

Titu HODIȘAN

Florin BLAGA

Tudor MILCHIȘ

MECANICĂ

Cinetică, Dinamică și Mecanică Analitică

Teorie



U.T.PRESS

Cluj-Napoca, 2025

ISBN 978-606-737-776-7

Titu HODIȘAN

Florin BLAGA

Tudor MILCHIȘ

MECANICĂ

Cinematică, Dinamică și Mecanică Analitică



U.T.PRESS

Cluj - Napoca, 2025

ISBN 978-606-737-776-7



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Prof.dr.ing. Pavel Alexa
Conf.dr.ing. Ștefan Marius Buru

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2025 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-776-7

PREFAȚĂ

Prezentul curs de Mecanică - Cinematică, Dinamică și Mecanică Analitică - al celor trei autori este o expunere succintă a conceptelor de Mecanică predate la Facultatea de Construcții a Universității Tehnice din Cluj - Napoca de-a lungul unei lungi perioade de instruire a studenților din anul al 2-lea, inclusiv de instruire a autorilor. Orice curs de Mecanică trebuie să urmeze o cale clasică - cum este cea urmată de autori - abordarea directă a conceptelor fundamentale ale Cinematicii și Dinamicii mecanice ale sistemelor rigide. În același timp, autorii urmează drumul scurt al prezentării acestor concepte: definiții, dezvoltarea conceptelor pentru sistemele mecanice specifice (punct material, sistem de puncte, corp rigid), aplicarea acestora pentru cazuri frecvente de mișcări specifice Ingineriei Civile. Implicarea matematică - indispensabilă și inevitabilă - este prezentată ca pentru avizați, așa cum sunt presupuși studenții anului al 2-lea ai facultăților de Inginerie Civilă.

Din punctul de vedere al cuprinderii problematicei abordate, cursul include problemele strict necesare studenților din domeniul Ingineriei Civile neocupându-se de teorii moderne care au șanse reduse de a deveni clasice. De altfel, progresele din domeniul Ingineriei Civile au fundamentat atât rolul conceptelor și teoriilor clasice ale Mecanicii, cât și forma lor aproape imuabilă de prezentare.

Așa cum au avut ocazia autorii să constate de-a lungul perioadei de instruire proprie și apoi de instruire a studenților lor, conceptele Mecanicii sunt - cel puțin aparent - simple atât ca formă cât și ca exprimare dar, utilizarea lor în specificul Ingineriei Civile este mai dificilă. Autorii s-au străduit să simplifice includerea Mecanicii în Ingineria Civilă prin simplitatea și naturalețea exprimării. Ceea ce necesită înțelegere profundă și, mai ales, exersare.

Complexitatea conceptelor, a exprimărilor lor laconice specifice ingineriei este asociată și cu prezentări grafice clare, simple și adecvate specificului teoriei prezentate ceea ce constituie nu doar o compensare a exprimării ci și un instrument care facilitează înțelegerea acestor concepte de către studenții cărora le este adresată.

Pentru aspectul grafic al expresiilor matematice scalare, vectoriale, matriceale și tensoriale, autorii au adoptat convenția clasică specifică instruirii de la nivelul liceal al studenților.

Prin toate acestea, cartea constituie un material cu valoare de întrebuințare atât prezentă cât și viitoare.

CINEMATICĂ

1.1. Introducere în cinematică

Cinematica este partea mecanicii care studiază mișcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide sau ale sistemelor de corpuri, fără a lua în considerare proprietățile lor inerțiale (mase, momente de inerție), forțele și momentele care acționează asupra lor sau care rezultă ca efect al mișcării. *Kinematics, branch of physics and a subdivision of classical mechanics concerned with the geometrically possible motion of a body or system of bodies without consideration of the forces involved (i.e., causes and effects of the motions)* (Britannica, 1998).

Cuvântul „cinematica” derivă din substantivele grecești Κινῆματ (kinemat) sau κίνημα (kinema - deplasare, mișcare), care la rândul lor derivă din verbul κινεῖν (kinein - a mișca).

Mișcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu există materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcarea fără suport material.

Mișcarea este definită în mecanică, ca schimbarea în timp a poziției sau a orientării unui sistem material în raport cu un alt sistem material. Mișcarea de-a lungul unei linii sau curbe se numește translație, iar mișcarea care schimbă orientarea corpului se numește rotație. Mișcarea generală este o combinație între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

Modificarea stării de mișcare a unui sistem material este o consecință a acțiunii altor sisteme materiale sau ca rezultat al interacțiunii unor părți din interiorul sistemului, iar cinematica studiază această modificare doar pur descriptiv fără a lua în considerare cauzele care o determină.

Când spunem că un sistem material este în repaus sau în mișcare se subînțelege că repausul și mișcarea au loc în raport cu alte sisteme materiale. Astfel, un corp imobil pe suprafața Pământului este în repaus în raport cu Pământul, dar Pământul este în mișcare față de Soare, etc., astfel încât poziția și mișcarea sunt relative întrucât se raportează la un sistem de referință (reper) care nu este fix. În Cinematică ne raportăm la (i) un sistem de referință care poate fi presupus în mod convențional fix, iar mișcarea înregistrată față de acest sistem de referință se numește **mișcare absolută**, sau la (ii) un sistem de referință mobil, în acest caz mișcarea se numește **mișcare relativă**.

Mișcarea cu viteză apropiată de viteza luminii trebuie tratată folosind teoria relativității, iar mișcarea corpurilor foarte mici (ex. electroni) trebuie tratată folosind teoriile mecanicii cuantice.

Dacă, în timpul mișcării, corpul poate să ocupe orice poziție în spațiu, mișcarea se numește **mișcare generală**, iar dacă acesta ocupă, în timpul mișcării, poziții particulare în spațiu, mișcarea se numește **mișcare particulară**.

În cinematică se folosesc noțiunile fundamentale de **spațiu** și **timp** și se face ipoteza că spațiul este absolut, infinit, euclidian, tridimensional, izotrop, iar timpul, notat în cinematică cu t , este absolut, continuu, unidimensional, independent de spațiu și de orice altă mărime și ireversibil.

Problema fundamentală a cinematicii este următoarea: cunoscând în orice moment poziția unui sistem material față de un reper, să se determine elementele mișcării și anume **traectoria, viteza și accelerația**.

1.2. Scurt istoric

Cinematica s-a impus ca știință distinctă în 1862 prin lucrarea lui **M. Resal** intitulată **Cinematica pură**. **André-Marie Ampère** (1775-1836), fizician și matematician francez, a fost primul care a arătat necesitatea ca Dinamica să fie precedată de o teorie a proprietăților geometrice ale corpurilor în mișcare. Aceste proprietăți au fost expuse în 1838 la Facultatea de Științe din Paris de **Jean-Victor Poncelet** (1788 - 1867) matematician și inginer francez.

Cinematica are numeroase aplicații geometrice printre care se pot aminti: metoda construcției tangentelor a lui **Gilles de Roberval** (1602-1675), teoria centrului instantaneu de rotație a lui **Michel Chasles** (1793 - 1880), determinarea curbării unei curbe plane, etc.

1.3. Cinematica punctului material

1.3.1. Introducere în cinematica punctului material

O reprezentare simplificată a unui sistem sau a unui proces fizic se numește *model fizic*. Modelele fizice și modelarea sunt instrumente esențiale nu numai în fizică ci și în întreg procesul cunoașterii lumii înconjurătoare. Descrierea matematică a unui model fizic simplu este de asemenea simplă. Cu cât recurgem la modele tot mai simple cu atât ne depărtăm de realitate. Lumea reală fiind diferită de modelele cu care operăm și rezultatele pe

care le obținem sunt, într-un anumit sens, incomplete. Recurgerea la modele simple este necesară în faza incipientă a cunoașterii. În fizică sunt cunoscute modele care au evoluat în procesul cunoașterii. Cele mai cunoscute sunt modelul atomului, al nucleului, modelul de fluid sau de solid rigid, modele de unde etc.

Cel mai simplu model din mecanică este **punctul material**. Când punctul material este în mișcare el se numește și **mobil**.

Modelul punctului material se poate aplica atât unor corpuri de dimensiuni și mase mari (corpuri cerești), cât și unor corpuri de dimensiuni microscopice (atomi, electroni, etc). Rezultatele din mecanica punctului material se extrapolează (cu corecțiile necesare) când se trece la studiul mișcării unor corpuri ce nu pot fi reduse la un punct și care pot fi considerate ca o mulțime de puncte materiale (**sistem de puncte materiale**).

1.3.2. Elementele mișcării punctului material

Traectoria

Mișcarea punctului material o raportăm la un reper pe care îl considerăm fix (Fig. 1.1). Poziția punctului material față de reper este dată de vectorul de poziție $\mathbf{r}$ care are originea în originea reperului și vârful în punctul material studiat. Poziția punctului material este dată de trei scalari care reprezintă distanțe sau distanțe și unghiuri. Traectoria punctului material este **locul geometric al pozițiilor succesive** ocupate de mobil în mișcarea sa și se notează cu T . În general traectoria punctului material este o curbă în spațiu. În mecanica clasică se consideră că traectoria sistemului material este bine determinată, iar mulțimea pozițiilor succesive ale punctului pe parcursul mișcării este continuă.

Fie un punct material care se deplasează pe o traectorie oarecare. Poziția sa se determină cu ajutorul vectorului de poziție $\mathbf{r}$. Legea de mișcare este dată de ecuația vectorială:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1.1)$$

Dacă se alege ca reper un sistem de axe cartezian triortogonal și se proiectează ecuația (1.1) pe axe se obține:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ecuațiile (1.2) se numesc ecuații parametrice ale traectoriei sau ecuațiile finite ale mișcării, iar x , y și z sunt funcții scalare de timp. Dacă se elimină parametrul t (timpul) din aceste ecuații se obține ecuația traectoriei sub formă implicită:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (1.3)$$

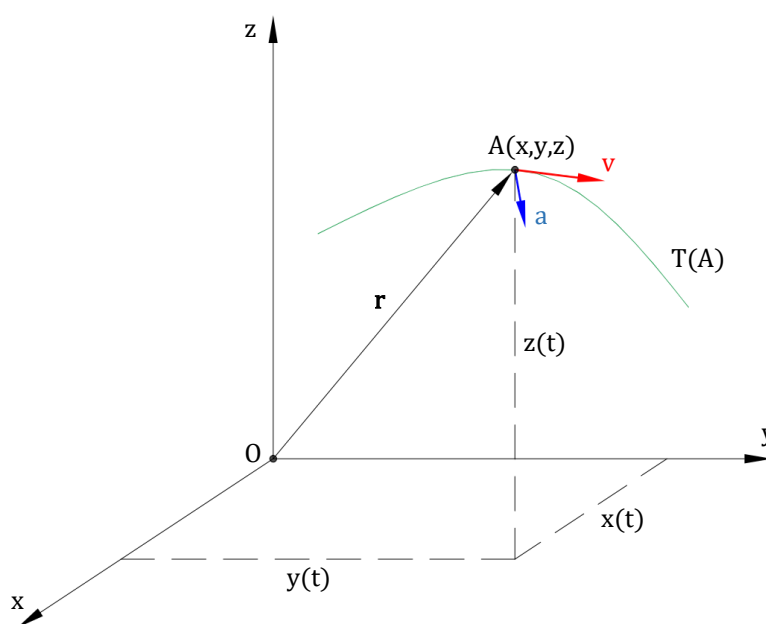


Figura 1.1

Deplasare finită și deplasare elementară

Mișcarea efectuată de punctul material într-un interval finit de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ se numește **mișcare finită**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ se numește **deplasare finită** (Fig 1.2). Mișcarea efectuată de punctul material într-un interval infinitesimal (elementar) de timp dt se numește **mișcare instantanee sau elementară**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp, $d\mathbf{r}$ se numește **deplasare elementară** (Fig 1.2).

$$d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad (1.4)$$

Viteza

Viteza este o mărime vectorială atașată punctului care indică direcția și sensul în care are loc mișcarea. Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba $T(A)$, la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu vectorii de poziție $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$. Elementul de arc A_1A_2 , de pe traiectoria punctului, se poate asimila, în intervalul de timp Δt foarte mic, cu elementul de coardă A_1A_2 astfel încât:

$$|d\mathbf{r}| \cong \Delta s \quad (1.5)$$

(i) Raportul $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ se numește **viteză medie** pe o porțiune Δs de traiectorie (Fig 1.2)

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

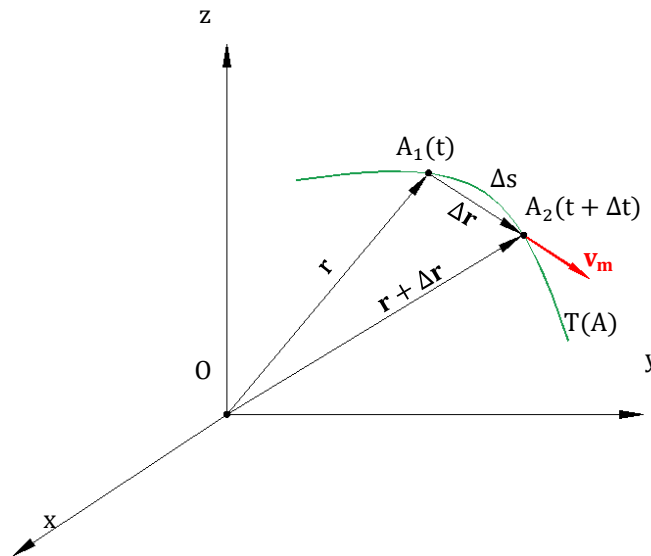


Figura 1.2

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.6) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza instantanee $\mathbf{v}$** ca fiind viteza punctului la momentul t al mișcării:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.7)$$

Viteza instantanee este o mărime vectorială și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului de poziție a punctului material, fiind un vector tangențial la traiectorie în poziția punctului pe traiectorie la momentul t (Fig. 1.3).

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu un punct deasupra funcțiilor, derivata de ordinul II în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu două puncte deasupra funcțiilor s.a.m.d.

Din relația (1.7) rezultă expresia deplasării elementare:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (1.8)$$

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei sunt:

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = LT^{-1}$$

$$[v]_{SI} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
(1.9)

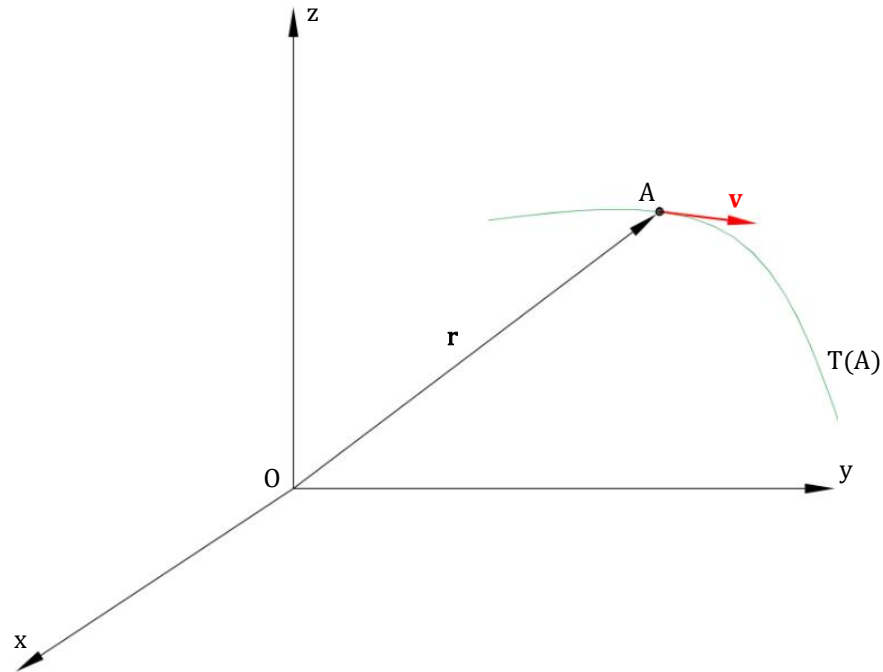


Figura 1.3

(iii) Poziția unui punct pe traiectorie se poate preciza cu ajutorul unui unghi la centru θ , (care se mai numește și spațiu unghiular) și a razei vectoriale (coordonate polare). Considerând ca reper raza vectorială OA_0 , legea de mișcare a punctului A este definită de funcția: $\theta = \theta(t)$ (Fig. 1.4).

Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba plană (T_A), la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu unghiurile la centru θ și $\theta + \Delta\theta$. Variația spațiului unghiular în intervalul de timp Δt este $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Raportul

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$
(1.10)

se numește **viteză unghiulară medie** a punctului A.

Prin trecerea la limită în relația (1.10) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza unghiulară instantanee** ω ca fiind viteza unghiulară a punctului la momentul t al mișcării:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$
(1.11)

Vectorul viteză unghiulară ω este perpendicular pe planul traiectoriei mobilului și are sensul dat de regula burghiului sau a mâinii drepte.

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$[\omega] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} = T^{-1}$$

$$[\omega]_{SI} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ s}^{-1}$$
(1.12)

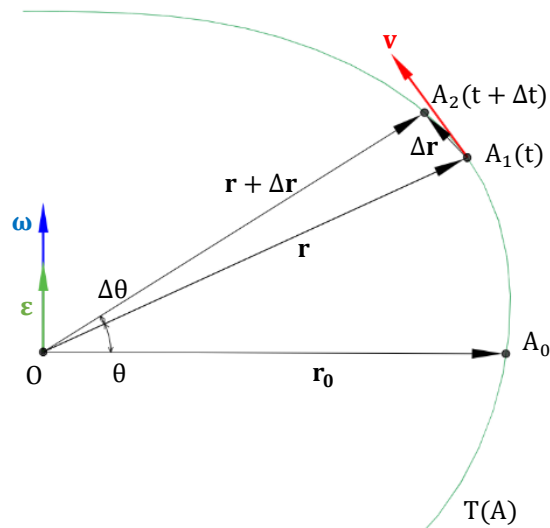


Figura 1.4

Accelerația

Accelerația este o mărime vectorială atașată punctului în mișcare și arată modul de variație al vitezei acestui punct în decursul mișcării, ca modul, direcție și sens.

Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba $T(A)$, la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$, având vitezele $\mathbf{v}_1(t_1)$ și $\mathbf{v}_2(t_2)$ (Fig. 1.5).

Variația vitezei în intervalul de timp Δt este $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t_2) - \mathbf{v}_1(t_1)$

(i) Raportul $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ măsoară variația vitezei în timp și se numește **accelerație medie** pe o porțiune Δs de traiectorie.

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1.13)$$

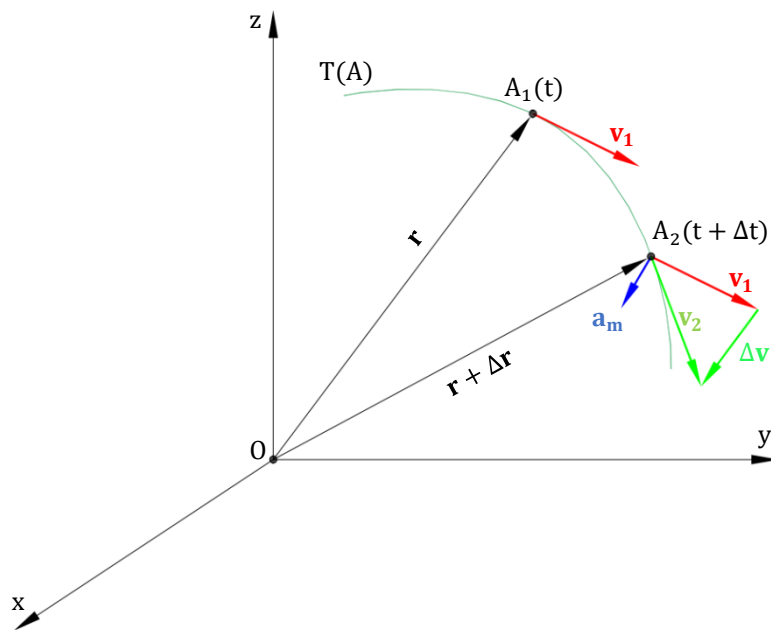


Figura 1.5

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.17) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **accelerația instantanee** $\mathbf{a}$ ca fiind accelerația la momentul t al mișcării;

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.14)$$

și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului viteză instantanee și cu derivata de ordinul II în raport cu timpul a vectorului de poziție $\mathbf{r}$ (Fig 1.6).

Dacă se continuă derivarea în raport cu timpul, a vectorului de poziție $\mathbf{r}$, se obțin vectori care se numesc accelerații de ordin superior. Astfel, derivata a treia în raport cu timpul a vectorului de poziție, se numește accelerație de ordin al doilea sau supraaccelerație.

Dimensiunea și unitatea de măsură a accelerației sunt:

$$\begin{aligned} [a] &= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = LT^{-2} \\ [a]_{SI} &= 1 \, m \cdot s^{-2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

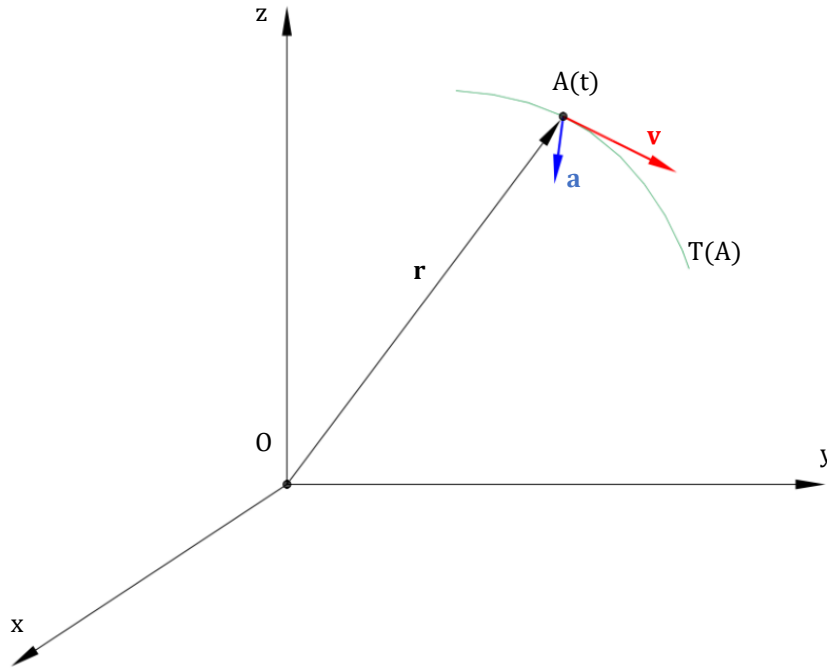


Figura 1.6

(iii) Se definește **accelerația unghiulară** ca variația în timp a vectorului viteză unghiulară.

Considerând pozițiile succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe traiectorie, la momentul t și respectiv $t + \Delta t$, având vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 , variația vitezei unghiulare în intervalul de timp Δt este $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Raportul

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.16)$$

măsoară variația vitezei unghiulare în timp și se numește **accelerație unghiulară medie**. Prin trecerea la limită în relația (1.20) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ și sau $A_2 \rightarrow A_1$ rezultă accelerația unghiulară instantanee:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (1.17)$$

Vectorul accelerație unghiulară are aceeași direcție ca și vectorul viteză unghiulară în cazul traiectoriilor plane ale mobilului (Fig 1.4).

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = T^{-2} \\ [\varepsilon]_{SI} &= 1 \, rad \cdot s^{-2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.3.3. Componentele vectorilor viteză și accelerație

Coordonate carteziene

Vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ în care x , y și z sunt coordonatele punctului material A raportate la un sistem de axe cartezian triortogonal.

Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (Fig 1.7).

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k} \quad (1.20)$$

Din relația (1.20) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee care sunt funcții scalare de timp:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}(t) \\ v_y &= \dot{y}(t) \\ v_z &= \dot{z}(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \quad (1.22)$$

Direcția acestui vector este dată de cosinușii directori:

$$\begin{aligned} \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{i}) &= \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{k}) &= \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

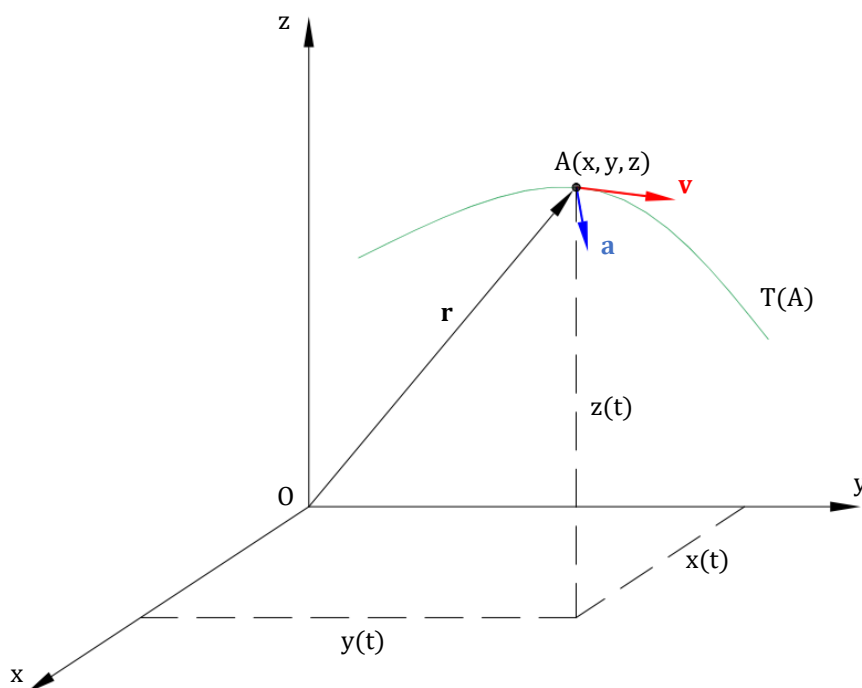


Figura 1.7

Coordonate cilindrice

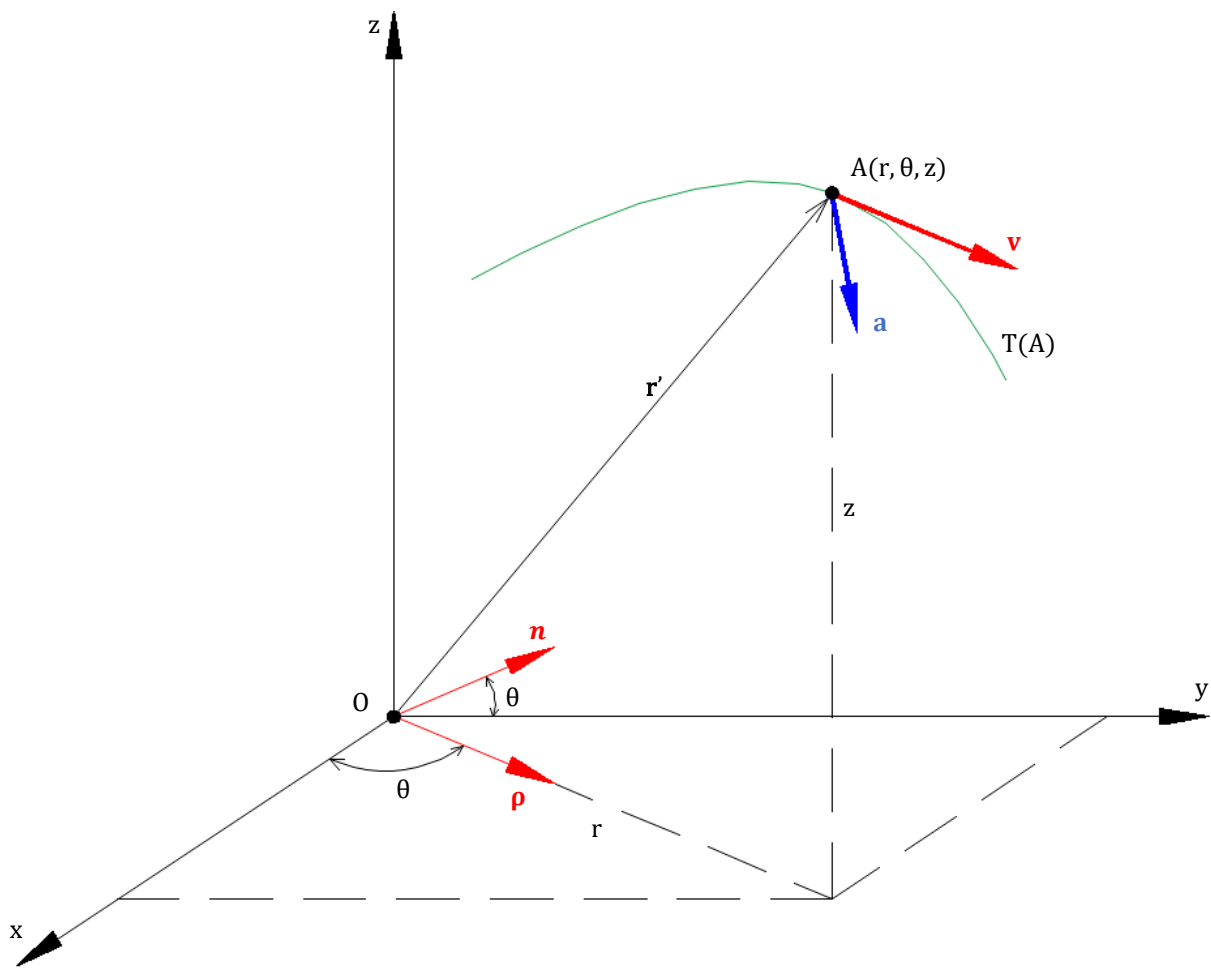


Figura 1.8

Vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r}' = r(t) \cdot \boldsymbol{\rho} + z(t) \cdot \mathbf{k}$ în care r, θ, z , sunt coordonatele cilindrice ale punctului material A raportate la un sistem de axe. Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (Fig.1.8)

$$\begin{aligned} r &= r(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Vectorul *viteză instantanee* are expresia

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k} + z \dot{\mathbf{k}} \quad (1.25)$$

Dacă raportăm versorii $\boldsymbol{\rho}$ și $\mathbf{n}$, ortogonali, la sistemul de referință cartezian putem scrie:

$$\boldsymbol{\rho} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{n} = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \quad (1.27)$$

Prin derivare se obține:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{n} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k} = v_{\rho} \boldsymbol{\rho} + v_n \mathbf{n} + v_z \mathbf{k} \quad (1.29)$$

Din relația (1.29) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r} \\ v_n &= r\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|v| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (1.31)$$

Vectorul *acclerație instantanee* are expresia

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \boldsymbol{\rho} + \dot{r} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{n} + r \ddot{\theta} \mathbf{n} + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{n}} + \ddot{z} \mathbf{k} + \dot{z} \dot{\mathbf{k}} \quad (1.32)$$

Știind că $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\theta} \cdot \mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}$

Relația (1.32) devine

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \boldsymbol{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{n} + \ddot{z} \mathbf{k} = a_\rho \boldsymbol{\rho} + a_n \mathbf{n} + a_z \mathbf{k} \quad (1.33)$$

Din relația (1.45) rezultă **componentele scalare** ale vectorului *acclerație instantanee*:

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_n &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Modulul vectorului acclerație instantanee este:

$$|a| = \sqrt{a_\rho^2 + a_n^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2} \quad (1.35)$$

Coordonate intrinseci

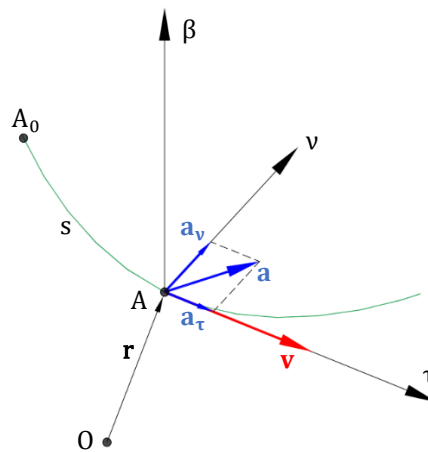


Figura 1.9

Coordonata intrinsecă a punctului material este s (Fig. 1.9). Această coordonată este funcție de timp și reprezintă **ecuația finită a mișcării punctului**

$$s = s(t) \quad (1.36)$$

Mișcarea o raportăm la un reper mobil legat de punct a cărui axe sunt: tangenta la traiectorie τ , normala ν și binormala β , numit triedrul lui Frenet.

Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau} + v_\nu \boldsymbol{\nu} + v_\beta \boldsymbol{\beta} \quad (1.38)$$

În relația (1.37) s-a ținut seama de prima formulă a lui Frenet¹.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.39)$$

Din relațiile (1.37) și (1.38) rezultă *componentele scalare* ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\tau &= \dot{s} \\ v_\nu &= 0 \\ v_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Din relația (1.37) se observă ca vectorul viteză este dirijat după tangenta la traiectoria punctului. Vectorul **acelerație instantanee** are expresia:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \dot{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.41)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \quad (1.42)$$

În relația (1.42) s-a ținut seama de cea de-a doua formulă a lui Frenet¹.

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \quad (1.43)$$

În relația (1.43) ρ este raza de curbură a traiectoriei.

Înlocuind relația (1.42) în formula accelerației (1.41) obținem,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \boldsymbol{\nu} \quad (1.44)$$

de unde rezultă componentele scalare ale vectorului accelerație.

$$\begin{aligned} a_\tau &= \dot{v} = \ddot{s} \\ a_\nu &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Din relațiile (1.45) rezultă câteva observații legate de mișcarea punctului:

- accelerația tangențială măsoară variația vitezei în timp $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$;
- nu există mișcare pe traiectorie curbă fără accelerație, pentru $v = \text{constant} \rightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, $a_\nu = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$;
- componenta normală a accelerației a_ν este îndreptată spre centrul de curbură al traiectoriei, ea se mai numește și accelerație centripetă;
- vectorul accelerație instantanee este situat în planul osculator al curbei traiectorie ($a_\beta = 0$).

Modulul vectorului accelerație este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{(\ddot{s})^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \quad (1.46)$$

¹ Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)

1.4. Cinematica mișcărilor particulare ale punctului material

1.4.1. Mișcarea rectilinie

Este mișcarea în care traiectoria este o dreaptă (Fig. 1.10). Considerăm o axă Ox de versor $\mathbf{u}$ pe care s-a stabilit un sens pozitiv și un punct A care se mișcă pe axă. Vectorul de poziție al punctului pe axă este $\mathbf{r} = \mathbf{OA} = x\mathbf{u}$.

Viteza punctului este $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{u}$, iar accelerația $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{u}$. Se observă că viteza și accelerația sunt vectori coliniari și dirijați de-a lungul traiectoriei.

Dacă vectorul viteză și vectorul accelerație au același sens mișcarea se numește accelerată, iar dacă acești vectori sunt de sens contrar mișcarea se numește încetinită.

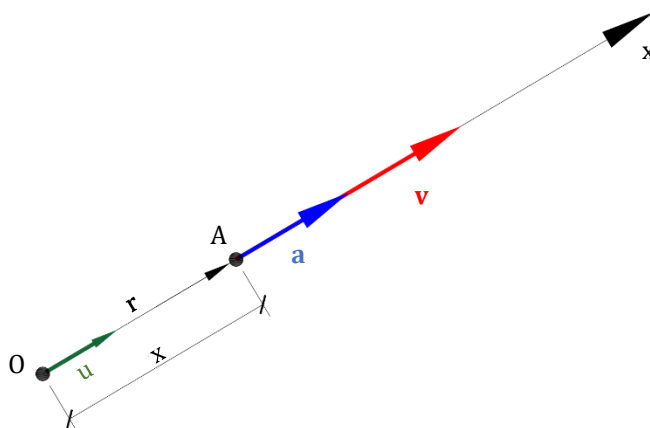


Figura 1.10

Cazurile particulare ale mișcării rectilinii sunt:

Mișcarea rectilinie și uniformă este mișcarea în care viteza este constantă pe tot parcursul mișcării (Fig 1.11).

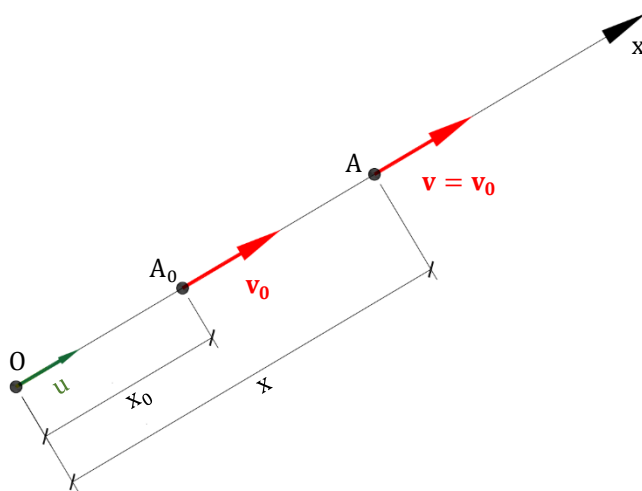


Figura 1.11

$$v = v_0 \text{ constant, } \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Știind că $\frac{dx}{dt} = v$, rezultă:

$$dx = v_0 dt \quad (1.47)$$

Dacă se integrează relația (1.47) rezultă:

$$x = v_0 t + C \quad (1.48)$$

Constanta C se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$\begin{aligned} t &= t_0 = 0 \\ x &= x_0 \end{aligned}$$

Relația (1.48) devine

$$x = v_0 t + x_0 \quad (1.49)$$

În concluzie, mișcarea rectilinie și uniformă se caracterizează prin următoarele elemente:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + x_0 && \text{- spațiul parcurs este o funcție de gradul întâi în } t; \\ v &= \dot{x} = v_0 && \text{- viteza constantă;} \\ a &= \dot{v} = 0 && \text{- accelerația nulă.} \end{aligned}$$

Mișcarea rectilinie uniform variată este mișcarea în care accelerația este constantă pe tot parcursul mișcării (Fig. 1.12).

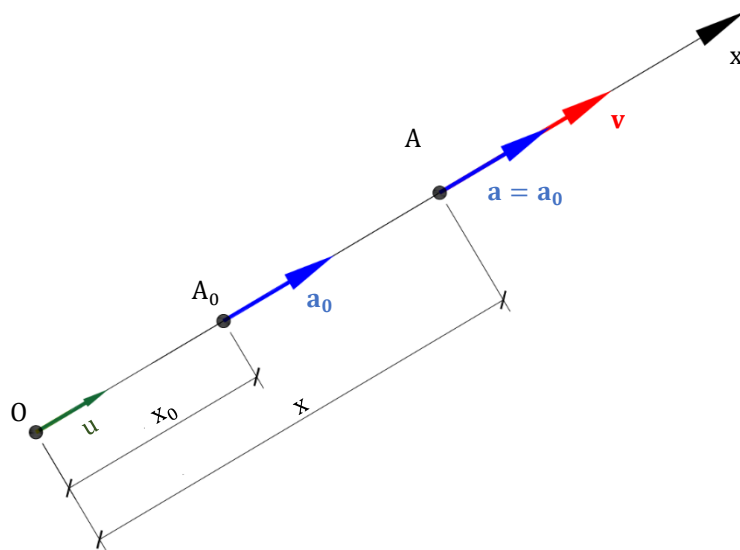


Figura 1.12

$a = a_0$ - constant.

Știind că

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \quad (1.50)$$

Prin integrarea relației (1.50) rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = v = a_0 t + C_1 \quad (1.51)$$

Constanta C_1 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$\begin{aligned} t &= t_0 = 0 \\ v &= v_0 \\ C_1 &= v_0 \end{aligned}$$

Relația (1.51) devine:

$$v = a_0 t + v_0$$

Integrarea relației (1.51) conduce la:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \quad (1.52)$$

Constanta C_2 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$\begin{aligned} t &= t_0 = 0 \\ x &= x_0 \\ C_2 &= x_0 \end{aligned}$$

Relația (1.52) devine:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (1.53)$$

În concluzie, mișcarea rectilinie uniform variată se caracterizează prin următoarele elemente:

$$\begin{aligned} x &= a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 & - \text{spațiul parcurs este o funcție de gradul doi în } t; \\ v &= a_0 t + v_0 & - \text{viteza este o funcție de gradul întâi în } t; \\ a &= a_0 & - \text{acelerația este constantă.} \end{aligned}$$

Dacă vectorul viteza și vectorul accelerație au același sens mișcarea se numește uniform accelerată, iar dacă acești vectori sunt de sensuri contrarii mișcarea se numește uniform încetinită.

1.4.2. Mișcarea circulară

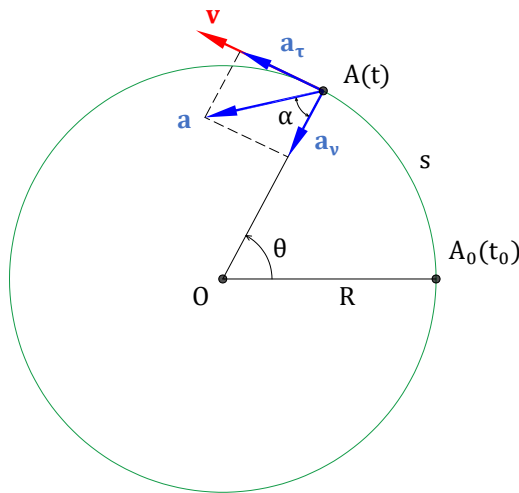


Figura 1.13

În coordonate intrinseci

$$s = s(t) = R \cdot \theta(t) \quad (1.54)$$

Viteza se obține derivând relația (1.54)

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \quad (1.55)$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1.56)$$

Accelerația se determină derivând relația (1.56)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \boldsymbol{\nu} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_v \boldsymbol{\nu} \\ a_\tau &= \ddot{s} = R\dot{\omega} = R\varepsilon \\ a_v &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Modulul vectorului accelerație va fi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (1.58)$$

Cu ω s-a notat variația spațiului unghiular θ , numită viteză unghiulară a punctului. Cu ε s-a notat variația vitezei unghiulare $\dot{\omega}$, numită accelerație unghiulară.

Direcția vectorului accelerație este dată de unghiul α făcut cu raza vectoare OA:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_v} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (1.59)$$

1.5. Cinematica corpului solid rigid

1.5.1. Introducere

Corpul rigid este un element important în mecanică și semnifică un corp material în formă fixă, compus din particule elementare pentru care **distanța dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp și în spațiu.**

Conceptul de corp rigid are avantajul de a simplifica studiul mișcării corpului în sensul adoptării unui număr finit de parametri care să definească poziția corpului în mișcare.

Mișcarea unui corp este definită ca o schimbare de poziție a corpului în raport cu un reper (sistem de referință).

Mișcarea unui corp față de un sistem de referință este cunoscută, dacă se pot determina legile de mișcare, traiectoria, viteza și accelerația fiecărui punct din corp.

Practic nu este posibil să se descrie mișcarea rigidului prin mișcarea fiecărui punct, dar este suficient să fie cunoscute în fiecare moment al mișcării, numai pozițiile unor puncte din care, pe baza păstrării distanțelor dintre puncte, se vor determina pozițiile celorlalte puncte din rigid. Poziția unui corp rigid față de un anumit reper din spațiul euclidian tridimensional R^3 este cunoscută dacă se cunosc pozițiile a trei puncte necoliniare ce aparțin rigidului.

Numărul minim al funcțiilor scalare independente care determină poziția corpului în orice moment reprezintă numărul gradelor de libertate ale corpului. Funcțiile scalare care determină poziția corpului sunt elemente geometrice (distanțe, unghiuri), funcții de timp.

Legăturile la care este supus un corp (sau sistem de corpuri) micșorează numărul gradelor de libertate. Mișcarea are loc în spațiu și în timp. Spațiul în care are loc mișcarea este spațiul geometriei euclidiene, infinit, omogen, continuu și izotrop. Timpul măsoară durata mișcării și este infinit, omogen, continuu și ireversibil.

Mișcarea realizată de corp într-un interval finit de timp se numește mișcare finită, iar punctele corpului înregistrează deplasări finite ca mărime.

Mișcarea realizată de corp într-un interval elementar de timp se numește mișcare instantanee, iar punctele corpului înregistrează deplasări elementare.

Mișcarea se raportează la un sistem de axe mobil, legat de corpul în mișcare și un sistem de referință fix. Dacă corpul, în mișcarea sa, poate ocupa orice poziție în spațiu, fără nici o restricție, mișcarea se numește generală, iar în caz contrar se numește mișcare particulară.

1.5.2. Mișcarea de translație

Definiția mișcării

Mișcarea în care orice segment de dreaptă, aparținând corpului rigid, rămâne paralel cu el însuși în tot timpul mișcării se numește **mișcare de translație**. Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de referință mobil, legat de corpul în mișcare, paralel cu sistemul fix (Fig. 1.14).

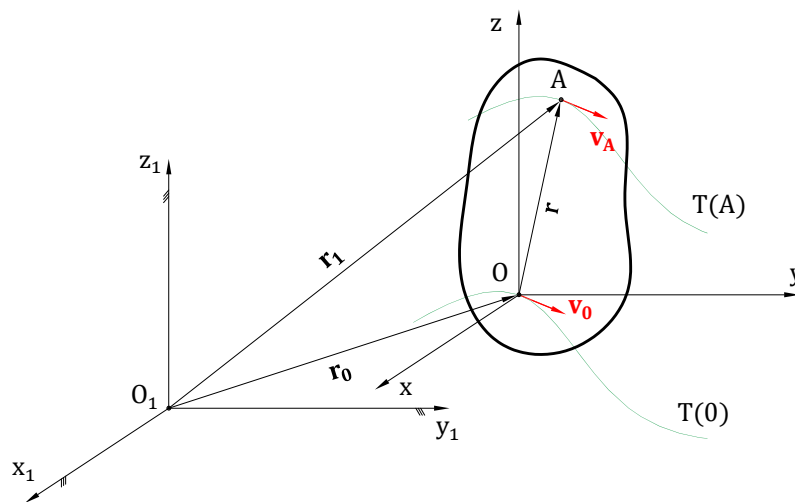


Figura 1.14

Grade de libertate

Mișcarea de translație a corpului se reduce la o mișcare de punct material astfel încât în această mișcare corpul are 3 grade de libertate cinematice.

Ecuția finită a mișcării de translație este:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) \quad (1.60)$$

Iar ecuațiile finite scalare sunt:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t) \\ y_0 &= y_0(t) \\ z_0 &= z_0(t) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ecuțiile (1.61) exprimă gradele de libertate ale corpului rigid.

Elementele mișcării

Traietorii

Traietoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de translație, sunt curbe paralele (Fig.1.14). Mișcarea de translație poate fi rectilinie, dacă traiectoriile sunt drepte paralele.

Viteze

În orice moment al mișcării se poate scrie:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \quad (1.62)$$

În care $\mathbf{r}_1$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$$

$\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului O (originea sistemului de referință mobil),

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$$

$\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului A în sistemul de referință mobil, $|\mathbf{r}| = \text{constant}$ (Fig. 1.14)

Viteza punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (1.63)$$

Știind că $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ relația (1.63) devine

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 \quad (1.64)$$

Vitezele tuturor punctelor sunt egale.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_B = \dots$$

Viteza comună se numește **viteză de translație**.

Dacă viteza este constantă mișcarea se numește **uniformă**. Dacă viteza este constantă și traiectoriile sunt drepte paralele mișcarea se numește **rectilinie și uniformă**.

Acceleerații

Acceleerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 \quad (1.65)$$

Știind că $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{a}_0$ relația (1.65) devine:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 \quad (1.66)$$

Acceleerațiile tuturor punctelor sunt egale:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_B = \dots \quad (1.67)$$

Acceleerația comună se numește **acceleerație de translație**. În mișcarea rectilinie și uniformă acceleerațiile sunt nule.

1.5.3. Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe

Definiția mișcării

Mișcarea în care două puncte (O și O') ale solidului rămân fixe în spațiu în tot timpul mișcării se numește mișcare de rotație în jurul axei fixe determinată de cele două puncte. Axa după care are loc mișcarea se numește axa de rotație (Fig. 1.15).

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se rotește odată cu corpul.

În Fig.1.15 axa de rotație este axa $oz \equiv o_1z_1$.

Grade de libertate

În această mișcare corpul are un grad de libertate cinematică (Fig. 1.15).

Ecuatia finită a mișcării de rotație în jurul axei fixe este:

$$\theta = \theta(t) \quad (1.68)$$

Ecuatia (1.68) exprimă gradul de libertate al corpului rigid, rotirea în jurul axei z .

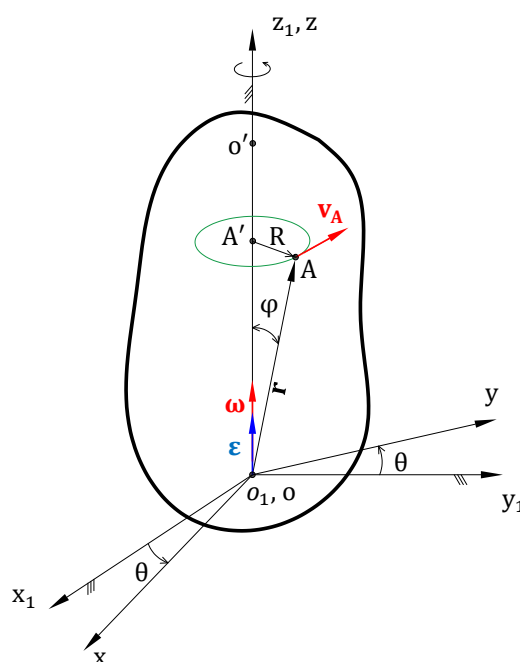


Figura 1.15

Elementele mișcării

Traectorii

Traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de rotație în jurul axei fixe sunt cercuri cu centrele pe axa de rotație. Cercurile care aparțin aceluiași plan sunt concentrice.

Viteze

Viteza cu care se rotește corpul se numește viteză unghiulară, notată ω , și reprezintă variația spațiului unghiular $\theta(t)$.

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) \quad (1.69)$$

Vectorul viteză unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație (Fig. 1.15) astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_1 = \omega \mathbf{k} \quad (1.70)$$

Relația (1.70) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 . $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = OA \cdot (\sin \varphi \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j}_1 + \cos \varphi \mathbf{k}_1) \quad (1.71)$$

În relația 1.71

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(t) \\ \varphi &= \text{constant} \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = OA \cdot (-\sin \varphi \sin \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{j}_1) \cdot \dot{\theta}$$

Dacă

$$\begin{aligned} OA &= r \\ \omega &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

Relația (1.72) se scrie:

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = r\omega(-\sin \varphi \sin \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{j}_1) \quad (1.73)$$

Se poate observa că produsul vectorial

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ r \sin \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r\omega(-\sin \varphi \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j}_1)$$

este egal cu $\mathbf{v}_A$ (1.73) ceea ce conduce la relația

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.74)$$

ce exprimă viteza unui punct ce aparține rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă.

Câmpul vitezelor

Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A (Fig. 1.15) și este conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{v}_A| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \omega R \quad (1.75)$$

În relația 1.75, R este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A. Modulul vectorului viteză este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație. Pe baza relației (1.75) se poate trasa câmpul (diagrama de variație) vitezelor (Fig 1.16).

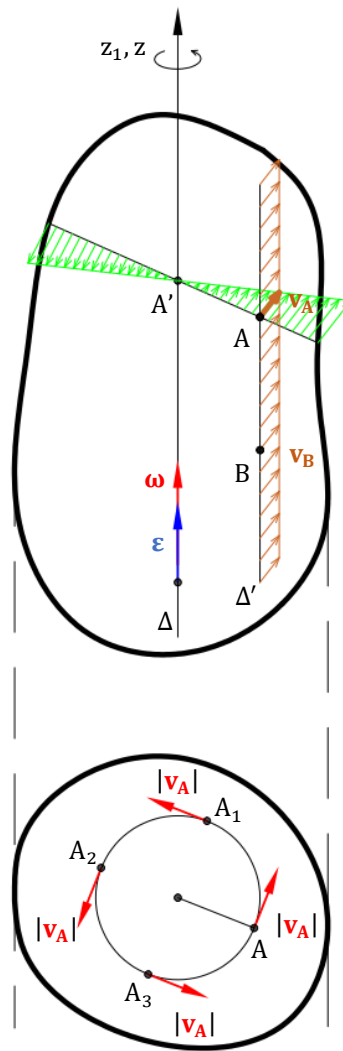


Figura 1.16

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului vitezelor:

- diagrama vitezelor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație;
- punctele de pe suprafața corpului au vitezele cele mai mari.
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au vitezele egale;
- punctele egal depărtate de axa de rotație au vitezele egale în modul.

Accelerația unghiulară

Accelerația cu care se rotește corpul se numește accelerație unghiulară ε și reprezintă variația vitezei unghiulare $\omega = \omega(t)$.

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}(t) \quad (1.76)$$

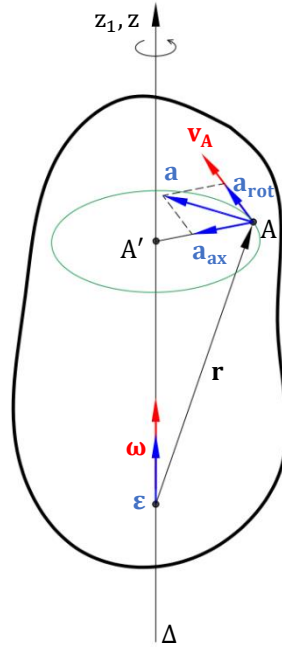


Figura 1.17

Vectorul accelerație unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie (Fig. 1.17):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{k}_1 = \varepsilon \mathbf{k} \quad (1.77)$$

Relația (1.77) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 .

Accelerația punctului

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.78)$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are două componente:

(i) Accelerația de rotație

$$\mathbf{a}_{rot} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (1.79)$$

Accelerația de rotație este un vector tangent la traiectorie în punctul A și este conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a}_{rot}| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\mathbf{r}| \sin(\angle \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}) = \varepsilon R \quad (1.80)$$

(ii) Accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{ax} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.81)$$

Componenta $\mathbf{a}_{ax}$ este și ea conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație și este dirijată spre centrul cercului traiectorie.

$$|\mathbf{a}_{ax}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}| \sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 R \quad (1.82)$$

Componentele $\mathbf{a}_{ax}$ și $\mathbf{a}_{rot}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} \quad (1.83)$$

Câmpul accelerațiilor

Vectorul $\mathbf{a}_A$ este un vector conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a}_A| = \sqrt{|\mathbf{a}_{rot}|^2 + |\mathbf{a}_{ax}|^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (1.84)$$

Modulul vectorului accelerație este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație. Pe baza relației (1.84) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor (Fig. 1.18).

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor:

- diagrama accelerațiilor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație.
- punctele de pe suprafața corpului au accelerațiile cele mai mari;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au accelerațiile egale;
- punctele egal depărtate de axa de rotație au accelerațiile egale în modul.

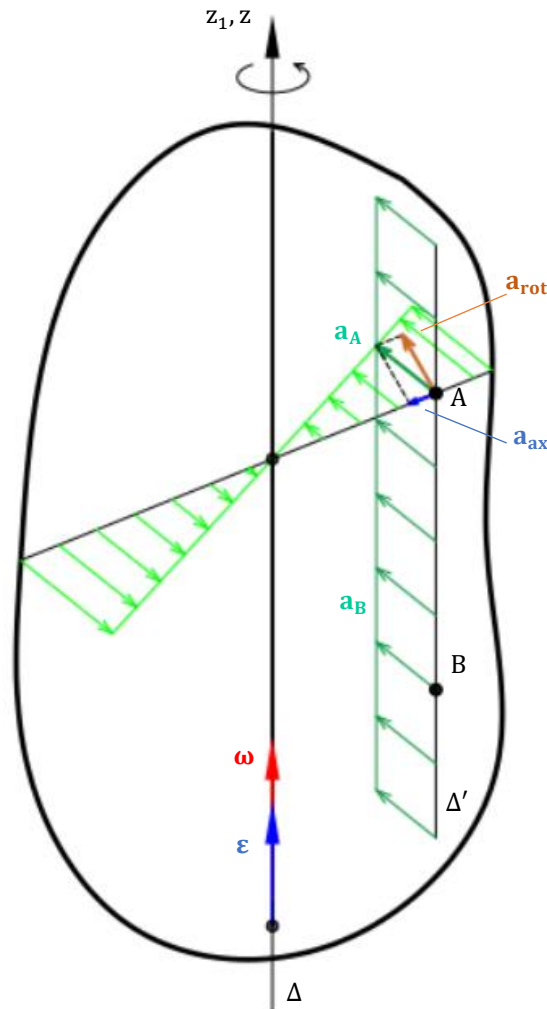


Figura 1.18

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$

Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ și $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (1.85)$$

și rotația elementară,

$$d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} dt \quad (1.86)$$

dar $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ și relația (1.85) devine:

$$d\mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dt = \boldsymbol{\omega} dt \times \mathbf{r} \quad (1.87)$$

Ținând seama de relația (1.86) relația (1.87) devine:

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (1.88)$$

Relația (1.88) reprezintă expresia vectorială a deplasărilor elementare în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

1.5.4. Mișcarea plan paralelă (mișcarea plană)

Definiția mișcării

Mișcarea în care distanța, de la orice punct al solidului până la un plan fix din spațiu, rămâne constantă în tot timpul mișcării se numește mișcare plan paralelă sau mișcarea plană. (Fig. 1.19)

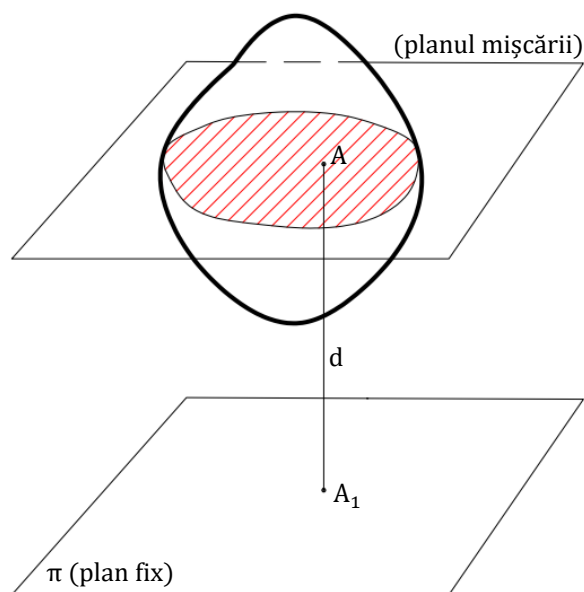


Figura 1.19

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de referință mobil, care se mișcă odată cu corpul (Fig. 1.20).

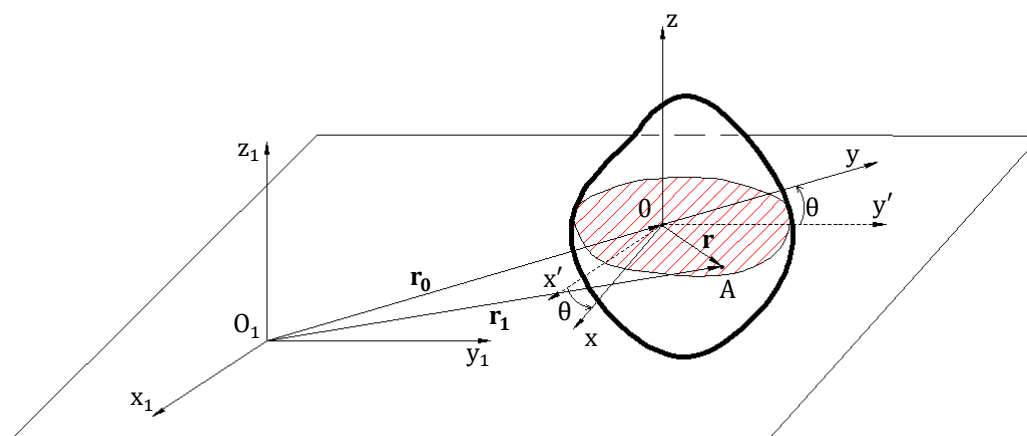


Figura 1.20

Din definiția mișcării rezultă proprietățile mișcării:

- (i) toate punctele ce aparțin corpului situate pe o dreaptă normală la planul fix execută mișcări identice,
- (ii) toate punctele ce aparțin corpului situate în plane paralele cu planul fix execută mișcări identice. Pentru a studia mișcarea solidului, este suficient să se studieze mișcarea unui plan ce aparține corpului, paralel cu planul fix.

Grade de libertate

În această mișcare corpul are 3 grade de libertate cinemate. Mișcarea plană este compusă dintr-o translație instantanee într-un plan paralel cu planul fix (în Fig. 1.20 planul $x_1O_1y_1$) și o rotație instantanee în jurul unei axe perpendiculare pe planul fix (Oz).

În continuare se studiază mișcarea unui plan mobil al solidului din planul xOy , în planul fix $x_1O_1y_1$, adică mișcarea unei plăci mobile pe o placă fixă.

Ecuațiile finite ale mișcării plane sunt:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0(t) \\ y_0 &= y_0(t) \\ \theta &= \theta(t)\end{aligned}\tag{1.89}$$

și exprimă gradele de libertate al corpului rigid în mișcarea plană.

Elementele mișcării

Traietorii

Traietoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea plană sunt curbe situate în plane paralele cu planul fix.

Viteza unghiulară

Viteza cu care se rotește corpul în jurul unei axe perpendiculare pe planul mișcării este viteza unghiulară ω . Vectorul vitezei unghiulare este un vector dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_1 = \omega \mathbf{k}\tag{1.90}$$

Relația (1.90) este valabilă atunci când axa de rotație este Oz . Viteza unghiulară ω este aceeași indiferent în ce punct se alege polul O .

Viteza în mișcarea plană

Punctul A (punct oarecare ce aparține corpului) are ca și vector de poziție pe $\mathbf{r}_1$ în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}\tag{1.91}$$

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}\tag{1.92}$$

Dacă,

$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ este viteza polului O și $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

relația (1.92) se scrie (Fig. 1.21):

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\tag{1.93}$$

sau

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{A(0)}\tag{1.94}$$

unde $\mathbf{v}_{A(0)}$ reprezintă viteza corpului în mișcarea sa în raport cu punctul O .

Relația (1.94) reprezintă formula lui Euler pentru viteze în mișcarea plană. Axele sistemului de referință $x'O'y'$ sunt paralele cu axele sistemului fix de referință.

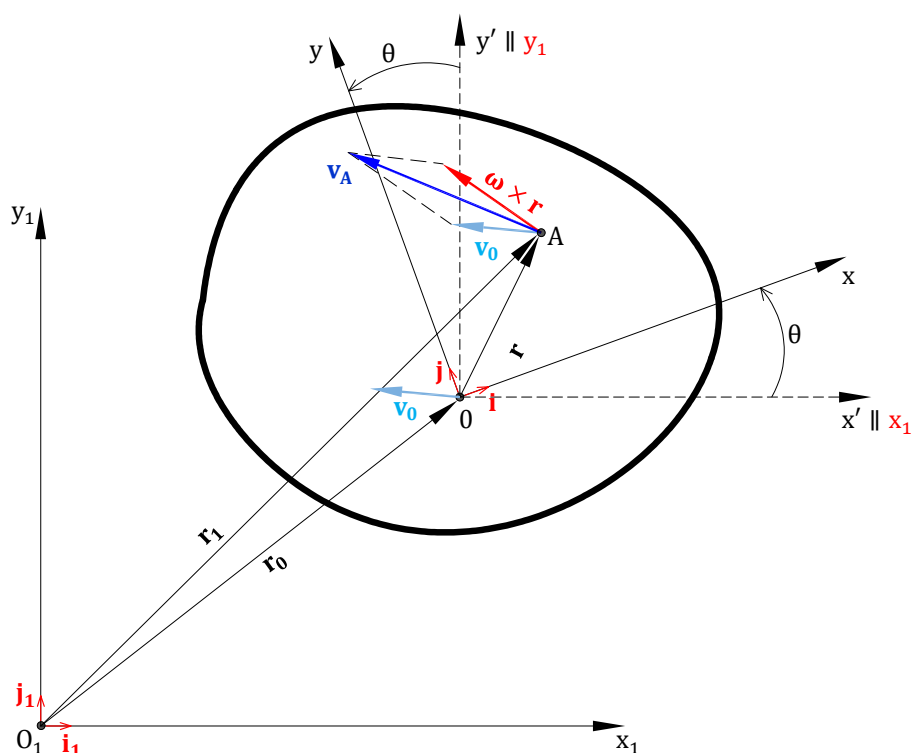


Figura 1.21

Câmpul vitezelor

Câmpul vitezelor se poate genera pe baza relației (1.93). Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A.

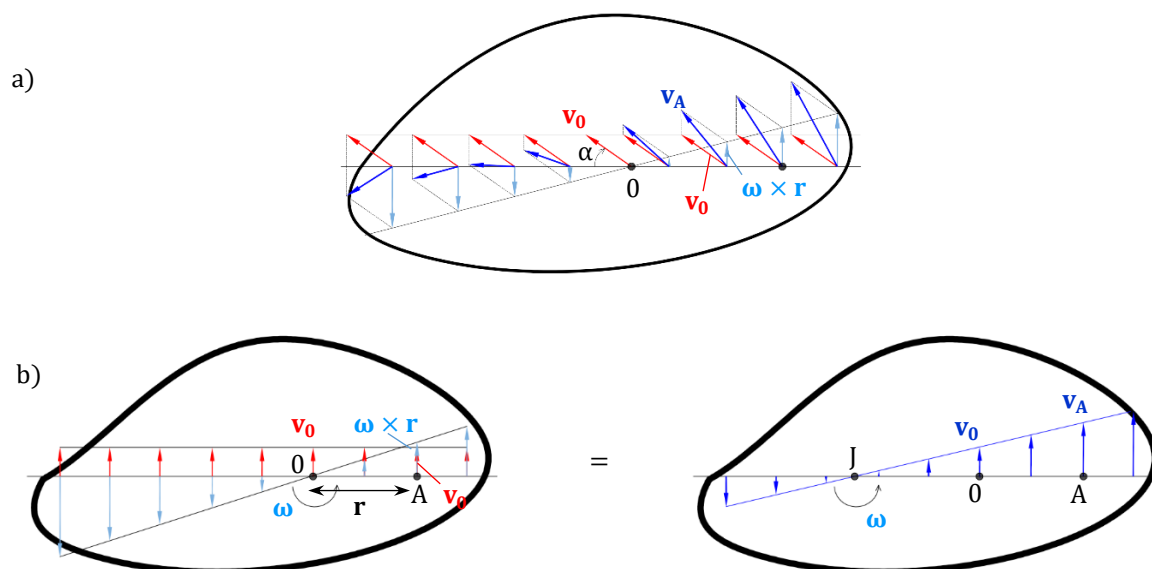


Figura 1.22

În figura 1.22 se prezintă două cazuri:

- vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.
- vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.

Proprietățile câmpului vitezelor (Fig. 1.22)

- (i) câmpul vectorilor viteză se obține prin însumarea câmpului constant de viteze $\mathbf{v}_0$, din mișcarea de translație, cu cel al vectorilor $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ din mișcarea de rotație (Fig. 1.22 a)
- (ii) câmpul vectorilor viteză $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ din mișcarea de rotație având o variație liniară atunci și câmpul vectorilor viteză din mișcarea plană are o variație liniară
- (iii) în mișcarea plană viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ este aceeași pentru toate punctele plăcii mobile
- (iv) dacă se studiază variația vectorilor viteză pe o dreaptă perpendiculară pe vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ se observă că cele două componente ale vectorului viteză $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ și $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sunt coliniare având același sens sau sensuri contrarii (Fig. 1.22 b)
- (v) punctul în care cele două componente ale vectorului viteză $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ și $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sunt egale și de sensuri contrarii are viteza egală cu 0
- (vi) acest punct se notează cu J și se numește centru instantaneu de rotație (CIR) sau polul vitezelor și se găsește în placa mobilă pe dreapta perpendiculară pe $\mathbf{v}_0$
- (vii) dacă mișcarea se raportează la punctul J, viteza punctului A se scrie conform relației (1.93). $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_J + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{JA}$, dar $\mathbf{v}_J = \mathbf{0}$ iar:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{JA} \quad (1.95)$$
- (viii) analizând distribuția vitezelor din Fig. 1.22 b asociată relației (1.95), se observă că distribuția instantanee a vitezelor este identică cu cea a unei rotații în jurul punctului J cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$.

[Determinarea poziției centrului instantaneu de rotație \(CIR\)](#)

Poziția CIR se poate determina pe cale analitică sau pe cale grafică.

Analitic

Se determină vectorul de poziție al punctului J în cele două sisteme de referință mobil și fix (Fig. 1.23).

Se scrie expresia vitezei CIR conform relației (1.93)

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OJ} = \mathbf{0} \quad (1.96)$$

Dacă se notează $\mathbf{OJ} = \mathbf{r}_J$, relația (1.96) devine

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_J = \mathbf{0} \quad (1.97)$$

Se înmulțește relația (1.97) la stânga cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$ și se obține:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_J) = \mathbf{0} \quad (1.98)$$

Ținând seama de formula dublului produs vectorial relația (1.98) devine:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_J) \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}_J = \mathbf{0} \quad (1.99)$$

Deoarece $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_J$, produsul scalar $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_J = 0$ și, deoarece $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2$ relația (1.99) devine:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - \omega^2 \mathbf{r}_J = \mathbf{0}, \text{ iar}$$

$$\mathbf{r}_J = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0}{\omega^2} \quad (1.100)$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de axe mobil, în raport cu punctul O și

$$\mathbf{r}_{1J} = \mathbf{r}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0}{\omega^2} \quad (1.101)$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de referință fix (Fig. 1.23).

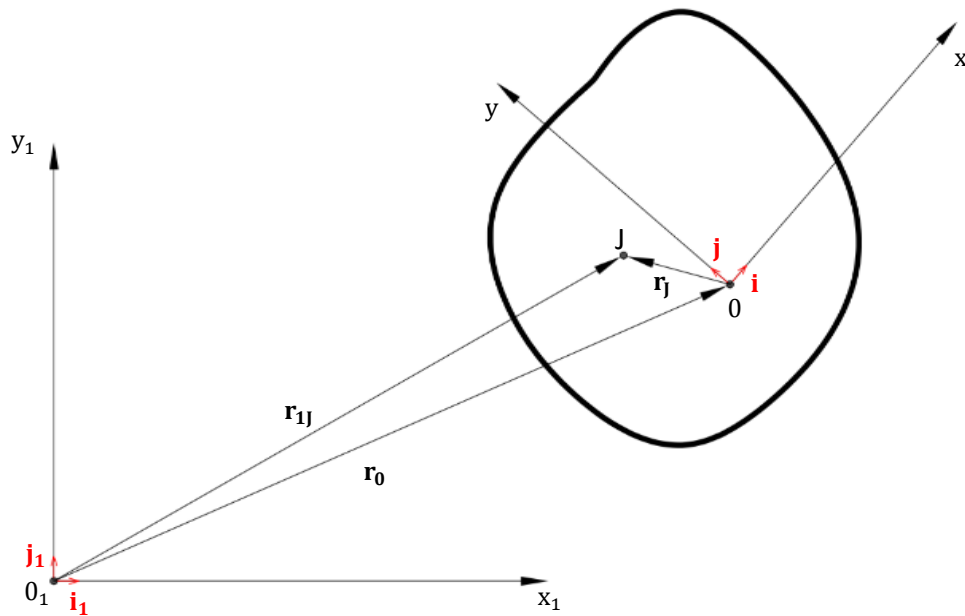


Figura 1.23

Grafic (geometric)

Mișcarea plană poate fi privită ca o mișcare instantanee de pură rotație în jurul centrului instantaneu de rotație J (Fig. 1.24 a). Dacă mișcarea este definită de vitezele a două puncte de pe placa mobilă, CIR se află la intersecția perpendicularelor pe vectorii vitezelor celor două puncte (Fig. 1.24 b, c).

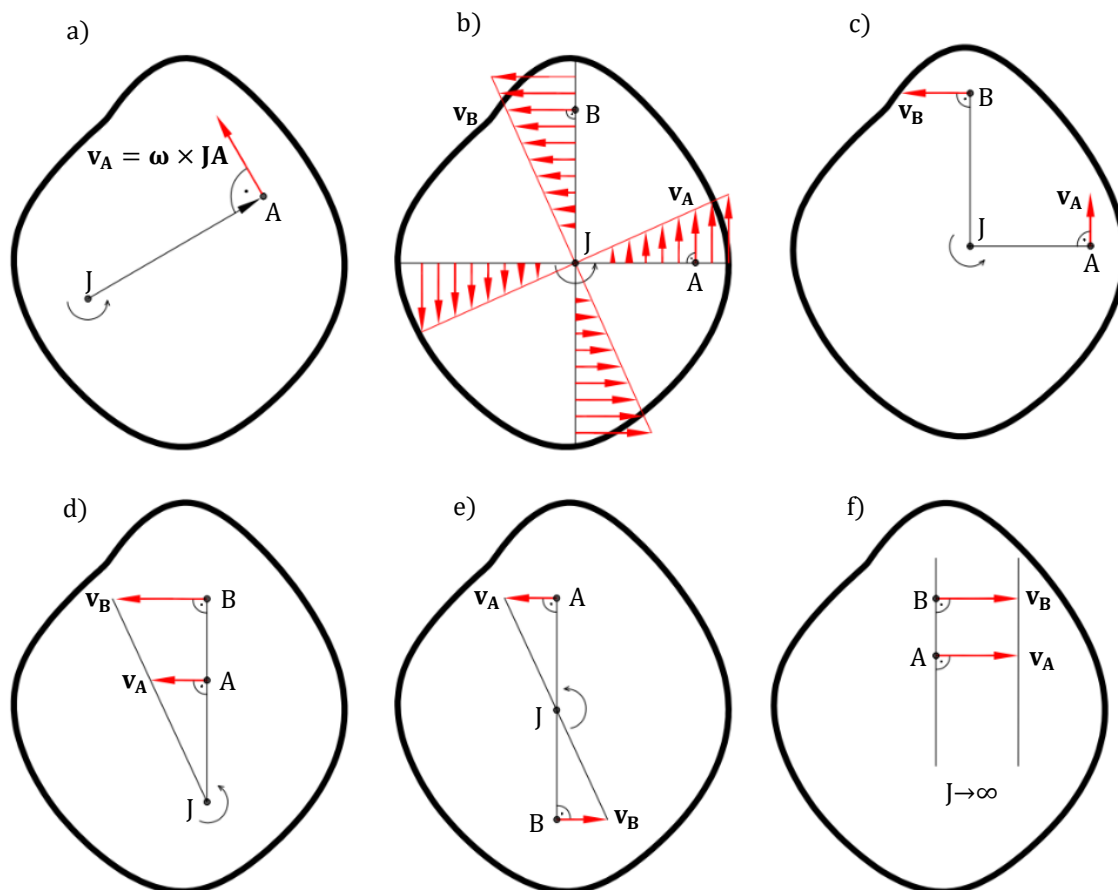


Figura 1.24

Dacă vectorii viteză ai celor două puncte A și B sunt paraleli, CIR se află la intersecția dintre perpendiculara comună a celor doi vectori și dreapta care unește vârfurile celor doi vectori (Fig. 1.24 d, e și f). Dacă vectorii viteză ai celor două puncte sunt egali, atunci CIR se află la infinit iar corpul execută o mișcare de translație (Fig. 1.24 f).

Accelerații

Accelerația de rotație a corpului este accelerația unghiulară ε . Vectorul accelerație unghiulară este un vector dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\varepsilon = \varepsilon \mathbf{k}_1 = \varepsilon \mathbf{k} \quad (1.102)$$

Relația (1.102) este valabilă atunci când axa de rotație este O_1z_1 .

Accelerația unui punct oarecare A de pe placa mobilă (Fig. 1.25) se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.103)$$

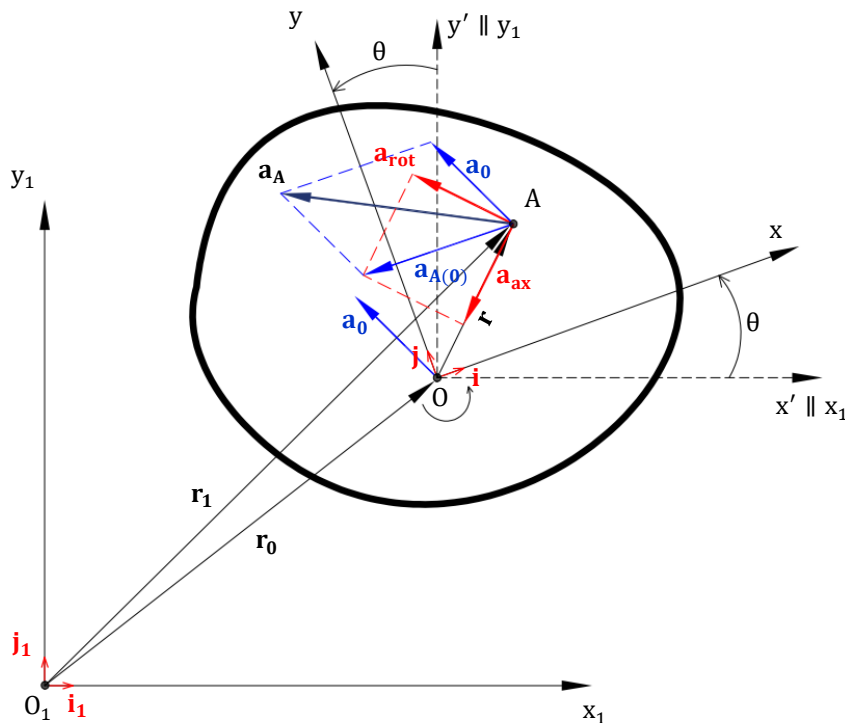


Figura 1.25

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 3 componente:

- accelerația mișcării de translație $\mathbf{a}_0$
- accelerația mișcării de rotație cu componentele:
 - accelerație de rotație

$$\mathbf{a}_{rot} = \varepsilon \times \mathbf{r} \quad (1.104)$$

- accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{ax} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.105)$$

Componentele $\mathbf{a}_{rot}$ și $\mathbf{a}_{ax}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} \quad (1.106)$$

sau prin accelerația corpului în mișcarea sa în raport cu punctul O.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{A(0)} \quad (1.107)$$

$$\mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} = \mathbf{a}_{A(0)} \quad (1.108)$$

Relația (1.108) reprezintă formula lui Euler pentru accelerații.

Câmpul accelerațiilor din mișcarea plană se obține compunând câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de translație cu accelerația $\mathbf{a}_0$ cu câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin punctului O.

Distribuția vectorilor accelerație ai punctelor situate pe o dreaptă care trece prin O este liniară. Există un punct pe placa mobilă a cărei accelerație este egală cu 0 la un moment dat al mișcării. Acest punct se numește **polul accelerațiilor** și se notează cu P.

Distribuția vectorilor accelerație, ținând seama de polul P este dată în Fig. 1.26.

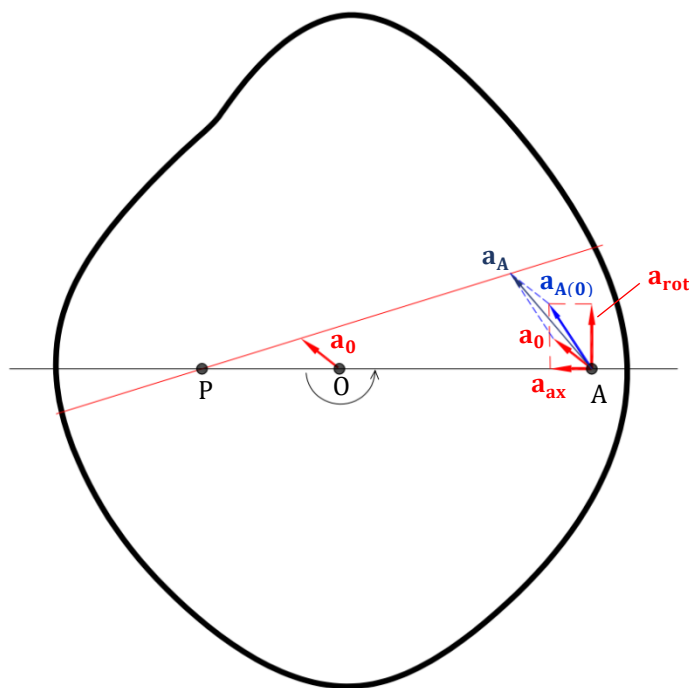


Figura 1.26

Deplasări elementare

Câmpul deplasărilor elementare se poate reprezenta în două moduri diferite:

(i) mișcarea se raportează la un pol oarecare O din plan

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$

Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r}_A = d\mathbf{r}_0 + d\theta \times \mathbf{r} \quad (1.109)$$

Câmpul vectorilor deplasărilor elementare se obține compunând câmpul deplasărilor elementare $d\mathbf{r}_0$ dintr-o mișcare de translație cu câmpul rotațiilor elementare $d\theta$ în jurul punctului O (Fig. 1.27).

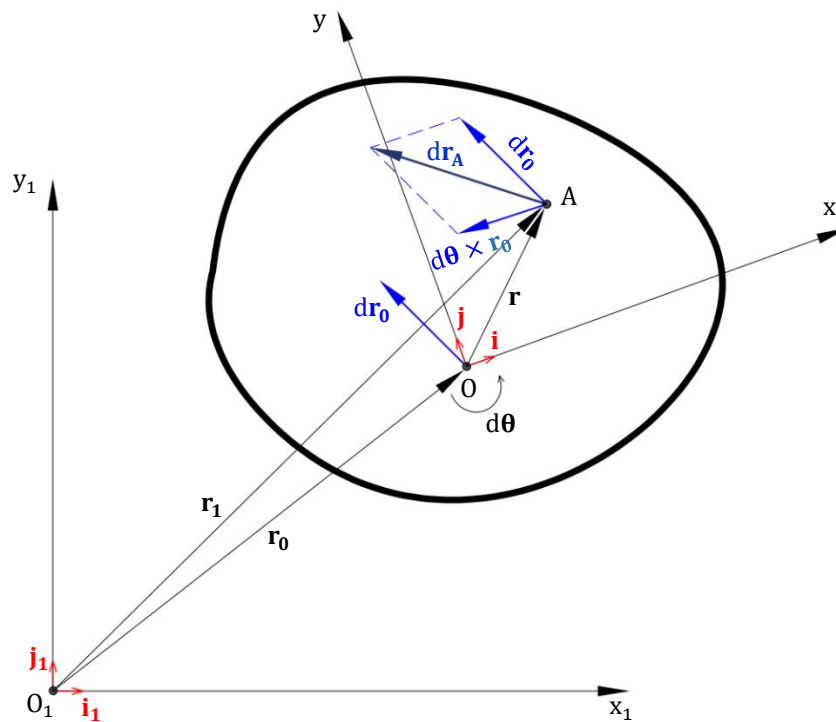


Figura 1.27

(ii) mișcarea se raportează la centrul instantaneu de rotație J

Câmpul vectorilor deplasări elementare se obține din câmpul rotațiilor elementare $d\theta$ în jurul punctului J (Fig. 1.28).

$$dr = d\theta \times JA \quad (1.110)$$

Relația (1.110) se folosește pentru reprezentarea deplasărilor elementare simple denumite și diagrame de deplasări (Fig. 1.29).

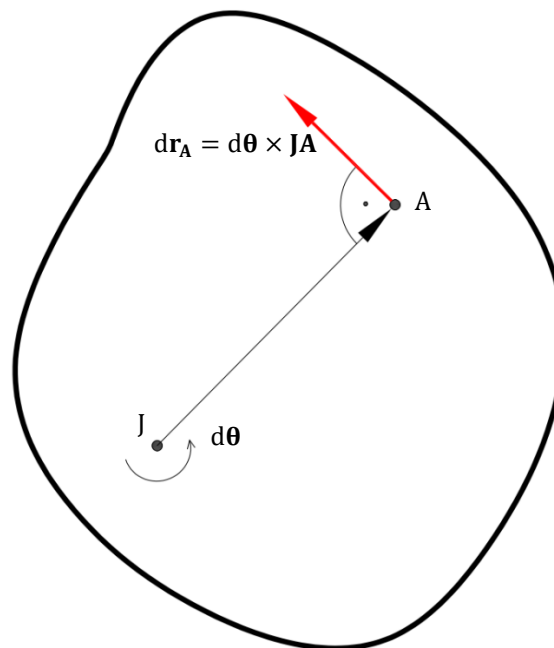


Figura 1.28

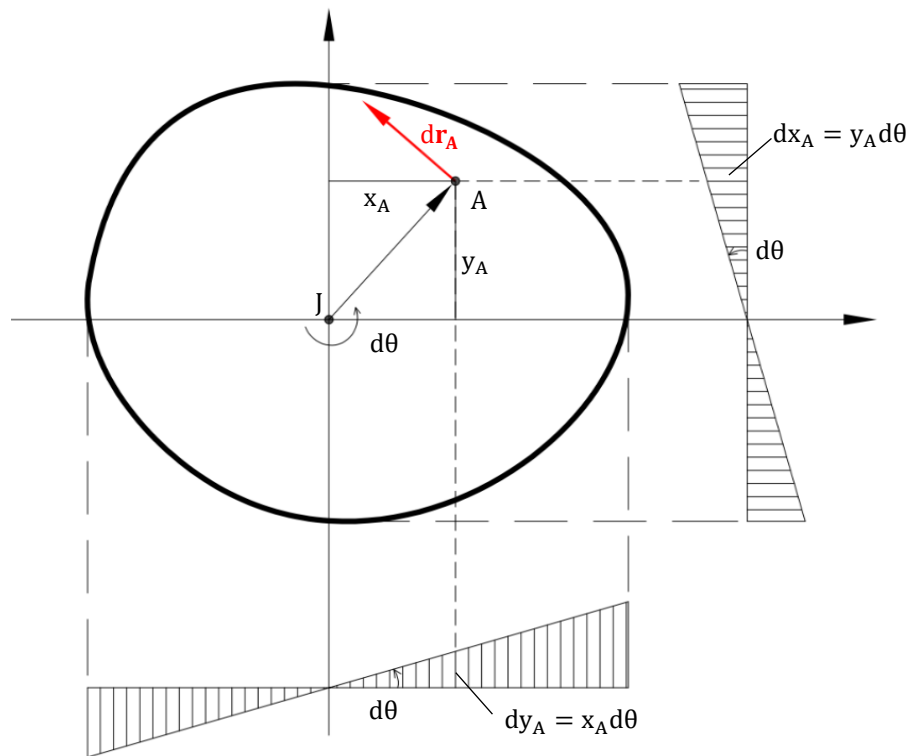


Figura 1.29

1.5.5. Mișcarea plan-paralelă a sistemelor de plăci. Teoreme de coliniaritate

Mișcarea plan-paralelă a două plăci

Mișcarea fiecărei plăci se realizează ca o mișcare de pură rotație în jurul centrelor J_1, J_2 ale celor două plăci cu viteze unghiulare ω_1 și ω_2 (Fig. 1.30).

Punctele J_1 și J_2 sunt puncte de viteză nulă în raport cu cele două sisteme de referință și se numesc *centre absolute de rotație*. Punctul comun celor două plăci care are vitezele egale atât pe o placă cât și pe cealaltă (viteza relativă nulă) se numește *centru relativ de rotație* J_{12} .

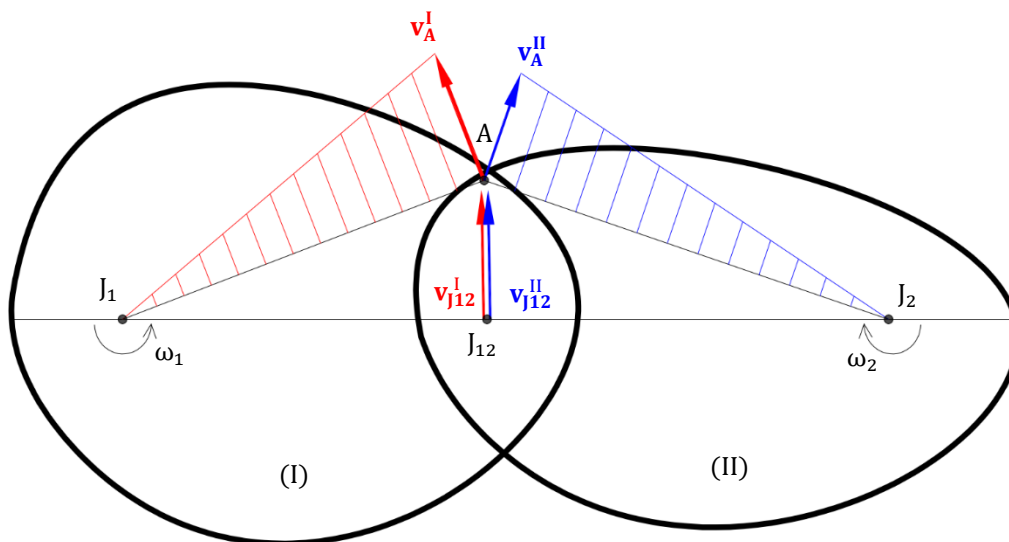


Figura 1.30

Distribuția vitezelor pentru fiecare placă este prezentată în Figura 1.30. Aceeași distribuție este valabilă și pentru deplasările elementare dr .

În punctul J_{12} vitezele celor două plăci sunt egale:

$$v_{J_{12}}^I = v_{J_{12}}^{II} \quad (1.111)$$

deci și modulele celor doi vectori sunt egale:

$$v_{J_{12}}^I = \omega_1 J_1 J_{12}$$

$$v_{J_{12}}^{II} = \omega_2 J_2 J_{12}$$

iar

$$\omega_1 J_1 J_{12} = \omega_2 J_2 J_{12} \quad (1.112)$$

Din relația 1.112 rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (1.113)$$

Relația 1.113 reprezintă prima teorema a centrelor instantanee de rotație care se enunță astfel:

În mișcarea plan-paralelă a două plăci centrele absolute de rotație J_1 și J_2 sunt coliniare cu centrul relativ de rotație J_{12} .

Centrul relativ de rotație J_{12} împarte segmentul de dreaptă $J_1 J_2$ în părți invers proporționale cu mărimile vitezelor unghiulare ω_1 și ω_2 . Dacă vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 au sensuri contrarii centrul J_{12} se găsește în interiorul segmentului $J_1 J_2$, în caz contrar J_{12} se găsește în exteriorul segmentului $J_1 J_2$ de partea centrului cu viteza unghiulară mai mare.

Mișcarea plan-paralelă a trei plăci

Mișcarea fiecărei plăci se realizează ca o mișcare de pură rotație în jurul centrelor lor absolute de rotație (J_1, J_2, J_3). Fiecare pereche de plăci determină câte un centru relativ de rotație (J_{12}, J_{23}, J_{13}) (Fig. 1.31).

Din prima teorema aplicată perechilor de plăci rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\frac{J_2 J_{23}}{J_3 J_{23}} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

$$\frac{J_3 J_{13}}{J_1 J_{13}} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$$

Înmulțind cele trei relații membru cu membru rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} \cdot \frac{J_2 J_{23}}{J_3 J_{23}} \cdot \frac{J_3 J_{13}}{J_1 J_{13}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 \quad (1.114)$$

Conform teoremei lui Menelaus în triunghiul J_1, J_2, J_3 cele trei puncte J_{12}, J_{13}, J_{23} sunt coliniare.

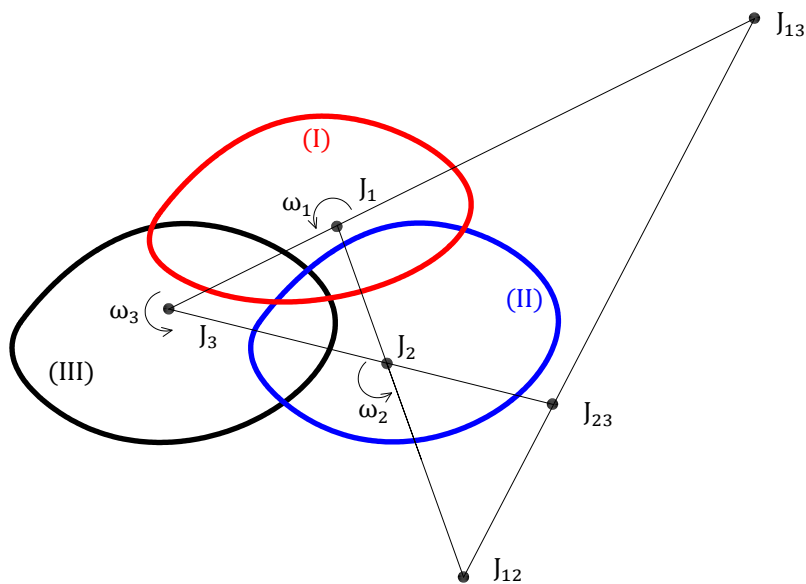


Figura 1.31

De aici rezultă a doua teoremă de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație:
În mișcarea plan-paralelă a trei plăci centrele relative de rotație J_{12} , J_{23} , J_{13} sunt coliniare.

Observații:

- dacă un corp este articulat de corpul de reazem această articulație este centru absolut de rotație, iar dacă corpul este simplu rezemat pe corpul de reazem centrul său absolut de rotație se găsește pe dreapta perpendiculară dusă pe suprafața de reazem (Fig. 1.32);

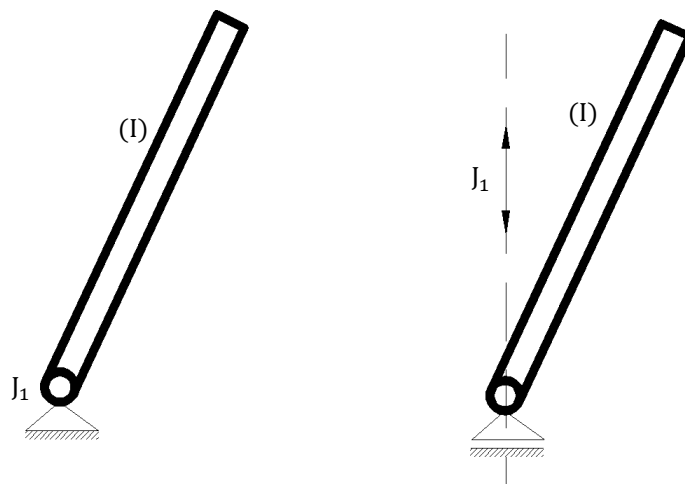


Figura 1.32

- dacă două corpuri sunt articulate între ele, punctul de articulație este centru relativ de rotație (Fig. 1.33);

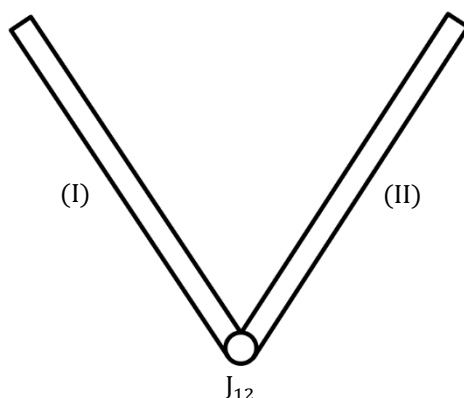


Figura 1.33

- dacă două corpuri sunt legate între ele prin doi penduli, punctul de intersecție al direcțiilor pendulilor este centrul relativ de rotație (Fig. 1.34). Dacă cei doi penduli sunt paraleli, centrul relativ de rotație se găsește la infinit;

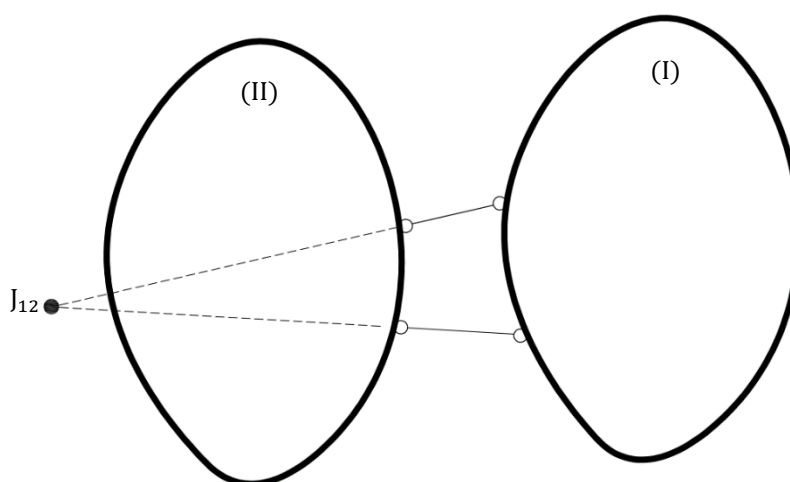


Figura 1.34

- dacă un centru relativ de rotație este la infinit corpurile care formează centrul respectiv execută unul față de celălalt o mișcare de translație, corpurile se rotesc cu același unghi și în același sens;
- un sistem cu n corpuri are n centre absolute de rotație și C_n^2 centre relative de rotație.

Diagrame de deplasări

O aplicație a mișcării plan-paralele a sistemelor de corpuri o constituie trasarea diagramelor de deplasări elementare verticale și orizontale a sistemelor aflate în mișcare plană. Aceste diagrame reprezintă variația deplasărilor elementare verticale, respectiv orizontale, ale sistemului de corpuri aflat în mișcare plan paralelă.

Diagramele se trasează cu ușurință dacă se respectă ordinea operațiilor:

- se determină pozițiile centrelor absolute și relative de rotație conform observațiilor de mai sus și a teoremelor de coliniaritate;
- se proiectează pe liniile de referință orizontală și verticală centrele relative și absolute de rotație;
- se imprimă o mișcare compatibilă cu legăturile, sistemului de corpuri cu 1 grad de libertate cinematic (configurația deplasată a sistemului se exprimă în funcție de un parametru geometric care este rotirea elementară $d\theta$ a unuia dintre corpuri);

- se trasează diagramele deplasărilor elementare verticale, respectiv orizontale ale sistemului de corpuri respectând următoarele (Fig. 1.35):

- în dreptul centrelor absolute deplasările sunt nule;
- în dreptul centrelor relative deplasările celor două corpuri care formează centrul relativ sunt egale dacă centrele relative nu se află la infinit;
- dacă un centru relativ este la infinit diagramele de deplasări ale celor două corpuri sunt paralele, adică corpurile se rotesc cu aceeași mărime $d\theta$ în același sens.

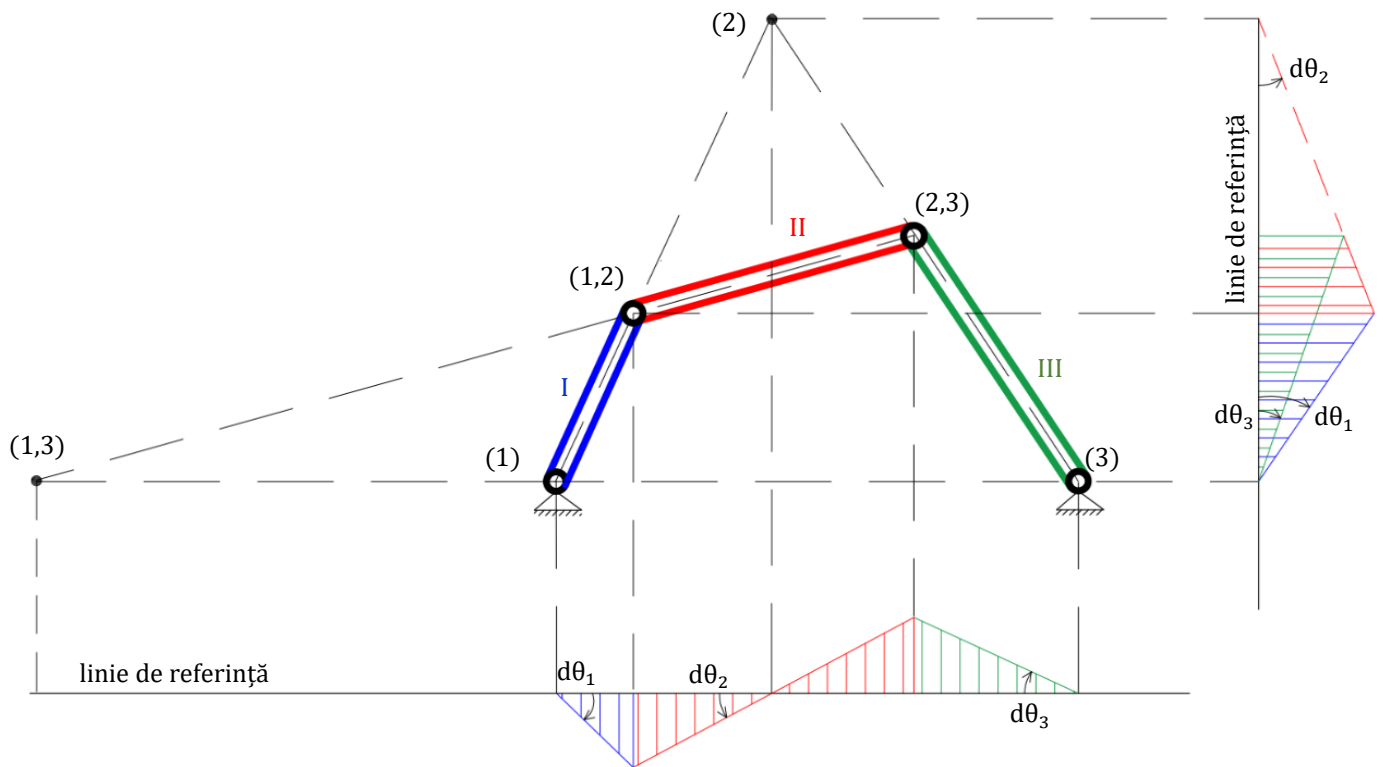


Figura 1.35

1.5.6. Mișcarea de rototranslație

Definiția mișcării

Mișcarea în care două puncte ale solidului rămân în tot timpul mișcării pe o dreaptă din spațiu se numește mișcare de rototranslație. Axa după care are loc mișcarea se numește axa de rototranslație. Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se mișcă odată cu corpul (Fig. 1.36). Axa de rototranslație este axa O_1z_1 .

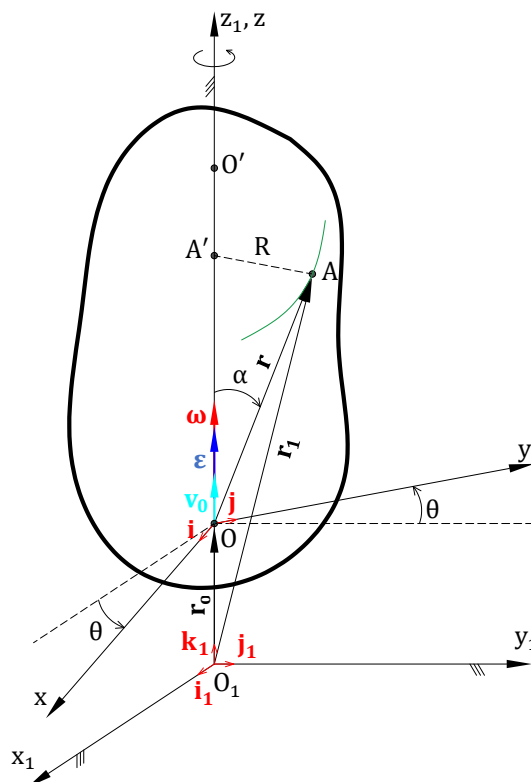


Figura 1.36

Grade de libertate

În această mișcare corpul are două grade de libertate cinematică. Mișcarea de rototranslație este compusă dintr-o translație instantanee de-a lungul axei de rototranslație și o rotație instantanee în jurul aceleiași axe. Ecuațiile finite ale mișcării de rototranslație sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \quad (1.115)$$

Ecuațiile (1.115) sunt ecuațiile finite ale mișcării corpului.

Elementele mișcării

Traectorii

Traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de rototranslație, sunt curbe situate pe suprafețe cilindrice circulare. Cercul pe care se află punctul A reprezintă traiectoria acestuia în mișcarea instantanee de rotație în jurul axei de rototranslație (Fig. 1.37).

Viteza unghiulară

Viteza cu care se rotește corpul este viteza unghiulară ω . Vectorul viteza unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rototranslație o_1z_1 astfel încât se poate scrie

$$\omega = \omega k_1 = \omega k \quad (1.116)$$

Viteza unui punct în mișcarea de rototranslație

Punctul A (punct oarecare ce aparține corpului) are pe r_1 ca vector de poziție în sistemul de referință fix (Fig. 1.36), iar pe r în sistemul de referință mobil (Fig. 1.36, Fig. 1.37).

$$r_1 = r_0 + r \quad (1.117)$$

$$v_A = \dot{r}_1 = \dot{r}_0 + \dot{r} \quad (1.118)$$

Dacă $\dot{r}_0 = v_0$ și $\dot{r} = \omega \times r$, relația (1.118) se scrie:

$$v_A = v_0 + \omega \times r \quad (\text{Fig. 1.37}) \quad (1.119)$$

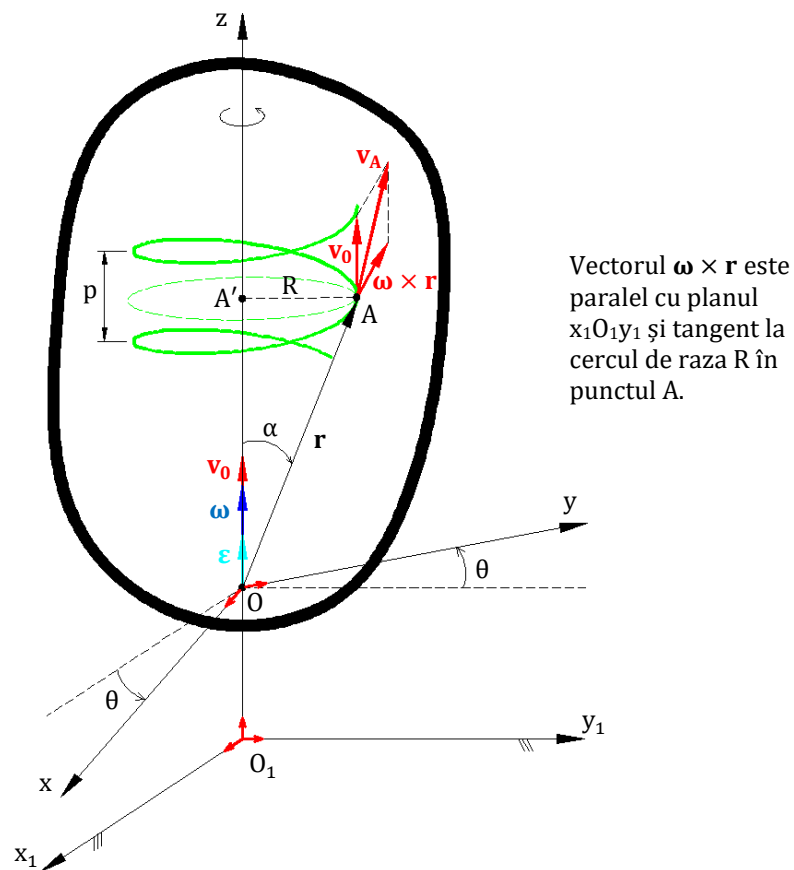


Figura 1.37

Câmpul vitezelor

Vectorul v_A este un vector tangențial la traiectorie în punctul A având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|v_A| = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2} \quad (1.120)$$

unde R este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A în mișcarea instantanee de rotație (Fig. 1.37).

$$|\mathbf{a}_{rot}| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}) = \varepsilon R \quad (1.124)$$

-accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{ax} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.125)$$

$$|\mathbf{a}_{ax}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot R \quad (1.126)$$

Componentele $\mathbf{a}_{ax}$ și $\mathbf{a}_{rot}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} \quad (1.127)$$

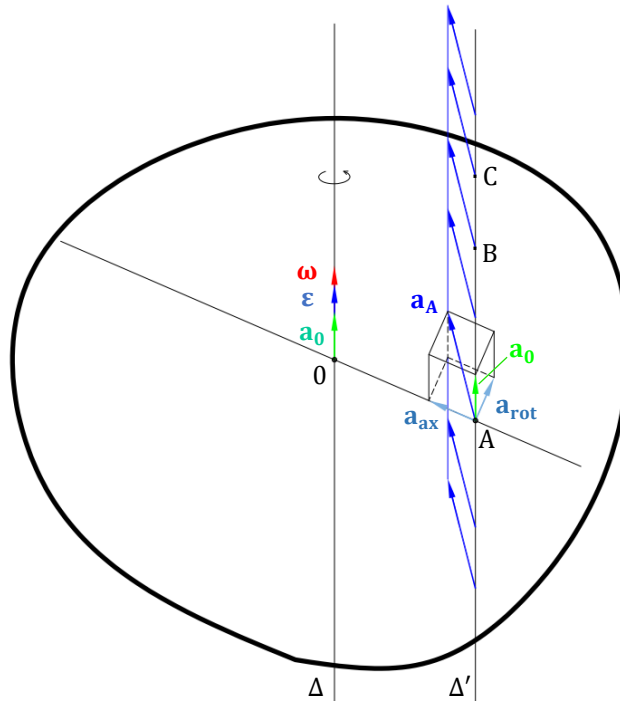


Figura 1.39

Câmpul accelerațiilor

Modulul vectorului accelerație are expresia.

$$|\mathbf{a}_A| = \sqrt{a_0^2 + \varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} \quad (1.128)$$

Pe baza relațiilor (1.124) (1.126) și (1.127) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor.

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor (Fig. 1.39):

- nu există puncte de accelerație zero pe corp, punctele de accelerație minimă sunt punctele de pe axa de rototranslație și au accelerația $\mathbf{a}_0$;
- componentele $\mathbf{a}_{rot}$ și $\mathbf{a}_{ax}$ se găsesc într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație;
- într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație, pentru punctele situate pe o dreaptă, variația mărimii accelerației este liniară;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rototranslație au accelerațiile egale;
- punctele egal depărtate de axa de rototranslație au accelerațiile egale în modul.

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$

Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_0 + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (1.129)$$

Componentele scalare ale vectorului deplasărilor elementare

Dacă $\mathbf{v}_0 = \alpha \boldsymbol{\omega}$ (mişcarea de şurub) unde α este o constantă de proporţionalitate între $\mathbf{v}_0$ şi viteza unghiulară, atunci:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \alpha \frac{d\theta}{dt}$$

şi

$$d\mathbf{r}_0 = \alpha d\theta$$

sau

$$dr_0 \mathbf{k}_1 = \alpha d\theta \mathbf{k}_1$$

Traectoria unui punct oarecare A de pe solidul în mişcare se determină dezvoltând relaţia (1.129):

$$\begin{aligned} dx_1 \mathbf{i}_1 + dy_1 \mathbf{j}_1 + dz_1 \mathbf{k}_1 &= \alpha d\theta \mathbf{k}_1 + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & d\theta \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\ &= -y_1 d\theta \mathbf{i}_1 + x_1 d\theta \mathbf{j}_1 + \alpha d\theta \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (1.130)$$

$$d\mathbf{r}_1 = -y_1 d\theta \mathbf{i}_1 + x_1 d\theta \mathbf{j}_1 + \alpha d\theta \mathbf{k}_1 \quad (1.131)$$

Relaţiile (1.130) şi (1.131) reprezintă expresiile analitice ale vectorului deplasare elementară în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe.

Ținând seama de (1.130) şi (1.131), componentele scalare ale vectorului deplasare elementară a punctului A în sistemul de referinţă fix sunt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -y_1 d\theta \\ dy_1 &= x_1 d\theta \\ dz_1 &= \alpha d\theta \end{aligned} \quad (1.132)$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= -y_1 \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= x_1 \\ \frac{dz_1}{d\theta} &= \alpha \end{aligned} \quad (1.133)$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii diferenţiale (1.133), rezultă ecuaţiile parametrice ale elicei circulare drepte cu pas constant (Fig. 1.37).

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \theta \\ y_1 &= R \sin \theta \\ z_1 &= \frac{\theta p}{2\pi} \end{aligned} \quad (1.134)$$

2. DINAMICĂ

2.1. Introducere în dinamică

Dinamica este partea mecanicii care studiază, bazându-se pe rezultatele cinematicii, mișcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide, sau ale sistemelor de corpuri, luând în considerare proprietățile lor inerțiale (mase, momente statice, momente de inerție), forțele și momentele care acționează asupra lor sau care rezultă ca efect al mișcării.

Dynamics, branch of physical science and subdivision of mechanics that is concerned with the motion of material objects in relation to the physical factors that affect them: force, mass, momentum, energy. (Encyclopædia Britannica)

Cuvântul dinamică derivă din substantivele grecești δυναμικός - dynamikos (puternic) sau δύναμις - dynamis (putere, energie)

Mișcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu exista materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcarea fără suport material. Mecanica clasică este constituită pe baza a trei principii fundamentale, numite *lex* (legi), descrise de I. Newton¹ în 1687 în lucrarea "Principiile matematice ale filozofiei naturale".

Principiul inerției (lex prima).

Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte forțe sau suma forțelor care acționează asupra sa este nulă. Acest principiu a fost enunțat inițial, într-o formulare asemănătoare, de Galileo Galilei² (1632).

Experiența arată că un corp material se opune acțiunilor exterioare menite să-i schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă descrisă de principiul inerției. Această opoziție la schimbarea stării de mișcare sau de repaus reprezintă inerția corpurilor materiale.

Principiul fundamental al dinamicii (lex secunda).

Accelerația unui punct material este proporțională cu forța aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța. Newton a introdus masa m a punctului material pentru a exprima această proporționalitate între forță și accelerație:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

În teoria sa, Newton consideră masa drept măsură a cantității de materie conținută în corpul material, și element caracteristic al existenței acestuia.

În comentariul făcut de Newton principiului fundamental al dinamicii, comentariu denumit **Corolarul I**, este precizată modalitatea de compunere a forțelor care acționează asupra unui punct material, și anume regula paralelogramului. Aceasta era cunoscută în statica încă din antichitate (Heron³), dar o formulare precisă a sa a fost dată abia de Stevin⁴ (1586).

Principiul paralelogramului (independenței acțiunii forțelor):

Un punct material aflat sub acțiunea simultană a două forțe descrie (pornind din repaus) diagonală unui paralelogram având ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare.

Principiul acțiunii și reacțiunii (lex tertia).

Oricărei acțiuni îi corespunde întotdeauna o reacțiune egală, și contrară, sau acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și îndreptate în sens contrar.

Cu alte cuvinte, fiind date punctele materiale M_1 M_2 aflate suficient de departe de alte puncte materiale pentru ca acestea să nu le influențeze mișcarea, dacă M_1 acționează asupra lui M_2 cu forța $\mathbf{F}_{12}$, atunci și M_2

¹ Isaac Newton (1643 – 1727) matematician, fizician, astronom, alchimist, teolog englez

² Galileo Galilei (1564 – 1642) fizician, matematician, astronom și filosof italian

³ Heron din Alexandria (10 - 70 d.Hr.) matematician, enciclopedist grec

⁴ Simon Stevin (1548 - 1620) matematician și inginer flamand

acționează asupra lui M_1 cu forța $\mathbf{F}_{21}$, astfel încât vectorii $\mathbf{F}_{12}$ și $\mathbf{F}_{21}$ sunt coliniari cu segmentul M_1M_2 și $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$. $\mathbf{F}_{12}$ este acțiunea respectiv $\mathbf{F}_{21}$ este reacțiunea. Se cuvine subliniat faptul că avem de a face cu o interacțiune, forțele $\mathbf{F}_{12}$ și $\mathbf{F}_{21}$ fiind aplicate simultan.

Problema fundamentală a dinamicii este următoarea: cunoscând sistemul material (masă, momente de inerție), sistemul de forțe care acționează în orice moment asupra sistemului material și condițiile inițiale ale mișcării, se cere să se determine mișcarea sistemului material (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația).

2.2. Dinamica punctului material

Punctul material (particula), este o noțiune prin care este desemnat un corp material ale cărui dimensiuni și rotații instantanee proprii sunt neglijabile (vezi Cap 1.3.1. Introducerea în cinematica punctului material).

De asemeni, prin punct material înțelegem și cea mai "mică" diviziune a unui corp material care are proprietățile fizice ale acestuia. El este și cel mai simplu model fizic din mecanică.

Punctul material poate ocupa orice poziție în spațiu și se numește **liber**, sau are restricții de mișcare și se numește **legat**. Restricțiile se numesc legături iar legăturile sunt echivalente cu forțe de legătură sau reacțiuni.

2.2.1. Dinamica punctului material liber

Punctul A de masă m se mișcă pe traiectorie și este acționat de o forță $\mathbf{F}$ sau de vectorul rezultat al unui sistem de forțe concurente.

Problema fundamentală a punctului material liber este următoarea: fiind dat punctul material de masă m , sistemul de forțe care acționează în orice moment pe punctul material și condițiile inițiale ale mișcării, se cere să se determine mișcarea lui (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația).

Scriind relația principiului fundamental al dinamicii rezultă:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.1)$$

în care $t \geq t_0$.

Relația (2.1) este o ecuație diferențială de ordinul al II-lea, care se integrează ținând cont de condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = t_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

Aceasta reprezintă o problemă Cauchy⁵ din care rezultă ecuația vectorială finită a mișcării punctului.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (2.2)$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele unui sistem cartezian triortogonal de referință

Ținând cont de expresiile analitice ale poziției, vitezei, accelerației și a forței, în sistemul cartezian (Fig. 2.1),

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

⁵ Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) matematician francez.

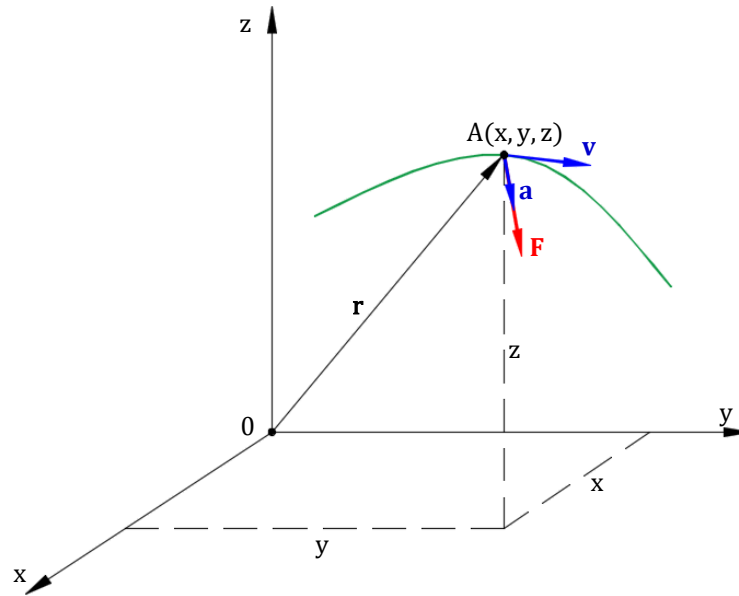


Figura 2.1

și proiectând relația (2.1) pe axele sistemului de referință cartezian triortogonal se obțin ecuațiile diferențiale ale lui Newton:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ t &= t_0, x = x_0, y = y_0, z = z_0 \\ \dot{x} &= v_{0x}, \dot{y} = v_{0y}, \dot{z} = v_{0z}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Prin integrarea relațiilor (2.3) rezultă ecuațiile carteziene finite ale mișcării:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)\tag{2.4}$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele sistemului cilindric de coordonate

Ținând cont de expresiile analitice ale poziției, vitezei, accelerației și a forței, în sistemul cilindric (Fig. 2.2),

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= r \boldsymbol{\rho} + z \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{v} = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k} \\ \ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \boldsymbol{\rho} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{n} + \ddot{z} \mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= F_\rho \boldsymbol{\rho} + F_n \mathbf{n} + F_z \mathbf{k}\end{aligned}$$

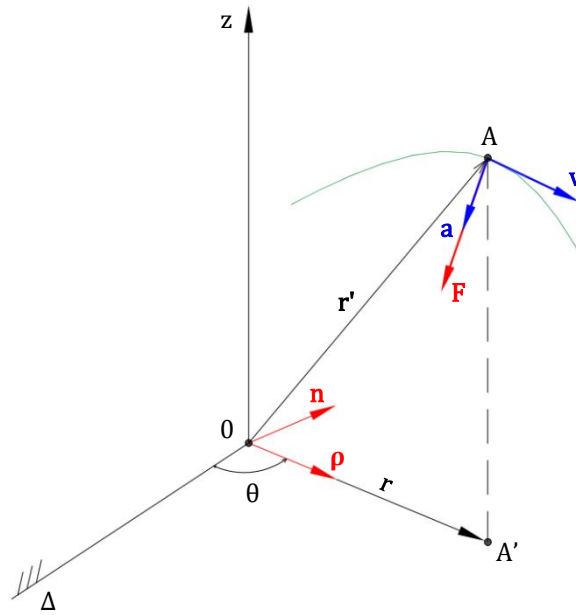


Figura 2.2

și proiectând relația (2.1) pe axele sistemului de referință cilindric rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{m}F_{\rho}(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= \frac{1}{m}F_{\theta}(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}F_z(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\ t &= t_0, r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0 \\ \dot{r} &= \dot{r}_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \dot{z} = v_{0z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prin integrarea relațiilor (2.5) rezultă ecuațiile finite ale mișcării punctului în coordonate cilindrice:

$$r = r(t), \theta = \theta(t), z = z(t) \quad (2.6)$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele triedului lui Frenet (coordonate intrinseci)

Ținând cont de expresiile analitice ale poziției, vitezei, accelerației și a forței, în coordonate intrinseci (Fig. 2.3),

$$\begin{aligned} s &= s(t) \\ \mathbf{v} &= \dot{s} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{a} &= \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{F} &= F_{\tau} \boldsymbol{\tau} + F_{\nu} \boldsymbol{\nu} + F_{\beta} \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

și proiectând relația (2.1) pe axele triedului lui Frenet avem:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{m}F_{\tau}(t, s, \dot{s}) \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \frac{1}{m}F_{\nu}(t, s, \dot{s}) \\ 0 &= \frac{1}{m}F_{\beta}(t, s, \dot{s}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$t = t_0, s = s_0, \dot{s} = v_0$$

Prin integrarea relațiilor (2.7) rezultă ecuația finită a mișcării punctului material în coordonate intrinseci:

$$s = s(t) \quad (2.8)$$

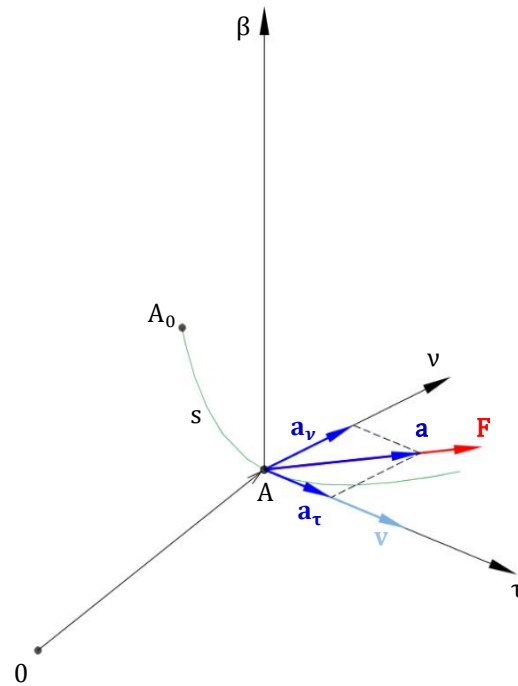


Figura 2.3

Dinamica mișcării centrale a punctului material

Mișcarea centrală este mișcarea pe care o execută un punct material sub acțiunea unei forțe centrale. Forța centrală $\mathbf{F}$, este forța a cărei direcție trece tot timpul printr-un punct fix O (Fig. 2.4). Vectorul de poziție al punctului material $A(m)$ este $\mathbf{r}$.

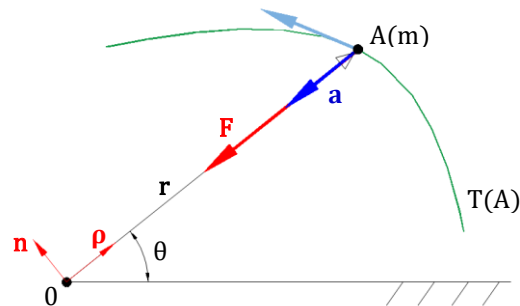


Figura 2.4

Ecuția diferențială vectorială 2.1 devine:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = F \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.9)$$

În care vectorii $\mathbf{F}$ și $\mathbf{r}$ au aceeași direcție, la fel și vectorii $\mathbf{F}$ și $\ddot{\mathbf{r}}$.

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}$$

de unde rezultă că traiectoria punctului material în mișcarea centrală este plană.

Dacă se proiectează relația (2.9) pe axele unui sistem de coordonate polare rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \pm \frac{1}{m} F \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Din a doua ecuație a sistemului de ecuații (2.10) rezultă:

$$\frac{1}{r} (r^2 \dot{\theta})' = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C \quad (2.11)$$

Relația (2.11) este valabilă și în momentul inițial al mișcării

$$r_0^2 \dot{\theta}_0 = C$$

Sistemul de ecuații (2.10) se scrie:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \pm \frac{F}{m} \\ r^2 \dot{\theta} &= C \\ \dot{\theta} &= \frac{C}{r^2} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left[-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left[-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Înlocuind pe $\ddot{r}$ și $\dot{\theta}$ în prima ecuație din sistemul de ecuații (2.12) rezultă:

$$\begin{aligned} -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \left(\frac{C}{r^2} \right)^2 &= \pm \frac{F}{m} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} &= \mp \frac{Fr^2}{mC^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Relația reprezintă ecuația diferențială, în coordonate polare a traiectoriei punctului material supus unei forțe centrale numită ecuația lui Binet⁶.

Semnul + corespunde unei forțe centrale atractive. Iar semnul - corespunde unei forțe centrale de respingere.

Necunoscuta acestei ecuații este $\frac{1}{r}$. Condițiile inițiale de determinare a constantelor de integrare sunt:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)_{(\theta=\theta_0)} \end{aligned}$$

Se determină astfel ecuația traiectoriei în coordonate polare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$.

⁶ Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856) matematician și astronom francez.

Dinamica punctului material sub acțiunea unei forțe elastice

O forță centrală exercitată de un punct (pol) ca forță de atracție asupra punctului material și având mărimea direct proporțională cu distanța de la punct la pol se numește forță elastică (Fig. 2.5)

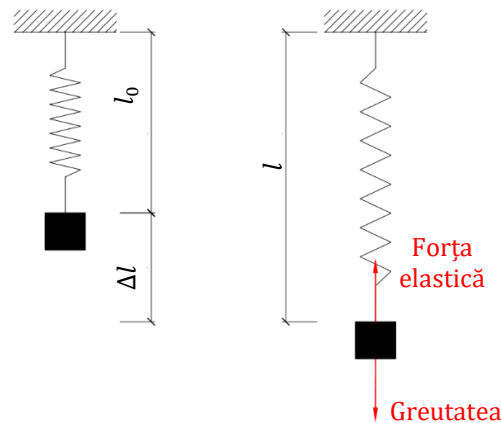


Figura 2.5

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r} \quad (2.14)$$

în care

$\mathbf{F}$ - este forța elastică

k - este coeficientul de proporționalitate

$\mathbf{r}$ - este vectorul de poziție al punctului material

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -k \mathbf{r}$$

$$m \ddot{\mathbf{r}} + k \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Dacă se împarte relația cu m și se notează $\frac{k}{m} = \omega^2$ se obține:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Ecuția este o ecuație diferențială vectorială liniară cu coeficienți constanți de ordinul al II-lea, omogenă care se rezolvă căutând soluții de forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

Înlocuind relația (2.15) în ecuația (2.14) se obține ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.17)$$

Cu rădăcinile

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega \quad (2.18)$$

Soluția ecuației diferențiale (2.15) se scrie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 \cdot e^{i\omega t} + \mathbf{C}_2 \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.19)$$

Conform formulelor lui Euler⁷

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Înlocuind aceste formule în relația (2.19) și schimbând constantele de integrare se obține

⁷ Leonhard Euler (1707 – 1783)

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{A}} \cos \omega t + \bar{\mathbf{B}} \sin \omega t \quad (2.20)$$

Constantele de integrare A și B se obțin din condițiile inițiale ale mișcării

La $t = t_0 = 0$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Înlocuind expresiile (2.21) în (2.20) obținem ecuația vectorială finită a mișcării:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos \omega t + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.22)$$

Proiectând relația pe axele unui sistem de referință obținem componentele scalare ale vectorului $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y &= y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Proprietățile mișcării

- traiectoria este o curbă plană închisă
- traiectoria nu trece prin polul 0
- mișcarea punctului este periodică

-perioada mișcării:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

-frecvența mișcării:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

-frecvența circulară sau pulsația mișcării:

$$\omega = 2\pi\nu$$

Dacă $\mathbf{r}_0$ și $\mathbf{v}_0$ sunt doi vectori coliniari mișcarea este rectilinie oscilatorie având traiectoria după direcția comună a celor doi vectori.

2.2.2. Dinamica punctului material legat

Punctul material este în mișcare și este supus la legături care îi suprimă din gradele de libertate.

Problema fundamentală a punctului material legat este următoarea: fiind dat punctul material de masă m , sistemul de forțe care acționează în orice moment pe punctul material, legăturile la care este supus și condițiile inițiale ale mișcării, se cere să se determine mișcarea lui (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația) precum și reacțiunea dinamică.

Ecuația mișcării punctului material legat, rezultă din ecuația fundamentală a dinamicii pentru acest caz:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \quad (2.24)$$

în care:

$\mathbf{N}$ este forța de legătură, iar $\mathbf{T}$ este forța de frecare.

$|\mathbf{T}| = -\mu' |\mathbf{N}|$ în care μ' este coeficientul de frecare dinamic.

Studiind acest caz în coordonate intrinseci rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{m} F_{\tau} + T \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \frac{1}{m} (F_v + N) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Se obține astfel un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi cu necunoscutele $s = s(t)$, și $N = N(t)$.

2.3. Momente de inerție

Proprietățile inerțiale ale corpurilor sunt: masa, momentul static și momentul de inerție. Momentul de inerție este o mărime fizică tensorială care exprimă măsura prin care un corp se opune modificării stării sale de repaus relativ sau de mișcare de rotație uniformă la acțiunea unui moment al forței. Conceptul a fost introdus de Leonhard Euler în lucrarea sa "*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*" în 1765. Deoarece privește rotația corpurilor, termenul este uneori interpretat ca *inerție rotațională*.

Prima lege a lui Newton, care descrie inerția unui corp în mișcarea rectilinie, poate fi extinsă la inerția unui corp care se rotește în jurul unei axe utilizând momentul de inerție. Astfel, un corp care se rotește cu viteză unghiulară constantă în jurul unei axe va rămâne în această mișcare cu excepția cazului când va fi acționat de un moment exterior.

Momentul de inerție este analog masei (*masă inerțială*) din mișcarea rectilinie, care măsoară rezistența (inerția) corpurilor în această mișcare.

Tensorul este o entitate matematică definită în cadrul algebrei și geometriei, frecvent utilizat în fizică, pentru a extinde noțiunile de scalar, vector și matrice.

Pentru a descrie mișcarea unui corp ce nu-și modifică structura în timp, abstract, fizica folosește conceptul de vector. Pentru corpurile care își schimbă structura în timp, nu mai este posibilă descrierea mișcării lor prin intermediul vectorilor, deoarece nu mai pot fi reduse la un singur punct reprezentativ, iar pentru corpurile care își modifică structura în timp este nevoie să se introducă o nouă noțiune care să păstreze și informația despre structura obiectului. Tensorul este noțiunea care permite descrierea nu doar a traiectoriei corpului, ci și a structurii sale pe parcursul mișcării.

Un tensor poate fi reprezentat ca o matrice multi-dimensională de valori numerice care depinde de sistemul de referință. Se consideră un corp raportat la un sistem de referință Oxyz.

Se adoptă modelul mecanic al corpului solid rigid de continuu material având masa distribuită în mod continuu și se asociază punctului oarecare A elementul diferențial de masă dm (Fig. 2.6).

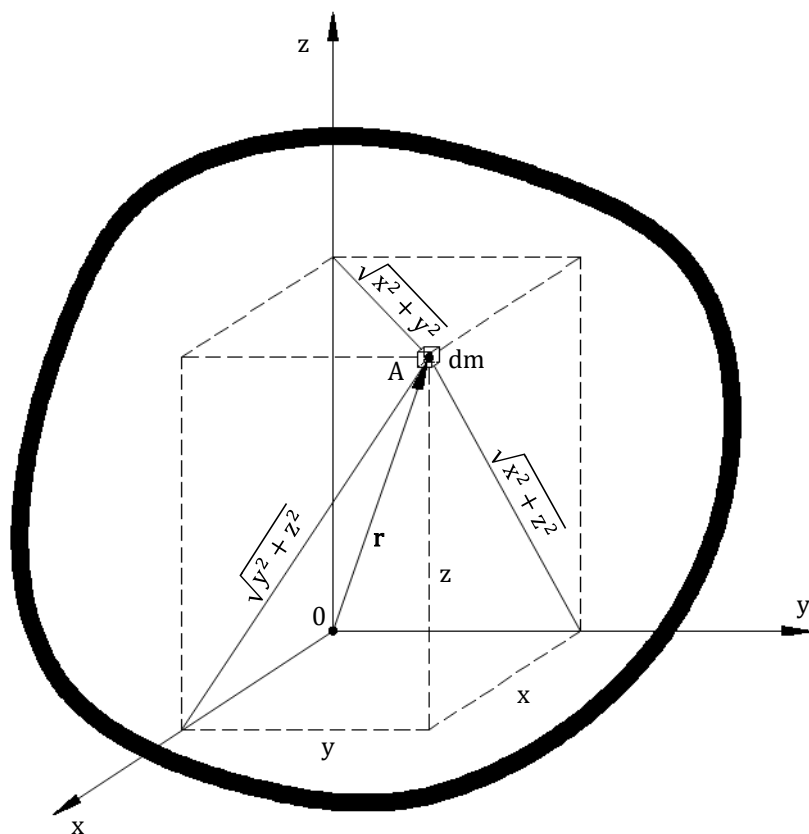


Figura 2.6

2.3.1. Momente de inerție masice

Vectorul de poziție al punctului A are expresia :

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

căruia i se asociază tensorul de poziție:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Se definesc momentele statice ale corpului în raport cu planele de coordonate:

$$\begin{aligned} S_{y0z} &= \int_C x \, dm \\ S_{x0z} &= \int_C y \, dm \\ S_{x0y} &= \int_C z \, dm \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tensorul moment static al corpului în raport cu polul O va fi:

$$\mathbf{S}_0 = \int_C \mathbf{r} \, dm = \begin{bmatrix} 0 & -S_{x0y} & S_{x0z} \\ S_{x0y} & 0 & -S_{y0z} \\ -S_{x0z} & S_{y0z} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Teorema momentelor statice are în acest caz expresia:

$$\mathbf{S}_0 = M \cdot \mathbf{r}_c \quad (2.29)$$

unde $\mathbf{r}_c$ este tensorul de poziție al centrului de masă C

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Iar M masa totală a corpului:

$$M = \int_C dm$$

Dacă $O \equiv C$ atunci $\underline{S}_c = \underline{0}$. În sistemul de referință ales se definesc momentele de inerție axiale în raport cu axele de coordonate x, y, z și momentele de inerție centrifugale.

Momente de inerție axiale:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_C (y^2 + z^2) \, dm \\ J_y &= \int_C (x^2 + z^2) \, dm \\ J_z &= \int_C (x^2 + y^2) \, dm \end{aligned} \quad (2.31)$$

Momente de inerție centrifugale:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int_C xy \, dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int_C xz \, dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int_C yz \, dm \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tensorul moment de inerție în raport cu polul O este:

$$\mathbf{J}_0 = \int_C \mathbf{r} \mathbf{r}^T \, dm = \int_C \mathbf{r}^T \mathbf{r} \, dm = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Momentele de inerție axiale sunt pozitive, iar momente de inerție centrifugale pot fi atât pozitive cât și negative.

2.3.2. Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință

Cunoscând tensorul moment de inerție J_0 , se determină tensorul moment de inerție al corpului în raport cu un alt sistem de referință cu originea în punctul O' a căru axele sunt paralele cu axele sistemului de referință cu originea în punctul O (Fig. 2.7). Vectorul de poziție al punctului A în sistemul de referință translatat este:

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j} + z' \mathbf{k}$$

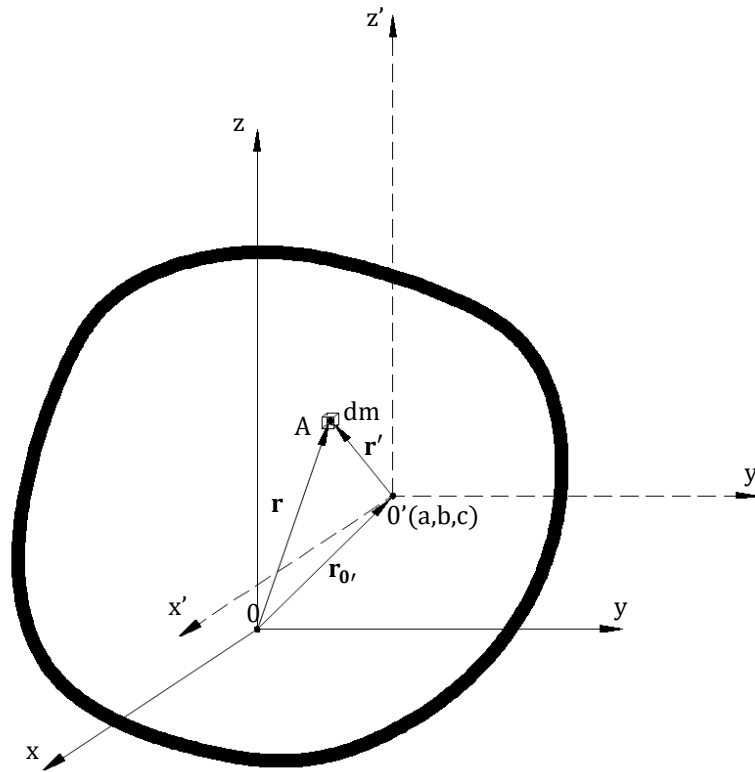


Figura 2.7

Coordonatele punctului O' fiind a, b, c vectorul de poziție al punctului O' este

$$\mathbf{r}_{0'} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

Tensorii corespunzători celor doi vectori sunt

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{r}_{0'} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Relațiile între cei trei vectori și între tensorii corespunzători sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0'} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}$$

$$J_{0'} = \int_C \mathbf{r} (\mathbf{r}')^T dm = \int_C (\mathbf{r}')^T \cdot \mathbf{r}' dm = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
J_{0'} &= \int_C (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'})^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}) \, dm = \int_C (\mathbf{r}^T - \mathbf{r}_{0'}^T) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}) \, dm = \\
&= \int_C \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} \, dm - \left(\int_C \mathbf{r}^T \, dm \right) \cdot \mathbf{r}_{0'} - \mathbf{r}_{0'}^T \left(\int_C \mathbf{r} \, dm \right) + \mathbf{r}_{0'}^T \left(\int_C \mathbf{r} \, dm \right) \cdot \mathbf{r}_{0'}
\end{aligned} \quad (2.37)$$

Știind că

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_0^T &= \int_C \mathbf{r}^T \, dm \\
\mathbf{S}_0 &= \int_C \mathbf{r} \, dm \\
M &= \int_C dm
\end{aligned} \quad (2.38)$$

relația (2.37) se scrie

$$J_{0'} = J_0 - \mathbf{S}_0^T \cdot \mathbf{r}_{0'} - \mathbf{r}_{0'}^T \cdot \mathbf{S}_0 + \mathbf{r}_{0'}^T \cdot M \cdot \mathbf{r}_{0'} \quad (2.39)$$

Dacă $0 \equiv C$ atunci $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$ și relația (2.39) devine

$$J_{0'} = J_0 + \mathbf{r}_{0'}^T \cdot M \cdot \mathbf{r}_{0'} \quad (2.40)$$

Scriind expresiile termenilor ce intervin în relația se obține

$$\begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Identificând termenii din ambii membri ai relației obținem

$$\begin{aligned}
J_{x'} &= J_x + M(b^2 + c^2) \\
J_{y'} &= J_y + M(c^2 + a^2) \\
J_{z'} &= J_z + M(a^2 + b^2) \\
J_{x'y'} &= J_{xy} + Mab \\
J_{y'z'} &= J_{yz} + Mbc \\
J_{z'x'} &= J_{zx} + Mca
\end{aligned} \quad (2.41)$$

Dacă momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă oarecare Δ este J_Δ iar Δ' este o axă paralelă cu Δ , iar distanța dintre cele două axe este d , atunci (Fig. 2.8):

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + M \cdot d^2 \quad (2.42)$$

Relația (2.42) se numește formula lui Steiner⁸ pentru translația axelor

⁸ Jakob Steiner (1796 -1863)

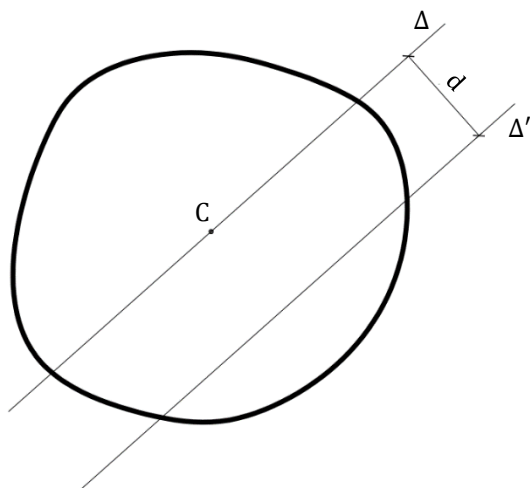


Figura 2.8

2.3.3. Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință

Cunoscând tensorul moment de inerție J_0 , se determină tensorul moment de inerție al corpului în raport cu un alt sistem de referință cu originea în punctul O' ale cărui axe x', y', z' sunt rotite în raport cu axele sistemului de referință cu originea în punctul O (Fig. 2.9).

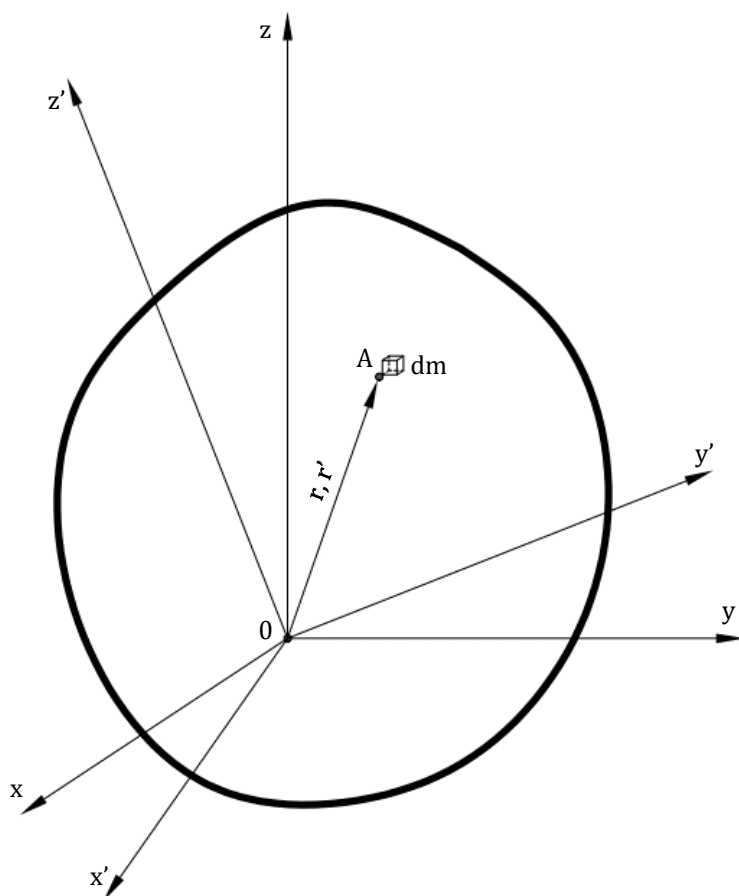


Figura 2.9

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Versorii axelor de coordonate x, y, z , sunt $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ iar ai axelor x', y', z' sunt $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Trecerea de la sistemul de referință $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la sistemul de referință $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ se face prin matricea de rotație:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

ale carei elemente sunt cosinușii directori ai celor două sisteme de axe.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) & \alpha_{21} &= \cos(\mathbf{j}', \mathbf{i}) & \alpha_{31} &= \cos(\mathbf{k}', \mathbf{i}) \\ \alpha_{12} &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) & \alpha_{22} &= \cos(\mathbf{j}', \mathbf{j}) & \alpha_{32} &= \cos(\mathbf{k}', \mathbf{j}) \\ \alpha_{13} &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) & \alpha_{23} &= \cos(\mathbf{j}', \mathbf{k}) & \alpha_{33} &= \cos(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Astfel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

și

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Proprietățile matricii de rotație

- (i) matricea $\boldsymbol{\alpha}$ este unitară $\det(\boldsymbol{\alpha}) = 1$.
- (ii) $\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$
- (iii) $\boldsymbol{\alpha}^T = \mathbf{A}^*$

unde $\mathbf{A}^*$ este matricea adjuncă.

Tensorul de poziție al punctului A în sistemul de axe rotit este:

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T \quad (2.47)$$

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{J}_0 = \int_C (\mathbf{r}')^T \cdot \mathbf{r}' \, dm = \int_C (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T)^T (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T) \, dm = \boldsymbol{\alpha} \left(\int_C \mathbf{r}^T \mathbf{r} \, dm \right) \boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\alpha}^T \quad (2.49)$$

Dezvoltând expresiile termenilor ce intervin în relația (2.50) se obține:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \\ J_{x'} &= J_x \alpha_{11}^2 + J_y \alpha_{12}^2 + J_z \alpha_{13}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{11} \alpha_{12} + J_{yz} \alpha_{12} \alpha_{13} + J_{xz} \alpha_{13} \alpha_{11}) \\ J_{y'} &= J_x \alpha_{21}^2 + J_y \alpha_{22}^2 + J_z \alpha_{23}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{21} \alpha_{22} + J_{yz} \alpha_{22} \alpha_{23} + J_{xz} \alpha_{23} \alpha_{21}) \\ J_{z'} &= J_x \alpha_{31}^2 + J_y \alpha_{32}^2 + J_z \alpha_{33}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{31} \alpha_{32} + J_{yz} \alpha_{32} \alpha_{33} + J_{xz} \alpha_{33} \alpha_{31}) \\ J_{x'y'} &= -(J_x \alpha_{11} \alpha_{12} + J_y \alpha_{12} \alpha_{22} + J_z \alpha_{13} \alpha_{23}) + J_{xy}(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{21} \alpha_{12}) + \\ &\quad + J_{yz}(\alpha_{12} \alpha_{23} + \alpha_{31} \alpha_{22}) + J_{xz}(\alpha_{13} \alpha_{21} + \alpha_{21} \alpha_{13}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dacă momentul de inerție al unui corp în raport cu polul O este J_0 iar Δ este o axă oarecare, având cosinușii directori l, m, n în raport cu axele x, y, z :

$$J_{\Delta} = J_x l^2 + J_y m^2 + J_z n^2 - 2(J_{xy} lm + J_{yz} mn + J_{xz} nl) \quad (2.51)$$

în care

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

2.3.4. Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție

Axele pentru care momentele de inerție au valori extreme (maxime sau minime) se numesc axe principale de inerție, iar momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc momente de inerție principale. Planele determinate de axele principale de inerție se numesc plane principale de inerție (Fig.2.10).

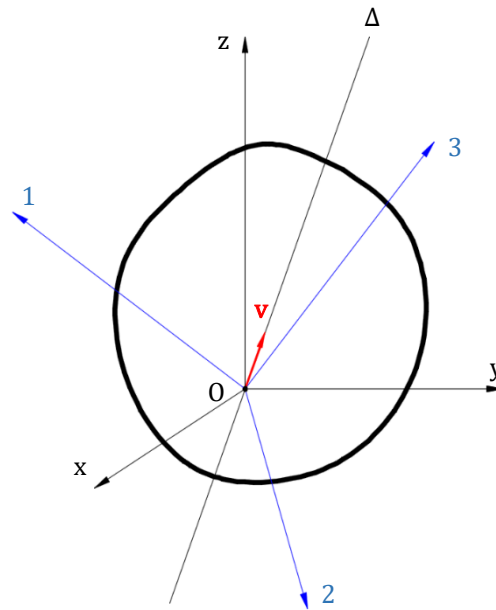


Figura 2.10

Determinarea momentelor de inerție principale se face utilizând teoria multiplicatorilor lui Lagrange .

$$L(l, m, n) = J_{\Delta} - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) \quad (2.52)$$

Extremele expresiei coincid cu extremele lui J_{Δ} . Pentru a determina aceste extreme se pun condițiile:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0, \frac{\partial L}{\partial m} = 0, \frac{\partial L}{\partial n} = 0 \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l} &= \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial l} - 2\lambda l = 2J_x l - 2J_{xy} m - 2J_{xz} n - 2\lambda l = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial m} &= \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial m} - 2\lambda m = 2J_y m - 2J_{xy} l - 2J_{yz} n - 2\lambda m = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n} &= \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial n} - 2\lambda n = 2J_z n - 2J_{yz} m - 2J_{xz} l - 2\lambda n = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Se formează sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} (J_x - \lambda) l - J_{xy} m - J_{xz} n &= 0 \\ -J_{xy} l + (J_y - \lambda) m - J_{yz} n &= 0 \\ -J_{xz} l - J_{yz} m + (J_z - \lambda) n &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

care mai poate fi scris

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Notând cu :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Avem

$$\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (2.58)$$

Problema extremelor lui J_Δ este o problemă de valori proprii⁹. Valorile proprii ale matricei $\mathbf{J}_0$ sunt momentele de inerție principale, iar vectorii proprii asociați vor determina direcțiile principale de inerție. Dacă se notează cu 1,2,3 direcțiile principale și cu J_1, J_2, J_3 momentele de inerție principale atunci:

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda_1 && \text{— cu vectorul propriu } \mathbf{v}_1 \\ J_2 &= \lambda_2 && \text{— cu vectorul propriu } \mathbf{v}_2 \\ J_3 &= \lambda_3 && \text{— cu vectorul propriu } \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Momentele de inerție principale se determină din condiția ca sistemul de ecuații să admită soluții nebanale $l, m, n \neq 0$ și ca urmare determinantul sistemului trebuie să fie egal cu 0.

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \quad (2.60)$$

$$\begin{vmatrix} (J_x - \lambda) & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & (J_y - \lambda) & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & (J_z - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltând determinantul se obține o ecuație de gradul 3 cu necunoscuta λ

$$P(\lambda) = c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 = 0 \quad (2.61)$$

numită și ecuația caracteristică a matricei $\mathbf{J}_0$, iar funcția polinomială $P_3(\lambda)$ este polinomul caracteristic.

Soluțiile acestei ecuații $\lambda_1 = J_1, \lambda_2 = J_2, \lambda_3 = J_3$ sunt momentele de inerție principale.

Se rezolvă sistemul de ecuații (2.55) înlocuind succesiv valorile λ_i și se obțin valorile l_i, m_i, n_i .

$i = 1, 2, 3$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

Vectorii proprii sunt reprezentați de versorii $\mathbf{v}_i$ care dau direcțiile principale

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= l_1 \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j} + n_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{v}_2 &= l_2 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + n_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{v}_3 &= l_3 \mathbf{i} + m_3 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Componentele scalare ale vectorilor proprii sunt elementele matricii spectrale $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

⁹ Fie $\mathbf{A}$ o matrice pătratică de ordinul n cu elemente reale. $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoarea proprie a matricei $\mathbf{A}$ dacă $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ astfel încât $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul n iar $\mathbf{x}$ se numește vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ asociat valorii proprii λ .

Matricea spectrală este o matrice unitară ($\det(\mathbf{V}) = 1$).

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$$

Matricea de inerție principală

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{V}$$

Momentul de inerție față de o axă Δ de cosinusi directori l, m, n este în raport cu axele principale:

$$J_\Delta = J_1 l^2 + J_2 m^2 + J_3 n^2 \quad (2.65)$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

2.3.5. Momentele de inerție ale unei plăci plane

Se consideră că planul plăcii este xoy ($z = 0$) și că $dm = \rho dA$ cu ρ constant (Fig. 2.11)

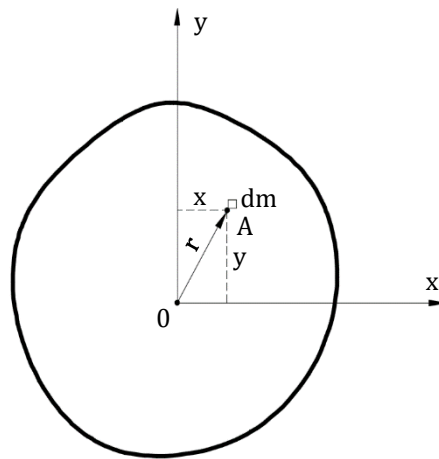


Figura 2.11

$$J_x = \int_C y^2 dm = \rho \int_C y^2 dA$$

$$J_y = \int_C x^2 dm = \rho \int_C x^2 dA$$

$$J_z = \int_C (x + y)^2 dm = J_0 = J_x + J_y$$

$$J_{xy} = \int_C xy dm = \rho \int_C xy dA$$

(2.66)

Relațiile (2.67) se pot scrie în general sub forma:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{I} \quad (2.67)$$

în care $\mathbf{I}$ se numește moment de inerție geometric și are următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_C y^2 dA \\
I_y &= \int_C x^2 dA \\
I_z &= \int_C (x + y)^2 dA = I_0 = I_x + I_y \\
I_{xy} &= \int_C xy dA
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Tensorul moment de inerție geometric:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \text{ sau } \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință

Translația axelor se face cu vectorul $\mathbf{v} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$ și considerând pe $c = 0$ în relațiile (2.68) și $O = C$ (centrul de masă) obținem:

$$\begin{aligned}
I_{x'} &= I_x + Ab^2 \\
I_{y'} &= I_y + Aa^2 \\
I_{x'y'} &= I_{xy} + Aab
\end{aligned} \tag{2.70}$$

unde A este aria suprafeței plane.

Dacă momentul de inerție al unei suprafețe în raport cu o axă oarecare Δ este I_Δ , Δ' este o axă paralelă cu Δ , iar distanța dintre cele două axe este d , atunci

$$I_{\Delta'} = I_\Delta + Ad^2 \tag{2.71}$$

Relația se numește formula lui Steiner pentru translația axelor.

Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință

Particularizând relația (2.51) pentru cazul momentelor de inerție geometrice avem:

$$\mathbf{I}_{0'} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\alpha}^T \tag{2.72}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} - \text{matricea de rotație} \tag{2.73}$$

Înlocuind expresiile termenilor în relația (2.73) obținem:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} & -I_{x'y'} \\ -I_{x'y'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
I_{x'} &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\
I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\
I_{x'y'} &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție

Considerând relația (2.51) corespunzătoare momentelor de inerție geometrice avem

$$\mathbf{I}_0 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (2.76)$$

unde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$\det(\mathbf{I}_0 - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \quad (2.78)$$

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.79)$$

Rezultă ecuația de gradul doi în λ .

$$\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0 \quad (2.80)$$

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (2.81)$$

Direcțiile principale se obțin din rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} (I_x - I_1) \cos \alpha_1 - I_{xy} \sin \alpha_1 = 0 \\ -I_{xy} \cos \alpha_1 - (I_y - I_1) \sin \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

și

$$\begin{cases} (I_x - I_2) \cos \alpha_2 - I_{xy} \sin \alpha_2 = 0 \\ -I_{xy} \cos \alpha_2 - (I_y - I_2) \sin \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

cu soluțiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_2} = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

2.4. Teoremele generale ale dinamicii

Teoremele generale ale dinamicii enunță variația mărimilor cinetice impuls, moment cinetic și energie cinetică atât pentru punctul material cât și pentru sistemele de puncte materiale și corpul solid rigid (CSR). Teoremele generale se deduc din legea a lui Newton exprimând principiul acțiunii forței sub o altă formă.

2.4.1. Impuls

Punct material

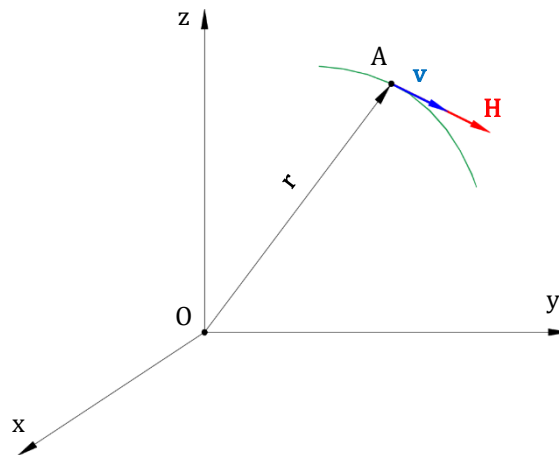


Figura 2.12

Impulsul unui punct material este un vector de expresie

$$\mathbf{H} = m \cdot \mathbf{v} \quad (2.85)$$

în care

- m este masa punctului material,
- $\mathbf{v}$ este viteza punctului material.

Vectorul impuls are aceeași direcție și același sens ca și vectorul viteză (Fig. 2.12).

Dacă

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} \quad (2.86)$$

și

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} \quad (2.87)$$

atunci:

$$\begin{aligned} H_x &= m \dot{x} \\ H_y &= m \dot{y} \\ H_z &= m \dot{z} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Modulul vectorului impuls al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (2.89)$$

Dimensional

$$[H] = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad (2.90)$$

Sistem de puncte materiale

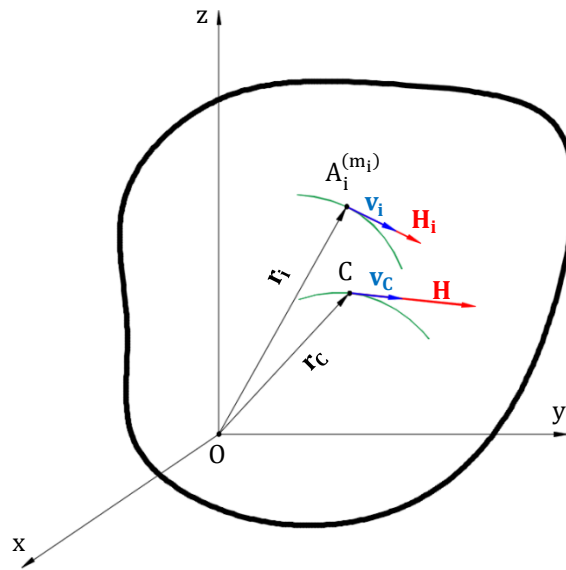


Figura 2.13

Impulsul total al unui sistem de puncte materiale este egal cu suma impulsurilor punctelor ce alcătuiesc sistemul:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}) \quad (\text{Fig. 2.13}) \quad (2.91)$$

Componentele scalare ale vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} H_x &= \sum m_i \cdot \dot{x}_i \\ H_y &= \sum m_i \cdot \dot{y}_i \\ H_z &= \sum m_i \cdot \dot{z}_i \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_c = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_c \quad (2.93)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_c$$

$$\sum m_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_c \quad \text{din teorema momentelor statice (Mecanică I)} \quad (2.94)$$

în care

- $\mathbf{M}$ este masa sistemului de puncte materiale
- $\mathbf{v}_c$ este viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale

Pentru orice sistem de puncte materiale impulsul total este egal cu impulsul centrului său de masă. Relația este valabilă și pentru CSR.

Componentele scalare ale vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz

$$\begin{aligned} H_x &= M \dot{x}_c \\ H_y &= M \dot{y}_c \\ H_z &= M \dot{z}_c \end{aligned} \quad (2.95)$$

Modulul vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale este:

$$|\mathbf{H}| = M \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2} \quad (2.96)$$

2.4.2. Teorema de variație a impulsului

Punct material

Pornind de la ecuația fundamentală a dinamicii

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{F} \quad (2.97)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls al unui punct material de masă m este egală, tot timpul mișcării, cu forța sau vectorul rezultat al sistemului de forțe care acționează pe punctul material.

Sistem de puncte materiale

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.98)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} - \text{vectorul rezultat al forțelor interioare este nul}$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls total al unui sistem de puncte materiale de masă M este egală, tot timpul mișcării, cu forța rezultantă a sistemului de forțe exterioare care acționează sistemul de puncte materiale,

$$\mathbf{H} = M \cdot \mathbf{v}_c$$

$$\dot{\mathbf{H}} = M \cdot \mathbf{a}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.99)$$

ceea ce exprimă teorema mișcării centrului de masă.

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale (sau CSR) are legea de mișcare a unui punct în care se consideră concentrată toată masa sistemului acționat de forța rezultantă a sistemului de forțe exterioare.

2.4.3. Teorema de conservare a impulsului

Punct material

Dacă forța care acționează punctul material este nulă, impulsul punctului se conservă pe toată durata mișcării. $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = m \cdot \mathbf{v} = \text{constant} \quad (2.100)$$

Relația (2.100) arată că mișcarea punctului este rectilinie și uniformă.

Sistem de puncte materiale

Dacă forța rezultantă care acționează sistemul de puncte materiale este nulă, impulsul total al sistemului de puncte materiale se conservă pe toată durata mișcării.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = \text{constant} \quad (2.101)$$

2.4.4. Moment cinetic

Punct material

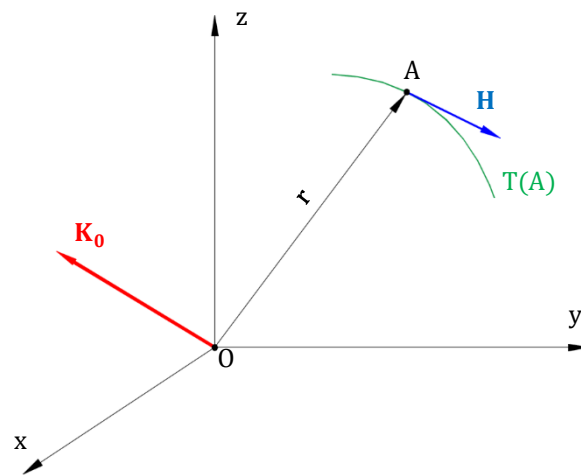


Figura 2.14

Momentul cinetic în raport cu un punct fix O al unui punct material este un vector de expresie (Fig. 2.14):

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{H} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad (2.102)$$

în care

$\mathbf{r}$ este vectorul de poziție în raport cu punctul fix O al punctului material,

m este masa punctului material,

$\mathbf{v}$ este viteza punctului material.

Dacă

$$\mathbf{K}_0 = K_{0x} \mathbf{i} + K_{0y} \mathbf{j} + K_{0z} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad (2.103)$$

și

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

atunci

$$\begin{aligned} K_{0x} &= m (\dot{y}z - z\dot{y}) \\ K_{0y} &= m (\dot{z}x - x\dot{z}) \\ K_{0z} &= m (\dot{x}y - y\dot{x}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Modulul vectorului moment cinetic al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = m \sqrt{(\dot{y}z - z\dot{y})^2 + (\dot{z}x - x\dot{z})^2 + (\dot{x}y - y\dot{x})^2} \quad (2.105)$$

Dimensional

$$[K_0] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \quad (2.106)$$

Sistem de puncte materiale

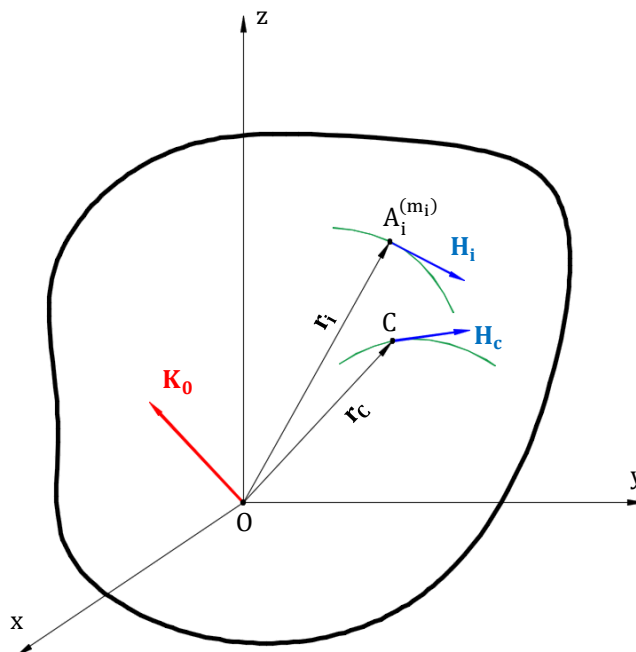


Figura 2.15

Mișcarea este raportată la un sistem de referință fix $Oxyz$ (Fig. 2.15) și la un sistem de referință mobil $Cx'y'z'$ cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) și care este translatat în raport cu primul sistem de referință (Fig. 2.16).

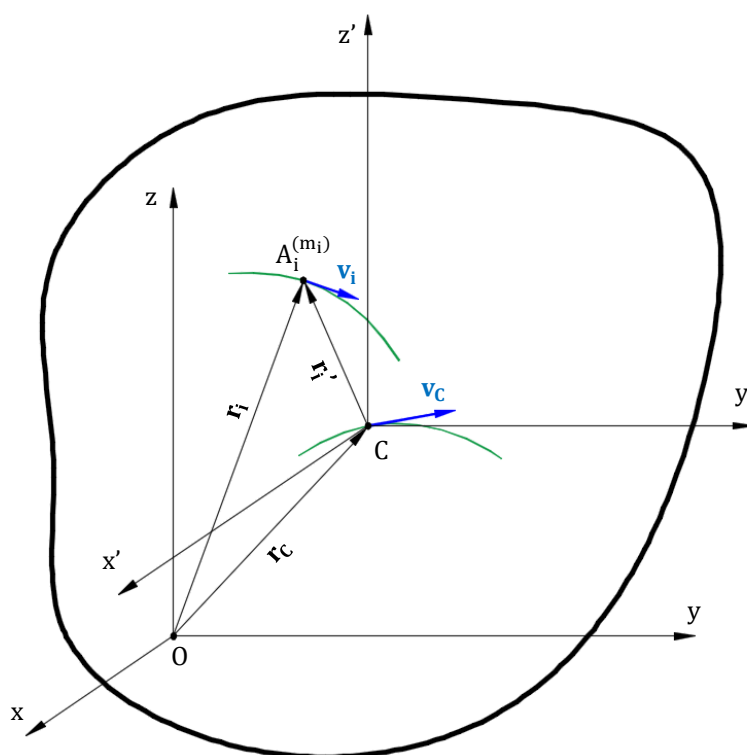


Figura 2.16

Se observă din figura 2.16 că:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i' \quad (2.107)$$

Derivând relația 2.107 se obține:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \quad (2.108)$$

Deoarece sistemul de referință mobil $C\ x'y'z'$ se află în mișcare de translație față de primul sistem de referință $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ și relația (2.108) devine

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}_i' \text{ sau}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i' \quad (2.109)$$

în care $\mathbf{v}_i'$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C .

Momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale este:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{0i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i' \\ \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i') \times \mathbf{v}_i' = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_i' + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i &= M \mathbf{r}_c \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' = \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' &\text{ este momentul static al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă.} \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{K}_c \end{aligned}$$

$\mathbf{K}_c$ este momentul cinetic total al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă.

Astfel, momentul cinetic total al sistemului de puncte $\mathbf{K}_0$ devine:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c + \mathbf{K}_c \quad (2.110)$$

Relația exprimă teorema lui Kőnig¹⁰ pentru moment cinetic. Momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale în mișcare, în raport cu un pol O , este egal cu momentul cinetic al centrului său de masă la care se adaugă momentul cinetic al sistemului în mișcarea sa în raport cu centrul său de masă $\mathbf{K}_c$.

Mișcarea sistemului de puncte materiale față de centrul de masă este o mișcare sferică respectiv o mișcare instantanee de rotație în jurul axei instantanee de rotație.

2.4.5. Calculul momentului cinetic al CSR în diferite mișcări

Mișcarea de translație

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c$$

¹⁰ Johann Samuel Kőnig (1712 – 1757) matematician si teolog german

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c \quad (2.111)$$

Mișcarea de rotație în jurul unei axe

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] \end{aligned} \quad (2.113)$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.114)$$

relația (2.114) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \cdot (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \cdot \\ &\quad \cdot (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Scriind expresia analitică pentru $\mathbf{K}_0$ rezultă:

$$\mathbf{K}_0 = K_{0x} \mathbf{i} + K_{0y} \mathbf{j} + K_{0z} \mathbf{k} \quad (2.116)$$

și efectuând calculele în membrul drept al relației (2.115) rezultă componentele scalare ale vectorului $\mathbf{K}_0$ în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

$$\begin{aligned} K_{0x} &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_{0y} &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_{0z} &= -J_{zx} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z \end{aligned} \quad (2.117)$$

Dacă axa de rotație este Oz,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega \end{aligned}$$

relațiile devin:

$$\begin{aligned} K_{0x} &= -J_{xz} \omega \\ K_{0y} &= -J_{yz} \omega \\ K_{0z} &= J_z \omega \end{aligned} \quad (2.118)$$

Dacă axa Oz este și axă principală de inerție

$$\begin{aligned} J_{xz} &= J_{yz} = 0 \\ K_{0z} &= J_z \omega \end{aligned} \quad (2.119)$$

În general, dacă CSR are o mișcare de rotație în jurul unei axe principale de inerție Δ , momentul cinetic este un vector dirijat după axa Δ și are expresia:

$$K_\Delta = J_\Delta \omega \quad (2.120)$$

2.4.6. Teorema de variație a momentului cinetic

Punct material

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}) \quad (2.121)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic al unui punct material de masă m aflat în mișcare în raport cu punctul fix O , este egală, tot timpul mișcării, cu momentul forței care acționează punctul material, în raport cu același punct fix O .

Sistem de puncte materiale

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_0 &= \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic în raport cu punctul fix O al unui sistem de puncte materiale aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării, cu momentul rezultat al sistemului de forțe care acționează sistemul de puncte materiale, în raport cu același punct fix O .

2.4.7. Teorema de conservare a momentului cinetic

Punct material

Dacă momentul forței care acționează pe punctul material, în raport cu punctul fix O , este nul atunci momentul cinetic al punctului material se conservă pe toată durata mișcării.

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_0 - \text{constant} \quad (2.123)$$

Sistem de puncte materiale

Dacă momentul rezultat al sistemului de forțe exterioare, care acționează sistemul de puncte materiale, este nul în raport cu punctul O , atunci momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale se conservă pe toată durata mișcării.

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_0 - \text{constant} \quad (2.124)$$

2.4.8. Lucrul mecanic

Lucrul mecanic¹¹ este o mărime fizică definită ca produsul dintre componenta forței care acționează asupra unui corp în direcția deplasării punctului ei de aplicație și mărimea acestei deplasări. Lucrul mecanic este o mărime ce caracterizează schimbarea stării dinamice a sistemului.

Relația dimensională pentru lucru mecanic se scrie sub forma:

$$[F] = [F] [s] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

În Sistemul Internațional de măsuri forța se măsoară în newtoni și lungimea în metri, rezultă că unitatea de măsură pentru lucru mecanic este:

$$[L] = Nm = J \text{ (Joule)}$$

Lucrul mecanic al unei forțe constante

Se consideră un punct material care sub acțiunea unei forțe constante $\mathbf{F}$ efectuează o deplasare rectilinie A_1A_2 . Fie $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor A_1 și A_2 în raport cu un reper O și $\mathbf{r} = \mathbf{A}_1A_2$ vectorul deplasare, prin definiție L , lucrul mecanic al forței constante $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării $\mathbf{r}$, este produsul scalar dintre vectorul forță $\mathbf{F}$ și vectorul deplasare $\mathbf{r}$:

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{r}) = F \cdot \text{pr}_{\mathbf{F}} \mathbf{r} = r \cdot \text{pr}_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \quad (2.125)$$

Din relația (2.125) se observă că lucrul mecanic al forței constante $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării $\mathbf{r}$, este produsul scalar dintre modulul vectorului forță $\mathbf{F}$ și proiecția vectorului deplasare $\mathbf{r}$ pe direcția forței sau produsul scalar dintre modulul vectorului deplasare $\mathbf{r}$ și proiecția vectorului forță $\mathbf{F}$ pe direcția vectorului deplasare $\mathbf{r}$.

Lucrul mecanic al unei forțe variabile

Se consideră un punct material, care sub acțiunea unei forțe variabile $\mathbf{F}$ se deplasează pe o curbă oarecare (C). Vectorii $\mathbf{r}$ și $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ definesc pozițiile instantanee ale punctului A într-un sistem de axe triortogonal cartezian Oxyz. Deplasarea elementară $d\mathbf{r}$ se efectuează în întreprinderea elementară de timp dt . Prin definiție dL , lucrul mecanic elementar al forței variabile $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării elementare $d\mathbf{r}$ este produsul scalar dintre vectorul forță $\mathbf{F}$ și vectorul deplasare elementară $d\mathbf{r}$:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.126)$$

În baza relației (1.8) din cinematică,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$$

relația (2.126) devine:

$$dL = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.127)$$

Dacă se scriu expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (2.126) și (2.127):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k} \\ d\mathbf{r} &= dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.128)$$

relația (2.128) devine

¹¹Termenul de "lucru" (în limba franceză "travail") al unei forțe a fost utilizat pentru prima oară într-un articol din 1826 al matematicianului și inginerului mecanic francez Gaspard-Gustave Coriolis și apoi în cartea "Du calcul de l'effet des machines" din 1829 a aceluiași autor. Înainte de denumirea dată de Coriolis, Carnot se referea la acest concept cu numele "putere motrice" în lucrarea sa din 1824 "Despre puterea motrice a focului" (Sur la puissance motrice du feu). Denumirea de "lucru mecanic" a fost introdusă de Jean-Victor Poncelet.

$$\begin{aligned} dL &= X dx + Y dy + Z dz \\ dL &= X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Lucrul mecanic total efectuat de forța variabilă $\mathbf{F}$ prin mișcarea punctului A pe curba (C) din poziția A_1 în poziția A_2 este:

$$L = \int_{A_1 A_2} dL = \int_{A_1 A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1 A_2} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{A_1 A_2} (X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}) dt \quad (2.130)$$

Un caz special al forței variabile $\mathbf{F}$ îl constituie forța conservativă¹². Un câmp de forțe se numește conservativ (potențial) dacă există un câmp scalar U astfel încât:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U \quad (2.131)$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.132)$$

$$L = \int_{A_1 A_2} dL = \int_{A_1 A_2} \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1 A_2} dU = U_2 - U_1 \quad (2.133)$$

În acest caz lucrul mecanic total depinde numai de poziția inițială și finală a punctului.

Lucrul mecanic al unui sistem de puncte materiale

Lucrul mecanic elementar total al unui sistem de puncte materiale este:

$$dL = dL_{\text{ext}} + dL_{\text{int}} \quad (2.134)$$

în care dL_{ext} este lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și dL_{int} este lucrul mecanic elementar al forțelor interioare, care în cazul CSR este nul.

Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează pe un CSR este:

$$dL_{\text{ext}} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}_C + \mathbf{M}_C \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (2.135)$$

în care $\mathbf{R}$ și $\mathbf{M}_C$ este torsorul în punctul C (centrul de masă al CSR) al sistemului forțelor exterioare care acționează pe CSR iar $\mathbf{r}_C$ și $d\boldsymbol{\theta}$ sunt deplasarea, respectiv rotația elementară a centrului de masă al CSR.

2.4.9. Energia cinetică¹³

Punct material

Energia cinetică sau energia de mișcare a unui punct material de masă m, aflat în mișcare de translație cu viteza $\mathbf{v}_i$ în raport cu un sistem de referință inerțial, este o mărime fizică scalară definită de relația:

$$E = \frac{m v^2}{2} \quad (2.136)$$

Sistem de puncte materiale

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , aflat în mișcare de translație cu vitezele $\mathbf{v}_i$ în raport cu un sistem de referință inerțial, este o mărime fizică scalară definită de relația:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (2.137)$$

Mișcarea este raportată la un sistem de referință inerțial Oxyz și la un sistem de referință mobil Cx'y'z' cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) și care este traslatat în raport cu primul sistem de referință (Fig. 2.17).

¹² Forțe conservative sunt gravitația, forța electromagnetică, și forța elastică.

¹³ Expresia "energia cinetică" i se atribuie Lordului Kelvin. Adjectivul cinetică provine din substantivul grecesc "kinesis" care înseamnă mișcare.

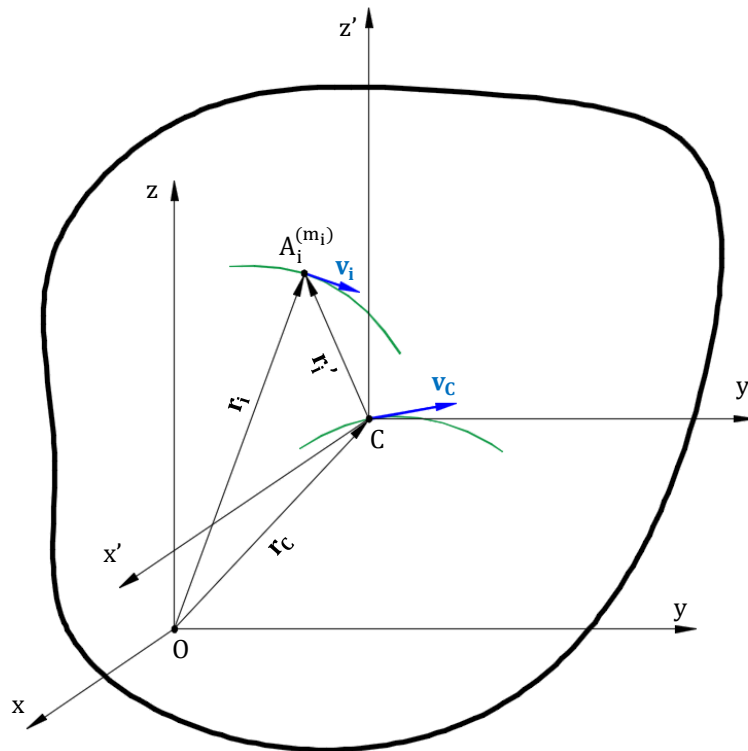


Figura 2.17

Se observă din figura 2.17 că:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i \quad (2.138)$$

Derivând relația (2.138) se obține:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (2.139)$$

Deoarece sistemul de referință mobil Cx'y'z' se află în mișcare de translație față de primul sistem de referință $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ relația (2.139) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_c + \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial t} \text{ sau} \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i \end{aligned} \quad (2.140)$$

în care $\mathbf{v}'_i$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C.

Tinând seama de relația (2.140) relația (2.137) devine:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i')^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_c^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_i' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \\
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_c^2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) v_c^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 \\
 \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_i' &= \mathbf{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' = 0 \\
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 &= E'
 \end{aligned}$$

Cu notațiile de mai sus energia cinetică a unui sistem de puncte materiale devine:

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + E' \quad (2.141)$$

Relația (2.141) reprezintă expresia teoremei lui Kőnig pentru energia cinetică. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale aflat în mișcare, este egală cu energia cinetică a centrului său de masă la care se adaugă energia cinetică al sistemului în mișcarea sa în raport cu centrul său de masă.

2.4.10. Calculul energiei cinetice al CSR în diferite mișcări

Mișcarea de translație

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_c^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (2.142)$$

Mișcarea de rotație în jurul unei axe

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \quad (2.143)$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \mathbf{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \mathbf{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \mathbf{k}$$

relația (2.143) devine:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2 \right] \\
 E &= \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) - (J_{xy} \omega_x \omega_y + J_{yz} \omega_y \omega_z + J_{zx} \omega_z \omega_x)
 \end{aligned} \quad (2.144)$$

Dacă axa de rotație este Oz

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega\end{aligned}\quad (2.145)$$

relația (2.145) devine

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (2.146)$$

Mișcarea plan paralelă

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \quad (2.147)$$

În care J_Δ este momentul de inerție al plăcii în raport cu o axă Δ perpendiculară pe planul mișcării.

2.4.11. Teorema de variație a energiei cinetice

Punct material

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ \dot{E} &= \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot v \cdot \dot{v} = m \cdot v \cdot \dot{v} = m \cdot \dot{v} \cdot v = m \cdot a \cdot v = F \cdot v = F \frac{dr}{dt} \\ \frac{dE}{dt} &= F \frac{dr}{dt} \Rightarrow dE = F dr = dL \\ dE &= dL\end{aligned}\quad (2.148)$$

Variația energiei cinetice a unui punct material de masă m aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării, cu lucrul mecanic elementar al forței care acționează punctul material, prin deplasarea sa elementară dr .

Sistem de puncte materiale

În cazul unui sistem de puncte materiale teorema de variație a energiei cinetice este:

$$dE = dL_{int} + dL_{ext} \quad (2.149)$$

în cazul CSR $dL_{int} = 0$.

$$dE = dL_{ext} = R \cdot dr_c + M_c \cdot d\theta \quad (2.150)$$

Variația energiei cinetice a unui CSR aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării, cu lucrul mecanic elementar al tursorului în C (centrul de masă) al sistemului de forțe exterioare care acționează pe CSR.

Expresia integrală a teoremei de variație a energiei cinetice este:

$$E_2 - E_1 = L_{12} \quad (2.151)$$

Diferența energiilor cinetice ale unui sistem material în mișcare, în două poziții succesive (1) și (2) este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare aplicate sistemului prin trecerea acestuia din poziția (1) în poziția (2).

MECANICĂ ANALITICĂ

3.1. Introducere

În anul 1788 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a publicat la Paris lucrarea „Mécanique analytique”, care conține atât contribuțiile lui, cât și sinteza principalelor contribuții ale înaintașilor săi, dintre care amintim pe Jean Bernoulli (1654-1705), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), Leonhard Euler (1707-1783) și Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aceasta poate fi considerată prima lucrare de mecanică analitică, contribuții semnificative fiind aduse apoi și de către Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Rowan Hamilton (1805-1865), Jules Henri Poincaré (1854-1912) ș.a.

Mecanica analitică este rezultatul îmbinării conceptelor din mecanica newtoniană cu concepte ale matematicii (calcul diferențial, calcul variațional, ecuații diferențiale, etc). Mecanica analitică este forma cea mai concisă și mai cuprinzătoare a legilor mecanicii, în care se stabilesc metode foarte generale de studiu ale mișcării sistemelor de corpuri, sisteme caracterizate de un număr foarte mare de coordonate.

Astfel mecanica analitică reformulează problema mișcării acestor sisteme reducând numărul necunoscutelor.

Ecuațiile de mișcare din mecanica analitică se exprimă diferit față de cele ale mecanicii newtoniene, dar rezultatul aplicării lor în studiul unui sistem fizic dat este identic cu cel obținut când se utilizează ecuațiile mecanicii newtoniene.

Principiile mecanicii analitice se exprimă într-un mod complex, conținutul lor fizic fiind mai puțin evident față de cel al principiilor mecanicii newtoniene. Marele avantaj al acestor principii este că pot cuprinde nu numai legile mecanicii newtoniene ci și alte legi din fizică.

3.2. Legături aplicate sistemelor materiale

Fie un sistem de puncte materiale A_i . Dacă în orice moment t al mișcării, vectorii de poziție ai celor n puncte materiale $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, n$) și vitezele lor $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$ pot lua valori arbitrare atunci spunem că sistemul este liber. În caz contrar sistemul este supus la legături.

Numim *legătură*, orice condiție de ordin geometric sau cinematic care limitează posibilitățile de mișcare ale unui corp.

Din punct de vedere matematic, o legătură se poate exprima sub forma cea mai generală, astfel:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (3.1)$$

Relația (3.1) reprezintă o condiție de ordin geometric (prin intermediul vectorilor de poziție $\mathbf{r}_i$) și cinematic (prin intermediul vectorilor viteze $\dot{\mathbf{r}}_i$) care limitează posibilitățile de mișcare ale punctelor materiale din sistem.

Orice legătură este echivalentă cu forțe de legătură. Aceste forțe de legătură obligă sistemul material să se miște pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafață, fără a părăsi curba sau suprafața respectivă.

3.3. Clasificarea legăturilor

Legăturile pot fi clasificate pe baza a cel puțin trei criterii, și anume:

1. După modul în care sunt exprimate - prin *egalități* sau prin *inegalități*;
2. În funcție de absența sau prezența explicită a *timpului* în expresiile lor;
3. În funcție de absența sau prezența explicită a *vitezei* în expresiile lor.

1. Din punctul de vedere al primului criteriu de clasificare, legăturile pot fi exprimate prin *egalități* - și atunci sunt numite *bilaterale* - sau prin *inegalități* - caz în care sunt numite *unilaterale*.

2. Din punctul de vedere al celui de-al doilea criteriu, legăturile pot conține în expresiile lor analitice timpul în mod explicit - și atunci ele se numesc *reonomice* sau *nestaționare* sau, dimpotrivă, timpul nu apare în mod explicit în aceste expresii - caz în care legăturile se numesc *scleronome* sau *staționare*.

3. Din punctul de vedere al celui de-al treilea criteriu, legăturile pot fi *geometrice* sau *finite* - dacă în expresiile lor analitice nu intervin vitezele în mod explicit - și, respectiv, *cinematice* sau *diferențiale* - dacă vitezele apar în mod explicit în expresiile lor analitice.

De exemplu relația (3.1) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, diferențială.

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0, \quad j = (1, l) \quad (3.2)$$

Relația (3.2) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, geometrică.

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (3.3)$$

Derivând relația (3.2) în raport cu timpul se obține:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad (j = 1, l) \quad (3.4)$$

care arată că orice legătură geometrică poate fi scrisă ca o relație diferențială liniară.

În schimb nu toate legăturile diferențiale pot fi integrate. Acele legături diferențiale care pot fi integrate împreună cu cele geometrice se numesc legături olonome, iar cele ce nu sunt integrabile împreună cu cele unilaterale se numesc neolonome.

3.4. Clasificarea deplasărilor

Deplasările sistemelor materiale pot fi finite dacă se efectuează într-un interval finit de timp Δt sau infinitezimale (elementare) dacă se efectuează într-un interval de timp infinitezimal (elementar) dt .

În cele ce urmează ne referim la deplasările elementare.

Deplasările efectuate sub acțiunea forțelor exterioare se numesc deplasări reale. Aceste deplasări se exprimă prin relația:

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt \quad (3.5)$$

Deplasările unui sistem material pot fi considerate și cele posibile, compatibile cu legăturile sistemului. Aceste deplasări se numesc deplasări virtuale. Aceste deplasări sunt independente de timp. Spre deosebire de deplasarea reală care este unică, deplasările virtuale nu sunt unice, orice deplasare cinematic posibilă este o deplasare virtuală.

Deplasarea reală este una din deplasările virtuale. Deplasările virtuale au expresia:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta x_i \mathbf{i} + \delta y_i \mathbf{j} + \delta z_i \mathbf{k}$$

În cazul unui punct A pe o suprafață $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ considerată ca o legătură bilaterală, scleronomă, atât deplasările reale cât și cele virtuale au loc în planul tangent la suprafață în punctul A (perpendicular pe gradientul ei).

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{și} \quad \text{grad } \varphi \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.6)$$

Dacă legătura este reonomă $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$, deplasările reale nu mai au loc în planul tangent pe când deplasările virtuale au loc în planul tangent. Deplasarea reală nu mai este una din deplasările virtuale. Relația (3.5) se va exprima doar pentru deplasările virtuale:

$$\text{grad } \varphi \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.7)$$

3.5. Principiul lui d'Alembert

Considerând un sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , $i = 1, n$, supus la legături și acționat de forțele exterioare $\mathbf{F}_i$, izolând punctul A_i , asupra lui se introduc forțele date $\mathbf{F}_i$ și forțele de legătură $\mathbf{R}_i$. Se aplică principiul al doilea al dinamicii:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (3.8)$$

Relația (3.7) se mai poate scrie:

$$\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

$\mathbf{F}_i' = m_i \mathbf{a}_i$ se numește forță de inerție, astfel încât relația (3.8) se scrie:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i' + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Relația (3.9) exprimă principiul lui D'Alembert:

Pentru fiecare punct material aflat în mișcare, rezultanta forțelor date $\mathbf{F}_i$, a forțelor de inerție $\mathbf{F}_i'$ și a forțelor de legătură $\mathbf{R}_i$ este egală cu 0 în orice moment al mișcării. Principiul lui D'Alembert exprimă o condiție de echilibru dinamic.

3.6. Torsorul forțelor de inerție

La un sistem de puncte materiale în mișcare forțele de inerție formează un sistem de forțe distribuite, care se reduc în punctul O la un torsor format din vectorul rezultat $\mathbf{R}'$ și vectorul moment rezultat $\mathbf{M}_0'$ (Fig. 3.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = - \sum_{i=1}^n m \dot{\mathbf{v}}_i = - \left(\sum_{i=1}^n m \mathbf{v}_i \right)' = -\dot{\mathbf{H}} \\ \mathbf{M}_0' &= - \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right)' = -\dot{\mathbf{K}}_0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

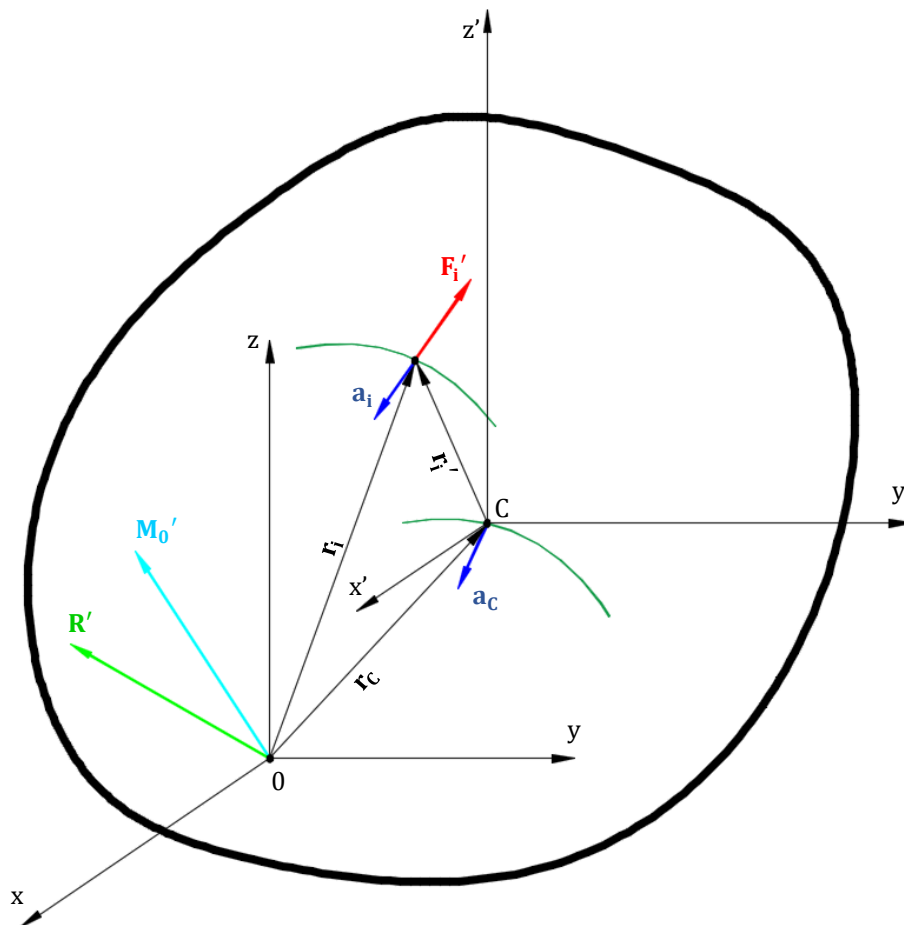


Figura 3.1

Știind că

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= M \cdot \mathbf{v}_c \\ \mathbf{K}_0 &= \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c + \mathbf{K}_c\end{aligned}\quad (3.12)$$

rezultă,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}' &= -\dot{\mathbf{H}} = -M\mathbf{a}_c \\ \mathbf{M}'_0 &= -\dot{\mathbf{K}}_0 = -\mathbf{r}_c \times M\mathbf{a}_c - \dot{\mathbf{K}}_c\end{aligned}\quad (3.13)$$

3.7. Calculul taylorului forțelor de inerție în mișcările particulare

3.7.1. Mișcarea de translație

În raport cu centrul de masă taylorul forțelor de inerție este format din:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}' &= -M\mathbf{a}_c \\ \mathbf{M}'_0 &= -\mathbf{r}_c \times M\mathbf{a}_c\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.7.2. Mișcarea de rotație cu axă fixă

Axa de rotație este axa Oz iar în acest caz ,

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}' &= -\dot{\mathbf{H}} = -M\mathbf{a}_c \\ \mathbf{a}_c &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_c & \omega x_c & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M}'_0 &= -\dot{\mathbf{K}}_0 \\ &= -(\varepsilon y_c - \omega^2 x_c) \mathbf{i} + (\varepsilon x_c - \omega^2 y_c) \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_0 = -J_{xz}\omega \mathbf{i} - J_{yz}\omega \mathbf{j} + J_z\omega \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = -J_{xz}\dot{\omega} \mathbf{i} - J_{xz}\omega \dot{\mathbf{i}} - J_{yz}\dot{\omega} \mathbf{j} - J_{yz}\omega \dot{\mathbf{j}} + J_z\dot{\omega} \mathbf{k} \quad (\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0}) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \varepsilon \\ \dot{\mathbf{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \omega \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -\omega \mathbf{i}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Înlocuind relațiile (3.15) în relația (3.14) rezultă:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_0 &= -J_{xz} \varepsilon \mathbf{i} - J_{xz}\omega^2 \mathbf{j} - J_{yz} \varepsilon \mathbf{j} + J_{yz}\omega^2 \mathbf{i} + J_z \varepsilon \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{M}}_0 &= (-J_{xz} \varepsilon + J_{yz} \omega^2) \mathbf{i} + (-J_{xz} \omega^2 - J_{yz} \varepsilon) \mathbf{j} + J_z \varepsilon \mathbf{k}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Componentele scalare ale vectorilor taylorului de reducere în O ale sistemului forțelor de inerție sunt :

$$\begin{aligned}R'_x &= M(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c) \\ R'_y &= M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c) \\ R'_z &= 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
M'_x &= J_{xy}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 \\
M'_y &= J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon \\
M'_z &= -J_z\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

Dacă axa oz este axă principală de inerție atunci

$$\begin{aligned}
x_c &= y_c = 0 \\
R'_x &= R'_y = R'_z \\
J_{xz} &= J_{yz} = 0 \\
M'_x &= M'_y = 0 \\
M'_z &= -J_z\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

3.7.3. Mișcarea plan paralelă

$$\begin{aligned}
R' &= -H = -ma_c \\
R'_x &= M(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c) \\
R'_y &= M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c) \\
R'_z &= 0 \\
M'_0 &= -\dot{K}_0 \\
K_0 &= -J_{xz} \omega i - J_{yz} \omega j + J_z \omega k \\
M'_x &= J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 \\
M'_y &= J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon \\
M'_z &= -J_z \varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

Principiul lui d'Alembert se folosește în cadrul metodei cineto statice pentru rezolvarea unor aplicații de dinamică. Etapele de rezolvare a aplicațiilor folosind metoda cineto-statică sunt următoarele:

- se face un studiu cinematic în care se determină numărul gradelor de libertate ale sistemului și tipul mișcărilor efectuate;
- se fac eventualele compuneri de mișcări;
- se separă corpurile sistemului și se face schema forțelor date, de inerție și de legătură (reacțiuni) care acționează pe fiecare corp;
- se scriu ecuațiile de echilibru cineto static pentru fiecare corp din care rezultă un sistem de ecuații al cărui necunoscute sunt accelerațiile corpurilor și forțele de legătură;
- se rezolvă sistemul de ecuații determinând necunoscutele.

3.8. Principiul lucrului mecanic virtual

Lucrul mecanic virtual este produsul dintre vectorul forță și vectorul deplasare virtuală:

$$\delta L_i = F_i \cdot \delta r_i \tag{3.21}$$

Scriind principiul lui d'Alembert pentru punctul A_i al unui sistem de puncte materiale de mase m_i avem:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \tag{3.22}$$

Pentru toate punctele sistemului se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i) = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

Înmulțind relația (3.23) cu $\delta \mathbf{r}_i$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \text{ sau} \quad (3.24)$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i) \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \text{grad } \varphi_j \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 ; \text{ cei doi vectori } \mathbf{R}_i = \lambda \cdot \text{grad } \varphi_j \text{ și } \delta \mathbf{r}_i \text{ fiind perpendiculari} \quad (3.26)$$

Relația (3.24) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.27)$$

Principiul lucrului mecanic virtual se poate enunța astfel:

În cazul unui sistem de puncte materiale în mișcare forțele date $\mathbf{F}_i$ și forțele de inerție $\mathbf{F}'_i$ efectuează în orice moment al mișcării un lucru mecanic virtual nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).

Unui sistem material cu m grade de libertate i se pot da m deplasări virtuale independente. Fiecărui grad de libertate îi corespunde o ecuație de lucru mecanic virtual nul. În aceste ecuații accelerațiile punctelor intervin ca necunoscute. Principiul lucrului mecanic virtual se aplică și sistemelor materiale aflate în repaus. În acest caz forțele de inerție $\mathbf{F}'_i$ sunt nule

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.28)$$

Condiția ca un sistem material să fie în repaus este ca lucrul mecanic virtual al forțelor date să fie nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).

Principiul lucrului mecanic virtual se folosește în cadrul metodei deplasărilor virtuale cu care se rezolvă aplicații de dinamica sistemelor materiale parcurgându-se următoarele etape:

- se face un studiu cinematic în care determină numărul gradelor de libertate ale sistemului și tipul mișcării care se efectuează;
- se fac eventualele compuneri de mișcări;
- se face schema forțelor date și de inerție care acționează pe sistemul material;
- se face schema deplasărilor virtuale pentru fiecare grad de libertate al sistemului;
- se scriu ecuațiile de lucru mecanic virtual al forțelor date și de inerție corespunzătoare fiecărui grad de libertate din care rezultă un sistem de ecuații al cărui necunoscute sunt accelerațiile sistemelor materiale;
- se rezolvă sistemul de ecuații determinând necunoscutele aplicației.

Principiul lucrului mecanic virtual poate fi aplicat și în probleme de statică, la determinarea reacțiunilor și a eforturilor secționale pe sisteme static determinate. Pentru rezolvarea problemei, se transformă sistemul static determinat în mecanism cu un grad de libertate dinamic prin introducerea de legături care să permită deplasări pe direcția eforturilor secționale sau reacțiunilor căutate. Eforturile / reacțiunile se introduc ca forțe exterioare care vor figura ca necunoscute în ecuația de lucru mecanic virtual nul.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Borș, *Mecanică Teorie și aplicații de Cinematică, Dinamică și Mecanică Analitică*. Editura U.T. PRESS, Cluj-Napoca, 2009.
2. G. M. Bârsan, P. Alexa, I. Borș, *Mecanică*. Litografia Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1987.
3. Ș. Bălan. *Culegere de probleme de Mecanică*. Editura Tehnică București, 1964.
4. A. Stoenescu, ș.a. *Culegere de probleme de Mecanică Teoretică*. Editura Tehnică București, 1958.
5. C. Iacob. *Mecanică Teoretică*. Editura didactica si pedagogica București, 1980.
6. A. Ripianu, ș.a. *Mecanică Tehnică. Cinematică, Dinamică. Culegere de probleme*. Litografia Institutului Politehnic din Cluj-Napoca, 1986.

CUPRINS

Prefață	2
1. Cinematică	3
1.1. Introducere în cinematică	3
1.2. Scurt istoric	3
1.3. Cinematica punctului material	3
1.3.1. Introducere în cinematica punctului material	3
1.3.2. Elementele mișcării punctului material	4
Traectoria	4
Deplasare finită și deplasare elementară	5
Viteza	5
Accelerația	7
1.3.3. Componentele vectorilor viteză și accelerație	9
Coordonate carteziane	9
Coordonate cilindrice	10
Coordonate intrinseci	11
1.4. Cinematica mișcărilor particulare ale punctului material	13
1.4.1. Mișcarea rectilinie	13
Mișcarea rectilinie și uniformă	13
Mișcarea rectilinie uniform variată	14
1.4.2. Mișcarea circulară	15
1.5. Cinematica corpului solid rigid	16
1.5.1. Introducere	16
1.5.2. Mișcarea de translație	16
Definiția mișcării	16
Grade de libertate	17
Elementele mișcării	17
Traectorii	17
Viteze	17

	<i>Accelerații</i>	18
1.5.3.	Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe	18
	Definiția mișcării	18
	Grade de libertate	18
	Elementele mișcării	19
	<i>Traectorii</i>	19
	<i>Viteze</i>	19
	<i>Câmpul vitezelor</i>	19
	<i>Accelerația unghiulară</i>	20
	<i>Accelerația punctului</i>	21
	<i>Câmpul accelerațiilor</i>	21
	<i>Deplasări elementare</i>	22
1.5.4.	Mișcarea plan paralelă (mișcarea plană)	23
	Definiția mișcării	23
	Grade de libertate	24
	Elementele mișcării	24
	<i>Traectorii</i>	24
	<i>Viteza unghiulară</i>	24
	<i>Viteza în mișcarea plană</i>	24
	<i>Câmpul vitezelor</i>	25
	Determinarea poziției centrului instantaneu de rotație (CIR)	26
	<i>Analitic</i>	26
	<i>Grafic (geometric)</i>	27
	Accelerații	28
	Deplasări elementare	29
1.5.5.	Mișcarea plan-paralelă a sistemelor de plăci. Teoreme de coliniaritate	31
	Mișcarea plan-paralelă a două plăci	31
	Mișcarea plan-paralelă a trei plăci	32
	Diagrame de deplasări	34

1.5.6. Mișcarea de rototranslație	36
Definiția mișcării	36
Grade de libertate	36
Elementele mișcării	36
<i>Traietorii</i>	36
<i>Viteza unghiulară</i>	37
<i>Viteza unui punct în mișcarea de rototranslație</i>	37
<i>Câmpul vitezelor</i>	37
<i>Accelerația unghiulară</i>	38
<i>Accelerația unui punct în mișcarea de rototranslație</i>	38
<i>Câmpul accelerațiilor</i>	39
<i>Deplasări elementare</i>	39
<i>Componentele scalare ale vectorului deplasărilor elementare</i>	40
2. Dinamică	41
2.1. Introducere în dinamică	41
2.2. Dinamica punctului material	42
2.2.1. Dinamica punctului material liber	42
Proiectarea relației (2.1) pe axele unui sistem cartezian triortogonal de referință	42
Proiectarea relației (2.1) pe axele sistemului cilindric de coordonate	43
Proiectarea relației (2.1) pe axele triedului lui Frenet (coordoanate intrinseci)	44
Dinamica mișcării centrale a punctului material	45
Dinamica punctului material sub acțiunea unei forțe elastice	47
2.2.2. Dinamica punctului material legat	48
2.3. Momente de inerție	49
2.3.1. Momente de inerție masice	50

2.3.2.	Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință	52
2.3.3.	Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință	54
2.3.4.	Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție	56
2.3.5.	Momentele de inerție ale unei plăci plane	58
	Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință	59
	Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință	59
	Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție	60
2.4.	Teoremele generale ale dinamicii	61
2.4.1.	Impuls	61
	Punct material	61
	Sistem de puncte materiale	62
2.4.2.	Teorema de variație a impulsului	63
	Punct material	63
	Sistem de puncte materiale	63
2.4.3.	Teorema de conservare a impulsului	63
	Punct material	63
	Sistem de puncte materiale	64
2.4.4.	Moment cinetic	64
	Punct material	64
	Sistem de puncte materiale	65
2.4.5.	Calculul momentului cinetic al CSR în diferite mișcări	66
	Mișcarea de translație	66
	Mișcarea de rotație în jurul unei axe	67
2.4.6.	Teorema de variație a momentului cinetic	68
	Punct material	68

Sistem de puncte materiale	68
2.4.7. Teorema de conservare a momentului cinetic	68
Punct material	68
Sistem de puncte materiale	68
2.4.8. Lucrul mecanic	69
Lucrul mecanic al unei forțe constante	69
Lucrul mecanic al unei forțe variabile	69
Lucrul mecanic al unui sistem de puncte materiale	70
2.4.9. Energia cinetică	70
Punct material	70
Sistem de puncte materiale	70
2.4.10. Calculul energiei cinetice al CSR în diferite mișcări	72
Mișcarea de translație	72
Mișcarea de rotație în jurul unei axe	72
Mișcarea plan paralelă	73
2.4.11. Teorema de variație a energiei cinetice	73
Punct material	73
Sistem de puncte materiale	73
3. Mecanică analitică	74
3.1. Introducere	74
3.2. Legături aplicate sistemelor materiale	74
3.3. Clasificarea legăturilor	74
3.4. Clasificarea deplasărilor	75
3.5. Principiul lui d'Alembert	75
3.6. Torsorul forțelor de inerție	76
3.7. Calculul torsorului forțelor de inerție în mișcările particulare	77
3.7.1. Mișcarea de translație	77
3.7.2. Mișcarea de rotație cu axă fixă	77
3.7.3. Mișcarea plan paralelă	78

3.8. Principiul lucrului mecanic virtual	78
Bibliografie	80