0}{\rho^0} = N \cos BX \frac{(L_2-L_1)^0}{\rho^0} = \frac{a \times \cos B}{\sqrt{1-e^2} B} \times \frac{(L_2-L_1)^0}{\rho^0} \quad (5.14)$$

Aplicarea lungimii arcului de paralel

- **Cartografie și proiecții cartografice:** Lungimea arcurilor de paralel este crucială pentru redarea corectă a distanțelor și formelor pe hărți.
- **Navigație:** În navigația maritimă și aeriană, calculul distanțelor între puncte de-a lungul paralelelor este important pentru estimarea distanțelor orizontale, mai ales în cazul rutelor la latitudini constante.
- **Geodezie:** Aceste calcule ajută la poziționarea și măsurarea precisă pe glob, luând în considerare deformarea elipsoidală a Pământului.

Astfel, lungimea arcului de paralel este un concept fundamental în geodezie, având aplicații practice în navigație, reprezentarea hărților și diverse alte domenii care necesită măsurători precise pe suprafața elipsoidului terestru.

CAPITOLUL 6.

CALCULUL ARIILOR ȘI VOLUMELOR PE ELIPSOID

Calculul ariilor și volumelor pe suprafața unui elipsoid implică metode matematice avansate, deoarece elipsoidul este o suprafață curbată. Vom detalia formulele și metodele utilizate pentru calculul acestor mărimi.

6.1 Aria totală a elipsoidului

Aria totală a unui elipsoid de rotație (unde a și b sunt semiaxele principale, iar c este semiaxa polară) poate fi calculată utilizând formula lui Legendre:

$$A = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{1 - e^2}{e} \tan H^{-1}(e) \right)$$

unde:

- a este semiaxa mare,
- $b = c$ este semiaxa mică (dacă este un elipsoid de rotație),
- e - este excentricitatea elipsoidului.

Dacă elipsoidul este triaxial ($a \neq b \neq c$), aria totală se calculează prin integrare numerică, deoarece nu există o formulă analitică exactă.

6.2 Volumul total al elipsoidului

Volumul total al unui elipsoid de rotație este dat de formula clasică:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

unde a este semiaxa mare și b este semiaxa mică.

6.2 Aria unui trapez pe elipsoid

Calcularea ariei unui trapez pe suprafața unui elipsoid poate fi destul de complexă, deoarece necesită luarea în considerare a curburii suprafeței elipsoidale. Abordarea depinde de modul în care trapezul este definit pe elipsoid:

1. Trapez pe suprafața parametrizată: Dacă ai coordonatele latitudinii și longitudinii pentru cele patru colțuri ale trapezului, aria poate fi calculată folosind formule lungimilor arcelor de meridian și arcelor de paralel

2. Formulă generalizată pentru aria pe elipsoid: Calculul implică utilizarea metodelor de integrare în coordonate sferice sau elipsoidale.

Se considera diferita lungimea arcelor de paralel ce delimitează trapezul ($l_{2-3} \neq l_{1-4}$) și respectiv aceeași lungime pentru arcele de meridian ($l_{1-2} = l_{3-4}$).

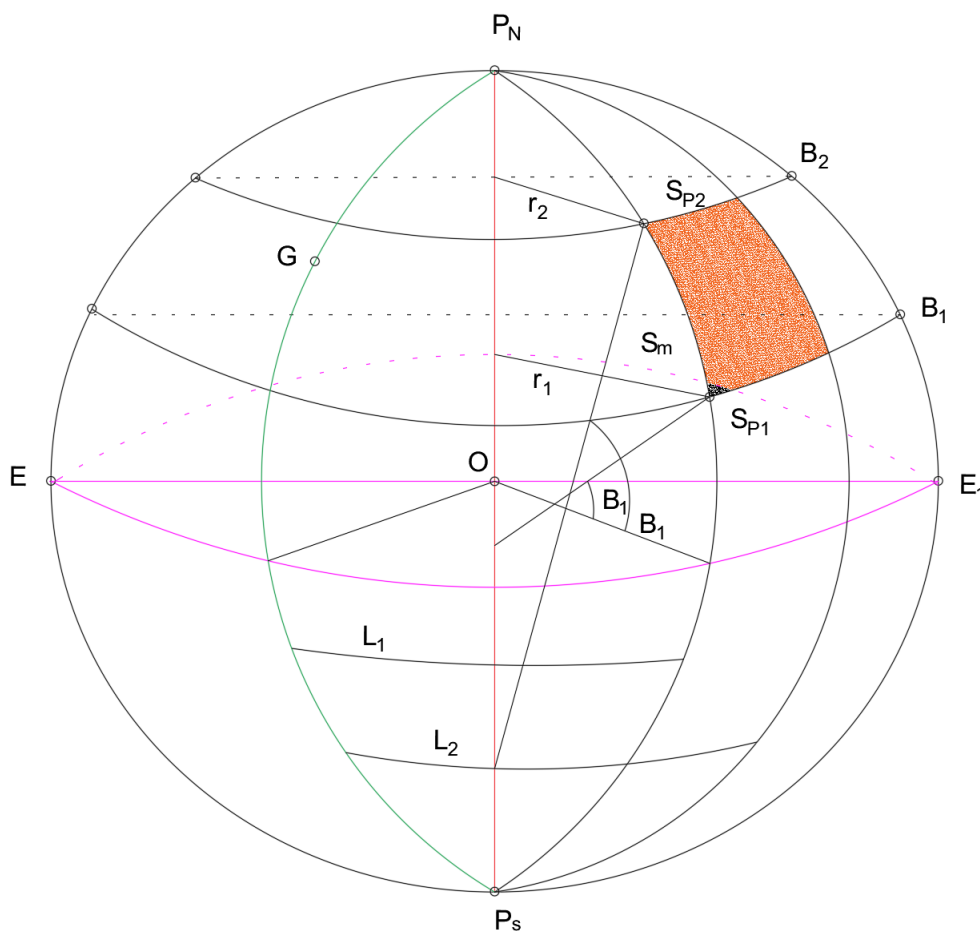


Fig. nr. 6.1– Suprafața unui trapez pe elipsoid

Pentru a calcula suprafața unui trapez de pe elipsoid sau sfera de rază medie se determină mai întâi lungimea arcului de meridian și a arcului de paralel . Iar apoi suprafața se calculează cu relația:

$$S_{trapez} = \frac{(l_{2-3} + l_{1-4}) \times l_{1-2}}{2}$$

CAPITOLUL 7.

SECȚIUNI NORMALE PE ELIPSOID

Secțiunile normale pe elipsoid sunt curbele generate de intersecția unui plan normal la o direcție dată cu elipsoidul. În context geodezic, aceste secțiuni sunt utilizate pentru a înțelege direcțiile și distanțele pe suprafața unui elipsoid (de exemplu, elipsoidul de referință al Pământului). Există mai multe tipuri de secțiuni normale, iar dintre acestea cele mai frecvent utilizate sunt:

1. Meridianul

- Este secțiunea rezultată prin intersecția elipsoidului cu un plan care conține axa de rotație a elipsoidului.
- Este o curbă specială care trece prin polii nord și sud ai elipsoidului și reprezintă calea cea mai scurtă între două puncte situate de-a lungul aceleiași longitudini.
- Toate meridianele sunt secțiuni normale, iar curbele rezultate sunt elipse.

2. Secțiunea normală în direcția azimutului

- Este secțiunea obținută prin intersecția elipsoidului cu un plan care este normal la suprafață în punctul considerat și are o direcție specifică (de exemplu, definită de un azimut).
- Aceasta secțiune este folosită pentru calcularea distanțelor pe elipsoid pe direcții arbitrare. Traseul este de obicei o elipsă, dar forma exactă depinde de azimutul ales și poziția pe elipsoid.

3. Secțiuni normale în plan orizontal și vertical (curbele principale)

Pe elipsoid, se pot trasa secțiuni normale care sunt tangente la planurile orizontale și verticale de la un punct specific. Aceste curbe principale sunt utilizate în calculul direcțiilor unghiurilor și în determinarea pozițiilor topografice.

Considerăm două puncte oarecare “ S_1 ” și “ S_2 ” pe suprafața elipsoidului de referință de latitudini și longitudini diferite (fig.7.1).

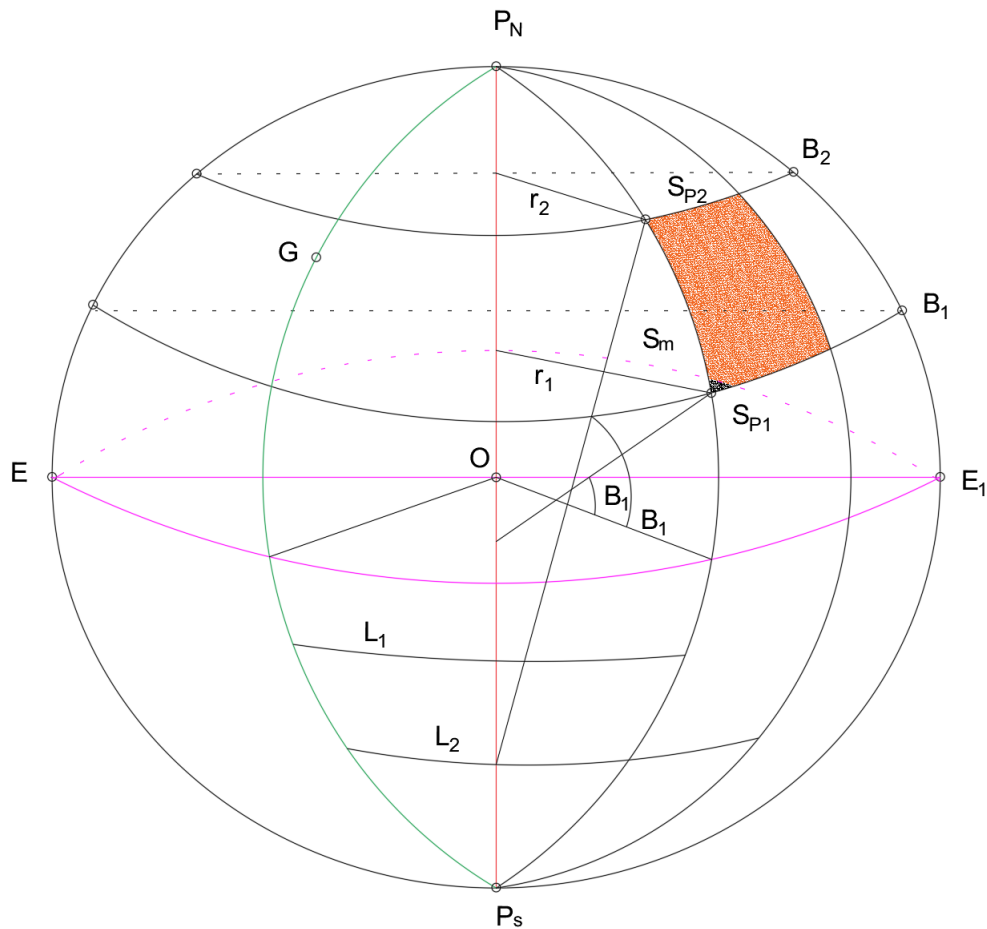


Fig. nr. 7.1 Secțiuni normale pe elipsoid

Normala în punctul “ S_1 ” împreună cu punctul “ S_2 ” determină un plan normal la suprafața elipsoidului, pe care o intersectează după linia S_1aS_2 , numită secțiune normală directă în punctul “ S_1 ”.

Normala în punctul “ S_2 ” împreună cu punctul “ S_1 ” determină un plan normal la suprafața elipsoidului pe care o intersectează după linia S_2bS_1 , numită secțiune normală directă în punctul “ S_2 ”.

Secțiunea normală directă “ S_1 ” este secțiunea inversă față de punctul “ S_2 ” și de asemenea secțiunea normală directă din “ S_2 ” este secțiune inversă față de punctul “ S_1 ”.

În general secțiunile normale din punctele “ S_1 ” și “ S_2 ” se numesc **secțiuni normale reciproce**.

Secțiunile normale reciproce sunt realizate concret în cazul observațiilor geodezice unghiulare.

Dacă admitem că, axa verticală a aparatului staționat în punctul “ S_1 ” coincide cu normala acestui punct, atunci linia de observație din “ S_1 ” către “ S_2 ” se află în planul normal care determină secțiunea normală directă. În consecință, corespunzător acestei linii de observație pe suprafața elipsoidului rezultă secțiunea normală directă din “ S_1 ”.

În același mod, pentru linia de observație realizată din “ S_2 ” către “ S_1 ”, avem pe suprafața elipsoidului secțiunea normală directă din “ S_2 ”.

Un caz particular a secțiunilor normale reciproce este atunci când cele două secțiuni coincid și acest lucru se întâmplă când punctele de viză sunt situate pe același meridian sau pe același paralel.

Dar, considerând cazul general și admitând că pe suprafața elipsoidului de referință există trei puncte de latitudini și longitudini diferite, prezența secțiunilor normale reciproce conduc la concluzii importante din punct de vedere geodezic.

Fie aceste puncte notate cu “ S_1 ”, “ S_2 ”, și “ S_3 ”. (fig.7.2) :

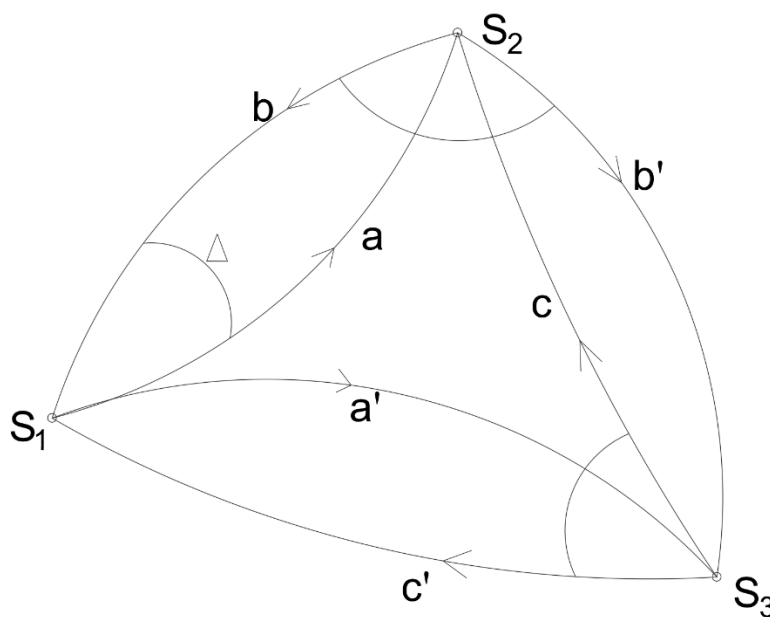


Fig. nr. 7.2. Secțiuni normale

Punctele considerate determină în principiu un triunghi pe suprafața elipsoidului.

Măsurătorile geodezice efectuate în punctele de vârf ale triunghiului conduc la obținerea unghiurilor “ α ”, “ β ”, “ γ ” care sunt definite de secțiunile normale directe. Este simplu de observat că aceste unghiuri nu aparțin unui triunghi bine definit.

Din această cauză se impune a fi înlocuite secțiunile normale reciproce cu linii unice .

Aceste linii, evident că vor conduce la obținerea unui triunghi bine definit .

Geometric, ele sunt linii geodezice ale căror proprietăți și poziție față de secțiunile reciproce urmează a fi tratate în continuare.

Secțiunile normale pe elipsoid sunt fundamentale pentru:

- Calculul direcțiilor și distanțelor pe suprafața elipsoidului, mai precis decât pe o sferă.
- Stabilirea traiectoriilor pe hărți și pentru navigație.
- Măsurători de poziționare GPS și cartografie, unde distanțele și unghiurile pe elipsoid trebuie să fie foarte precise.

7.1 Linia geodezică

Reprezintă secțiunea normală de-a lungul distanței celei mai scurte dintre două puncte pe suprafața elipsoidului, cunoscută și ca geodezică.

Aceasta linie nu coincide întotdeauna cu secțiunea normală, dar este folosită frecvent pentru a calcula distanțele dintre puncte aflate la suprafața elipsoidului, fiind curbura naturală între cele două puncte.

Fără a analiza din punct de vedere matematic linia geodezică sunt necesare totuși câteva precizări de ordin geometric legate de aceasta.

Linia geodezică între două puncte situate pe suprafața elipsoidului reprezintă o curbă unică și de lungime minimă.

Dacă suprafața Pământului se consideră o sferă, arcele de cerc mari sunt linii geodezice, iar dacă suprafața se consideră plană pe anumite porțiuni, liniile geodezice sunt linii drepte .

De menționat că cercurile mari se obțin prin intersecția sferei cu un plan normal ce trece prin centru sferei, sau prin cei doi poli.

Poziția liniei geodezice față de secțiunile normale reciproce este bine definită în sensul că este mai apropiată de secțiunea normală directă și mai depărtată de secțiunea normală inversă.

Liniile geodezice nu au echivalent în cadrul operațiilor geodezice de teren, ci intervin doar în procesele de calcul.

Pe direcția meridianelor secțiunile normale reciproce coincid cu linia geodezică.

Este de reținut și faptul că paralelele nu reprezintă linii geodezice.

7.2 Caracteristicile liniei geodezice

1. Călea cea mai scurtă între două puncte: Linia geodezică reprezintă distanța minimă între două puncte situate pe suprafața elipsoidului (sau a sferei, într-un caz simplificat).
2. Curbă dependentă de elipsoidul de referință: Deoarece Pământul nu este perfect sferic, ci ușor turtit la poli, linia geodezică se calculează ținând cont de forma elipsoidului. Distanțele și direcțiile diferă de cele care ar fi obținute pe o sferă perfectă.
3. Dificultate de calcul: Determinarea exactă a liniei geodezice necesită calcule complexe bazate pe formule matematice elaborate (cum ar fi ecuațiile lui Vincenty) pentru a considera atât forma elipsoidului cât și poziția punctelor de pornire și de destinație.

7.3 Utilizarea liniei geodezice în geodezie și cartografie

Linia geodezică are o importanță majoră în:

- Calculul distanțelor exacte între două puncte: Este esențială în geodezie pentru măsurarea distanțelor la suprafața Pământului cu acuratețe.
- Navigație și aviație: Rutele de zbor și traseele de navigație sunt adesea planificate pe baza liniilor geodezice, deoarece acestea reprezintă călea cea mai scurtă între două puncte la suprafața terestră.
- Proiecții cartografice: În cartografie, linia geodezică este utilizată pentru a transforma distanțele și unghiurile într-un sistem de coordonate bidimensional, permițând reprezentarea realistă a distanțelor și direcțiilor pe hărți.

7.4 Poziția liniei geodezice față de secțiunile normale reciproce

În măsurătorile geodezice, așa cum s-a arătat, este necesară trecerea de la secțiunile normale la linia geodezică. Pentru aceasta trebuie stabilită poziția liniei geodezice față de secțiunile normale.

Pentru rețelele de triangulație de ordinul I (maximum 60 km) liniile geodezice diferă față de secțiunile normale reciproce atât azimutal și ca lungime. Dacă diferența de lungime

nu se ia în considerare, fiind foarte mică, diferența de azimut trebuie luată în considerare, chiar dacă este foarte mică.

În acest sens, s-a stabilit că linia geodezică împarte unghiul dintre secțiunile reciproce în raportul de 1/2, fiind mai apropiată de secțiunea normală directă.

Deci , dacă în punctul “A” (fig.7.3) unghiul format de secțiunile normale este “ Δ ” atunci, unghiul format de linia geodezică cu secțiunea normală directă este $\delta_1 = \frac{\Delta}{3}$, iar unghiul format de linia geodezică cu secțiunea normală inversă este $\delta_2 = \frac{2\Delta}{3}$. Situația este similară în punctul “B”.

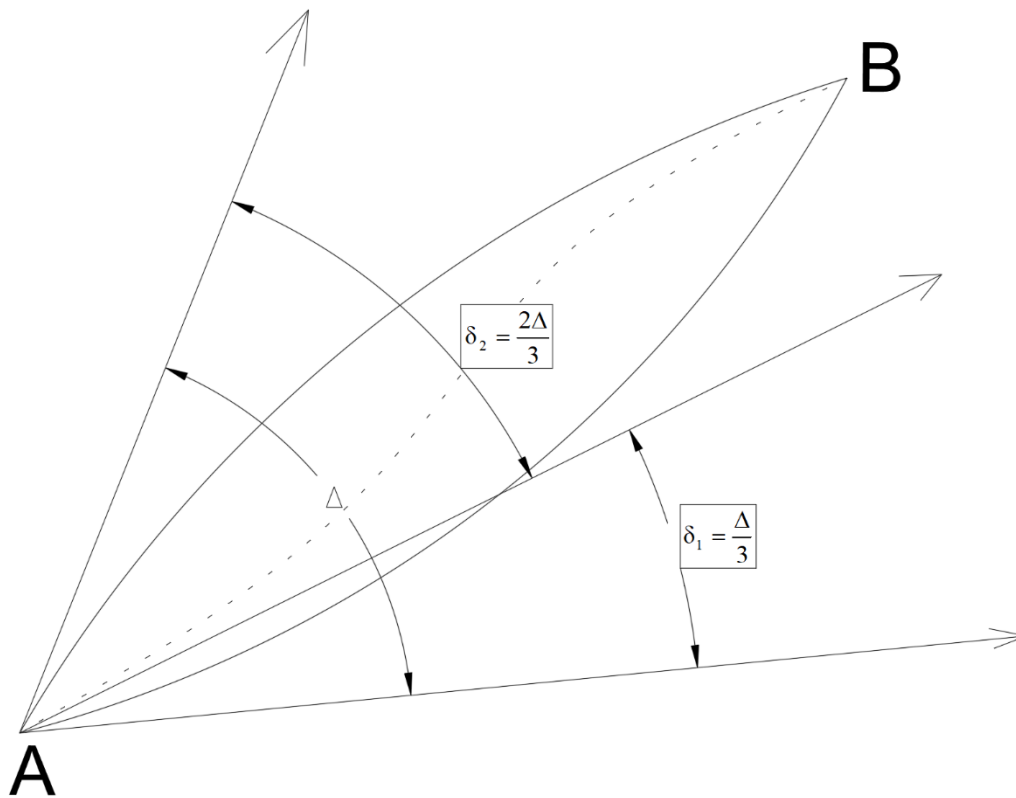


Fig. nr. 7.3 Linia geodezică

După Jordan W.ș.a. 1958 și Bagratunii G.V. 1962 (citați de Dragomir V. [10]), unghiul format de secțiunile normale reciproce “ Δ ” se calculează cu relația:

$$\Delta^{cc} = \rho^{cc} \frac{s_1^2 \eta_m^2}{4N_m^2} \sin 2A_1 \quad (7.1)$$

în care :

s_1 – lungimea liniei geodezice;

N_m – raza mare de curbură calculată pentru latitudinea medie a liniei geodezice;

$\eta_m = e' \cos B_m$;

A_1 – azimutul liniei geodezice.

Din relația (1.88) rezultă: pentru $A_1=0^\circ$ și respectiv $A_1=100^\circ$, $\Delta=0$, ceea ce confirmă afirmațiile anterioare că pe direcția meridianelor și paralelelor secțiunile normale reciproce coincid. Valorile maxime pentru Δ se obțin când $A_1=50^\circ$, însă și în aceste caz valorile sunt foarte mici.

Pentru exemplificare, se prezintă valorile lui Δ și $\Delta/3$ pentru lungimile laturilor medii ale rețelei de triangulație pentru $B_m=46^\circ$ și $A_1=50^\circ$ (tab.7.1).

Tabelul 7.1

S (km)	Δ [cc]	$\Delta/3$ [cc]
2	0.000051	0.000017
4	0.000203	0.000068
7	0.000621	0.000207
15	0.002852	0.000951
25	0.007923	0.002641
30	0.011409	0.003803
100	0.126771	0.042257

7.5 Corecția de reducere la linia geodezică

Corecția de reducere la linia geodezică se aplică pentru a efectua trecerea de la secțiunea normală directă, prin care se reprezintă linia de observație pe suprafața elipsoidului, la linia geodezică.

O linie de observație realizată între două puncte situate pe suprafața terestră se reprezintă pe suprafața elipsoidului prin secțiunea normală AB. Azimutul acestei linii este “ A_m ” și rezultă din măsurători (fig. 7.4):

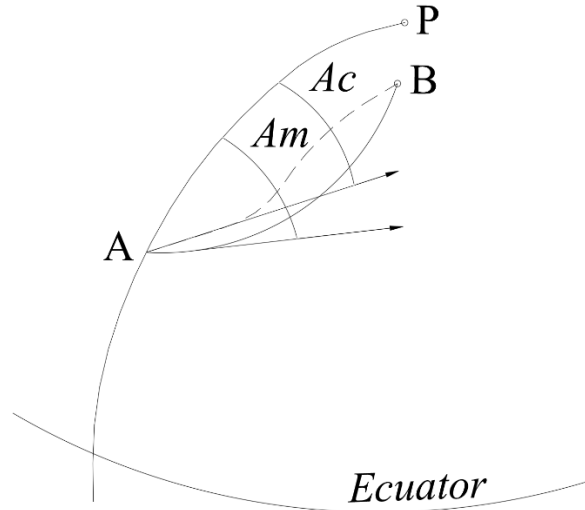


Fig. nr. 7.4 Azimutul liniei geodezice

Azimutul liniei geodezice fiind “ A_c ”, este necesar a fi corectat azimutul secțiunii normale directe cu o corecție “ C_1 ”, numită corecție de reducere la linia geodezică, astfel încât:

$$A_c = A_m - C_1 \quad (7.2)$$

Expresia de calcul a corecției “ C_1 ” a fost demonstrată în funcție de azimutul secțiunii normale directe calculat din coordonatele ecuației parametrice Puiseaux-Weingarteh-Gauss ale liniei geodezice pe elipsoidul de referință, prin dezvoltări în serie:

$$C_1^{cc} = \rho^{cc} \frac{e^2 s^2}{12 R_m^2} \cos^2 B_m \sin 2A_m \quad (7.3)$$

în care :

e – prima excentricitate;

s – distanța între punctele “ S_1 ” și “ S_2 ”, în km ;

B_m – latitudinea medie ;

R_m – raza medie pentru latitudinea medie.

Corecția de reducere la linia geodezică trebuie luată în calcul numai în cazul triangulațiilor de ordinul I (când distanțele sunt de mărimea 20 – 60 km).

O expresie de calcul mai precisă a fost stabilită de Jordan 1958:

$$C_1^{cc} = \rho^{cc} \left(\frac{s_1^2 \eta_m^2}{12 N_m^2} \sin 2A_1 - \frac{s_1^3 \eta_m^2}{24 N_m^3} t \sin A \right) \quad (7.4)$$

unde: $t = \operatorname{tg} B$

$$\eta_m = e' \cos B_m$$

7.6 Calculul liniei geodezice

În practică, linia geodezică între două puncte pe elipsoid este calculată folosind:

- A. Formule de Vincenty: O metodă iterativă precisă pentru calculul distanței și azimutului (direcției) între două puncte de pe elipsoid. Aceasta este utilizată pentru elipsoizi de rotație și oferă rezultate precise.

Formula lui Vincenty este o metodă precisă de calcul pentru determinarea distanței și a direcției (azimutului) între două puncte pe suprafața elipsoidului de rotație. Aceasta este frecvent utilizată în geodezie și cartografie pentru aplicații care necesită măsurători de mare precizie pe suprafața Pământului, care este aproximată printr-un elipsoid de referință.

Vincenty a dezvoltat două seturi de formule:

1. Formula directă (Direct problem): Calculul coordonatelor punctului final, date fiind coordonatele punctului de pornire, distanța și azimutul.
2. Formula inversă (Inverse problem): Calculul distanței și azimutului între două puncte cunoscute (date prin coordonate).

Parametrii utilizați

Pentru a aplica formula lui Vincenty, sunt necesari următorii parametri ai elipsoidului de referință:

- a = semi-axa mare a elipsoidului.

- f = turtirea sau aplatizarea elipsoidului,

Formula lui Vincenty - Problema inversă

Pentru a calcula distanța și azimutul dintre două puncte cunoscute S_1 și S_2 :

1. Se calculează diferența de longitudine $L = \lambda_2 - \lambda_1$

2. Se calculează următorii parametri iterativi:

- $U_1 = \arctag((1 - f) * tg(\varphi_1))$
- $U_2 = \arctag((1 - f) * tg(\varphi_2))$

3. Se inițializează valoarea pentru unghiul de azimut la longitudinea diferențială λ , apoi iterați folosind următoarele formule:

- Se calculează $\sin \sigma$ și $\cos \sigma$, unde σ este unghiul pe elipsoid dintre cele două puncte.

- Se actualizează valorile până când convergența este obținută (sub o eroare de aproximare acceptabilă).

4. Se calculează lungimea arcului (distanța) și azimuturile inițiale și finale.

Formula lui Vincenty - Problema directă

Pentru a calcula coordonatele punctului final S_2 , cunoscând punctul de pornire S_1 , distanța s și azimutul α_1 :

1. Se calculează unghiul redus.

$$U_1 = \arctag((1 - f) * tg(\varphi_1))$$

2. Se calculează parametrii intermediari, precum $\sin \sigma$ și $\cos \sigma$, în funcție de azimut și distanță.

3. Se determină coordonatele punctului final și azimutul final α_2 iterând formula până la convergență.

B. Formulele lui Helmert și alte metode aproximative: Folosite pentru calcule mai rapide, însă pot fi mai puțin precise, în funcție de necesitățile aplicației.

7.7 Importanța liniei geodezice

Linia geodezică permite realizarea de măsurători precise și riguroase, care sunt fundamentale în domenii precum:

- Cartografiere de precizie: Realizarea hărților topografice, cadastrale și de infrastructură.
- Monitorizarea terenului: Măsurători necesare pentru studiile de deformare a crustei terestre.
- Sisteme de poziționare globală (GPS): Calculul precis al distanțelor și direcțiilor dintre puncte GPS, îmbunătățind acuratețea poziționării.

Linia geodezică este esențială pentru a înțelege și a descrie exact distanțele și relațiile spațiale între puncte pe suprafața curbată a Pământului, susținând astfel numeroase aplicații geodezice și cartografice.

CAPITOLUL 8.

REDUCEREA OBSERVAȚIILOR GEODEZICE PE SUPRAFAȚA ELIPSOIDULUI DE REFERINȚĂ

Este foarte important de reținut că înainte de a fi folosite în calcule, observațiile geodezice se reduc la suprafața elipsoidului de referință.

Această operație este necesară întrucât observațiile de teren sunt raportate la verticala pe geoid, dată de poziția firului cu plumb, în timp ce calculele se efectuează pe elipsoid după ce observațiile instrumentale au fost proiectate pe elipsoidul de referință, după normala la acesta.

Pentru calculul corecțiilor de reducere pe elipsoid a observațiilor geodezice este necesară determinarea prealabilă a undulațiilor geoidului „N” și a componentelor deviației verticalei

Aducerea rețelelor geodezice de sprijin, existente pe suprafața fizică a Pământului, pe suprafața elipsoidului de referință se poate realiza după mai multe metode, dintre care se vor menționa cele mai importante.

Metoda desfășurării. Elementele măsurate pe suprafața fizică a Pământului se reduc la suprafața geoidului (la nivelul mării) urmând să fie supuse unei compensări, în funcție de geometria rețelei de triangulație.

Pentru calcule se alege un *punct fundamental*, în care se consideră că elipsoidul de referință este tangent la geoid. De asemenea, se acceptă identitatea dintre coordonatele astronomice și cele geodezice, precum și coincidența normalei la elipsoid cu verticala la geoid.

Rezultă astfel *datele inițiale ale triangulației*: coordonatele geodezice ale punctului fundamental, lungimea și azimutul unei laturi care unește acest punct cu un punct oarecare al rețelei de triangulație. Calculele se efectuează în continuare prin desfășurare; pornind din punctul fundamental se determină coordonatele tuturor punctelor rețelei, folosindu-se elementele reduse la suprafața geoidului, fără a se mai realiza trecerea lor la suprafața elipsoidului de referință.

Metoda desfășurării introduce erori sistematice de calcul, care se măresc pe măsura îndepărtării de punctul fundamental și, ca urmare, poate fi utilizată numai pentru teritorii relativ mici, pentru care se poate admite că elipsoidul de referință înfășoară optim suprafața geoidului.

În acest mod s-a calculat triangulația primordială de ordinul I din țara noastră, dinaintea celui de-al doilea război mondial, pe elipsoidul internațional *Hayford*. Punctul fundamental s-a considerat în observatorul astronomic militar din *Dealul Piscului* cu viză de orientare spre *Foișorul de foc*.

Metoda proiectării- constă în aducerea elementelor măsurate (unghiuri, direcții, lungimi ș.a.) pe suprafața elipsoidului de referință, prin aplicarea unor corecții. În cadrul metodei proiectării se cunosc variantele Pizzetti și Bruns-Helmert.

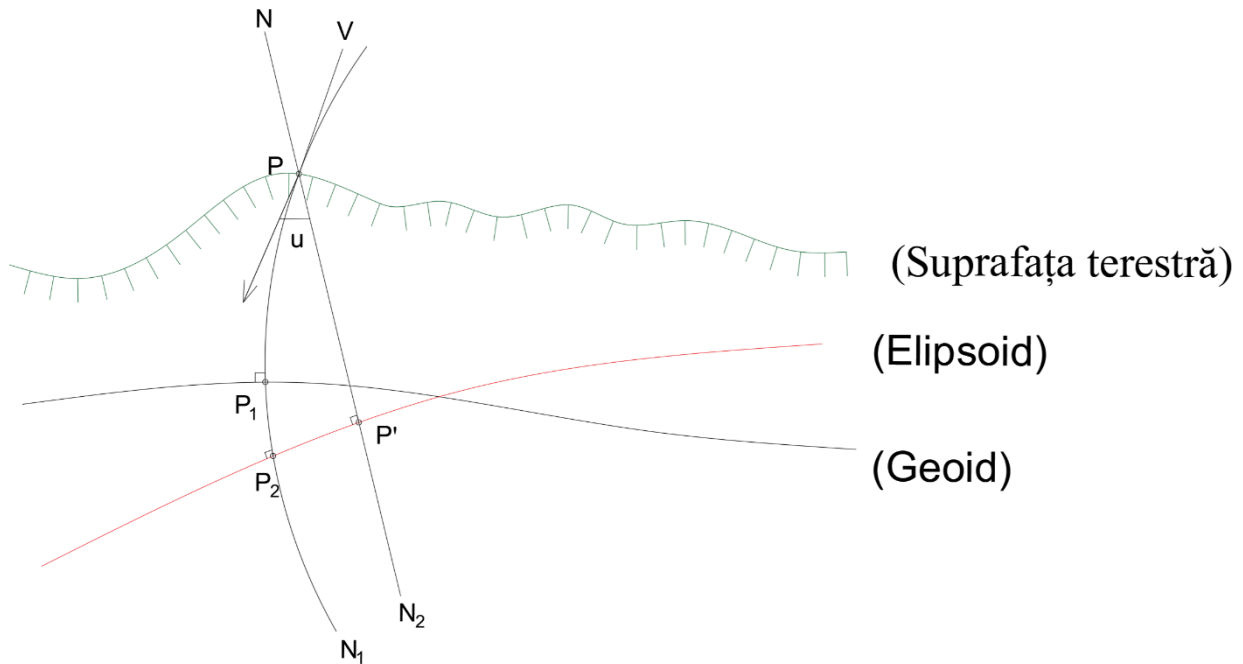


Fig. nr. 8.1 Metode de proiectare a observațiilor pe elipsoid

Metoda Pizzetti – constă în proiectarea punctului „P” de pe suprafața fizică a Pământului (fig.1.16) pe suprafața geoidului, în punctul „P₁”, după tangenta la linia de forță (cu ajutorul verticalei). Din punctul „P₁” se proiectează, apoi, în punctul „P₂”, cu ajutorul normalei la elipsoid. Datorită faptului că la aplicarea corecției în prima etapă ar necesita cunoașterea curburilor verticalelor, metoda nu a cunoscut o aplicabilitate practică.

Metoda Bruns- Helmert – constă în proiectarea punctului „P” de pe suprafața fizică a Pământului în punctul P’ după normala la elipsoid. Metoda a cunoscut o aplicabilitate mai largă, fiind utilizată la realizarea triangulației Rusiei, a țării noastre și la alte mari rețele de triangulație. “S₁” (fig.1.16).

Diferențele care se obțin prin utilizarea celor două metode sunt mici.

8.1 Reducerea observațiilor azimutale

Pentru reducerea direcțiilor și a unghiurilor azimutale pe suprafața de referință se aplică următoarele corecții:

- corecția de reducere de la secțiunea normală directă la linia geodezică
- corecția datorată altitudinii punctului vizat;
- corecția datorată deviației verticalei.

8.1.1 Corecția datorată altitudinii punctului vizat

Corecția datorată altitudinii punctului vizat este un element important în diverse aplicații, cum ar fi geodezia, topografia sau navigația, și se referă la ajustarea măsurătorilor pentru a ține cont de diferențele de altitudine între punctul de observație și punctul vizat. Aceasta poate afecta unghiurile, distanțele și alte calcule necesare pentru precizia măsurătorilor.

Definiție: Corecția datorată altitudinii punctului vizat se calculează pentru a corecta distanța măsurată pe baza diferenței de altitudine între puncte, luând în considerare curbura Pământului și refracția atmosferică.

Punctele situate pe suprafața topografică au înălțimi diferite deci liniile de observație, în general, nu sunt conținute de suprafețele de nivel.

Considerăm că punctul “S₁” este situat pe suprafața elipsoidului de referință, iar punctul “S₂” pe o suprafață de nivel oarecare .

În această situație punctul “S₂” va avea o înălțime “H” față de punctul “S₁”.

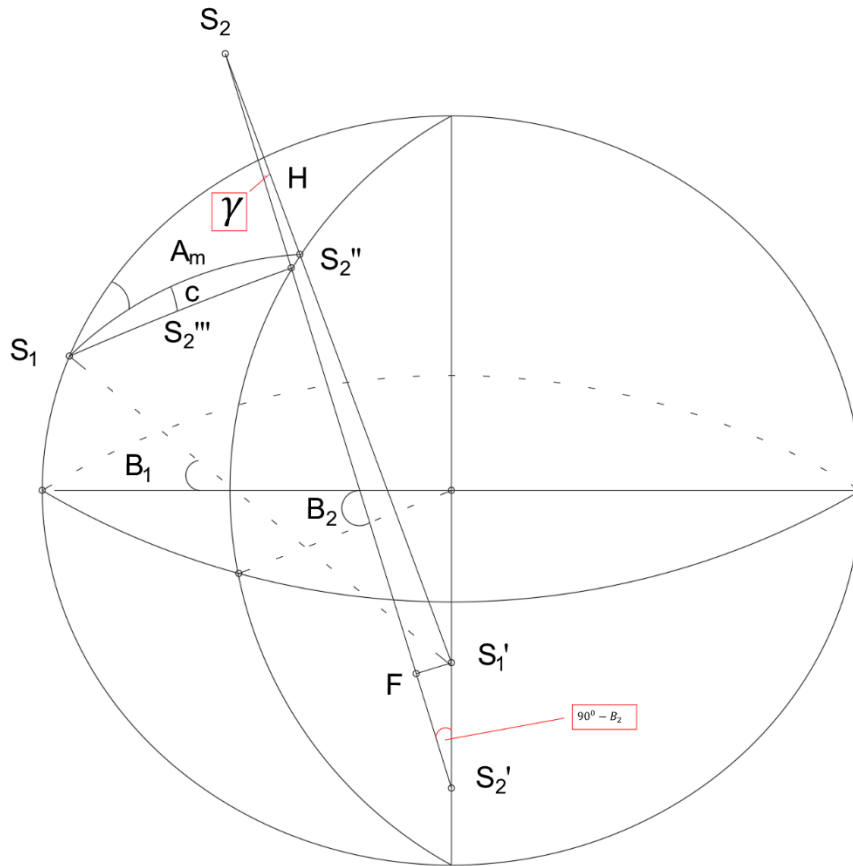


Fig. nr. 8.2 Corecția de altitudine

Proiecția punctului “S₂” pe suprafața elipsoidului, se face cu ajutorul normalei la această suprafață. Normala din “S₂” la elipsoid determină punctul “S₂”.

Măsurând azimutul direcției $S_1 S_2$, obținem unghiul pe care-l face secțiunea normală directă $S_1 S_2''$ cu meridianul punctului “ S_1 ”.

În consecință, se măsoară “ A_m ” și trebuie determinat “ A_c ”. Trecerea de la azimutul “ A_m ” la azimutul “ A_c ” se face introducând o corecție “ C_2 ”, numită corecția datorită înălțimii punctului vizat, relația utilizată fiind :

$$A_c = A_m + C_2 \quad (8.1)$$

Pentru calculul valorii corecției “C₂” a fost stabilită relația:

$$C_2^{cc} = \frac{He^2 \rho^{cc}}{2M_2} \cos^2 B_2 \sin 2A_m \quad (8.2)$$

în care :

H – înălțimea punctului “B” în Km;

M_2 – raza mică de curbură în punctul “S₂”, de latitudine “B₂”;

Corecția datorită înălțimii punctului vizat are importanță practică numai pentru cazurile în care $H \geq 20$ m.

8.2 Corecția datorată deviației verticalei

Corecția datorată deviației verticalei este un aspect fundamental în geodezie, utilizat pentru a lua în considerare abaterea verticalei reale față de verticala teoretică definită de elipsoidul de referință. Această deviație apare din cauza neregularităților gravitaționale ale Pământului, care determină ca direcția gravitației locale să nu fie perfect perpendiculară pe suprafața elipsoidului.

Definiție

Deviația verticalei reprezintă unghiul dintre direcția verticalei fizice (determinată de gravitație la un punct specific) și direcția normală la elipsoidul de referință.

Corecția datorată deviației verticalei este necesară pentru a ajusta coordonatele măsurate, unghiurile și alte elemente geodezice astfel încât să fie compatibile cu modelul matematic utilizat (elipsoidul).

Componentele deviației verticalei

Deviația verticalei are două componente:

1. Componenta est-vest (ζ): determină abaterea în plan longitudinal.
2. Componenta nord-sud (η): determină abaterea în plan latitudinal.

Corecția datorată deviației verticalei

Corecția se aplică unghiurilor și coordonatelor și se calculează utilizând valorile deviației verticalei (ζ, η).

Formula generală:

Corecția unghiului orizontal este aproximativ:

$$\Delta H = \xi \tan(B) + \eta$$

unde:

- ΔH = corecția datorată deviației verticalei (secunde de arc sau radiani),
- ξ, η = componentele deviației verticalei,
- B = latitudinea punctului vizat.

Intrucât instrumentele topografice se poziționează, în procesul de măsurare, după verticala locului, iar procesele de calcul se execută pe elipsoid, după ce în prealabil măsurătorile au fost proiectate pe acesta, corecția datorată abaterii de la verticală apare ca necesară prin aceea că într-un punct oarecare situat pe suprafața terestră verticala locului nu coincide cu normala la elipsoidul de referință.

Fie în acest sens punctul “ S_1 ” în care sunt cunoscute coordonatele geografice elipsoidale “ B ” și “ L ” și coordonatele astronomice “ Φ ” și “ Λ ”.

Sunt notate de asemenea azimutul geodezic cu “ A ” către un alt punct “ S_2 ” și azimutul astronomic α către același punct.

Construim o sferă auxiliară cu raza egală cu unitatea, suprafața căreia va fi intersectată de normala la elipsoid în punctul “ Z_g ” și de verticala punctului “ A ” în “ Z_a ”.

O paralelă la axa de rotație a Pământului, determină pe sfera auxiliară punctul “ P ”, iar direcția S_1S_2 punctul S_2' .

Este cunoscut că normala la elipsoid în punctul “ S_1 ” determină față de planul ecuatorului unghiul de latitudine geodezică “ B ”. Același lucru în cazul verticalei din punctul “ S_1 ”, planul ecuatorului determină unghiul de latitudine astronomică “ Φ ”. Unghiurile “ B ” și “ Φ ” le găsim și pe sfera auxiliară. Pe sfera auxiliară se mai găsesc unghiul zenital aparent Z^0 și corespondentul acestuia unghiul zenital redus la normala la elipsoid “ Z^E ”. Cunoscând longitudinile în punctele “ Z_g ” și “ Z_a ” situate pe sferă, unghiul din “ P ” va fi $\Lambda - L$.

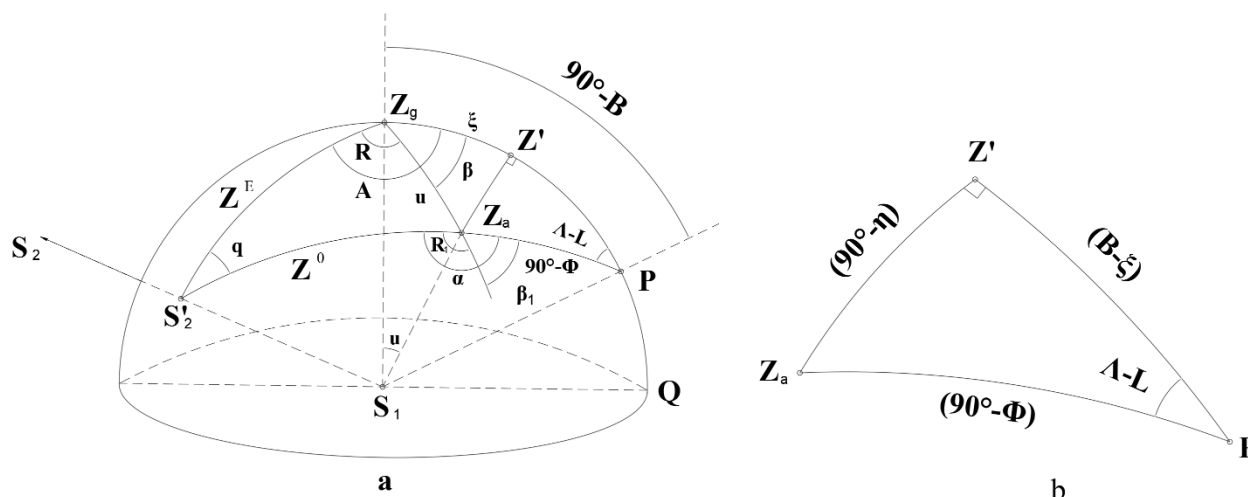


Fig. nr. 8.3 Abaterea de la verticală

Față de direcția nordului proiectat prin “P”, direcția S_1S_2 va avea azimutul geodezic “A” și azimutul astronomic “α”.

Se proiectează punctul “Za” pe direcția Z_gP și se obține punctul z' . Catetele triunghiului sferic $Z_gZ'Z_a$ notate cu “ξ” și “η” se numesc componentele abaterii de la verticală “u”.

Unde: “η” și “ξ” se obțin rezolvând triunghiul geodezic $PZ'Z_a$ după cum urmează:

$$\frac{\sin \eta}{\sin(\Lambda - L)} = \frac{\sin(90^\circ - \Phi)}{\sin 90^\circ} \quad (8.3)$$

sau:

$$\frac{\sin \eta}{\sin(\Lambda - L)} = \frac{\cos \Phi}{1} \quad (8.4)$$

Deoarece termenii din membrul stâng al relației (8.4) sunt foarte mici se asimilează funcția cu valoarea argumentului, rezultând:

$$\eta = (\Lambda - L) \cos \Phi \quad (8.5)$$

Componenta “ξ” se determină în același triunghi sferic transformat după regula lui Neper. Aceasta constă în înlocuirea laturilor adiacente unghiului drept “A” prin complementele lor $90^\circ - b$, $90^\circ - c$, după care, cosinusul fiecărui element este egal cu produsul elementelor neadiacente sau cu produsul cotangentelor adiacente. Triunghiul transformat este prezentat în fig.8.3, pe baza căruia rezultă:

$$\cos(\Lambda - L) = \operatorname{ctg}(90^\circ - \Phi) \operatorname{ctg}(B + \xi) \quad (8.6)$$

Datorită valorii mici a diferenței dintre latitudinea astronomică “ Λ ” și cea geodezică “ L ” se aproximează cosinusul acestei diferențe cu “1”, astfel se poate scrie:

$$\operatorname{tg}(B + \xi) = \operatorname{tg} \Phi \quad (8.7)$$

sau:

$$\xi = \Phi - B \quad (8.8)$$

Corecția datorită abaterii de la verticală “ C_3 ”, ce se aplică măsurătorilor azimutale, se calculează în funcție de componentele “ ξ ” și “ η ”, de azimutul geodezic “ A ” și de unghiul zenital aparent “ Z^0 ” și rezultă dintr-o componentă corectivă de reducere a azimutelor astronomice:

$$C_3^{cc} = (\eta^{cc} \cos A - \xi^{cc} \sin A) \operatorname{ctg} Z^0 \quad (8.9)$$

Unghiul zenital din (8.9) se calculează cu relația:

$$Z^0 = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{\Delta H}{D} \right) \quad (8.10)$$

unde:

$-\Delta H$ -diferența de nivel se calculează prin nivelment geometric sau trigonometric (pentru lungimi de până la 4km).

Comparativ cu celelalte două corecții examinate anterior, corecția datorită deviației verticalei este mai semnificativă și deci este justificată aplicarea ei.

8.3 Reducerea determinărilor astronomice pe elipsoidul de referință

Reducerea determinărilor astronomice se referă la reducerea coordonatelor și azimutelor astronomice.

8.3.1 Reducerea coordonatelor astronomice

Cunoscând componentele astrono – geodezice ale deviației verticalei, prezentate în §1.11.1.2, se pot calcula coordonatele geodezice pe suprafața elipsoidului, din relațiile (8.8) și (8.5):

$$B = \Phi - \xi \quad (8.11)$$

$$L = \Lambda - \eta \sec \Phi \quad (8.12)$$

Intrucât coordonatele astronomice sunt determinate cu erori de poziție mult mai mari decât erorile impuse coordonatelor geodezice, relațiile (8.11) și (8.12) sunt utilizate numai pentru controlul unor puncte amplasate la distanțe de ordinul sutelor de kilometri.

Pentru reducerea observațiilor astronomice la suprafața geoidului, Heiskanen și Moritz (1967), utilizează relațiile:

$$\begin{aligned} \Phi_{geoid} &= \Phi - 0.171 H_{km} \sin 2B \\ \Lambda_{geoid} &= \Lambda \end{aligned} \quad (8.13)$$

unde:

H_{km} -altitudinea aproximativă a punctului considerat, în km.

8.3.2 Reducerea azimutelor astronomice

Pentru a reduce azimutul astronomic “ α ” la azimutul geodezic “ A ” în fig.8.3, se observă că:

$$\begin{aligned} A &= \beta + R \\ \alpha &= \beta_1 + R_1 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Scăzând a doua relație din prima și trecând pe „ α ” în membrul drept se poate scrie:

$$A = \alpha + (\beta - \beta_1) + (R - R_1) \quad (8.15)$$

Pentru a determina $(\beta - \beta_1)$ în funcție de elementele cunoscute, în triunghiul sferic $Z_g P Z_a$, se aplică formula cosinusului de unghi :

$$\cos \beta = \cos(180 - \beta_1) \cos(\Lambda - L) + \sin(180 - \beta_1) \sin(\Lambda - L) \cos(90^\circ - \Phi) \quad (8.16)$$

Tinând cont de funcțiile complementare și suplimentare, în limita aproximațiilor admisibile, relația (1.106) devine:

$$\beta - \beta_1 = -(\Lambda - L) \sin \Phi = -\eta \operatorname{tg} \Phi \quad (8.17)$$

În mod analog în triunghiul $Z_g Z_a S'_2$ se poate scrie:

$$\cos R = \cos(180 - R_1) \cos q + \sin(180 - R_1) \sin q \cos Z^0 \quad (8.18)$$

de unde :

$$R - R_1 = -\sin q \cos Z^0 \quad (8.19)$$

Mărimea unghiului “q” se determină din același triunghi sferic prin aplicarea formulei sinusului:

$$\frac{\sin q}{\sin u} = \frac{\sin R}{\sin Z^0} \Rightarrow \sin q = \frac{u \sin R}{\sin Z^0} \quad (8.20)$$

Înlocuind (8.20) în (8.19) și exprimând pe “u” în funcție de componentele deviației verticalei “ξ” și “η” se obține:

$$R - R_1 = (\xi \cos A + \eta \sin A) \operatorname{ctg} Z^0 \quad (8.21)$$

Înlocuind relațiile (8.7) și (8.21) în (8.5) se obține azimutul geodezic în funcție de azimutul astronomic:

$$A = \alpha - (\Lambda - L) \cos \Phi + (\xi \cos A + \eta \sin A) \operatorname{ctg} Z^0 \quad (8.22)$$

Intrucât diferențele de nivel, dintre punctele în care se determină lungimea unei baze și azimutul astronomic al acesteia, sunt mici, în relația (8.22) $Z^0 \rightarrow 90^0$, iar $\operatorname{ctg} Z^0 \approx 0$. În aceste condiții (8.22) devine:

$$A = \alpha - (\Lambda - L) \sin \Phi = \alpha - \eta \operatorname{tg} \Phi \quad (8.23)$$

Relația (8.23) se utilizează în rețelele de ordin superior și este cunoscută sub denumirea de ecuația Laplace.

CAPITOLUL 9.

PROBLEME GEODEZICE FUNDAMENTALE

În rețelele geodezice de ordin I, cu lungimea laturilor cuprinsă între $30 \div 60$ km, pentru diversele calcule care se fac este nevoie de coordonatele punctelor pe suprafața elipsoidului de referință. Pentru a determina aceste coordonate, în raport cu situația specifică, se pun două probleme fundamentale și anume:

- problema geodezică directă, apare atunci când se cunosc coordonatele geodezice ale unui punct, lungimea liniei geodezice către alt punct și azimutul acestei direcții și se cere determinarea coordonatelor geodezice ale celui de-al doilea punct, precum și valoarea azimutului invers;
- problema geodezică inversă, apare atunci când se cunosc coordonatele geodezice a două puncte și se cere determinarea lungimii liniei geodezice dintre cele două puncte și a azimutelor (direct și invers).

Cu problema geodezică directă sunt calculate coordonatele geografice ale punctelor geodezice din rețelele de ordin I, iar cu problema geodezică inversă sunt calculate elementele geodezice inițiale (distanțe și azimute) și se verifică în același timp calculele efectuate la problema geodezică directă.

Datorită scopului pe care-l urmărește și anume determinarea coordonatelor, problema geodezică directă se întâlnește în literatura de specialitate sub numele de problema transportului de coordonate.

Precizia de calcul urmărește ca valoarea erorilor de calcul să fie de circa 10 ori mai mică față de erorile medii ale mărimilor măsurate.

La rețelele geodezice de ordinul I, este nevoie ca aproximația de calcul să meargă până la următoarele valori:

- pentru coordonatele φ și $\lambda \pm 0^{\prime\prime}0001$ (zecimi de miimi de secundă) se știe că un arc de meridian de $1^{\prime\prime} \cong 30m$.
- pentru azimute: $\pm 0^{\prime\prime}001$ (miime de secundă);
- pentru distanțe: $\pm 0.001mm$.

Deoarece distanțele în rețelele de triangulație de ordinul I sunt relativ mici ($30 \div 60$ km), la rezolvarea problemelor geodezice se aplică metode în care se acceptă unele aproximații, cum ar fi: dezvoltările în serie, înlocuirea suprafeței elipsoidului cu sfera de rază medie.

9.1 Problema geodezică directă

Se consideră două puncte S_1 și S_2 pe elipsoidul de rotație. Se cunosc coordonatele φ_1 și λ_1 , ale punctului S_1 , lungimea s a liniei geodezice dintre cele două puncte și azimutul A_1 al liniei geodezice (fig. 9.1).

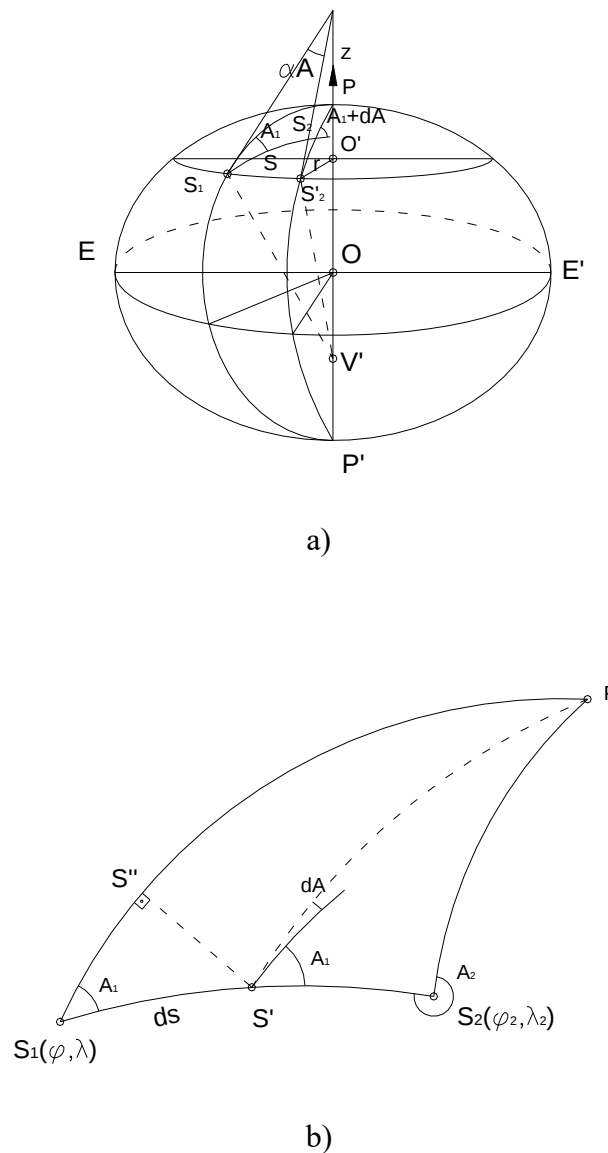


Fig. nr. 9.1 Metoda transportului de coordonate.

Metoda dezvoltărilor în serie

La această problemă diferențele de latitudine $(\varphi_2 - \varphi_1)$, longitudine $(\lambda_2 - \lambda_1)$ și azimut $(A_2 - A_1)$ ale punctelor S_1 și S_2 , depind de lungimea liniei geodezice, se acceptă următoarele dezvoltări în serie Mac Laurin:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial S} \cdot S + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} \cdot \frac{S^2}{2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial S^3} \cdot \frac{S^3}{6} + \dots \quad (9.1)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial S} \cdot S + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial S^2} \cdot \frac{S^2}{2} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial S^3} \cdot \frac{S^3}{6} + \dots \quad (9.2)$$

$$A_2 = A_1 \pm 200^g + \frac{\partial A}{\partial S} \cdot S + \frac{\partial^2 A}{\partial S^2} \cdot \frac{S^2}{2} + \frac{\partial^3 A}{\partial S^3} \cdot \frac{S^3}{6} + \dots \quad (9.3)$$

Termenii până la S^3 inclusiv, din aceste dezvoltări au fost determinați de Legendre, de aceea metoda se mai numește M. Legendre.

Pentru calculul derivatelor de ordinul I din relațiile de mai sus, se va considera triunghiul

elipsoidal elementar $S_1 S^{\parallel} S^{\perp}$ (fig. 9.1) în care:

$$S_1 S^{\parallel} = ds \cdot \cos A_1 = M_1 \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\cos A_1}{M_1} = \frac{V_1^3}{C} \cos A_1 \quad (9.4)$$

$$M_1 = \frac{C}{V_1^3}; \quad V_1 = \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi}; \quad c = \frac{a^2}{b} \quad (9.5)$$

$$S^{\perp} S^{\parallel} = ds \cdot \sin A_1 = r \cdot d\lambda = N \cdot \cos \varphi \cdot dr \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial S} = \frac{\sin A_1}{N_1 \cos \varphi_1} \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial S} = \frac{V_1}{C} \cdot \frac{\sin A_1}{\cos \varphi_1} \quad (9.7)$$

Plecând de la relația lui Clairaut:

$$dA = \sin \varphi \cdot d\lambda \quad (9.8)$$

$$\frac{dA}{d\lambda} = \sin \varphi \cdot \frac{d\lambda}{ds} \Rightarrow \frac{dA}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \sin \varphi \cdot \frac{\sin A}{N \cdot \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sin A}{N} \quad (9.9)$$

Dacă se notează $tg \varphi = t$, se poate scrie:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{t}{N} \sin A = t \cdot \frac{V}{C} \sin A \quad (9.10)$$

În continuare se vor determina derivatele de ordinul II, derivând în raport cu S expresiile de mai sus se va obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{1}{C} \left(3v^2 \cdot \cos A \frac{dv}{ds} - v^3 \sin A \frac{dA}{ds} \right) \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} = \frac{1}{C} \left(\frac{\sin A}{\cos \varphi} \cdot \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} + \frac{v}{\cos \varphi} \cdot \sin A \frac{dA}{ds} + V \frac{\sin A}{\cos^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \right) \\ \frac{\partial^2 A}{\partial s^2} = \frac{1}{C} \left(tg \varphi \cdot \sin A \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} + \frac{v}{\cos^2 \varphi} \cdot \sin A \frac{d\varphi}{ds} + V \cdot tg \varphi \cdot \cos A \frac{dA}{ds} \right) \end{cases} \quad (9.11)$$

Dacă se notează $\eta = e^l \cos \varphi$, prin derivarea funcției V și prin înlocuirea lui $M \cdot N = C^2 / V^4$ se va obține:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{-t_1}{M_1 N_1} (3\eta_1^2 \cdot \cos^2 A_1 + \sin^2 A_1) \quad (9.12)$$

Cu notațiile $u = s \cdot \cos A_1 \cdot 10^{-5}$ și $v = s \cdot \sin A_1 \cdot 10^{-5}$, în limitele aproximațiilor făcute, se obțin expresiile restrânse ale coordonatelor geodezice ale punctului S₂ și a azimutului invers:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + (b_{10} \cdot u + b_{20} \cdot u^2 + b_{02} \cdot v^2 + \dots)^\parallel \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + (l_{01} \cdot v)^\parallel + \dots \\ A_2 &= A_1 \pm 200^g + (a_{01} \cdot v)^\parallel + \dots \end{aligned} \quad (9.13)$$

în care:

$$b_{10} = 10^5 \frac{V_1^3}{C} \cdot \rho^\parallel, \quad b_{20} = -10^{10} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_1^2 \cdot v_1^4 \cdot t_1}{c^2} \cdot \rho_1^\parallel, \quad b_{02} = -10^{10} \cdot \frac{t_1 V_1^2}{C^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho^\parallel \dots \quad (9.14)$$

$$l_{01} = 10^5 \cdot \rho^\parallel \frac{v_1}{c \cdot \cos \varphi_1} \dots \quad (9.15)$$

$$a_{01} = 10^5 \cdot \rho^\parallel \frac{v_1 \cdot t_1}{C} \dots \quad (9.16)$$

Precizia rezultatelor depinde de numărul termenilor luați în considerare la dezvoltarea în serie, cu cât intră mai mulți termeni în calcul cu atât precizia este mai bună.

9.2. Problema geodezică inversă

Metoda argumentelor medii (Moldoveanu Constatin)

Pentru rezolvarea problemei geodezice inverse prin metoda argumentelor medii, se consideră două puncte S_1 și S_2 situate pe elipsoidul de rotație (figura 9.1). Se cunosc coordonatele geodezice B_1, L_1 ale punctului S_1 și coordonatele geodezice B_2, L_2 ale punctului S_2 . Trebuie să se determine, prin rezolvarea problemei geodezice inverse, lungimea s a liniei geodezice dintre cele două puncte precum și azimutul direct A_1 și invers A_2 al liniei geodezice.

Cu elementele cunoscute se pot determina direct valorile funcțiilor $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, [1]_m, [2]_m$ din relația (9.17) precum și valorile argumentelor

$$\begin{aligned} b'' &= (B_2 - B_1)'' = s \cos A_m [1]_m (1 + \Delta_1) + \dots \\ l'' &= (L_2 - L_1)'' = s \sin A_m [2]_m \sec B_m (1 + \Delta_2) + \dots \\ \Delta A'' &= (A_2 \pm 200 - A_1)'' = s \sin A_m [2]_m \tan B_m (1 + \Delta_3) + \dots \end{aligned} \quad (9.17)$$

În care

$$[1]_m = \frac{\rho''}{M_m}; [2]_m = \frac{\rho''}{N_m}$$

și $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, [1]_m, [2]_m$ sunt funcții de b, l, B_m adică de necunoscutele căutate.

Aceasta înseamnă că determinarea lor este posibilă printr-un proces iterativ.

$$b = (B_2 - B_1)''; l = (L_2 - L_1)''; B_m = (B_1 + B_2)/2. \quad (9.18)$$

Rezolvarea problemei geodezice inverse prin metoda argumentelor medii constă în calculul, pentru început, a valorilor

$$s \cdot \sin A_m = l \frac{\cos B_m}{[2]_m} (1 + \Delta_2)^{-1} \quad (9.19)$$

$$s \cdot \cos A_m = \frac{b}{[1]_m} (1 + \Delta_1)^{-1}$$

după care se poate determina, prin împărțirea celor două relații de mai sus, valoarea azimutului mediu:

$$A_m = \arctan \left\{ \frac{l [1]_m \frac{1+\Delta_1}{1+\Delta_2} \cos B_m}{b [2]_m} \right\}. \quad (9.20)$$

În continuare, cu una din relațiile (9.18) sau, pentru control, cu ambele, se poate calcula lungimea liniei geodezice.

În final, cu ultima relație din (9.17), se calculează diferența de azimut și apoi azimutul direct și invers:

$$A_1 = A_m - \frac{\Delta A}{2} \quad (9.21)$$

$$A_2 = A_m + \frac{\Delta A}{2} \pm 200$$

Formule diferențiale.

Formulele diferențiale, în geodezia elipsoidală, sunt acele relații prin care se exprimă variația coordonatelor geodezice ale unui punct S , cu cantitățile dB_I și dL_I , precum și a azimutului A_I a unei linii geodezice, care trece prin punctul considerat, cu cantitatea dA_I . Aceste variații se datorează unor modificări care intervin în datele inițiale, adică modificarea coordonatelor geodezice ale punctului inițial S_I și a azimutului inițial A_I ale liniei geodezice s_I , cu mărimile dB_I, dL_I, dA_I, ds_I .

Coordonatele punctului S_I și azimutul sunt funcție de datele inițiale ale rețelei și de elipsoidul de rotație utilizat (elipsoidul de referință), caracterizat prin parametrii săi: semiaxa mare și turtirea geometrică.

$$B_i = B_1 + \Delta B; L_i = L_1 + \Delta L; A_i = A_1 + \Delta A \pm 200^s. \quad (9.22)$$

Formulele diferențiale pot fi exprimate sub formă generală ca diferențiale totale în funcție de variabilele specificate:

$$\begin{aligned} dB_1 &= dB_1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial a} da + \frac{\partial \Delta B}{\partial f} df \\ dL_1 &= dL_1 + \frac{\partial \Delta L}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial \Delta L}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial \Delta L}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial \Delta L}{\partial a} da + \frac{\partial \Delta L}{\partial f_1} df. \\ dA_1 &= dA_1 + \frac{\partial \Delta A}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial \Delta A}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial \Delta A}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial \Delta A}{\partial a} da + \frac{\partial \Delta A}{\partial f} df \end{aligned} \quad (9.23)$$

În funcție de unde apar modificări, formulele diferențiale pot fi:

- **de categoria I** – când apar modificări în datele inițiale (lungimea și azimutul laturii de plecare, și coordonatele geodezice ale punctului inițial);
- **de categoria a II-a** – când apar modificări în parametrii elipsoidului de rotație (trecerea de la un elipsoid la altul).

Formule diferențiale de categoria I-a.**Formule diferențiale de categoria a I-a în cazul distanțelor de până la 200–250 km.**

Se consideră două puncte pe elipsoidul de rotație $S_1(B_1, L_1)$ și $S_2(B_2, L_2)$ situate la distanța s unul de celălalt (figura F.9.2), cu $A_1 = A_{1-2}$ și $A_2 = A_{2-1}$ notându-se azimutul direct și, respectiv, invers pentru direcția considerată.

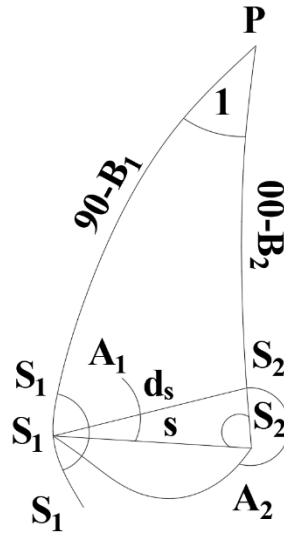


Figura 9.2 Triunghi elipsoidal

Pentru început, se presupune că există modificări în datele inițiale, adică latitudinea, azimutul și lungimea laturii s au modificat cu niște cantități mici dB_1, dA_1 și ds . Trebuie să se determine care este influența acestor modificări survenite în coordonatele punctului S_1 și a azimutului invers A_2 . Cu alte cuvinte, trebuie să se determine valorile dB_2, dL_2 și dA_2 .

În condițiile date și prin particularizarea $i=2$, relațiile (9.23) devin:

$$\begin{aligned}
 dB_2 &= \frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial B_2}{\partial s} ds + \frac{\partial B_2}{\partial A_1} dA_1 \\
 dL_2 &= dL_1 + \frac{\partial L_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial L_2}{\partial s} ds + \frac{\partial L_2}{\partial A_1} dA_1. \\
 dA_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_2}{\partial s} ds + \frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1
 \end{aligned}
 \tag{9.24}$$

Pentru deducerea elementelor menționate, se consideră punctul S_1' de latitudine $B_1 + dB_1$, și longitudine L_1 , situat deci pe același meridian ca și punctul inițial (figura F.9.2). Se rotește linia

geodezică S_1S_2 până când trece prin punctul S_1' . În urma acestei rotații, punctul S_2 va ocupa poziția S_2' .

În continuare se deplasează punctul S_1' în S_1'' , pe linia $S_1'S_2'$, păstrându-se lungimea liniei geodezice s. În acest fel, punctul S_2 se deplasează în S_2'' . Se rotește acum linia geodezică $S_1''S_2''$ până când se obține o valoare a azimutului egală cu cel inițial A_1 .

În această situație, diferența de latitudine dintre punctele S_2 și S_2'' va fi $\frac{\partial B_2}{\partial B_1} \cdot dB_1$

și ea reprezintă contribuția modificării latitudinii punctului inițial în corecția totală care trebuie aplicată punctului.

Din figura F.9.2 se poate deduce că:

$$\begin{aligned} S_2S_2'' &= S_1''S_1' = M_1dB_1 \cos A_1 \\ S_1S_1' &= M_1dB_1 \sin A_1 \end{aligned} \quad (9.25)$$

Diferențele de latitudine dintre punctele $S_2'S_2''$ și, respectiv, S_1S_1' , pot fi determinate cu ajutorul relațiilor utilizate la rezolvarea problemei geodezice directe (9.1) ÷ (9.10) și a relațiilor de mai sus (9.25);

$$\begin{aligned} B_{S_2} - B_{S_2''} &= -\frac{M_1}{M_2} dB_1 \cos A_1 \cos A_2 \\ B_{S_1} - B_{S_1'} &= -\frac{M_1}{M_2} dB_1 \sin A_1 \cos A_2 \end{aligned}$$

În ipotezele prezentate, se poate considera egalitatea $S_1S_1'=S_2''S_2$, deci

$$\frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 = -\frac{M_1}{M_2} dB_1 (\cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2) \quad (9.26)$$

Se consideră, în continuare, că triunghiul S_1PS_2 este un triunghi sferic. Din teorema cosinusului, rezultă

$$\cos l = -\cos A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2 \cos \sigma$$

unde cu σ a fost notată latura S_1S_2 .

Dacă se consideră $\cos \sigma = 1$, atunci relația (9.26), care exprimă contribuția variației latitudinii, devine:

$$\frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 = \frac{M_1}{M_2} \cos l \cdot dB_1 \quad (9.27)$$

În continuare, în mod asemănător, se poate determina care este contribuția modificării latitudinii punctului inițial în coordonatele celui de-al II-lea punct considerat (în longitudine). Se poate observa, din aceeași figură F.9.2, că $L_2=L_1+l$ și deci $dL_2=dL_1+dl$. Prin analogie cu relațiile precedente, utilizând relațiile (9.1) , (9.2) (9.3) și (9.4) se poate deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial B_1} dL_1 &= -\frac{M_1 dB_1 \cos A_1 \sin A_2}{N_2 \cos B_2} + \frac{M_1 dB_1 \sin A_1 \cos A_2}{N_2 \cos B_2} \\ &= -\frac{M_1}{N_2 \cos B_2} dB_1 (\cos A_1 \sin A_2 - \sin A_1 \cos A_2) \end{aligned}$$

Din același triunghi sferic rezultă

$$\sin B_2 \sin l = -\sin A_2 \cos A_1 + \cos A_2 \sin A_1 \cos \sigma$$

sau

$$-\sin B_2 \sin l = \cos A_1 \sin A_2 - \sin A_1 \cos A_2 \cos \sigma$$

În condițiile în care se consideră, ca și în cazul precedent, $\cos \sigma=1$, se obține relația de calcul a valorii contribuției în longitudinea punctului S_2 a modificării în latitudine.

$$\frac{\partial l}{\partial B_1} dl_2 = \frac{M_1}{N_1} \sin l \tan B_1 dB_1 \quad (9.28)$$

Ultima contribuție a modificării latitudinii punctului inițial, cu o cantitate mică ce trebuie calculată, este cea în azimutul invers.

Se știe că azimutul invers diferă de azimutul direct cu 200° , la care se adaugă o valoare datorată convergenței meridianelor, notată cu t în relațiile de mai jos, adică:

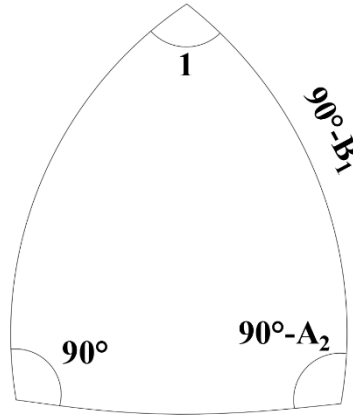


Fig. 9.3 Triunghi elipsoidal

$$A_2 = A_1 \pm 200^\circ + t$$

Într-un triunghi elipsoidal mic, ca cel din figura din stânga, se poate scrie relația:

$$\sin B_1 = \cot l \tan t$$

de unde rezulta

$$\tan t = \tan l \sin B_2$$

Prin diferentierea acestei relatii se obtine:

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dl}{\cos^2 l} \sin B_2 + \tan l \cos B_2 dB_2$$

Presupunând $\cos^2 t = 1$, relația de mai sus devine

$$dt = dl \sin B_2 + \tan l \cos B_2 dB_2$$

sau prin considerarea relatiilor (9.28) si (9.27)

$$\frac{\partial A_2}{\partial B_1} dB_1 = \frac{\sin l}{\cos B_2} [(1 - e^2 \cos^2 B_1) \sin^2 B_2 + \cos^2 B_2] dB_1$$

În final, prin efectuarea calculelor dintre paranteze, se ajunge la expresia:

$$\frac{\partial A_2}{\partial B_1} dB_1 = \frac{\sin l}{\cos B_1} (1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_1) dB_1 \quad (9.29)$$

În cele prezentate până acum s-a determinat influența pe care o are modificarea latitudinii punctului inițial S_1 în coordonatele punctului S_2 și în azimutul invers. În continuare se caută să se determine influența modificării lungimii liniei geodezice cu o cantitate mică ds ($ds=S_2S_2''$), latitudinea punctului inițial și azimutul direct rămânând neschimbate, în coordonatele punctului S_2 și azimutul invers. În aceste ipoteze, variația latitudinii celui de-al doilea punct este egală cu diferența de latitudine dintre punctele S_2 și S_2'' .

Azimutul liniei S_2S_2'' este egal cu A_2-200° și conform rezolvării problemei geodezice directe, relația (3.17) în care se consideră numai primii termeni ai dezvoltării

$$\frac{\partial B_2}{\partial s} ds = -\cos A_2 \frac{\rho^\infty}{M_2} ds = -\cos A_2 [1]_2 ds \quad (9.30)$$

Asemănător se face raționamentul și pentru determinarea influențelor în longitudine și azimutul invers, rezultând:

$$\frac{\partial L_2}{\partial s} ds = -\frac{\sin A_2}{\cos B_2} [2]_2 ds \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial s} ds = -\sin A_2 \tan B_2 [2]_2 ds \quad (9.32)$$

Ultimul pas care mai trebuie făcut este acela al determinării influenței modificării azimutului A_1 cu valoarea dA_1 , această modificare producând deplasarea punctului S_2' în S_2'' .

În plan, lungimea curbei $S_2'S_2''$ se determină cu o relație de forma:

$$S_2'S_2'' = s \cdot dA_1$$

Pe elipsoidul de rotație, cazul prezentat, această relație de determinare a lungimii curbei se transformă în:

$$S_2'S_2'' = du = m \cdot dA_1 \quad (9.33)$$

în care m reprezintă *lungimea redusă a liniei geodezice*, adică o valoare pentru care relația de mai sus este adevărată.

Având în vedere faptul că valorile corecțiilor diferențiale ce se calculează sunt mici se poate, în continuare, pentru zona aflată în studiu, aproxima figura Pământului cu o sferă de rază medie R . În această situație se poate aplica, în triunghiul sferic considerat, teorema sinusului:

$$\frac{\sin\left(\frac{du}{R}\right)}{\sin d A_1} = \frac{\sin\left(\frac{s}{R}\right)}{\sin 100^\circ}$$

iar dacă se are în vedere faptul că pe lângă corecția diferențială dA_1 , și valoarea du/R are o valoare mică se deduce că

$$du = R \cdot dA_1 \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right) \quad (9.44)$$

Prin egalarea relațiilor (3.180) și (3.181) se obține expresia cu care se poate calcula valoarea redusă a liniei geodezice:

$$m = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \quad (9.45)$$

Variația latitudinii punctului S_2 , datorită variației azimutului A_1 , va fi egală cu diferența de latitudine dintre punctele $S_2''S_2'$, și prin considerarea relației $A_{S_2S_2'} = A_2 + 300^\circ$ rezultă

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_1} dA_1 = m \cdot \sin A_2 [1]_2 dA_1 \quad (9.46)$$

și analog

$$\frac{\partial L_2}{\partial A_1} dA_1 = -\frac{m \cdot \sin A_2 [2]_2}{\cos B_2} dA_1 \quad (9.47)$$

$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1$, adică influența în azimutul invers provocată de variația în azimutul direct, se deduce plecând de la constatarea că ea este alcătuită din două componente:

■ din corecția dA_1 , raportată la lungimea corectată a liniei geodezice

$$\frac{dm}{ds} dA_1 \quad (9.48)$$

■ din corecția datorată variației convergenței meridianelor, variație provocată de deplasarea punctului S_2 ca urmare a variației azimutului direct.

Se consideră linia geodezică S_1S_2 (figura F.9.3). Prin variația azimutului direct A_1 cu cantitatea dA_1 , punctul S_2 se va deplasa în poziția S_2' ($S_2S_2' = m \cdot dA_1$).

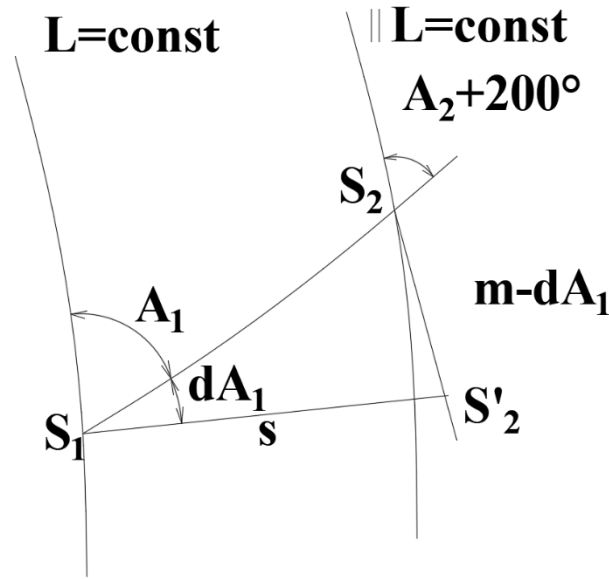


Figura 9.3 Corecția datorată variației convergenței meridianelor

În situația în care

$$A = \Delta A = A_2 + 200^g - A_1$$

Rezulta

$$\begin{aligned} dA &= d\Delta A = \\ &= \frac{\partial L_2}{\partial A_1} dA \sin B_2 - m \cos A_2 [2]_2 \tan B_2 dA_1 \end{aligned}$$

deci în final calculul corecției totale se poate efectua printr-o relație de forma:

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = \frac{dm}{ds} dA_1 - m \cos A_2 [2]_2 \tan B_2 dA_1 \quad (9.49)$$

Având în vedere relația (3.182), expresia de mai sus se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{dm}{ds} = \cos \frac{s}{R}$$

si deci

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = \cos \frac{s}{R} dA_1 - R \sin \frac{s}{R} \cos A_2 [2]_2 \tan B_2 dA_1 \quad (9.50)$$

O expresie simplificată se poate obține dacă se fac următoarele aproximații:

$$\cos \frac{s}{R} = 1 - \frac{s^2}{2R^2}$$

$$R \cong N$$

$$R \sin \frac{s}{R} \cong s$$

În acest caz relația (9.45) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = dA_1 - \frac{s^2}{2N_2^2} dA_1 - s[2]_2 \tan B_2 dA_1 \quad (9.51)$$

Prin înlocuirea relațiilor (9.27), (9.28), (9.28), (9.29), (9.30), (9.31), (9.32), (9.47) și (9.51) în relația (9.24) se obțin expresiile de calcul a diferențialelor în coordonate geodezice ale punctului S_2 și a azimutului invers:

$$\begin{aligned} dB_2 &= \frac{M_1}{M_2} \cos l \cdot dB_1 - \frac{\cos A_2}{M_2} \rho^\infty ds + \frac{R}{M_2} \rho^\infty \sin \frac{s}{R} \sin A_2 dA_1 \\ dL_2 &= dL_1 + \frac{M_1}{N_2} \sin l \tan B_2 \cdot dB_1 - \frac{\sin A_2}{N_2 \cos B_2} \rho^\infty ds - \frac{R}{N_2} \rho^\infty \sin \frac{s}{R} \frac{\cos A_2}{\cos B_2} dA_1 \end{aligned} \quad (9.52)$$

$$\begin{aligned} dA_2 &= \frac{\sin l}{\cos B_2} (1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_2) dB_1 - \frac{\sin A_2}{N_2} \rho^\infty \tan B_2 \cdot \\ ds &\left(1 - \frac{s^2}{2N_2^2} - \frac{s}{N_2} \cos A_2 \tan B_2 \right) dA_1 \end{aligned}$$

Formule diferențiale de categoria I-a în cazul distanțelor mici (40–50 km).

În cazul distanțelor mici formulele diferențiale de categoria I-a, date de relațiile (9.52), pot fi simplificate prin aproximarea figurii Pământului cu o sferă și prin considerarea egalității între lungimea redusă a liniei geodezice și lungimea liniei geodezice ($m = s$). Conform acestor aproximări, se deduc următoarele:

În cazul unei sfere razele de curbură a elipselor meridiene (acum cercuri) în cele două puncte considerate sunt egale ($M_1 = M_2$), deci relația (9.24) devine:

$$\frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 = \cos l \cdot dB_1 \quad (9.53)$$

Relatia (9.28) devine:

$$\frac{\partial L_2}{\partial B_1} dL_1 = \sin l \tan B_2 dB_1 \quad (9.54)$$

Considerând că Pământul este aproximat cu o sferă înseamnă că prima excentricitate numerică este zero ($e = 0$) deci relația (9.29) se va scri astfel:

$$\frac{\partial A_2}{\partial B_1} dB_1 = \frac{\sin l}{\cos B_2} dB_1 \quad (9.55)$$

În situația acceptării aproximațiilor propuse, raza de curbură a elipsei meridiene ce trece prin cel de-al doilea punct este egală cu raza sferei ($M_2 = R$), relația (9.30) transformându-se în relația:

$$\frac{\partial B_2}{\partial s} ds = -\cos A_2 \frac{\rho^\infty}{R} ds \quad (9.56)$$

Din aceleași considerente, relațiile (9.31) și (9.32) devin:

$$\frac{\partial L_2}{\partial s} ds = -\frac{\sin A_2 \rho^\infty}{\cos B_2 R} ds \quad (9.57)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial s} ds = -\sin A_2 \tan B_2 \frac{\rho^\infty}{R} ds \quad (9.58)$$

Dacă în relația (9.46) se consideră, în baza acelorasi aproximații, $M_I = R$ se obține:

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_1} dA_1 = \frac{s}{R} \sin A_2 \cdot dA_1$$

Se consideră triunghiul sferic S_1S_2P . Pe meridianul punctului S_1 se alege un punct C astfel încât linia geodezică ce trece prin punctele S_2 și C să aibă în punctul C azimutul egal cu 100° (figura de mai jos).

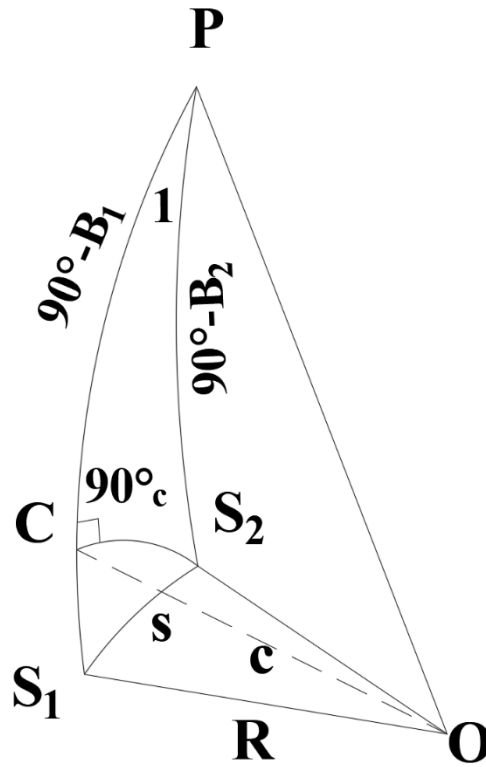


Figura nr. 9.4 Triunghiul sferic

Daca se noteaza $\sigma = \frac{s}{R}$ din triunghiul S_1S_2P rezulta

$$\sigma = \frac{s}{R}$$

Din triunghiul CPS_2 se poate deduce ca

$$\sin c = \cos B_2 \sin l$$

sau

$$c = \cos B_2 \sin l$$

Cu aceste relatii se calculeaza:

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_1} dA_1 = \sigma \sin A_2 dA_1 = \frac{c}{\sin A_1} \sin A_2 dA_1$$

sau

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_1} dA_1 = -\sin l \cos B_2 dA_1 \quad (9.59)$$

În relația (3.184) dacă se consider $\frac{m}{N_2} = \sigma = \frac{c}{\sin A_1}$ și $c = \sin l \cos B_2$ aceasta devine

$$\frac{\partial L_2}{\partial A_1} dA_1 = -\sigma \frac{\cos A_2}{\cos B_2} dA_1 = -\frac{c}{\sin A_1} \frac{\cos A_2}{\cos B_2} dA_1 = -\frac{\sin l \cos B_2 \cos A_2}{\sin A_1 \cos B_2} dA_1$$

Deci

$$\frac{\partial L_2}{\partial A_1} dA_1 = -\sin l \frac{\cos A_2}{\sin A_1} dA_1 \quad (9.60)$$

Prin aproximațiile acceptate și utilizarea notațiilor de mai sus, relația (3.187) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = -(\cos \sigma - \sin \sigma \cos A_2 \tan B_2) dA_1 = \frac{\cos \sigma \cos B_2 - \sin \sigma \cos A_2 \sin B_2}{\cos B_2} dA_1$$

Din triunghiul $S_1 S_2 P S_1 S_2 P$, prin teorema cosinusului, se obține:

$$\cos B_1 \cos l = \cos \sigma \cos B_2 - \sin \sigma \cos A_2 \sin B_2$$

deci

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = \frac{\cos B_1 \cos l}{\cos B_2} dA_1$$

Având în vedere egalitățile

$$\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = \frac{\sin(90^\circ - B_1)}{\sin(90^\circ - B_2)} = -\frac{\sin A_2}{\sin A_1},$$

Se obține relația finală

$$\frac{\partial A_2}{\partial A_1} dA_1 = -\cos l \cdot \frac{\sin A_2}{\sin A_1} dA_1. \quad (9.61)$$

Prin considerarea acestor ultime expresii, se pot deduce, pentru cazul studiat, formulele diferențiale de ordinul I:

$$dB_2 = \cos l dB_1 - \cos B_1 \sin l dA_1 - \dots$$

$$dL_2 = dL_1 + \sin l \tan B_2 dB_1 - \sin l \frac{\cos A_2}{\sin A_1} dA_1 - \dots \quad (9.62)$$

$$dA_2 = \frac{\sin l}{\cos B_2} dB_1 - \cos l \frac{\sin A_2}{\sin A_1} dA_1 - \dots$$

Formule diferențiale de categoria a II-a

Aceste formule se utilizează atunci când trebuie să se treacă de la coordonatele B și L de pe un elipsoid definit de parametri a_1 și f_1 , la aceleași coordonate dar pe un alt elipsoid caracterizat de parametri a_2 și f_2 . Ca și în cazul formulelor diferențiale de categoria a I-a, se cunosc relațiile aplicabile în cazul distanțelor de până la 6000 Km (deduse de Krasovski), la distanțe de 600-800 Km (deduse de Helmert) și relații, în care aproximațiile acceptate sunt mai mari, pentru distanțe la 40-50 Km.

În cazul schimbării elipsoidului de referință, formulele se determină prin diferențierea primilor termeni din relațiile (9.17). Din prima expresie a acestor relații se poate scrie:

$$(B_m - B_1)'' = b'' = s \frac{\cos A_m}{M_m} \rho'' = \frac{s \cos A_m (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \rho''$$

Prin diferențiere se obține

$$db'' = s \cos A_m \rho'' \left\{ -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{1 - e^2} da + \frac{1}{a} \cdot (1 - e^2)^{3/2} (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2} \sin^2 B_m de^2 + \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{1 - e^2} de^2 \right\}$$

sau

$$db' = \frac{s \cos A_m (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \left\{ -\frac{da}{a} - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \cdot \frac{de^2}{1 - e^2 \sin^2 B_m} + \frac{de^2}{1 - e^2} \right\}$$

Ținând cont de relația inițială și de aproximațiile $e^2 \cong 2f$, $de^2 \cong 2e df$, rezultă că:

$$db'' = -b^* \left\{ \frac{da}{a} - \left[\frac{2}{1 - e^2} + \frac{3 \sin^2 B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m} \right] df \right\}$$

Prin eliminarea numitorilor $1 - e^2$ și $1 - e^2 \sin^2 B_m$, din relația de mai sus, se face o eroare de ordinul $e^2 b$, același ordin ca la formulele diferențiale de categoria I-a

$$db' = -b^* \left\{ \frac{da}{a} - [2 + 3 \sin^2 B_m] df \right\}$$

(9.63)

Se procedează în mod asemănător cu cea de-a doua relație din formulele (9.17)

$$l'' = \frac{s \sin A_m (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a \cos B_m} \rho''$$

prin diferențiere obținându-se:

$$\begin{aligned} l'' &= \rho'' \frac{s \sin A_m}{\cos B_m} \left\{ -\frac{(1 - e^2 \sin^2 B_m)}{a^2} da - \frac{1}{2} \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2} \sin^2 B_m}{a} de^2 \right\} \\ &= \rho'' \frac{s \sin A_m (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2}}{a \cos B_m} \left\{ \frac{da}{a} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m} de^2 \right\} \end{aligned}$$

iar în final, prin aceleași eliminări se obține relația

$$dl'' = -l'' \left\{ \frac{da}{a} + \sin^2 B_m df \right\} \quad (9.64)$$

Pentru diferența de azimut se pleacă de la relația

$$A = \Delta A = l \sin B_m$$

care prin diferențiere devine

$$dA'' = dl \sin B_m$$

prin intermediul expresiei (9.64) obținându-se relația generală de calcul:

$$dA'' = -l'' \left\{ \frac{da}{a} + \sin^2 B_m df \right\} \sin B_m \quad (9.65)$$

CAPITOLUL 10.

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE ELIPSOIDICE MICI

10.1 Generalități

Triangulațiile geodezice sunt constituite din triunghiuri elipsoidice, deoarece acestea sunt definite pe suprafața elipsoidului de referință.

Pentru rețelele geodezice de ordinul I, lungimea laturilor triunghiurilor variază între limitele $30 \div 50$ km și rareori până la 60 km.

Deoarece pe suprafețe relativ mici elipsoidul de referință se poate aproxima cu o sferă de rază medie, rezolvarea triunghiurilor geodezice elipsoidice se poate reduce la rezolvarea unor triunghiuri sferice.

Această rezolvare constă în calculul lungimii laturilor triunghiurilor din rețeaua de triangulație, plecând de la o bază (latură) cunoscută și având determinate toate unghiurile în vârfurile triunghiului.

La rezolvarea triunghiurilor geodezice sferice nu este recomandat să se utilizeze formulele cunoscute ale trigonometriei sferice, deoarece excelele sferice (plusurile peste $200''$) sunt mici.

Se vor utiliza în acest scop metode speciale adecvate și anume:

- metoda Soldner (metoda aditamentelor);
- metoda Legendre (metoda dezvoltărilor în serie).

Înainte de a prezenta metodele de rezolvare a triunghiurilor elipsoidice mici, trebuie determinat excesul sferic.

10.2 Excesul sferic al unui triunghi elipsoidal mic

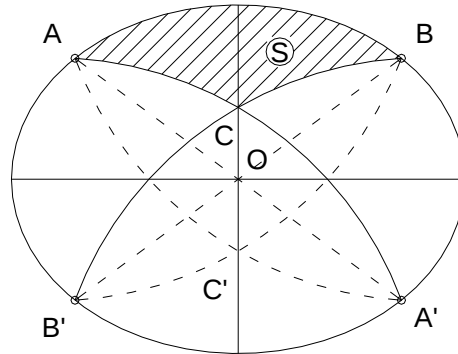


Fig. nr. 10.1 Determinarea excesului sferic.

Prin excesul sferic elipsoidal al unui triunghi geodezic mic ABC, pe sfera medie Gauss, se înțelege plusul peste 200^g al sumei unghiurilor triunghiului.

$$\varepsilon = A + B + C - 200^g \quad (10.1)$$

Se consideră triunghiul elipsoidal mic ABC (fig. 10.1), adică un triunghi a cărui laturi nu depășesc 60 km, cu unghiurile neafectate de erori. Se pot calcula din figură suprafețele fusurilor sferice AA^I , BB^I și CC^I , ținând cont de suprafața S a triunghiului sferic considerat.

$$(AA^I) = S + S_{A^I BC}$$

$$(BB^I) = S + S_{AB^I C} \quad (10.2)$$

$$(CC^I) = S + S_{ABC^I} = S + S_{A^I B^I C}$$

Prin adunarea suprafețelor celor trei fusuri, din punct de vedere geometric se va obține suprafața emisferei din fața desenului, plus de două ori suprafața S a triunghiului sferic ABC.

$$(AA^I) + (BB^I) + (CC^I) = 3S + 2\Pi R^2 - S = 2S + 2\Pi R^2 \quad (10.3)$$

Suprafețele fusurilor sferice AA^I , BB^I și CC^I , se obțin cu ajutorul relațiilor în care intră mărimea unghiurilor A, B, C:

$$(AA^I) = \frac{A^g}{400} \cdot 4\Pi R^2; (BB^I) = \frac{B^g}{400} \cdot 4\Pi R^2; (CC^I) = \frac{C^g}{400} \cdot 4\Pi R^2 \quad (10.4)$$

$$(AA^l) + (BB^l) + (CC^l) = \frac{4\Pi R^2}{400} (A + B + C)$$

Egalând cele două expresii rezultă:

$$\frac{4\Pi R^2}{400} (A + B + C) = 2\Pi R^2 + 2S \Rightarrow A + B + C = 200^g + \frac{400^g}{2\Pi} \cdot \frac{S}{R^2} \quad (10.5)$$

Excesul sferic va fi notat cu ε și este dat de relația:

$$\varepsilon^{cc} = \rho^{cc} \cdot \frac{S}{R^2}, \text{ în care; } \rho^{cc} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2\Pi} = 636620^{cc} \quad (10.6)$$

În cazurile triunghiurilor geodezice sferice mici, excesele sferice sunt în general de ordinul zecilor de secunde, pentru că suprafața S a triunghiului este mică în raport cu R^2 (raza medie Gauss). Considerând un triunghi sferic aproximativ echilateral, de latură $l=60$ km, se poate determina excesul sferic:

$$\varepsilon^{cc} = \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{636620}{63702} \cong 25^{cc} \quad (10.7)$$

În cele mai multe situații întâlnite în practica geodezică, suprafața S a triunghiului elipsoidal (sferic) mic se poate înlocui cu suprafața S^l a triunghiului plan.

Notând cu $a^l, b^l, c^l, A^l, B^l, C^l$, elementele triunghiului plan corespondent se pot obține următoarele relații pentru determinarea excesului sferic:

$$\varepsilon^{cc} = \rho^{cc} \frac{S^l}{R^2} = \rho^{cc} \frac{a^l b^l \sin C^l}{2R^2} = \rho^{cc} \frac{a^l c^l \sin B^l}{2R^2} = \rho^{cc} \frac{b^l c^l \sin A^l}{2R^2} \quad (10.8)$$

Termenul $\frac{\rho^{cc}}{2R^2}$, se poate nota cu f , care este dependent numai de latitudine ($R = \sqrt{MN}$), și nu depinde de triunghiul geodezic considerat.

$$\varepsilon^{cc} = f^{cc} \cdot a^l b^l \sin C^l = f^{cc} a^l c^l \sin B^l = f^{cc} b^l c^l \sin A^l \quad (10.9)$$

10.3 Metoda Soldner (Aditamentelor)

Se consideră un triunghi situat pe o sferă medie Gauss, în care sunt cunoscute valorile unghiurilor A, B, C și lungimea liniei geodezice a (latura a). Trebuie determinate valorile celorlalte două laturi ale triunghiului b și c (fig. 10.2).

Metoda folosită pentru rezolvarea triunghiului sferic constă în înlocuirea triunghiului sferic cu un triunghi plan la care se păstrează unghiurile aceleași ca și la triunghiul sferic, dar în care se modifică lungimile laturilor.

Rezolvarea implică determinarea relației de calcul care trebuie aplicată laturii cunoscute, pentru a obține valoarea ei în triunghiul plan, după care se rezolvă triunghiul plan, calculând și valorile celorlalte două laturi.

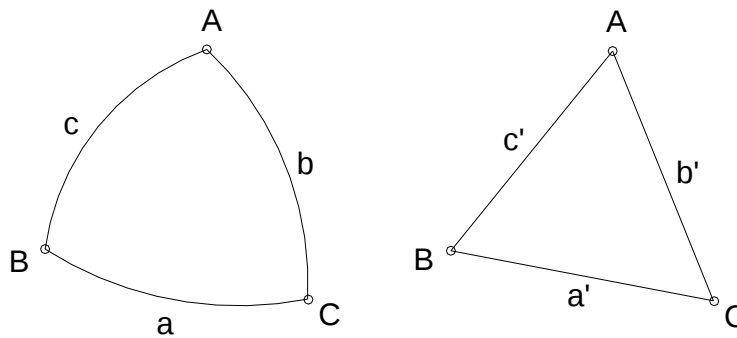


Fig. nr. 10.2 Metoda SOLDNER de rezolvare a triunghiurilor geodezice.

Pe sfera medie, în triunghiul sferic ABC , se poate scrie teorema sinusurilor sub forma:

$$\frac{\sin \hat{a}}{\sin A} = \frac{\sin \hat{b}}{\sin B} = \frac{\sin \hat{c}}{\sin C}, \quad \hat{a} = \frac{a}{R}; \quad \hat{b} = \frac{b}{R}; \quad \hat{c} = \frac{c}{R} \quad (10.10)$$

Din prima egalitate a relației de mai sus rezultă:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin \hat{a}}{\sin \hat{b}} = \frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \frac{b}{R}} \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{a}{R} &= \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3} + \frac{a^5}{120R^5} \\ \sin \frac{b}{R} &= \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} + \frac{b^5}{120R^5}\end{aligned}\quad (10.12)$$

Dezvoltând în serie $\sin \frac{a}{R}$ și $\sin \frac{b}{R}$, se obține:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a - \frac{a^3}{6R^2}}{b - \frac{b^3}{6R^2}} \quad (10.13)$$

Aplicând teorema sinusurilor și în triunghiul plan obținem:

$$\frac{a^l}{\sin A} = \frac{b^l}{\sin B} \text{ sau } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a^l}{b^l} \quad (10.14)$$

Comparând cele două relații, este evident că vom avea egalitățile:

$$a^l = a - \frac{a^3}{6R^2}; \quad b^l = b - \frac{b^3}{6R^2} \quad (10.15)$$

sau în general:

$$S^l = S - \frac{S^3}{6R^2} = S - A_s \quad (10.16)$$

Mărimea A_s se numește aditamentului liniar al laturii S , de unde derivă și denumirea metodei de rezolvare.

Etapele care trebuie parcurse la rezolvarea triunghiurilor elipsoidice mici prin metoda Soldner (aditamentelor), constau în efectuarea, în ordine, a următoarelor calcule:

- calculul excesului sferic;
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidic mic prin calcularea neanchiderii și repartizarea ei în mod egal, celorlalte unghiuri:

$$W = (A^x B^x C^x) - (200^g + \varepsilon) \quad (10.17)$$

$$A = A^x \pm \frac{w}{3}; \quad B = B^x \pm \frac{w}{3}; \quad C = C^x \pm \frac{w}{3} \quad (10.18)$$

A^x, B^x, C^x - unghiuri reduse pe suprafața elipsoidului de referință.

- calculul aditamentului liniar Aa , al laturii a și apoi a valorii laturii a^l în triunghiul plan;
- calculul celorlalte două laturi ale triunghiului plan;
- cu aceste valori calculate se determină aditamentele liniare ale celorlalte două laturi și apoi mărimea lor în triunghiul elipsoidal mic.

10.4 Metoda Legendre (dezvoltării în serie)

Această metodă de rezolvare presupune că un triunghi elipsoidal mic se poate rezolva ca un triunghi plan dacă se păstrează egalitatea laturilor celor două triunghiuri, iar unghiurile triunghiului plan se obțin prin micșorarea fiecăruia cu câte o treime din valoarea excesului sferic.

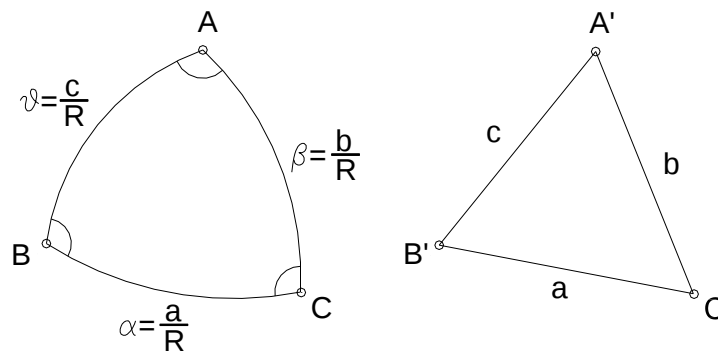


Fig. nr. 10.3 Rezolvarea triunghiurilor geodezice prin Metoda Legendre.

Elementele care se cunosc sunt aceleași ca și la metoda Soldner de rezolvare a triunghiurilor elipsoidice mici. Pentru rezolvare se vor utiliza relații specifice trigonometriei sferice.

Astfel pentru un triunghi sferic ABC (fig. 10.1), cu unghiurile A, B, C și laturile a, b, c , opuse unghiurilor și exprimate în valori unghiulare, cele mai importante formule care pot fi scrise în triunghi cu aceste elemente sunt:

- formula sinusurilor:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (10.19)$$

- formula cosinusurilor pentru laturi:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \end{aligned} \quad (10.20)$$

- forma cosinusurilor pentru unghiuri:

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos c \end{aligned} \quad (10.21)$$

Pentru rezolvarea triunghiului elipsoidal mic prin metoda Legendre, se scrie teorema cosinusului în triunghiul sferic considerat, ținând cont de notațiile din figură:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A \quad (10.22)$$

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \quad (10.23)$$

Se vor utiliza relațiile de dezvoltare în serie a funcțiilor trigonometrice $\cos$ și $\sin$ date mai jos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \quad (10.24)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \quad (10.25)$$

Dezvoltând în serie numărătorul relației $\cos A$ și neglijând termenii de gradul 5 și mai mari, vom obține:

$$\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right) \quad (10.26)$$

Prin efectuarea calculelor în condițiile propuse, rezultă:

$$\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{-\alpha + \beta^2 + \gamma^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24} + \dots \quad (10.27)$$

Dezvoltând în serie și numitorul, relația devine:

$$\cos A = \frac{\frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24}}{\beta \cdot \gamma \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)} \quad (10.28)$$

Dar putem scrie că:

$$\frac{1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{1}{\beta \cdot \gamma} \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\beta \cdot \gamma} \left(1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right) \quad (10.29)$$

Introducând relația în $\cos A$ și efectuând calculele se va obține:

$$\cos A = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\beta \cdot \gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2 - \gamma^2 - 2\beta^2 \cdot \gamma^2}{24\beta \cdot \gamma} \quad (10.30)$$

Dacă se au în vedere laturile triunghiului sferic exprimate prin valorile unghiulare, relația devine:

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot b \cdot c} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 \cdot c^2 - 2b^2 \cdot c^2}{24 \cdot b \cdot c \cdot R^2} \quad (10.31)$$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul plan corespondent rezultă:

$$\cos A^l = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad (10.32)$$

$$\sin^2 A^l = 1 - \cos^2 A^l = -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4b^2 \cdot c^2} \quad (10.33)$$

Ținând cont de expresiile lui $\cos A^l$ și $\sin^2 A^l$, relația lui $\cos A$ se modifică după cum urmează:

$$\cos A = \cos A^l - \sin^2 A^l \cdot \frac{b \cdot c}{6 \cdot R^2} \quad (10.34)$$

$$\cos A - \cos A^l = -\frac{b \cdot c \cdot \sin^2 A^l}{6 \cdot R^2} \quad (10.35)$$

Considerând: $A = A^l + (A - A^l)$ prin dezvoltări în serie rezultă:

$$\cos A = \cos A^l - (A - A^l) \cdot \sin A^l + \dots \quad (10.36)$$

sau:

$$\cos A - \cos A^l = (A - A^l) \sin A^l = -\frac{bc \sin^2 A^l}{6R^2} \quad (10.37)$$

$$A - A^l = \frac{b \cdot c \cdot \sin A^l}{6R^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S^l}{R^2} \cdot \rho^{cc}; S^l = \frac{b \cdot c \cdot \sin A^l}{2} \quad (10.38)$$

În mod analog se obține:

$$B - B^l = \frac{a \cdot c \cdot \sin B^l}{6R^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S^l}{R^2} \cdot \rho^{cc} \quad (10.39)$$

$$C - C^l = \frac{a \cdot b \cdot \sin C^l}{6R^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S^l}{R^2} \cdot \rho^{cc} \quad (10.40)$$

Adunând cele trei relații și ținând cont că $A^l + B^l + C^l = 200^g \Rightarrow$

$$A + B + C = 200^g + \frac{S^l}{R^2} \cdot \rho^{cc} \Rightarrow \varepsilon^{cc} = \frac{S^l}{R^2} \cdot \rho^{cc} \quad (10.41)$$

În acest fel afirmația prealabilă (excesul sferic este distribuit în mod egal celor trei unghiuri) a fost demonstrată.

Etapele care trebuie să fie parcurse pentru rezolvarea triunghiurilor elipsoidice mici prin metoda dezvoltărilor în serie, constau în efectuarea succesivă a următoarelor calcule:

- calculul excesului sferic cu una din relațiile determinate la excesul sferic, calculând niște valori provizorii pentru laturile triunghiului plan;
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidal mic prin calcularea neînchiderii și repartizarea ei în mod egal, celor trei unghiuri;
- calculul unghiurilor în triunghiul plan prin corectarea celor de pe elipsoid cu o treime din excesul sferic;
- calculul celorlalte laturi în triunghiul plan, care conform teoremei sunt egale cu cele din triunghiul sferic.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Apreutesei, C., Barbălată, C., Tudor C.: Geodezia, Editura Agro-Silvică, Bucuresti, 1962.
- [2] Botez M. : Teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1961.
- [3] Botez M.: Geodezie, Vol.1, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969.
- [4] Bonea, I., Dima, N. : Cartografie matematică, întocmirea și reproducerea hărților, Litografia Institutului de mine Petroșani, 1968.
- [5] Dima, N.,: Geodezie, Litografia Institutului de mine Petroșani, 1985.
- [6] Dima, N., Herbei, O., Vereș, J.: Teoria erorilor și metoda celor mai mici patrăte, Editura Universitas, Petroșani, 1999.
- [7] Dima, N., : Geodezie, Editura Universitas, Petroșani, 2005.
- [8] Dinescu, A. : Introducere în geodezia geometrică spațială. Editura tehnică, București, 1980.
- [9] Dragomir,V. Rotaru, M. : Mărturii geodezice.Editura militară, București,1986.
- [10] Dragomir,V., Ghițău, D., Mihăilescu, M., Rotaru, M: Teoria figurii Pământului, Editura Tehnică, București,1977.
- [11] Fotescu, N., Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate, EICB, București, 1978
- [12] Ghițău, D : Godezie, Editura didactică și pedagogică, București, 1972.
- [13] Ghițău, D. : Geodezie și gravimetrie geodezică. Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
- [14] Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H. – Physical Geodesy. Springer-Verlag, Wien, 2006
- [15] Ilie Păunescu – Tratat de Geodezie Generală. Vol. I și II, Editura Academiei Române, București, 1980
- [16] Moldoveanu, C. : Geodezie, Matrix Rom, București, 2002.
- [17] Neuner, J. : Sisteme de poziționare Globale, Editura Matrix ROM, 2000.
- [18] Nicolaescu, G. : Geodezie, Editura didactică și pedagogică București, 1965.
- [19] Ortelecan, Geodezie, Editua AcademicPres Cluj-Napoca, 2006
- [20] Ortelecan, M., Pop N. : Metode topografice de urmărire a construcțiilor și terenurilor înconjurătoare, Editura AcademicPres, Cluj-Napoca, 2005.

- [21] Palamariu, M. : Cartografie și geodezie, aplicații, Editura Rizoprint, Cluj-Napoca, 2004;
- [22] Palamariu, M., Pădure, I., Ortelecan, M.: Cartografie și Cartometrie, Editura Aeternitas, Alba Iulia, 2002.
- [23] Russu, A.: Topografie cu elemente de geodezie și fotogrammetrie, Editura Ceres, București, 1974.
- [24] Russu, A., Boș, N., Kiss, A. : Topografie-Geodezie, Editura didactică și pedagogică, București, 1982.
- [25] Tiron, M. : Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate, Editura tehnică, București, 1972.
- [26] Tiron, M. : Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsurare, Editura tehnică, București, 1976.
- [27] Tiron, M.: Metode clasice și moderne utilizate în prelucrarea matematică a observațiilor geodezice, Editura tehnică, București, 1985.
- [28] Ursea, V., Petruță, I.,: Radiogeodezie, Editura tehnică București, 1968.
- [29] Vaníček, P., Krakiwsky, E. J. – Geodesy: The Concepts. North-Holland, Amsterdam, 1986
- [30] Zakatov, P.S. : Curs de Geodezie superioară (trad. din limba rusă) Editura militară, București, 1958.
- [31] * Manualul inginerului geodez, Vol. I, II, III, Editura tehnică, București 1972-1974.
- [32] * * * Instrucțiuni pentru triangulația de ordinele I, II, III și IV, Editura militară, 1962.