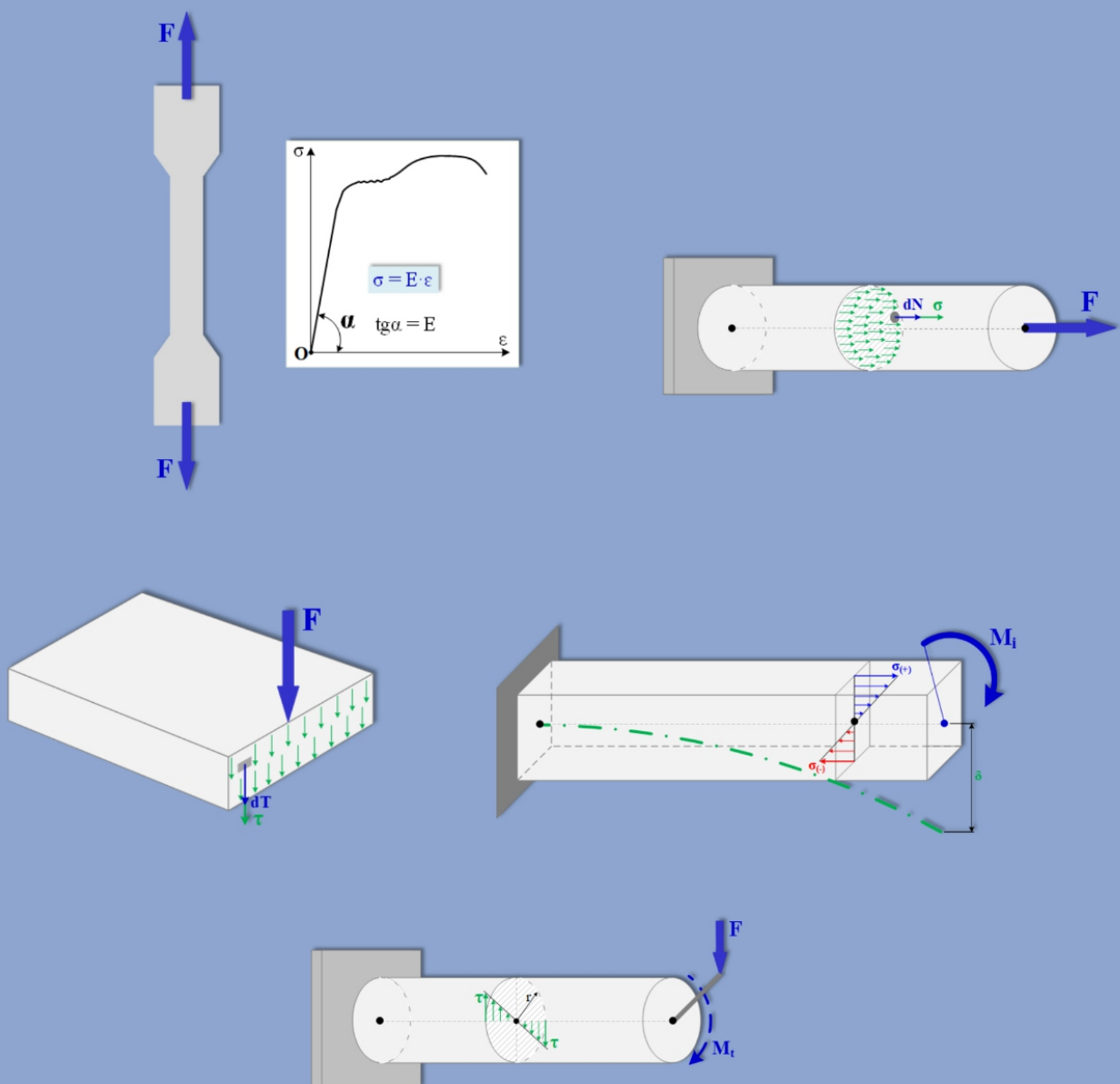


Mihaela SIMION

# REZISTENȚA MATERIALELOR I. SOLICITĂRI SIMPLE



U.T.PRESS  
Cluj-Napoca, 2025  
ISBN 978-606-737-799-6

**Mihaela SIMION**

**REZISTENȚA MATERIALELOR I.  
SOLICITĂRI SIMPLE**



**U.T.PRESS**  
**Cluj - Napoca, 2025**  
**ISBN 978-606-737-799-6**



Editura U.T.PRESS  
Str. Observatorului nr. 34  
400775 Cluj-Napoca  
Tel.: 0264-401.999  
e-mail: [utpress@biblio.utcluj.ro](mailto:utpress@biblio.utcluj.ro)  
[www.utcluj.ro/editura](http://www.utcluj.ro/editura)

Recenzia: Prof.dr.ing. Mihaela Suci  
Prof.dr.ing. Mircea-Cristian Dudescu

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2025 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-798-9

ISBN 978-606-737-799-6 vol. 1

## Prefață

Prezentul curs intitulat *Rezistența Materialelor I. Solicitări simple* prezintă noțiunile și conceptele de bază în domeniul disciplinei de *Rezistența Materialelor*, ramură a *Mecanicii Aplicate*, fiind destinat studenților de anul II, din cadrul facultăților cu profil mecanic și nu numai.

Materialul de curs este structurat pe 6 capitole și vizează noțiunile fundamentale ale solicitărilor simple la care sunt supuse corpurile deformabile. În deducerea relațiilor de calcul a stării de tensiuni și deformații, fiecare solicitare simplă se analizează în mod individual. În fiecare capitol se propun aplicații practice rezolvate, cu caracter didactic, astfel încât noțiunile fundamentale prezentate să fie cât mai ușor de înțeles.

Acest material de curs debutează cu un Capitol de *Noțiuni Introductive*, care are în vedere explicarea și definirea termenilor, respectiv a mărimilor mecanice specifice disciplinei de *Rezistența Materialelor*, astfel încât să faciliteze parcurgerea următoarelor capitole. În Capitolul 2 se analizează starea de tensiuni și deformații în cazul pieselor (barelor) solicitate axial (întindere și compresiune), respectiv se prezintă soluțiile teoretice de rezolvare a unor cazuri de aplicații static nedeterminate solicitate axial. Fenomenul de forfecare sau de tăiere a barelor plane este prezentat în Capitolul 3, în care se investighează, din punctul de vedere al dimensionării și verificării la rezistență, diferite elemente de îmbinare întâlnite uzual în componența sistemelor mecanice.

În Capitolul 4 se prezintă caracteristicile geometrice ale suprafețelor plane (secțiunilor transversale), caracteristici care sunt necesare pentru rezolvarea problemelor de încovoiere plană a grinzilor drepte. În Capitolul 5 se analizează variația eforturilor produse în secțiunea transversală a grinzilor, se prezintă deducerea relațiilor de calcul pentru starea de tensiuni iar, prin exemple teoretice la încovoiere, se prezintă metode uzuale de calcul a deformațiilor (deplasări și rotiri) în cazul grinzilor drepte.

Capitolul 6 este dedicat torsiunii barelor cu secțiune circulară constantă în care se expun relațiilor de calcul uzuale ale tensiunii care iau naștere în secțiunea barei, se detaliază calculul teoretic al arborilor de transmisie solicitați la torsiune, respectiv se propune un set de aplicații specifice rezolvate. La finalul suportului de curs se prezintă lista bibliografică consultată.

Unele imagini grafice, definiții/formulări respectiv relațiile teoretice ale unor aplicații au fost preluate de pe site-uri oficiale, respectiv din cărțile de specialitate publicate, fără alterarea conținutului pentru a nu se pierde esența, făcându-se trimitere la referința bibliografică.

Pentru asigurarea clarității și corectitudinii tehnice a materialului prezentat în paginile acestui material didactic, *Rezistența Materialelor I. Solicitări simple*, recenzia a fost realizată de cadre didactice cu experiență vastă în domeniul disciplinei de *Rezistența Materialelor* și al ingineriei mecanice.

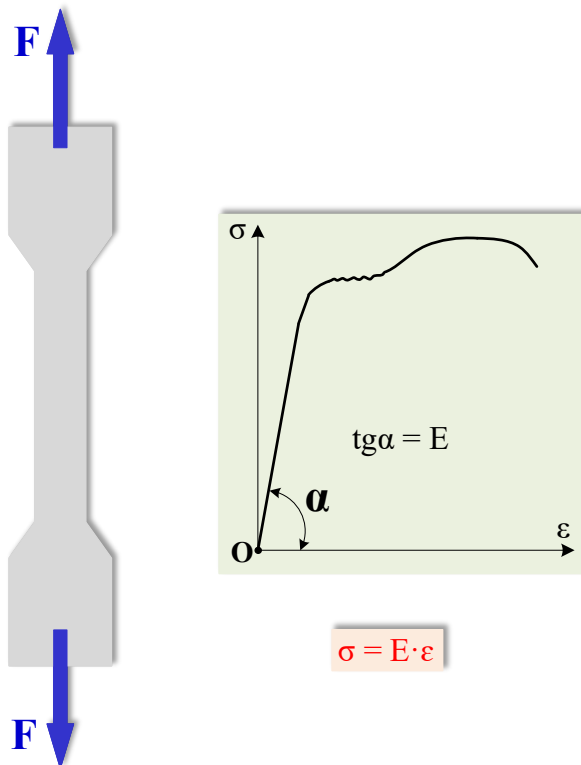
*Autorul*

# CUPRINS

<b>1. NOȚIUNI INTRODUCIVE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR</b>	<b>9</b>
1.1. Obiectivul disciplinei de Rezistența Materialelor	9
1.2. Clasificarea materialelor și a corpurilor solide	9
1.3. Ipoteze în Rezistența Materialelor	11
1.4. Solicitățile corpurilor solide	12
1.5. Tensiuni	20
1.6. Deformații și deplasări	21
1.7. Încercări mecanice. Legea lui Hooke	22
1.8. Rezistența admisibilă și coeficienți de siguranță	26
<b>2. SOLICITAREA AXIALĂ</b>	<b>31</b>
2.1. Noțiuni generale	31
2.2. Reacțiuni și eforturi la solicitarea axială	31
2.3. Tensiuni și deformații la solicitarea axială	34
2.4. Tensiuni și deformații la solicitări axiale ținând seama și de greutatea proprie a barei	40
2.5. Bară de egală rezistență la solicitarea axială: Soluția teoretică și soluția practică	41
2.6. Energia potențială de deformare la solicitarea axială	45
2.7. Bare și sisteme de bare static nedeterminate la solicitări axiale	46
<b>3. FORFECAREA</b>	<b>59</b>
3.1. Noțiuni generale	59
3.2. Determinarea deformațiilor la forfecare. Legea lui Hooke. Energia de deformare la forfecare	60
3.3. Aplicațiile forfecării: Calculul îmbinărilor	62
<b>4. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE</b>	<b>83</b>
4.1. Mărimi geometrice ale suprafețelor plane	83
4.2. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele	86
4.3. Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente	87
4.4. Momente de inerție principale și direcții principale	89
<b>5. ÎNCOVOIEREA PLANĂ A GRINZILOR DREPTE</b>	<b>101</b>
5.1. Noțiuni generale. Reazeme. Eforturi	101
5.2. Calculul eforturilor în secțiunea transversală a grinzilor	102
5.3. Tensiuni normale în grinzile solicitate la încovoiere	114
5.4. Tensiuni tangențiale în grinzile solicitate la încovoiere	119
5.5. Deformațiile grinzilor solicitate la încovoiere	139
<b>6. TORSIUNEA (RĂSUCIREA) BARELOR CU SECȚIUNE CIRCULARĂ ȘI INELARĂ</b>	<b>163</b>
6.1. Noțiuni generale	163
6.2. Calculul momentelor de torsiune și construcția diagramelor de variație	164
6.3. Tensiuni și deformații la torsiunea barelor drepte cu secțiune circulară	165
6.4. Calculul arborilor de transmisie solicitați la torsiune	168
6.5. Energia de deformare la solicitarea de torsiune	170
<b>7. REFERINȚE BIBLIOGRAFICE</b>	<b>179</b>
7.1. Bibliografie națională	179
7.2. Bibliografie internațională	180
7.3. Link-uri	180

# 1. NOȚIUNI INTRODUCIVE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

<b>1.1. Obiectivul disciplinei de Rezistența Materialelor</b>	9
<b>1.2. Clasificarea materialelor și a corpurilor solide</b>	9
<b>1.3. Ipoteze în Rezistența Materialelor</b>	11
<b>1.4. Sollicitările corpurilor solide</b>	12
<i>1.4.1. Sarcini exterioare și eforturi interioare</i>	12
<i>1.4.2. Reazeme și reacțiuni</i>	14
<i>1.4.3. Ecuații de echilibru</i>	15
<i>1.4.4. Metoda secțiunilor pentru calculul eforturilor</i>	18
<b>1.5. Tensiuni</b>	20
<b>1.6. Deformații și deplasări</b>	21
<b>1.7. Încercări mecanice. Legea lui Hooke</b>	22
<b>1.8. Rezistența admisibilă și coeficienți de siguranță</b>	26



# 1. NOȚIUNI INTRODUCATIVE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

## 1.1. Obiectivul disciplinei de Rezistența Materialelor

Disciplina de *Rezistența Materialelor* face parte din domeniul *Mecanicii* și se ocupă cu studiul comportamentului mecanic al corpurilor deformabile în diferite condiții de rezemare și solicitare exterioară. Disciplina stabilește metodele și algoritmii de calcul pentru determinarea eforturilor, tensiunilor și deformațiilor care apar în diferite secțiuni transversale ale corpului studiat ca urmare a solicitărilor exterioare, respectiv furnizează instrumentele teoretice necesare calculului dimensional în scopul prevenirii modificării semnificative a formei geometrice a corpurilor sub acțiunea sarcinilor externe.

În procesul de proiectare a unei piese sau a unei structuri mecanice, disciplina de *Rezistența Materialelor* operează cu *condiții fundamentale* pentru rezolvarea unei problematice specifice (*probleme fundamentale*), ambele detaliate în Figura 1.1.

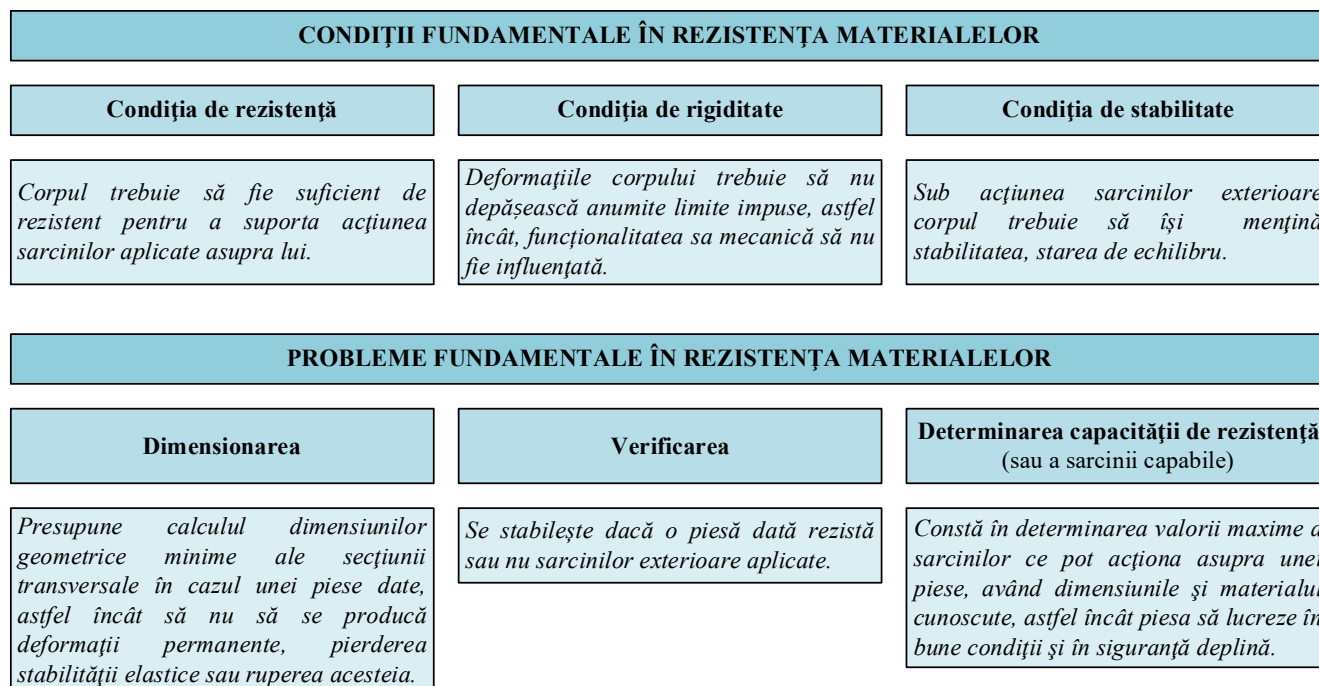


Fig. 1.1. Condiții și probleme fundamentale în Rezistența Materialelor

În rezolvarea problemelor Rezistenței Materialelor se au în vedere:

- *Aspectul static* - se stabilesc relații de legătură între sarcinile exterioare (aplicate) și eforturi interioare (forțe sau cupluri de forțe interioare), respectiv între eforturi și tensiuni.
- *Aspectul geometric* - se analizează deformațiile corpului sub acțiunea sarcinilor exterioare.
- *Aspectul fizic* - se determină pe cale experimentală relațiile de legătură (legile) dintre forțe și deformații, precum și caracteristicile mecanico-elastice ale materialului respectiv.

## 1.2. Clasificarea materialelor și a corpurilor solide

Dimensiunea geometrică a corpurilor, respectiv deformațiile sau stabilitatea acestora nu depind doar de eforturile interioare care se produc datorită solicitărilor mecanice exterioare, ci și de tipul materialului din care sunt confecționate. Dintre cele mai utilizate materiale din domeniul ingineriei mecanice se

amintesc: oțelul și aliajele de oțel, fonta, aliajele de aluminiu, cuprul și aliajelele lui, materialele compozite, materiale naturale (lemn, piatră), artificiale etc. Aceste materiale sunt caracterizate prin proprietăți mecanice care depind atât de structura lor internă (structura cristalină, orientarea grăunților etc.), cât și de procesul tehnologic de obținere a acestora. În Figura 1.2 este prezentată clasificarea generală a materialelor.

CLASIFICAREA MATERIALELOR		
După modul de comportare	După mărimea deformațiilor înainte de rupere	După valorile constantelor elastice (E, G, $\nu$ )
<p><b>Elastice</b> - deformațiile dispar după îndepărtarea solicitărilor exterioare corpul revenind la forma inițială. <i>Exemple: cauciuc, materiale textile elastice</i></p>	<p><b>Tenace</b> - deformațiile sunt mari înainte de rupere. <i>Exemple: Oțel de rezistență mică, cupru</i></p>	<p><b>Izotrope</b> - constantele elastice sunt identice în toate direcțiile. <i>Exemple: Oțel, sticlă, cauciuc</i></p>
<p><b>Plastice</b> - deformațiile sunt permanente iar după îndepărtarea solicitărilor exterioare corpurile nu revin la forma inițială. <i>Exemple: argilă umedă, plastilină</i></p>	<p><b>Casante sau fragile</b> - ruperea se produce brusc sub acțiunea sarcinilor exterioare. <i>Exemple: oțel de mare rezistență, fontă, beton, sticlă</i></p>	<p><b>Anizotrope</b> - constantele elastice sunt diferite în toate direcțiile. <i>Exemple: lemn, roci sedimentare</i></p>
<p><b>Elasto-plastice</b> - în urma solicitărilor exterioare, deformațiile sunt parțial elastice, respectiv parțial plastice. <i>Exemple: oțel, lemn, fontă</i></p>		

Fig. 1.2. Clasificarea materialelor

Corpurile deformabile sau piesele mecanice care intră în componența structurilor mecanice, de cele mai multe ori, prezintă o geometrie complexă și sunt dificil de studiat. De aceea, din perspectiva disciplinei de *Rezistența Materialelor* pentru efectuarea calculelor teoretice se recurge la schematizări ale acestor piese, adică la corpuri solide deformabile cu geometrii simple, cunoscute. Astfel, corpurile solide deformabile întâlnite în calculele de rezistență, se pot clasifica în trei categorii generale:

(a) **Bare** (Figura 1.3), la care una din dimensiuni (lungimea,  $l$ ) este mai mare în raport cu celelalte dimensiuni (lățimea,  $b$  și înălțimea,  $h$ ) și sunt caracterizate prin:

- *axa longitudinală* sau *axa geometrică* (axa  $x$ ) reprezentată prin dreapta  $OO'$ , care unește centrele de greutate ale secțiunilor normale pe lungimea barelor. După forma axei longitudinale barele pot fi *drepte (grinzi)*, *curbe în plan* sau *curbe în spațiu*.
- *secțiune longitudinală*, care se obține prin secționarea barei cu un plan (planul  $xOz$ ), care cuprinde sau este paralelă cu axa longitudinală sau geometrică a acesteia.
- *secțiune transversală*, rezultată în urma intersecției barei cu un plan normal sau perpendicular pe axa longitudinală. O secțiune transversală dreptunghiulară este definită de lățimea ( $b$ ) și înălțimea ( $h$ ).

*Exemple: țevi, profile etc.*

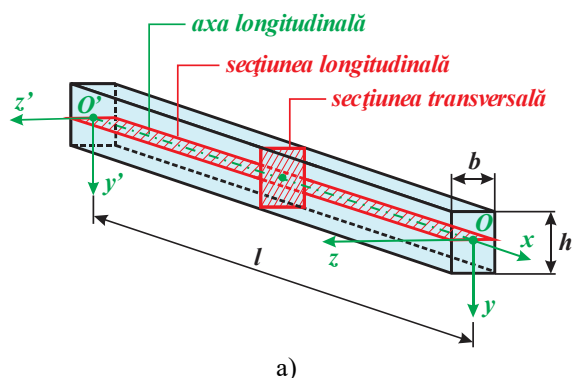


Fig. 1.3. a) Bară dreaptă cu secțiunea dreptunghiulară: Forma schematizată; b) Profil IPN [27]



(b) **Plăcile** (Figura 1.4), care prezintă două dimensiuni (lăţimea,  $b$  şi lungimea,  $l$ ) mai mari în raport cu o a treia (grosimea sau înălţimea,  $h$ ) şi sunt caracterizate de *suprafaţa mediană* (suprafaţa egal depărtată de feţele plăcii). Exemple: plăci din metale, lemn, beton, materiale compozite etc.

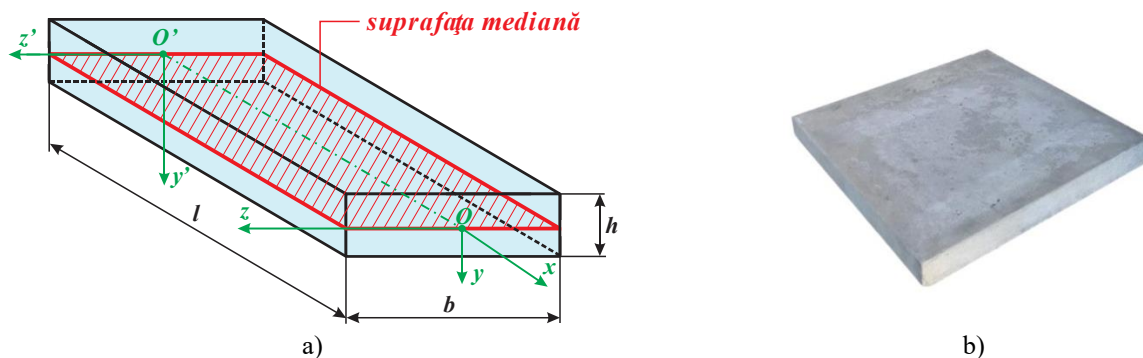


Fig. 1.4. Placă dreaptă: a) Schematizare; b) Exemplu real: placă din beton [28]

(c) **Corpuri masive sau blocuri** (Figura 1.5) la care toate cele trei dimensiuni (lungimea, lăţimea şi grosimea sau înălţimea) au acelaşi ordin de mărime. Exemple: fundaţii, bile, role de rulmenţi etc.



Fig. 1.5. Corpuri masive sau blocuri: a) Schematizare; b) Batiul unei maşini unelte CNC [29]

### 1.3. Ipoteze în Rezistenţa Materialelor

În foarte multe situaţii corpurile sunt supuse unor solicitări mecanice complexe, astfel că este dificilă obţinerea unor relaţii de calcul de dimensionare, verificare sau pentru determinarea deformaţiilor. Pentru simplificarea abordărilor (cu menţinerea echivalenţei), în calculele specifice se utilizează anumite *ipoteze simplificatoare* care au în vedere proprietăţile materialelor şi comportarea mecanică a acestora lor sub acţiunea sarcinilor exterioare (Tabelul 1.1).

Tabelul 1.1. Ipoteze simplificatoare în Rezistenţa Materialelor

Nr.crt.	Denumirea Ipotezei	Definiţie
1.	<i>Ipoteza mediului continuu</i>	Întregul volum geometric al corpului este umplut cu materie, şi care prezintă o structură internă continuă.
2.	<i>Ipoteza omogenităţii</i>	Materialele au aceeaşi compoziţie în toate punctele.
3.	<i>Ipoteza izotropiei</i>	Materialele au aceleaşi proprietăţi elastice în toate direcţiile.
4.	<i>Ipoteza elasticităţii perfecte</i>	Până la o anumită limită a sarcinilor exterioare, deformaţiile dispar complet odată cu îndepărtarea acestora, iar corpul îşi reia forma şi dimensiunile iniţiale.
5.	<i>Ipoteza deformaţiilor mici</i>	În domeniul elastic deformaţiile sunt mici în comparaţie cu dimensiunile corpului.
6.	<i>Valabilitatea legii lui Hooke</i>	În domeniul elastic de solicitare se admite că tensiunile sunt direct proporţionale cu deformaţiile şi sunt exprimate de o funcţie liniară.

7.	<i>Ipoteza lui Barre de Saint Venant</i>	Efectul aplicării forțelor se neglijează la distanțe mari de locul aplicării.
8.	<i>Ipoteza lui Bernoulli</i>	O secțiune transversală plană și normală pe axa barei înainte de deformare rămâne tot plană și normală pe axă și după deformare.

## 1.4. Solicitățile corpurilor solide

### 1.4.1. Sarcini exterioare și eforturi interioare

*Sarcinile exterioare* sunt solicitări aplicate corpurilor sau structurilor mecanice care conduc la apariția eforturilor și tensiunilor, respectiv produc deformarea acestora. În Figura 1.6 se prezintă o clasificare sintetizată a sarcinilor exterioare, iar în Figura 1.7 se prezintă cele mai utilizate tipuri de sarcini exterioare aplicate unui corp plan în *Rezistența Materialelor*, respectiv modul de simbolizare a acestora.

CLASIFICAREA SARCINILOR EXTERIOARE		
După locul de aplicare	După mărimea suprafeței	După modul de acțiune în timp
De suprafață sau de contur și acționează din exterior către corpul de solicitat.	<b>Concentrate</b> , care pot fi <i>forțe</i> (F) și <i>momente</i> (M).	<b>Statice</b> – sarcinile exterioare nu variază în timp.
Masice care pot fi greutatea proprie a corpului, respectiv forțele de inerție și acționează în interiorul corpului.	<b>Distribuite</b> : - <i>liniar</i> (q), acțiunea unei forțe pe o unitate de lungime - <i>pe suprafață</i> (Q), acțiunea unei forțe pe o arie.	<b>Dinamice</b> – variația sarcinilor exterioare se face în timp. <i>Exemplu: forța de inerție</i>

Fig. 1.6. Clasificarea sarcinilor exterioare

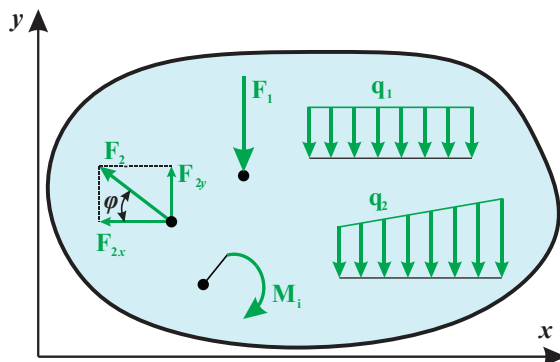


Fig. 1.7. Sarcini exterioare (exemple și simbolizări)

În Figura 1.7 s-au notat:

- $F_1$  – forță concentrată verticală (acționează după axa  $y$ )
- $F_2$  – forță concentrată înclinată cu unghiul ( $\varphi$ )
- $F_{2x}, F_{2y}$  – componentele forței concentrate ( $F_2$ )
- $q_1$  – sarcină uniform distribuită
- $q_2$  – sarcină distribuită liniar
- $M_i$  – moment încovoietor concentrat.

▪ **Forța concentrată ( $F$ )** reprezintă este o mărime vectorială ce exprimă o acțiune mecanică aplicată într-un punct sau pe o zonă foarte mică a unui corp solid, generând un sistem de solicitări interne în material (tensiuni și deformări). Aceasta poate fi rezultatul contactului punctual între corpuri sau al unei sarcini aplicate local. Unitatea de măsură a forței în S.I. este Newton, [N].

Forța se poate calcula ca fiind produsul dintre masa și accelerația (Principiul al II-lea a lui Newton):

$$F = m \cdot a \quad (\text{sau } F = m \cdot g) \quad (1.1)$$

unde:  $g$  este accelerația gravitațională,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

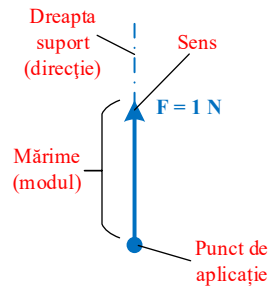


Fig. 1.8. Elementele forței concentrate

În mecanica generală, forța ( $F$ ) este descrisă ca un vector liniar caracterizat prin: *mărime* (valoare, modul), *dreapta suport* (direcție), *sens* (orientarea pe direcție), *punct de aplicație* bine definit (Figura 1.8).

▪ **Momentul unei forțe ( $M$ )** este o mărime fizică vectorială care măsoară efectul de rotire în jurul unui punct sau axă pe care o forță îl are asupra unui corp, iar unitatea de măsură în S.I. este  $[N \cdot mm]$ .

Prin definiție, momentul este produsul dintre forța aplicată și brațul forței:  $M = F \cdot b_F$ . Brațul forței ( $b_F$ ) reprezintă mărimea perpendicularei (distanța) de la punctul față de care se calculează momentul la dreapta suport a forței (Figura 1.9).



Fig. 1.9. Evidențierea brațului forței ( $b_F$ ) și a momentului concentrat în punctul 2

Dacă sub acțiunea unei forțe se produce o deformare prin îndoire în jurul unei axe perpendiculare pe planul forței atunci momentul se numește *moment de încovoiere* ( $M_i$ ). Momentul de încovoiere produce *curbarea* (*îndoirea*) corpului. Spre exemplu, în Figura 1.10, forța aplicată ( $F$ ) la distanța ( $b_f$ ) generează în punctul 1 (de sprijin) momentul de încovoiere ( $M_i$ ). Momentul de încovoiere ( $M_i$ ) este egal cu produsul dintre forță ( $F$ ) și brațul forței ( $b_f$ ), respectiv produce curbarea sau îndoirea piesei în jurul axei ( $z$ ).

Dacă forța aplicată ( $F$ ) produce rotirea unei secțiuni în raport cu o axă perpendiculară pe secțiune momentul se numește *moment de torsiune* ( $M_t$ ). Momentul de torsiune produce *răsucire* sau *rotire* în jurul axei proprii. În Figura 1.11, momentul de torsiune ( $M_t$ ) produce rotirea/răsucirea șurubului în raport cu axa ( $z$ ).

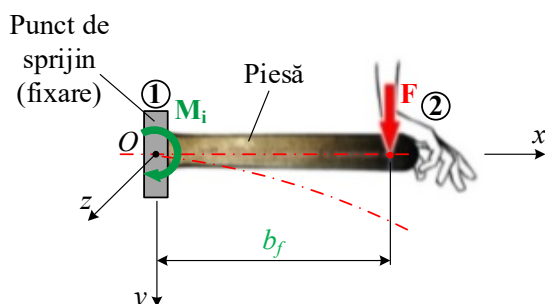


Fig. 1.10. Moment de încovoiere (exemplu) [30]

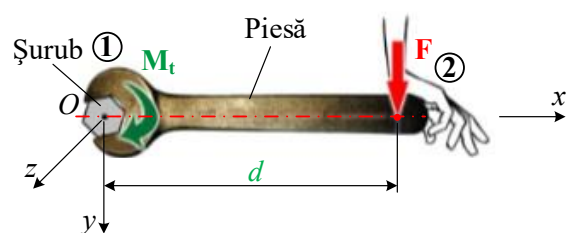


Fig. 1.11. Moment de torsiune (exemplu) [30]

▪ **Sarcina uniform distribuită ( $q$ )** reprezintă forța uniform distribuită pe unitatea de lungime ( $l$ ) (Figura 1.12) sau distribuită pe suprafața cu aria ( $A$ ) (Figura 1.13), iar unitatea de măsură în S.I. este  $[N/mm]$ , respectiv  $[N/mm^2]$ .

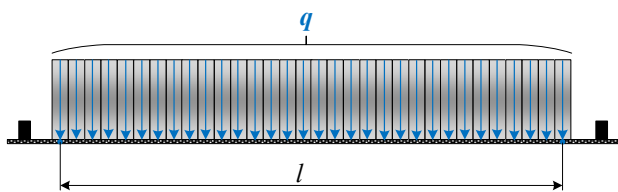


Fig. 1.12. Sarcina ( $q$ ) uniform distribuită pe lungimea ( $l$ )

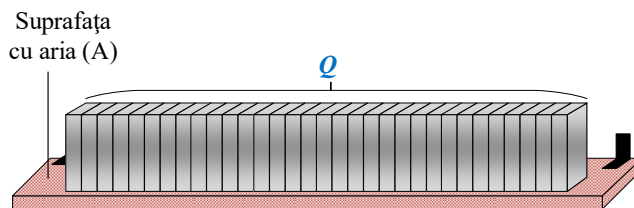


Fig. 1.13. Sarcina ( $Q$ ) uniform distribuită pe suprafața ( $A$ )

### 1.4.2. Reazeme și reacțiuni

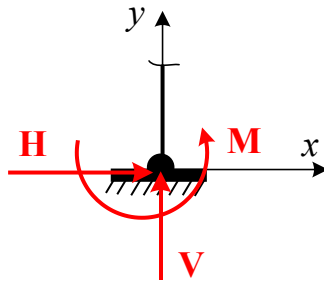
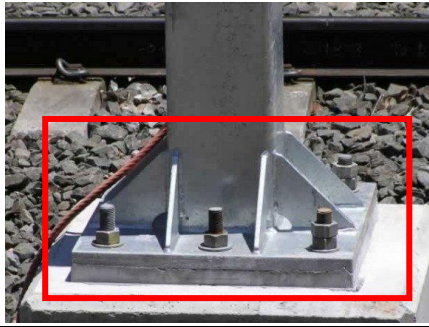
În legăturile corpului solid cu mediul extern, respectiv în punctele de sprijin ale acestuia numite *reazeme*, ca răspuns la încărcările externe aplicate se dezvoltă forțe și momente numite *reacțiuni*. Reazemele sunt componente mecanice care au rolul de a asigura stabilitatea pieselor și structurilor mecanice, respectiv de a transmite solicitările exterioare către baza structurii/piesei sau către alte părți ale structurii. În funcție de construcția mecanică a acestora, un reazem poate bloca (anula) mișcările de translație și rotație după anumite axe ( $x,y,z$ ). Într-un plan, un reazem poate anula mișcările de translație după două axe (axa  $x$  și/sau axa  $y$ ), respectiv mișcarea de rotație după a treia axă (axa  $z$ ). Pe direcția mișcărilor de translație blocate apar forțe de reacțiune: reacțiunea orizontală ( $H$ ) și/sau reacțiunea verticală ( $V$ ). În mod similar, dacă este blocată mișcarea de rotație (rotația după axa  $z$ ), în reazem apare un moment ca reacțiune ( $M$ ).

În Tabelul 1.2 sunt prezentate reazemele în plan care introduc maxim trei necunoscute (reacțiuni) în aplicații, respectiv simbolizarea acestora, numărul de grade de mobilitate (libertate) permise și reacțiunile specifice.

Tabelul 1.2. Reazeme și reacțiuni [31, 32]

Reazem real	Schematizare	Observații
<b>1. Reazem simplu sau mobil</b>		
	<p>a)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Permite: o rotație în jurul axei articulației (<math>R_z</math>) și o translație orizontală (<math>T_x</math>) sau verticală (<math>T_y</math>).</li> <li>▪ Necunoscute: introduce o singură necunoscută, reacțiunea verticală (<math>V</math>), dacă reazemul se montează în plan orizontal (reprezentarea a) sau orizontală (<math>H</math>), dacă reazemul se montează în plan vertical (reprezentarea b).</li> </ul>
	<p>b)</p>	
<b>2. Reazem fix sau articulat</b>		
		<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Permite: o rotație în jurul axei articulației (<math>R_z</math>).</li> <li>▪ Necunoscute: introduce două necunoscute, reacțiunea orizontală (<math>H</math>) și verticală (<math>V</math>).</li> </ul>

### 3. Reazem încastrat



▪ Permite: zero mișcări, toate gradele de mișcare/de libertate sunt blocate (anulate).

▪ Necunoscute: introduce trei necunoscute, reacțiunea orizontală (H), reacțiunea verticală (V), respectiv momentul (M).

#### 1.4.3. Ecuații de echilibru

În cazul general al corpurilor sau structurilor supuse legăturilor mecanice (reazeme) apare necesitatea determinării forțelor și momentelor care apar în aceste legături (reacțiuni) sub efectul sarcinilor externe. Dacă un corp se află în stare de echilibru mecanic (stare de repaus), atunci suma tuturor forțelor, respectiv suma tuturor momentelor care acționează asupra acestuia sunt nule. Astfel, în cazul problemelor plane, pentru determinarea necunoscutelor, care pot fi reacțiunile din reazeme (H, V, M), se aplică ecuațiile de echilibru statice din *Mecanica solidului rigid*, exprimate prin relațiile generale:

$$\sum F = 0; \sum M_O = 0 \quad (1.2)$$

În planul  $xOy$ , condițiile de echilibru ale corpului solid se reduc la trei ecuații de echilibru:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_O = 0 \quad (1.3)$$

*Calculul reacțiunilor din ecuațiile de echilibru (1.3) presupune în prealabil identificarea fiecărui tip de reazem, respectiv a numărului de necunoscute (reacțiuni) introduse de aceasta.*

Relațiile (1.2) reprezintă ecuațiile de echilibru generale, unde termenii  $\sum F$ ,  $\sum M_O$  reprezintă suma tuturor forțelor, respectiv suma tuturor momentelor ce acționează asupra corpului. Relațiile (1.3) sunt ecuațiile de echilibru valabile în planul vertical  $xOy$ , în care termenii reprezintă:  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  – suma algebrică a forțelor ce acționează după axa (x), respectiv după axa (y);  $\sum M_O$  – suma algebrică a momentelor de încovoiere în raport cu un punct O. Cu ecuațiile de echilibru (1.3) se pot calcula trei necunoscute (reacțiunile): reacțiunea orizontală (H), reacțiunea verticală (V) și momentul (M).

Pentru calculul reacțiunilor se parcurg următoarele etape:

- Se introduce sistemul de axe plan,  $xOy$ , astfel: axa (x) – axa orizontală (sau axa longitudinală), axa (y) – axa verticală (perpendiculară pe axa x)
- Se identifică sarcinile exterioare
- Se notează (numerează) punctele de aplicație ale reazemelor și ale sarcinilor exterioare
- Se identifică tipul reazemelor și se introduc necunoscutele (reacțiunile în reazeme)
- Se stabilește semnul forțelor și momentelor
- Se aplică relațiile de echilibru (1.3) pentru calculul reacțiunilor din reazeme
- Se efectuează calculul de verificare.

**Aplicația 1-1.** Pentru grinda încadrată din Figura 1.14, solicitată la încovoiere de forța ( $F$ ) (înclinată cu unghiul  $\alpha$ ), se cere calculul reacțiunilor ( $H_1, V_1, M_1$ ). Se cunosc: lungimea grinzii ( $l$ ); valoarea forței ( $F$ ) și unghiul de înclinare ( $\alpha$ ).

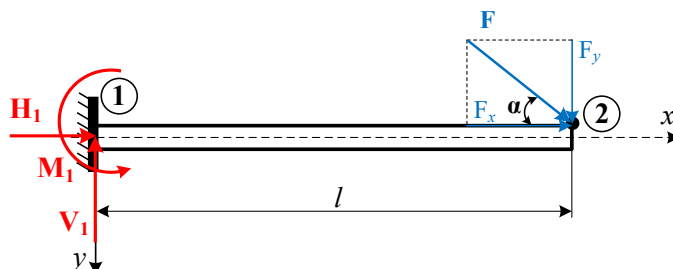


Fig. 1.14. Grindă încadrată solicitată la încovoiere de o forță înclinată

**Rezolvare.** Pentru calculul reacțiunilor din încastrare ( $H_1, V_1, M_1$ ) se aplică etapele a-g.

Forța înclinată ( $F$ ) se descompune după cele două axe ( $x$  și  $y$ ), rezultând două componente ( $F_x$  și  $F_y$ ), care se pot calcula astfel:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha; \quad F_y = F \cdot \sin\alpha$$

Pentru grinda încadrată, pentru calculul reacțiunilor ( $H_1, V_1, M_1$ ) se aplică ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_1 + F_x = 0; \quad H_1 + F \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow H_1 = -F \cdot \cos\alpha \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_1 - F_y = 0; \quad V_1 - F \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow V_1 = F \cdot \sin\alpha \\ \sum M_1 = 0 &\Rightarrow -M_1 + F_y \cdot l = 0; \quad -M_1 + F \cdot \sin\alpha \cdot l = 0 \Rightarrow M_1 = F \cdot \sin\alpha \cdot l \end{aligned}$$

Cunoscându-se reacțiunile, se efectuează calculul de verificare, astfel:

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -M_1 + V_1 \cdot l = 0; \quad -F \cdot \sin\alpha \cdot l + F \cdot \sin\alpha \cdot l = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ &\Rightarrow \text{reacțiunile s-au calculat în mod corect.} \end{aligned}$$

**Aplicația 1-2.** Pentru grinda încadrată și solicitată la încovoiere de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) (Figura 1.15) se cere calculul reacțiunilor ( $H_1, V_1, M_1$ ). Se cunosc: lungimea grinzii ( $l$ ); lungimea ( $a$ ) pe care acționează sarcina uniform distribuită, valoarea sarcinii uniform distribuite ( $q$ ).

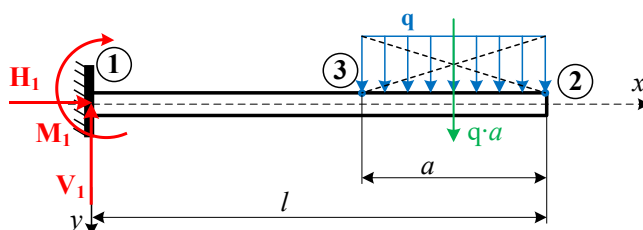


Fig. 1.15. Grindă încadrată solicitată la încovoiere de o sarcină uniform distribuită

**Rezolvare.** Pentru efectuarea cu ușurință a calculelor, sarcina uniform distribuită ( $q$ ) se reduce la o forță concentrată aplicată în centrul de greutate al dreptunghiului și se calculează ca produsul dintre valoarea sarcinii uniform distribuite, ( $q$ ) și distanța pe care acționează (distanța notată cu  $a$  în acest exemplu de calcul); adică:  $Q = q \cdot a$ .

Pentru grinda încadrată, pentru calculul reacțiilor ( $H_1$ ,  $V_1$ ,  $M_1$ ) se aplică ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - q \cdot a = 0 \Rightarrow V_1 = q \cdot a$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 + q \cdot a \left( l - \frac{a}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -q \cdot a \left( l - \frac{a}{2} \right)$$

**Observație:** (1) Termenul  $\left( l - \frac{a}{2} \right)$  reprezintă brațul forței ( $q \cdot a$ ), adică distanța de la forță ( $q \cdot a$ ) la punctul 1 – punctul în care se calculează momentul. De asemenea, termenul  $\left( \frac{a}{2} \right)$  apare deoarece când se reduce sarcina ( $q$ ) la o forță concentrată de valoare ( $q \cdot a$ ), această forță concentrată acționează în centrul de greutate al dreptunghiului, adică la distanța  $\left( \frac{a}{2} \right)$  față de punctele 2 și 3 (care delimitează distanța pe care acționează  $q$ ).

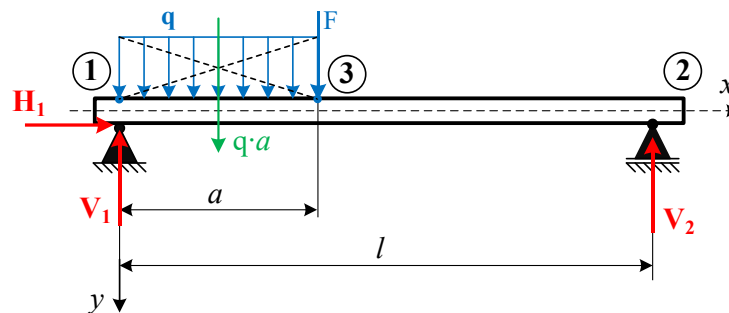
După ce s-au obținut reacțiunile, în mod obligatoriu se face un calcul de verificare, astfel:

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M_1 + V_1 \cdot l - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$-q \cdot a \left( l - \frac{a}{2} \right) + q \cdot a \cdot l - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow -q \cdot a \cdot l + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q \cdot a \cdot l - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0$$

Rezultatele obținute sunt confirmate, respectiv verifică ecuația de momente în raport cu punctul 2.

*Aplicația 1-3.* Pentru grinda simplu rezemată din Figura 1.16, solicitată la încovoiere de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) și de forța concentrată ( $F$ ), se cere calculul reacțiilor din reazeme ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $V_2$ ). Se cunosc: lungimea grinzii ( $l$ ); lungimea ( $a$ ) pe care acționează sarcina uniform distribuită, valorile solicitărilor exterioare ( $q$ ) și ( $F$ ).



**Fig. 1.16.** Grindă simplu rezemată solicitată la încovoiere de o sarcină uniform distribuită și de o forță

*Rezolvare.* Se calculează cele două reacțiuni verticale ( $V_1$ ) și ( $V_2$ ) scriind două ecuații de moment în raport cu punctele 1 și 2, ce reprezintă reazemele. Se obține:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot a - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{l} \left( q \cdot \frac{a^2}{2} + F \cdot a \right)$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) - F \cdot (l - a) = 0$$

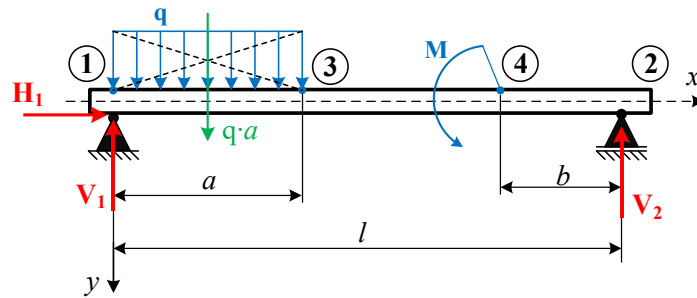
$$V_1 = \frac{1}{l} \left[ q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) + F \cdot (l - a) \right]$$

Se efectuează calculul de verificare:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - q \cdot a - F = 0$$

$$q \cdot a - \frac{q \cdot a^2}{l} + F - \frac{F \cdot a}{l} + \frac{q \cdot a^2}{l} + \frac{F \cdot a}{l} - q \cdot a - F = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

*Aplicația 1-4.* Pentru grinda simplu rezemată (Figura 1.17), solicitată la încovoiere de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) și de momentul concentrat ( $M$ ), se cere calculul reacțiilor ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $V_2$ ). Se cunosc: lungimile ( $l$ ,  $a$ ,  $b$ ), valorile solicitărilor exterioare ( $q$ ) și ( $M$ ).



**Fig. 1.17.** Grindă simplu rezemată solicitată la încovoiere de o sarcină uniform distribuită și de un moment concentrat

Ca și în cazul exemplului anterior, se calculează reacțiunile verticale ( $V_1$ ) și ( $V_2$ ) scriind două ecuații de moment în raport cu reazemele din punctele 1 și 2, respectiv se efectuează la final calculul de verificare:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{l} \left( q \cdot \frac{a^2}{2} - M \right)$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) - M = 0$$

$$V_1 = \frac{1}{l} \left[ q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) + M \right]$$

Verificare:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - q \cdot a = 0 \Rightarrow q \cdot a - \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot l} + \frac{M}{l} + \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot l} - \frac{M}{l} - q \cdot a = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

#### 1.4.4. Metoda secțiunilor pentru calculul eforturilor

Studiul și calculul eforturilor (forțe și/sau momente) dintr-o secțiune transversală a unui corp deformabil, supus solicitărilor exterioare în domeniul elastic, reprezintă una din problemele principale ale disciplinei de *Rezistența Materialelor*.

Eforturile, care pot fi forțe și/sau momente, se dezvoltă în interiorul corpurilor ca urmare a unor solicitări mecanice exterioare, având intensități variabile în diferite puncte.

Pentru studiul eforturilor, se consideră corpul solid din Figura 1.18 solicitat de forțele exterioare ( $F_1 \div F_5$ ), aflat într-o stare de echilibru static. Eforturile care iau naștere în interiorul corpului solid pot fi investigate prin aplicarea unei tehnici fundamentale în domeniul *Rezistenței Materialelor*, denumită *metoda secțiunilor*. Aplicarea metodei implică următoarele etape:

(1) *Secționarea corpului:* presupune aplicarea unui plan imaginar, numit *planul secțiunii*, perpendicular pe axa longitudinală a corpului solid supus solicitărilor exterioare, în zona de interes în care se dorește



determinarea eforturilor. Se realizează secționarea imagină a acestuia, rezultând două secțiuni: Secțiunea A și Secțiunea B (Figura 1.18). Se îndepărtează una din cele două secțiuni (Secțiunea A), rămânând spre studiu celalaltă secțiune, Secțiunea B.

(2) Se înlocuiește acțiunea forțelor exterioare corespunzătoare secțiunii înlăturată (forțele  $F_1$  și  $F_2$  care solicită Secțiunea A) cu *forțe distribuite echivalente*, astfel încât să se păstreze starea de echilibru a secțiunii rămase (Secțiunea B) (Figura 1.19).

(3) *Evidențierea eforturilor*: eforturile corespunzătoare secțiunii rămase (Secțiunea B) se reduc în centrul de greutate al secțiunii transversale la un *torsor de eforturi* (forță  $F_R$  și moment  $M_R$ ), care echivalează acțiunea forțelor exterioare ce solicită secțiunea înlăturată (Figura 1.20).

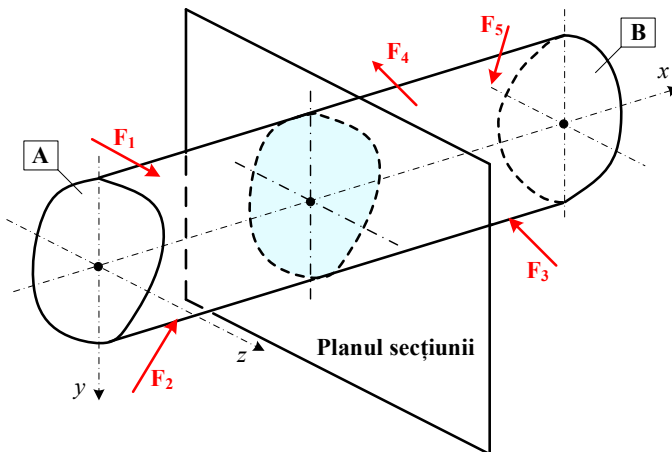


Fig. 1.18. Corp secționat cu un planul vertical (Planul secțiunii)

▫ Corpul solicitat de sistemul de forțe ( $F_1 \div F_5$ ) se secționează cu un plan perpendicular pe axa sa longitudinală rezultând două secțiuni, notate în Figura 1.18 cu A și B.

▫ Înainte de secționare, corpul se află în echilibru static.

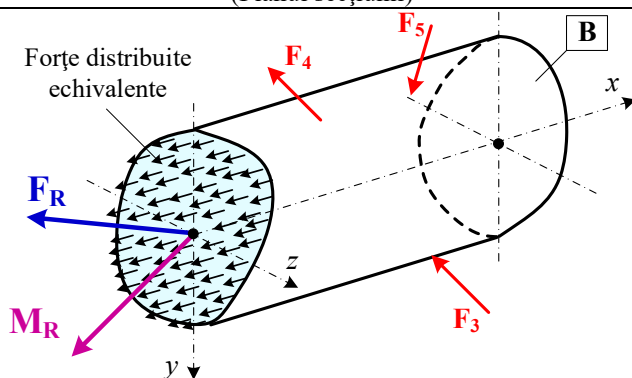


Fig. 1.19. Forțe echivalente distribuite în Secțiunea B. Torsorul de eforturi:  $F_R$  și  $M_R$

▫ Se păstrează una din cele două secțiuni, adică Secțiunea B.

▫ Acțiunea Secțiunii A asupra lui B se reduce la un *torsor de eforturi* aplicat în centrul de greutate al secțiunii, pentru menținerea stării de echilibru inițial.

Torsorul de eforturi este format din *forța rezultantă* ( $F_R$ ) și *momentul rezultant* ( $M_R$ ).

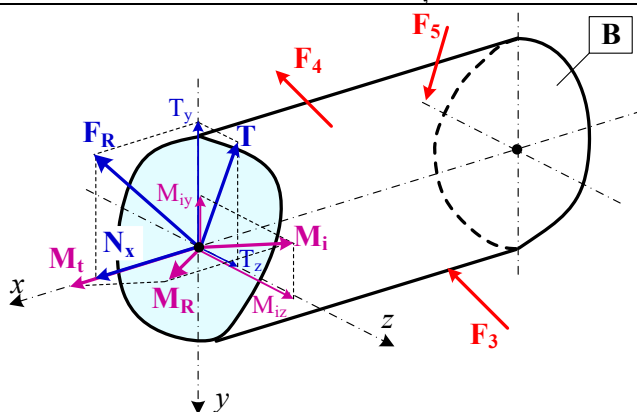


Fig. 1.20. Componentele torsorului eforturilor

▫ Forța rezultantă ( $F_R$ ) se descompune în componentele:

- Forța axială ( $N_x$ )
- Forța tăietoare ( $T$ ), cu componentele ( $T_y$ ) și ( $T_z$ )

▫ Momentul rezultant ( $M_R$ ) se descompune în componentele:

- Momentul de încovoiere ( $M_i$ ) (cu componentele  $M_{iz}$ ;  $M_{iy}$ )
- Momentul de torsiune ( $M_t$ ).

(4) Torsorul ( $F_R$ ) și ( $M_R$ ) (Figura 1.20) se descompune în următoarele componente (Tabelul 1.3):

Tabelul 1.3. Componentele torsorului de eforturi

Componenta $F_R$		Componenta $M_R$	
Forța axială (N)	Forța tăietoare (T)	Momentul de torsiune ( $M_t$ )	Momentul de încovoiere ( $M_i$ )
Este normală la secțiune, fiind dirijată după axa (x) și care soliciță corpul la întindere/compresiune.	Este cuprinsă în planul secțiunii și are componentele ( $T_y$ ) și ( $T_z$ ); soliciță corpul la forfecare sau tăiere.	Este normal (perpendicular) la secțiune și soliciță corpul la torsiune sau răsucire.	Este cuprins în planul secțiunii și are componentele ( $M_{iy}$ ) și ( $M_{iz}$ ); soliciță corpul la încovoiere (după axa z și y).

### 1.5. Tensiuni

Se consideră un corp solid supus solicitărilor de forțele exterioare ( $F_1 \div F_3$ ) având secțiunea transversală cu aria (A), formată din arii elementare ( $\Delta A$ ), perpendiculară pe axa longitudinală (x), (Figura 1.21). Pentru studiul eforturilor și al tensiunilor, se consideră că materialul din care este realizat corpul este un mediu continuu, adică materia internă este uniform distribuită în toate direcțiile, iar eforturile care acționează în secțiunile transversale ale corpului sunt, la rândul lor, uniform repartizate. În centrul de greutate al suprafeței elementare ( $\Delta A$ ) acționează forța internă elementară ( $\Delta F$ ).

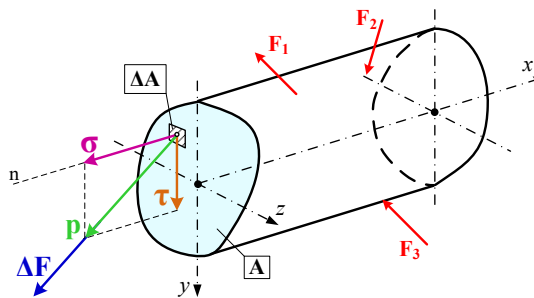


Fig. 1.21. Tensiuni în secțiunea transversală

Se definește efortul ce revine unității de suprafață prin relația:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.4)$$

În contextul disciplinei de *Rezistența Materialelor*, o definiție uzuală a tensiunii sau a efortului unitar este prezentată astfel: *efortul care revine unității de suprafață*, exprimat matematic ca *limita raportului dintre efortul ( $\Delta F$ ) și aria elementară ( $\Delta A$ ) când aceasta tinde către zero* (relația 1.4). Cu alte cuvinte, tensiunea este o mărime mecanică ce exprimă distribuția forțelor interioare, numite *eforturi*, care apar într-un corp atunci când acesta este supus unei solicitări exterioare. Aceste eforturi acționează pentru a împiedeca deformarea materialului, „rezistând” la schimbările de formă sau dimensiuni cauzate de forțele exterioare. Tensiunea măsoară cât de mult se opune materialul deformării atunci când este solicițat și se definește în termeni generali ca fiind *raportul dintre efortul care acționează pe o suprafață internă a materialului și aria acelei suprafețe*. Tensiunea într-o secțiune oarecare a unui corp nu poate fi măsurată experimental în mod direct, ci se obține indirect, prin măsurarea experimentală a altor mărimi mecanice (de regulă, deformațiile specifice) și prin utilizarea relațiilor teoretice de calcul care definesc tensiunea în acea secțiune.

Cunoașterea tensiunii totale (p) depinde de cunoașterea efortului din care s-a dedus (adică mărimea, direcția și sensul vectorului  $\Delta F$ ) și de orientarea suprafeței elementare ( $\Delta A$ ), definită de cele trei cosinusuri directe ale normalei la element. Tensiunea totală (p) are o direcție oarecare și se descompune în (Tabelul 1.4):

Tabelul 1.4. Componentele tensiunii totale

Tensiunea totală (p)	
Tensiunea normală (σ)	Tensiunea tangențială (τ)
Este tensiunea normală sau perpendiculară la secțiunea transversală și are direcția axei longitudinale sau geometrice a corpului solid. Efectul tensiunii normale este <i>de întindere</i> (dacă tensiunea iese/trage de secțiunea transversală) sau <i>de compresiune</i> (dacă tensiunea normală intră în secțiune). Unitatea de măsură în SI: [MPa] sau [N/mm <sup>2</sup> ]	Este tensiunea tangență la secțiunea transversală, respectiv tensiunea aflată în planul secțiunii transversale, iar direcția tensiunii este perpendiculară pe axa longitudinală a corpului solid. Efectul tensiunii tangențiale este de forfecare (tăiere sau lunecare). Unitatea de măsură în SI: [MPa] sau [N/mm <sup>2</sup> ]

Între cele trei tensiuni (p, σ, τ) există relația geometrică:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.5)$$

În studiul corpurilor deformabile, cunoașterea stării de tensiuni (σ, τ) este necesară pentru a evalua capacitatea unui material de a se opune solicitărilor mecanice, astfel încât să se evite deformarea peste anumite limite admisibile sau chiar ruperea acestora.

### 1.6. Deformații și deplasări

*Deformația* este o mărime mecanică care descrie modificarea formei sau a dimensiunilor unui corp sub acțiunea forțelor exterioare, fără a altera cantitatea de material și este o caracteristică mecanică importantă în înțelegerea comportamentului materialelor în diferite condiții de solicitare și rezemare.

Deformațiile depind de forma și de dimensiunile piesei, de mărimea, de modul de aplicare a sarcinilor exterioare și de caracteristicile mecanice ale materialului din care este confecționată piesa. Deformațiile se pot clasifica (Tabelul 1.5):

Tabelul 1.5. Clasificarea deformațiilor

Deformații	
Deformații liniare (Δl)	Deformații unghiulare (γ)
Constau în modificarea lungimii corpurilor (lungiri sau scurtări) supuse la solicitări exterioare (Figura 1.22). Unitatea de măsură în SI: [mm]	Constau în modificarea unghiurilor datorită sarcinilor exterioare (Figura 1.23). Unitatea de măsură în SI: [rad]

În Figura 1.22 a) se consideră o bară cu lungimea inițială ( $l_i$ ) solicitată la întindere de forța axială (F). Sub acțiunea forței aplicate, bara se deformează, respectiv se lungeste cu valoarea ( $\Delta l$ ). Astfel că bara va avea lungimea finală ( $l_f$ ).

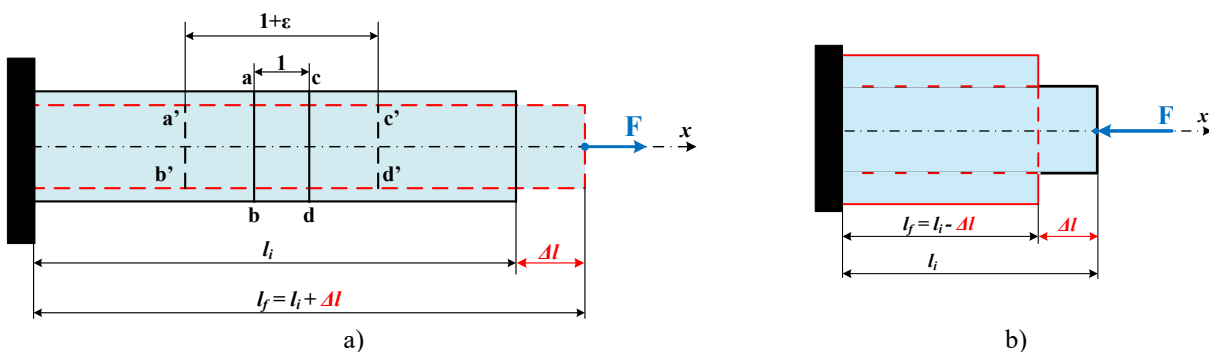


Fig. 1.22. Deformații liniare ale corpurilor solide: a) la întindere; b) la compresiune

Cunoscând lungimea inițială și cea finală, se poate calcula deformația liniară sau lungirea ( $\Delta l$ ) cu relația:

$$\Delta l = l_f - l_i \quad (1.6)$$

unde:  $\Delta l$  reprezintă lungirea barei sau lungirea totală, [mm].

Raportul dintre lungirea barei ( $\Delta l$ ) și lungimea inițială a barei ( $l_i$ ) determină cu cât s-a lungit unitatea de lungime ( $\varepsilon$ ):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_i} = \frac{l_f - l_i}{l_i} \quad (1.7)$$

unde:  $\varepsilon$  reprezintă deformația specifică (mărime adimensională), însă se poate exprima și în [%].

În cazul solicitării axiale de compresiune, mărimile ( $\Delta l$ ) și ( $\varepsilon$ ) nu își schimbă semnificația, ci doar semnul (vor fi negative), (Figura 1.22 b). Deformațiile specifice liniare (lungirea sau scurtarea specifică) sunt cauzate de acțiunea forțelor exterioare care produc tensiuni normale.

Se consideră un corp de formă paralelipipedică cu grosimea unitară prezentat în Figura 1.23, pe fețele căruia iau naștere tensiuni tangențiale egale, având sensul indicat pe desen. Baza paralelipipedului (fața ABEF) este fixă, iar sub acțiunea tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ), fața CDGH alunecă paralel cu ea însăși ajungând în poziția finală C'D'G'H'.

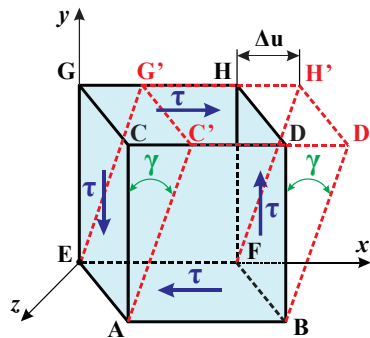


Fig. 1.23. Deformații unghiulare și deplasarea punctului C

Această alunecare poate fi măsurată prin unghiul ( $\gamma$ ) format între fețele AECG și AEC'G', reprezentând variația unghiului drept ca urmare a solicitării elementului. Astfel, se poate scrie:

$$\operatorname{tgy} \approx \gamma = \frac{CC'}{AC} \quad (1.8)$$

unde:  $\gamma$  reprezintă *lunecarea specifică*, fiind pozitivă (prin convenție) atunci când unghiul drept se micșorează, și se măsoară în [°] sau [rad].

Pe lângă deformarea corpului solicitat, majoritatea punctelor sale își schimbă poziția. Drumul pe care îl parcurge un punct al corpului în timpul deformării și pe direcția solicitării exterioare se numește *deplasare* (se notează cu  $u$  după axa  $x$ ; cu  $v$  după axa  $y$ ; cu  $w$  după axa  $z$ ). De exemplu, segmentul de dreaptă  $CC'$  este drumul parcurs de punctul C din poziția inițială în punctul C' (poziția finală) și reprezintă deplasarea punctului C după axa  $Ox$  (Figura 1.23).

## 1.7. Încercări mecanice. Legea lui Hooke

Caracteristicile mecanice ale materialului, relevante pentru studiul tensiunilor și deformațiilor, se determină prin încercări mecanice, experimentale, cum ar fi cele de tracțiune, compresiune sau încovoiere (efectuată în trei sau patru puncte). Prin încercarea la tracțiune se obțin caracteristicile mecanice care intervin în studiul solicitărilor de întindere simplă. Condițiile de efectuare a încercării la tracțiune (întindere) a metalelor și modul de interpretare al rezultatelor sunt prevăzute în SR EN ISO 6892-1:2020: *Materiale metalice – Încercarea la tracțiune – Partea 1: Metodă de încercare la*

temperatura ambiantă [37]. Pentru realizarea acestor încercări sunt necesare: *epruvete* (Figura 1.24), *mașină de testat* (Figura 1.25) și *aparatură pentru măsurarea deformațiilor*.

Reprezentarea variației tensiunii normale ( $\sigma$ ) în funcție de deformația specifică ( $\epsilon$ ) pe parcursul încercării la tracțiune a unui anumit material definește *curba caracteristică* a materialului respectiv.

Pe baza experimentelor (încercări la tracțiune sau la compresiune), Robert HOOKE a arătat că, până la anumite limite, tensiunile sunt proporționale cu deformațiile corespunzătoare, adică tensiunile variază liniar în raport cu deformațiile specifice. Se definește *modulul de elasticitate longitudinală* ( $E$ ) (modulul lui Young) ca fiind coeficientul unghiular al drepte sau tangenta la dreapta liniară ( $\sigma$ - $\epsilon$ ), deci  $E = \text{tg}\alpha$ . Astfel, *legea lui HOOKE* este definită de relația:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1.9)$$

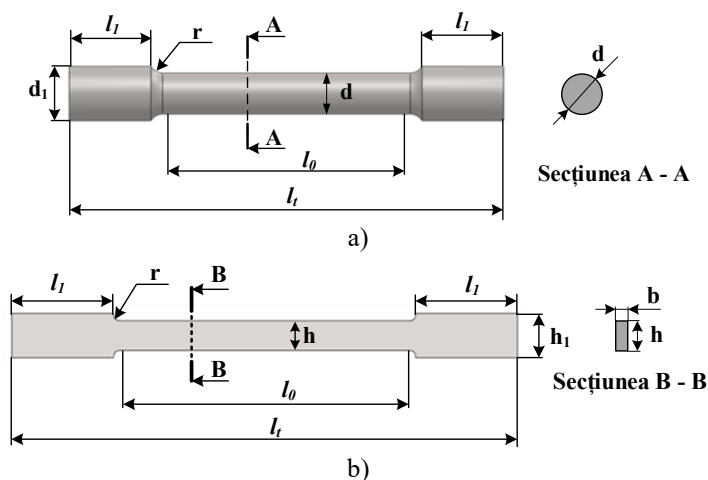


Fig. 1.24. Tipuri de epruvete pentru încercarea metalelor la întindere  
a) epruvetă cilindrică; b) epruvetă plană



Fig. 1.25. Mașina de încercări mecanice Instron 3366 din laboratorul UTCN [26, 34]

Legea lui Hooke definită de relația (1.9) este valabilă în cazul materialelor care se situează în domeniul elastic de solicitare. Curba caracteristică a materialului este independentă de dimensiunile epruvetei și se obține reprezentând în abscisă (axa  $x$ ) deformația specifică liniară ( $\epsilon$ ) iar în ordonată (axa  $y$ ) tensiunea normală ( $\sigma$ ), determinate experimental.

În cazul solicitării de forfecare, legea lui Hooke, între tensiunea tangențială ( $\tau$ ) și deformația specifică unghiulară ( $\gamma$ ), are forma:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (1.10)$$

unde:  $G$  se numește modul de elasticitate transversală,  $\text{N/mm}^2$ .

Între modulul de elasticitate longitudinală ( $E$ ), modulul de elasticitate transversală ( $G$ ) și coeficientul de contracție transversală ( $\nu$ ) există următoarea relație de legătură [2]:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (1.11)$$

Modulul de elasticitate longitudinală ( $E$ ), transversală ( $G$ ) și coeficientul de contracție transversală ( $\nu$ ) sunt constante elastice de material, determinate experimental pentru fiecare material în parte. Pentru oțeluri aceste constante se situează în jurul valorilor:  $\nu = 0,3$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ;  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

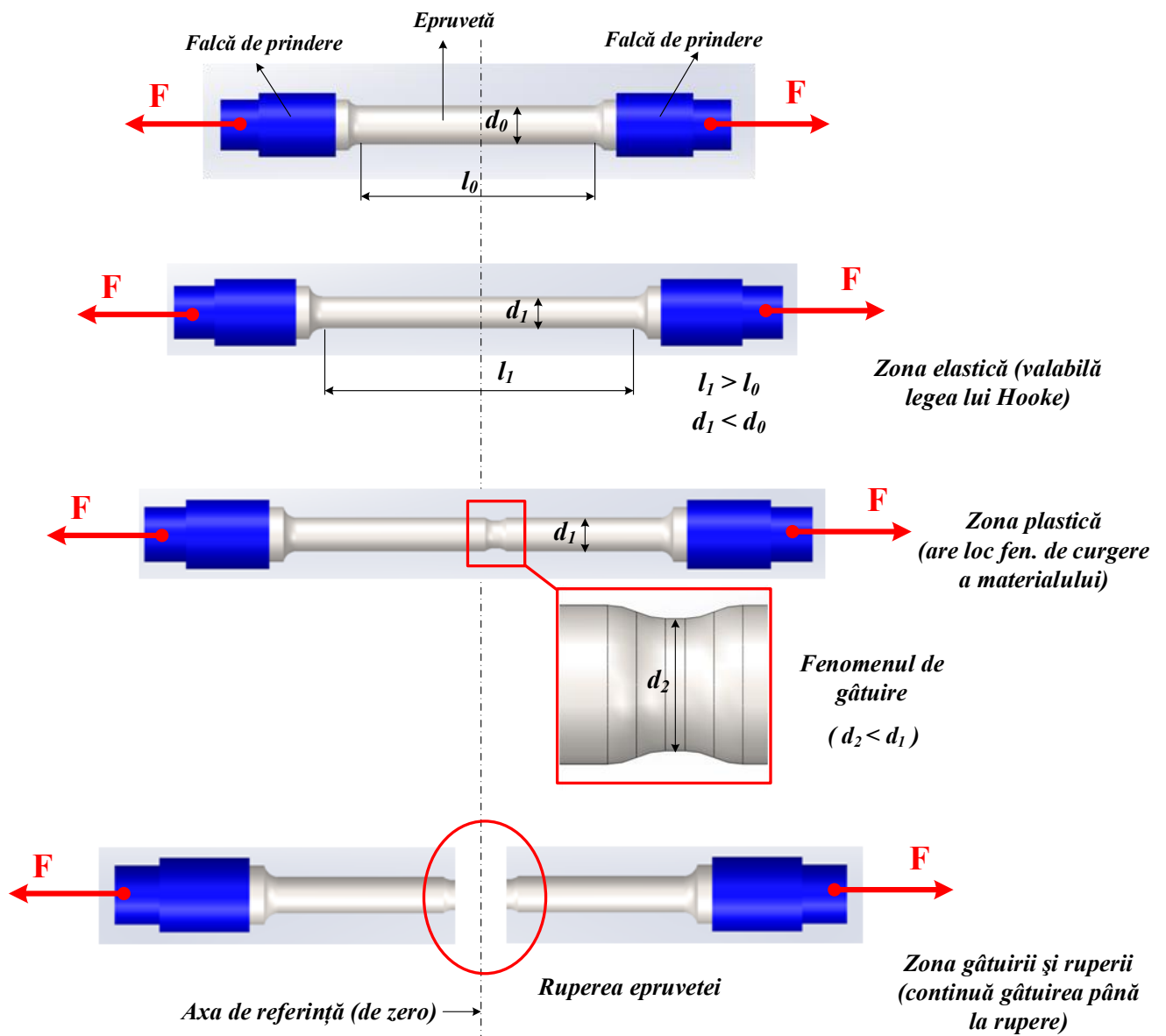


Fig. 1.26. Etapele prin care trece o epruvetă solicitată la tracțiune pentru obținerea curbei caracteristice



Fig. 1.27. Epruvete solicitate la tracțiune:  
a) epruvetă metalică; b) epruvetă din aluminiu; c) epruvetă din plastic

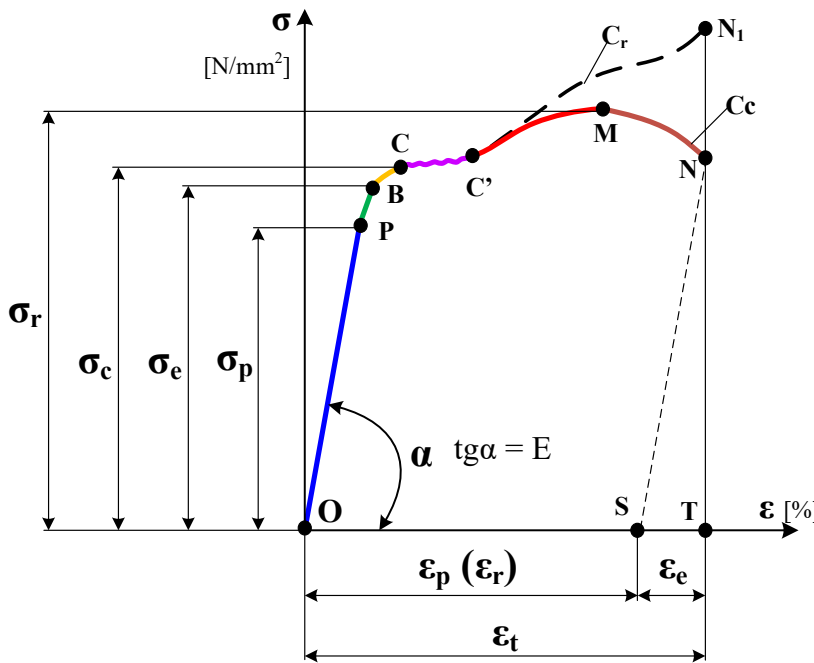


Fig. 1.28. Reprezentarea generală a curbei caracteristice pentru oțel moale

În Figura 1.28 s-au notat:

- $\sigma_p$  – limita de proporționalitate, [N/mm<sup>2</sup>]
- $\sigma_e$  – limita de elasticitate, [N/mm<sup>2</sup>]
- $\sigma_c$  – limita de cugere, [N/mm<sup>2</sup>]
- $\sigma_r$  – limita de rupere, [N/mm<sup>2</sup>]
- $\epsilon_p, \epsilon_r, \epsilon_e, \epsilon_t$  – deformația specifică în domeniul plastic (sau de rupere), elastic, respectiv deformația specifică totală, [mm/mm] sau [%]
- $E$  – modulul de elasticitate longitudinală sau modulul lui Young, [N/mm<sup>2</sup>].

În Figura 1.28 se prezintă curba caracteristică obținută prin tracțiune pentru un oțel moale, în forma sa generală.

Pe curba caracteristică se disting trei zone importante:

<p>1. Zona de elasticitate (zona OP)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Îi corespunde tensiunea (<math>\sigma_p</math>) numită <i>limita de proporționalitate</i>. Până în punctul P există o proporționalitate directă între tensiuni și deformații specifice (<math>\sigma = E \cdot \epsilon</math> iar <math>\text{tg}\alpha = E</math> este modulul lui Young), ceea ce înseamnă că modulul de elasticitate are o variație liniară.</li> <li>▪ Punctului B de pe curbă îi corespunde tensiunea (<math>\sigma_e</math>) – limita de elasticitate și reprezintă nivelul maxim al tensiunii până la care materialul își păstrează comportarea elastică.</li> </ul>
<p>2. Zona de plasticitate (porțiunea BCM)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Punctului C îi corespunde (<math>\sigma_c</math>) <i>limita (tensiunea, rezistența) de curgere</i>.</li> <li>▪ Materialul se comportă plastic, iar deformațiile specifice cresc în raport cu tensiunile normale (<math>\sigma</math>) rămând aproximativ constante.</li> </ul>
<p>3. Zona gâtuirii și ruperea epruvetei (porțiunea MN)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Punctului M îi corespunde (<math>\sigma_r</math>) <i>limita (tensiunea, rezistența) de rupere</i> și este dată de tensiunea maximă pe care o poate suporta epruveta.</li> <li>▪ Ruperea epruvetei are loc la o forță mai mică decât cea maximă, ca urmare a apariției fenomenului de gâtuire. Forța, respectiv tensiunea de rupere sunt mai dificil de determinat experimental, motiv pentru care se consideră de obicei forța maximă (<math>F_{\max}</math>).</li> <li>▪ Tensiunea de rupere se calculează cu raportul dintre forța maximă suportată de epruvetă (<math>F_{\max}</math>) și aria inițială a secțiunii transversale a acesteia [2,16]:</li> </ul> $\sigma_r = \sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0}, \quad [\text{N/mm}^2] \quad (1.12)$

Curba caracteristică este utilă pentru înțelegerea comportamentului mecanic al materialului supus testelor mecanice (vezi Figura 1.2) și pentru determinarea parametrilor necesari în calculele de dimensionare și verificare: limita elastică, rezistența la tracțiune, deformația la rupere, modulul de elasticitate longitudinală etc.

**Observații:**

- (1) În Figura 1.28 curba notată  $C_c$  se numește curba convențională (sau curba inginerescă) și se obține experimental (tracțiune) prin puncte primite/dobândite împărțind forța de întindere variabilă cu secțiunea inițială  $A_0$  a epruvetei ca și cum ar rămâne constantă.
- (2) Curba punctată  $C_r$  se numește curba caracteristică reală și se obține împărțind valoarea forței reale (care este variabilă) la secțiunea transversală reală a pruvetei.
- (3) Materialele ductile prezintă deformații plastice mari înainte de rupere, iar materialele fragile nu prezintă fenomenul de curgere.

În Figura 1.29 se prezintă mai multe exemple de curbe caracteristice obținute prin tracțiune pentru diferite tipuri de materiale.

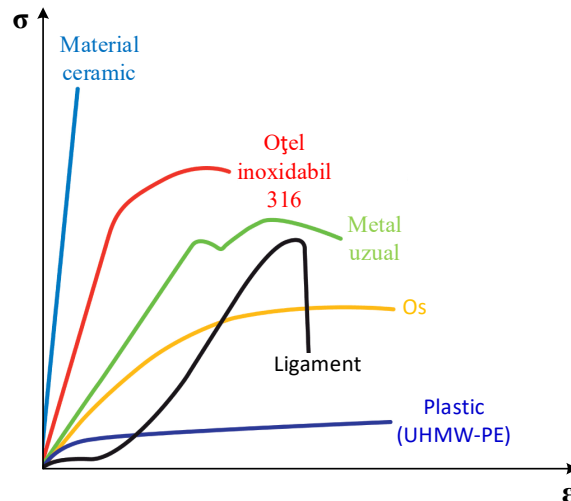


Fig. 1.29. Curbe caracteristice pentru diferite materiale obținute experimental la tracțiune [35]

## 1.8. Rezistența admisibilă și coeficienți de siguranță

Se consideră *critice* acele niveluri de sollicitare care depășesc limitele acceptabile și care produc efecte negative mari, cum ar fi deformații permanente, fenomenul de rupere etc. În calculele ingineresti se impune întotdeauna *condiția de rezistență*, adică tensiunile efective maxime ( $\sigma_{ef}$ ) ce rezultă din calcule să fie mai mici sau cel mult egale cu o valoare limită denumită *rezistență admisibilă* sau tensiune admisibilă ( $\sigma_a$  sau  $\tau_a$ ), adică:

$$\sigma_{ef} \leq \sigma_a, \quad [\text{N/mm}^2] \quad (1.13)$$

*Definiție:* Valoarea convențională aleasă în calcul, pe baza practicii și experimentelor, pentru tensiunea maximă care se poate produce într-o piesă, în condițiile specifice ale materialului și sollicitării, fără riscul apariției deformațiilor permanente sau a ruperii, se numește *rezistență admisibilă a materialului*. Rezistența admisibilă se calculează din rezistența de rupere (pentru materiale fragile) sau din tensiunea de curgere (pentru materiale tenace) prin împărțirea cu un *coeficient de siguranță* ( $c$ ):

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c} \quad \text{sau} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}, \quad [\text{N/mm}^2] \quad (1.14)$$

În cazul sollicitărilor simple de întindere ale pieselor pentru care ruperea ar reprezenta starea critică se definește *coeficientul de siguranță*:

$$c_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{ef}}, \quad [\text{N/mm}^2] \quad (1.15)$$

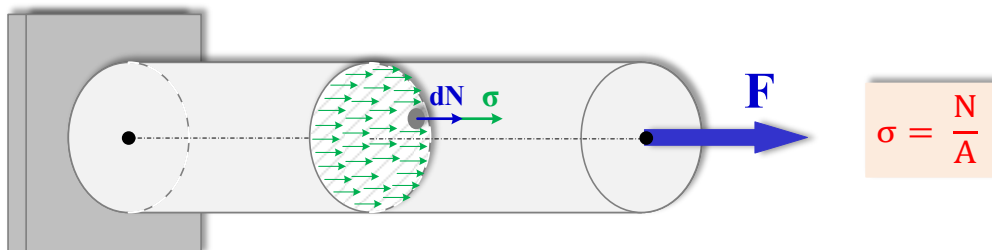


unde:  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \text{ este tensiunea normală de rupere, [N/mm}^2\text{]} \\ \sigma_{ef} \text{ este tensiunea normală efectivă sau calculată, [N/mm}^2\text{]}. \end{array} \right.$

Coeficienții ( $c$ ,  $c_r$ ) sunt supraunitari și se numesc *coeficienți de siguranță*. Valorile lor, ca și ale rezistențelor admisibile, se aleg în funcție de mai mulți factori, cum ar fi: natura materialului, tratamentele termice aplicate materialului, durata de folosire a piesei, modul de acționare a sarcinilor în timp, tipul solicitării, temperatura de funcționare etc.

## 2. SOLICITAREA AXIALĂ

2.1. Noțiuni generale	31
2.2. Reacțiuni și eforturi la solicitarea axială	31
2.3. Tensiuni și deformații la solicitarea axială	34
2.4. Tensiuni și deformații la solicitări axiale ținând seama și de greutatea proprie a barei	40
2.5. Bară de egală rezistență la solicitarea axială: Soluția teoretică și soluția practică	41
2.6. Energia potențială de deformare la solicitarea axială	45
2.7. Bare și sisteme de bare static nedeterminate la solicitări axiale	46
2.7.1. Bară dublu articulată	47
2.7.2. Sistem cu două bare articulate paralele	48
2.7.3. Sistem de trei bare articulate concurente	52
2.7.4. Tensiuni în bare supuse variației de temperatură	53



## 2. SOLICITAREA AXIALĂ

### 2.1. Noțiuni generale

Solicitarea axială se produce atunci când o bară este solicitată de un sistem de forțe concentrate, aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale, acționând de-a lungul axei longitudinale a barei și determinând un efect de întindere sau de compresiune. În Figura 2.1 s-a reprezentat o bară cu secțiunea circulară constantă pe toată lungimea ( $l$ ), solicitată de forța ( $F$ ), care acționează în centrul de greutate al secțiunii transversale a barei, la întindere (Figura 2.1a), respectiv la compresiune (Figura 2.1b).

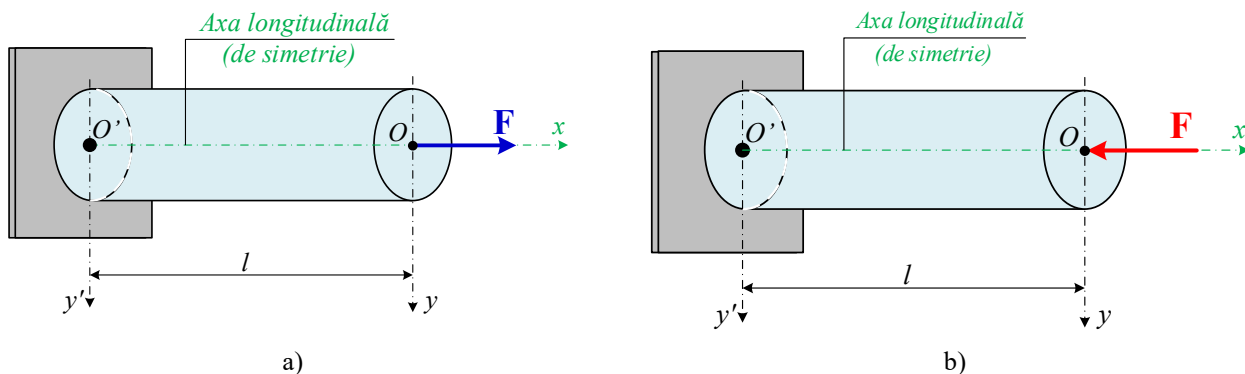


Fig. 2.1. Solicitarea axială a unei bare circulare: a) întindere; b) compresiune

### 2.2. Reacțiuni și eforturi la solicitarea axială

Pentru efectuarea calculelor de rezistență (verificare, dimensionare, forța capabilă, calculul tensiunilor și deformațiilor), este necesară determinarea reacțiilor și eforturilor din secțiunile transversale. În acest scop, pentru bara solicitată axial de forțele concentrate ( $F$ ), ( $2F$ ), ( $3F$ ) (Figura 2.2), se vor determina: reacțiunile din reazem, respectiv forțele axiale (eforturile) ( $N$ ) din secțiunile transversale și se va trasa diagrama de variație a eforturilor pentru identificarea efortului maxim, respectiv a secțiunii maxim solicitată.

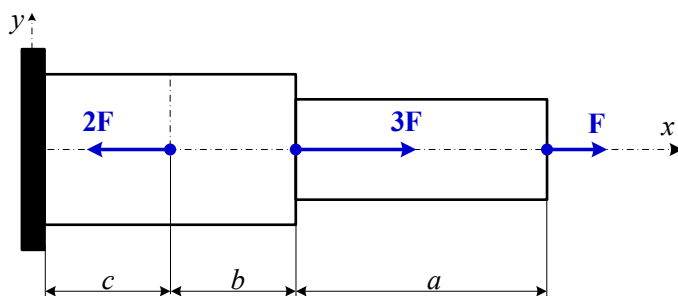


Fig. 2.2. Bară solicitată axial

#### (a) Calculul reacțiunilor

Se introduc puncte notate cu  $1 \div 4$  acolo unde sunt punctele de aplicație ale forțelor exterioare, respectiv în reazem (punct de sprijin, încastrarea), rezultând trei tronsoane cu lungimile ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), unde lungimea ( $l = a + b + c$ ) este lungimea totală a barei (Figura 2.3). Se introduc în încastrare reacțiunile ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $M_1$ ) și se calculează aplicând ecuațiile de echilibru statice. Se alege semnul pozitiv al forțelor aplicate dacă au aceeași direcție cu axa longitudinală ( $x$ ). Se obține:

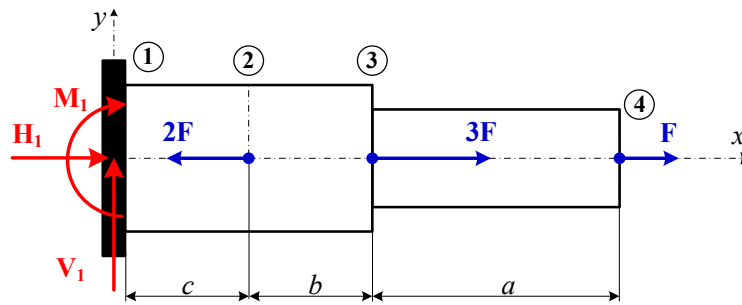


Fig. 2.3. Bară solicitată axial: calculul reacțiilor

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 + F + 3F - 2F = 0 \quad (2.1)$$

$$H_1 = -F - 3F + 2F \Rightarrow H_1 = -2F \quad (2.2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 0 \quad (2.4)$$

**Observații:**

- (1) Deoarece reacțiunea ( $H_1$ ) este negativă, rezultă că acționează în sens opus orientării introduse pe schiță.
- (2) Nu se va modifica sensul forței ( $H_1$ ) pe schiță.
- (3) În calculele ulterioare se va utiliza ( $H_1$ ) cu semnul obținut (negativ).

(b) Calculul forțelor axiale ( $N$ )

Forțele (eforturile) axiale se obțin aplicând metoda secțiunilor pe fiecare tronson al barei și se calculează ca suma algebrică a forțelor exterioare care acționează de-a lungul axei longitudinale a barei (axa  $x$ ), Figura 2.4. Pentru calculul forțelor axiale în secțiunile transversale ale barei se ține cont de convenția de semne descrisă în Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1. Convenția de semne pentru forța axială în secțiune

	<p>Forța axială (<math>N</math>) este pozitivă dacă forțele exterioare ies din secțiune, producând întinderea acesteia.</p>
	<p>Forța axială (<math>N</math>) este negativă dacă forțele exterioare intră din secțiune, producând compresiunea acesteia.</p>

Ca să se poată identifica mai ușor semnul forțelor axiale, metoda secțiunii se aplică pornind de la capătul liber (punctul 4) către încadrarea barei (punctul 1), astfel poziția secțiunilor (distanța  $x$ ) se va raporta la punctul 4.

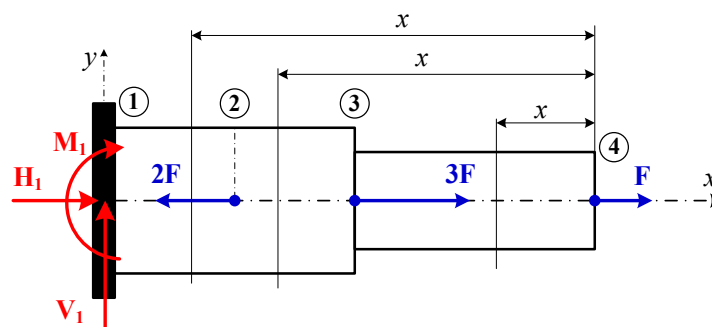


Fig. 2.4. Aplicarea metodei secțiunii pentru calculul eforturilor axiale

Pentru exemplul propus, forțele axiale pe fiecare interval s-au calculat astfel:

	Intervalul 4 – 3: $N_{4-3} = F$
	Intervalul 3 – 2: $N_{3-2} = F + 3F = 4F$
	Intervalul 2 – 1: $N_{2-1} = F + 3F - 2F = 2F$

**Observație:** (1) Forța axială calculată pe intervalul 2-1 (intervalul de lângă încadrare) are aceeași valoare ca și reacțiunea orizontală ( $H_1$ ), dar cu semn opus. Astfel, dacă încărcarea se reduce în punctul 1, aceasta va fi în echilibru, adică:

$$H_1 = -2F \quad \text{①} \quad N_{2-1} = +2F \quad x$$

Pe baza rezultatelor obținute în cazul forțelor axiale ( $N$ ) se construiește diagrama de variație ale forțelor axiale pe fiecare interval. Diagrama de variație a forțelor axiale are rolul de a furniza informații (vizuale) cu privire la distribuția forțelor axiale pe întreaga lungime a barei, respectiv permite identificarea cu ușurință a secțiunii maxim sollicitată. Pentru construirea diagramei de variație, valorile pozitive se trasează deasupra liniei de referință, iar cele negative sub linia de referință.

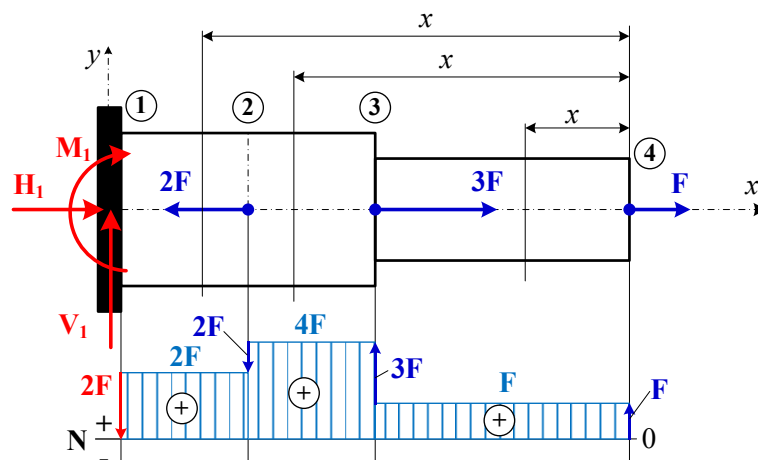


Fig. 2.5. Diagrama de variație ale forțelor axiale ( $N$ )

Pe baza diagramei obținute în Figura 2.5, se observă că în secțiunile transversale *forțele axiale ( $N$ ) sunt constante* pe intervale (diagrama are aceeași înălțime pe un anumit interval), iar forța axială maximă se obține pe intervalul 2 – 3,  $N_{\max} = N_{3-2} = 4F$ .

Pentru bara dată, forțele axiale sunt pozitive în secțiune, deformațiile axiale ( $\Delta l$ ) sunt pozitive iar bara este supusă la întindere în urma sollicitărilor exterioare.

Pe baza acestor rezultate, se poate parcurge diagrama pornind din capătul liber, astfel: diagrama începe cu saltul de valoare ( $F$ ) produs de forța aplicată ( $F$ ), apoi în punctul 3 diagrama are un salt crescător de la ( $F$ ) la ( $4F$ ); în punctul 2 diagrama scade prin saltul de la ( $4F$ ) la ( $2F$ ), și se încheie diagrama cu saltul produs de reacțiunea ( $H_1$ ).

În punctele în care sunt aplicate forțele concentrate, pe diagrama de variație trebuie să se regăsească valorile acestora sub formă de salt. Aceste salturi se calculează ca sumă sau diferență în valoare absolută a valorilor de pe diagramă în punctul respectiv. În cazul dat, în punctele 2, 3 și 4 în care s-au aplicat forțele axiale, se calculează saltul pe diagramă ca fiind diferența în valoare absolută a valorilor din acel punct, astfel:

$$\begin{array}{l|l} \text{În punctul 4} & |0 - F| = |F| \end{array} \quad (2.5)$$

$$\begin{array}{l|l} \text{În punctul 3} & |F - 4F| = |3F| \end{array} \quad (2.6)$$

$$\begin{array}{l|l} \text{În punctul 2} & |4F - 2F| = |2F| \end{array} \quad (2.7)$$

Acest procedeu de parcurgere a diagramei de variație a forțelor, respectiv calculul salturilor în puncte este și o metodă de verificare a rezultatelor obținute.

În baza acestui exemplu analizat, rezultă următoarele concluzii:

- (1) Punctele în care se aplică forțe axiale determină salturi corespunzătoare pe diagramă
- (2) Sensul forțelor aplicate trebuie să fie în concordanță cu reprezentarea lor în diagrama de variație a forțelor
- (3) Forța axială calculată pe intervalul de lângă încastrare este egală și de semn opus cu reacțiunea orizontală
- (4) În fiecare secțiune transversală forțele externe sunt echilibrate de forțele axiale (forțele interne).

### 2.3. Tensiuni și deformații la sollicitarea axială

La sollicitarea axială, forțele axiale ( $N$ ) produc în secțiunea transversală doar tensiuni normale ( $\sigma$ ). Pentru calculul tensiunilor normale în secțiunea transversală, se ține cont de ipoteza lui Bernouli: *secțiunile paralele, plane și normale la axa barei înainte de deformare, rămân paralele, plane și normale axa barei și după deformare*. Conform aceste ipoteze, deformațiile (lungirile sau scurtările) sunt aceleași în întreaga secțiune. De asemenea, comportarea materialului este guvernată de legea lui Hooke ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ).

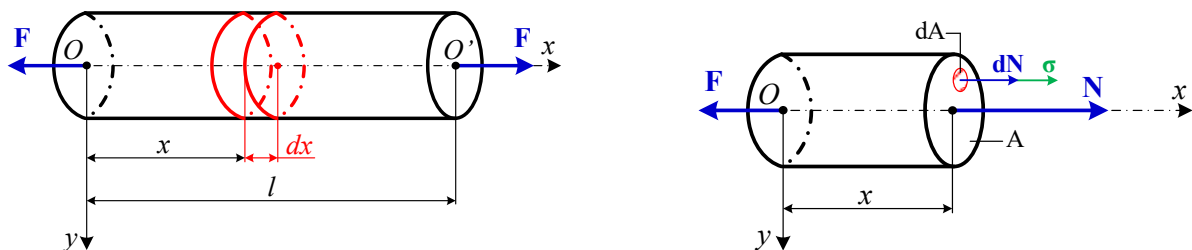


Fig. 2.6. Tensiunea normală ( $\sigma$ ) într-o secțiune oarecare ( $x$ )

Pentru deducerea relației de calcul a tensiunii normale ( $\sigma$ ) în secțiune, se consideră bara de lungime ( $l$ ) solicitată axial (la întindere) de forța ( $F$ ) și care este secționată la o anumită distanță ( $x$ ) față de centrul secțiunii (punctul  $O$ , originea sistemului de referință  $xOy$ ) (Figura 2.6). Tensiunile normale ( $\sigma$ ) sunt constante și uniform distribuite pe secțiunea transversală a barei cu aria ( $A$ ). Forța din secțiunea ( $x$ ) va fi rezultanta forțelor ( $\sigma \cdot dA$ ) pe toate elementele secțiunii. Astfel se obține relația de calcul a tensiunii normale în secțiune:

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A \quad (2.8)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.9)$$

unde:  $N$  este forța axială, [N]  
 $A$  este aria secțiunii transversale a barei, [mm<sup>2</sup>]  
 $\sigma$  este tensiunea normală în secțiunea transversală a barei, [N/mm<sup>2</sup>].

Din relația (2.9) se pot deduce relații de dimensionare, verificare și capacitatea de încărcare (forța axială capabilă) ale barei (Tabelul 2.2):

**Tabelul 2.2.** Relații de calcul la solicitarea axială

Dimensionare	Verificare	Forța axială capabilă
$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}$	$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}} \leq \sigma_a$	$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a$

unde:  $N, N_{cap}$  este forța axială din secțiunea transversală, respectiv forța axială capabilă să o suporte bara fără a se rupe (sau să nu se producă deformații permanente), [N]  
 $A_{ef}, A_{nec}$  este aria efectivă (calculată), respectiv necesară (minimă) a secțiunii transversale a barei, [mm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{ef}, \sigma_a$  este tensiunea normală efectivă, respectiv tensiunea admisibilă, [N/mm<sup>2</sup>].

Pentru obținerea relației de calcul a deformației pentru bara solicitată axial se cunosc:

a) Deformația specifică liniară (la întindere)  $\left| \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \end{array} \right. \quad (2.10)$

b) Legea lui Hooke:  $\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.11)$

c) Tensiunea normală în secțiunea transversală:  $\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.12)$

Din relația (2.11) rezultă deformația specifică ( $\varepsilon$ ) de forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.13)$$

Înlocuind expresia (2.12) în (2.13) se obține:

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} \quad (2.14)$$

Deformația liniară ( $\Delta l$ ) se poate scrie sub forma utilizând relația (2.10):

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l \quad (2.15)$$

Se introduce relația (2.14) în expresia (2.15) și se obține relația de calcul a deformației liniare la solicitarea axială:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (2.16)$$

unde:  $N$  este forța axială din secțiunea transversală, [N]  
 $A$  este aria secțiunii transversale a barei, [mm<sup>2</sup>]  
 $l$  este lungimea barei, [mm]  
 $\Delta l$  este deformația liniară, [mm]  
 $\varepsilon$  este deformația specifică liniară, [mm/mm] sau [%]  
 $E$  este modulul de elasticitate longitudinală, [N/mm<sup>2</sup>]  
 $\sigma$  este tensiunea normală din secțiunea transversală a barei, [N/mm<sup>2</sup>]  
 $E \cdot A$  reprezintă modulul de rigiditate la solicitarea axială. Deformarea barei este cu atât mai mică cu cât modulul de rigiditate al acesteia este mai mare și invers.

Pe baza relației (2.16) se fac următoarele observații:

(1) Dacă bara solicitată axial este compusă din porțiuni de secțiuni și lungimi diferite (numite *intervale*), deformația totală a barei este egală cu suma algebrică a deformațiilor fiecărui interval, respectiv:

$$\Delta l_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \Delta l_i; \quad \Delta l_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} \quad (2.17)$$

unde:  $\Delta l_{\text{total}}$  este deformația (sau deplasarea) totală a barei, [mm]  
 $n$  este numărul porțiunilor de secțiuni și lungimi diferite, adică a intervalelor ce compun bara.

(2) Dacă bara este supusă unui sistem de forțe axiale (normale) de întindere și compresiune, deformația totală a barei este egală cu suma algebrică a deformațiilor produse de fiecare forță a sistemului.

(3) Formula (2.16) este aplicabilă numai în domeniul elastic de solicitare.

**Aplicație rezolvată**

*Aplicația 2-1.* Pentru bara solicitată de forțele axiale ( $F_1 \div F_3$ ), având secțiunea constantă, se cer:

- (a) Calculul reacțiunii orizontale ( $H$ ) din încastrare
- (b) Calculul forțelor axiale ( $N$ ) pentru fiecare interval și trasarea diagramei de variație ale forțelor axiale
- (c) Calculul de dimensionare ( $d$ )
- (d) Calculul tensiunilor normale ( $\sigma$ ) pentru fiecare interval
- (e) Calculul deplasării capătului liber ( $\Delta l_{\text{total}}$ ) al barei.

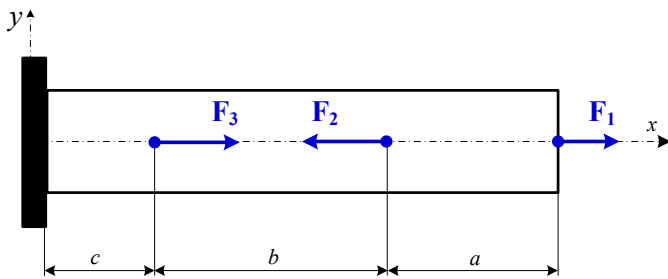


Fig. 2.7. Bară solicitată axial

Pentru efectuarea calculului teoretic, se cunosc următoarele date:

- $F_1 = 2 \text{ kN}; F_2 = 8 \text{ kN}; F_3 = 5 \text{ kN};$
- $a = 60 \text{ mm}; b = 100 \text{ mm};$
- $c = 30 \text{ mm};$
- $\sigma_a = 120 \text{ N/mm}^2;$
- $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2.$

*Rezolvare.* (a) *Calculul reacțiunii orizontale (H) din încastrare*

Pentru efectuarea calculului teoretic, este necesar să se definească intervalele prin numerotarea punctelor de aplicație ale forțelor exterioare, respectiv a reazemului. Se obțin patru puncte rezultând trei intervale. Apoi, în încastrare se introduc cele trei reacțiuni: reacțiunea orizontală ( $H$ ) și cea verticală ( $V$ ) ca urmare a anulării mișcărilor de translație după cele două direcții ( $x, y$ ), respectiv momentul de încovoiere ( $M$ ) datorită anulării mișcării de rotație în planul  $xOy$ , originea  $O$  a sistemului de referință fiind în încastrare (Figura 2.8).

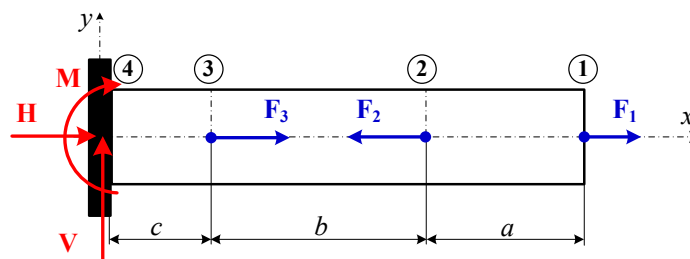


Fig. 2.8. Calculul reacțiunii ( $H$ ) din încastrare



Având în vedere că bara este solicitată doar axial și se neglijează greutatea proprie, rezultă că, atât reacțiunea verticală ( $V$ ), cât și momentul de încovoiere ( $M$ ) sunt nule. Drept consecință, se calculează doar reacțiunea orizontală ( $H$ ) aplicând ecuația de echilibru:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H + F_3 - F_2 + F_1 = 0$$

$$H = -F_3 + F_2 - F_1$$

$$H = -5 + 8 - 2 \Rightarrow H = 1 \text{ kN}$$

(b) *Calculul forțelor axiale ( $N$ ) și trasarea diagramei de variație*

Se calculează forța axială ( $N$ ) în secțiune pe fiecare interval ținând cont de convenția de semne pentru forța axială prezentată în Tabelul 2.1, respectiv aplicând metoda secțiunii, parcurgând bara de la capătul liber (punctul 1) către încastrare (punctul 4). Se obține:

	<p>Intervalul 1 – 2 :</p> $N_{1-2} = F_1 = 2 \text{ kN}$
	<p>Intervalul 2 – 3 :</p> $N_{2-3} = F_1 - F_2 = 2 - 8 = -6 \text{ kN}$
	<p>Intervalul 3 – 4 :</p> $N_{3-4} = F_1 - F_2 + F_3 = 2 - 8 + 5 = -1 \text{ kN}$

Cunoscând faptul că, într-o anumită secțiune transversală sau pe un interval, forța axială este întotdeauna constantă, se trasează diagrama de variație a forțelor axiale pe fiecare interval (Figura 2.9). Pe baza diagramei obținute, se observă ca pe intervalul 1 – 2 forța axială este pozitivă (bara cuprinsă în acest interval este supusă întinderii), respectiv forța axială de pe intervalele 2 – 3 și 3 – 4 este negativă (bara cuprinsă între punctele 2 – 4 este supusă compresiunii).

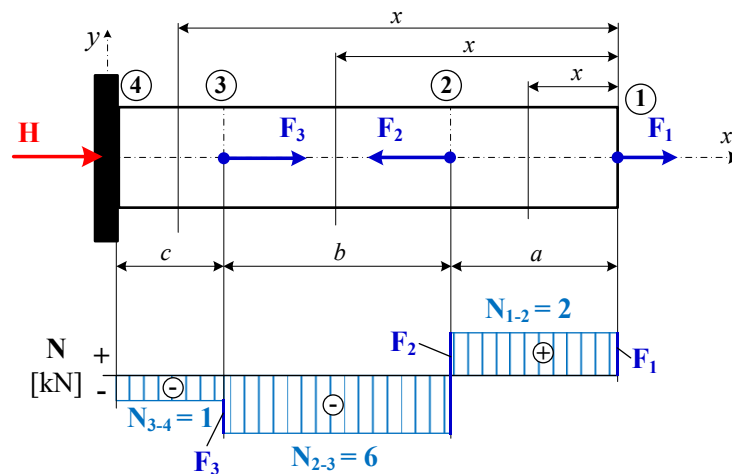


Fig. 2.9. Calculul și trasarea diagramei de variație forțelor axiale ( $N$ )

(c) Dimensionare

Având în vedere faptul că bara are secțiunea constantă pe toată lungimea sa, pentru determinarea valorii diametrului ( $d$ ) al secțiunii transversale, se ia în calcul valoarea maximă a forței axiale (valoarea absolută a forței axiale de pe diagramă).

În aceste condiții, rezultă că forța axială maximă este:  $N_{\max} = N_{2-3} = -6 \text{ kN}$ .

Pentru dimensionare se utilizează relațiile de calcul uzuale a ariilor necesare:

$$A_{\text{nec}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{nec}}^2}{4}; A_{\text{nec}} = \frac{|N_{\max}|}{\sigma_a} \quad (\text{A2-1.1})$$

Se egalează relațiile (A2-1.1) și se obține formula de calcul a diametrului necesar:

$$\frac{\pi \cdot d_{\text{nec}}^2}{4} = \frac{|N_{\max}|}{\sigma_a} \Rightarrow d_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{\max}|}{\pi \cdot \sigma_a}} \quad (\text{A2-1.2})$$

Se aplică relația (A2-1.3) pentru calculul diametrului necesar ( $d_{\text{nec}}$ ):

$$d_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{2-3}|}{\pi \cdot \sigma_a}} \Rightarrow d_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120}} \Rightarrow d_{\text{nec}} = 7,97 \text{ mm}$$

Valoarea necesară a diametrului se rotunjește, întotdeauna către o valoare mai mare decât cea estimată din calcule ( $d_{\text{nec}}$ ) și se obține diametrul efectiv sau real al secțiunii transversale ( $d_{\text{ef}} > d_{\text{nec}}$ ):

$$d_{\text{nec}} = 7,97 \text{ mm} \Rightarrow d_{\text{ef}} = 8 \text{ mm}$$

Cu valoarea efectivă a diametrului se calculează aria efectivă a secțiunii transversale.

$$A_{\text{ef}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{ef}}^2}{4} \Rightarrow A_{\text{ef}} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \Rightarrow A_{\text{ef}} = 50,26 \text{ mm}^2$$

d) Calculul tensiunilor normale ( $\sigma$ ) pentru fiecare interval

La calculul tensiunilor normale se utilizează relația de verificare din Tabelul 2.2, în care forța axială se introduce cu semnul rezultat din calcule. Semnul pozitiv al tensiunilor semnifică faptul că porțiunea respectivă este întinsă, iar semnul negativ spune că porțiunea este comprimată. Se obține:

Intervalul 1 – 2:	$\sigma_{1-2} = \frac{N_{1-2}}{A_{\text{ef}}} = \frac{2 \cdot 10^3}{50,26} = 39,79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă}$
Intervalul 2 – 3:	$\sigma_{2-3} = \frac{N_{2-3}}{A_{\text{ef}}} = -\frac{6 \cdot 10^3}{50,26} = -119,37 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă}$
Intervalul 3 – 4:	$\sigma_{3-4} = \frac{N_{3-4}}{A_{\text{ef}}} = -\frac{1 \cdot 10^3}{50,26} = -19,89 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă.}$

Pe baza valorilor tensiunilor se construiește diagrama de variație ale tensiunilor prezentată în Figura 2.10.

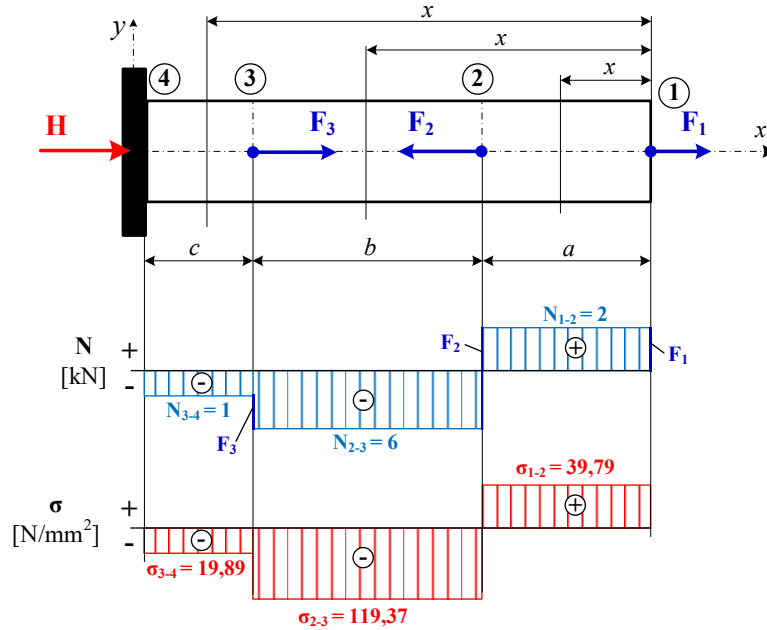


Fig. 2.10. Calculul și trasarea diagramei de variație ale tensiunilor normale ( $\sigma$ )

Pe baza diagramei de variație a tensiunilor normale ( $\sigma$ ) se constată că secțiunea 2 – 3 este secțiunea maxim sollicitată:  $\sigma_{\max} = \sigma_{2-3} = 33,95 \text{ N/mm}^2$ .

e) Calculul deplasării capătului liber ( $\Delta l_{\text{total}}$ ) a barei

Pentru determinarea deplasării capătului liber ( $\Delta l_{\text{total}}$ ) este necesar să se calculeze deformația axială pentru fiecare interval, utilizând formulele (2.17). Deplasarea capătului liber se obține prin însumarea algebrică a deplasărilor axiale corespunzătoare fiecărui interval în parte.

Intervalul 1 – 2:	$\Delta l_{1-2} = \frac{N_{1-2} \cdot a}{E \cdot A_{\text{ef}}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 60}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 176,72} = 0,0032 \text{ mm}$
Intervalul 2 – 3:	$\Delta l_{2-3} = \frac{N_{2-3} \cdot b}{E \cdot A_{\text{ef}}} = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 176,72} = -0,0161 \text{ mm}$
Intervalul 3 – 4:	$\Delta l_{3-4} = \frac{N_{3-4} \cdot c}{E \cdot A_{\text{ef}}} = -\frac{1 \cdot 10^3 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 176,72} = -0,000808 \text{ mm}$

Calculul deplasării capătului liber:

$$\Delta l_{\text{total}} = \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} + \Delta l_{3-4}$$

$$\Delta l_{\text{total}} = 0,0032 - 0,0161 - 0,000808 \Rightarrow \Delta l_{\text{total}} = -0,0137 \text{ mm}$$

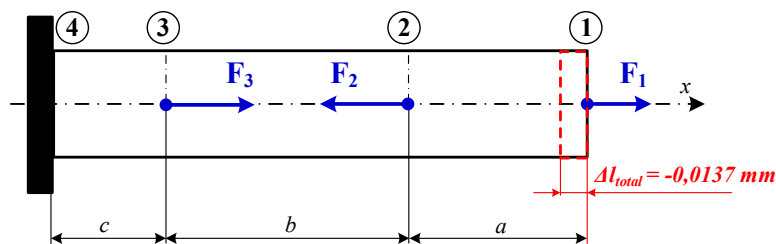


Fig. 2.11. Calculul deplasării capătului liber ( $\Delta l_{\text{total}}$ )

În urma calculului, rezultă că deformația axială totală ( $\Delta l_{\text{total}}$ ) este negativă, respectiv *bara se scurtează cu cantitatea 0,0137 mm* (Figura 2.11).

## 2.4. Tensiuni și deformații la solicitări axiale ținând seama și de greutatea proprie a barei

Până acum, în calculul barelor solicitate axial s-au luat în considerare doar sarcinile (forțe concentrate, momente concentrate, sarcini uniforme distribuite) care acționează din exterior, neglijându-se efectul greutății proprii acestora. Însă, în cazul pieselor lungi solicitate axial, greutatea proprie a acestora constituie o încărcare mecanică, având același ordin de mărime cu forțele aplicate, sau chiar mai mare, influențând valorile tensiunilor și a deformațiilor. Din acest considerent, în unele cazuri, este important să se ia în calcul și greutatea proprie a piesei sau sistemului, pe lângă solicitarea mecanică exterioară (sarcinile aplicate).

În continuare, se va analiza un caz simplu de solicitare exterioară pentru care se consideră și greutatea proprie alături de solicitarea exterioară, iar influența acesteia va fi regăsită în valoarea tensiunii ( $\sigma$ ) și, implicit, în diagrama de variație a acesteia. În acest scop, în Figura 2.12 se consideră o bară încastrată în punctul 2 solicitată la întindere de forța ( $F$ ) aplicată în capătul liber al barei (punctul 1). La distanța ( $x$ ) față de capătul liber se secționează bara și se detașează secțiunea obținută. Rezultă astfel forța axială în secțiune ( $N_x$ ) produsă de forța exterioară ( $F$ ), respectiv și de greutatea proprie a secțiunii ( $G_x$ ).

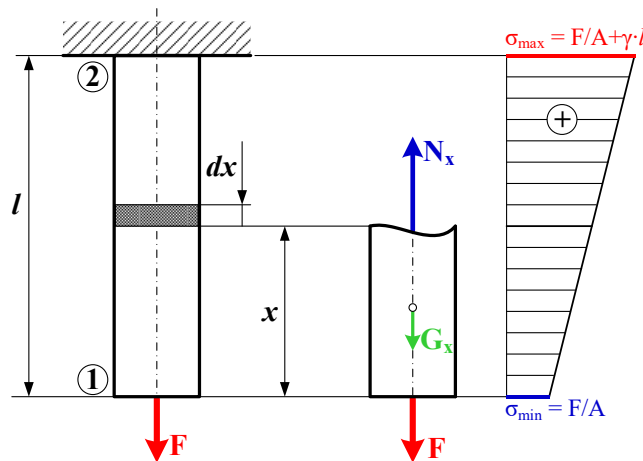


Fig. 2.12. Tensiunile și deformațiile barei solicitate axial ținând cont și de greutatea proprie a ei

Într-o secțiune oarecare, aflată la distanța ( $x$ ) față de capătul liber al barei (punctul 1), efortul axial ( $N_x$ ) este:

$$N_x = F + G_x \quad (2.18)$$

Greutatea ( $G_x$ ) a porțiunii de bară de lungime ( $x$ ), se poate calcula în funcție de greutatea specifică ( $\gamma$ ), de secțiunea barei ( $A$ ) și de lungimea ( $x$ ):

$$G_x = \gamma \cdot A \cdot x \quad (2.19)$$

Efortul axial ( $N_x$ ) se rescrie sub forma:

$$N_x = F + \gamma \cdot A \cdot x \quad (2.20)$$

Tensiunea normală din această secțiune ( $x$ ) este dată de relația:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}; \quad \sigma_x = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x \quad (2.21)$$

Se observă că tensiunea normală variază liniar în lungul barei (variază în funcție de valoarea lui  $x$ ), având valorile:

$$\begin{array}{l} \text{▪ pentru } x = 0 \\ \left| \quad \quad \quad \sigma_{\min} = \frac{F}{A} \end{array} \quad (2.22)$$

$$\bullet \text{ pentru } x = l \quad \left| \quad \sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \quad (2.23)$$

Din relația generală (2.23) se pot deduce relații de dimensionare, verificare și capacitatea de încărcare a barei (Tabelul 2.3):

**Tabelul 2.3.** Relații de calcul la solicitarea axială când se ia în considerare greutatea proprie a barei

Dimensionare	Verificare	Forța axială capabilă	Deformații
$A_{\text{nec}} = \frac{F}{\sigma_a - \gamma \cdot l}$	$\sigma_{\text{ef}} = \frac{F}{A_{\text{ef}}} + \gamma \cdot l \leq \sigma_a$	$F_{\text{cap}} = (\sigma_a - \gamma \cdot l) \cdot A_{\text{ef}}$	$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \left( F + \frac{G}{2} \right)$

unde:  $\left| \begin{array}{l} G \text{ este greutatea proprie a barei și se calculează cu relația:} \\ G = \gamma \cdot l \cdot A \end{array} \right. \quad (2.24)$

*Deformația (lungirea barei).* Pentru determinarea deformațiilor se consideră un element de lungime ( $dx$ ) situat la distanța ( $x$ ) de capătul barei, lungirea lui fiind notată cu ( $\Delta dx$ ), valoarea acestuia fiind dată de relația (2.16):  $\Delta dx = \frac{N_x}{E \cdot A} \cdot dx = \frac{F + \gamma A \cdot x}{E \cdot A} \cdot dx$ . Prin integrare pe lungimea ( $l$ ) se obține lungirea totală a barei ( $\Delta l$ ):

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{F + \gamma A \cdot x}{E \cdot A} \cdot dx = \int_0^l \frac{F}{E \cdot A} dx + \int_0^l \frac{\gamma \cdot A}{E \cdot A} \cdot x \cdot dx \quad (2.25)$$

$$\Delta l = \frac{F}{E \cdot A} \cdot x \Big|_0^l + \frac{\gamma \cdot A}{E \cdot A} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot A}{E \cdot A} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l}{E \cdot A} \left( F + \frac{\gamma \cdot A \cdot l}{2} \right) \quad (2.26)$$

$$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \left( F + \frac{G}{2} \right) \quad (2.27)$$

## 2.5. Bara de egală rezistență la solicitarea axială: Soluția teoretică și soluția practică

În cazul barelor cu aceeași secțiune transversală de-a lungul lor, tensiunea normală ( $\sigma$ ) la solicitarea axială se determină ca raport între efortul axial (forța axială,  $N$ ) și aria acelei secțiuni ( $A$ ), respectiv:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.28)$$

iar în calculele de dimensionare, aria secțiunii transversale se determină astfel:

$$A = \frac{N}{\sigma_a} \quad (2.29)$$

unde:  $\left| \sigma_a \text{ este tensiunea admisibilă a materialului, [N/mm}^2\text{]}. \right.$

În această situație, condiția de rezistență a barei este îndeplinită ( $\sigma_{\text{ef}} \leq \sigma_a$ ), însă nu și condiția de economicitate, deoarece aria calculată este cea necesară în secțiunea cea mai solicitată, fiind supradimensionată în restul barei. Pentru utilizarea la maximum a capacității de rezistență a materialului, se recurge la soluția folosirii *barei de egală rezistență*.

*Definiție:* *Bara de egală rezistență* este un element structural a cărui rezistență la solicitarea mecanică este constantă de-a lungul întregii sale lungimi, în condițiile în care este supusă unei forțe axiale (de

întindere sau compresiune). Cu alte cuvinte, distribuția secțiunii transversale este concepută astfel încât, atât efortul axial ( $N$ ) cât și tensiunea normală ( $\sigma$ ) să rămână constante în secțiune, respectiv:

$$\sigma = \text{constant} = \sigma_a \quad (2.30)$$

Rezultă că:

$$A = \frac{N}{\sigma_a} \quad (2.31)$$

Pe baza relației (2.31), se scriu următoarele observații:

- Dacă forța axială crește de-a lungul barei (de exemplu, din cauza unei sarcini distribuite), atunci aria secțiunii transversale trebuie să crească proporțional cu forța aplicată
- Dacă forța axială scade, atunci aria secțiunii se reduce corespunzător.

În concluzie, forma barei, respectiv aria secțiunii transversale se adaptează continuu în funcție de variația forței axiale ( $N$ ), astfel încât în orice secțiune transversală tensiunea normală ( $\sigma$ ) să fie constantă și să nu depășească valoarea admisibilă a materialului ( $\sigma_a$ ).

Exemple de aplicații practice unde se poate aplica principiul barei de egală rezistență: elemente de mașini (axe, biele, tije) unde greutatea este critică; structuri aeronautice și auto, unde optimizarea masei este esențială; construcții metalice speciale sau piese turnate, etc.

**Soluția teoretică:** Legea de variație a secțiunii transversale pentru bara de egală rezistență se deduce prin analiza barei prezentată în Figura 2.13 [1, 2, 13, 15]. Bara este încastrată în partea superioară iar pe capătul liber se aplică o forță concentrată axială ( $F$ ) și care solicită bara la întindere. La distanța ( $x$ ) față de capătul liber se detașează elementul de volum cu lungimea ( $dx$ ), fiind mărginit de secțiunile transversale având ariile ( $A_x$ ) și ( $A_x + dA_x$ ). Elementul se află în stare de echilibru static sub acțiunea forțelor care acționează asupra lui: eforturile (forțele axiale interioare) pe cele două secțiuni transversale ( $\sigma \cdot A_x$ ), ( $\sigma \cdot (A_x + dA_x)$ ), respectiv greutatea sa ( $dG_x = \gamma \cdot A_x \cdot dx$ ).

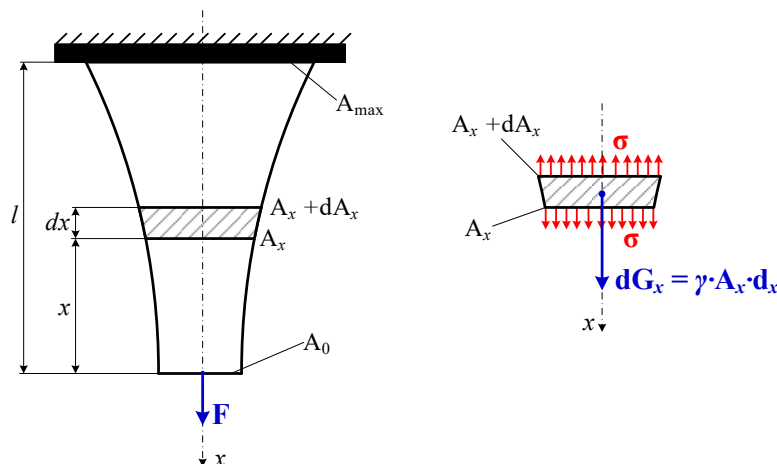


Fig. 2.13. Bară de egală rezistență: soluția teoretică

Pentru calculul greutății ( $dG_x$ ) se consideră aria medie astfel:  $\frac{A_x + A_x + dA_x}{2} \cong A_x$ . Pentru elementul considerat se scrie ecuația de echilibru:

$$\sigma \cdot (A_x + dA_x) - \sigma \cdot A_x - \gamma \cdot A_x \cdot dx = 0 \quad (2.32)$$

$$\sigma \cdot A_x + \sigma \cdot dA_x - \sigma \cdot A_x - \gamma \cdot A_x \cdot dx = 0 \quad (2.33)$$

În relația (2.33) se reduc termenii ( $\sigma \cdot A_x$ ) și se obține ecuația diferențială:

$$\sigma \cdot dA_x = \gamma \cdot A_x \cdot dx \Rightarrow \frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma}{\sigma} dx \quad (2.34)$$

Integrând ambii membrii din relația (2.34) rezultă:

$$\int \frac{dA_x}{A_x} = \int \frac{\gamma}{\sigma} dx + C \quad (2.35)$$

respectiv:

$$\ln A_x = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot x + C \quad (2.36)$$

Constanta de integrare C din relația (2.36) se determină impunând condiția pentru încăstrare: pentru  $x = 0$  rezultă  $A_x = A_0$ . Din relația (2.36) se obține:  $C = \ln A_0$ . Se înlocuiește expresia constantei de integrare în relația (2.36) și se obține:

$$\ln A_x = \frac{\gamma \cdot x}{\sigma} + \ln A_0 \quad \text{sau} \quad \ln \frac{A_x}{A_0} = \frac{\gamma \cdot x}{\sigma} \quad (2.37)$$

Relația (2.37) se scrie sub formă exponențială, în care ( $e = 2,7182$ ) reprezintă baza logaritmilor naturali:

$$A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}} \quad (2.38)$$

Secțiunea transversală ( $A_0$ ) corespunzătoare capătului liber al barei se poate calcula astfel:

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_a} \quad (2.39)$$

Se înlocuiește expresia (2.39) în (2.38) și se obține:

$$A_x = \frac{F}{\sigma_a} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}} \quad (2.40)$$

Rezultă că, secțiunea transversală a barei variază după o curbă exponențială, iar secțiunea maximă a barei se obține în încăstrare, pentru  $x = l$ , respectiv:

$$A_{\max} = \frac{F}{\sigma_a} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot l}{\sigma}} \quad (2.41)$$

Realizarea practică a unei bare de egală rezistență cu profil exponențial și a cărei arie transversală este definită de relația (2.40) este dificil din punct de vedere tehnologic și presupune costuri ridicate, ceea ce nu satisface cerința de economicitate. În acest context, devine necesară identificarea unei soluții constructive echivalente, care să reproducă comportamentul mecanic al barei de egală rezistență, dar într-o formă mai ușor de fabricat.

O **soluție practică** adoptată în inginerie a fost împărțirea profilului exponențial în mai multe tronsoane, în trepte, cu secțiuni transversale diferite, care se circumscriu barei de egală rezistență – soluția teoretică (Figura 2.14). Acest tip de profil are avantajul unui calcul matematic relativ simplu, geometria profilului, respectiv a secțiunii transversale poate fi realizat ușor cu mijloace tehnologice convenționale și permite o utilizare eficientă a materialului. Astfel, se obține un compromis optim între rezistență și economicitate.

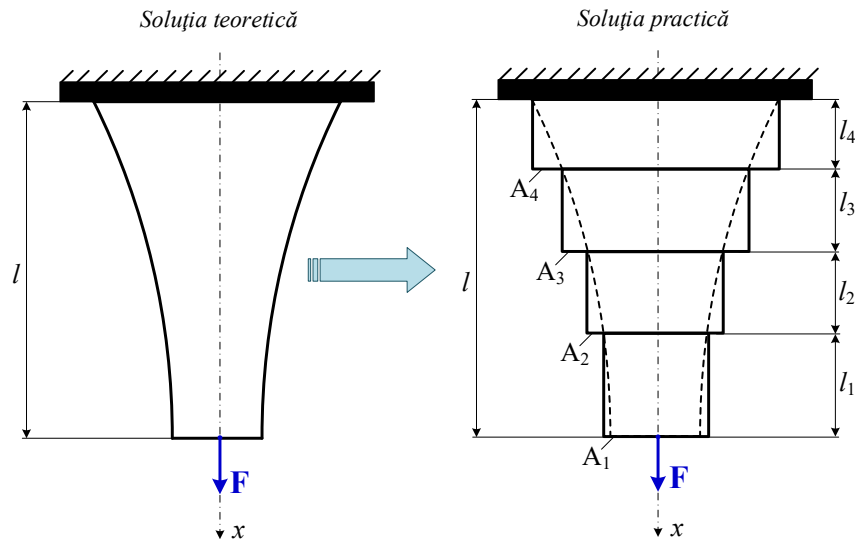


Fig. 2.14. Grinda de egală rezistență: soluția teoretică și soluția practică

În Figura 2.14 s-au notat cu  $(A_1 \div A_4)$  ariile secțiunilor transversale pentru fiecare tronson, respectiv cu  $(l_1 \div l_4)$  lungimile acestora. Începând de la primul tronson, ariile tronsoanelor care alcătuiesc soluția tehnică se calculează astfel:

- *Tronsonul 1:* Aria secțiunii transversale se calculează ținându-se cont de greutatea proprie. Rezultă:

$$A_{1nec} = \frac{F}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1)} \quad (2.42)$$

- *Tronsonul 2:* Aria secțiunii transversale se calculează ținându-se cont de greutatea primului tronson,  $(G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot l_1)$  și se obține:

$$A_2 = \frac{F + \gamma \cdot A_1 \cdot l_1}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} = \frac{F + \gamma \cdot l_1 \cdot \frac{F}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1)}}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} = \frac{F \cdot \sigma_a}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} \quad (2.43)$$

- *Tronsonul 3:* Aria secțiunii transversale se calculează ținându-se cont de greutatea primelor două tronsoane  $(G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot l_1; G_2 = \gamma \cdot A_2 \cdot l_2)$ . Se obține:

$$A_3 = \frac{F + (\gamma \cdot A_1 \cdot l_1) + (\gamma \cdot A_2 \cdot l_2)}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} \quad (2.44)$$

$$A_3 = \frac{F + \gamma \cdot l_1 \cdot \frac{F}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1)} + \frac{F \cdot \sigma_a}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2)}}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} \quad (2.45)$$

$$A_3 = \frac{F \cdot \sigma_a^2}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_3)} \quad (2.46)$$

- *Tronsonul 4:* Aria secțiunii transversale se calculează ținându-se cont de greutatea primelor trei tronsoane astfel  $(G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot l_1; G_2 = \gamma \cdot A_2 \cdot l_2; G_3 = \gamma \cdot A_3 \cdot l_3)$ . Se obține:

$$A_4 = \frac{F + (\gamma \cdot A_1 \cdot l_1) + (\gamma \cdot A_2 \cdot l_2) + (\gamma \cdot A_3 \cdot l_3)}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_4)} \quad (2.47)$$

$$A_4 = \frac{F + \gamma \cdot l_1 \cdot \frac{F}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1)} + \frac{F \cdot \sigma_a}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2)} + \frac{F \cdot \sigma_a^2}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_3)}}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_3)} \quad (2.48)$$



$$A_4 = \frac{F \cdot \sigma_a^3}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_3) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_4)} \quad (2.49)$$

În cazul general, când bara de egală rezistență cu profil exponențial se echivalează cu un număr de ( $n$ ) tronsoane, aria secțiunii transversale corespunzătoare tronsonului ( $n$ ) se poate calcula cu relația generală:

$$A_n = \frac{F \cdot \sigma_a^{(n-1)}}{(\sigma_a - \gamma \cdot l_1) \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_2) \cdot \dots \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot l_n)} \quad (2.50)$$

În mod similar, calculul deformației axiale a barei echivalente din mai multe tronsoane se face separat pentru fiecare tronson, ținând cont de greutatea proprie a tronsonului. Astfel, relația generală care permite calculul deplasării pentru tronsonul ( $n$ ) este:

$$\Delta l_n = \frac{l_n}{E \cdot A_n} \cdot \left( F + G_1 + G_2 + \dots + G_{(n-1)} + \frac{G_n}{2} \right) \quad (2.51)$$

Deformația axială totală a barei este egală cu suma deformațiilor axiale corespunzătoare fiecărui tronson, astfel:

$$\Delta l_{total} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n \quad (2.52)$$

## 2.6. Energia potențială de deformare la solicitarea axială

Energia de deformare este un concept fundamental în mecanica aplicată, iar principiile energiei de deformare sunt utilizate pe scară largă pentru a determina răspunsul mașinilor și structurilor la solicitările statice și dinamice.

Pentru a explica conceptul de bază (Figura 2.15), se consideră o bară cu aria secțiunii transversale ( $A$ ) și lungimea ( $l$ ) solicitată static prin forța ( $F$ ). O astfel de forță se numește *forță statică* deoarece nu există efecte dinamice sau inerțiale datorate mișcării barei. În timp ce forța ( $F$ ) crește încet și gradual, de la valoarea 0 la valoarea finală ( $F_{max}$ ), se dezvoltă un *lucru mecanic exterior* ( $L_e$ ), care se transformă în: *energie potențială de deformare*, cumulată de materialul barei și în *energie cinetică* a maselor în mișcare, care se neglijează (fiind aproximativ nulă) solicitarea fiind în domeniul static. Considerând bara un sistem conservativ, întreg lucru mecanic ( $L_e$ ) generat de forța ( $F$ ) se transformă în *energie potențială de deformare* ( $U_d$ ).

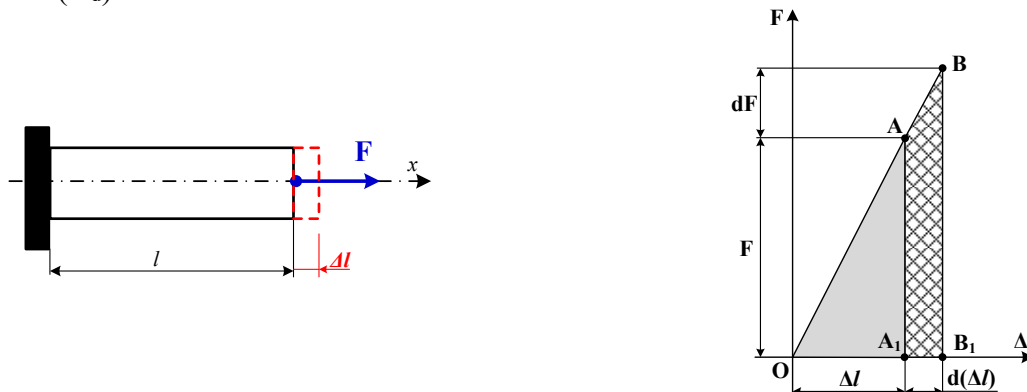


Fig. 2.15. Exprimarea grafică a lucrului mecanic exterior

Pentru un sistem conservativ, energia potențială de deformare (sau lucrul mecanic interior) va fi egală cu lucrul mecanic exterior, adică:

$$U_d = L_e \quad (2.53)$$

În studiul energiei potențiale de deformare se iau în considerare următoarele ipoteze de lucru:

- Este valabilă legea lui Hooke, conform căreia deformațiile sunt direct proporționale cu tensiunile
- Forțele exterioare sunt aplicate static, adică acționează cu aceeași intensitate/valoare pe durata întregii solicitări mecanice
- Se neglijează efectul forțelor de frecare și de inerție.

Lucrul mecanic exterior este reprezentat grafic în Figura 2.15. Astfel, la o forță aplicată ( $F$ ), bara se va deforma cu cantitatea ( $\Delta l$ ). Prin creșterea forței de la ( $F$ ) la ( $F+dF$ ), lungirea barei va crește cu  $\Delta l+d(\Delta l)$ . Ca urmare a deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia, se efectuează un lucru mecanic exterior ( $L_e$ ), care se transformă în energie potențială de deformare ( $U_d$ ), acumulată de materialul barei. Variația lucrului mecanic produsă de creșterea ( $dF$ ) a forței (aria  $ABA_1B_1$ ), poate fi exprimată ca produsul dintre forța ( $F+dF$ ) și deplasarea  $d(\Delta l)$ :

$$dL_e = (F + dF) \cdot d(\Delta l) \cong F \cdot d(\Delta l) \quad (2.54)$$

Lucrul mecanic exterior efectuat de forța ( $F$ ) aplicată static, definită de aria  $AOA_1$  este:

$$L_e = \int_0^F dL_e = \int_0^F F \cdot d(\Delta l) = \int_0^F F \cdot \frac{dF \cdot l}{E \cdot A} = \frac{l}{E \cdot A} \int_0^F F \cdot dF \Rightarrow L_e = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad (2.55)$$

$$L_e = \frac{F}{2} \cdot \Delta l \quad (2.56)$$

Pe baza relației (2.55) respectiv pentru  $F = N$ , energia potențială de deformare ( $U_d$ ) se poate calcula cu formula:

$$U_d = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad (2.57)$$

Din relația (2.57) se exprimă energia potențială de deformare ( $U_d$ ) în funcție de forța axială ( $N$ ) și de deformația liniară ( $\Delta l$ ), astfel:

$$U_d = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta l \quad (2.58)$$

Pe baza relației (2.58) se obține relația de calcul a deplasării liniare ( $\Delta l$ ) în funcție de energia potențială de deformare ( $U_d$ ) astfel:

$$\Delta l = \frac{2 \cdot U_d}{N} \quad (2.59)$$

Înlocuind expresia energiei potențiale (2.57) în (2.59) se obține expresia deplasării liniare ( $\Delta l$ ) dedusă anterior (2.16):

$$\Delta l = \frac{2}{N} \cdot \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (2.60)$$

## 2.7. Bare și sisteme de bare static nedeterminate la solicitări axiale

Un sistem plan, o bară plană sau o grindă este static nedeterminată dacă numărul necunoscutelor (reacțiuni, eforturi) nu se pot calcula cu ajutorul ecuațiilor de echilibru în plan:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_O = 0$ .

Sau, cu alte cuvinte, dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru valabile în plan atunci sistemul sau bara plană este static nedeterminată. În acest caz, este necesar calculul *gradului de nedeterminare* ( $n$ ) astfel:

$$n = r - s \quad (2.61)$$

unde:  $n$  este gradul de nedeterminare  
 $r$  este numărul necunoscutelor (reacțiuni, eforturi)  
 $s$  este numărul ecuațiilor de echilibru, iar în plan  $s = 3$ .

În general, nedeterminarea sistemelor poate fi: (a) *exterioară* – dacă necunoscutele sunt reacțiunile din reazeme și nu pot fi calculate utilizând doar ecuațiile de echilibru statice; (b) *interioară* – dacă necunoscutele sunt eforturile din secțiunea transversală; (c) *exterioară și interioară* – când necunoscutele sunt atât reacțiunile, cât și eforturile. Pentru rezolvarea acestor categorii de sisteme sau bare și pentru obținerea soluțiilor este necesar să se scrie un număr de ecuații matematice egal cu numărul total al necunoscutelor. De regulă, ecuațiile matematice sunt: cele trei ecuații de echilibru aplicabile în plan, respectiv ecuații suplimentare ce definesc condițiile de deformare ale barei sau ale elementelor din cadrul sistemului. În continuare se analizează câteva cazuri de sisteme (bare) static nedeterminate supuse solicitărilor axiale și se are în vedere principiul de rezolvare a acestor categorii de probleme.

### 2.7.1. Bară dublu articulată

În Figura 2.16 este prezentată o bară cu secțiunea constantă și lungimea ( $l$ ), dublu articulată în punctele 0 și 3 și solicitată de forțele axiale ( $F_1$ ) și ( $F_2$ ) aplicate în punctele 1 și 2. Pentru cunoașterea stării de tensiuni și deformații este necesar să se determine valorile reacțiunilor din cele două reazeme. Având în vedere că bara este solicitată axial, se iau în calcul doar reacțiunile orizontale, ( $H_0$ ) și ( $H_3$ ).

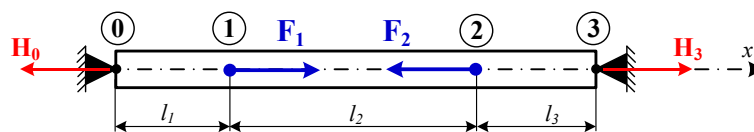


Fig. 2.16. Bară dublu articulată solicitată axial

Pentru bara studiată se scrie ecuația de echilibru care exprimă suma forțelor ce acționează de-a lungul axei longitudinale a barei (axa  $x$ ):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_0 + F_1 - F_2 + H_3 = 0 \quad (2.62)$$

În ecuația de echilibru (2.62) ( $H_0$ ) și ( $H_3$ ) sunt necunoscute. Una din ele este necunoscuta static nedeterminată, astfel că este necesar scrierea unei ecuații suplimentare ce ține seama de deformațiile axiale ale barei. Deformațiile axiale din cele două reazeme articulate sunt nule, astfel rezultă condiția:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad (2.63)$$

$$\Delta l = \frac{N_{0-1} \cdot l_1}{E \cdot A} + \frac{N_{1-2} \cdot l_2}{E \cdot A} + \frac{N_{2-3} \cdot l_3}{E \cdot A} = 0 \quad (2.64)$$

unde ( $N_{0-1}$ ,  $N_{1-2}$ ,  $N_{2-3}$ ) sunt forțele axiale pe intervalele cu lungimile ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ) și au expresiile:

$$N_{0-1} = H_0 \quad (2.65)$$

$$N_{1-2} = H_0 - F_1 \quad (2.66)$$

$$N_{2-3} = H_0 - F_1 + F_2 \quad (2.67)$$

Expresia (2.64) devine:

$$\Delta l = \frac{H_0 \cdot l_1}{E \cdot A} + \frac{(H_0 - F_1) \cdot l_2}{E \cdot A} + \frac{(H_0 - F_1 + F_2) \cdot l_3}{E \cdot A} = 0 \quad (2.68)$$

Cu ajutorul expresiei (2.68) rezultă necunoscuta static nedeterminată ( $H_0$ ):

$$H_0 = \frac{1}{l} [F_1 \cdot (l_2 + l_3) - F_2 \cdot l_3] \quad (2.69)$$

Și apoi celalată necunoscută, reacțiunea ( $H_3$ ) rezultă din ecuația de echilibru (2.62):

$$H_3 = \frac{1}{l} [F_1 \cdot (l_2 + l_3) - F_2 \cdot l_3] - F_1 + F_2 \quad (2.70)$$

### 2.7.2. Sistem cu două bare articulate paralele

În Figura 2.17 se prezintă un sistem format din: bara rigidă orizontală (OD) articulată în punctul O, și două bare flexibile verticale paralele ( $CC_1$  și  $DD_1$ ) articulate în punctele  $C_1$  și  $D_1$ . Cele două bare verticale sunt considerate flexibile, respectiv transmit doar forțe axiale și nu transmit momente (de încovoiere sau de torsiune). Pentru cele două bare verticale se cunosc:

(1) Rigiditatea la solicitarea axială definită de: forma geometrică a secțiunii transversale (secțiune circulară cu diametre diferite cu ariile  $A_1$ ,  $A_2$ ), respectiv de materialele din care sunt confecționate barele cu modulele de elasticitate longitudinală - bara 1 ( $CC_1$ ) este confecționată din oțel cu modulul de elasticitate longitudinală ( $E_{\text{oțel}}$ ), iar bara 2 ( $DD_1$ ) este din aluminiu cu ( $E_{Al}$ )

(2) Lungimile barelor: bara (OD) are lungimea totală ( $3 \cdot a$ ), bara 1 are lungimea ( $1,5 \cdot a$ ), iar bara 2 are lungimea ( $2,5 \cdot a$ ).

Sistemul este solicitat de forța concentrată ( $F$ ) aplicată în punctul B și se propune să se determine:

- Reacțiunile din reazemul articulat O, și forțele axiale ( $N$ ) din secțiunile barelor verticale
- Tensiunile normale ( $\sigma$ ) din secțiunea barelor verticale
- Deformațiile axiale ( $\Delta l$ ) și a deformațiilor specifice ( $\epsilon$ ) a barelor verticale
- Deplasarea verticală ( $\delta_B$ ) din punctul B produsă de forța aplicată ( $F$ ).

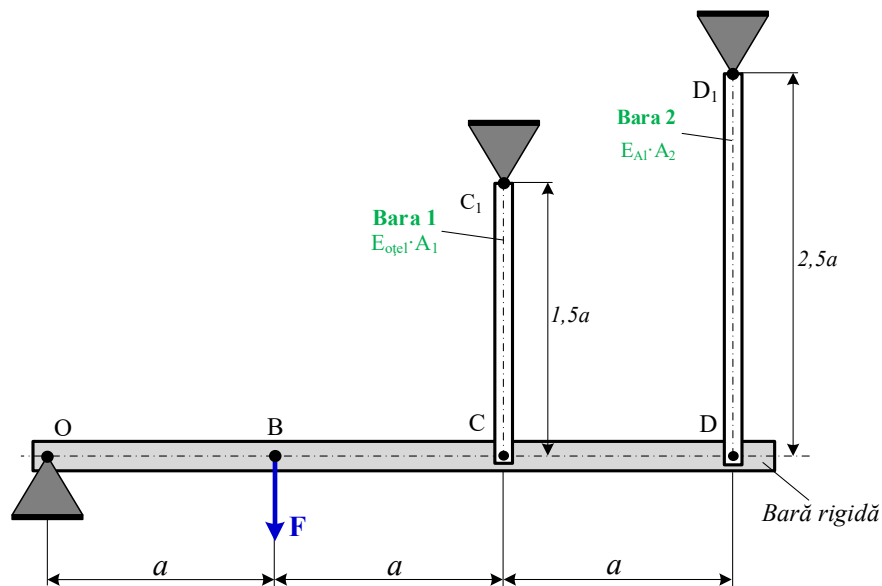


Fig. 2.17. Sistem static nedeterminat

Rezolvare. (a) Reacțiunile din reazemul articulat O și forțele axiale ( $N$ ) din secțiunea barelor verticale

Pentru obținerea rezultatelor este necesar să se analizeze sistemul din punctul de vedere al necunoscutelor. În Figura 2.18 s-au introdus necunoscutele (reacțiunile) în cele 3 reazeme (articulații în punctele O, C<sub>1</sub> și D<sub>1</sub>), rezultând un număr total de 5 necunoscute, care sunt reacțiunile: V, H<sub>C1</sub>; V<sub>C1</sub>; H<sub>D1</sub>; V<sub>D1</sub>. Reacțiunea orizontală (H) din punctul O este nulă deoarece bara rigidă (OD) nu este solicitată axial.

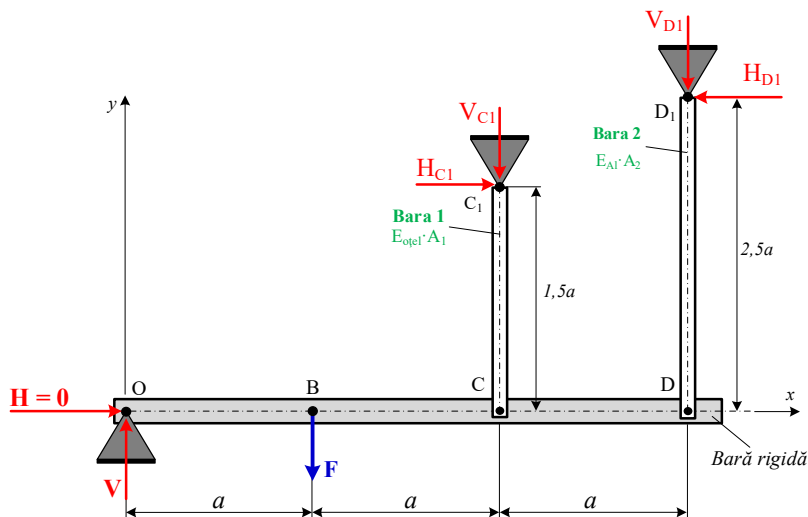


Fig. 2.18. Calculul gradului de nedeterminare

Știind că în general, în cazul sistemelor plane, reacțiunile se pot determina cu cele trei ecuații de echilibru statice uzuale ( $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_o = 0$ ), în cazul aplicației prezentate, nu se pot calcula cele 5 necunoscute cu doar trei ecuații matematice.

În continuare, se calculează *gradul de nedeterminare* al sistemului dat cu relația 2.61 și se obține:

$$n = 5 - 3 \Rightarrow n = 2 \quad (2.71)$$

După efectuarea calculelor, rezultă gradul de  $n = 2$ , respectiv sistemul dat este un sistem dublu *static nedeterminat*. De asemenea, rezultatul gradului de nedeterminare ( $n = 2$ ) indică faptul că, alături de ecuațiile de echilibru, mai sunt necesare încă 2 ecuații suplimentare pentru a putea fi calculate cele 5 necunoscute (reacțiuni). În acest context, pentru rezolvarea sistemului (adică ridicarea nedeterminării) se apelează la un „artificiu” de rezolvare și, totodată, se va ține cont de următoarele aspecte:

- Bara orizontală (OD) este perfect rigidă, adică în urma solicitării cu forța (F), aceasta nu se va deforma
- Barele verticale 1 și 2 sunt bare deformabile, acestea sunt solicitate axial de forța (F) și vor suferi deformații axiale (se vor alungi în urma solicitării mecanice).

Pentru ridicarea gradului de nedeterminare a sistemului se secționează cele două bare verticale astfel încât, partea superioară a acestora care cuprinde articulațiile din punctele C<sub>1</sub> și D<sub>1</sub>, respectiv cele 4 reacțiuni (H<sub>C1</sub>; V<sub>C1</sub>; H<sub>D1</sub>; V<sub>D1</sub>) să fie înlăturate. Efectul secțiunilor îndepărtate sunt înlocuite de forțele axiale (N<sub>1</sub>) și (N<sub>2</sub>), care apar datorită solicitării axiale, la rândul lor fiind necunoscute (Figura 2.19).

Astfel, din situația inițială în care au fost 5 necunoscute (reacțiunile V, H<sub>C1</sub>; V<sub>C1</sub>; H<sub>D1</sub>; V<sub>D1</sub>) s-a ajuns la situația finală în care au rămas doar 3 necunoscute: reacțiunea verticală (V) din articulația O, și forțele axiale (N<sub>1</sub>) și (N<sub>2</sub>) din cele două bare flexibile verticale. Astfel, problema s-a simplificat foarte mult și e mai simplu de rezolvat. Având în vedere schema simplificată din Figura 2.19, se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + N_1 + N_2 - F = 0 \quad (2.72)$$

$$V + N_1 + N_2 = F \quad (2.73)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow F \cdot a - N_1 \cdot 2 \cdot a - N_2 \cdot 3 \cdot a = 0 / : a \quad (2.74)$$

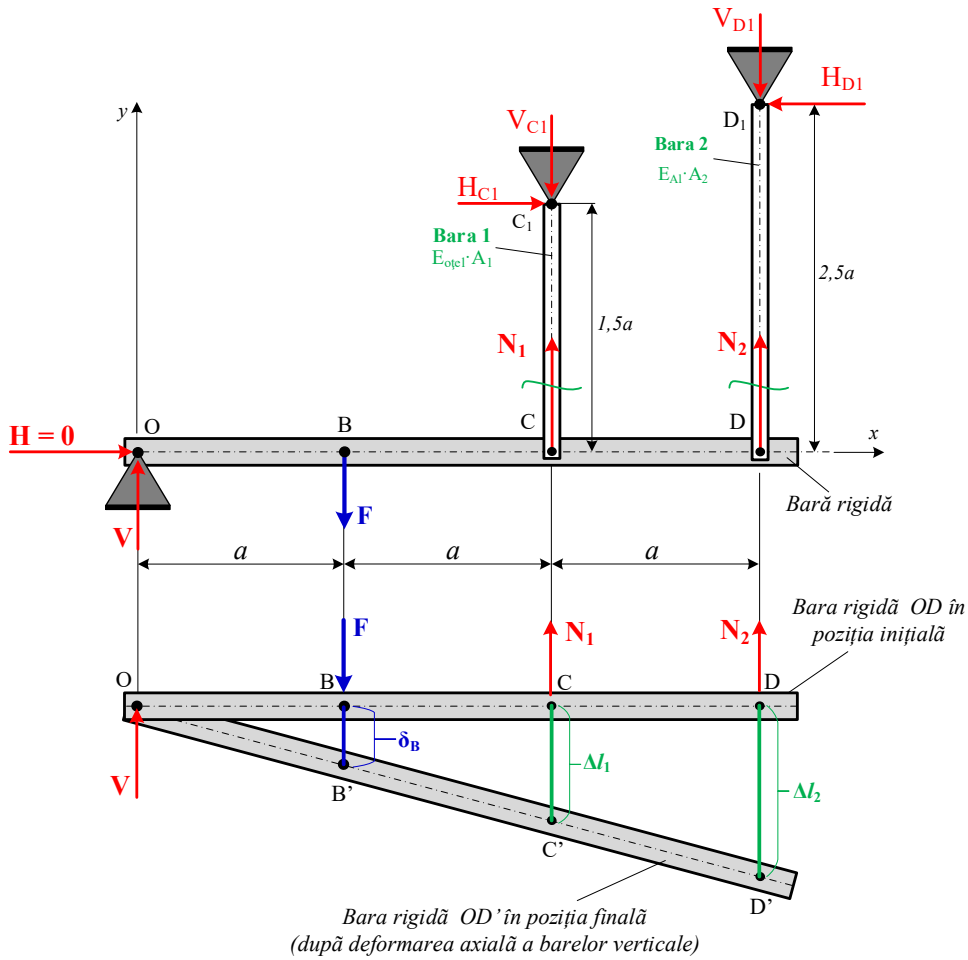


Fig. 2.19. Schema simplificată a sistemului de bare paralele (schema de lucru)

În figură s-au notat:  $\delta_B$  – deplasarea produsă de forța (F) pe direcția ei  
 $\Delta l_1, \Delta l_2$  – deformația axială a barei 1, respectiv a barei 2.

$$F - 2 \cdot N_1 - 3 \cdot N_2 = 0 \quad (2.75)$$

$$2 \cdot N_1 + 3 \cdot N_2 = F \quad (2.76)$$

Astfel s-au obținut două ecuații (2.73) și (2.76) cu trei necunoscute, însă pentru rezolvarea problemei mai e necesară încă o ecuație suplimentară. Ecuația suplimentară se va obține în funcție de deformațiile axiale ale barelor verticale, astfel: bara perfect rigidă (OD) se rotește în jurul articulației O și se va deplasa în direcția forței (F) și din starea inițială (nesolicitată) ajunge în starea finală după acțiunea forței (F), iar barele flexibile verticale se vor deforma, se vor lungi cu cantitățile ( $\Delta l_1, \Delta l_2$ ), Figura 2.19.

Astfel, pentru deformații mici (Figura 2.19), triunghiurile  $\Delta OBB'$ ,  $\Delta ODD'$  sunt asemenea, unghiurile B, C și D sunt drepte, și aplicând teorema de asemănare rezultă:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2 \cdot a}{3 \cdot a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2}{3} \quad (2.77)$$

$$\Delta l_1 = \frac{2}{3} \cdot \Delta l_2 \quad (2.78)$$

Expresia (2.78) reprezintă cea de-a treia ecuație și, care împreună cu ecuațiile (2.73) și (2.76) permit determinarea celor trei necunoscute ( $V, N_1$  și  $N_2$ ).

În expresia (2.78) deformațiile axiale ( $\Delta l_1, \Delta l_2$ ) se rescriu având în vedere expresia cunoscută la solicitarea axială:  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$ . Se obține:

$$\frac{N_1 \cdot 1,5 \cdot a}{E_{\text{otel}} \cdot A_1} = \frac{2 \cdot N_2 \cdot 2,5 \cdot a}{3 \cdot E_{\text{Al}} \cdot A_2} \Rightarrow N_1 = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot a \cdot E_{\text{otel}} \cdot A_1}{1,5 \cdot a \cdot 3 \cdot E_{\text{Al}} \cdot A_2} \cdot N_2 \quad (2.79)$$

$$N_1 = \frac{5 \cdot E_{\text{otel}} \cdot A_1}{4,5 \cdot E_{\text{Al}} \cdot A_2} \cdot N_2 \Rightarrow N_1 = 1,11 \cdot \frac{E_{\text{otel}} \cdot A_1}{E_{\text{Al}} \cdot A_2} \cdot N_2 \quad (2.80)$$

În relația (2.80) se notează cu constanta ( $\kappa$ ):

$$\kappa = 1,11 \cdot \frac{E_{\text{otel}} \cdot A_1}{E_{\text{Al}} \cdot A_2} \quad (2.81)$$

Forța axială ( $N_1$ ) va avea expresia:

$$N_1 = \kappa \cdot N_2 \quad (2.82)$$

Expresia forței axiale ( $N_1$ ) în forma scrisă (2.82) se înlocuiește în ecuația de echilibru (2.76). Se obține:

$$2 \cdot \kappa \cdot N_2 + 3 \cdot N_2 = F \Rightarrow N_2 \cdot (2 \cdot \kappa + 3) = F \quad (2.83)$$

$$N_2 = \frac{F}{(2 \cdot \kappa + 3)} \quad (2.84)$$

Cunoscând valoarea forței axiale ( $N_2$ ) sub forma (2.84), aceasta se introduce în expresia (2.82) și se obține ce-a de-a doua necunoscută, ( $N_1$ ).

Cunoscând forțele axiale ( $N_1$ ) și ( $N_2$ ) se poate determina reacțiunea verticală ( $V$ ) utilizând ecuația de echilibru (2.73):

$$V = F - N_2 - N_1 \quad (2.85)$$

Odată ce se obțin cele trei necunoscute ( $V$ ,  $N_1$  și  $N_2$ ), sistemul static nedeterminat devine static determinat și se pot determina celelalte mărimi mecanice (tensiuni, deformații etc).

#### (b) Tensiunile normale ( $\sigma$ ) din secțiunea barelor verticale

Având în vedere că barele verticale sunt sollicitate axial, pentru determinarea tensiunilor normale ( $\sigma$ ) se utilizează formula de calcul uzuală de la sollicitarea axială:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (2.86)$$

#### (c) Deformațiile axiale ( $\Delta l$ ) și a deformațiilor specifice ( $\varepsilon$ ) a barelor verticale

Se calculează deplasările ( $\Delta l$ ) (sau lungirile), respectiv deformațiile specifice ( $\varepsilon$ ) a barelor verticale cu relațiile uzuale:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_{\text{otel}} \cdot A_1}; \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_{\text{Al}} \cdot A_2} \quad [\text{mm}] \quad (2.87)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}; \varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} \quad [\%] \quad (2.88)$$

#### (d) Deplasarea verticală ( $\delta_B$ ) din punctul B produsă de forța aplicată ( $F$ )

Pentru deducerea formulei de calcul a deplasării verticale ( $\delta_B$ ) produsă de forța ( $F$ ) se are în vedere schița realizată în Figura 2.17 și, se aplică teorema de asemănare dintre  $\Delta OBB' \sim \Delta OCC'$ . Se obține:

$$\frac{\delta_B}{\Delta l_1} = \frac{a}{2 \cdot a} \quad (2.89)$$

$$\delta_B = \frac{\Delta l_1}{2} \quad (2.90)$$

*Calcul teoretic:* Pentru sistemul de bare paralele din Figura 2.17 se cunosc următoarele mărimi:  $F = 5$  kN;  $a = 1$  m;  $A_1 = 50,26$  mm<sup>2</sup>;  $A_2 = 28,27$  mm<sup>2</sup>;  $E_{\text{otel}} = 2 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>,  $E_{\text{Al}} = 0,69 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>. Aceste valori s-au introdus în relațiile (2.81÷2.90) iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 2.4.

**Tabelul 2.4.** Rezultatele teoretice obținute pentru sistemul studiat

Mărimea calculată	Ecuția utilizată	Efectuarea calculelor. Rezultate
Constanta $\kappa$	(2.75)	$\kappa = 1,11 \cdot \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 50,26}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 28,27}$ $\kappa = 5,72$
Forța axială, ( $N_2$ )	(2.78)	$N_2 = \frac{5}{(2 \cdot 5,72 + 3)}$ $N_2 = 0,34$ kN
Forța axială, ( $N_1$ )	(2.76)	$N_1 = 5,72 \cdot 0,34$ $N_1 = 1,94$ kN
Reacțiunea verticală, ( $V$ )	(2.79)	$V = 5 - 0,34 - 1,94$ $V = 2,72$ kN
Tensiunile normale, ( $\sigma$ )	(2.80)	$\sigma_1 = \frac{1,94 \cdot 10^3}{50,26} = 38,59$ N/mm <sup>2</sup> $\sigma_2 = \frac{0,34 \cdot 10^3}{28,27} = 12,02$ N/mm <sup>2</sup>
Deformațiile axiale, ( $\Delta l$ )	(2.81)	$\Delta l_1 = \frac{1,94 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 50,26} = 0,28$ mm $\Delta l_2 = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 28,27} = 0,43$ mm
Deformațiile specifice, ( $\epsilon$ )	(2.82)	$\epsilon_1 = \frac{0,28}{1,5 \cdot 10^3} \cdot 100 = 0,0186$ % $\epsilon_2 = \frac{0,43}{2,5 \cdot 10^3} \cdot 100 = 0,0172$ %
Deplasarea produsă de $F$ , ( $\delta_B$ )	(2.84)	$\delta_B = \frac{0,28}{2}$ $\delta_B = 0,14$ mm

### 2.7.3. Sistem de trei bare articulate concurente

Se consideră un sistem de bare simetric dispuse față de axa ( $y$ ), format din 3 bare concurente în punctul  $O$ , coplanare și sollicitate axial de forța exterioară ( $F$ ) aplicată în punctul  $O$  (Figura 2.20). Pe baza ipotezei deformațiilor mici, unghiul ( $\alpha$ ) format între bara 1, respectiv bara 3 cu axa ( $y$ ) (sau bara 1) rămâne același și după deformarea axială a acestora.

În secțiunea transversală a celor trei bare se produc forțele axiale ( $N_1, N_2, N_3$ ). Forțele axiale ( $N_1$ ) și ( $N_3$ ) se descompun după direcțiile axelor ( $x$ ) și ( $y$ ) rezultând componentele: ( $N_{1x}, N_{1y}, N_{3x}, N_{3y}$ ) care sunt definite în funcție de unghiul ( $\alpha$ ) astfel:



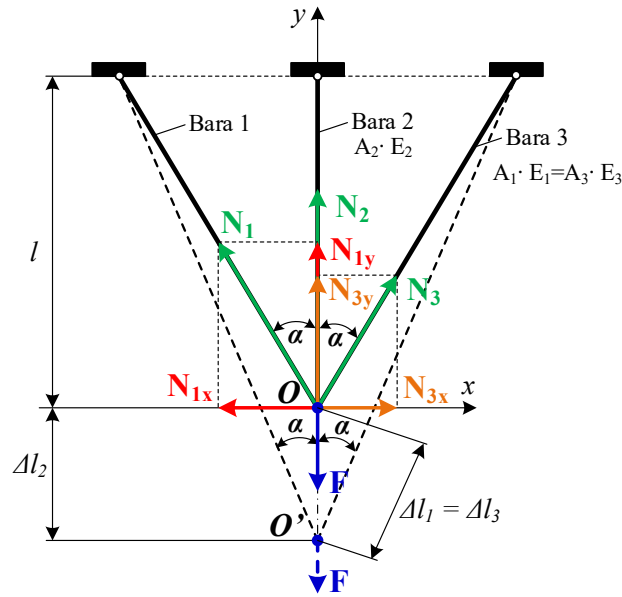


Fig. 2.20. Sistem de bare concurente articulate în punctul  $O$

$$\begin{aligned} N_{1x} &= N_1 \cdot \sin\alpha; & N_{1y} &= N_1 \cdot \cos\alpha \\ N_{3x} &= N_3 \cdot \sin\alpha; & N_{3y} &= N_3 \cdot \cos\alpha \end{aligned} \quad (2.91)$$

Conform Figurii 2.20, se scriu următoarele ecuații de echilibru (de forțe):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{1x} + N_{3x} = 0 \Rightarrow -N_1 \cdot \sin\alpha + N_3 \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = N_3 \quad (2.92)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{1y} + N_2 + N_{3y} - F = 0 \Rightarrow N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 + N_3 \cdot \cos\alpha = F \quad (2.93)$$

$$2 \cdot N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 = F \quad (2.94)$$

unde:  $N_1 \cdot \cos\alpha = N_3 \cdot \cos\alpha \quad (2.95)$

Ecuția suplimentară de deformații este:

$$\Delta l_1 (= \Delta l_3) = \Delta l_2 \cdot \cos\alpha \quad (2.96)$$

$$\frac{N_1 \cdot l}{2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2\alpha} = \frac{N_2 \cdot l}{2 \cdot E_2 \cdot A_2} \Rightarrow \frac{N_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2\alpha} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} \quad (2.97)$$

Cu ecuațiile (2.95) și (2.97) se pot determina expresiile necunoscutelor ( $N_1=N_3$ ) și ( $N_2$ ) sub forma:

$$N_1 = \frac{F}{\frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2\alpha} + 2 \cdot \cos\alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2} \cdot \cos^3\alpha} \quad (2.98)$$

Din relațiile (2.98) rezultă că, eforturile din barele înclinate 1 și 3 depind de rigiditățile la solicitările axiale ale acestora (specifică problemelor static nedeterminate), respectiv de înclinarea lor cu unghiul ( $\alpha$ ).

#### 2.7.4. Tensiuni în bare supuse variației de temperatură

Se consideră bara din Figura 2.21 pentru care se cunoaște lungimea acesteia ( $l$ ), coeficientul de dilatare termică ( $\alpha$ ) și rigiditatea ( $E \cdot A = \text{constant}$ ) dată de: aria secțiunii transversale ( $A$ ) și materialul din care este confecționată bara (modulul de elasticitate  $E$ ).

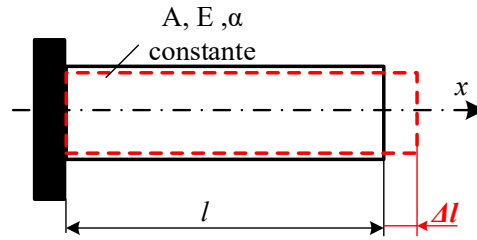


Fig. 2.21. Bară solicitată de variația de temperatură: dilatare liberă

În acest caz, solicitarea axială a barei nu este produsă de o sarcină exterioară, ci de o variație de temperatură, care crește de la valoarea inițială ( $t_1$ ) la cea finală ( $t_2$ ), cele două valori fiind cunoscute.

Sub acțiunea creșterii uniforme a temperaturii, o bară considerată dintr-un material metalic pentru care se cunoaște coeficientul termic ( $\alpha$ ), suferă o deformație axială:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) \quad (2.99)$$

$$\Delta T = (t_2 - t_1) \quad (2.100)$$

unde:

- $\Delta l$  este deformația liniară a urmare a variației de temperatură, [mm]
- $\Delta T$  este diferența de temperatură, [ $^{\circ}\text{C}$ ]
- $t_1$  este temperatura inițială, [ $^{\circ}\text{C}$ ]
- $t_2$  este temperatura finală, [ $^{\circ}\text{C}$ ].

Dacă aceeași bară se încastrează în ambele capete (bara dublu încastrată din Figura 2.22), atunci dilatarea termică este blocată, și drept consecință asupra barei vor acționa reacțiunile ( $H_1$ ) și ( $H_2$ ). În acest caz, ecuația de echilibru este sub forma:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 = H \quad (2.101)$$

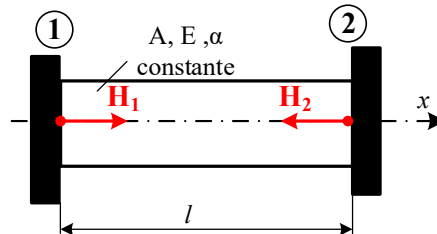


Fig. 2.22. Bară dublu încastrată solicitată de variația de temperatură (dilatare blocată)

Din relația (2.101) rezultă că reacțiunea orizontală ( $H$ ) este mărimea static nedeterminată și este necesară o ecuație suplimentară dată de deformațiile axiale ale barei. Deformația totală a barei ( $\Delta t$ ) este compusă din lungirea datorită dilatației ( $\Delta l_d$ ) produsă de variația de temperatură și de scurtarea ( $\Delta l_c$ ) produsă de efectul reacțiunii ( $H$ ). Reazemele fiind rigide (încăstrări), în care deplasările pe axele ( $x$ ) și ( $y$ ), respectiv rotirea în jurul axei ( $z$ ) sunt nule, se scrie condiția:

$$\Delta l_t = 0 \Rightarrow \Delta l_t = \Delta l_d - \Delta l_c = 0 \quad (2.102)$$

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) - \frac{H \cdot l}{E \cdot A} = 0 \quad (2.103)$$

$$E \cdot A \cdot \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) = H \cdot l \Rightarrow H = E \cdot A \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) \quad (2.104)$$

Pentru calculul de verificare se utilizează:

$$\sigma = \frac{H}{A} \quad (2.105)$$

$$\sigma = \frac{E \cdot A \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)}{A} \quad (2.106)$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) \leq \sigma_a \quad (2.107)$$

Din relația (2.107) rezultă că tensiunea normală depinde de tipul materialului ( $E$  și  $\alpha$ ) și de variația de temperatură ( $\Delta T$ ).

Un alt studiu este și cazul unei bare dublu încastrată, dar cu joc de montare ( $\delta$ ), prezentată în Figura 2.23. În acest caz, sub influența variației de temperatură bara se va lungi cu deformația axială ( $\Delta l$ ), adică cu cantitatea ( $\delta$ ).

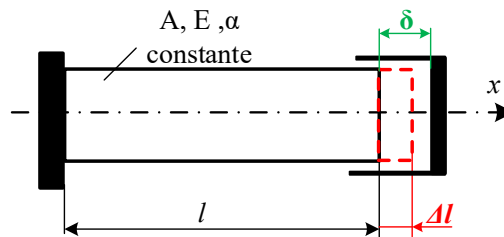


Fig. 2.23. Bară cu rost de dilatare solicitată de variația de temperatură

Și în acest caz, se impune condiția de deformare:

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) - \frac{H \cdot l}{E \cdot A} = \delta \quad (2.108)$$

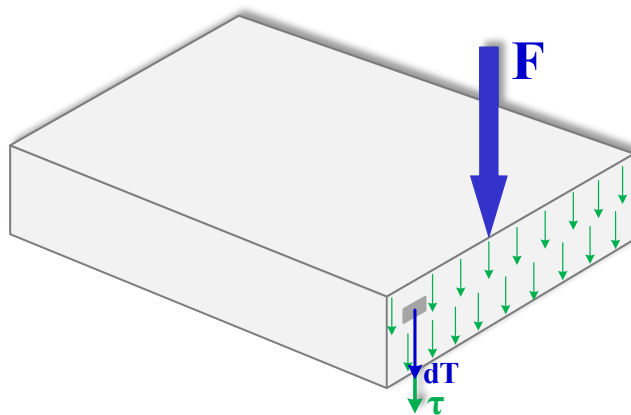
Pentru calculul necunoscutei ( $H$ ) se utilizează relația (2.108) și rezultă:

$$\alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) - \frac{H \cdot l}{E \cdot A} = \delta \Rightarrow H = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (2.109)$$

Dacă, în urma efectuării calculelor, valoarea reacțiunii ( $H$ ) are semn negativ, înseamnă că rostul de dilatare ( $\delta$ ) nu se umple și, ca urmare, nu se produc tensiuni normale ( $\sigma$ ). Dacă reacțiunea ( $H$ ) va fi pozitivă, atunci rostul se va umple și se vor produce tensiuni normale.

### 3. FORFECAREA

<b>3.1. Noțiuni generale</b>	59
<b>3.2. Determinarea deformațiilor la forfecare.</b>	60
<b>Legea lui Hooke. Energia de deformare la forfecare</b>	60
<b>3.3. Aplicațiile forfecării: Calculul îmbinărilor</b>	62
3.3.1. <i>Îmbinări demontabile</i>	64
3.3.1.1. <i>Îmbinări cu bolțuri</i>	64
3.3.1.2. <i>Îmbinări cu șuruburi</i>	66
3.3.1.3. <i>Îmbinări prin pene paralele</i>	69
3.3.2. <i>Calculul îmbinărilor nedemontabile</i>	69
3.3.2.1. <i>Îmbinări nituite</i>	70
3.3.2.2. <i>Calculul îmbinărilor sudate</i>	73



$$\tau = \frac{T}{A}$$

### 3. FORFECAREA

#### 3.1. Noțiuni generale

Solicitarea de forfecare sau de tăiere se produce atunci când asupra unei bare acționează două forțe transversale ( $F$ ), egale și de sens contrar, aplicate perpendicular pe axa longitudinală a acesteia, iar în secțiunea transversală se dezvoltă un efort situat în planul secțiunii, care se numește *forță tăietoare* sau *efort tăietor* ( $T$ ) (Figura 3.1).

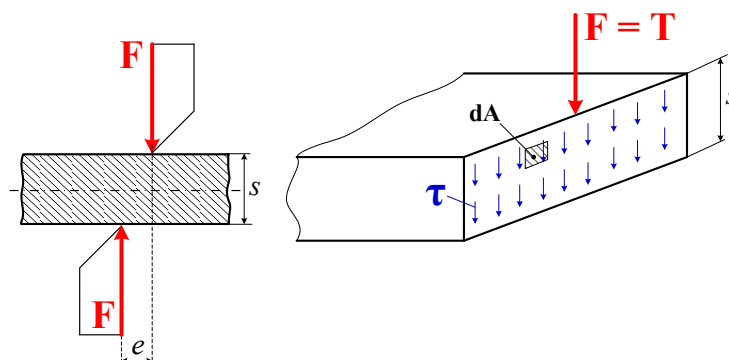


Fig. 3.1. Bară dreptunghiulară solicitată la forfecare (tăiere)

Tensiunile care iau naștere în secțiunea transversală sunt cuprinse în planul secțiunii transversale și poartă denumirea de *tensiuni tangențiale* ( $\tau$ ) și se opun forței tăietoare, căutând să echilibreze corpul. Sub acțiunea forțelor exterioare bara suferă *deformații unghiulare* (sau *lunecări*) ( $\gamma$ ).

Forfecarea pură se obține atunci când tensiunile tangențiale ( $\tau$ ) sunt repartizate uniform pe înălțimea și pe lățimea secțiunii transversale (Figura 3.1), iar tensiunile normale ( $\sigma$ ) sunt nule. În practica inginerescă, fenomenul de forfecare pură se găsește foarte rar, fiind însoțit de o solicitare de încovoiere care de cele mai multe ori se neglijează (respectiv de o solicitare de compresiune sau strivire).

Între forța tăietoare ( $T$ ) și tensiunea tangențială ( $\tau$ ) există relația de legătură:

$$T = \int_A \tau \cdot dA = \tau \cdot A \quad (3.1)$$

unde:  $T$  reprezintă forța tăietoare din secțiunea transversală, [N]  
 $dA$ ,  $A$  este aria elementară, respectiv aria secțiunii transversale, [mm<sup>2</sup>]  
 $\tau$  este tensiunea tangențială, [N/mm<sup>2</sup>].

Din expresia (3.1) rezultă relația de calcul a tensiunii tangențiale:

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (3.2)$$

Relația (3.2) exprimă faptul că tensiunea tangențială se distribuie uniform pe secțiunea transversală. Pe baza relației (3.2) se pot deduce relațiile de dimensionare, verificare și a forței tăietoare capabile pentru o bară supusă solicitării de forfecare (Tabelul 3.1):

Tabelul 3.1. Relații de calcul la solicitarea axială

Dimensionare	Verificare	Forța tăietoare capabilă
$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}$	$\tau_{ef} = \frac{T}{A_{ef}} \leq \tau_a$	$T_{cap} = A_{ef} \cdot \tau_a$

unde:  $T$ ,  $T_{cap}$  este forța tăietoare din secțiunea transversală, respectiv forța tăietoare capabilă să o suporte bara fără a se rupe (sau să nu se producă deformații permanente), [N]  
 $A_{ef}$ ,  $A_{nec}$  este aria efectivă, respectiv necesară (minimă) a secțiunii transversale a barei, [mm<sup>2</sup>]  
 $\tau_{ef}$ ,  $\tau_a$  este tensiunea tangențială efectivă, respectiv admisibilă, [N/mm<sup>2</sup>].

### 3.2. Determinarea deformațiilor la forfecare. Legea lui Hooke.

#### Energia de deformare la forfecare

Pentru studiul deformației la solicitarea de forfecare s-a reprezentat în Figura 3.2 un segment al unei plăci pe care acționează două forțe egale și de sens opus, având distanța ( $l$ ) între ele. Se observă că, în zona de forfecare, două secțiuni transversale alăturate se deplasează una în raport cu cealaltă, astfel încât se produce o deformare unghiulară. Segmentul AD al elementului dreptunghiular ABCD este fix, iar sub acțiunea tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) care acționează în planul segmentelor AB-BC-CD și AD, latura BC a secțiunii se deplasează în planul tensiunii ( $\tau$ ) până în poziția finală, B'C'.

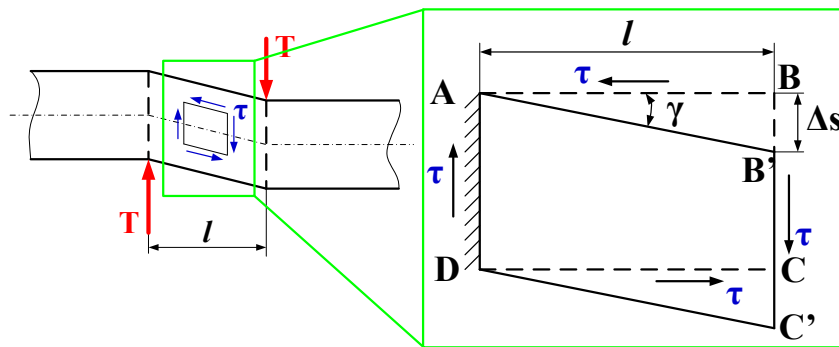


Fig. 3.2. Deformații la forfecare

În Figura 3.2 s-a notat cu ( $\Delta s$ ) deplasarea punctului B în punctul B', iar cu ( $\gamma$ ) deformația specifică unghiulară și reprezintă unghiul format între latura AB (starea inițială, nesolicitată) și latura AB' (după solicitare). Se definesc următoarele mărimi:

- *Lunecarea absolută* ( $\Delta s$ ) este dată de segmentul  $BB' = \Delta s$  și este o mărime ce depinde de dimensiunile elementului considerat.
- *Lunecarea specifică unghiulară* ( $\gamma$ ) este definită de raportul dintre lunecarea absolută ( $\Delta s$ ) și distanța ( $l$ ) dintre fețele ce alunecă:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{l} \quad (3.3)$$

La forfecare, modificarea unghiului drept al paralelipipedului este mică (în baza ipotezei deformațiilor mici), respectiv:

$$\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma = \frac{\Delta s}{l} \quad (3.4)$$

Legătura dintre tensiunile tangențiale ( $\tau$ ) și deformațiile unghiulare (lunecările specifice  $\gamma$ ), care iau naștere în piesele solicitate la forfecare, se poate stabili în urma unor încercări experimentale la forfecare pură. Analog cu încercarea la tracțiune, experimental se obține o curbă caracteristică pentru forfecarea pură prezentată în Figura 3.3, unde porțiunea liniară OA de pe curbă exprimă legătura între tensiunile tangențiale ( $\tau$ ) și lunecările specifice ( $\gamma$ ). Astfel, legea lui Hooke la solicitarea de forfecare este definită de relația:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (3.5)$$

unde:  $\tau$  este tensiunea tangențială,  $[\text{N}/\text{mm}^2]$   
 $G$  reprezintă modulul de elasticitate transversală,  $[\text{N}/\text{mm}^2]$  și, care se determină în mod experimental pentru fiecare tip de material  
 $\gamma$  reprezintă deformațiile specifice unghiulare.

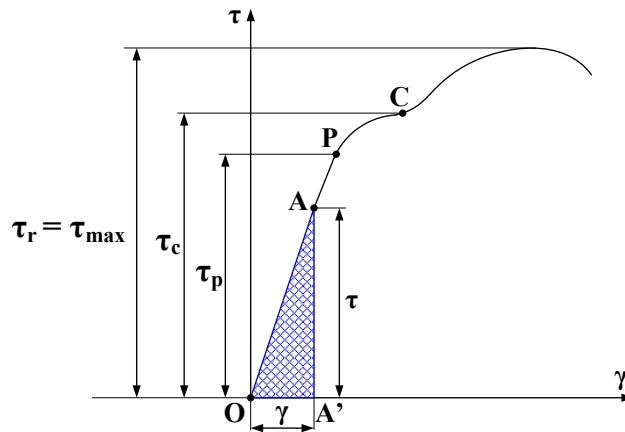


Fig. 3.3. Curba caracteristică a materialului la forfecare

În cazul forfecării, forța tăietoare ( $T$ ), care cauzează o lunecare absolută ( $\Delta s$ ), produce lucrul mecanic exterior:

$$L_e = \frac{1}{2} T \cdot \Delta s \quad (3.6)$$

Coefficientul  $\frac{1}{2}$  din relația (3.6) apare datorită variației liniare a forței tăietoare ( $T$ ) în raport cu deformația ( $\Delta s$ ), variație de la valoarea 0 la valoarea maximă ( $T$ ), valoarea medie fiind  $\frac{0+T}{2} = \frac{1}{2} \cdot T$ .

Având în vedere legea lui Hooke pentru solicitarea de forfecare (3.5), respectiv definiția lunecării specifice unghiulare (3.4), se poate exprima lunecarea absolută ( $\Delta s$ ) ca fiind:

$$\Delta s = \gamma \cdot l = \frac{\tau}{G} \cdot l \quad (3.7)$$

În relația (3.7) se introduce expresia (3.2) a tensiunii tangențiale ( $\tau$ ) și se obține deformația absolută:

$$\Delta s = \frac{T \cdot l}{G \cdot A} \quad (3.8)$$

unde:  $\Delta s$  reprezintă deformația/deplasarea sau lunecarea absolută, [mm]  
 $T$  este forța tăietoare din secțiunea transversală, [N]  
 $l$  este lungimea barei supusă la forfecare, [mm]  
 $G$  este modulul de elasticitate transversală, [N/mm<sup>2</sup>]  
 $A$  este aria secțiunii transversale, [mm<sup>2</sup>]  
 $G \cdot A$  reprezintă modulul de rigiditate la forfecare.

Având în vedere faptul că lucrul mecanic exterior (3.6) se transformă în energie potențială de deformare ( $U_d$ ), expresia lunecării absolute ( $\Delta s$ ) din relația (3.8) și expresia tensiunii tangențiale (3.2), se obține:

$$U_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2 \cdot l}{G \cdot A} = \frac{\tau^2 \cdot l \cdot A}{2 \cdot G} = L_e \quad (3.9)$$

În relația (3.9), produsul ( $l \cdot A$ ) reprezintă volumul elementului considerat. Pe de altă parte, *energia potențială specifică de deformare* ( $U_s$ ) este definită de următoarea relație:

$$U_s = \frac{U_d}{V} = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} \quad (3.10)$$

Relația de calcul a energiei potențiale specifice de deformare (3.10) la solicitarea de forfecare reprezintă aria hășurată a triunghiului  $OAA'$  prezentată în Figura 3.3.

### 3.3. Aplicațiile forfecării: Calculul îmbinărilor

Într-o structură mecanică, îmbinarea elementelor componente se realizează prin intermediul unor organe (piese) de asamblare sau de îmbinare (bolțuri, șuruburi, nituri, pene etc.). De regulă, în aceste piese de asamblare, cea mai importantă solicitare este cea de forfecare, ea fiind determinantă în apariția stării periculoase (a fenomenului de rupere) prin lunecările ce le provoacă. Alături de forfecare pot să apară și alte solicitări, în special întinderea și strivirea, efectul încovoierii fiind, de regulă, neglijat. În Figura 3.4 se prezintă clasificarea îmbinărilor, având în vedere tipul acestora.

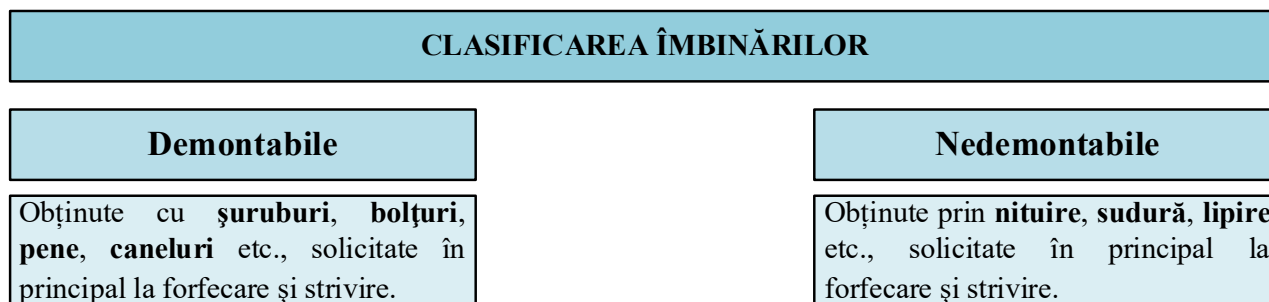


Fig. 3.4. Clasificarea îmbinărilor

Pentru realizarea calculului elementelor de îmbinare se ține cont de următoarele ipoteze simplificatoare:

- (1) Tensiunile tangențiale ( $\tau$ ) sunt considerate repartizate uniform în secțiunea forfecată
- (2) Sarcinile exterioare sunt distribuite uniform asupra elementelor de asamblare
- (3) Transmiterea eforturilor de la o piesă la alta se realizează prin intermediul elementelor de asamblare.

La calculul îmbinărilor se definesc următoarele tipuri de secțiuni transversale:

- *Secțiunea brută*, este suprafața totală măsurată a secțiunii transversale fără a ține cont de prelucrări tehnologice sau eventuale zone reduse (precum găuri, caneluri, sau alte defecte geometrice)
- *Secțiunea netă*, reprezintă secțiunea micșorată prin procese tehnologice de prelucrare (strunjire, frezare, găurire etc.). Cea mai mică secțiune transversală netă se numește *secțiune critică*. Ea se utilizează de obicei în calculul de rezistență a îmbinărilor.

Spre exemplificare, în Figura 3.5 se prezintă o piesă plană cu secțiunea transversală dreptunghiulară, asupra căreia se realizează de-a lungul piesei, patru secțiuni transversale (secțiunile A – A, B – B, C – C, D – D).

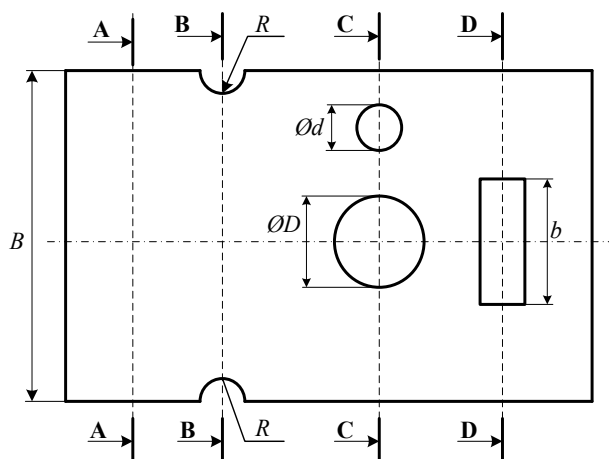
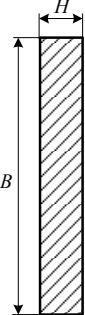
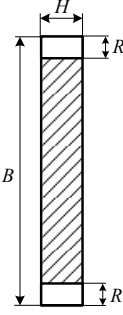
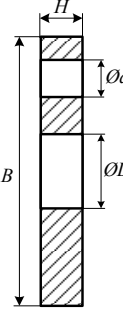
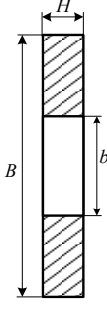


Fig. 3.5. Piesa supusă secționării transversale



În urma secționării se obțin următoarele secțiuni transversale (Tabelul 3.2):

Tabelul 3.2. Calculul ariei în diferite secțiuni transversale ale piesei

Secțiunea A – A:	Secțiunea B – B:	Secțiunea C – C:	Secțiunea D – D:
			
Aria A – A:	Aria critică B – B:	Aria critică C – C:	Aria critică D – D:
$A = B \cdot H$	$A_{\text{critică}} = B \cdot H - 2R \cdot H$	$A_{\text{critică}} = B \cdot H - (D + d) \cdot H$	$A_{\text{critică}} = B \cdot H - d \cdot H$
	$A_{\text{critică}} = H \cdot (B - 2R)$	$A_{\text{critică}} = H \cdot [B - (D + d)]$	$A_{\text{critică}} = H \cdot (B - d)$

Observație: (1) În calculul de rezistență al piesei se ia în considerare aria critică cu valoarea cea mai mică.

### Aplicație rezolvată

Aplicația 3-1. Să se determine lățimea efectivă ( $b_{ef}$ ) pentru bara din figura de mai jos, știind că aceasta este solicitată de forța axială  $F = 12 \text{ kN}$ . Se cunosc: valoarea grosimii  $h_{ef} = 5 \text{ mm}$ , diametrul găurii  $d_{ef} = 12 \text{ mm}$  și rezistența admisibilă a materialului  $\sigma_a = 130 \text{ N/mm}^2$ .

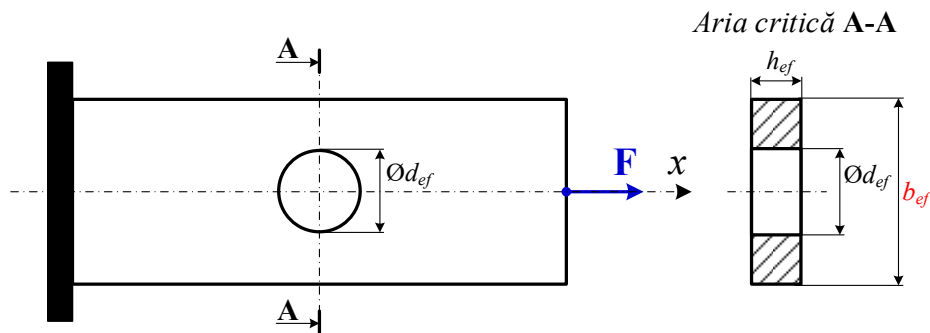


Fig. 3.6. Bară cu secțiune dreptunghiulară solicitată axial

Rezolvare: Pentru calculul de dimensionare (lățimea  $b_{ef}$ ), se ia în considerare aria critică (sau aria minimă, aria transversală cea mai mică), care se calculează cu relația:

$$A_{\text{critică}} = (b_{nec} - d_{ef}) \cdot h_{ef}$$

Știind că bara este supusă unei solicitări de întindere de forța axială ( $F$ ), atunci, aria necesară se poate calcula cu relația:

$$A_{\text{nec}} = \frac{F}{\sigma_a}$$

Egalând aria critică cu aria necesară se obține relația de calcul a lățimii necesare ( $b_{nec}$ ):

$$(b_{nec} - d_{ef}) \cdot h_{ef} = \frac{F}{\sigma_a} \Rightarrow b_{nec} = \frac{1}{h_{ef}} \cdot \left( \frac{F}{\sigma_a} + d_{ef} \cdot h_{ef} \right)$$

unde: |  $F$  reprezintă forța aplicată, [N]

$d_{ef}$  este diametrul efectiv al găurii, [mm]  
 $h_{ef}$  este grosimea efectivă a secțiunii transversale, [mm]  
 $b_{nec}$  este lățimea necesară a secțiunii transversale, [mm].

Se înlocuiesc datele cunoscute în formula obținută ( $b_{nec}$ ) și se obține:

$$b_{nec} = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{12 \cdot 10^3}{130} + 12 \cdot 5 \right) \Rightarrow b_{nec} = 30,46 \text{ mm}$$

După efectuarea calculului teoretic, s-a obținut valoarea necesară a lățimii secțiunii critice transversale. Pentru obținerea valorii efective ( $b_{ef}$ ), valoarea necesară (sau calculată) se rotunjește astfel încât  $b_{ef} > b_{nec}$ . Valoarea efectivă reprezintă valoarea dimensională reală a piesei obținută prin procesul de prelucrare tehnologică. Astfel, se obține:

$$b_{nec} = 30,46 \text{ mm} \Rightarrow b_{ef} = 32 \text{ mm}$$

### 3.3.1. Îmbinări demontabile

#### 3.3.1.1. Îmbinări cu bolțuri

Spre analiză, în Figura 3.7 se prezintă un ansamblu format din Piesa 1 și Piesa 2, îmbinarea realizându-se prin intermediul unui singur bolț cu cap. Ansamblul este solicitat de forțele ( $F$ ), egale și de sens contrar, aplicate pe axa geometrică ( $x$ ) a ansamblului. Se cunoaște valoarea forțelor aplicate ( $F$ ), respectiv grosimea ( $h_1$ ) a Pieseii 1, și se propune calculul diametrului efectiv a bolțului ( $d_b$ ) și a grosimii ( $h$ ) a Pieseii 2. La final, se va face calculul de verificare la rezistență al bolțului și al Pieseii 2.

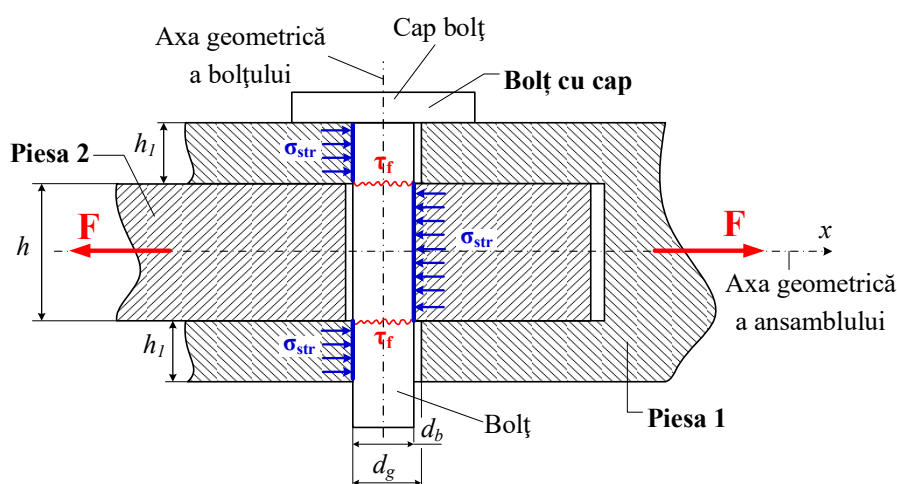


Fig. 3.7. Asamblare demontabilă cu bolț

În figură s-au notat:

- F – forța aplicată care solicită axial ansamblul dat, [N]
- $d_b$  – diametrul bolțului, [mm]
- $d_g$  – diametrul găurii de asamblare, [mm]
- $h, h_1$  – grosimea Pieseii 2, respectiv a brațelor Pieseii 1, [mm]
- $\sigma_{str}$  – tensiunea normală de strivire, [N/mm<sup>2</sup>]
- $\tau_f$  – tensiunea tangențială de forfecare, [N/mm<sup>2</sup>].

Conform figurii, forța ( $F$ ) acționează perpendicular pe axa bolțului, acesta fiind solicitat la *forfecare* (având două arii de forfecare, cele două secțiuni transversale ale bolțului cuprinse între piesele 1 și 2), respectiv la *strivire* ale elementelor în contact. Calculele de dimensionare și de verificare se vor efectua

ținând cont de aceste solicitări. Ca regulă generală, după efectuarea calculelor de dimensionare se obține valoarea necesară (sau minimă) a piesei dimensionate, urmând ca apoi această valoare necesară ( $val.nec.$ ) să se rotunjească la valoarea superioară (sau se va alege din standard) și să se obțină valoarea efectivă ( $val.ef.$ ), adică:  $val.ef. > val.nec.$

#### a) Calcule de dimensionare

▪ *Dimensionarea bolțului* se efectuează considerând solicitarea de forfecare, astfel că este necesar să se ia în calcul aria de forfecare pentru un bolț scrisă sub forma expresiilor:

$$A_f = \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4} \cdot n \cdot i \quad (3.11)$$

$$A_f = \frac{F}{\tau_a} \quad (3.12)$$

Din egalarea relațiilor (3.11) și (3.12) se obține formula generală care permite determinarea diametrului necesar ( $d_{nec}$ ) a unui bolț:

$$d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tau_a \cdot n \cdot i}} \quad (3.13)$$

unde:  $F$  reprezintă forța aplicată, [N]  
 $d_{nec}$  este diametrul necesar al găurii, [mm]  
 $\tau_a$  este tensiunea tangențială admisibilă a materialului la forfecare și se calculează astfel:  $\tau_{a_f} = 0,8 \cdot \sigma_a$ , [N/mm<sup>2</sup>]  
 $n$  reprezintă numărul total al ariilor de forfecare pentru un bolț  
 $i$  reprezintă numărul total de bolțuri din ansamblu.

**Observație:** (1) Cu  $d_{nec}$  se rotunjește/ se alege  $d_{ef}$  a bolțului ( $d_{ef} > d_{nec}$ ). De regulă, montajul cu bolțuri se face cu joc, astfel că diametrul găurii de asamblare ( $d_g$ ) se obține:  $d_g = d_{ef} + (0,5 \div 1 \text{ mm})$ , [mm].

▪ Pentru *calculul grosimii necesare* ( $h_{nec}$ ) a Pieseii 2 se consideră solicitarea de strivire care se produce între bolț și Piesa 2 atunci când acționează forța ( $F$ ). Pentru calculul de dimensionare, aria de strivire se echivalează cu o arie dreptunghiulară cu înălțimea ( $h_{nec}$ ) și lățimea ( $d_g$ ). Astfel, se scriu următoarele relații de calcul pentru ariile de strivire:

$$A_{str} = h_{nec} \cdot d_g \cdot m \cdot i \quad (3.14)$$

$$A_{str} = \frac{F}{\sigma_{astr}} \quad (3.15)$$

Din egalarea relațiilor (3.14) și (3.15) se obține relația generală care permite determinarea grosimii necesare ( $h_{nec}$ ) a Pieseii 2:

$$h_{nec} = \frac{F}{\sigma_{astr} \cdot d_g \cdot m \cdot i} \quad (3.16)$$

unde:  $F$  reprezintă forța aplicată, [N]  
 $h_{nec}$  este grosimea necesară a Pieseii 2, [mm]  
 $\sigma_{astr}$  este tensiunea normală admisibilă la strivire a materialului și se poate calcula cunoscând tensiunea normală admisibilă la tracțiune a materialului, astfel:  
 $\sigma_{astr} = (1,5 \div 2) \cdot \sigma_a$ , [N/mm<sup>2</sup>]  
 $m$  reprezintă numărul total al ariilor de strivire pentru un bolț  
 $i$  reprezintă numărul total de bolțuri din ansamblu.

**Observație:** (1) Valoarea  $h_{nec}$  se rotunjește/se alege  $h_{ef}$  a grosimii piesei 2 ( $h_{ef} > h_{nec}$ ).

b) Calcule de verificare la rezistență

Calculul de dimensionare este urmat întotdeauna de calculul de verificare la rezistență a pieselor. Pentru ansamblul propus, se vor efectua calculele de verificare pentru bolt, respectiv pentru Piesa 2. Ca regulă generală, pentru ca piesa dimensionată să reziste la solicitarea exterioară trebuie ca tensiunea calculată (sau efectivă) trebuie să fie mai mică sau cel puțin egală cu tensiunea admisibilă a materialului din care este confecționată, adică  $\sigma_{ef} \leq \sigma_a$ . Relațiile de verificare sunt următoarele:

a) Pentru bolt:	$\tau_{ef} = \frac{F}{A_{ef}} \leq \tau_a$	(3.17)
b) Pentru Piesa 2:	$\sigma_{efstr} = \frac{F}{A_{ef}} \leq \sigma_{astr}$	(3.18)

**Observație:** (1) În expresiile (3.17), (3.18) ariile efective ( $A_{ef}$ ) se calculează utilizând dimensiunile efective și cu expresiile (3.11) și (3.14).

3.3.1.2. Îmbinări cu șuruburi

Îmbinarea cu șuruburi este una dintre cele mai utilizate îmbinări din domeniul ingineriei mecanice (și nu numai) întâlnindu-se la prinderea carcaselor din componența sistemelor mecanice, fixarea elementelor mecanice pe diferite suprafețe etc.

În Figura 3.8 se prezintă un ansamblu format din două plăci cu grosimile ( $t_1, t_2$ ) fixate prin intermediul unui șurub de prindere cu cap hexagonal cu diametrul ( $d_s$ ). Montajul se realizează cu joc astfel că, plăcile sunt prevăzute cu o gaură de asamblare cu diametrul ( $d_g$ ). Conform figurii, ansamblul este solicitat la întindere de două forțe ( $F$ ), egale și de sens contrar. Reducând acțiunea forței ( $F$ ) pe fiecare element din cadrul ansamblului, rezultă că: plăcile sunt solicitate la întindere de forța aplicată ( $F$ ); tija șurubului este solicitată la forfecare de forța ( $F$ ) care acționează perpendicular pe axa tijei șurubului și la strivire la contactul dintre tija șurubului și cele două plăci.

Pentru ansamblul prezentat se propune dimensionarea tijei șurubului ( $d_s$ ) (și implicit a găurii de asamblare,  $d_g$ ) și efectuarea calculelor de verificare.

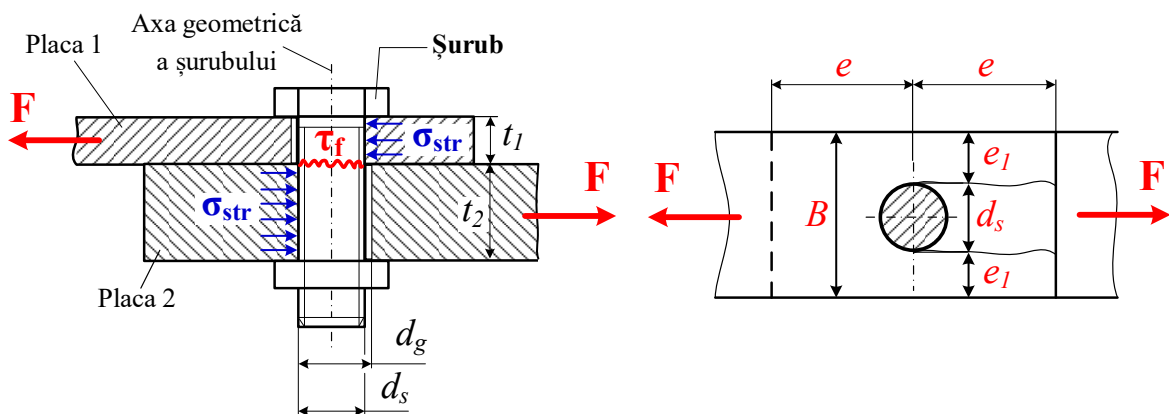


Fig. 3.8. Îmbinare cu șurub

În figură s-au notat:

- $F$  – forța aplicată, [N]
- $d_s$  – diametrul șurubului, [mm]
- $d_g$  – diametrul găurii de asamblare, [mm]

$t_1, t_2$  – grosimea plăcilor 1 și 2, [mm]  
 $B$  – lățimea plăcilor, [mm]  
 $e$  – distanța de la axele geometrice ale șurubului la marginile plăcilor, [mm]  
 $e_1, e_2$  – distanța de la axele geometrice ale șurubului la muchiile laterale ale plăcilor, [mm]  
 $\sigma_{str}$  – tensiunea normală de strivire, [N/mm<sup>2</sup>]  
 $\tau_f$  – tensiunea tangențială de forfecare, [N/mm<sup>2</sup>].

#### a) Dimensionarea șurubului de prindere

Ca și în cazul bolțului, dimensionarea șurubului de prindere se realizează ținând cont de solicitarea de forfecare, astfel:

$$A_f = \frac{\pi \cdot d_{s\_nec}^2}{4} \cdot n \cdot i \quad (3.19)$$

$$A_f = \frac{F}{\tau_a} \quad (3.20)$$

Din egalarea relațiilor (3.19) și (3.20) se obține relația generală care permite determinarea diametrului necesar ( $d_{s\_nec}$ ) al șurubului:

$$d_{s\_nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tau_a \cdot n \cdot i}} \quad (3.21)$$

unde:

- F reprezintă forța aplicată, [N]
- $d_{s\_nec}$  este diametrul necesar al șurubului, [mm]
- $\tau_a$  este tensiunea tangențială admisibilă a materialului, [N/mm<sup>2</sup>]
- $n$  reprezintă numărul total al ariilor de forfecare pentru un șurub
- $i$  reprezintă numărul total de șuruburi din ansamblu.

**Observații:** (1) Șurubul de fixare fiind un element de fixare standardizat, cu valoarea calculată ( $d_{s\_nec}$ ), valoarea diametrului efectiv al șurubului ( $d_{s\_ef}$ ) se alege din standarde, ( $d_{s\_ef} > d_{s\_nec}$ ).

La îmbinarea cu un număr de ( $n$ ) șuruburi de prindere, forța aplicată se consideră uniform distribuită pe fiecare șurub. Astfel, pentru un șurub, sarcina sau forța repartizată se calculează:

$$F_1 = \frac{F}{n} \quad (3.22)$$

#### b) Calculul dimensiunilor ( $e$ ) și ( $e_1$ )

• Dimensiunea ( $e$ ) reprezintă distanța de la șurub și până la marginea plăcii, măsurată pe direcția axială, iar pentru calculul acesteia se ia în considerare aria de forfecare din Figura 3.9.

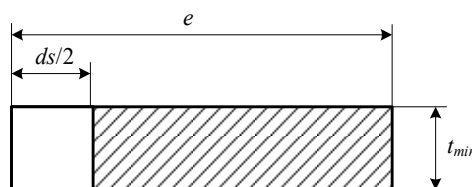


Fig. 3.9. Aria de forfecare (secțiune longitudinală)

Conform Figurii 3.9, aria de forfecare se poate scrie sub forma:

$$A_f = (e_{nec} - \frac{d_s}{2}) \cdot 2 \cdot t_{min} \quad (3.23)$$

$$A_f = \frac{F}{\tau_a} \quad (3.24)$$

unde:  $t_{min}$  reprezintă grosimea cea mai mică a plăcii, [mm]  
coeficientul 2 se referă la două arii de forfecare de-a lungul plăcii (vezi Figura 3.8).

Din egalarea expresiilor (3.23) și (3.24) se obține relația de calcul a valorii necesare ( $e_{nec}$ ):

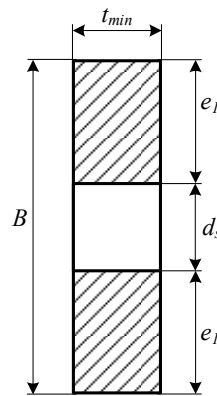
$$e_{nec} = \frac{1}{2 \cdot t_{min}} \left( \frac{F}{\tau_a} + \frac{d_s}{2} \cdot t_{min} \right) \quad (3.25)$$

**Observație:** (1) Valoarea  $e_{nec}$  se rotunjește și se obține distanța  $e_{ef}$  ( $e_{ef} > e_{nec}$ ).

Calculul de verificare se efectuează utilizând expresia:

$$\tau_{ef} = \frac{F}{2 \cdot t_{min} (e_{ef} - \frac{d_s}{2})} \leq \tau_{a,f} \quad (3.26)$$

• Dimensiunea ( $e_l$ ) reprezintă distanța de la șurub și până la marginea plăcilor, măsurată pe direcția transversală, iar pentru calculul acesteia se ia în considerare aria de forfecare din Figura 3.10.



**Fig. 3.10.** Aria de forfecare (secțiune transversală)

Aria de forfecare prezentată în Figura 3.10 se poate scrie astfel:

$$A_f = t_{min} \cdot (B - d_s) \quad (3.27)$$

$$A_f = 2 \cdot e_{1,nec} \cdot t_{min} \quad (3.28)$$

Din egalarea expresiilor (3.27) și (3.28) se obține formula de calcul a valorii necesare ( $e_{1,nec}$ ):

$$e_{1,nec} = \frac{(B - d_s)}{2} \quad (3.29)$$

**Observație:** (1) Valoarea  $e_{1,nec}$  se rotunjește și se obține distanța  $e_{1,ef}$  ( $e_{1,ef} > e_{1,nec}$ ).

### c) Calculul de verificare la rezistență

Calculul de verificare a tensiunii de strivire care apare în zona de contact dintre tija șuruburilor și pereții găurii de asamblare, presupune evaluarea raportului dintre forța aplicată ( $F$ ) și aria de strivire ( $A_{str}$ ):

$$\sigma_{str} = \frac{F}{t_{min} \cdot d_s \cdot n} \leq \sigma_{a,str} \quad (3.30)$$

unde:  $A_{str} = t_{min} \cdot d_s \cdot n \quad (3.31)$

### 3.3.1.3. Îmbinări prin pene paralele

Pana paralelă (sau longitudinală) este un element de îmbinare întâlnit în general la montajul elementelor care transmite o mișcare de rotație sau un cuplu, cum ar fi asamblarea roților dințate pe arbori de transmisie. Ca atare, pana paralelă are dublu rol: de *fixare* pentru transmiterea cuplului și de *siguranță* pentru sarcini accidentale (suprasarcini).

Penele paralele sunt solicitate *la forfecare* în zona de separare a elementelor asamblate și *la strivire* pe suprafața de contact a penei cu fiecare din elementele pe care le îmbină (Figura 3.11).

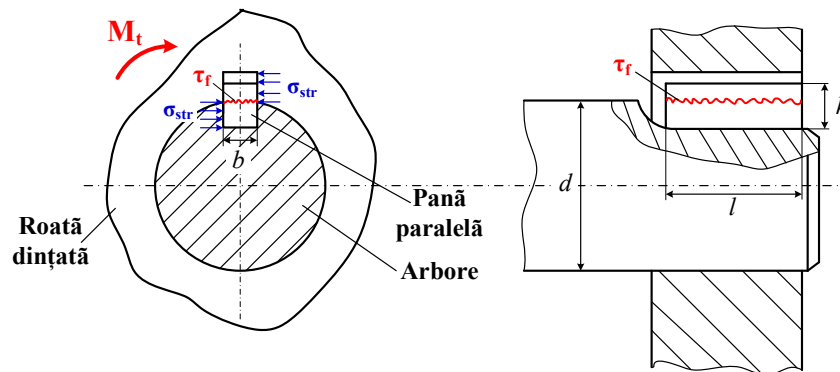


Fig. 3.11. Asamblare cu pană paralelă

În figură s-au notat:  $M_t$  – momentul de torsiune aplicat, [N·mm]  
 $d$  – diametrul arborelui, [mm]  
 $l, b, h$  – lungimea, lățimea respectiv înălțimea penei paralele, [mm].

Forța (F) care solicită pana la forfecare se poate calcula cunoscând momentul de torsiune ( $M_t$ ) și diametrul arborelui ( $d$ ) astfel:

$$M_t = F \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow F = \frac{2 \cdot M_t}{d} \quad [\text{N}] \quad (3.32)$$

Momentul de torsiune ( $M_t$ ) se poate determina dacă se cunoaște puterea motorului (P) în [kW] și turația (n) în [rot/min] a motorului de acționare:

$$M_t = 9550 \cdot \frac{P \text{ [kW]}}{n \left[ \frac{\text{rot}}{\text{min}} \right]} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.33)$$

Lungimea penei (l) se poate calcula:

$$F = l_{nec} \cdot b_{ef} \cdot \tau_{af} \Rightarrow l_{nec} = \frac{F}{b_{ef} \cdot \tau_{af}} \Rightarrow l_{ef} > l_{nec} \quad (3.34)$$

Calculul de verificare a penei se face la solicitarea de strivire astfel:

$$\sigma_{str} = \frac{F}{l_{ef} \cdot \frac{h_{ef}}{2}} \leq \sigma_{a\_str} \quad (3.35)$$

**Observație:** (1) În practică, pana paralelă este definită de parametrii dimensionali  $b \times h \times l$  (lățimea  $\times$  înălțimea  $\times$  lungimea). Lățimea penei (b) se alege în funcție de diametrul arborelui și are o valoare standardizată.

### 3.3.2. Calculul îmbinărilor nedemontabile

Îmbinările nedemontabile asigură rigiditatea structurilor. Tehnologic sunt utilizate îmbinările nituite și îmbinările sudate, însă în ultima perioadă se utilizează tot mai des îmbinările prin lipire. La îmbinările nedemontabile se admite ipoteza inexistenței lunecărilor relative între piese (deși în realitate nu e așa).

Din categoria îmbinărilor nedemontabile fac parte îmbinările nituite, sudate, lipite etc. În continuare se vor analiza, din punctul de vedere al calculelor rezistenței materialelor, câteva cazuri din această categorie.

### 3.3.2.1. Îmbinări nituite

Îmbinările nituite sunt îmbinări nedemontabile care se desfac doar prin distrugerea elementului de legătură, adică nitul. Îmbinările nituite sunt des întâlnite în cazul construcții metalice, cum ar fi: cazane de înaltă presiune, centrale termice, la construcția navală, aeronautică, construcția podurilor, îmbinarea a două materiale diferite, îmbinarea materialelor nesudabile etc.

Pentru realizarea nituirii se execută în prealabil găurirea pieselor care se îmbină. Pentru introducerea ușoară a nitului în montaj, diametrul găurii este mai mare cu  $(0,5 \div 1 \text{ mm})$  decât diametrul nitului. Ca urmare, prin baterea la rece sau la cald, tija nitului va umple complet gaura de asamblare astfel că, în calculele de rezistență se va considera diametrul găurii de asamblare. În cazul acestor asamblări, în nituri, poate apărea un proces mecanic numit *curgere lentă* sau *fluaj*, specific materialelor supuse la sarcini constante pe o perioadă lungă de timp. Prin deformare plastică, orice material își pierde o parte din capacitatea de rezistență, motiv pentru care numărul niturilor se suplimentează.

În general se pot întâlni două proceduri de îmbinări nituite: *îmbinări directe* – îmbinări prin nituri fără elemente intermediare; *îmbinări indirecte* – utilizând elemente intermediare de legătură numite *eclise*.

#### 3.3.2.1.1 Îmbinări directe

##### ▪ Calculul de rezistență al nitului

Din punct de vedere mecanic, solicitarea niturilor este una complexă, pentru calculul acestora se neglijează: forța de strângere, aplicarea neuniformă a forțelor exterioare pe nituri, distribuția neuniformă a tensiunilor de strivire pe secțiunea transversală a niturilor.

În Figura 3.12 se consideră un ansamblu format din două table cu grosimi diferite ( $s_1$  și  $s_2$ ) și lățimea ( $B$ ), prinse prin intermediul a două nituri, cu diametrul ( $d_n$ ). Asupra ansamblului acționează un sistem de două forțe egale și de sens contrar, perpendicular pe axa longitudinală a niturilor. Conform Figurii 3.12, niturile sunt solicitate *la forfecare*, rezultând tensiunea tangențială ( $\tau_f$ ), respectiv *la strivire*, în zonele de contact dintre tijele niturilor și table, luând naștere tensiunile de strivire ( $\sigma_{str}$ ).

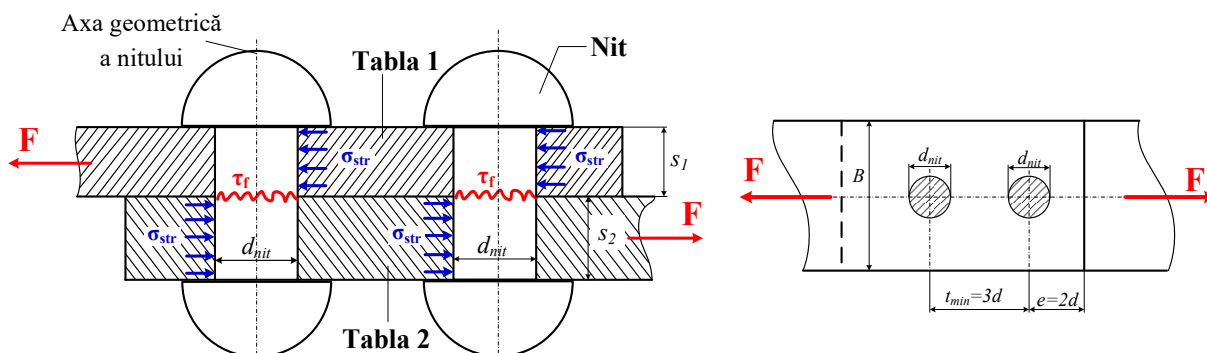


Fig. 3.12. Asamblare cu nit

În figură s-au notat:  $F$  – forța aplicată, [N]  
 $d_{nit}$  – diametrul nitului, [mm]  
 $B, s_1, s_2$  – lățimea, respectiv grosimea tablelor, [mm]



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{str.} - \text{tensiunea normală de strivire, [N/mm}^2] \\ \tau_f - \text{tensiunea tangențială de forfecare, [N/mm}^2]. \end{array} \right.$$

- Numărul necesar de nituri ( $n_{nec}$ ) se calculează cu relația:

$$n_{nec} = 1,2 \cdot \frac{F}{F_{1\_min}} \quad (3.36)$$

unde, coeficientul 1,2 ține seama de faptul că forța ( $F$ ) nu se distribuie uniform pe nituri.

În relația (3.36), forța ( $F_{1\_min}$ ) reprezintă forța minimă capabilă de a fi preluată de un nit solicitat la forfecare sau strivire (cu peretele găurii de asamblare). Forța ( $F_{1\_min}$ ) se alege ca fiind valoarea minimă dintre:

$$F_{1\_f} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot i \cdot \tau_{a\_f} \quad (3.37)$$

$$F_{1\_str} = d_{nit} \cdot s_{min} \cdot \sigma_{a\_str} \quad (3.38)$$

unde:  $\left\{ \begin{array}{l} i \text{ reprezintă numărul secțiunilor de forfecare pentru un nit} \\ s_{min} \text{ este grosimea minimă a tablelor nituite, [mm]} \\ d_{nit} \cdot s_{min} \text{ este aria de strivire, [mm}^2]. \end{array} \right.$

- Diametrul nitului se alege în funcție de grosimea minimă a tablei îmbinate și se poate calcula cu relația aproximativă (3.39) sau cu cea empirică formulată de C. Bach, relațiile (3.40):

$$d_{nit} = (1,8 \div 2) \cdot s_{min} \quad (3.39)$$

$$d_{nit} = \sqrt{5 \cdot h_m} - a \text{ [cm]} \quad \text{sau} \quad d_{nit} = 7 \cdot \sqrt{h_m} - a \text{ [mm]} \quad (3.40)$$

unde:  $\left\{ \begin{array}{l} h_m \text{ reprezintă grosimea medie a tablelor (pieselor) de îmbinat, [cm]} \\ a \text{ reprezintă un coeficient care se va alege astfel: } a = 0,2 \text{ cm, respectiv } a = 2 \text{ mm pentru} \\ \text{îmbinări nitute de rezistență; } a = 0,4 \text{ cm, respectiv } a = 4 \text{ mm pentru îmbinări nitute de etanșare} \\ \text{obținute prin suprapunere; } a = 0,6 \text{ cm, respectiv } a = 6 \text{ mm pentru îmbinări nitute de etanșare} \\ \text{realizată cu ajutorul ecliselor.} \end{array} \right.$

- Pasul nituirii se poate calcula, ținând cont de condiția ca între două nituri consecutive, tabla să reziste la forfecare, respectiv nitul să reziste la strivire:

$$t_{nit\_nec} = 3 \cdot d_{nit} \quad (3.41)$$

- Presupunând o rezistență egală la forfecare a tablelor (având în vedere existența a două secțiuni de forfecare) și a nitului la strivire, se poate determina distanța ( $e$ ) față de marginea piesei (Figura 3.12), după cum urmează:

$$d_{nit} \cdot s_{min} \cdot \sigma_{a\_str} = 2 \cdot \left( e - \frac{d_{nit}}{2} \right) \cdot s_{min} \cdot \tau_{a\_f} \quad (3.42)$$

După efectuarea calculelor, rezultă expresia de calcul a distanței ( $e$ ) sub forma:

$$e = \frac{d_{nit}}{2} \cdot \left( 1 + \frac{\sigma_{a\_str}}{\tau_{a\_f}} \right) \quad (3.43)$$

Totodată, literatura de specialitate oferă o relație practică ce permite determinarea facilă a distanței ( $e$ ):

$$e = 2 \cdot d_{nit} \quad (3.44)$$

- Distanța minimă dintre nituri se calculează cu relațiile aproximative :

$$e_2 = 2 \cdot d_{nit}; \quad e_1 = 3 \cdot d_{nit} \quad (3.45)$$

### 3.3.2.1.2. Îmbinarea indirectă

La îmbinarea indirectă se folosesc niște elemente de legătură denumite *eclise*. În cazul acestor tipuri de îmbinări indirecte cu eclise, efectul încovoierii este anulat, deoarece forțele acționează pe aceeași dreaptă suport, care de regulă, este axa longitudinală a ansamblului. Calculul de dimensionare a elementelor care compun asamblul trebuie să se efectueze astfel încât *condiția de rezistență să fie îndeplinită* [2].

În Figura 3.13 se prezintă un astfel de ansamblu format din două eclise cu grosimea ( $h_1$ ) și două platbenzi având grosimea ( $h$ ), care sunt prinse prin intermediul a două nituri cu diametrul ( $d_{nit}$ ). De asemenea, pe figură se specifică distanța ( $e$ ), care este distanța de la tija nitului la capătul tablei, respectiv pasul nitului ( $t$ ), distanța dintre două nituri consecutive. Asupra ansamblului acționează două forțe egale și de sens contrar, aplicate pe axa longitudinală a ansamblului. Având în vedere direcția de acțiune a forțelor aplicate ( $F$ ), rezultă că platbenzile și eclisele sunt sollicitate la *întindere* în secțiunea normală și la *forfecare* pe distanța ( $e$ ), iar niturile sunt sollicitate la *forfecare* și la *strivire*.

În literatura de specialitate, se recomandă câteva reguli privind calculul unor astfel de îmbinări indirecte, și anume [2]:

- Prinderea cu nituri să fie centrată, astfel încât excentricitatea dintre eforturi să fie cât mai redusă pentru a nu se introduce momente de încovoierie mari
- Lungimea îmbinării și slăbirile secțiunilor pieselor îmbinare să fie cât mai reduse
- Este necesară respectarea distanțelor minime și maxime dintre nituri.

Datorită solicitărilor complexe care apar în cazul acestor îmbinări, literatura de specialitate propune abordări echivalente, însă într-o formă simplificată, astfel:

- Calculul diametrului necesar al unui nit:

$$d_{nit\_nec} = \frac{5}{\pi} \cdot h \quad (3.46)$$

- Calculul pasului nituirii, ( $t$ ) presupune impunerea condiției ca între două nituri consecutive tabla să reziste la forfecare la fel ca nitul la strivire (cu peretele găurii), respectiv:

$$2 \cdot (t - d_{nit}) \cdot h_1 \cdot \tau_{af} = h_1 \cdot d_{nit} \cdot \sigma_{astr.} \quad (3.47)$$

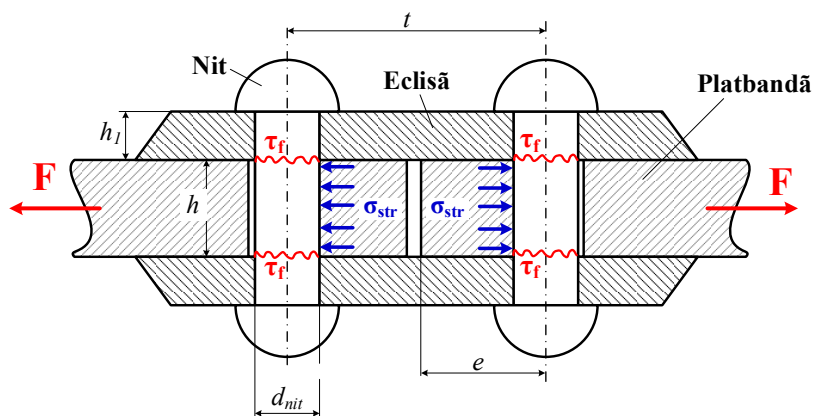


Fig. 3.13. Asamblare nituită cu eclise

În figură s-au notat:

$F$	– forța aplicată, [N]
$h_1, h$	– grosimea ecliselor, respectiv a platbenzilor, [mm]
$\sigma_{str.}$	– tensiunea normală de strivire, [N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_f$	– tensiunea tangențială de forfecare, [N/mm <sup>2</sup> ]
$e$	– distanța de la tija nitului la capătul tablei, [mm]
$t$	– distanța dintre două nituri consecutive, [mm].

Se obține *pasul minim necesar al nituirii* ( $t$ ) utilizând relația:

$$t_{\min\_nec} \cong 2,25 \cdot d_{nit} \quad (3.48)$$

însă, practica recomandă utilizarea și expresiei sub forma:

$$t = (3 \div 8) \cdot d_{nit} \quad (3.49)$$

• Pentru calculul distanței ( $e$ ) se utilizează relația:

$$e = 2 \cdot d_{nit} \quad (3.50)$$

### 3.3.2.2. Calculul îmbinărilor sudate

Operația tehnologică de sudare presupune unirea permanentă a două sau mai multor piese metalice, realizate din materiale identice sau similare. Sudarea se realizează cu sau fără adaos de material auxiliar, de regulă obținându-se prin topirea locală a suprafețelor de îmbinat. Sudarea se realizează utilizând aparate de sudură manevrate de operatorul uman sau cu roboți industriali de sudură specifici [3, 37].

În funcție de poziția relativă a pieselor care se sudează, îmbinările sudate se pot clasifica în: *îmbinări cap la cap* (Figura 3.14a) și *îmbinări de colț* (Figura 3.14b).

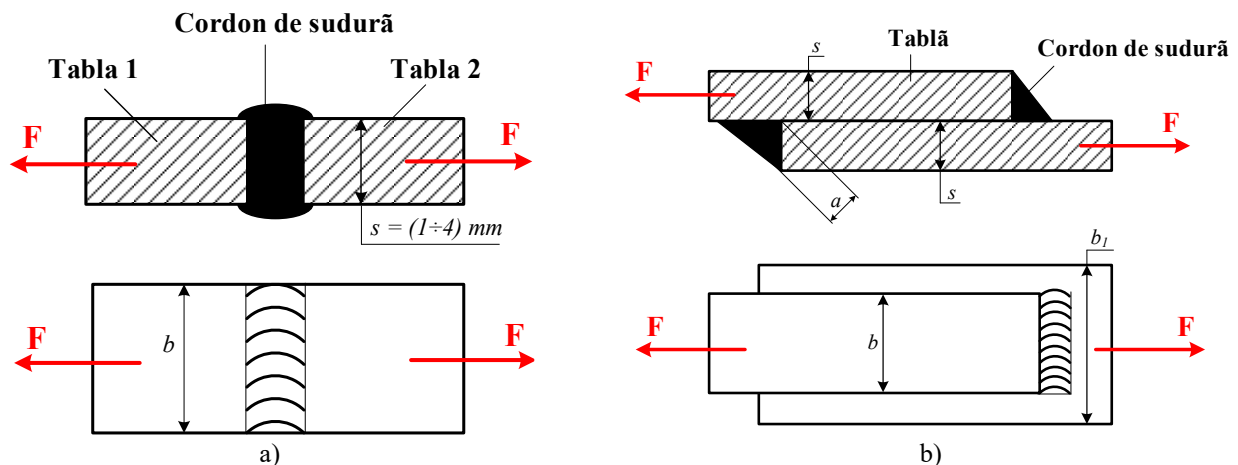


Fig. 3.14. Exemple de sudură: a) cap la cap; b) de colț

În figură s-au notat:  $F$  – forța aplicată, [N]  
 $b, b_1, s$  – lățimile, respectiv grosimea tablelor, [mm]  
 $a$  – parametru ce ține seama de suprafața finală a secțiunii de forfecare a cordonului de sudură, [mm].

Pentru calculul îmbinărilor sudate, rezistențele admisibile ale materialelor se calculează astfel:

$$\sigma_{a_s} = 0,8 \cdot \sigma_a; \quad \tau_{a_s} = 0,8 \cdot \sigma_{a_s} = 0,64 \cdot \sigma_a \quad (3.51)$$

• În cazul *îmbinărilor cap la cap* calculul de rezistență vizează în general solicitarea de întindere sau de compresiune, respectiv:

$$\sigma = \frac{F}{s \cdot l_s} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{s \cdot (b - 2s)} \leq \sigma_{a_s} \quad (3.52)$$

unde,  $l_s = b - 2s$  reprezintă lungimea cordonului de sudură micșorată cu  $(2s)$  față de lățimea ( $b$ ) a tablei.

• *Îmbinări de colț*

În Figura 3.15, se consideră un ansamblu format dintr-o placă cu grosimea ( $s_1$ ) și un cornier cu aripi egale și cu grosimea constantă ( $s$ ). Cele două elemente sunt sudate în două zone rezultând două cordonane

de sudură cu lungimi diferite ( $l_1$ ) și ( $l_2$ ). În acest caz, se dorește dimensionarea și verificarea de rezistență a cordoanelor de sudură, știind că asupra ansamblului acționează forța ( $F$ ) (aplicată pe cornier) pe axa sa longitudinală. La distanțele ( $e_1$ ) și ( $e_2$ ) față de axa longitudinală, se produc forțele ( $F_1$ ) și ( $F_2$ ) care se opun acțiunii forței ( $F$ ).

### Calculul de dimensionare al coordonului de sudură

Ca și în cazurile precedente, este important să se identifice solicitările la care sunt supuse fiecare element din componența ansamblului. Astfel, placa și cornierul sunt solicitate la întindere de forțele axiale ( $F$ ), ( $F_1$ ) și ( $F_2$ ), iar cordonul de sudură este solicitat numai la forfecare de forța aplicată ( $F$ ).

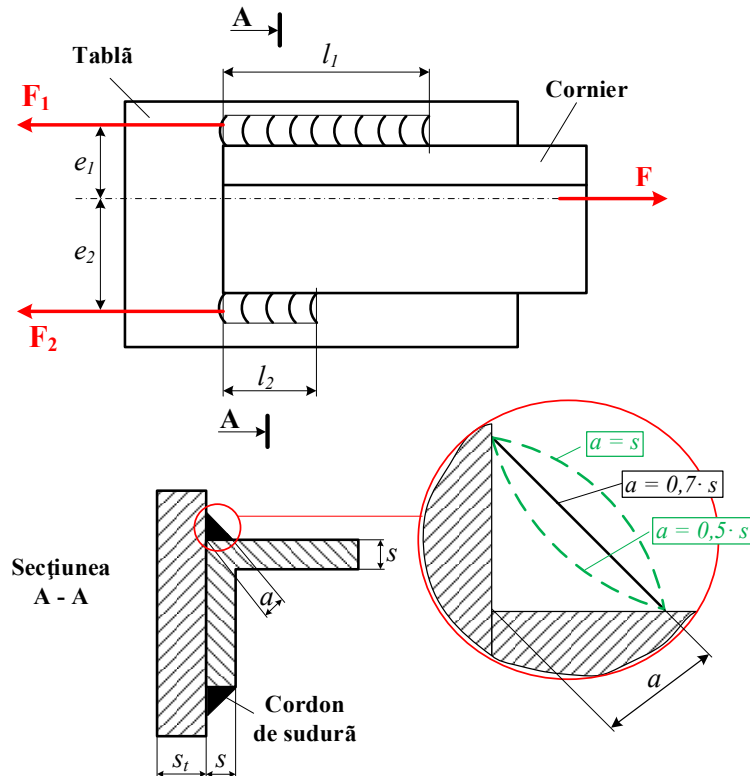


Fig. 3.15. Îmbinare sudată de colț

Dimensionarea cordoanelor de sudură constă în determinarea lungimii acestora. Pentru calculul de dimensionare a cordoanelor de sudură se scriu ecuațiile (3.53). Cunoscând valoarea forței aplicate ( $F$ ), respectiv distanțele ( $e_1$ ) și ( $e_2$ ) se pot calcula forțele ( $F_1$ ) și ( $F_2$ ) cu expresiile (3.54).

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = F \\ F_1 \cdot e_1 = F_2 \cdot e_2 \end{cases} \quad (3.53)$$

Cu soluția (3.54):

$$F_1 = \frac{F \cdot e_2}{(e_1 + e_2)}; \quad F_2 = \frac{F \cdot e_1}{(e_1 + e_2)} \quad (3.54)$$

Ariile secțiunilor de rupere pentru sudură sunt:

$$A_{1,s} = \frac{F_1}{\tau_{a,s}} = \frac{F \cdot e_2}{(e_1 + e_2) \cdot \tau_{a,s}}; \quad (3.55)$$

$$A_{1,s} = l_{1s_{nec}} \cdot a \quad (3.56)$$

$$A_{2,s} = \frac{F_2}{\tau_{a,s}} = \frac{F \cdot e_1}{(e_1 + e_2) \cdot \tau_{a,s}}; \quad (3.57)$$

$$A_{2,s} = l_{2s_{nec}} \cdot a \quad (3.58)$$

Din egalarea expresiilor (3.55) cu (3.56), respectiv (3.57) cu (3.58), rezultă relațiile de calcul a lungimilor cordoanelor de sudură necesare (relațiile 3.59 și 3.60), fără a lua în calcul adaosul de material la capetele cordoanelor de sudură. Adaosul de material la capetele cordoanelor de sudură se aproximează cu valoarea ( $2 \cdot a$ ).

$$l_{1s_{nec.}} = \frac{F \cdot e_2}{(e_1 + e_2) \cdot \tau_{a,s} \cdot a} \quad (3.59)$$

$$l_{2s_{nec.}} = \frac{F \cdot e_1}{(e_1 + e_2) \cdot \tau_{a,s} \cdot a} \quad (3.60)$$

În relațiile de mai sus:

$$l_{1s_{nec.}} = l_1 - 2a; \quad l_{2s_{nec.}} = l_2 - 2a \quad (3.61)$$

Lungimile cordoanelor de sudură (cu adaos de material pe capete) se calculează:

$$l_{1ef.} = l_{1s_{nec.}} + 2a; \quad l_{2ef.} = l_{2s_{nec.}} + 2a \quad (3.62)$$

Calculul de verificare a cordoanelor de sudură se face la forfecare astfel:

$$\tau_{1s} = \frac{F_1}{l_{1s_{nec.}} \cdot a} = \frac{F \cdot e_2}{(e_1 + e_2) \cdot l_{1s_{nec.}} \cdot a} \leq \tau_{a,s} \quad (3.63)$$

$$\tau_{2s} = \frac{F_2}{l_{2s_{nec.}} \cdot a} = \frac{F \cdot e_1}{(e_1 + e_2) \cdot l_{2s_{nec.}} \cdot a} \leq \tau_{a,s} \quad (3.64)$$

### Aplicații rezolvate

*Aplicația 3-2.* Să se determine forța necesară (sau capabilă) pentru ștantarea piesei din Figura 3.16 realizată din tablă de oțel cu rezistența admisibilă a materialului  $\sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2$ . Pentru piesa dată se cunosc:  $a = 20 \text{ mm}$ ;  $h = 8 \text{ mm}$ ;  $d = 10 \text{ mm}$ .

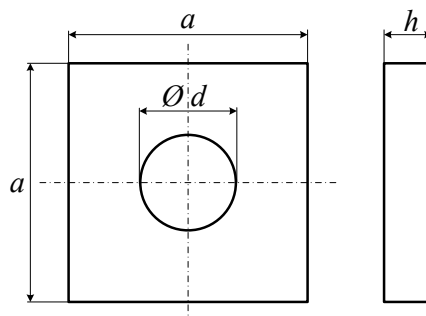


Fig. 3.16. Șaibă

*Rezolvare.* Operația tehnologică de ștantare reprezintă decuparea sau tăierea unor piese pe un contur prestabilit prin intermediul unor scule de ștantare. De regulă, se realizează foi de tablă cu grosimi de până la 10 mm. Ștantarea are loc atunci când forța tăietoare din secțiunea transversală egalează sau depășește rezistența admisibilă a materialului.

Forța capabilă se calculează cu relația generală:

$$F_{cap} = A_f \cdot \tau_{a,f}$$

unde: |  $A_f$  reprezintă aria secțiunii de forfecare,  $[\text{mm}^2]$

$\tau_{a\_f}$  reprezintă rezistența admisibilă la forfecare a materialului și se poate calcula în funcție de rezistența admisibilă la întindere a materialului, astfel:

$$\tau_{a\_f} = 0,8 \cdot \sigma_a, \quad [\text{N/mm}^2]$$

Aria secțiunii de forfecare reprezintă aria în care se produce ruperea materialului în procesul de decupare sau ștanțare, iar pentru piesa dată se calculează ca suma ariilor forfecate, astfel:

$$\begin{aligned} A_f &= 4 \cdot a \cdot h + \pi \cdot d \cdot h = \\ &= h \cdot (4 \cdot a + \pi \cdot d) \end{aligned} \quad (\text{A3-2.1})$$

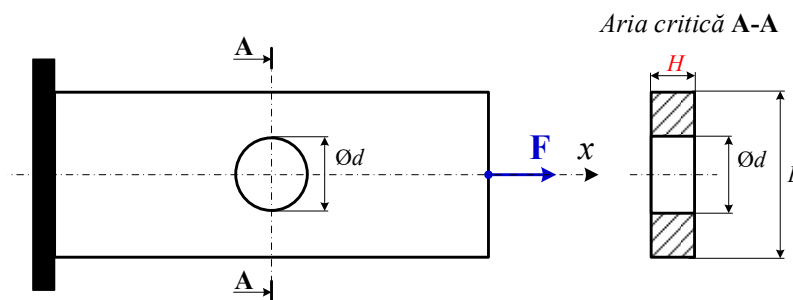
Expresia (A3-2.1) se introduce în expresia forței capabile și se obține:

$$F_{\text{cap}} = h \cdot (4 \cdot a + \pi \cdot d) \cdot \tau_{a\_f} \quad (\text{A3-2.2})$$

Se înlocuiesc datele în relația (A3-2.2) și se calculează forța capabilă:

$$\begin{aligned} F_{\text{cap}} &= 8 \cdot (4 \cdot 20 + \pi \cdot 10) \cdot 0,8 \cdot \sigma_a \\ F_{\text{cap}} &= 99814,4 \text{ N} = 99,82 \text{ kN} \end{aligned}$$

*Aplicația 3-3.* Se dă placa plană cu secțiunea dreptunghiulară din Figura 3.17, încastrată la capătul din stânga și solicitată la întindere de forța (F), aplicată la capătul liber. Se cunosc:  $F = 15 \text{ kN}$ ;  $B = 100 \text{ mm}$ ;  $d = 60 \text{ mm}$ ;  $\sigma_a = 120 \text{ N/mm}^2$ .



**Fig. 3.17.** Placă plană găurită solicitată axial

Se cere:

- Să se calculeze grosimea efectivă a plăcii ( $H$ )
- Să se efectueze calculul de verificare la rezistență
- Să se determine forța capabilă pe care o poate suporta placa fără să se rupă.

*Rezolvare.* (a) Placa plană este solicitată axial (forța  $F$  acționează de-a lungul axei  $x$ ), astfel este important ca dimensionarea să se realizeze în secțiunea transversală critică A – A. Pentru deducerea relației de calcul pentru grosimea plăcii ( $H$ ), se exprimă aria critică (aria necesară), astfel:

$$\begin{aligned} A_{\text{nec}} &= H_{\text{nec}} \cdot (B - d) \\ A_{\text{nec}} &= \frac{F}{\sigma_a} \end{aligned}$$

Se egalează expresiile ariilor necesare scrise anterior și se obține:

$$\begin{aligned} H_{\text{nec}} \cdot (B - d) &= \frac{F}{\sigma_a} \\ H_{\text{nec}} &= \frac{F}{\sigma_a \cdot (B - d)} \end{aligned}$$

Înlocuind datele cunoscute în relația dedusă anterior, se calculează valoarea necesară a grosimii plăcii, respectiv se obține valoarea efectivă:

$$H_{nec} = \frac{15 \cdot 10^3}{120 \cdot (100 - 60)} \Rightarrow H_{nec} = 3,125 \text{ mm}$$

$$H_{ef} = 4 \text{ mm}$$

Rezultă că, placa plană are secțiunea dreptunghiulară cu lățimea de 100 mm și grosimea de 4 mm.

*(b) Calculul de verificare la rezistență*

Calculul de verificare la rezistență se efectuează la solicitarea de întindere de forța (F) și, ținând cont de secțiunea critică A – A. Ca secțiunea transversală critică să reziste la solicitarea dată, trebuie să fie îndeplinită condiția de rezistență,  $\sigma_{ef} \leq \sigma_a$ :

$$\sigma_{ef} = \frac{F}{A_{ef}} \leq \sigma_a$$

$$\sigma_{ef} = \frac{F}{H_{ef} \cdot (B - d)} \leq \sigma_a$$

După calcule se obține:

$$\sigma_{ef} = \frac{15 \cdot 10^3}{4 \cdot (100 - 60)} = 93,75 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_a$$

Rezultatul obținut ( $\sigma_{ef}$ ) confirmă că bara verifică condiția de rezistență.

*(c) Calculul forței capabile*

Forța capabilă la întindere a plăcii se calculează cu formula generală:

$$F_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a$$

unde:  $A_f$  reprezintă aria efectivă critică, [mm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_a$  reprezintă rezistența admisibilă la întindere a materialului, [N/mm<sup>2</sup>].

Cunoscând aria efectivă se calculează forța capabilă:

$$F_{cap} = H_{ef} \cdot (B - d) \cdot \sigma_a$$

$$F_{cap} = 4 \cdot (100 - 60) \cdot 120 = 19200 \text{ N} = 19,2 \text{ kN}$$

Rezultă că, placa poate fi solicitată axial cu forța maximă de 19,2 kN fără să se producă ruperea în secțiunea transversală critică.

*Aplicația 3-4.* Se dă ansamblul format din Bara 1 și Bara 2, asamblate prin intermediul unui știft cilindric cu diametrul ( $d$ ) (Figura 3.18). Ansamblul este solicitat de forța  $F = 25 \text{ kN}$ . Piesele sunt realizate din oțel pentru care se cunosc următoarele: rezistența admisibilă la întindere,  $\sigma_a = 120 \text{ N/mm}^2$ ; rezistența admisibilă la strivire,  $\sigma_{a\_str} = 240 \text{ N/mm}^2$ ; rezistența admisibilă la forfecare,  $\tau_{a\_f} = 96 \text{ N/mm}^2$ .

Se cere:

- (a) Dimensionarea știftului cilindric
- (b) Să se calculeze grosimea ( $h$ ) și lățimea (B) pentru Bara 1
- (c) Să se verifice rezistența știftului, și respectiv a Barei 1.

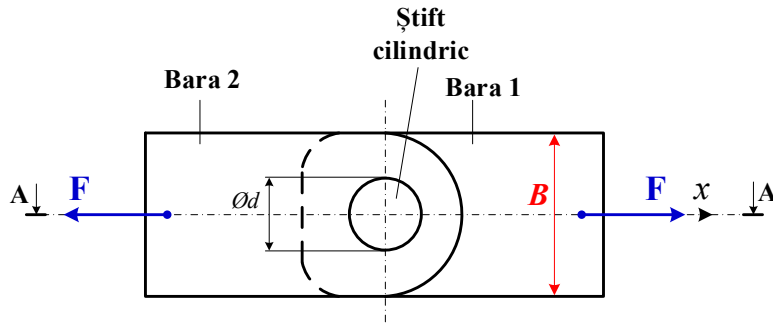


Fig. 3.18. Îmbinare cu știft cilindric

*Rezolvare.* Pentru efectuarea calculelor de dimensionare este important să se identifice solicitările la care sunt supuse piesele din componența ansamblului.

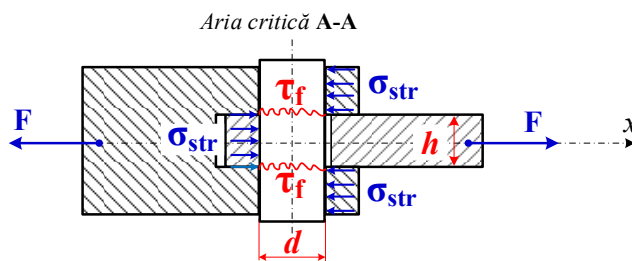


Fig. 3.19. Îmbinare cu știft cilindric: secțiunea critică A – A

Având în vedere Figura 3.19, rezultă că știftul este solicitat la forfecare și prezintă două secțiuni de forfecare (forfecarea sau ruperea se produce în secțiunile transversale ale știftului aflate la îmbinarea barelor 1 și 2). Strivirea se produce în zona de contact dintre piese și știft. Piesele (barele) 1 și 2 sunt supuse solicitării de întindere de forța (F) și strivire la contactul cu știftul.

(a) Dimensionarea știftului cilindric

Pentru calculul de dimensionare a știftului se ține cont de solicitarea de forfecare a acestuia, respectiv de numărul secțiunilor de forfecare (în acest caz, știftul prezintă două secțiuni de forfecare). Se scriu două relații de calcul al secțiunii de forfecare, iar din egalarea lor se obține formula de calcul a diametrului necesar al știftului:

$$A_f = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4}; \quad A_f = \frac{F}{\tau_{a,f}}$$

$$2 \cdot \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4} = \frac{F}{\tau_{a,f}} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot \tau_{a,f}}}$$

Înlocuind datele cunoscute în relația anterioară, se calculează valoarea numerică necesară a diametrului, respectiv valoarea efectivă a diametrului a știftului.

$$d_{nec} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 10^3}{\pi \cdot 96}} \Rightarrow d_{nec} = 12,87 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d_{ef} = 14 \text{ mm}$$



(b) Calculul grosimii ( $h$ ) și lățimii ( $B$ ) pentru Bara 1

Deoarece Bara 1 este solicitată la întindere și la strivire, dimensionarea se face având în vedere calculele specifice celor două solicitări. Bara 1 prezintă doar o singură secțiune de strivire, secțiune care se poate echivala cu aria unui dreptunghi cu lățimea egală cu diametrul efectiv al știftului ( $d_{ef}$ ) și înălțime ( $h_{nec}$ ). Se scriu relațiile pentru secțiunea de strivire, astfel:

$$A_{str} = h_{nec} \cdot d_{ef};$$
$$A_f = \frac{F}{\sigma_{a, str}}$$

Prin egalarea expresiilor, se obține relația de calcul a grosimii necesare:

$$h_{nec} \cdot d_{ef} = \frac{F}{\sigma_{a, str}} \Rightarrow h_{nec} = \frac{F}{\sigma_{a, str} \cdot d_{ef}}$$

Înlocuind datele cunoscute în ( $h_{nec}$ ) se obține valoarea necesară a grosimii Barei 1, respectiv valoarea efectivă a acesteia:

$$h_{nec} = \frac{25 \cdot 10^3}{240 \cdot 14} \Rightarrow h_{nec} = 7,44 \text{ mm} \Rightarrow h_{ef} = 8 \text{ mm}$$

Aria critică Bara 1

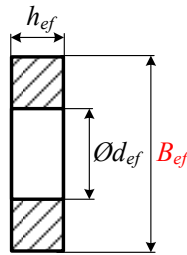


Fig. 3.20. Secțiunea critică a Barei 1

Pentru determinarea grosimii ( $B_{ef}$ ) se ia în considerare secțiunea critică (Figura 3.20) în care se poate produce ruperea atunci când Bara 1 este solicitată la întindere de forța ( $F$ ). Pentru secțiunea critică, se scriu următoarele relații:

$$A_{crt} = B_{nec} \cdot h_{ef} - d_{ef} \cdot h_{ef}$$
$$A_{crt} = \frac{F}{\sigma_a}$$

Se obține relația de calcul a lățimii necesare prin egalarea expresiilor celor două arii:

$$B_{nec} \cdot h_{ef} - d_{ef} \cdot h_{ef} = \frac{F}{\sigma_a} \Rightarrow B_{nec} = \frac{1}{h_{ef}} \cdot \left( \frac{F}{\sigma_a} + d_{ef} \cdot h_{ef} \right)$$

Înlocuind datele cunoscute în relația de mai sus, se obține valoarea necesară a lățimii Barei 1, respectiv valoarea efectivă a acesteia:

$$B_{nec} = 40,04 \text{ mm} \Rightarrow B_{ef} = 42 \text{ mm}$$

(c) Calculul de verificare la rezistență a știftului, respectiv a Barei 1

Calculul de verificare constă în determinarea tensiunii efective și compararea ei cu rezistența admisibilă a materialului. Pentru acest ansamblu, se verifică știftul la forfecare, iar Bara 1 la strivire și la întindere utilizând următoarele relații:

$$\tau_{ef_f} = \frac{F}{A_{ef_f}} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d_{ef}^2}{4}} \leq \tau_{a_f}$$

$$\sigma_{ef\_str} = \frac{F}{A_{ef\_str}} = \frac{F}{h_{ef} \cdot d_{ef}} \leq \sigma_{a\_str}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{F}{A_{ef}} = \frac{F}{h_{ef} \cdot (B_{ef} - d_{ef})} \leq \sigma_a$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\tau_{ef_f} = \frac{25 \cdot 10^3}{2 \cdot \frac{\pi \cdot 14^2}{4}} = 81,20 \text{ N/mm}^2 \leq \tau_{a_f}$$

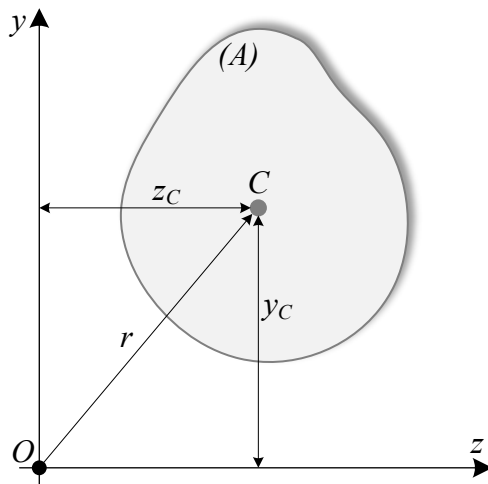
$$\sigma_{ef\_str} = \frac{25 \cdot 10^3}{8 \cdot 14} = 223,21 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{a\_str}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{25 \cdot 10^3}{8 \cdot (42 - 14)} = 111,60 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_a$$

În urma calculelor, rezultă că atât știftul cilindric cât și cele două bare rezistă la solicitările produse de forța aplicată (F).

## 4. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFETELOR PLANE

4.1. Mărimi geometrice ale suprafețelor plane	83
4.2. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele	86
4.2.1. Formulele lui Steiner	87
4.3. Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente	87
4.4. Momente de inerție principale și direcții principale	89



$$A = \int dA$$

$$S_z = y_c \cdot A$$

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

## 4. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFETELOR PLANE

În studiul pieselor plane (bare, grinzi) caracteristicile geometrice ale secțiunilor transversale sunt importante deoarece acestea influențează modul în care piesele se deformează și reacționează sub acțiunea sarcinilor exterioare. Caracteristicile geometrice intervin în calculul tensiunilor și deformațiilor, respectiv în calculele de dimensionare.

În cazul solicitării axiale, respectiv la forfecare, tensiunile din secțiunea transversală se calculează în funcție de efort și de aria secțiunii transversale, însă la încovoiere și torsiune, la calculul tensiunilor se iau în considerare alte mărimi geometrice ale secțiunii transversale, cum ar fi: momente statice, momente de inerție, module de rezistență.

În acest capitol se prezintă caracteristicile geometrice uzuale ale suprafețelor plane (secțiunilor transversale), pentru analiza tensiunilor și deformațiilor.

### 4.1. Mărimi geometrice ale suprafețelor plane

a) *Aria* ( $A$ ) [ $\text{mm}^2$ ] unei suprafețe geometrice plane este definită astfel:

$$A = \int dA \quad (4.1)$$

unde:  $dA$  reprezintă aria elementară având coordonatele ( $y$ ) și ( $z$ ), iar ( $A$ ) este aria totală a suprafeței plane, [ $\text{mm}^2$ ].

b) *Momente statice* ( $S$ ) [ $\text{mm}^3$ ]

*Definiție:* *Momentul static* al unei suprafețe în raport cu o axă este egal cu produsul dintre suprafață și distanța de la centrul de greutate al acesteia la axă, iar unitatea de măsură este: [ $L^3$ ]  $\rightarrow$  [ $\text{mm}^3$ ]; [ $\text{cm}^3$ ].

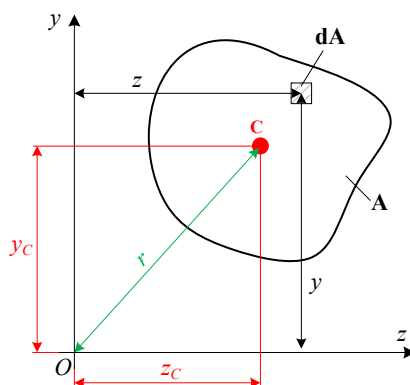


Fig. 4.1. Secțiune plană pentru determinarea caracteristicilor geometrice

În figură s-au notat:  $y, z$  – coordonatele suprafeței ( $dA$ ) în raport cu sistemul de axe  $yOz$ , [ $\text{mm}$ ]  
 $y_c, z_c$  – coordonatele centrului de greutate  $C$  a corpului oarecare în raport cu sistemul de axe  $yOz$ , [ $\text{mm}$ ].

Momentul static poate fi după axa ( $z$ ) și după axa ( $y$ ) și se calculează cu relațiile:

$$S_z = \int_A y \cdot dA; \quad S_z = y_c \cdot A \quad (4.2)$$

$$S_y = \int_A z \cdot dA; \quad S_y = z_c \cdot A \quad (4.3)$$

**Observații:** (1) Dacă axele în raport cu care se calculează momentele statice trec prin centrul de greutate al suprafeței, atunci momentele statice sunt zero, axele numindu-se axe centrale.  
 (2) Momentul static poate fi pozitiv sau negativ, după semnul coordonatelor centrului de greutate în raport cu sistemul de coordonate ales.

c) Momente de inerție ( $I$ ) [ $\text{mm}^4$ ]

Momentele de inerție pot fi:

■ Axiale, în raport cu axele ( $y$ ) sau ( $z$ ):

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA; \quad (4.4)$$

■ Centrifugale, în raport cu sistemul de axe  $zOy$ :

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA \quad (4.5)$$

■ Polare, în raport cu un punct sau pol  $O$ :

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_z \quad (4.6)$$

**Observații:** (1) Momentele de inerție axiale, respectiv polar  $I_z$ ,  $I_y$ ,  $I_p$  sunt întotdeauna pozitive și diferite de zero.  
 (2) Momentul de inerție centrifugal  $I_{zy}$  poate fi pozitiv, negativ sau nul. Este nul dacă una sau ambele axe în raport cu care se calculează sunt axe de simetrie al suprafeței plane.  
 (3) Atunci când sistemul de axe  $yOz$  trece prin centrul de greutate al suprafeței, momentele de inerție determinate față de aceste axe se numesc momente de inerție centrale.

d) Raza de inerție (de girație) ( $i$ ) [ $\text{mm}$ ]

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \quad (4.7)$$

e) Modul de rezistență ( $W$ ) [ $\text{mm}^3$ ]

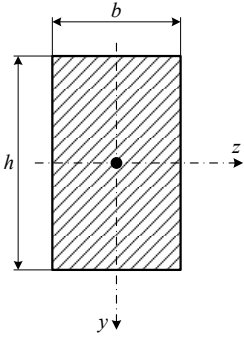
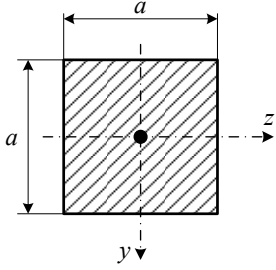
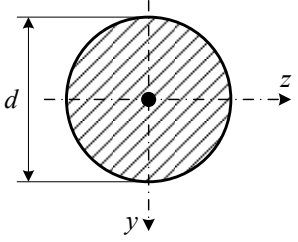
$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}; \quad W_p = \frac{I_p}{r_{max}} \quad (4.8)$$

unde:  $y_{max}$ ,  $z_{max}$ ,  $r_{max}$  reprezintă distanța, pe o anumită direcție, de la o axă sau un pol până la fibrele cele mai îndepărtate ale secțiunii.

Caracteristicile geometrice pentru secțiunile transversale simple și pentru profilele standardizate care sunt uzual folosite în rezolvarea problemelor de încovoiere plană a grinzilor drepte sunt prezentate detaliat în literatura de specialitate [1,2,4,6,8,14,16,19,20].

În Tabelul 4.1 sunt date relațiile generale pentru calculul caracteristicilor geometrice în cazul secțiunilor transversale simple, iar în Tabelul 4.2 sunt date dimensiunile și unele caracteristici geometrice după axa de încovoiere ( $z - z$ ) pentru profilul IPN (dimensiunile sunt conform EN 10365) [26].

Tabelul 4.1. Caracteristici geometrice pentru secțiuni transversale simple (exemple)

Secțiunea dreptunghiulară	Secțiunea pătrată	Secțiunea circulară plină
		
$A = b \cdot h, \text{ mm}^2$	$A = a^2, \text{ mm}^2$	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ mm}^2$
$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}; W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}, \text{ mm}^3$	$W_z = W_y = \frac{a^3}{6}, \text{ mm}^3$	$W_z = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \text{ mm}^3$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \text{ mm}^3$
$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}, \text{ mm}^4$	$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}, \text{ mm}^4$	$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \text{ mm}^4$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \text{ mm}^4$

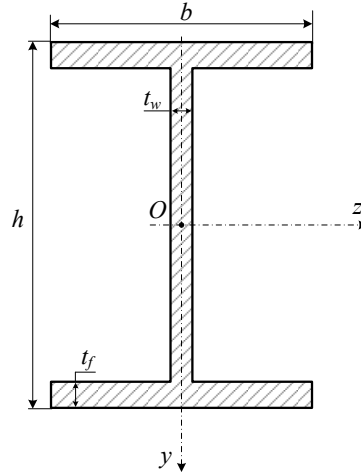


Fig. 4.2. Profilul IPN: schiță simplificată după [17]

Tabelul 4.2. Dimensiuni și caracteristici geometrice pentru profilul IPN (extras din [2])

Simbolul profilului	Dimensiunile secțiunii transversale, [mm]				Aria sect. transv.	Mărimi geometrice pentru axa de încovoiere z - z			Momentul static
	h	b	t <sub>f</sub>	t <sub>w</sub>	A x 10 <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> x 10 <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> x 10 <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> x 10	S <sub>z</sub> x 10 <sup>3</sup>
	[mm]				[mm <sup>2</sup> ]	[mm <sup>4</sup> ]	[mm <sup>3</sup> ]	[mm]	[mm <sup>3</sup> ]
<b>IPN 80</b>	80	42	5,90	3,9	7,58	77,8	19,3	3,20	11,4
<b>IPN 100</b>	100	50	6,80	4,5	10,6	171	34,2	4,01	19,9

<b>IPN 120</b>	120	58	7,70	5,1	14,2	328	54,6	4,81	31,8
<b>IPN 140</b>	140	66	8,60	5,7	18,3	573	81,9	5,61	47,7
<b>IPN 160</b>	160	74	9,50	6,3	22,8	935	117	6,40	68,0
<b>IPN 180</b>	180	82	10,40	6,9	27,9	1450	161	7,20	93,4
<b>IPN 200</b>	200	90	11,30	7,5	33,5	2140	214	8,00	125
<b>IPN 240</b>	240	106	13,10	8,7	46,1	4250	354	9,59	206
<b>IPN 300</b>	300	125	16,20	10,8	69,1	9800	653	11,9	381
<b>IPN 400</b>	400	155	21,60	14,4	118	29210	460	15,7	857

#### 4.2. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

În Figura 4.3 se dă o secțiune plană raportată la sistemul propriu de referință  $yOz$  și, pentru care se cunosc momentele de inerție ( $I_z$ ,  $I_y$ ,  $I_{zy}$ ), respectiv aria sa ( $A$ ). Pentru un element de pe suprafață cu aria elementară ( $dA$ ) se cunosc distanțele ( $z$ ) și ( $y$ ) față de sistemul de referință  $zOy$ .

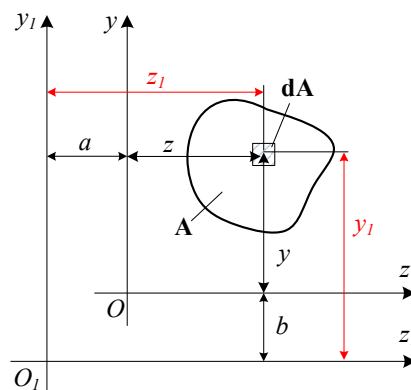


Fig. 4.3. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

În figură s-au notat:  $y, z$  – coordonatele suprafeței ( $dA$ ) în raport cu sistemul de axe  $zOy$ , [mm]  
 $y_1, z_1$  – coordonatele suprafeței ( $dA$ ) în raport cu sistemul de axe  $z_1O_1y_1$ , [mm]  
 $a, b$  – distanțele dintre sistemele de axe  $zOy$  și  $z_1O_1y_1$ , [mm].

La distanțele ( $a$ ) și ( $b$ ) de sistemul de referință  $zOy$  se introduce un sistem de axe  $z_1O_1y_1$  paralel cu cel inițial,  $zOy$ . Distanțele ( $z_1, y_1$ ) se pot calcula:

$$\begin{cases} z_1 = a + z \\ y_1 = b + y \end{cases} \quad (4.9)$$

Se dorește determinarea momentelor de inerție axiale ( $I_{z_1}, I_{y_1}$ ) și momentului centrifugal ( $I_{z_1y_1}$ ), pentru suprafața dată, în raport cu sistemul de axe  $z_1O_1y_1$ . În acest scop, se definesc momentele de inerție având în vedere relațiile (4.4, 4.5):

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (b + y)^2 \cdot dA \Rightarrow I_{z_1} = I_z + 2 \cdot b \cdot S_z + b^2 \cdot A \quad (4.10)$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (a + z)^2 \cdot dA \Rightarrow I_{y_1} = I_y + 2 \cdot a \cdot S_y + a^2 \cdot A \quad (4.11)$$

$$I_{z_1y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA = \int_A (a + z)(b + y) \cdot dA \Rightarrow I_{z_1y_1} = I_{zy} + a \cdot S_z + b \cdot S_y + a \cdot b \cdot A \quad (4.12)$$

#### 4.2.1. Formulele lui Steiner

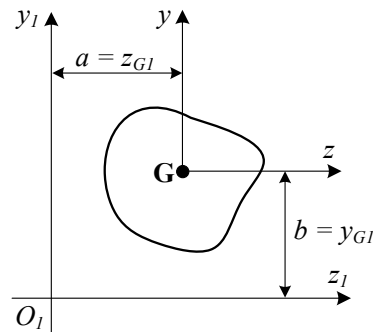


Fig. 4.4. Originea sistemului inițial de axe  $zOy$  coincide cu centrul de greutate (G) al secțiunii

Când originea sistemului inițial de axe de coordonate  $zOy$  coincide cu centrul de greutate al suprafeței (sau a secțiunii) considerate (G) (Figura 4.4), adică:

$$a = z_{G1}; \quad b = y_{G1} \quad \text{și} \quad S_z = S_y = 0 \quad (4.13)$$

atunci expresiile (4.10 ÷ 4.12) devin *formulele lui Steiner*:

$$I_{z1} = I_z + y_{G1}^2 \cdot A \quad (4.14)$$

$$I_{y1} = I_y + z_{G1}^2 \cdot A \quad (4.15)$$

$$I_{z1y1} = I_{zy} + z_{G1} \cdot y_{G1} \cdot A \quad (4.16)$$

Formulele lui Steiner (4.14 ÷ 4.16) permit determinarea momentelor de inerție axiale și centrifugale în cazul secțiunilor transversale plane compuse.

#### 4.3. Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente

Geometria unei secțiuni plane, respectiv simetria acesteia în raport cu un sistem de coordonate permite calculul momentelor de inerție axiale pe baza relațiilor (4.4). Totuși, în practică apar situații în care se impune calculul acestor momente de inerție în raport cu axe rotite cu un anumit unghi față de axele de simetrie ale secțiunii plane. În continuare se descrie modul de calcul al momentului de inerție față de o axă oarecare, concurentă cu axa față de care se cunoaște momentul de inerție.

Se consideră suprafața plană din Figura 4.5 raportată la sistemul de referință inițial  $yOz$ , având originea în punctul  $O$ . Se introduce un alt sistem de referință  $y_1Oz_1$  cu originea în punctul  $O$ , rotit față de sistemul inițial cu unghiul ( $\alpha$ ) cunoscut. Pentru suprafața considerată se cunosc momentele de inerție axiale ( $I_z$ ,  $I_y$ ), respectiv momentul de inerție centrifugal ( $I_{zy}$ ) determinate față de sistemul de referință inițial și se propune determinarea momentelor de inerție axiale și centrifugal ( $I_{z1}$ ;  $I_{y1}$ ;  $I_{z1y1}$ ) față de sistemul de referință,  $y_1Oz_1$ .

Pe suprafața plană se consideră elementul de arie ( $dA$ ) având coordonatele ( $z,y$ ) față de sistemul de referință inițial  $zOy$ , respectiv coordonatele ( $z_1,y_1$ ) față de sistemul de referință  $z_1Oy_1$ . Coordonatele ( $z_1,y_1$ ) ale elementului considerat se pot calcula astfel:

$$z_1 = CD + OB \Rightarrow z_1 = y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha \quad (4.17)$$

$$y_1 = CE - BE \Rightarrow y_1 = y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha \quad (4.18)$$



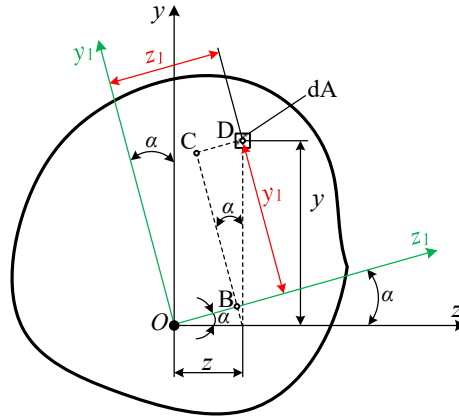


Fig. 4.5. Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente (rotite)

În figură s-au notat:  $y, z$  – coordonatele elementului ( $dA$ ) în raport cu sistemul de axe  $xOy$ , [mm]  
 $y_1, z_1$  – coordonatele elementului ( $dA$ ) în raport cu sistemul de axe  $x_1O_1y_1$ , [mm].

Pentru determinarea momentelor de inerție față de sistemul de referință  $z_1O_1y_1$  se ținând seama de relațiile generale (4.4) și (4.5). Se obține:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha)^2 \cdot dA \quad (4.19)$$

$$I_{z_1} = \cos^2\alpha \int_A y^2 \cdot dA + \sin^2\alpha \int_A z^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y \cdot z \cdot dA \quad (4.20)$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha)^2 \cdot dA \quad (4.21)$$

$$I_{y_1} = \sin^2\alpha \int_A y^2 \cdot dA + \cos^2\alpha \int_A z^2 \cdot dA + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y \cdot z \cdot dA \quad (4.22)$$

$$I_{z_1y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA = \int_A (y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha) \cdot (y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha) \cdot dA \quad (4.23)$$

$$I_{z_1y_1} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y^2 \cdot dA - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A z^2 \cdot dA + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int_A y \cdot z \cdot dA \quad (4.24)$$

Știind că momentele de inerție axiale și momentul de inerție centrifugal față de sistemul de referință inițial  $zOy$  sunt exprimate de relațiile:

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_z; \quad \int_A z^2 \cdot dA = I_y; \quad \int_A y \cdot z \cdot dA = I_{zy} \quad (4.25)$$

Atunci, relațiile (4.20); 4.22; 4.24) devin:

$$I_{z_1} = I_z \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{zy} \cdot \sin(2\alpha) \quad (4.26)$$

$$I_{y_1} = I_z \cdot \sin^2\alpha + I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{zy} \cdot \sin(2\alpha) \quad (4.27)$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin(2\alpha) + I_{zy} \cdot \cos(2\alpha) \quad (4.28)$$

Relațiile (4.26 ÷ 4.28) reprezintă momentele de inerție axiale, respectiv momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe rotit cu unghiul ( $\alpha$ ) în raport cu un sistem de referință inițial.

Însumând algebric momentele de inerție axiale ( $I_{z_1}$ ) și ( $I_{y_1}$ ) exprimate prin relațiile (4.26) și (4.27), respectiv știind că  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , se obține:

$$I_{z1} + I_{y1} = [I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{zy} \cdot \sin(2\alpha)] + [I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{zy} \cdot \sin(2\alpha)] \quad (4.29)$$

$$I_{z1} + I_{y1} = I_z \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow I_{z1} + I_{y1} = I_z + I_y (= I_p) \quad (4.31)$$

Relația (4.31) evidențiază că *suma momentelor de inerție axiale, în raport cu orice pereche de axe ortogonale care trec printr-un punct (pol) dat, este constantă și egală cu momentul de inerție polar ( $I_p$ ), indiferent de poziția ce ar ocupa aceste axe prin rotirea lor în jurul polului. Suma reprezintă un invariant al momentelor de inerție axiale* [4].

În formulele (4.26), (4.27) se înlocuiesc  $(\cos^2 \alpha)$  și  $(\sin^2 \alpha)$  în funcție de  $(\cos 2\alpha)$ , și după efectuarea calculelor în relații, se obține:

$$I_{z1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) - I_{zy} \cdot \sin(2\alpha) \quad (4.32)$$

$$I_{y1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) + I_{zy} \cdot \sin(2\alpha) \quad (4.33)$$

#### 4.4. Momente de inerție principale și direcții principale

Momentele de inerție maxime, respectiv minime se numesc momente *de inerție principale*, iar axele față de care momentele de inerție au valori extreme se numesc *axe principale de inerție*, direcțiile lor fiind *direcții principale*. Pentru calculul lor se utilizează relațiile următoare:

■ *Momente de inerție principale:*

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} \quad (4.34)$$

■ *Direcții principale:*

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{(-2 \cdot I_{zy})}{(I_z - I_y)} \quad (4.35)$$

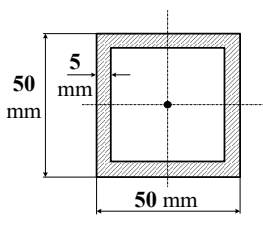
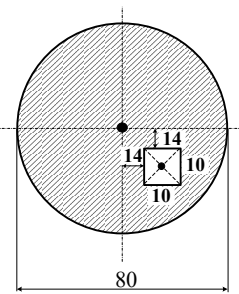
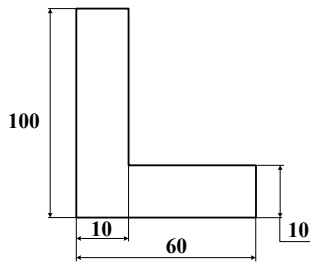
Relația (4.35) exprimă poziția axelor principale de inerție. Expresia (4.35) dă două valori ale lui  $(2\alpha)$ , diferind între ele cu  $(\pi)$ , respectiv două valori ale unghiului  $(\alpha)$ , reprezentând direcțiile principale. Se consideră prima dată direcția principală (1), iar direcția principală (2) este perpendiculară pe direcția principală (1) și are valoarea:  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  sau  $\alpha + 90^\circ$ .

#### Aplicații rezolvate

Pentru secțiunile transversale plane din Tabelul 4.3 se cere:

1. Determinarea centrului de greutate, G ( $y_G$ ;  $z_G$ )
2. Calculul momentelor statice ( $S_{y0}$ ;  $S_{z0}$ )
3. Calculul momentelor de inerție axiale ( $I_{y0}$ ;  $I_{z0}$ )
4. Calculul modulelor de rezistență ( $W_y$ ,  $W_z$ )
5. Calculul razelor de inerție ( $i_y$ ,  $i_z$ )

Tabelul 4.3. Secțiuni plane compuse – Aplicații

Aplicația A4-1	Aplicația A4-2	Aplicația A4-3
		

Rezolvare Aplicația A4-1. 1. Pentru determinarea centrului de greutate al secțiunii date, se parcurg următoarele etape:

- (a) Se împarte secțiunea compusă în figuri geometrice simple și se notează figurile simple, (Figura 4.6)
- (b) Se atașează secțiunii complexe un sistem de referință inițial ( $z_0O_0y_0$ ), (Figura 4.6)

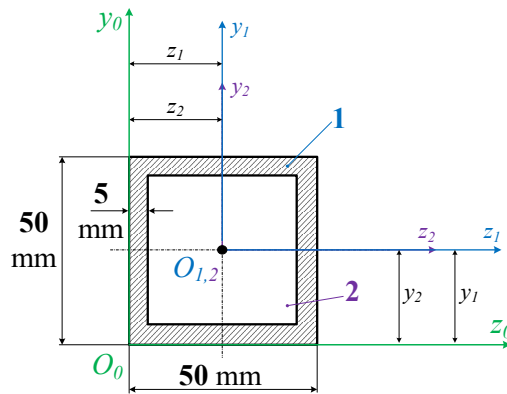


Fig. 4.6. Secțiune pătrată cu pereți subțiri

- (c) Pentru fiecare figură simplă, se determină centrul de greutate și se atașează sistemul de axe ( $z_1O_1y_1$ ,  $z_2O_2y_2$ ), (Figura 4.6)
- (d) Pentru fiecare figură simplă se calculează coordonatele centrului de greutate ( $z_i$ ;  $y_i$ ), respectiv aria ( $A_i$ ), astfel:

Figura 1	Figura 2
$z_1 = 25 \text{ mm}$	$z_2 = 25 \text{ mm}$
$y_1 = 25 \text{ mm}$	$y_2 = 25 \text{ mm}$
$A_1 = 50^2 = 2500 \text{ mm}^2$	$A_2 = 40^2 = 1600 \text{ mm}^2$

- (e) Se calculează coordonatele centrului de greutate  $G(z_G; y_G)$  al secțiunii complexe cu relațiile:

$$\begin{cases} z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_G = \frac{z_1 \cdot A_1 - z_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{25 \cdot 2500 - 25 \cdot 1600}{(2500 - 1600)} \Rightarrow z_G = +25 \text{ mm} \\ y_G = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{25 \cdot 2500 - 25 \cdot 1600}{(2500 - 1600)} \Rightarrow y_G = +25 \text{ mm} \end{cases}$$

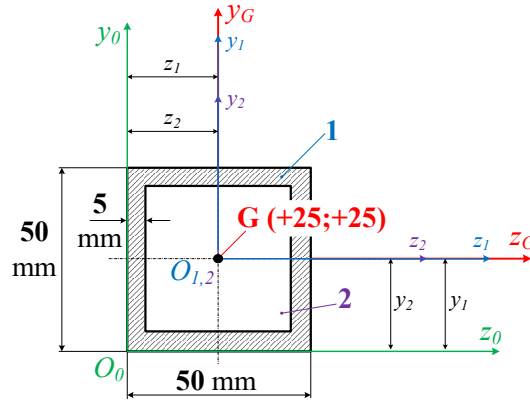


Fig. 4.7. Centrul de greutate al secțiunii pătrate cu pereți subțiri

După efectuarea calculelor, rezultă că centrul de greutate al secțiunii plane are coordonatele:  $G(z_G; y_G)$   
 $\Rightarrow G(+25;+25)$ , (Figura 4.7).

2. Momentele statice față de sistemul de axe  $y_0O_0z_0$  se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} S_{z_0} = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot A_i) \\ S_{y_0} = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot A_i) \end{cases}$$

respectiv:

$$\begin{cases} S_{z_0} = y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2 \\ S_{y_0} = z_1 \cdot A_1 - z_2 \cdot A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{z_0} = 25 \cdot 2500 - 25 \cdot 1600 = 22500 \text{ mm}^3 \\ S_{y_0} = 25 \cdot 2500 - 25 \cdot 1600 = 22500 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

3. Pentru calculul momentelor de inerție ( $I_{y_0}; I_{z_0}$ ) în raport cu sistemul  $y_0O_0z_0$  se utilizează relațiile lui Steiner:

$$\begin{cases} I_{z_0} = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + y_{Gi}^2 \cdot A_i) \\ I_{y_0} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + z_{Gi}^2 \cdot A_i) \end{cases}$$

unde:

- $I_{z_i}; I_{y_i}$  - momentele de inerție după axa ( $z$ ) și ( $y$ ) al figurii simple;
- pentru secțiunea pătrată:  $I_{z_i} = I_{y_i} = \frac{a^4}{12}$

- $y_{Gi}; z_{Gi}$  se calculează distanțele:

$$\begin{cases} y_{Gi} = y_i - y_G \\ z_{Gi} = z_i - z_G \end{cases}$$

Pentru fiecare figură geometrică simplă, se calculează distanțele ( $y_{Gi}, z_{Gi}$ ) și momentele de inerție axiale ( $I_{z_i}, I_{y_i}$ ):

Figura 1	Figura 2
$y_{G1} = y_1 - y_G = 0$	$y_{G2} = y_2 - y_G = 0$
$z_{G1} = z_1 - z_G = 0$	$z_{G2} = z_2 - z_G = 0$

$I_{z1} = I_{y1} = \frac{50^4}{12} = 520833,34 \text{ mm}^4$	$I_{z2} = I_{y2} = \frac{40^4}{12} = 213333,33 \text{ mm}^4$
--	--

Având toate datele, se pot calcula momentele de inerție axiale pentru secțiunea complexă față de sistemul  $x_oO_o z_o$ :

$$\begin{cases} I_{z0} = (I_{z1} + y_{G1}^2 \cdot A_1) - (I_{z2} + y_{G2}^2 \cdot A_2) \Rightarrow I_{z0} = I_{z1} - I_{z2} \\ \quad I_{z0} = 520833,33 - 213333,33 = 307500 \text{ mm}^4 \\ I_{y0} = (I_{y1} + z_{G1}^2 \cdot A_1) - (I_{y2} + z_{G2}^2 \cdot A_2) \Rightarrow I_{y0} = I_{y1} - I_{y2} \\ \quad I_{y0} = 520833,33 - 213333,33 = 307500 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

4. Modulele de rezistență a secțiunii compuse se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} W_y = \frac{I_{y0}}{z_{max}} \\ W_z = \frac{I_{z0}}{y_{max}} \end{cases}$$

unde:  $(z_{max})$  și  $(y_{max})$  reprezintă distanțele maxime pe direcția axelor ( $y$ ) și ( $z$ ) de la centrul de greutate al secțiunii până la fibrele cele mai îndepărtate, adică:  $z_{max} = y_{max} = 25 \text{ mm}$ .

Modulele de rezistență sunt:

$$\begin{cases} W_y = \frac{307500}{25} = 12300 \text{ mm}^3 \\ W_z = \frac{307500}{25} = 12300 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

5. Razele de inerție a secțiunii compuse se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} i_y = \sqrt{\frac{I_{y0}}{A_o}} \\ i_z = \sqrt{\frac{I_{z0}}{A_o}} \end{cases}$$

unde:  $I_{y0}, I_{z0}, A_o$  reprezintă momentele de inerție, respectiv aria secțiunii compuse.

După efectuarea calculului se obțin:

$$\begin{cases} i_y = \sqrt{\frac{307500}{(2500 - 1600)}} = 5,84 \text{ mm} \\ i_z = \sqrt{\frac{307500}{(2500 - 1600)}} = 5,84 \text{ mm} \end{cases}$$

**Observații:**

- (1) Secțiunea complexă este compusă din două figuri geometrice simple: un pătrat plin cu latura de 50 mm (Figura 1) și, respectiv un pătrat cu latura de 40 mm (Figura 2).
- (2) Pentru determinarea caracteristicilor geometrice pentru secțiunea plană complexă, se face diferența caracteristicilor geometrice calculate pentru figurile geometrice simple, deoarece se elimină material (adică pătratul notat pe schiță cu 2) din Figura 4.6.
- (3) Eliminarea unei cantități specifice de material, conduce la micșorarea ariei secțiunii transversale plane, respectiv la creșterea valorilor tensiunilor și a deformațiilor.

Rezolvare Aplicația A4-2. 1. Pentru determinarea centrului de greutate al secțiunii date, se parcurg următoarele etape:

Etape de lucru:

- (a) Se împarte secțiuna complexă în figuri geometrice simple și se numerotează (Figura 4.8)
- (b) Se atașează secțiunii complexe un sistem de referință inițial ( $z_0Oy_0$ ), (Figura 4.8)
- (c) Pentru fiecare figură simplă, se determină centrul de greutate în raport cu sistemul inițial ales  $z_0Oy_0$  (Figura 4.8)

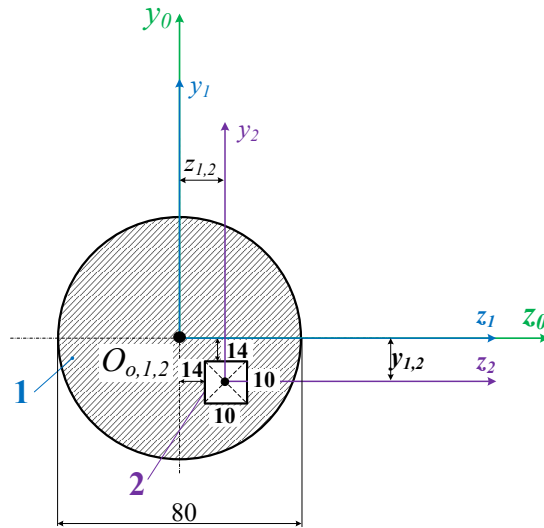


Fig. 4.8. Secțiune circulară cu decupaj în formă pătrată

(d) Pentru fiecare figură simplă se calculează coordonatele centrului de greutate ( $z_i; y_i$ ), respectiv aria ( $A_i$ ), astfel:

Figura 1	Figura 2
$z_1 = 0 \text{ mm}$	$z_2 = +19 \text{ mm}$
$y_1 = 0 \text{ mm}$	$y_2 = -19 \text{ mm}$
$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 80^2}{4} = 5026,54 \text{ mm}^2$	$A_2 = 10^2 = 100 \text{ mm}^2$

(e) Se calculează coordonatele centrului de greutate  $G(z_G; y_G)$  al secțiunii complexe cu relațiile prezentate la exemplu anterior. După efectuarea calculelor se obține:

$$\begin{cases} z_G = \frac{z_1 \cdot A_1 - z_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{0 - 19 \cdot 100}{(5026,54 - 100)} \Rightarrow z_G = -0,38 \text{ mm} \\ y_G = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{0 - (-19 \cdot 100)}{(5026,54 - 100)} \Rightarrow y_G = +0,38 \text{ mm} \end{cases}$$

Centrul de greutate are coordonatele:  $G(z_G; y_G) \Rightarrow G(-0,38; +0,38)$ , Figura 4.9.

2. Momentele statice față de sistemul de axe  $y_0Oz_0$  se calculează cu relațiile uzuale conform exemplului anterior, respectiv:

$$\begin{cases} S_{z_0} = y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2 \\ S_{z_0} = 0 - (-19) \cdot 100 = 1900 \text{ mm}^3 \\ S_{y_0} = z_1 \cdot A_1 - z_2 \cdot A_2 \\ S_{y_0} = 0 - 19 \cdot 100 = -1900 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

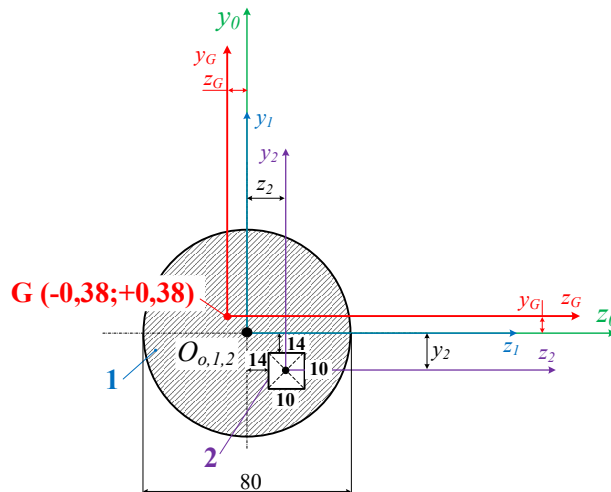


Fig. 4.9. Centrul de greutate al secțiunii compuse

3. Pentru calculul momentelor de inerție ( $I_{y_0}$ ;  $I_{z_0}$ ) se utilizează relațiile lui Steiner. Momentele de inerție axiale (axa  $z$  și  $y$ ) pentru figurile simple, se calculează utilizând relațiile uzuale:

- pentru secțiunea pătrată:  $I_{z_i} = I_{y_i} = \frac{a^4}{12}$

- pentru secțiunea circulară plină:  $I_{z_i} = I_{y_i} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$

▪  $y_{Gi}$ ;  $z_{Gi}$  se calculează:

$$\begin{cases} y_{Gi} = y_i - y_G \\ z_{Gi} = z_i - z_G \end{cases}$$

Figura 1	Figura 2
$y_{G1} = y_1 - y_G = 0 + 0,38 = +0,38 \text{ mm}$	$y_{G2} = y_2 - y_G = -19 + 0,38 = -18,62 \text{ mm}$
$z_{G1} = z_1 - z_G = 0 - 0,38 = -0,38 \text{ mm}$	$z_{G2} = z_2 - z_G = +19 - (-0,38) = +19,38 \text{ mm}$
$I_{z1} = I_{y1} = \frac{\pi \cdot 80^4}{64} = 1073 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$I_{z2} = I_{y2} = \frac{10^4}{12} = 833,34 \text{ mm}^4$

Se obține:

$$\begin{cases} I_{z_0} = (I_{z1} + y_{G1}^2 \cdot A_1) - (I_{z2} + y_{G2}^2 \cdot A_2) \\ I_{z_0} = (1073 \cdot 10^4 + 0,38^2 \cdot 5026,54) - (833,34 + (-18,62)^2 \cdot 100) \\ \quad = 10733686,9576 = 1073,3687 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ I_{y_0} = (I_{y1} + z_{G1}^2 \cdot A_1) - (I_{y2} + z_{G2}^2 \cdot A_2) \\ I_{y_0} = (1073 \cdot 10^4 + (-0,38)^2 \cdot 5026,54) - (833,34 + 19,38^2 \cdot 100) \\ \quad = 10692334,052376 = 1069,2335 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

4. Modulele de rezistență ale secțiunii compuse se calculează cu expresiile aplicate și în exemplul anterior, în care distanțele maxime pe direcția axelor ( $y$ ) și ( $z$ ) de la centrul de greutate al secțiunii până la fibrele cele mai îndepărtate sunt:  $z_{max} = y_{max} = 40,38 \text{ mm}$ .

Modulele de rezistență axiale sunt:

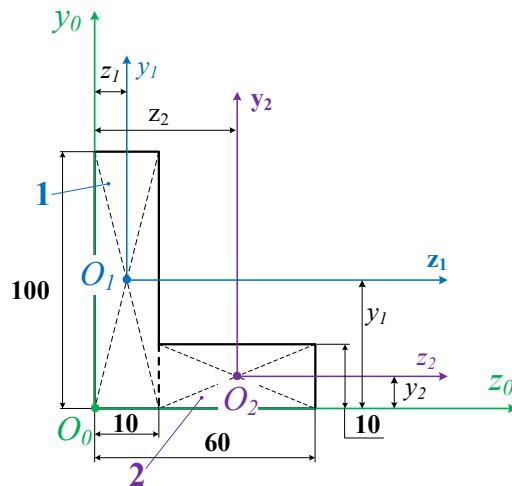
$$\begin{cases} W_y = \frac{1069,2335 \cdot 10^4}{40,38} = 264,79 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\ W_z = \frac{1073,3687 \cdot 10^4}{40,38} = 265,81 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

5. Razele de inerție ale secțiunii compuse se calculează cu expresiile uzuale, obținându-se:

$$\begin{cases} i_y = \sqrt{\frac{1069,2335 \cdot 10^4}{(2025,54 - 100)}} = 46,59 \text{ mm} \\ i_z = \sqrt{\frac{1073,3687 \cdot 10^4}{(2025,54 - 100)}} = 46,68 \text{ mm} \end{cases}$$

*Rezolvare Aplicația A4-3.* 1. Pentru determinarea centrului de greutate al secțiunii date, se parcurg următoarele etape:

- (a) Se împarte secțiunea complexă în figuri geometrice simple și se numerotează figurile simple (Figura 4.10)  
 (b) Se atașează secțiunii complexe un sistem de referință inițial ( $z_0Oy_0$ ), (Figura 4.10)  
 (c) Pentru fiecare figură simplă, se determină centrul de greutate și se atașează sistem de axe, (Figura 4.10)



**Fig. 4.10.** Secțiune compusă în formă de L

(d) Pentru fiecare figură simplă se calculează coordonatele centrului de greutate ( $z_i; y_i$ ), respectiv aria ( $A_i$ ):

Figura 1	Figura 2
$z_1 = 5 \text{ mm}$	$z_2 = 35 \text{ mm}$
$y_1 = 50 \text{ mm}$	$y_2 = 5 \text{ mm}$
$A_1 = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ mm}^2$	$A_2 = 50 \cdot 10 = 500 \text{ mm}^2$

(e) Se calculează coordonatele centrului de greutate  $G(z_G; y_G)$  al secțiunii complexe:

$$\begin{cases} z_G = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 1000 + 35 \cdot 500}{(1000 + 500)} \Rightarrow z_G = +15 \text{ mm} \\ y_G = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{50 \cdot 1000 + 5 \cdot 500}{(1000 + 500)} \Rightarrow y_G = +35 \text{ mm} \end{cases}$$

În Figura 4.11 se prezintă secțiunea compusă sub formă de L, cu centrul de greutate de coordonate:  $G(z_G; y_G) \Rightarrow G(+15; +35)$ .



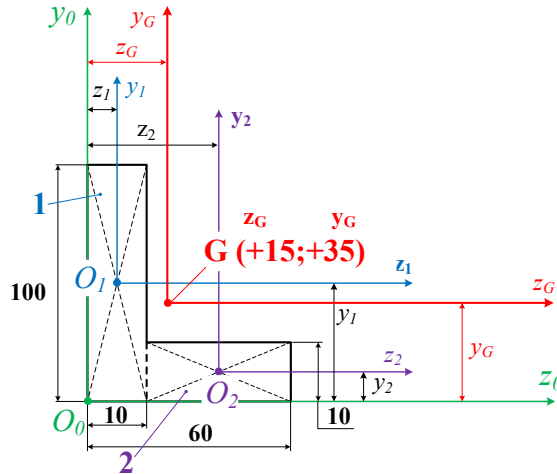


Fig. 4.11. Centrul de greutate al secțiunii compuse

2. Momentele statice față de sistemul de axe  $y_0O_0z_0$  se calculează cu relațiile uzuale:

$$\begin{cases} S_{z_0} = y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 \\ S_{z_0} = 50 \cdot 1000 + 5 \cdot 500 = 52500 \text{ mm}^3 \\ S_{y_0} = z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 \\ S_{y_0} = 5 \cdot 1000 + 35 \cdot 500 = 67500 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

3. Pentru calculul momentelor de inerție ( $I_{y_0}$ ;  $I_{z_0}$ ) se utilizează relațiile lui Steiner, pentru care s-au determinat momentele de inerție după axa ( $z$ ) și ( $y$ ) pentru fiecare figură simplă:

- pentru secțiunea dreptunghiulară:  $I_{z_i} = \frac{B \cdot H^3}{12}$ ;  $I_{y_i} = \frac{B^3 \cdot H}{12}$

▪  $y_{Gi}$ ;  $z_{Gi}$  se calculează:

$$\begin{cases} y_{Gi} = y_i - y_G \\ z_{Gi} = z_i - z_G \end{cases}$$

Figura 1	Figura 2
$y_{G1} = y_1 - y_G = 50 - 35 = +15 \text{ mm}$	$y_{G2} = y_2 - y_G = 5 - 35 = -30 \text{ mm}$
$z_{G1} = z_1 - z_G = 5 - 15 = -10 \text{ mm}$	$z_{G2} = z_2 - z_G = 35 - 15 = +20 \text{ mm}$
$I_{z1} = \frac{100 \cdot 10^3}{12} = 8333,34 \text{ mm}^4$	$I_{z2} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} = 10,42 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
$I_{y1} = \frac{100^3 \cdot 10}{12} = 83,34 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$I_{y2} = \frac{10^3 \cdot 50}{12} = 4166,67 \text{ mm}^4$

$$\begin{cases} I_{z_0} = (I_{z1} + y_{G1}^2 \cdot A_1) + (I_{z2} + y_{G2}^2 \cdot A_2) \\ I_{z_0} = (8333,34 + 15^2 \cdot 1000) + (10,42 \cdot 10^4 + (-30)^2 \cdot 500) \\ \quad = 10733686,9576 = 78,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ I_{y_0} = (I_{y1} + z_{G1}^2 \cdot A_1) + (I_{y2} + z_{G2}^2 \cdot A_2) \\ I_{y_0} = (83,34 \cdot 10^4 + (-10)^2 \cdot 1000) + (4166,67 + 20^2 \cdot 500) \\ \quad = 10692334,052376 = 113,76 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

4. Modulele de rezistență ale secțiunii compuse se calculează cu expresiile uzuale. Distanțele maxime pe direcția axelor ( $y$ ) și ( $z$ ) de la centrul de greutate al secțiunii până la fibrele cele mai îndepărtate, sunt:  $z_{max} = 45 \text{ mm}$ ;  $y_{max} = 65 \text{ mm}$ .

Modulele de rezistență sunt:

$$\begin{cases} W_y = \frac{113,76 \cdot 10^4}{45} = 25,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\ W_z = \frac{78,75 \cdot 10^4}{65} = 12,11 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

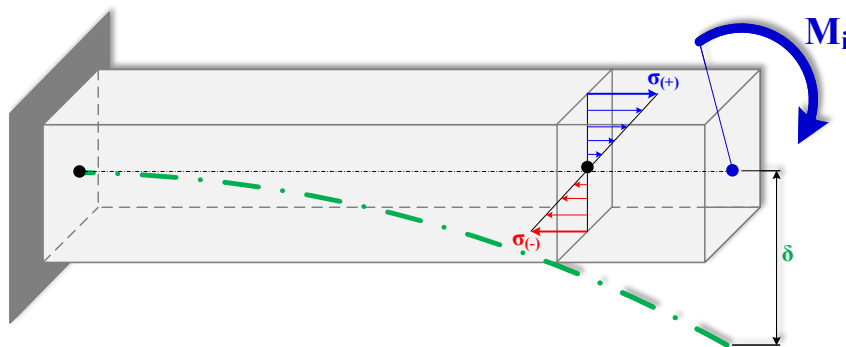
5. Razele de inerție ale secțiunii compuse sunt:

$$\begin{cases} i_y = \sqrt{\frac{113,76 \cdot 10^4}{(1000 + 500)}} = 27,53 \text{ mm} \\ i_z = \sqrt{\frac{78,75 \cdot 10^4}{(1000 + 500)}} = 22,91 \text{ mm} \end{cases}$$

*Observații:* (1) Pentru acest exemplu, secțiunea plană complexă s-a considerat că este compusă din două figuri geometrice simple (două dreptunghiuri, notate pe schiță cu 1 și 2), respectiv prin adăugarea de material.  
(2) În acest caz, pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii complexe, s-a efectuat însumarea algebrică a caracteristicilor geometrice calculate pentru fiecare figură geometrică simplă.

## 5. ÎNCOVOIEREA PLANĂ A GRINZILOR DREPTE

<b>5.1. Noțiuni generale. Reazeme. Eforturi</b>	101
<b>5.2. Calculul eforturilor în secțiunea transversală a grinzilor</b>	102
5.2.1. Convenția de semne ale eforturilor	102
5.2.2. Relații diferențiale între eforturi	103
5.2.3. Construcția diagramei de eforturi: Etape de calcul	105
<b>5.3. Tensiuni normale în grinzile solicate la încovoiere</b>	114
<b>5.4. Tensiuni tangențiale în grinzile solicate la încovoiere</b>	119
5.4.1. Principiul dualității tensiunilor tangențiale	119
5.4.2. Tensiuni tangențiale. Deducerea Formulei lui Juravski	120
5.4.3. Variația tensiunilor tangențiale pentru diferite secțiuni transversale ale grinzii	123
<b>5.5. Deformațiile grinzilor solicate la încovoiere</b>	139
5.5.1. Ecuația diferențială a fibrei medii deformată	140
5.5.2. Studiul deformațiilor grinzilor utilizând metode de integrare a f.m.d.	142
5.5.2.1. Metoda de integrare directă	142
5.5.2.2. Metoda identificării constantelor arbitrare (sau metoda Clebsch)	149
5.5.2.3. Metoda suprapunerii efectelor	155



$$\sigma = \frac{M_{i,z}}{I_z} \cdot y$$

$$\tau = \frac{T_y \cdot S_z}{b_y \cdot I_z}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z}$$

## 5. ÎNCOVOIEREA PLANĂ A GRINZILOR DREPTE

### 5.1. Noțiuni generale. Rezume. Eforturi

O grindă dreaptă este solicitată la încovoiere plană dacă asupra ei acționează forțe transversale exterioare, perpendiculare pe axa longitudinală a grinzii, sau cupluri de forțe aflate în același plan cu axa longitudinală a grinzii (axa  $x$ ), deformarea producându-se în planul forțelor. Conform Figurii 5.1a), planul forțelor este planul în care acționează forțele, adică planul vertical,  $xOy$ .

În general, încovoierea plană este însoțită de forfecare, iar în secțiunea transversală apar următoarele eforturi: *forța axială* ( $N$ ), *forța tăietoare* ( $T$ ) și *momentul încovoiător* ( $M_i$ ). La încovoiere, sarcinile exterioare ( $F$ ,  $M$ ,  $q$  etc.) sunt cuprinse în planul forțelor.

Atunci când în secțiunea transversală a grinzii se dezvoltă numai momente încovoiătoare ( $M_i$ ) *încovoierea este pură*.

Piesele solicitate la încovoiere se numesc *grinzi*, caracterizate prin axa lor longitudinală și secțiunea normală sau transversală.

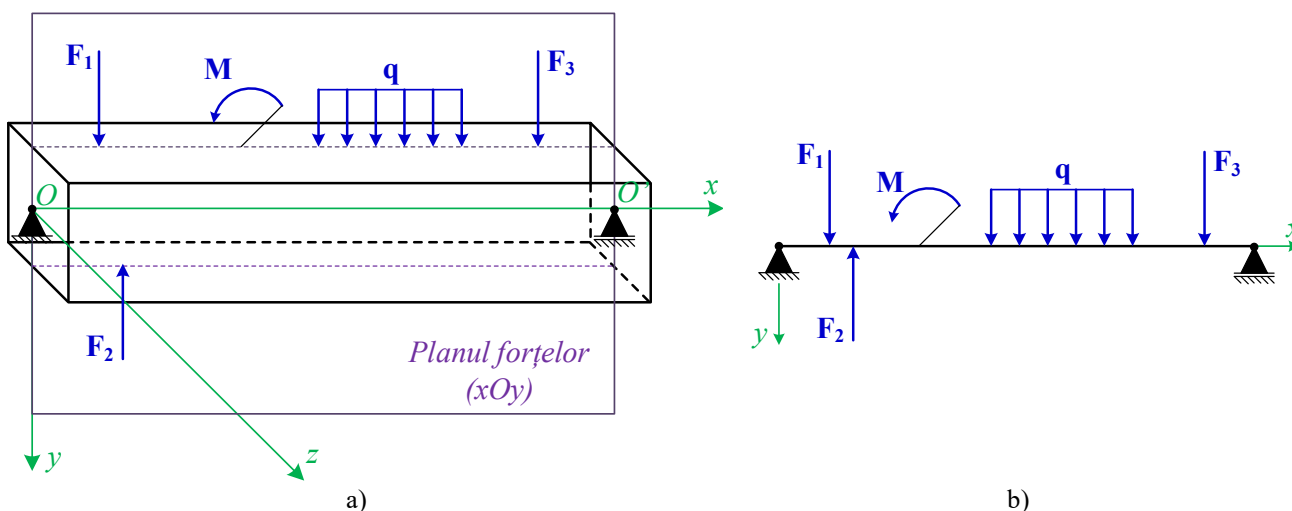


Fig. 5.1. Grindă solicitată la încovoiere: a) Reprezentare 3D; b) Reprezentare schematizată

În figură s-au notat:  $F_1, F_2, F_3$  – forțe concentrate, [N]  
 $M$  – moment de încovoiere concentrat, [N·mm]  
 $q$  – sarcină uniform distribuită pe unitatea de lungime, [N/mm].

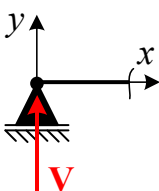
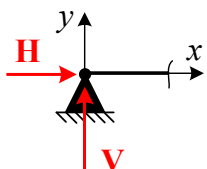
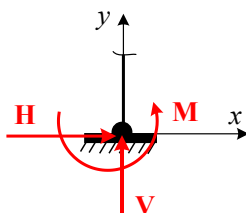
În studiul încovoierii grinzilor se admit următoarele ipoteze simplificatoare:

- Pentru calculul teoretic, grinziile reale pot fi reprezentate schematizat prin axa lor longitudinală (axa  $x$ ), iar solicitările exterioare acționează direct pe această axă, în planul perpendicular pe grindă ce cuprinde axa centrelor de greutate ale secțiunii transversale
- Grinda are secțiunea transversală constantă pe toată lungimea sa, iar dimensiunile secțiunii sunt mici comparativ cu lungimea sa
- Deformațiile (săgeți, rotiri) sunt mici, fiind valabilă ipoteza deformațiilor mici
- Distanțele dintre sarcinile exterioare se păstrează și după deformarea grinzii
- Tensiunile care apar în grindă datorită solicitărilor nu depășesc limita de proporționalitate a materialului ( $\sigma_p$  pe curba caracteristică a materialului), materialul fiind guvernat de legea lui Hooke

- Ipoteza lui Saint – Venant care afirmă că, dacă un sistem de forțe este înlocuit cu un altul echivalent din punct de vedere static, diferențele în distribuția tensiunilor apar doar local, în zona de aplicare, iar la distanță devin ne semnificative
- Ipoteza lui Bernoulli care susține că, în timpul deformării unei bare sollicitate la încovoiere, secțiunile plane și perpendiculare pe axa barei înainte de deformare rămân plane și perpendiculare pe axa deformată.

Pentru a putea prelua sarcinile exterioare care le revin, grinzile se sprijină pe alte elemente de susținere sau puncte de sprijin, denumite *reazeme*, iar forțele de legătură din reazeme se numesc *reacțiuni*. În Tabelul 5.1 sunt date cele mai uzuale tipuri de reazeme în plan (planul  $xOy$ ) întâlnite în practica inginerescă.

Tabelul 5.1. Clasificarea reazemelor

1. Reazem simplu sau mobil	2. Reazem fix sau articulație	3. Încastrare
		
Introduce o necunoscută: <b>reacțiunea verticală (V).</b>	Introduce două necunoscute: <b>reacțiunea orizontală (H)</b> respectiv <b>verticală (V).</b>	Introduce trei necunoscute: <b>reacțiunea orizontală (H)</b> și <b>verticală (V)</b> , respectiv <b>momentul de încovoiere (M<sub>i</sub>).</b>

*Observație:* (1) Grinzile la care numărul necunoscutelor introduse în reazeme (numărul reacțiunilor) este egal cu numărul de ecuații date de Statica în plan (trei ecuații de echilibru static:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_i = 0$ ) se numesc *grinzi static determinate*. Dacă numărul necunoscutelor depășește numărul ecuațiilor de echilibru în plan, atunci grinzile sunt *static nedeterminate* și se rezolvă aplicând metode de calcul specifice.

## 5.2. Calculul eforturilor în secțiunea transversală a grinzilor

Așa cum s-a menționat anterior, în secțiunea transversală a unei grinzi sollicitată la încovoiere plană, pot exista trei tipuri de eforturi: *forța axială (N)*; *forța tăietoare (T)*; *momentul de încovoiere (M<sub>i</sub>)*. Pentru determinarea eforturilor, se aplică metoda secțiunilor, precedată de calculul reacțiunilor în reazeme (aplicând ecuațiile de echilibru:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_o = 0$ ).

### 5.2.1. Convenția de semne ale eforturilor

a) *Forța axială (N)* reprezintă suma tuturor forțelor care acționează în stânga sau în dreapta secțiunii, orientate după normala la secțiune.

$$N_x = \sum F_{\text{stânga}} \text{ sau } N_x = \sum F_{\text{dreapta}} \quad (5.1)$$

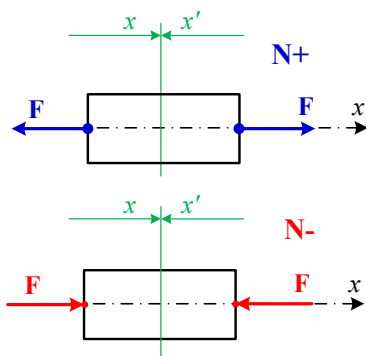


Fig. 5.2. Convenția de semne pentru forța axială (N)

Forța axială ( $N$ ) este pozitivă dacă forțele exterioare ies din secțiune, producând întinderea (fibrelor care compun secțiunea se lungesc). Dacă forțele exterioare intră în secțiunea transversală producând comprimarea sau scurtarea fibrelor acesteia, forța axială în secțiune va fi negativă (Figura 5.2).

b) Forța tăietoare ( $T$ ) reprezintă suma tuturor forțelor din planul secțiunii care acționează în stânga sau în dreapta secțiunii și au efect de tăiere, forfecare.

$$T_y = \sum F_{\text{stânga}} \text{ sau } T_y = \sum F_{\text{dreapta}} \quad (5.2)$$

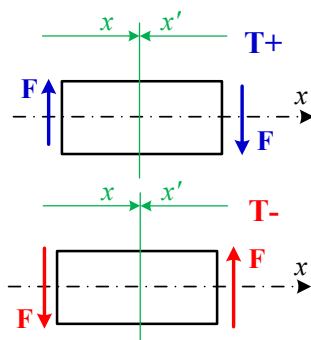


Fig. 5.3. Convenția de semne pentru forța tăietoare (T)

Forța tăietoare ( $T$ ) are semnul pozitiv dacă forțele tind să rotească secțiunea în sens orar, respectiv are semnul negativ dacă acestea tind să rotească secțiunea în sens antiorar (Figura 5.3).

c) Momentul încovoiator ( $M_i$ ) reprezintă suma momentelor și/sau a cuplurilor de forțe din stânga sau din dreapta secțiunii transversale.

$$M_z = \sum F(x - a_i) \quad (5.3)$$

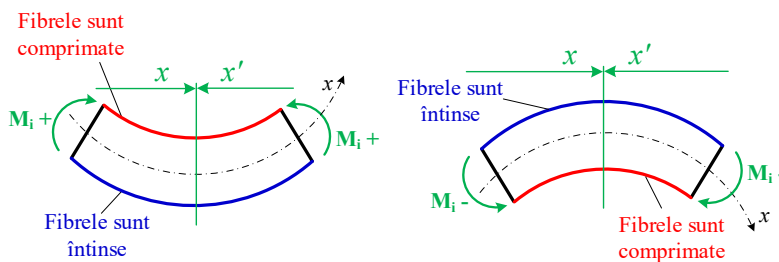


Fig. 5.4. Convenția de semne pentru momentul încovoiator ( $M_i$ )

Momentul încovoiator ( $M_i$ ) în secțiunea transversală este pozitivă dacă, în urma solicitării, fibrele superioare sunt comprimate (se scurtează), iar cele inferioare sunt întinse (se lungesc), respectiv este negativ în secțiune dacă fibrele superioare sunt întinse, iar cele inferioare sunt comprimate (Figura 5.4).

### 5.2.2. Relații diferențiale între eforturi

Eforturile ( $T_y$ ) și ( $M_{i_z}$ ) nu acționează cu aceeași intensitate pe toată lungimea unei grinzi drepte. Pentru stabilirea celor mai solicitate secțiuni, este necesară cunoașterea variației eforturilor de-a lungul grinzii și să se traseze diagramele de variație ale acestora. Astfel, se poate identifica secțiunea în care eforturile sunt minime, respectiv secțiunea în care eforturile au valori maxime. Acest aspect este important în studiul grinzilor, pentru a putea identifica în final secțiunea în care solicitarea este maximă, în care se produc tensiunile și deformațiile maxime.

În acest scop, se consideră o grindă simplu rezemată și încărcată cu o sarcină uniform distribuită ( $q_x$ ) și mai multe forțe concentrate ( $F_1, F_2, F_3$ ), Figura 5.5.

Din grindă se detașează un element de lungime ( $dx$ ), pe care sarcina ( $q_x$ ) se consideră constantă. Pe suprafețele celor două secțiuni ale elementului se reprezintă forțele tăietoare și momentele încovoietoare, ambele considerate pozitive.

Pentru elementul detașat se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y - (T_y + dT_y) - q_x \cdot dx = 0 \quad (5.4)$$

$$T_y - T_y - dT_y - q_x \cdot dx = 0 /: dx$$

$$\frac{dT_y}{dx} = -q_x \quad (5.5)$$

Expresia (5.5) este prima ecuație diferențială între eforturi, adică *derivata forței ( $T_y$ ) tăietoare în raport cu abscisa secțiunii ( $dx$ ) este egală cu sarcina distribuită ( $q_x$ ) normală pe axa longitudinală a grinzii, luată cu semnul schimbat [2].*

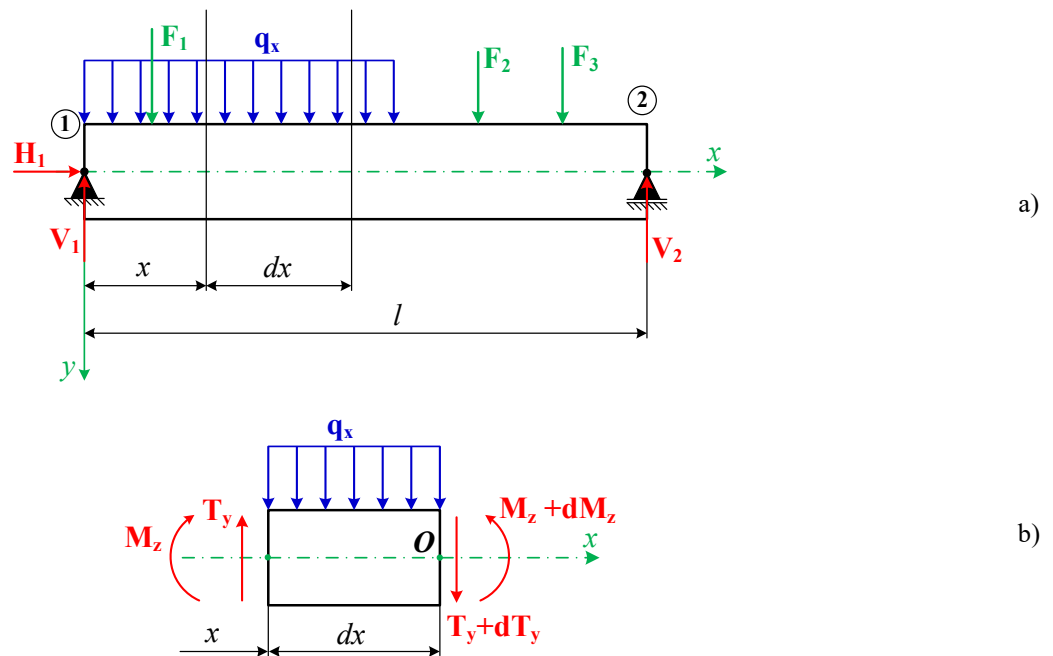


Fig. 5.5. (a) Grindă solicitată la încovoiere; b) Element detașat din grindă

În figură s-au notat:

- $F_{1+3}, q_x$  – solicitări exterioare (forțe concentrate, sarcină uniform distribuită), [N], [N/mm]
- $H_1, V_1, V_2$  – reacțiunea orizontală, respectiv cele verticale din reazeme, [N]
- $dx$  – lungimea unui element oarecare aflat la distanța ( $x$ ) față de punctul 1 și de lungime ( $dx$ )
- $T_y, M_z$  – eforturile din stânga secțiunii ( $dx$ ), [N], [N·mm]
- $T_y+dT_y, M_z+dM_z$  – eforturile aflate în dreapta secțiunii având creșterile elementare ( $dT_y$ ), respectiv ( $dM_z$ ), [N], [N·mm].

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_z + T_y \cdot dx - q_x \cdot \frac{(dx)^2}{2} - (M_z + dM_z) = 0 \quad (5.6)$$

$$M_z + T_y \cdot dx - q_x \cdot \frac{(dx)^2}{2} - M_z - dM_z = 0 /: dx$$

$$\frac{dM_z}{dx} = T_y \quad (5.7)$$

Expresia (5.7) este a doua ecuație diferențială între eforturi, adică *derivata momentului încovoietor ( $M_z$ ) în raport cu abscisa ( $dx$ ) este egală cu forța tăietoare din acea secțiune ( $T_y$ )* [2]. Se derivează încă o dată expresia (5.7) și se obține:

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = \frac{dT_y}{dx} = -q_x \quad (5.8)$$

Relațiile (5.5), (5.7) sau (5.8) sunt utile pentru construcția diagramelor de eforturi ( $T_y$  și  $M_z$ ) a grinzilor solicitate la încovoiere plană. Pe baza lor, se fac următoarele observații importante:

- Observații:**
- (1) *Diagramele de eforturi se construiesc pentru a putea observa evoluția eforturilor de-a lungul grinzii, respectiv secțiunile transversale în care eforturile sunt pozitive sau negative.*
  - (2) *În punctele de pe grindă în care acționează forțe concentrate, normale la axa grinzii, diagrama forței tăietoare va avea un salt pe direcția forței, egal cu mărimea forței concentrate.*
  - (3) *Diagrama de variație a momentelor încovoietoare va avea un salt în dreptul momentelor concentrate de pe grindă.*
  - (4) *Sarcina distribuită ( $q$ ) măsoară panta diagramei de variație a forțelor tăietoare (dacă  $q = 0$ , atunci  $T_y$  este constant), respectiv mărimea forței tăietoare măsoară panta diagramei de momente încovoietoare.*
  - (5) *Momentul încovoietor ( $M_z$ ) va avea o valoare extremă (maximă sau minimă) dacă forțele tăietoare se anulează sau își schimbă semnul într-un punct, numit punct critic*
  - (6) *Funcția forței tăietoare este cu un grad superioară funcției sarcinii uniforme distribuite, iar cea a momentului încovoietor cu un grad superioară celei a forței tăietoare, adică:*
    - (\*) *dacă momentul încovoietor este nul, atunci forța tăietoare este constantă;*
    - (\*\*) *dacă forța tăietoare este constantă, atunci momentul încovoietor variază liniar (exprimat printr-o ecuație de gradul I);*
    - (\*\*\*) *dacă forța tăietoare variază liniar, atunci momentul încovoietor variază după o parabolă (exprimat printr-o ecuație de gradul al II-lea).*
  - (7) *Pe intervalele pe care forța tăietoare este pozitivă, momentul încovoietor crește, respectiv scade pe intervalele în care forța tăietoare ( $T_y$ ) este negativă.*

### 5.2.3. Construcția diagramelor de eforturi: Etape de calcul

Etapa de lucru	Descriere
(1)	Se introduce sistemul de referință în plan (sistemul $xOy$ ).
(2)	Se stabilește un sens de parcurgere al grinzii.
(3)	Se identifică reazemele și se introduc reacțiunile aferente tipului de reazem. În mod uzual, reacțiunile ( $V$ ) și ( $H$ ) se introduc intrând în nod. În urma calculelor, valorile lor pot fi pozitive sau negative (dacă sunt pozitive înseamnă că se iau așa cum s-au pus).
(4)	Se calculează reacțiunile din reazeme, aplicând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan: $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_o = 0$



(5)	Se scriu expresiile eforturilor ( $N_x$ , $T_y$ , $M_{i_z}$ ) pentru fiecare interval, ținându-se cont de convenția de semne pentru eforturi. Se calculează eforturile în punctele (secțiunile) care definesc fiecare interval. În urma calculelor, eforturile pot avea valori negative sau pozitive.
(6)	Cu valorile obținute ale eforturilor și ținând cont de ecuațiile obținute pentru fiecare interval se construiesc diagramele de variație ale acestora.
(7)	Se identifică secțiunea maxim sollicitată și se notează valorile maxime ale eforturilor.

*Aplicații rezolvate*

*Aplicația 5-1.* Pentru grinda simplu rezemată și sollicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ), (Figura 5.6) se cere să se calculeze:

- (a) Reacțiunile din reazeme
- (b) Eforturile ( $T$ ) și ( $M_i$ ) pe fiecare interval cu trasarea diagramele de variație ale acestora
- (c) Să se identifice eforturile maxime ( $T_{max}$ ,  $M_{i_{max}}$ ) și să se specifice punctele (secțiunile), respectiv intervalele pe care acestea acționează.

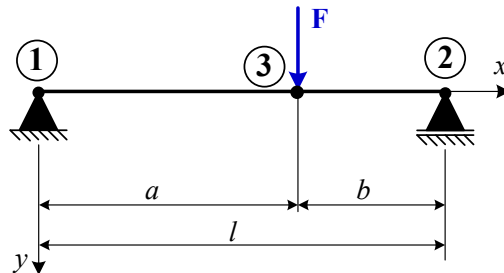


Fig. 5.6. Grindă simplu rezemată sollicitată la încovoiere plană

*Rezolvare.* Pentru rezolvarea problemei propuse, se aplică etapele de calcul prezentate la punctul 5.2.3., astfel: se atașează sistemul de referință  $xOy$ , în care axa ( $x$ ) este axa longitudinală a grinzii. Se numerotează reazemele, respectiv punctul de aplicație al forței ( $F$ ), obținându-se trei puncte, respectiv două intervale (1 – 3; 3 – 2). Se identifică tipul de reazem și se introduc următoarele reacțiuni: în punctul 1 e un reazem fix sau articulat care anulează translațiile după cele două axe și drept consecință apar două necunoscute (reacțiunea orizontală,  $H_1$  și cea verticală,  $V_1$ ), iar în punctul 2 e un reazem simplu sau mobil care anulează doar translația verticală și introduce o singură necunoscută, reacțiunea verticală ( $V_2$ ), Figura 5.7.

(a) *Calculul reacțiunilor*

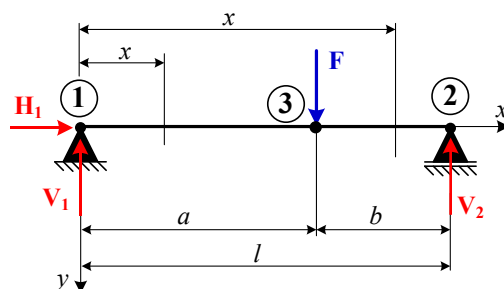


Fig. 5.7. Introducerea reacțiunilor în reazemele simple

Pentru calculul reacțiunilor din reazeme ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $V_2$ ) se alege semnul pozitiv al forțelor și al momentelor și se aplică ecuațiile de echilibru date de Statică în plan:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow F \cdot a - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = F \cdot \frac{a}{l}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) = 0 \Rightarrow V_1 = F \cdot \frac{(l - a)}{l}$$

Pentru verificarea reacțiunilor, se efectuează un calcul de verificare aplicând ecuația de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - F = 0 \Rightarrow F \cdot \frac{(l - a)}{l} + F \cdot \frac{a}{l} - F = 0$$

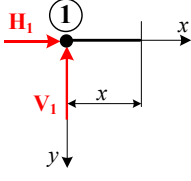
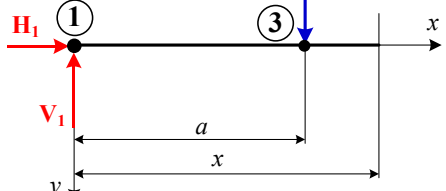
$$F - F \cdot \frac{a}{l} + F \cdot \frac{a}{l} - F = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

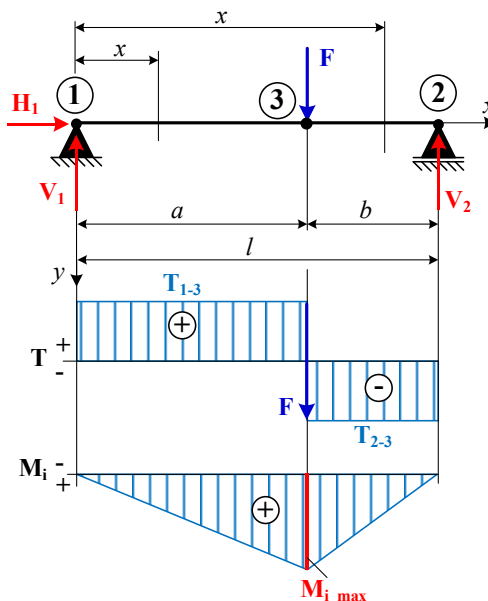
Calculul de verificare validează rezultatele obținute, respectiv suma reacțiilor verticale ( $V_1$ ,  $V_2$ ) este egală cu forța aplicată ( $F$ ), iar grinda se află în echilibru static.

(b) Calculul eforturilor ( $T$ ) și ( $M_i$ )

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare  $T$  și momentul de încovoiere  $M_i$ ) din secțiunea transversală a grinzii, se aplică metoda secțiunilor pe fiecare interval și se ține cont de convenția de semne pentru eforturile prezentate la punctul 5.2.1. Se obține:

**Tabelul 5.2.** Calculul eforturilor

	<p><i>Intervalul 1 – 3: <math>x \in [0; a)</math></i></p> <p><math>N_{1-3} = H_1 = 0</math></p> <p><math>T_{1-3} = V_1</math></p> <p><math>M_{1-3} = V_1 \cdot x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = 0</math></li> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot a</math></li> </ul>
	<p><i>Intervalul 3 – 2: <math>x \in [a; l)</math></i></p> <p><math>N_{3-2} = H_1 = 0</math></p> <p><math>T_{3-2} = V_1 - F</math></p> <p><math>M_{3-2} = V_1 \cdot x - F(x - a)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot a</math></li> <li>▪ pentru <math>x = l \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot l - F(l - a)</math></li> </ul> <p style="text-align: center;"><math>M_2 = 0</math></p>



**Fig. 5.8.** Diagramele de variație ale eforturilor ( $T$ ) și ( $M_i$ )

Pe baza expresiilor obținute, se construiesc diagramele de variație ale eforturilor (Figura 5.8). Se observă că, pentru acest caz de încărcare și rezemare, forța tăietoare ( $T$ ) este constantă pe ambele intervale (pe intervalul 1 – 3 este pozitivă și negativă pe celalalt interval), iar momentul de încovoiere este pozitiv și variază liniar de la valoarea zero (pe capetele grinzii) spre valoarea maximă (în punctul de aplicație al forței  $F$ ). Forța tăietoare este constantă în secțiune deoarece expresia nu depinde de variabila ( $x$ ), iar momentul variază liniar pentru că este definit de o ecuație de gradul I.

(c) Eforturile maxime

Având în vedere diagramele de variație, eforturile maxime se identifică astfel: (a) pentru forța tăietoare maximă ( $T_{max}$ ) - se compară forțele tăietoare în valoarea absolută și se consideră valoarea maximă, iar la scrierea rezultatului final se consideră și semnul aferent valorii maxime; (b) în mod similar, pentru momentul încovoiitor maxim ( $M_{i\_max}$ ) se compară momentele încovoiitoare în valoare absolută și se consideră valoarea maximă (la scrierea rezultatului final se consideră și semnul aferent valorii maxime). Astfel, rezultă:

Tabelul 5.3. Valorile maxime ale eforturilor în secțiunea transversală a grinzii

Efort maxim	Intervalul / punctul maxim solicitat	Expresia efortului maxim
Forța tăietoare ( $T_{max}$ )	Intervalul 1 – 3	$T_{max} = T_{1-3} = V_1$
Momentul încovoiitor maxim ( $M_{i\_max}$ )	Punctul 3	$M_{i\_max} = M_3 = V_1 \cdot a$

*Aplicația 5-2.* Pentru grinda simplu rezemată și solicitată la încovoiere plană de sarcina uniform distribuită pe unitatea de lungime ( $q$ ) din Figura 5.9, se cere să se calculeze:

- (a) Reacțiunile din reazeme
- (b) Eforturile ( $T$ ) și ( $M_i$ ) cu trasarea diagramele de variație ale acestora
- (c) Să se identifice eforturile maxime ( $T_{max}$ ,  $M_{i\_max}$ ) și să se specifice secțiunile sau intervalele pe care acestea acționează.

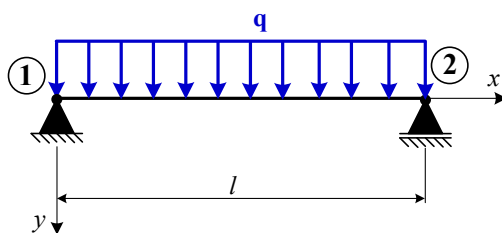


Fig. 5.9. Grindă simplu rezemată solicitată la încovoiere plană de sarcina uniform distribuită ( $q$ )

*Rezolvare.* Pentru rezolvarea problemei propuse, se procedează ca și în cazul anterior, astfel: se atașează sistemul de referință  $xOy$ ; se numerează reazemele, obținând un interval (1 – 2); se introduc reacțiunile în fiecare reazem, rezultând în total trei reacțiuni: reacțiunea orizontală, ( $H_1$ ) și cea verticală, ( $V_1$ ) în punctul 1 și reacțiunea verticală ( $V_2$ ) din punctul 2. Pentru efectuarea calculelor teoretice, sarcina uniform distribuită ( $q$ ) se reduce în centru de greutate la o forță concentrată ( $q \cdot l$ ), și reprezintă produsul dintre valoarea sa și lungimea pe care acționează (Figura 5.10)

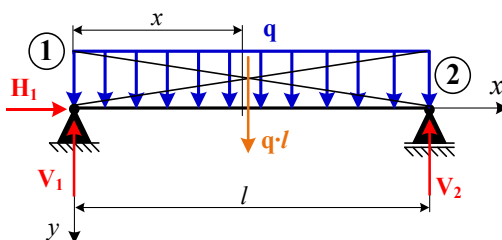


Fig. 5.10. Introducerea reacțiunilor în reazemele simple

(a) Calculul reacțiunilor

Pentru calculul reacțiunilor din reazeme ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $V_2$ ) se alege semnul pozitiv al forțelor și al momentelor și se aplică ecuațiile statice de echilibru uzuale:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{q \cdot l}{2}$$

Pentru verificarea reacțiunilor, se efectuează un calcul de verificare aplicând ecuația de proiecții pe verticală:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - q \cdot l = 0 \Rightarrow \frac{q \cdot l}{2} + \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot l = 0$$

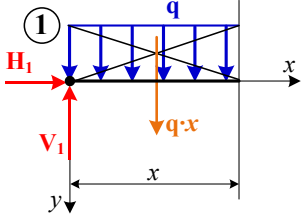
$$\frac{2 \cdot q \cdot l}{2} - q \cdot l = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

În urma calculului, rezultă că verificarea este validă, respectiv suma reacțiunilor verticale ( $V_1$ ,  $V_2$ ) este egală cu forța ( $q \cdot l$ ), iar grinda se află în echilibru static.

(b) Calculul eforturilor ( $T$ ) și ( $M_i$ )

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare  $T$  și momentul de încovoiere  $M_i$ ) din secțiunea transversală a grinzii, se aplică metoda secțiunilor și se ține cont de convenția de semne pentru eforturi prezentată în sub-capitolul 5.2.1. Se menționează că reacțiunea orizontală ( $H_1$ ) este zero, respectiv grinda nu este solicitată axial, rezultând că forța axială ( $N_{1-2}$ ) este nulă. Se obține:

Tabelul 5.4. Calculul eforturilor

	<p><i>Intervalul 1 – 2: <math>x \in ]0; l[</math></i></p>
	<p><math>T_{1-2} = V_1 - q \cdot x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow T_1 = V_1 = \frac{q \cdot l}{2}</math></li> <li>▪ pentru <math>x = l \Rightarrow T_2 = V_1 - q \cdot l = -\frac{q \cdot l}{2}</math></li> </ul>
	<p><i>Observație: (1) Dacă forța tăietoare își schimbă semnul, atunci va exista un punct critic în care forța tăietoare se anulează, <math>T = 0</math>, iar momentul încovoietor este maxim, <math>M_i = \max</math> (sau minim, <math>M_i = \min</math>). Se calculează abscisa (<math>x_0</math>) a punctului critic.</i></p>
	<p><i>Pentru grinda dată abscisa (<math>x_0</math>) se calculează astfel:</i></p> <p><math>T_{1-2} = 0 \Rightarrow V_1 - q \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{V_1}{q} = \frac{l}{2}</math></p> <p><math>M_{1-2} = V_1 \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = 0</math></li> <li>▪ pentru <math>x = l \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0</math></li> <li>▪ pentru <math>x_0 = \frac{V_1}{q} \Rightarrow M_{i_{\max}} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l^2}{4} \cdot \frac{l}{2}</math></li> </ul> <p style="text-align: center;"><math>M_{i_{\max}} = \frac{q \cdot l^2}{8}</math></p>

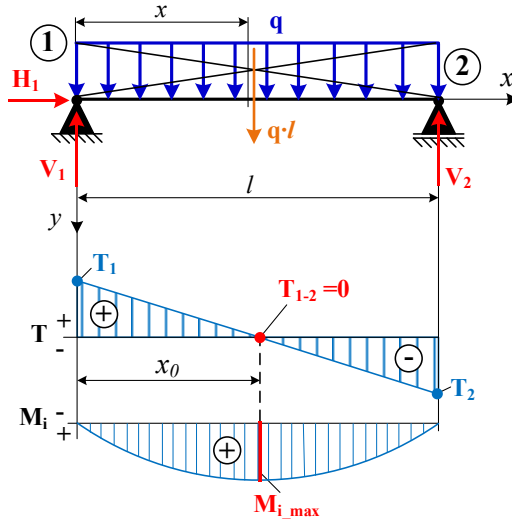


Fig. 5.11. Diagramele de variație ale eforturilor (T) și ( $M_i$ )

Pe baza expresiilor obținute, se trasează diagramele de variație ale eforturilor pentru fiecare interval (Figura 5.11). Se observă că forța tăietoare este definită de o ecuație de gradul I și variază liniar și își schimbă semnul prin punctul critic aflat la abscisa ( $x_0$ ), fiind maximă pe capetele grinzii, iar momentul de încovoiere variază după o parabolă (ecuația de gradul II), iar valoarea maximă este chiar în punctul critic.

(c) Eforturile maxime

Se procedează la fel ca în cazul anterior, iar pentru grinda studiată, conform diagramele de variație ale eforturilor se obțin următoarele eforturi maxime:

Tabelul 5.5. Valorile maxime ale eforturilor în secțiunea transversală a grinzii

Efort maxim	Intervalul / punctul maxim solicitat	Expresia efortului maxim
Forța tăietoare ( $T_{max}$ )	Punctul 1 (și 2)	$T_{max} = T_1 = T_2 = \pm \frac{q \cdot l}{2}$
Momentul încovoiător maxim ( $M_{i\_max}$ )	Pentru $x = x_0 = \frac{l}{2}$ (în punctul critic)	$M_{i\_max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$

Aplicația 5-3. Pentru grinda simplu rezemată și solicitată la încovoiere plană de momentul de încovoiere concentrat (M) din Figura 5.12, se cere să se calculeze:

- Reacțiunile din reazeme
- Eforturile (T) și ( $M_i$ ) pe fiecare interval cu trasarea diagramele de variație ale acestora
- Să se identifice eforturile maxime ( $T_{max}$ ,  $M_{i\_max}$ ) și să se specifice secțiunile și/sau intervalele pe care acestea acționează.

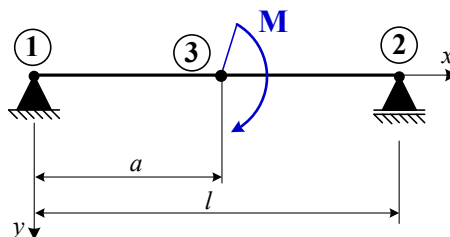


Fig. 5.12. Grindă simplu rezemată solicitată la încovoiere plană de un moment de încovoiere concentrat (M)

*Rezolvare.* Pentru rezolvarea problemei propuse, se parcurg etapele următoare: se atașează sistemul de referință  $xOy$ ; se numerotează reazemele și punctul de aplicație al momentului concentrat ( $M$ ), obținându-se trei puncte, respectiv două intervale (1 – 3; 3 – 2); se introduc reacțiunile în fiecare reazem, rezultând trei reacțiuni: reacțiunea orizontală ( $H_1$ ) și cea verticală, ( $V_1$ ) în reazemul 1 și reacțiunea verticală ( $V_2$ ) din reazemul 2 (Figura 5.13).

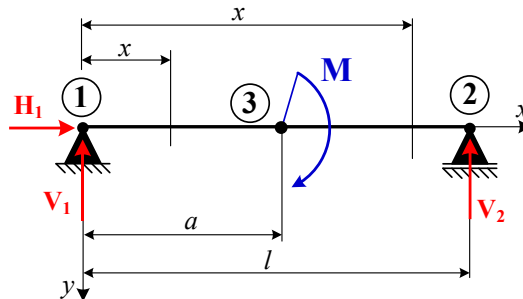


Fig. 5.13. Introducerea reacțiunilor în reazemele simple

(a) *Calculul reacțiunilor*

Pentru calculul reacțiunilor din reazeme ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $V_2$ ) se alege semnul pozitiv al forțelor și al momentelor și se aplică ecuațiile de echilibru date de Satică în plan:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{M}{l}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l + M = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{M}{l}$$

Se observă că cele două reacțiuni verticale sunt egale și de semn contrar. Se efectuează calculul de verificare, utilizând ecuația de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow \frac{M}{l} - \frac{M}{l} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

După efectuarea calculului de verificare, rezultă că cele două reacțiuni s-au determinat corect, respectiv grinda se află în echilibru static.

(b) *Calculul eforturilor ( $T$ ) și ( $M_i$ )*

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare  $T$  și momentul de încovoiere  $M_i$ ) din secțiunea transversală a grinzii, se aplică metoda secțiunii pe fiecare interval și se ține cont de convenția de semne ale eforturilor prezentate la punctul 5.2.1. Se obțin următoarele expresii ale eforturilor:

Tabelul 5.6. Calculul eforturilor

	Intervalul 1 – 3: $x \in [0; a)$
	$T_{1-3} = V_1 = -\frac{M}{l}$ $M_{1-3} = V_1 \cdot x$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = 0</math></li> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot a \Rightarrow M_1 = -M \cdot \frac{a}{l}</math></li> </ul>

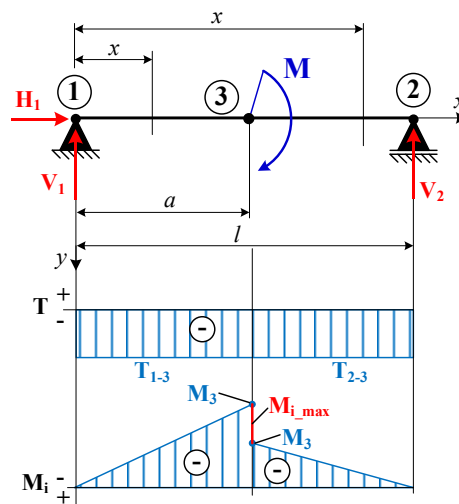
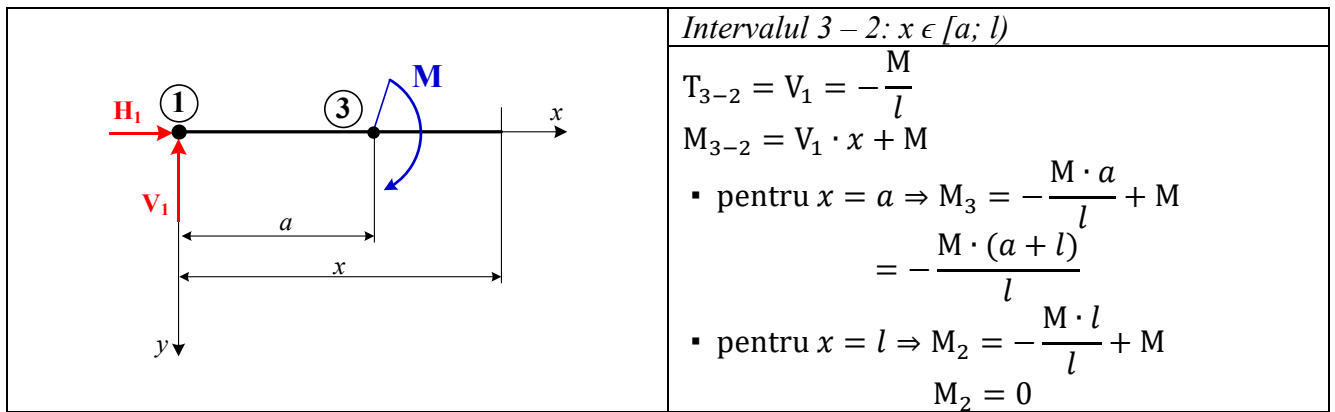


Fig. 5.14. Diagramele de variație ale eforturilor (T) și ( $M_i$ )

Pe baza rezultatelor obținute s-au trasat diagramele de variație ale eforturilor pentru fiecare interval prezentate în Figura 5.14. Analizând diagramele de mai sus, rezultă că forța tăietoare este constantă și negativă pe toată lungimea grinzii, iar momentul încovoietor variază liniar și se obține saltul produs de acțiunea momentului concentrat ( $M$ ) din dreptul secțiunii aferent punctului 3.

(c) *Eforturile maxime*

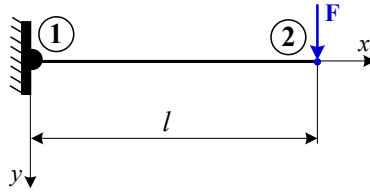
Se procedează la fel ca în cazurile anterioare, iar pentru grinda dată, conform diagramele de variație ale eforturilor se obțin următoarele eforturi maxime:

Tabelul 5.7. Valorile maxime ale eforturilor în secțiunea transversală a grinzii

Efort maxim	Intervalul / punctul maxim solicitat	Expresia efortului maxim
Forța tăietoare ( $T_{max}$ )	Intervalul 1 – 2	$T_{max} = T_{1-3} = T_{3-2} = -\frac{M}{l}$
Momentul încovoietor maxim ( $M_{i\_max}$ )	Punctul 3	$M_{i\_max} = M_3 = -M \cdot \frac{a}{l}$

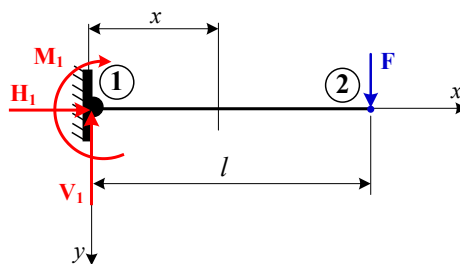
*Aplicația 5-4.* Se dă grinda încastrată în capătul din stânga și solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată pe capătul liber, (Figura 5.15). Se cere să se calculeze:

- (a) Reacțiunile din reazem
- (b) Eforturile (T) și ( $M_i$ ) pe fiecare interval cu trasarea diagramele de variație ale acestora
- (c) Să se identifice eforturile maxime ( $T_{max}$ ,  $M_{i\_max}$ ) și să se specifice secțiunea și/sau intervalul pe care acestea acționează.



**Fig. 5.15.** Grindă încadrată la un capăt și solicitată la încovoiere plană de forța (F) aplicată pe capătul liber

*Rezolvare.* Pentru rezolvarea problemei propuse, se procedează ca și în cazurile precedente, astfel: se atașează sistemul de referință  $xOy$ ; se numerotează reazemul și capătul liber grinzii, obținându-se două puncte, respectiv un interval (1 – 2); se introduc reacțiunile în încastrare, știind că în plan, încastrarea anulează toate cele trei grade de libertate. Rezultă trei reacțiuni: reacțiunea orizontală ( $H_1$ ), cea verticală ( $V_1$ ) și momentul încovoietor ( $M_1$ ), Figura 5.16.



**Fig. 5.16.** Introducerea reacțiunilor în încastrare

*(a) Calculul reacțiunilor*

Pentru calculul reacțiunilor din încastrare ( $H_1$ ,  $V_1$  și  $M_1$ ) se alege semnul pozitiv al forțelor și al momentelor și se aplică ecuațiile de echilibru date de Statica în plan:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_1 - F = 0 \Rightarrow V_1 = F \\ \sum M_1 &= 0 \Rightarrow M_1 + F \cdot l = 0 \Rightarrow M_1 = -F \cdot l \end{aligned}$$

Se efectuează calculul de verificare apelând la ecuația de echilibru:

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M_1 + V_1 \cdot l = 0 \Rightarrow -F \cdot l + F \cdot l = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

În urma calculului rezultă că verificarea este validată și, deci expresiile reacțiunilor s-au dedus în mod corect iar grinda se află în stare de echilibru static.

*(b) Calculul eforturilor (T) și (Mi)*

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare T și momentul de încovoiere  $M_i$ ) din secțiunea transversală a grinzii, se aplică metoda secțiunilor pe intervalul 1 – 2 și se ține cont de convenția de semne pentru eforturile prezentate în sub-capitolul 5.2.1. Știind că  $H_1 = 0$ , se obține:

**Tabelul 5.8.** Calculul eforturilor

	<i>Intervalul 1 – 2: <math>x \in [0; l)</math></i>
	$T_{1-2} = V_1 = F$ $M_{1-2} = V_1 \cdot x + M_1$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = M_1 = -F \cdot l</math></li> <li>▪ pentru <math>x = l \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot l + M_1</math></li> </ul> $M_2 = F \cdot l - F \cdot l = 0$



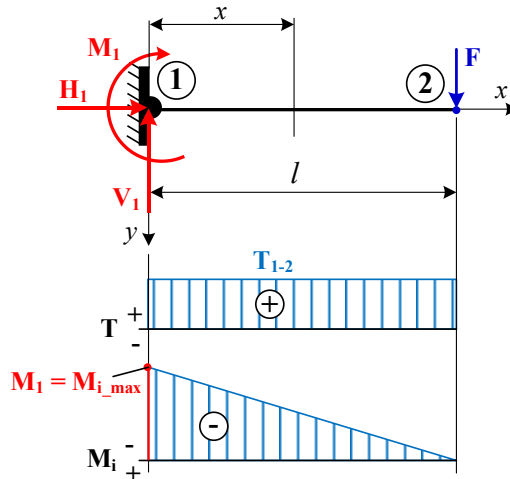


Fig. 5.17. Diagramele de variație ale eforturilor ( $T$ ) și ( $M_i$ )

Pe baza expresiilor obținute, se construiesc diagramele de variație ale eforturilor și sunt prezentate în Figura 5.17. Se obține faptul că, forța tăietoare ( $T$ ) este constantă și pozitivă pe toată lungimea ( $l$ ) a grinzii, iar momentul încovoietor variază linear (ecuație de gradul I), fiind nul pe capătul liber și maxim în încastrare.

### (c) Eforturile maxime

Pentru grinda dată, conform diagramele de variație ale eforturilor se obțin următoarele eforturi maxime:

Tabelul 5.9. Valorile maxime ale eforturilor în secțiunea transversală a grinzii

Efort maxim	Intervalul / punctul maxim solicitat	Expresia efortului maxim
Forța tăietoare ( $T_{max}$ )	Intervalul 1 – 2	$T_{max} = T_{1-2} = F$
Momentul încovoietor maxim ( $M_{i\_max}$ )	Punctul 1	$M_{i\_max} = M_1 = -F \cdot l$

### 5.3. Tensiuni normale în grinzile solificate la încovoiere

În cazul încovoierii plane, eforturile care apar într-o secțiune sunt: *forța normală* ( $N_x$ ) care de regulă este nulă, *forța tăietoare* ( $T_y$ ) și *momentul încovoietor după axa ( $z$ )*, ( $M_{i\_z}$ ). Pentru a determina tensiunile produse de momentul încovoietor, se va analiza un caz particular al încovoierii plane, și anume *cazul încovoierii pure*, când singurul efort în secțiunea transversală este *momentul încovoietor* ( $M_{i\_z}$ ). Rezultă că, în cazul încovoierii pure, în secțiunea transversală *se vor produce doar tensiuni normale* ( $\sigma$ ) generate de acțiunea momentului încovoietor ( $M_{i\_z}$ ).

În acest scop se consideră grinda simplu rezemată pe capete (în punctele 1 și 2), de lungime ( $l$ ), sollicitată la încovoiere de două forțe concentrate egale ( $F$ ), aplicate în secțiunile 3 și 4, la egală distanță față de cele două reazeme (distanța  $a$ ), respectiv simetric dispuse față de mijlocul deschiderii grinzii, Figura 5.18. Pentru această grindă se calculează reacțiunile verticale din reazeme  $V_1 = V_2 = F$  (neexistând solicitare axială, atunci rezultă că reacțiunea orizontală este nulă,  $H_1 = 0$ ). Se calculează eforturile ( $T_y$ ) și ( $M_{i\_z}$ ) pentru fiecare interval și se construiesc diagramele de variație ale acestora.

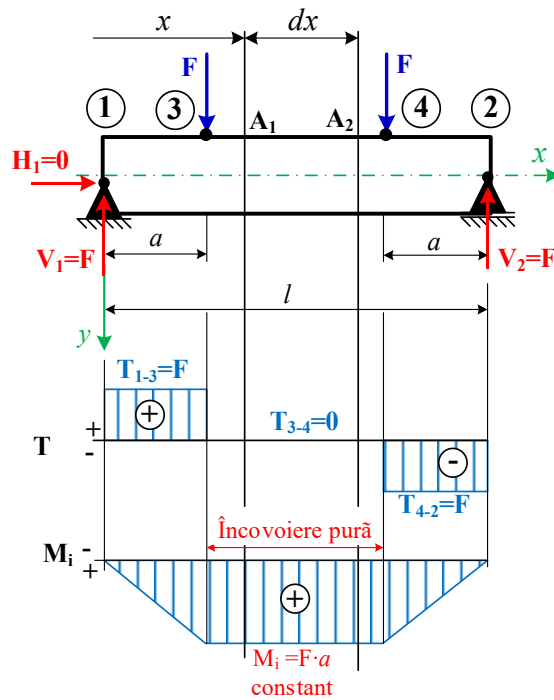


Fig. 5.18. Grindă solicitată la încovoiere pură pe intervalul 3 – 4 (exemplu)

În figură s-au notat:  $F$  – forțele concentrate egale, [N]  
 $l, a$  – lungimea totală a grinzii, respectiv distanța de la forțele aplicate la cele două reazeme, [mm]  
 $T_{3-4}; M_{i_{3-4}}$  – eforturile pe intervalul 3 – 4, [N]; [N·mm].

Așa cum se poate observa, în diagramele de eforturi din Figura 5.18, în secțiunea transversală aflată pe intervalul 3 – 4, forța tăietoare este nulă ( $T_{3-4} = 0$ ), iar momentul încovoiător este constant și pozitiv ( $M_i = F \cdot a$ ). Rezultă că, pe intervalul 3 – 4 încovoierea este pură și este produsă doar de acțiunea momentului încovoiător din această secțiune transversală, iar fibrele superioare sunt comprimate (se scurtează), iar fibrele inferioare sunt întinse (se lungesc). În Figura 5.19b se evidențiază solicitarea grinzii în planul vertical  $xOy$  (sau planul forțelor), respectiv se prezintă modul de deformare al grinzii înainte și după solicitare.

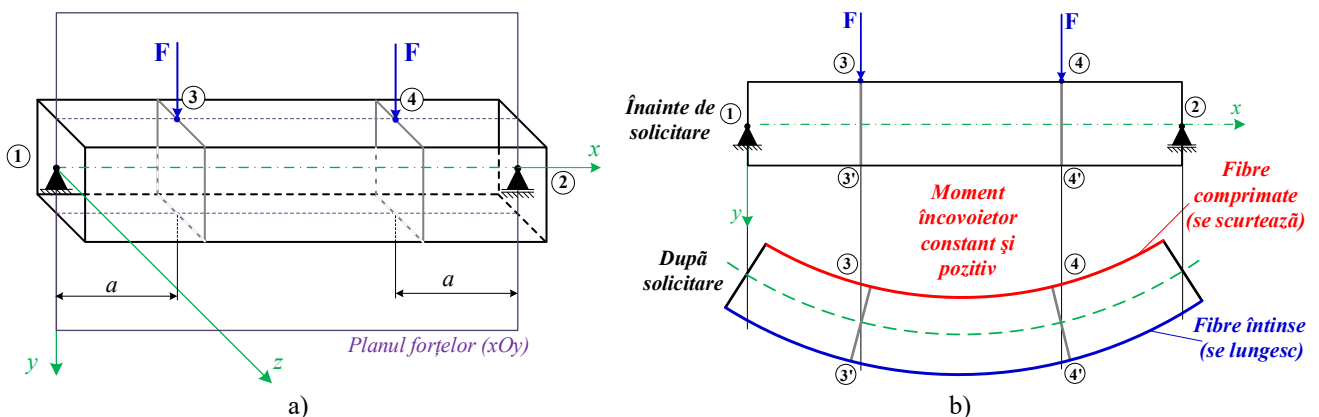
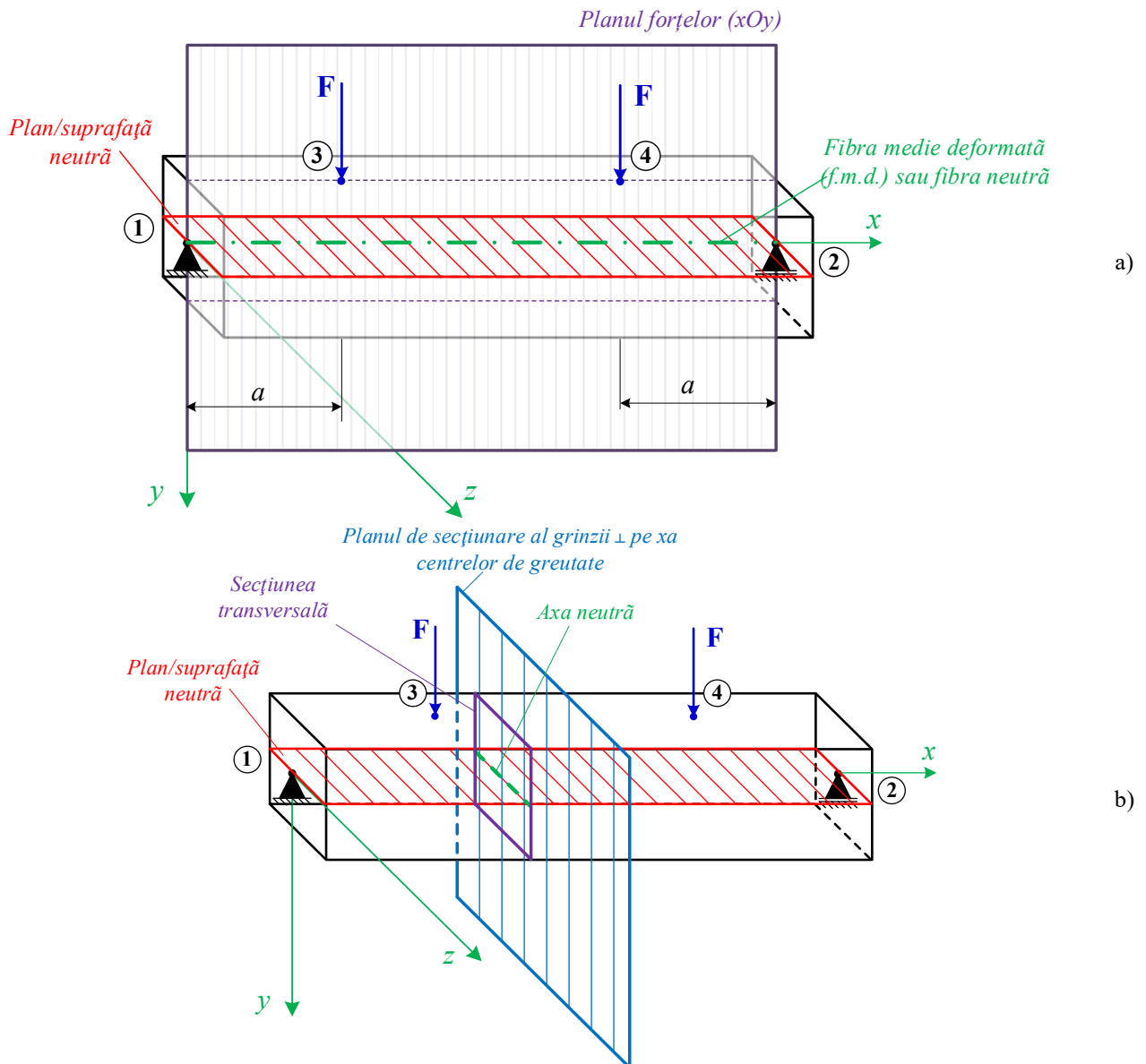


Fig. 5.19. Grindă solicitată la încovoiere pură  
(a) Solicitarea inițială; (b) Reprezentarea grinzii înainte și după solicitare

Așadar, pe porțiunea 3-4, grinda este solicitată de un moment încovoiător pozitiv și constant, fibrele superioare sunt comprimate, iar fibrele inferioare sunt întinse (Figura 5.19b)). La trecerea de la lungiri la scurtări, va exista o suprafață în care fibrele nici nu se scurtează dar nici nu se lungesc, numită *suprafață neutră*, și este cuprinsă în *planul neutru*. Din intersecția suprafeței neutre cu planul forțelor (planul vertical  $xOy$ ) se obține *fibra medie deformată* (f.m.d.) a grinzii sau *fibra neutră* (Figura 5.20a)).

Din intersecția suprafeței neutre cu secțiunea transversală a grinzii va rezulta *axa neutră a grinzii* (Figura 5.20b)) sau a secțiunilor transversale succesive.

**Observații:** (1) Secțiunea transversală este definită de sistemul de axe  $yOz$  și se introduce în centrul de greutate al acesteia.  
 (2) Pentru secțiunile transversale care prezintă simetrie după axele ( $z$ ) și/sau ( $y$ ), axa neutră coincide cu axa ( $z$ ) sau axa ( $y$ ). Atunci când încovoierea plană are loc după axa ( $z$ ), ( $M_i$  după axa  $z$ ), axa neutră a grinzii coincide cu axa ( $z$ ).



**Fig. 5.20.** Grindă solicitată la încovoiere pură  
 (a) Planul sau suprafața neutră a grinzii; (b) Secțiunea transversală a grinzii cu axa neutră

Pe intervalul 3-4 al grinzii prezentată în Figura 5.18 se face o secțiune la distanța ( $x$ ) față de reazemul din stânga (punctul 1). Se consideră elementul de grindă de lungime ( $dx$ ), mărginit de secțiunile transversale ( $A_1$ ) și ( $A_2$ ) având centrele de greutate ( $O_1$ ) și ( $O_2$ ), separat din grinda solicitată la încovoiere plană. Elementul de grindă este solicitat la încovoiere pură, iar în Figura 5.21 s-a reprezentat înainte și după solicitare.

Conform ipotezei lui Bernoulli, secțiunile ( $A_1$ ) și ( $A_2$ ) plane și normale la axa grinzii înainte de deformare, rămân plane și normale și după solicitare. După solicitare, cele două secțiuni transversale fac între ele unghiul ( $d\phi$ ), iar ( $\rho$ ) reprezintă raza de curbură a fibrei medii deformată.

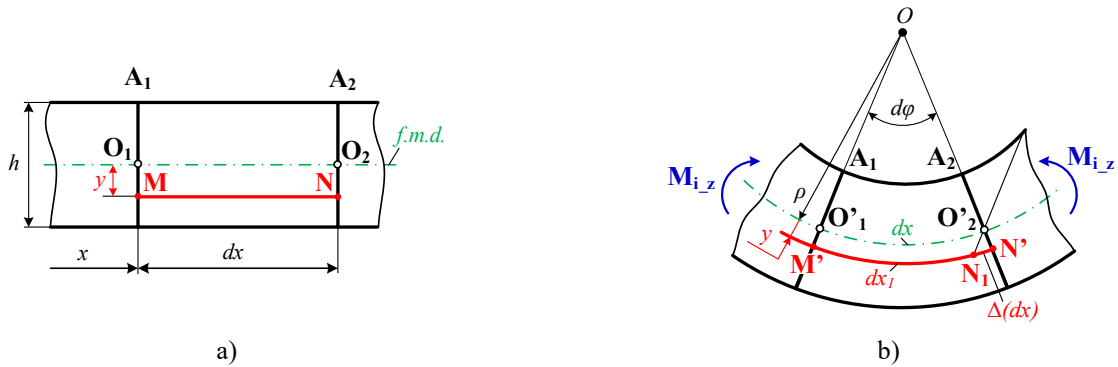


Fig. 5.21. Element de lungime mică reprezentat înainte de deformare (a), respectiv după deformare (b)

În figuri s-au notat:

- $M_{i,z}$  – momentul de încovoiere constant în secțiunea transversală, [N·mm]
- $h$  – înălțimea secțiunii transversale, [mm]
- $A_1, A_2$  – ariile transversale a secțiunii elementare, [mm<sup>2</sup>]
- $O_1O_2, O'_1, O'_2$  – centrele de greutate ale secțiunilor transversale cu ariile ( $A_1$ ) și ( $A_2$ )
- $MN; M'N'$  – o fibră oarecare aflată la distanța ( $y$ ) față de axa neutră, având lungimea ( $dx$ ) înainte de solicitare, respectiv ( $dx_1$ ) după solicitare
- $N_1N' = \Delta(dx)$  – lungirea fibrei  $M'N'$
- $d\varphi$  – unghiul format între secțiunile transversale ( $A_1, A_2$ ), după solicitare
- $\rho$  – raza de curbură a fibrei medii deformate.

Pe elementul de lungime ( $dx$ ), se consideră o fibră oarecare ( $MN$ ) egală cu lungimea elementului, situată la distanța ( $y$ ) față de f.m.d sau fibra neutră (Figura 5.21a)). Această fibră oarecare va avea înainte de deformare aceeași lungime cu cea a fibrei neutre, adică:

▪ înainte de deformare: 
$$dx = \rho \cdot d\varphi \quad (5.9)$$

După deformare, fibra devine ( $M'N'$ ) și va avea lungimea ( $dx_1$ ):

▪ după deformare: 
$$dx_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi \quad (5.10)$$

▪ Lungirea fibrei va fi:

$$\Delta(dx) = dx_1 - dx \Rightarrow \Delta(dx) = (\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi \quad (5.11)$$

$$\Delta(dx) = \rho \cdot d\varphi + y \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi \quad (5.12)$$

$$\Delta(dx) = y \cdot d\varphi \quad (5.13)$$

▪ Deformația specifică a fibrei va fi:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} \quad (5.14)$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (5.15)$$

sau

$$\varepsilon = \theta \cdot y \quad (5.16)$$

$$\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.17)$$

unde:  $\theta$  reprezintă *rotirea specifică*, adică unghiul cu care se rotesc, una față de cealaltă două secțiuni transversale pe grindă, distanțate cu unitatea (adică distanța egală cu 1).

▪ Pentru materialele elastice guvernate de legea lui Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} \quad (5.18)$$

sau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{E \cdot y} \quad (5.19)$$

Relația (5.19) arată că valoarea tensiunii normale ( $\sigma$ ) este proporțională cu distanța fibrei oarecare ( $y$ ).

▪ În cazul încovoierii pure, relațiile dintre tensiunile normale ( $\sigma$ ) și eforturile în secțiunea transversală față de fibra medie deformată sunt:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0 \quad (5.20)$$

$$M_{i_y} = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \quad (5.21)$$

$$M_{i_z} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M \quad (5.22)$$

**Observații:** (1) Ca relația (5.20) să fie valabilă, trebuie ca axa neutră a secțiunii transversale să fie axă centrală de inerție ( $S_z = 0$ ). Axa neutră coincide cu axa geometrică a grinzii.  
 (2) Pe baza relației (5.21), rezultă că axa ( $y$ ) este axă principală de inerție ( $I_{zy}=0$ ).

Având în vedere relația (5.18), din relația (5.22) se obține:

$$M_{i_z} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \Rightarrow M_{i_z} = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \Rightarrow M_{i_z} = \frac{E}{\rho} \cdot I_z \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{i_z}}{E \cdot I_z} \quad (5.24)$$

unde:  $I_z$  este momentul de inerție axial al secțiunii transversale, în raport cu axa ( $z$ ) care coincide cu axa neutră a secțiunii transversale  
 $E \cdot I_z$  reprezintă modulul de rigiditate la încovoiere.

Se egalează expresiile (5.19) și (5.24) și se obține:

$$\frac{M_{i_z}}{E \cdot I_z} = \frac{\sigma}{E \cdot y} \quad (5.25)$$

$$\sigma = \frac{M_{i_z}}{I_z} \cdot y \quad (5.26)$$

Expresia (5.26) reprezintă *Formula lui Navier*, în care ( $y$ ) este coordonata unui punct oarecare luat pe înălțimea secțiunii transversale în care se calculează tensiunea normală ( $\sigma$ ).

Cu această formulă se pot calcula valorile tensiunilor normale în orice punct al secțiunii transversale. De asemenea, relația (5.26) exprimă faptul că, în secțiunea transversală, tensiunile normale ( $\sigma$ ) variază liniar pe înălțimea și lățimea secțiunii, variabila fiind distanța ( $y$ ). Conform diagramei de variație a tensiunilor normale prezentată în Figura 5.22, se poate observa că, pe axa neutră tensiunile normale sunt întotdeauna nule, iar pe măsură ce distanța ( $y$ ) se îndepărtează de axa neutră, tensiunile normale cresc odată cu creșterea acestei distanțe, fiind maxime în fibrele extreme (la distanța  $y_{max}$  față de axa neutră), și sunt egale și de semn contrar.

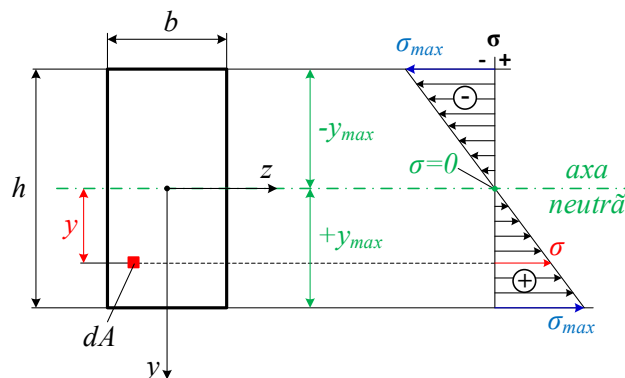


Fig. 5.22. Variația tensiunilor normale pentru moment încovoiător pozitiv

Conform Figurii 5.22 valorile maxime ale tensiunii normale se produc în fibrele extreme, pentru  $y = \pm y_{max}$  iar tensiunile normale maxime ( $\sigma_{max}$ ) în secțiunea transversală pot fi determinate cu relația:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_z}}{I_z} \cdot (\pm y_{max}) \quad (5.27)$$

Relația (5.27) poate fi scrisă sub forma:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_z}}{W_z} \quad (5.28)$$

Expresia (5.28) reprezintă *Forma a 2-a a relației lui Navier*, în care ( $W_z$ ) este modulul de rezistență axial, raportat la axa neutră ( $z$ ) și se calculează:  $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$ .

Relația lui Navier scrisă sub forma (5.28) permite efectuarea calculului de dimensionare, verificare și de rezistență a grinzilor solicitate la încovoiere plană (Tabelul 5.10).

**Tabelul 5.10.** Relații de calcul la solicitarea axială

Dimensionare	Verificare	Momentul încovoietor capabil
$W_{z\_nec} = \frac{M_{i\_z\_max}}{\sigma_a}$	$\sigma_{ef} = \frac{M_{i\_z\_max}}{W_{z\_ef}} \leq \sigma_a$	$M_{i\_z\_cap.} = W_{z\_ef} \cdot \sigma_a$

unde:  $M_{i\_z\_max}$ ,  $M_{i\_z\_cap.}$  este momentul de încovoiere maxim din secțiunea transversală, respectiv momentul încovoietor capabil să-l suporte grinda fără să se producă ruperea (sau să nu se producă deformații permanente), [N·mm]  
 $W_{z\_nec}$ ,  $W_{z\_ef}$  reprezintă modulul de rezistență necesar (sau minim), respectiv efectiv (calculat sau furnizat de standarde) al secțiunii transversale a grinzii, [mm<sup>3</sup>]  
 $\sigma_{ef}$ ,  $\sigma_a$  este tensiunea normală efectivă (sau calculată) în secțiunea transversală, respectiv admisibilă a materialului, [N/mm<sup>2</sup>].

**Observații:** (1) O secțiune transversală a unei grinzi va fi cu atât mai economică cu cât raportul  $k = \frac{W_{z\_ef}}{A \cdot h}$  este mai mare, în care: ( $k$ ) este un coeficient de economicitate, ( $A$ ) este aria secțiunii transversale, ( $h$ ) este înălțimea secțiunii transversale. Pentru diferite secțiuni, coeficientul este:  $k = 0,123$  pentru secțiunea circulară;  $k = 0,167$  pentru secțiunea dreptunghiulară;  $k = 0,29 \div 0,32$  pentru profilul I;  $k = 0,27 \div 0,31$  pentru profilele U etc.  
 (2) La încovoiere rezistă mai bine secțiunea a cărei moment de inerție axial ( $I_z$ ) este mai mare, dar nu are fibre extreme prea îndepărtate de axă. Din acest motiv, în construcțiile inginerești se preferă secțiunile de profil I sau U, având aria secțiunii transversale egală cu cea dreptunghiulară, însă au ( $I_z$ ) și ( $W_z$ ) mai mari. Acest lucru se datorează repartizării unei părți mai mari a suprafeței spre fibrele extreme, tocmai acolo unde și tensiunile normale au valorile extreme.

## 5.4. Tensiuni tangențiale în grinzile solicitate la încovoiere

### 5.4.1. Principiul dualității tensiunilor tangențiale

Un corp supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare coplanare, se află în stare plană de tensiuni dacă tensiunile în fiecare punct al corpului sunt situate într-un plan, oricare ar fi planul de secționare. Starea plană de tensiuni se obține pentru diferite piese, cum ar fi: în grinzile solicitate la încovoiere de forțe situate într-un plan, în plăci subțiri având grosimea constantă solicitate de un sistem de forțe coplanare în echilibru etc.

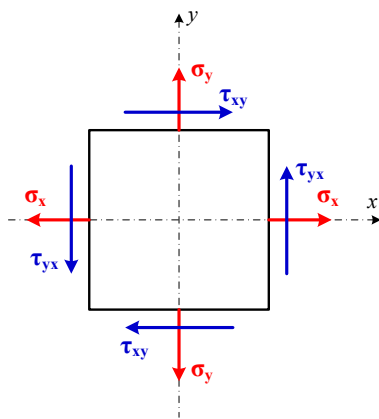


Fig. 5.23. Starea plană de tensiuni

În Figura 5.23 s-a reprezentat starea plană de tensiuni a unui corp elementar plan, unde:

- $(\sigma_x)$ ,  $(\sigma_y)$  sunt tensiunile normale la secțiune
- $(\tau_{xy})$  este tensiunea tangențială, în care primul indice ( $x$ ) este axa după care  $(\tau)$  este paralelă, iar al doilea indice ( $y$ ) este axa după care  $(\tau)$  este perpendiculară.

*Principiul dualității (reciprocității) tensiunilor tangențiale* se definește astfel: *tensiunile tangențiale pe două fețe ortogonale sau muchii ortogonale sunt egale între ele și de semn contrar, orientate spre sau dinspre muchia comună fețelor* [2], respectiv:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (5.29)$$

#### 5.4.2. Tensiuni tangențiale. Deducerea Formulei lui Juravski

În mod obișnuit, în grinzile solicitate la încovoiere plană apar atât momente încovoietoare ( $M_i$ ) cât și forțe tăietoare ( $T$ ) variabile în lungul grinzii. Ca urmare, în secțiunile grinzii se produc atât tensiuni normale ( $\sigma$ ) cât și tensiuni tangențiale ( $\tau$ ). Forțele tăietoare produc deformații unghiulare, astfel că secțiunile plane, normale pe axa grinzii, nu mai rămân plane și normale la axă, ci se deformează (Figura 5.24 b). Deci, ipoteza lui Bernoulli nu mai este valabilă. În consecință, formula lui Navier pentru calculul tensiunilor normale dedusă în baza acestei ipoteze nu mai este exactă.

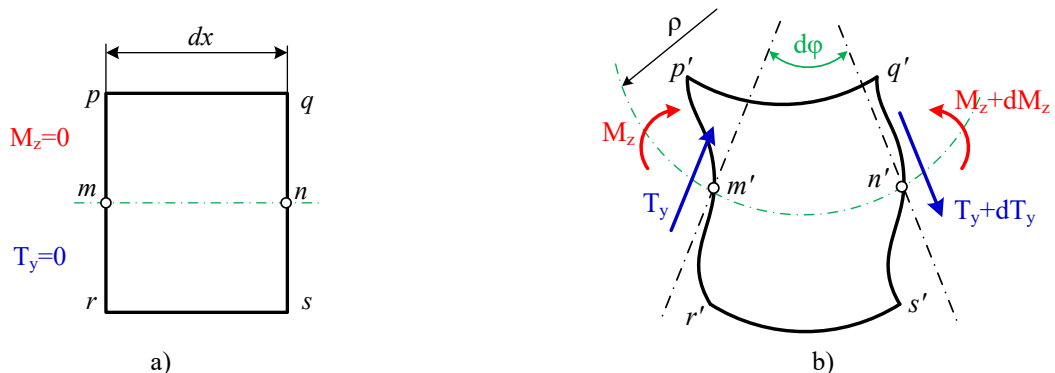


Fig. 5.24. Deformarea unui element: a) înainte de solicitare; b) după solicitare

Totuși, la grinzile la care lungimea este mult mai mare decât înălțimea, abaterea de la planeitate pentru secțiuni este neglijabilă și, deci, formula lui Navier dă o aproximație destul de bună în calculul tensiunilor normale [2,4,8,16].

Pentru studiul variației tensiunilor tangențiale ( $\tau_{xy}$ ) în secțiunea transversală a grinzii solicitate la încovoiere plană, se separă din grindă un element cuprins între două secțiuni transversale aflate la distanța ( $dx$ ), plane și perpendiculare pe axa longitudinală a grinzii (axa  $x$ ) și un plan paralel cu planul  $xOz$ , aflat la distanța ( $y$ ) față de planul longitudinal (Figura 5.25). Se obține elementul de volum având lățimea ( $b_y$ ) și lungimea ( $dx$ ), fiind evidențiat în Figura 5.25 cu hașură roșie. Elementul de volum hașurat

tinde să „lunece” de-a lungul axei longitudinale paralelă cu axa ( $x$ ) datorită tensiunilor tangențiale ( $\tau_{xy}$ ), respectiv a forței de lunecare ( $dL$ ), iar elementul de volum nehașurat se consideră, teoretic, fix.

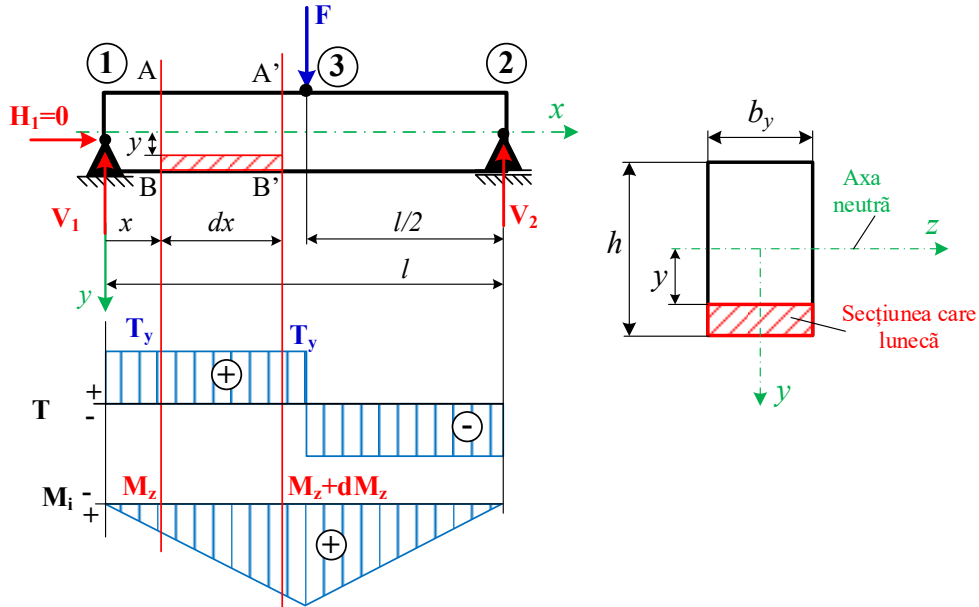


Fig. 5.25. Grindă solicitată la încovoiere plană și diagramele de variație ale eforturilor  $M_i$  și  $T$

Așa cum se observă din diagramele de variație ale eforturilor din Figura 5.25, acestea variază diferit pe lungimea grinzii. Eforturile din secțiunile transversale dau naștere *tensiunilor normale* ( $\sigma$ ) și ( $\sigma+d\sigma$ ) cauzate de momentele de încovoiere variabile în secțiunile transversale, ( $M_z$ ) și ( $M_z+dM_z$ ), respectiv *tangențiale* ( $\tau_{xy}$ ) cauzate de forța tăietoare ( $T_y$ ) constantă în cele două secțiuni.

Conform principiului dualității tensiunilor tangențiale dată de relația (5.29), în secțiunea longitudinală a elementului analizat (de dimensiuni  $b_y$  și  $dx$ ) iau naștere tensiunile tangențiale ( $\tau_{xy}$ ). Se admite ipoteza lui Juravski conform căreia tensiunile tangențiale ( $\tau_{xy}$ ) se distribuie uniform în lungul lățimii ( $b_y$ ) (Figura 5.26).

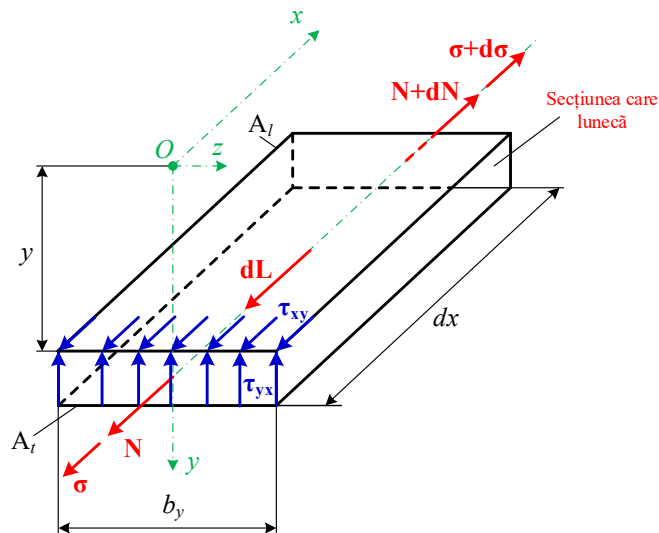


Fig. 5.26. Element separat din grindă

În Figurile 5.25 și 5.26 s-au notat:

- $F$  – forță concentrată, [N]
- $V_1, V_2$  – reacțiunile verticale din cele două reazeme, [N]
- $l$  – lungimea grinzii, [mm]
- $h$  – înălțimea secțiunii transversale, [mm]
- $b_y$  – lățimea secțiunii care lunecă, [mm]



$dx$  – secțiune transversală elementară aflată la distanța ( $x$ ) [mm] față de reazemul din punctul 1  
 $T_y, M_z, M_z+dM_z$  – forța tăietoare, momentul încovoietor (în secțiunea AB), respectiv momentul încovoietor cu creșterea elementară ( $dM_z$ ) (în secțiunea A'B'), [N], [N·mm]  
 $N, N+dN$  – forța axială, respectiv forța axială cu creșterea elementară ( $dN$ ), [N]  
 $dL$  – forța de lunecare longitudinală rezultată ca urmare a acțiunii tensiunii tangențiale ( $\tau_{xy}$ ) în planul elementului aflat la distanța ( $y$ ) față de axa neutră, [N]  
 $A_t, A_l$  – aria transversală, respectiv longitudinală a secțiunii care lunecă, [mm<sup>2</sup>]  
 $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  – tensiunile tangențiale produse în aria transversală, respectiv longitudinală a secțiunii care lunecă, [N/mm<sup>2</sup>].

Pe baza Figurii 5.26, se poate scrie o ecuație de proiecții după axa ( $x$ ):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N - dL + (N + dN) = 0 \quad (5.30)$$

Termenii din relația (5.30) au expresiile:

$$N = \int_{A_t} \sigma \cdot dA = \int_{A_t} \frac{M_z}{I_z} \cdot y \cdot dA = \frac{M_z}{I_z} \int_{A_t} y \cdot dA = \frac{M_z}{I_z} \cdot S_z \quad (5.31)$$

$$(N + dN) = \int_{A_t} (\sigma + d\sigma) \cdot dA = \int_{A_t} \frac{(M_z + dM_z)}{I_z} \cdot y \cdot dA = \frac{(M_z + dM_z)}{I_z} \int_{A_t} y \cdot dA \quad (5.32)$$

$$= \frac{(M_z + dM_z)}{I_z} \cdot S_z$$

$$dL = \tau_{xy} \cdot dA_l = \tau_{xy} \cdot b_y \cdot dx \quad (5.33)$$

unde:  $dL$  este forța de lunecare longitudinală rezultată ca urmare a acțiunii tensiunii tangențiale ( $\tau_{xy}$ ) în planul elementului aflat la distanța ( $y$ ) față de axa neutră  
 $dA_l$  este aria longitudinală elementară  
 $A_t$  este aria secțiunii transversale a elementului studiat (secțiunea care lunecă)  
 $S_z$  este momentul static al secțiunii care lunecă în raport cu axa ( $z$ )  
 $I_z$  este momentul de inerție axial al întregii secțiuni transversale a grinzii, în raport cu axa ( $z$ ).

În ecuația (5.30) se înlocuiesc expresiile (5.31)÷(5.33) și se obține:

$$-\frac{M_z}{I_z} \cdot S_z - \tau_{xy} \cdot b_y \cdot dx + \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot S_z = 0 \quad (5.34)$$

$$-\frac{M_z}{I_z} \cdot S_z - \tau_{xy} \cdot b_y \cdot dx + \frac{M_z}{I_z} \cdot S_z + \frac{dM_z}{I_z} \cdot S_z = 0 /: dx \quad (5.35)$$

$$-\tau_{xy} \cdot b_y + \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z}{I_z} = 0 \quad (5.36)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_y \cdot S_z}{b_y \cdot I_z} \quad (5.37)$$

Relația (5.37) reprezintă *formula lui Juravski* și permite calculul tensiunilor tangențiale. În această relație s-au notat:

$T_y = \frac{dM_z}{dx}$  este forța tăietoare în secțiunea transversală, [N]  
 $S_z$  este momentul static al părții de secțiune care lunecă, [mm<sup>3</sup>]  
 $b_y$  este lățimea secțiunii care lunecă, [mm]  
 $I_z$  este momentul de inerție al întregii secțiuni transversale după axa neutră (axa  $z$ ), [mm<sup>4</sup>].

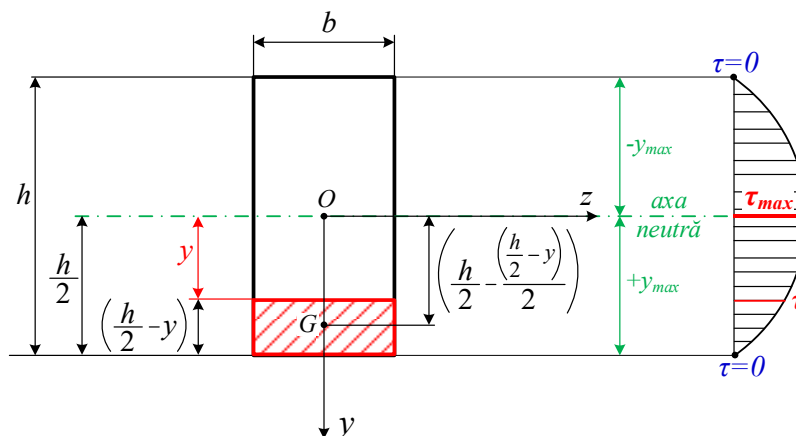
**Observații:** (1) Pe baza formulei lui Juravski (5.37) se observă că tensiunea tangențială din secțiunea transversală a grinzii solicitate este proporțională cu forța tăietoare din secțiune ( $T$ ) și cu momentul static al secțiunii care alunecă ( $S_z$ ), fiind invers proporțională cu lățimea secțiunii ( $b_y$ ) care alunecă la distanța ( $y$ ) de axă precum și cu momentul de inerție al întregii secțiuni ( $I_z$ ) în raport cu axa neutră.

Forța tăietoare ( $T_y$ ) și momentul de inerție ( $I_z$ ) fiind constante în secțiune, legea de variație a tensiunii tangențiale ( $\tau_{xy}$ ) pe secțiune, în lungul axei  $Oy$ , este dată de raportul  $\frac{S_z}{b}$ .

(2) Tensiunile tangențiale ( $\tau$ ) în secțiunea transversală unei grinzi sunt nule în fibrele extreme și maxime pe axa neutră (această observație este valabilă pentru solicitarea de încovoiere a grinzilor drepte cu secțiuni simple - secțiune dreptunghiulară, circulară - și/sau pentru secțiunile compuse simetrice, cum ar fi profilul I etc.).

### 5.4.3. Variația tensiunilor tangențiale pentru diferite secțiuni transversale ale grinzii

#### a) Secțiunea dreptunghiulară



**Fig. 5.27.** Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii pentru o secțiune dreptunghiulară

În figură s-au notat:

- $h, b$  – înălțimea, respectiv lățimea secțiunii transversale, [mm]
- $y$  – distanța de la secțiunea care alunecă la axa neutră, [mm]
- $\left(\frac{h}{2} - \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2}\right)$  reprezintă distanța de la centrul de greutate al secțiunii hașurate până la axa ( $z$ ) față de care se calculează momentul static ( $S_z$ ), [mm]
- $\tau_{max}, \tau$  – tensiunea tangențială maximă, respectiv tensiunea tangențială la o fibră oarecare aflată la cota ( $y$ ) față de axa neutră, [ $N/mm^2$ ].

Se aplică formula lui Juravski (5.37), în care mărimile geometrice ale secțiunii transversale se determină astfel:

$$S_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2}\right) \Rightarrow S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) \quad (5.38)$$

$$\Rightarrow S_z = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Din (5.38) rezultă că momentul static al secțiunii transversale ( $S_z$ ) are o variație parabolică, respectiv și tensiunile tangențiale ( $\tau_{yx}$ ) variază parabolic. Se calculează momentul static atât pe fibrele extreme cât și axa neutră, astfel:

- pentru:  $y = \pm \frac{h}{2} \Rightarrow S_z = 0 \Rightarrow$  pe fibrele extreme ale secțiunii transversale.
- pentru:  $y = 0 \Rightarrow S_z = \frac{b \cdot h^2}{8} \Rightarrow$  pe axa neutră a secțiunii transversale.

Înlocuind relațiile (5.38) în formula lui Juravski (5.37), în care  $b_y = b$  și  $S_z = \frac{b \cdot h^2}{8}$ , se obține:

$$\tau_{yx} = \frac{T_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \Rightarrow \tau_{yx} = T_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{12}{b^2 \cdot h^3} \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{b \cdot h} \quad (5.39)$$

Valorile maxime ale tensiunilor tangențiale se obțin pe axa neutră a secțiunii transversale (pentru  $y = 0$ ) se obține relația de calcul a tensiunii tangențiale maxime pentru secțiunea dreptunghiulară având forma simplificată:

$$\tau_{yx\_max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{A} \quad (5.40)$$

### b) Secțiunea circulară

Pentru secțiunea transversală circulară nu mai poate fi acceptată ipoteza că în orice punct a secțiunii tensiunea tangențială este paralelă cu forța tăietoare. Însă, pentru deducerea formulei de calcul a tensiunilor tangențiale pentru secțiunea circulară, se admit cele două ipoteze ale lui Juravski referitoare la tensiunile tangențiale:

(1) Direcțiile tuturor tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) aflate de-a lungul unei drepte (coarda BC din Figura 5.28) paralelă la axa neutră a secțiunii sunt concurente într-un punct.

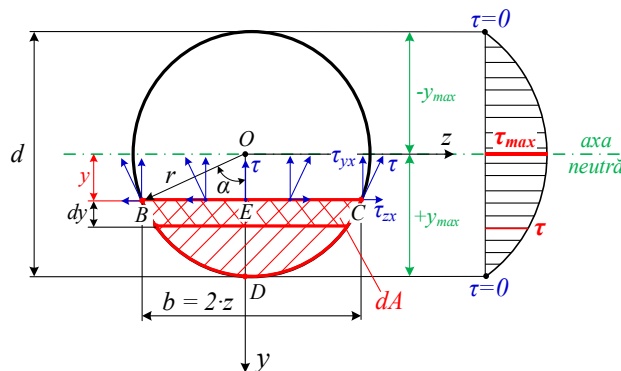


Fig. 5.28. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii circulare

- În figură s-au notat:
- $r$  – raza de la centrul de greutate la secțiunea elementară ( $dy$ ), [mm]
  - $\alpha$  – unghiul format între axa ( $y$ ) și raza curentă ( $r$ ) a secțiunii, [ $^\circ$ ]
  - $d$  – diametrul secțiunii transversale, [mm]
  - $dy$  – lungimea secțiunii elementare
  - $y$  – distanța de la secțiunea care alunecă la axa neutră, [mm]
  - $\tau_{max}, \tau$  – tensiunea tangențială maximă, respectiv tensiunea la o fibră oarecare aflată la cota ( $y$ ) față de axa neutră, [ $N/mm^2$ ].

(2) Componenta ( $\tau_{yx}$ ) se distribuie constant în toate punctele de pe coarda BC, iar formula lui Juranski dedusă anterior (expresia 5.37) rămâne valabilă.

Direcțiile tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) din punctele B și C trebuie să fie tangente la conturul exterior al secțiunii, iar din motive de simetrie, în punctul E direcția tensiunii tangențiale ( $\tau$ ) trebuie să coincidă cu axa  $Oy$ . Tensiunile ( $\tau$ ) se descompun după cele două axe ale secțiunii transversale ( $y$  și  $z$ ), rezultând componentele: ( $\tau_{zx}$ ) paralele cu axa ( $z$ ), și ( $\tau_{yx}$ ) paralele cu axa ( $y$ ).

Din motive de simetrie, suma tuturor forțelor elementare ( $\tau_{zx} \cdot dA$ ) pe întreaga secțiune este nulă, respectiv  $\int_A \tau_{xy} \cdot dA = T$ , deci forța tăietoare se consideră constantă în secțiune.

Se dă coordonatei ( $y$ ) o creștere elementară ( $dy$ ), rezultând elementul de arie ( $dA$ ) (dreptunghiul curbiliniu dublu hașurat din Figura 5.28). Dimensiunile elementului ( $dA$ ) s-au scris în funcție de raza ( $r$ ) a secțiunii și de jumătatea ( $\alpha$ ) a unghiului la centrul de greutate a secțiunii ce corespunde coardei AB, astfel:

$$\begin{aligned} y &= r \cdot \cos\alpha \\ z &= r \cdot \sin\alpha \\ dy &= -r \cdot \sin\alpha \\ b &= 2 \cdot z = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha \\ dA &= b \cdot dy = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot (-r \cdot \sin\alpha) \Rightarrow dA = -2 \cdot r^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Momentul static al suprafeței hașurate BCD, se calculează ca o integrală pentru fâșia de suprafață ( $dA$ ) (Figura 5.28), când cota ( $y$ ) variază de la OE la OD, respectiv unghiul variază de la ( $\alpha$ ) la 0. Se obține:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y \cdot dA \\ S_z &= \int_A (r \cdot \cos\alpha) \cdot (-2 \cdot r^2 \cdot \sin^2\alpha) \cdot d\alpha \\ \Rightarrow S_z &= \int_0^\alpha -2 \cdot r^3 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot d\alpha \Rightarrow S_z = -2 \cdot r^3 \int_0^\alpha \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot d\alpha \end{aligned} \quad (5.41)$$

Pentru rezolvarea integralei (5.41) se fac următoarele substituții:  $\sin\alpha = u$ ;  $\cos\alpha \cdot d\alpha = du$ . Se obține:

$$\begin{aligned} S_z &= -2 \cdot r^3 \int_0^u u^2 \cdot du \Rightarrow S_z = -2 \cdot r^3 \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_0^{u=\sin\alpha} \\ \Rightarrow S_z &= -\frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin^3\alpha \text{ sau } S_z = +\frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin^3\alpha \end{aligned} \quad (5.42)$$

Momentul static ( $S_z$ ) (5.42), respectiv tensiunea tangențială ( $\tau_{yx}$ ) variază în funcție de unghiul ( $\alpha$ ), astfel:

- pentru  $\alpha = 0 \Rightarrow S_z = 0$  pe fibrele extreme ale secțiunii transversale.
- pentru  $\alpha = 90^\circ \Rightarrow S_z = -\frac{2}{3} \cdot r^3$  pe axa ( $z$ ) a secțiunii transversale.

Momentul de inerție axial al întregii secțiuni se poate calcula:

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad (5.43)$$

Cunoscând forța tăietoare maximă ( $T_{\max}$ ) în secțiunea transversală, tensiunea tangențială maximă ( $\tau_{yx_{\max}}$ ) se obține pentru unghiul  $\alpha = 90^\circ$  ( $S_z \neq 0$ ), respectiv:

$$\tau_{yx\_max} = \frac{T_{max} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot r^3\right)}{2 \cdot r \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{4}} \Rightarrow \tau_{yx\_max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_{max}}{\pi \cdot r^2} \quad (5.44)$$

Astfel, tensiunea tangențială maximă (pe axa neutră, pentru  $\alpha = 90^\circ$  sau pentru  $y = 0$ ) pentru secțiunea circulară se poate calcula cu formula simplificată:

$$\tau_{yx\_max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \quad (5.45)$$

unde:  $A$  s-a notat cu  $A = \pi \cdot r^2$ , aria secțiunii circulare.

Tensiunea ( $\tau_{yx}$ ) variază în secțiunea transversală circulară după aceeași lege ca momentul static ( $S_z$ ), fiind nulă în fibrele extreme (pentru  $\alpha = 0$  sau  $\alpha = \pi$  sau  $y = r$ , respectiv  $y = -r$ ) și maximă în axa neutră, pentru  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sau  $y = 0$ .

### c) Secțiunea transversală în formă de I

Secțiunea transversală în formă de I (profilul I, standardizat sau nestandardizat) se poate descompune în trei zone distincte: inima profilului (partea din mijloc) și talpa superioară, respectiv talpa inferioară. De regulă la problemele de încovoiere plană, profilul I este considerat o secțiune transversală complexă, însă pentru simplificarea modelului de calcul teoretic a tensiunilor tangențiale în secțiune, inima și tălpile pot fi approximate cu figuri geometrice simple, figuri dreptunghiulare (reprezentarea simplificată a profilului I în Figura 5.29).

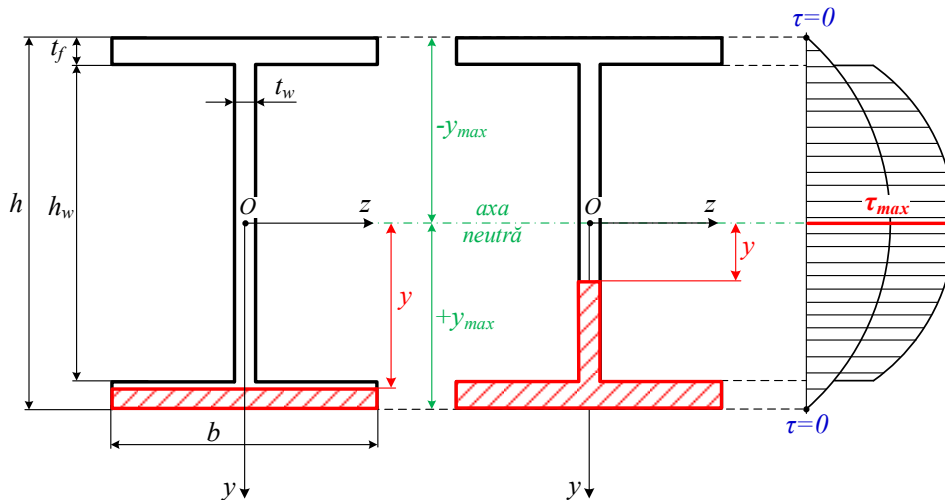


Fig. 5.29. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii pentru o secțiune din profil I

În figură s-au notat:  $h, b, h_w, t_w, t_f$  – dimensiuni care definesc profilul I, [mm]  
 $y$  – distanța de la secțiunea care lunecă la axa neutră, [mm]  
 $\tau_{max}$  – tensiunea tangențială maximă, [N/mm<sup>2</sup>].

Pentru obținerea relațiilor de calcul ale tensiunilor tangențiale, se aplică formula lui Juravski (5.37), astfel: prima dată pentru dreptunghiul tălpii, de lățime ( $b$ ), apoi pentru dreptunghiul inimii, de lățime mult mai mică ( $t_w$ ). Se obțin:

(a) În talpa profilului, tensiunea tangențială pentru o fibră oarecare aflată la distanța ( $y$ ) se poate calcula cu formula generală:

$$\tau_{yx} = \frac{T}{b \cdot I_z} \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{T}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.46)$$

(b) În inima profilului, tensiunea tangențială pentru o fibră oarecare aflată la distanța ( $y$ ) se poate calcula cu formula generală:

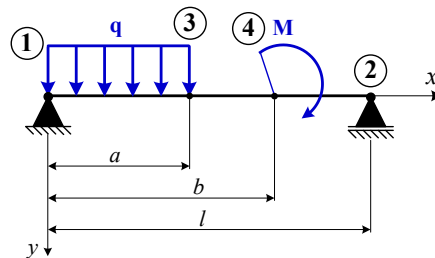
$$\tau_{yx} = \frac{T}{2 \cdot t_w \cdot I_z} \left[ b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_w^2}{4} \right) + t_w \left( \frac{h_w^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad (5.47)$$

**Observații:** (1) Tensiunea tangențială din secțiune ( $\tau_{yx}$ ) are o variație parabolică pe întreaga înălțime a acesteia, dar diagrama acesteia prezintă un salt (pentru  $y = \pm \frac{h_i}{2}$ ) din cauza trecerii bruște de la lățimea tălpii ( $b$ ) la cea a inimii ( $b_i$ ).  
 (2) Valoarea maximă a tensiunii tangențiale se obține tot în axa neutră a secțiunii ca și în cazul secțiunilor prezentate anterior.

### Aplicații rezolvate

**Aplicația 5-5.** Pentru grinda simplu rezemată dată în Figura 5.30 se cunosc:  $M = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ;  $q = 5 \text{ kN/m}$ ;  $a = 0,7 \text{ m}$ ;  $b = 1,2 \text{ m}$ ;  $l = 2,5 \text{ m}$ . Se cere:

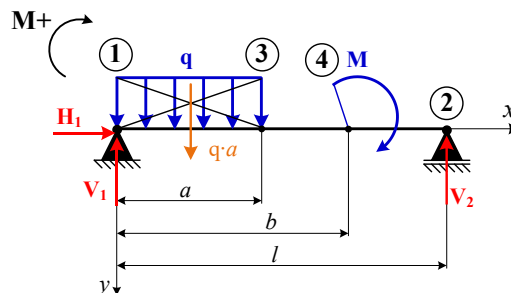
- Calculul reacțiunilor din reazeme
- Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) din secțiunea transversală și trasarea diagramelor de variație
- Dimensionarea secțiunii transversale (secțiune pătrată)
- Trasarea diagramei de variație a tensiunii normale ( $\sigma$ ) în secțiunea maxim sollicitată.



**Fig. 5.30.** Grindă simplu rezemată sollicitată la încovoiere plană

**Rezolvare.** (a) *Calculul reacțiunilor din reazeme*

Pentru calculul reacțiunilor din cele două reazeme ( $H_1$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ) se aplică ecuațiile de echilibru uzuale valabile pentru planul  $xOy$  (Figura 5.31). Reacțiunea orizontală este nulă, deoarece grinda nu este sollicitată axial, iar reacțiunile verticale se obțin scriind două ecuații de momente, în raport cu punctele 1 și 2. Pentru efectuarea calculului de verificare se scrie ecuația de proiecție a forțelor verticale (ce acționează după axa  $y$ ).



**Fig. 5.31.** Introducerea reacțiunilor în reazeme

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{l} \cdot \left( q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M \right)$$

$$V_2 = \frac{1}{2,5} \cdot \left( 5 \cdot 0,7 \cdot \frac{0,7}{2} + 12 \right) \Rightarrow V_2 = 5,29 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) + M = 0$$

$$V_1 = \frac{1}{l} \cdot \left[ q \cdot a \cdot \left( l - \frac{a}{2} \right) - M \right]$$

$$V_1 = \frac{1}{2,5} \cdot \left[ 5 \cdot 0,7 \cdot \left( 2,5 - \frac{0,7}{2} \right) - M \right] \Rightarrow V_1 = -1,79 \text{ kN}$$

Verificare:  $\sum F_y = 0 \Rightarrow q \cdot a - V_1 - V_2 = 0$   
 $5 \cdot 0,7 + 1,79 - 5,29 = 0 \Rightarrow 0 = 0$  se verifică, deci reacțiunile s-au calculat corect.

(b) Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) din secțiunea transversală  
 Construcția diagramei de variație ale eforturilor

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare  $T$  și momentul încovoiător  $M_i$ ) se aplică metoda secțiunii pe fiecare interval și se ține cont de convenția de semne pentru eforturi.

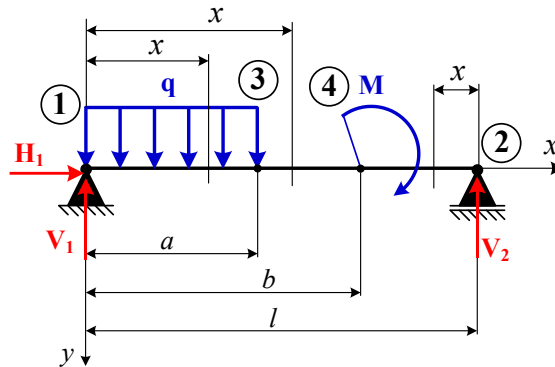
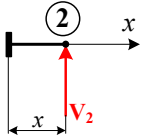


Fig. 5.32. Calculul eforturilor pe fiecare interval

Tabel 5.11. Calculul eforturilor pe fiecare interval

<p>Intervalul 1 – 3: <math>x \in [0; a)</math>; <math>x \in [0; 0,7)</math></p>	$T_{1-3} = V_1 - q \cdot x$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• pentru <math>x = 0 \Rightarrow T_1 = V_1 \Rightarrow T_1 = -1,79 \text{ kN}</math></li> <li>• pentru <math>x = a \Rightarrow T_3 = V_1 - q \cdot a</math></li> </ul> $x = 0,7 \Rightarrow T_3 = -1,79 - 5 \cdot 0,7$ $T_3 = -5,29 \text{ kN}$ $M_{1-3} = V_1 \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = 0</math></li> <li>• pentru <math>x = a \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2}</math></li> </ul> $x = 0,7 \Rightarrow M_3 = -1,79 \cdot 0,7 - 5 \cdot 0,7 \cdot \frac{0,7}{2}$ $M_3 = -2,47 \text{ kN} \cdot \text{m}$
<p>Intervalul 3 – 4: <math>x \in [a; b)</math>; <math>x \in [0,7; 1,2)</math></p>	$T_{3-4} = V_1 - q \cdot a$ $T_{3-4} = -1,79 - 5 \cdot 0,7$ $T_{3-4} = -5,29 \text{ kN}$ $M_{3-4} = V_1 \cdot x - q \cdot a \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• pentru <math>x = a \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot a - q \cdot a \cdot \left( a - \frac{a}{2} \right)</math></li> </ul> $x = 0,7 \Rightarrow M_3 = -1,79 \cdot 0,7 - 5 \cdot 0,7 \cdot \left( 0,7 - \frac{0,7}{2} \right)$ $M_3 = -2,47 \text{ kN} \cdot \text{m}$

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = b \Rightarrow M_4 = V_1 \cdot b - q \cdot a \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)</math></li> </ul> $x = 1,2 \Rightarrow M_4 = -1,79 \cdot 1,2 - 3 \cdot 0,7 \cdot \left(1,2 - \frac{0,7}{2}\right)$ $M_4 = -5,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$
<p>Intervalul 2 – 4: <math>x \in [0; l-b)</math>; <math>x \in [0; 1,3)</math></p> 	$T_{2-4} = -V_2$ $T_{2-4} = -5,29 \text{ kN}$ $M_{2-4} = V_2 \cdot x$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_2 = 0</math></li> <li>▪ pentru <math>x = (l - b) \Rightarrow M_4 = V_2 \cdot (l - b)</math></li> </ul> $M_4 = 5,29 \cdot 1,3 \Rightarrow M_4 = 6,87 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Pe baza rezultatelor obținute se trasează diagramele de variație ale eforturilor, prezentată în Figura 5.33.

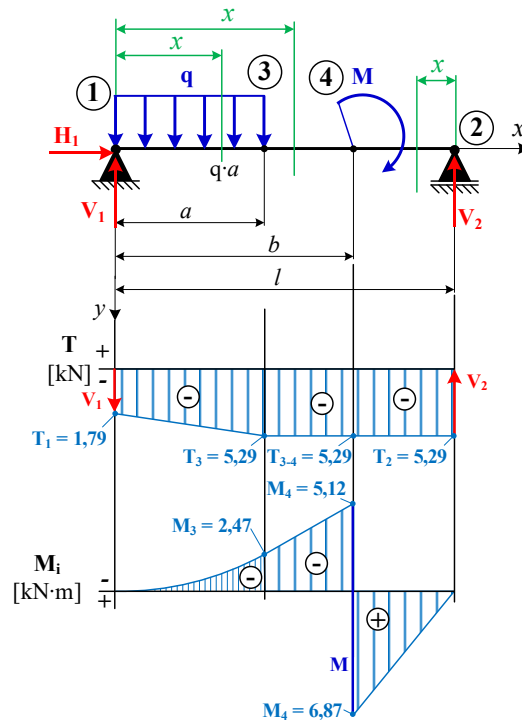


Fig. 5.33. Construcția diagramei de variație ale eforturilor

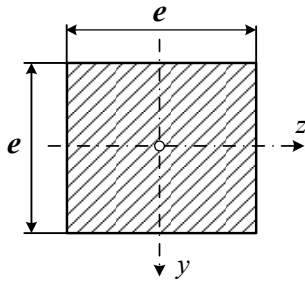
(c) Dimensionarea secțiunii transversale

Grinda se consideră a fi o bară cu secțiunea pătrată cu latura ( $e$ ), realizată din oțel pentru care se cunoaște rezistența admisibilă a materialului,  $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ . Pentru efectuarea calculului de dimensionare, se ia în considerare secțiunea maxim sollicitată, adică secțiunea transversală în care momentul de încovoiere are valoarea maximă, deoarece grinda trebuie dimensionată, astfel încât condiția de rezistență să fie îndeplinită.

În urma analizei diagramei de variație a momentelor, rezultă că secțiunea maxim sollicitată este în dreptul punctului 4, în care momentul maxim are valoarea:  $|M_{i_{\max}}| = |M_4| = 6,87 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Știind forma geometrică a secțiunii transversale, pentru aceasta se scriu două expresii ale ariilor secțiunii, astfel:

$$W_{z_{\text{nec}}} = \frac{|M_{i_{\max}}|}{\sigma_a}$$





$$W_{znec} = \frac{e_{nec}^3}{6}$$

Din egalarea relațiilor pentru  $W_{znec}$ , se obține formula de calcul a laturii necesare ( $e_{nec}$ ) a secțiunii transversale:

$$\frac{e_{nec}^3}{6} = \frac{|M_{i\_max}|}{\sigma_a} \Rightarrow e_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_{i\_max}|}{\sigma_a}}$$

$$e_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 6,87 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{150}} \Rightarrow e_{nec} = 65,01 \text{ mm}$$

Valoarea necesară a laturii secțiunii transversale se rotunjește către valoarea superioară și se obține valoarea efectivă a laturii:

$$e_{nec} = 65,01 \text{ mm} \Rightarrow e_{ef} = 66 \text{ mm}$$

Cu valoarea efectivă ( $a_{ef}$ ) se calculează următoarele elemente geometrice ale secțiunii transversale:

$$A_{ef} = e^2 \Rightarrow A_{ef} = 66^2 \Rightarrow A_{ef} = 4356 \text{ mm}^2$$

$$W_{z\_ef} = \frac{e^3}{6} \Rightarrow W_{z\_ef} = \frac{66^3}{6} \Rightarrow W_{z\_ef} = 47,91 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_{z\_ef} = \frac{e^4}{12} \Rightarrow I_{z\_ef} = \frac{66^4}{12} \Rightarrow I_{z\_ef} = 158,12 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

(d) *Reprezentarea grafică a diagramelor de variație a tensiunilor normale efective în secțiunea maxim sollicitată*

Pentru calculul tensiunii normale în secțiunea maxim sollicitată ( $\sigma_{max}$ ) se utilizează formula lui Navier:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{i\_max}}{I_{z\_ef}} \cdot y_{max} \leq \sigma_a$$

unde: |

$$y_{max} = \pm \frac{e_{ef}}{2} \text{ mm}$$

Se obține:

$$\sigma_{ef} = -\frac{6,87 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{158,12 \cdot 10^4} \cdot (\pm 33)$$

$$y_{max} = \pm 33 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \text{pentru } y_{max} = +33 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{ef_1} = -\frac{6,87 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{158,12 \cdot 10^4} \cdot (+33)$$

$$\sigma_{ef,1} = -143,48 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_a$$

$$\Rightarrow \text{pentru } y_{max} = -33 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{ef,2} = -\frac{6,87 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{158,12 \cdot 10^4} \cdot (-33)$$

$$\sigma_{ef,2} = +143,48 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_a$$

Pe baza rezultatelor obținute se construiește diagrama de variație a tensiunilor normale prezentată în Figura 5.34.

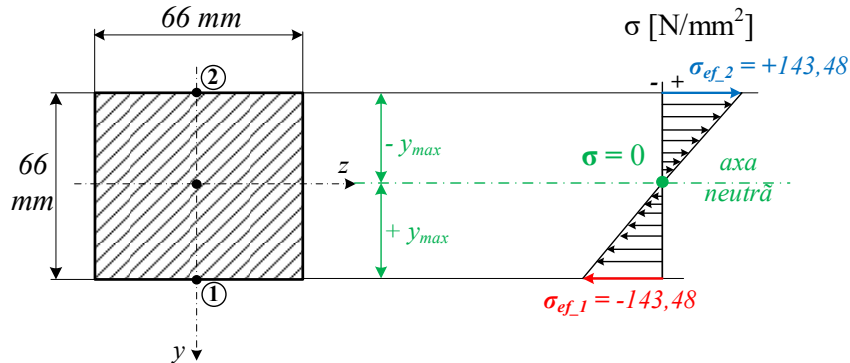


Fig. 5.34. Diagrama de variație a tensiunilor normale ( $\sigma$ ) în secțiunea maxim sollicitată

Pe baza diagramei se observă că: valoarea maximă a tensiunii normale ( $\sigma_{max}$ ) se obține în fibrele extreme ale secțiunii transversale; secțiunea aflată deasupra axei neutre se lungeste (valoarea tensiunii este pozitivă, vectorul tensiune normală iese din secțiune), iar secțiunea aflată sub axa neutră se scurtează (valoarea tensiunii normale este negativă, tensiunea intră în secțiune).

*Aplicația 5-6.* Pentru grinda încadrată din Figura 5.35 se cunosc  $F = 10 \text{ kN}$ ;  $q = 4 \text{ kN/m}$ ;  $a = 0,5 \text{ m}$ ;  $l = 1 \text{ m}$  și se cere:

- Calculul reacțiilor din reazem
- Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) din secțiunile transversale și trasarea diagramelor de variație
- Dimensionarea secțiunii transversale (secțiune circulară)
- Calculul de verificare a secțiunii maxim sollicitate
- Calculul momentului încovoietor capabil.

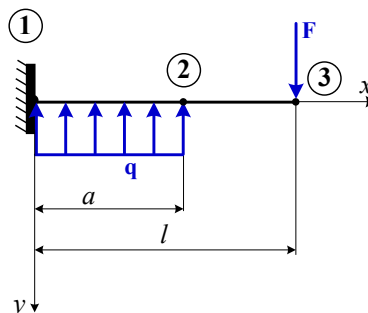


Fig. 5.35. Grindă încadrată la un capăt sollicitată la încovoiere plană

*Rezolvare. (a) Calculul reacțiilor din reazem*

Ca și în cazul aplicației anterioare, reacțiunile se calculează utilizând ecuațiile de echilibru date de Statică în plan. Și în acest caz nu există solicitare axială (după axa  $x$ ) și atunci reacțiunea orizontală ( $H_1$ ) este

nulă. Reacțiunea verticală se obține luând în calcul doar forțele ce acționează vertical (au orientarea axei  $y$ ), iar momentul concentrat ( $M_1$ ) se obține scriind o ecuație de moment în raport cu încastrarea (punctul 1). Ecuația de verificare în acest caz va fi o ecuație de moment scrisă în raport cu capătul liber (punctul 3).

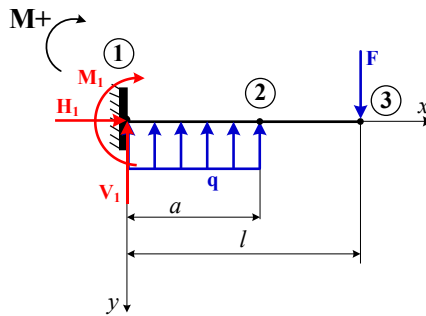


Fig. 5.36. Introducerea reacțiunilor în reazeme

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_1 - q \cdot a + F = 0 \Rightarrow V_1 = -q \cdot a + F$$

$$V_1 = -4 \cdot 0,5 + 10 \Rightarrow V_1 = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot l = 0 \Rightarrow M_1 = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot l$$

$$M_1 = 4 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} - 10 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = -9,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Verificare:

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow M_1 + V_1 \cdot l + q \cdot a \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$-9,5 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot \left(1 - \frac{0,5}{2}\right) = 0$$

$0 = 0$  se verifică; reacțiunile s-au calculat corect.

(b) Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) din secțiunea transversală.  
Construcția diagramelor de variație ale eforturilor

Pentru calculul eforturilor (forța tăietoare  $T$  și momentul încovoietor  $M_1$ ) se aplică metoda secțiunii pe fiecare interval și se ține cont de convenția de semne pentru eforturi. Expresiile eforturilor pe fiecare interval sunt date în Tabelul 5.12.

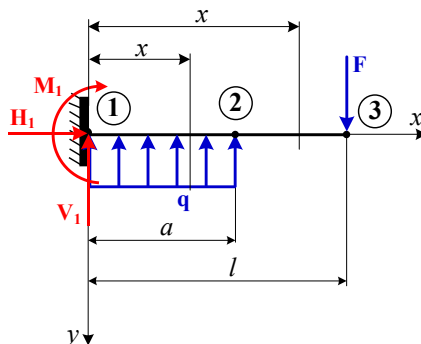


Fig. 5.37. Calculul eforturilor pe fiecare interval

Tabel 5.12. Calculul eforturilor pe fiecare interval

Intervalul 1 – 2: $x \in [0; a)$ ; $x \in [0; 0,5)$	$T_{1-2} = V_1 + q \cdot x$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow T_1 = V_1 \Rightarrow T_1 = 8 \text{ kN}</math></li> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow T_2 = V_1 + q \cdot a</math></li> </ul> $x = 0,5 \Rightarrow T_2 = 8 + 10 \cdot 0,5$
---	--

	$T_2 = 10 \text{ kN}$ $M_{1-2} = V_1 \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_1$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = 0 \Rightarrow M_1 = M_1 = -9,5 \text{ kN} \cdot \text{m}</math></li> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M_1</math></li> </ul> $x = 0,5 \Rightarrow M_2 = 8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} - 9,5$ $M_2 = -5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
<p>Intervalul 2 – 3: <math>x \in [a; l]</math>  <math>x \in [0,5; 1]</math></p>	$T_{2-3} = V_1 + q \cdot a$ $T_{2-3} = 8 + 4 \cdot 0,5 \Rightarrow T_{2-3} = 10 \text{ kN}$ $M_{2-3} = V_1 \cdot x + q \cdot a \left(x - \frac{a}{2}\right) + M_1$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = a \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot a + q \cdot a \left(a - \frac{a}{2}\right) + M_1</math></li> </ul> $x = 0,5 \Rightarrow M_2 = 8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 \left(0,5 - \frac{0,5}{2}\right) - 9,5$ $M_2 = -5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ pentru <math>x = l \Rightarrow M_3 = V_1 \cdot l + q \cdot a \left(l - \frac{a}{2}\right) + M_1</math></li> </ul> $x = 1 \Rightarrow M_3 = 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot \left(1 - \frac{0,5}{2}\right) - 9,5$ $M_3 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Pe baza rezultatelor se trasează diagramele de variație ale eforturilor, prezentată în Figura 5.38.

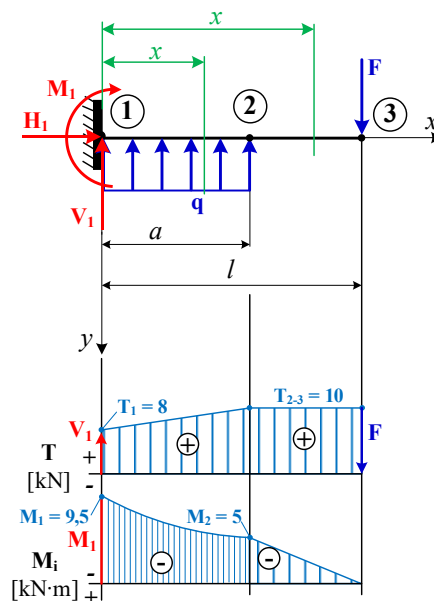


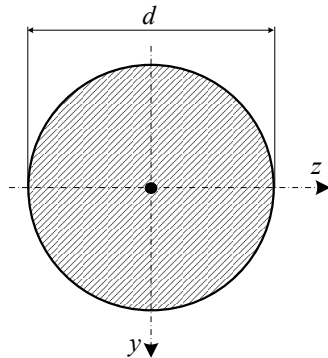
Fig.5.38. Construcția diagramei de variație ale eforturilor

(c) Dimensionarea secțiunii transversale

Grinda se consideră a fi o bară cu secțiunea circulară cu diametrul ( $d$ ), realizată din oțel pentru care se cunoaște rezistența admisibilă a materialului,  $\sigma_a = 160 \text{ N/mm}^2$ . Pentru efectuarea calculului de dimensionare, se ia în considerare secțiunea maxim sollicitată pentru care momentul de încovoiere are valoarea maximă, deoarece condiția de rezistență trebuie să fie îndeplinită.

În urma analizei diagramei de variație a momentelor de încovoiere, rezultă că secțiunea maxim sollicitată este în încăstrare (punctul 1), în care momentul maxim are valoarea:  $|M_{i_{\max}}| = |M_1| = 9,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Știind forma geometrică a secțiunii transversale, pentru aceasta se scriu două expresii ale modulelor de rezistență, astfel:



$$W_{z_{nec}} = \frac{|M_{i_{max}}|}{\sigma_a}$$

$$W_{z_{nec}} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{32}$$

Se egalează cele două relații ( $W_{z_{nec}}$ ) și se obține formula de calcul a diametrului necesar:

$$\frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{32} = \frac{|M_{i_{max}}|}{\sigma_a} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{i_{max}}|}{\pi \cdot \sigma_a}}$$

După efectuarea calculelor se obține valoarea necesară, respectiv efectivă a diametrului:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160}} \Rightarrow d_{nec} = 84,56 \text{ mm}$$

$$d_{nec} = 84,56 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 85 \text{ mm}$$

Cu valoarea efectivă ( $d_{ef}$ ) se calculează elementele geometrice ale secțiunii transversale:

$$A_{ef} = \frac{\pi \cdot d_{ef}^2}{4} \Rightarrow A_{ef} = \frac{\pi \cdot 85^2}{4} \Rightarrow A_{ef} = 5674,50 \text{ mm}^2$$

$$W_{z_{ef}} = \frac{\pi \cdot d_{ef}^3}{32} \Rightarrow W_{z_{ef}} = \frac{\pi \cdot 85^3}{32} = 60,29 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_{z_{ef}} = \frac{\pi \cdot d_{ef}^4}{64} \Rightarrow I_{z_{ef}} = \frac{\pi \cdot 85^4}{64} \Rightarrow I_{z_{ef}} = 256,23 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

#### (d) Calculul de verificare a secțiunii maxim solicitate

Pentru calculul de verificare se utilizează formula lui Navier scrisă sub forma:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{imax}}{W_{z_{ef}}} \leq \sigma_a$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\sigma_{ef} = -\frac{9,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{60,29 \cdot 10^3} \Rightarrow \sigma_{ef} = -157,56 \text{ N/mm}^2$$

Rezultă că tensiunea normală calculată (efectivă) este mai mică decât cea admisibilă, ceea ce înseamnă că se respectă condiția de verificare, respectiv dimensionarea s-a efectuat corect iar grinda rezistă la solicitările date.

#### (e) Calculul momentului încovoietor capabil

Pentru calculul momentului încovoietor capabil ( $M_{i_{cap}}$ ) se utilizează relația generală:

$$M_{i_{cap}} = W_{z_{ef}} \cdot \sigma_a$$

Înlocuind datele în expresia momentului capabil ( $M_{i\_cap}$ ) se obține:

$$M_{i\_cap} = 60,29 \cdot 10^3 \cdot 160 \Rightarrow M_{i\_cap} = 9,65 \cdot 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

*Aplicația 5-7.* Se dă grinda încărcată și solicitată ca în Figura 5.39, pentru care se cunosc:  $q = 8 \text{ kN/m}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $a = 0,5 \text{ m}$ ;  $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ . Se cere:

- Calculul reacțiilor din reazeme
- Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) și trasarea diagramelor de variație
- Dimensionarea grinzii pentru o secțiune dreptunghiulară cu  $H = 3 \cdot B$
- Variația tensiunilor normale ( $\sigma$ ) și tangențiale ( $\tau$ ) pe secțiunea transversală.

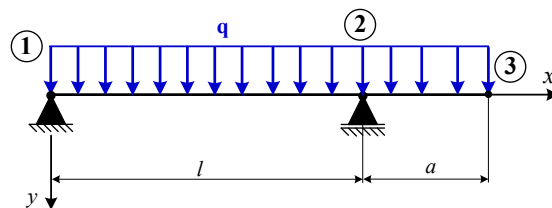


Fig. 5.39. Grindă solicitată la încovoiere plană

*Rezolvare.* (a) *Calculul reacțiilor din reazeme*

Pentru calculul reacțiilor din cele două reazeme se introduc reacțiunile în reazeme astfel: reazemul mobil din punctul 1 anulează translațiile după cele două axe ( $y$  și  $z$ ) și se introduc ca și necunoscute două reacțiuni verticale (forțe) ( $H_1$  și  $V_1$ ) pe direcțiile axelor ( $y$ ) și ( $x$ ), iar reazemul simplu (punctul 2) anulează doar translația verticală și atunci se introduce doar reacțiunea verticală ( $V_2$ ).

Pentru calculul celor trei reacțiuni se apelează la ecuațiile de echilibru uzuale. Pentru calculul reacțiunii verticale se scriu ecuații de momente în raport cu punctele 1 și 2, reacțiunea orizontală ( $H_1$ ) este nulă pentru că nu există solicitare după axa ( $x$ ). La final, verificarea valorilor se face utilizând ecuația de proiecții pe verticală  $\sum F_y = 0$ .

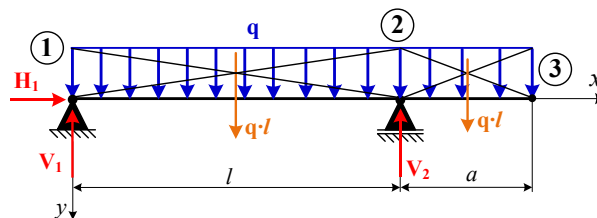


Fig. 5.40. Introducerea reacțiilor în reazeme

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum M_1 = 0 &\Rightarrow q \cdot (l + a) \cdot \frac{(l + a)}{2} - V_2 \cdot l = 0 \\ V_2 &= \frac{1}{l} \cdot \frac{q \cdot (l + a)^2}{2} \\ V_2 &= \frac{1}{1} \cdot \frac{8 \cdot 1,5^2}{2} \Rightarrow V_2 = 9 \text{ kN} \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ V_1 &= \frac{1}{l} \left( q \cdot \frac{l^2}{2} - q \cdot \frac{a^2}{2} \right) \\ V_1 &= \frac{1}{1} \left( 8 \cdot \frac{1^2}{2} - 8 \cdot \frac{0,5^2}{2} \right) \Rightarrow V_1 = 3 \text{ kN} \end{aligned}$$

Verificare:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - q \cdot (l + a) = 0$$

$$3 + 9 - 8 \cdot (1 + 0,5) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{reacțiunile s-au calculat corect.}$$

(b) Calculul eforturilor ( $T$  și  $M_i$ ) și trasarea diagramelor de variație

Pentru calculul eforturilor în secțiunea transversală a grinzii (forța tăietoare  $T$  și momentul de încovoiere  $M_i$ ) se aplică metoda secțiunii pe fiecare interval. La acest calcul se ține cont de convenția de semne pentru eforturi (Figura 5.41), iar expresiile eforturilor pe fiecare interval sunt date în Tabelul 5.13.

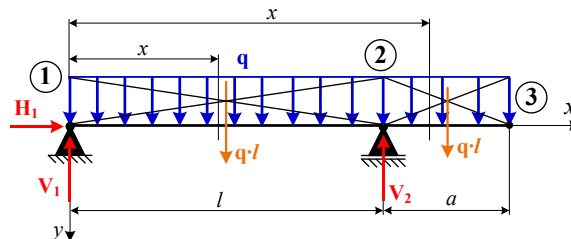
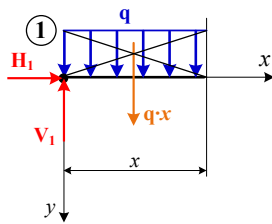
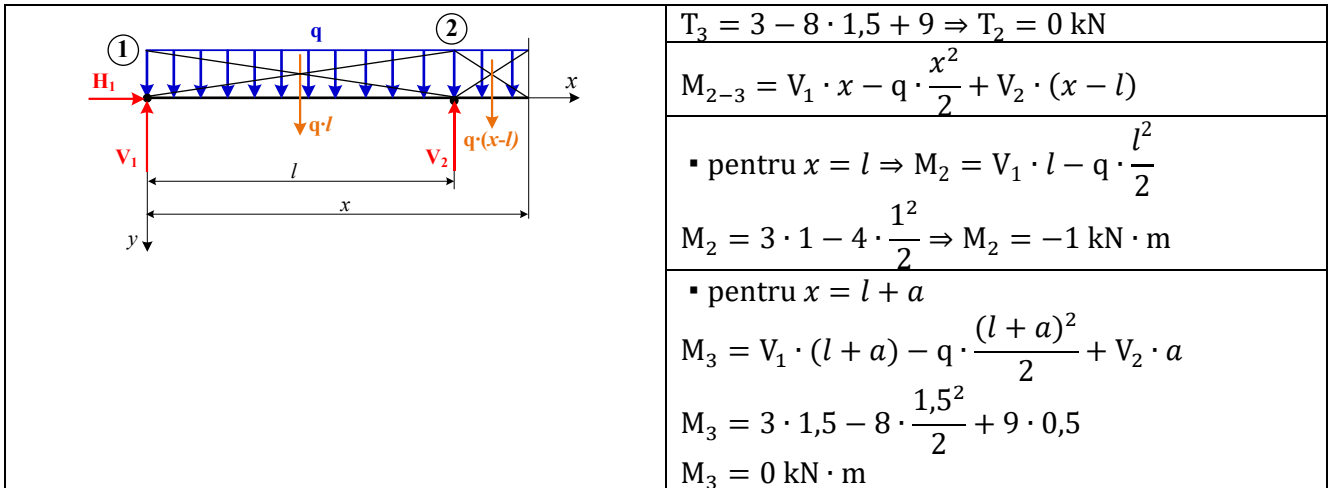


Fig. 5.41. Calculul eforturilor pe fiecare interval cu metoda secțiunii

Tabel 5.13. Calculul eforturilor pe fiecare interval

Intervalul 1-2: $x \in [0; l] \rightarrow x \in [0; 1)$	$T_{1-2} = V_1 - q \cdot x$
	▪ pentru $x = 0 \Rightarrow T_1 = V_1 = 3 \text{ kN}$
	▪ pentru $x = l \Rightarrow T_2 = V_1 - q \cdot l$ $T_2 = 3 - 8 = -5 \text{ kN}$
	<i>Observație: (1) Forța tăietoare <math>T_{1-2}</math> își schimbă semnul, respectiv există un punct critic în care: <math>T_{1-2} = 0</math> și <math>M_{1-2}</math> este maxim (sau minim). Este necesar să se calculeze abscisa (<math>x_0</math>) aferentă punctului critic.</i>
	$T_{1-2} = 0 \Rightarrow V_1 - q \cdot x_0 = 0$ $x_0 = \frac{V_1}{q} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{8} \Rightarrow x_0 = 0,375 \text{ m}$
	$M_{1-2} = V_1 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$
	▪ pentru $x = 0 \Rightarrow M_1 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	▪ pentru $x = l \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2}$
	$M_2 = 3 \cdot 1 - 8 \cdot \frac{1^2}{2} \Rightarrow M_2 = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	▪ pentru $x = x_0 \Rightarrow M_2 = V_1 \cdot x_0 - q \cdot \frac{x_0^2}{2}$
	$M_{1-2_{\max}} = 3 \cdot 0,375 - 8 \cdot \frac{0,375^2}{2}$ $M_{1-2_{\max}} = 0,562 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	<i>Observație: (1) <math>M_{1-2_{\max}} &gt; M_2</math> pentru că, pe axa numerelor naturale, valoarea <math>M_{1-2_{\max}}</math> este mai aproape de origine (sau de valoarea 0 a axei).</i>
Intervalul 2-3: $x \in [l; l + a] \rightarrow x \in [1; 1,5)$	$T_{2-3} = V_1 - q \cdot x + V_2$
	▪ pentru $x = l \Rightarrow T_2 = V_1 - q \cdot l + V_2$ $T_2 = 3 - 8 \cdot 1 + 9 \Rightarrow T_2 = 4 \text{ kN}$
	▪ pentru $x = l + a$ $T_3 = V_1 - q \cdot (l + a) + V_2$





Cu valorile obținute, se trasează diagramele de variație ale eforturilor (T) și ( $M_i$ ). Dacă efortul este definit de o ecuație de gradul întâi, atunci diagrama prezintă o variație liniară, iar dacă este definit de o ecuație de gradul 2, atunci variația va fi după o parabolă. Dacă efortul este constant, atunci nu prezintă variație pe intervalul respectiv (este constant).

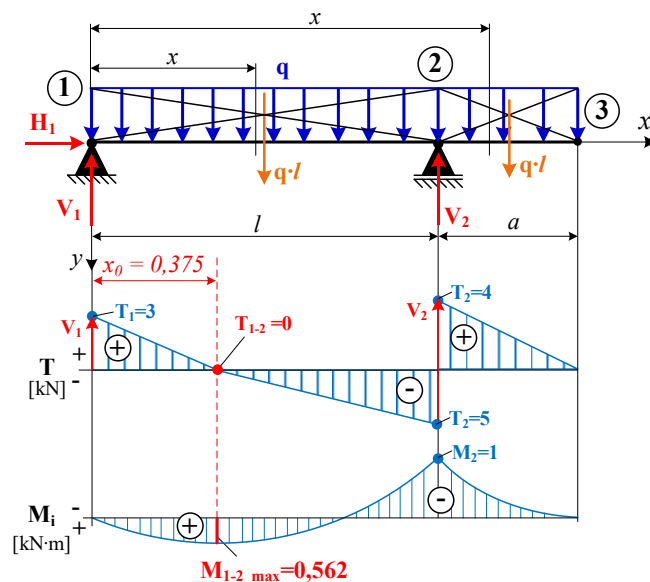


Fig. 5.42. Diagramele de variație ale eforturilor (T și  $M_i$ )

Pe baza diagramelor de variație ale eforturilor, se identifică secțiunea maxim sollicitată. Astfel, s-au obținut:  $|T_{\max}| = T_2 = 5 \text{ kN}$  (în punctul 2),  $|M_{i\max}| = M_2 = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , rezultă că secțiunea maxim sollicitată este secțiunea transversală din dreptul punctului 2.

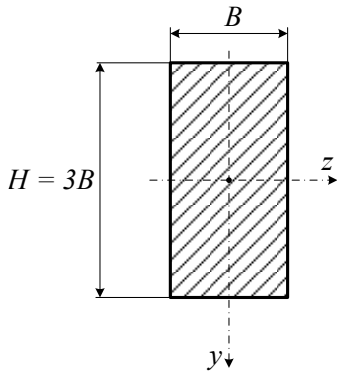
### (c) Dimensionarea secțiunii transversale

Grinda are secțiunea transversală dreptunghiulară ( $B \times H$ ), realizată din oțel pentru care se cunoaște rezistența admisibilă a materialului,  $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ . Pentru efectuarea calculului de dimensionare, se ia în considerare secțiunea maxim sollicitată pentru care momentul de încovoiere are valoarea maximă, deoarece condiția de rezistență trebuie să fie îndeplinită.

În urma analizei diagramei de variație a momentelor de încovoiere, rezultă că secțiunea maxim sollicitată este în punctul 2, în care momentul maxim are valoarea:  $|M_{i\max}| = |M_2| = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .



Știind forma geometrică a secțiunii transversale, pentru aceasta se scrie două expresii ale ariilor secțiunii, astfel:



$$W_z = \frac{|M_{i\_max}|}{\sigma_a}$$

$$W_z = \frac{B \cdot H^2}{6} \Rightarrow \text{pentru secțiunea dreptunghiulară}$$

$$W_z = \frac{B \cdot (3B)^2}{6} \Rightarrow \frac{9 \cdot B^3}{6}$$

Se egalează cele două expresii și se obține:

$$\frac{9 \cdot B_{nec}^3}{6} = \frac{|M_{i\_max}|}{\sigma_a} \Rightarrow B_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_{i\_max}| \cdot 10^3 \cdot 10^3}{9 \cdot \sigma_a}}$$

După efectuarea calculelor, rezultă lățimea necesară a secțiunii transversale, iar apoi valoarea efectivă a lățimii secțiunii:

$$B_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{9 \cdot 150}} \Rightarrow B_{nec} = 16,44 \text{ mm} \Rightarrow B_{ef} = 17 \text{ mm}$$

$$H_{ef} = 3 \cdot B_{ef} = 51 \text{ mm}$$

(d) Variația tensiunilor normale ( $\sigma$ ) și tangențiale ( $\tau$ )

Tensiunea normală ( $\sigma$ ) se calculează utilizând formula lui Navier scrisă sub forma:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{i\_max}}{I_{z\_ef}} \cdot (\pm y_{max}), \quad y_{max} = \pm \frac{H_{ef}}{2} \text{ mm}$$

Pentru calculul tensiunii normale, este necesar să se calculeze momentul de inerție după aza ( $z$ ) a secțiunii transversale astfel:

$$I_{z\_ef} = \frac{17 \cdot 51^3}{12} \Rightarrow I_{z\_ef} = 0,187922 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$y_{max} = \pm \frac{51}{2} \Rightarrow y_{max} = \pm 25,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{(-1) \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,187922 \cdot 10^6} \cdot (\pm 22,5) \Rightarrow \sigma_{ef} = (-5,32135) \cdot (\pm 22,5)$$

- pentru  $y_{max} = +22,5 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{ef\_1} = -5,32135 \cdot 22,5 = -135,7 \text{ N/mm}^2$
- pentru  $y_{min} = -22,5 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{ef\_2} = -5,32135 \cdot (-22,5) = +135,7 \text{ N/mm}^2$

Tensiunea tangențială maximă ( $\tau_{max}$ ) se calculează utilizând formula generală pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{max}}{A_{ef}}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{5 \cdot 10^3}{17 \cdot 51} \right) \Rightarrow \tau_{max} = -8,65 \text{ N/mm}^2$$

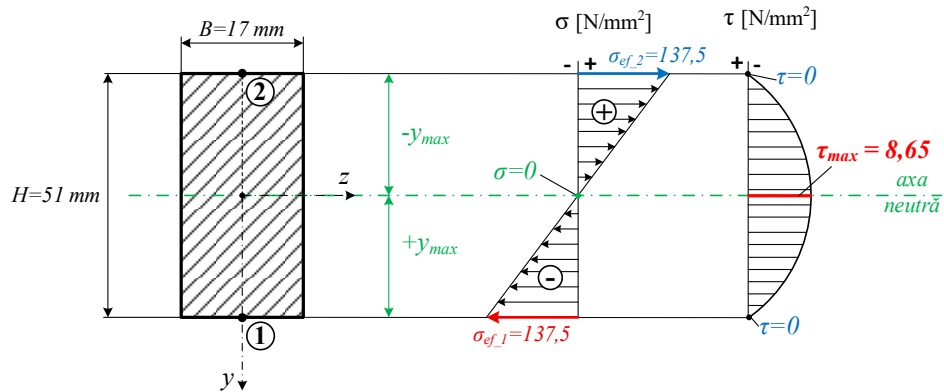


Fig. 5.43. Diagramele de variație ale tensiunilor normale ( $\sigma$ ) și tangențiale ( $\tau$ )

În Figura 5.43 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor normale ( $\sigma$ ) și tangențiale ( $\tau$ ) calculate pentru secțiunea maxim solicitată. Se observă că, tensiunile normale variază liniar și sunt maxime în fibrele extreme ale secțiunii transversale și nule în axa neutră, iar cele tangențiale sunt maxime în axa neutră a secțiunii și nule în fibrele extreme. Tensiunile tangențiale variază după o parabolă. De asemenea, comparând tensiunile din punct de vedere numeric, rezultă că tensiunea tangențială este mult mai mică decât cea normală.

### 5.5. Deformațiile grinzilor solicate la încovoiere

Datorită tensiunilor normale care iau naștere în secțiunea transversală a unei grinzi solicate la încovoiere plană, grinda se deformează curbându-se, deformarea producându-se în planul solicitărilor exterioare (planul vertical  $xOy$ ). În majoritatea cazurilor, grinzile solicate la încovoiere trebuie să satisfacă, suplimentar condiției de rezistență și *condiția de rigiditate*, respectiv grinzile trebuie dimensionate astfel încât *deformațiile maxime să nu depășească anumite limite* impuse de condițiile de exploatare. În acest context, studiul deformațiilor este important pentru analiza tensiunilor și a comportamentului materialului supus solicitărilor externe.

În calculul deformațiilor produse la încovoiere plană se admit următoarele *ipoteze simplificatoare*:

- Secțiunile transversale rămân plane după deformare, ceea ce face ca deplasările acestora să nu fie afectate semnificativ de forțele tăietoare (valabilă ipoteza lui Bernoulli). Se neglijează efectul forțelor de forfecare, deoarece acestea au o influență redusă asupra deformării.
- Deformațiile se produc în domeniul elastic iar materialul din care este confecționată grinda se comportă conform legii lui Hooke. Deformațiile sunt direct proporționale cu forțele aplicate iar materialul revine la forma inițială odată ce solicitările sunt eliminate, atâta timp cât nu se depășește limita elasticității.
- Constrațiile transversale nu sunt luate în considerare, deoarece efectele acestora sunt neglijabile în comparație cu deformațiile (alungirile) longitudinale, iar ipoteza lui Bernoulli presupune că dimensiunile secțiunilor transversale nu suferă modificări semnificative.

În aceste condiții, în cazul solicitărilor de încovoiere plană, secțiunile transversale ale grinzilor sunt rigide, având *deplasări transversale* în planul de încovoiere (care corespunde planului forțelor sau planului vertical) și *rotiri* față de axele de încovoiere (axa momentului de încovoiere, axa  $z$ ).

*Definiție:* Forma pe care o ia axa neutră a unei grinzi după solicitarea acesteia la încovoiere plană, poartă numele de *fibră medie deformată* (sau, prescurtat, *f.m.d.*) [2].

Axa neutră a unei grinzi reprezintă linia imaginată care, pentru secțiunile simetrice față de axele ( $y$ ) și ( $z$ ), trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale, separând zonele aflate în compresiune de zonele aflate în tracțiune în timpul încovoierii. Axa neutră este importantă în analiza tensiunilor și deformațiilor și se presupune că rămâne neschimbată în lungime pe parcursul deformării. Astfel,

materialul aflat deasupra axei neutre este fie comprimat, fie suspus întinderii, în funcție de semnul momentului încovoiator din secțiunea transversală respectivă.

### 5.5.1. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate

La studiul deformațiilor grinzilor plane este suficient să se cunoască ecuația fibrei medii deformate (prescurtat f.m.d.), deplasările altor puncte rezultând din ipoteza secțiunilor plane și normale pe axa grinzii. Ecuația fibrei medii deformate se deduce ținând cont de modul de rezemare și de încărcare al grinzii.

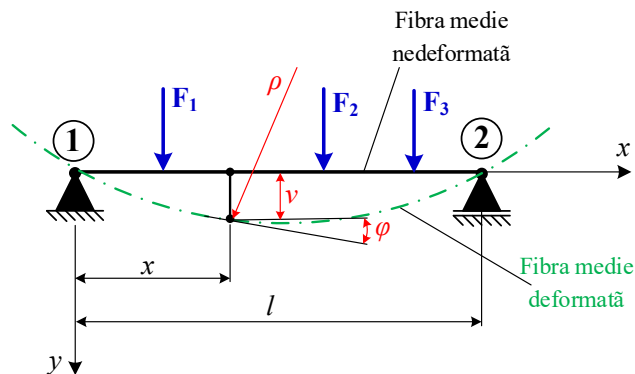


Fig. 5.44. Studiul deformațiilor unei grinzi solicitată la încovoiere

În figură s-au notat:

- $F_1 \div F_3$  – sistem de forțe care solicită grinda la încovoiere, [N]
- $l$  – lungimea grinzii, [mm]
- $x$  – distanța de la reazemul 1 până la o secțiune oarecare, [mm]
- $\rho$  – raza de curbură a f.m.d.
- $v$  – săgeată sau deplasarea verticală, [mm]
- $\varphi$  – rotirea, [°].

Se consideră grinda dreaptă simplu rezemată la capete, supusă acțiunii unui sistem de forțe ( $F_1 \div F_3$ ) pe axa sa longitudinală, conform Figurii 5.44. Pentru definirea stării de deformații la solicitarea de încovoiere, este valabilă ipoteza lui Bernoulli și se neglijează deplasările axiale ale punctelor aflate pe fibra medie deformată.

Starea de deformație din dreptul unei secțiuni transversale oarecare, situată la distanța ( $x$ ), este caracterizată de următoarele mărimi geometrice:

- Deplasarea normală pe axa grinzii (pe direcția  $Oy$ ), numită *săgeată*, care rezultă direct din ecuația fibrei medii deformate ca fiind ordonata ( $v$ ) corespunzătoare unei abscise ( $x$ ):

$$v = f(x) \quad (5.48)$$

- Unghiul tangentei la f.m.d., față de axa nedeformată ( $x$ ), denumit *rotire* ( $\varphi$ ), care se obține prin derivarea ecuației fibrei medii deformate:

$$\varphi \cong \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} \quad (5.49)$$

- Curbura ( $1/\rho$ ) a f.m.d. este definită prin relația  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1+(dv/dx)^2]^{3/2}}$ . Având în vedere relația (5.49), pentru unghiuri mici de deformare termenul  $(dv/dx)^2$  este neglijabil în raport cu unitatea. În consecință, curbura ( $1/\rho$ ) poate fi aproximată prin relația următoare:

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.50)$$

Pe de altă parte, în conformitate cu relația (5.24), curbura f.m.d. a unei grinzi este:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad (5.51)$$

unde produsul ( $E \cdot I_z$ ) care exprimă produsul dintre caracteristica elastică a materialului (modulul de elasticitate longitudinală,  $E$ ) și caracteristica geometrică a secțiunii transversale (momentul de inerție axial,  $I_z$ ) poartă denumirea de *modul de rigiditate la încovoiere* a grinzii.

**Observație:** (1) Grinda este cu atât mai rigidă la încovoiere cu cât modulul de rigiditate ( $E \cdot I_z$ ) are o valoare mai mare.

Prin egalarea relațiilor (5.50) și (5.51) rezultă *ecuația diferențială a fibrei medii deformate*:

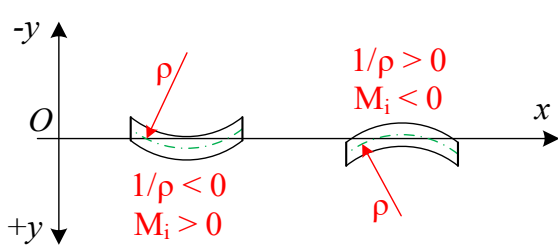
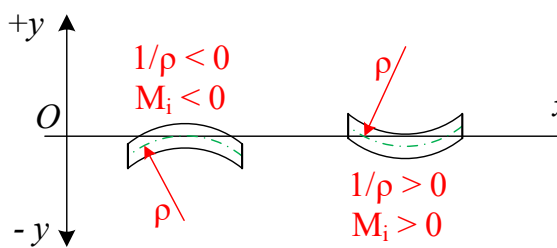
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad (5.52)$$

Având în vedere faptul că, în rezolvarea aplicațiilor de încovoiere plană, sistemul de coordonate se alege de regulă cu axa ( $y$ ) orientată în jos, ecuația fibrei medii deformate (5.52) se rescrie sub forma:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (5.53)$$

Asadar, relația scrisă în forma (5.53) reprezintă *ecuația diferențială a fibrei medii deformate*, care exprimă *ecuația axei deformate a grinzii plane*. În Tabelul 5.14 sunt prezentate ambele forme ale ecuației f.m.d., în funcție de modul de alegere al sistemului de coordonate.

**Tabelul 5.14.** Semnul momentului încovoielor din ecuația f.m.d. în funcție de direcția pozitivă a axei verticale

Axa Oy pozitivă cu orientarea în jos		Axa Oy pozitivă cu orientarea în sus	
			
Pentru: <b>M &gt; 0</b>		Pentru: <b>M &lt; 0</b>	
$\frac{1}{\rho} < 0;$	$\frac{d^2 v}{dx^2} < 0$	$\frac{1}{\rho} > 0;$	$\frac{d^2 v}{dx^2} > 0$
$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_z}$		$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I_z}$	

**Observație:** (1) Semnul plus sau minus al membrului din dreapta al ecuației (5.52) depinde atât de orientarea sistemului de axe  $xOy$  la care se raportează grinda, cât și de semnul momentului încovoielor în secțiunea ( $x$ ),  $M(x)$ :

- când axa  $Oy$  este orientată în jos, membrul drept a ecuației (5.52) va fi luat cu minus, rezultând că semnul momentului încovoielor este opus celui ce dă curbura grinzii.
- când axa  $Oy$  este orientată în sus, iar semnul momentului încovoielor coincide cu cel al curburii, membrul drept al ecuației (5.52) va fi luat cu plus.

Studiul deformației grinzilor solicitate presupune integrarea ecuației diferențiale de forma (5.53), obținându-se după prima integrare tangenta la f.m.d. sau unghiul de rotire al secțiunii ( $\phi$ ), iar după a doua integrare, săgeata sau deplasarea verticală ( $v$ ).

În literatura de specialitate [2,13,15,18,19÷23] sunt prezentate, într-o manieră detaliată, numeroase metode analitice, grafice sau grafo-analitice privind calculul deformațiilor (rotirea și săgeata/deplasare verticală) și care au la bază ecuația diferențială a f.m.d., dintre care se amintesc: metoda generală de integrare directă; metoda identificării constantelor de integrare sau metoda Clebsch, metoda suprapunerii efectelor pentru calculul deformațiilor (metode analitice); metoda Mohr, metoda grinzilor conjugate (metode grafo-analitice); metoda cu distanța polară variabilă, respectiv unică (metode grafice) etc.

În cazul determinării stării de deformații a grinzilor static determinate solicitate la încovoiere plană de mai multe sarcini exterioare care acționează simultan, metodele enumerate anterior sunt destul de dificil de aplicat. Aceste metode se utilizează doar pentru cazuri simple de încărcare, respectiv în cazul grinzilor ce prezintă un număr redus de intervale.

În continuare se prezintă câteva dintre metodele uzuale de calcul al deformațiilor (deplasări și rotații) în cazul grinzilor solicitate la încovoiere.

### 5.5.2. Studiul deformațiilor grinzilor utilizând metode de integrare a f.m.d.

#### 5.5.2.1. Metoda de integrare directă

Etape în aplicarea metodei:

- Se alege originea sistemului de axe ( $xOy$ )
- Se calculează reacțiunile din reazeme și se scrie expresia momentului încovoietor pentru fiecare interval al grinzii
- Se integrează succesiv ecuația diferențială a f.m.d. obținându-se expresiile rotației și săgeții:

▪ Rotirea	$\varphi = \frac{dv}{dx} = - \int \frac{M(x)}{E \cdot I_z} \cdot dx + C$	(5.54)
-----------	--	--------

▪ Săgeata	$v = - \int \left[ \int \frac{M(x)}{E \cdot I_z} \cdot dx \right] + C \cdot x + D$	(5.55)
-----------	--	--------

d) Se determină constantele de integrare (C și D) din condiții la limită (pe reazem) și de continuitate a f.m.d.:

- în reazemul simplu și în articulații, săgeata verticală este nulă ( $v = 0$ )
- în încastrare, rotirea și săgeata verticală sunt nule ( $\varphi = 0$ ;  $v = 0$ )
- în punctul comun dintre două intervale succesive (punct de hotar), săgețile verticale și rotațiile au aceleași valori pe ambele intervale.

**Observație:** (1) Constantele de integrare C și D nu sunt mărimi adimensionale. Având în vedere că se calculează prin intermediul unor ecuații în care intervin sarcini exterioare (forțe, momente, sarcini uniform distribuite) și lungimi (abscise x), aceste constante de integrare vor avea următoarele unități de măsură: C [ $kN \cdot m^2$ ] și D [ $kN \cdot m^3$ ].

Dezavantajul acestei metode constă în faptul că, pentru fiecare interval al grinzii se obține un sistem de două ecuații (o ecuație pentru rotație și o ecuație pentru săgeată) cu două constante de integrare (C, D). Astfel, pentru o grindă cu (n) intervale se introduc un număr de (2·n) constante de integrare, care se determină impunând condiții la limită, astfel că pentru grinzi cu încărcare mecanică complexă, modelul matematic de calcul devine dificil de rezolvat.

În continuare, se exemplifică calculul deformațiilor maxime, săgeata maximă ( $v_{\max}$ ) și rotirea maximă ( $\varphi_{\max}$ ), pentru câteva cazuri de grinzi solicitate la încovoiere plană, cunoscându-se sarcinile exterioare, lungimile grinzilor și rigiditatea ( $E \cdot I_z$ ).

(a) Grindă încastrată la un capăt și solicitată de o forță concentrată în capătul liber

Se consideră grinda încastrată în capătul din stânga (în punctul 1) care este solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată pe capătul liber (punctul 2), Figura 5.45. Pentru această grindă se dorește determinarea rotirii și a săgeții maxime în capătul liber ( $v_{\max}$ ;  $\varphi_{\max}$ ). Pentru rezolvarea aplicației, se cunoaște lungimea grinzii ( $l$ ), forța aplicată ( $F$ ), momentul de inerție axial al secțiunii transversale ( $I_z$ ) și modulul de elasticitate longitudinală al materialului ( $E$ ).

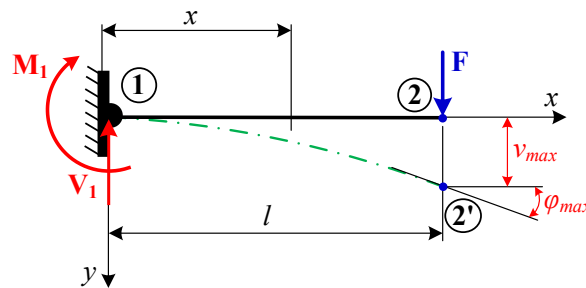


Fig. 5.45. Grindă încastrată

Se calculează reacțiunile ( $V_1$ ) și ( $M_1$ ) din încastrare aplicând ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - F = 0 \Rightarrow V_1 = F \quad (5.56)$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 + F \cdot l = 0 \Rightarrow M_1 = -F \cdot l \quad (5.57)$$

Se scrie expresia momentului încovoiitor ( $M(x)$ ) în secțiunea ( $x$ ):

$$M(x) = V_1 \cdot x + M_1 \quad (5.58)$$

$$M(x) = F \cdot x - F \cdot l \quad (5.59)$$

Ecuația diferențială a f.m.d. în formă generală este:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z} \Rightarrow EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = -M(x) \quad (5.60)$$

în care rigiditatea la încovoiere ( $EI_z$ ) este constantă.

În relația (5.60) se înlocuiește expresia momentului  $M(x)$  scrisă sub forma (5.59) și se obține ecuația diferențială a f.m.d. pentru grinda studiată:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = F \cdot l - F \cdot x \quad (5.61)$$

Se integrează succesiv expresia (5.61) și se obține ecuația rotirii și a săgeții pentru grinda studiată:

▪ *Expresia rotirii:*

$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = F \cdot l \cdot x - \frac{F \cdot x^2}{2} + C \quad (5.62)$$

▪ *Expresia săgeții:*

$$EI_z \cdot v = \frac{F \cdot l \cdot x^2}{2} - \frac{F \cdot x^3}{6} + C \cdot x + D \quad (5.63)$$

Pentru calculul constantelor de integrare  $C$  și  $D$ , se scriu condițiile pentru încastrare:

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \xrightarrow{(ec. 5.62)} C = 0 \quad (5.64)$

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{(ec. 5.63)} D = 0 \quad (5.65)$

Expresiile constantelor de integrare se introduc în relațiile generale ale rotirii și săgeții (5.62; 5.63). Se obține:

▪ *Expresia rotirii:* 
$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = F \cdot l \cdot x - \frac{F \cdot x^2}{2} \quad (5.66)$$

▪ *Expresia săgeții:* 
$$EI_z \cdot v = \frac{F \cdot l \cdot x^2}{2} - \frac{F \cdot x^3}{6} \quad (5.67)$$

Valorile maxime ale rotirii și săgeții au loc la capătul liber a grinzii, pentru  $x = l$ :

▪ *Rotirea maximă*  
(din expresia 5.66): 
$$\varphi_{\max} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot EI_z} \quad (5.68)$$

▪ *Săgeata*  
(din expresia 5.67): 
$$v_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot EI_z} \quad (5.69)$$

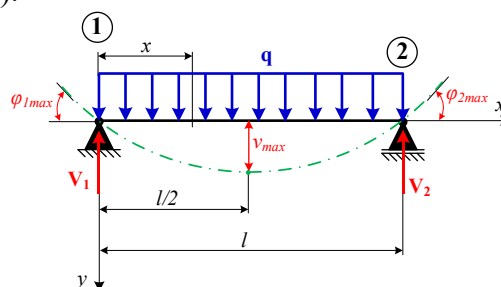
*Calcul teoretic:* Pentru grinda dată se cunosc următoarele mărimi:  $F = 5 \text{ kN}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $I_z = 85,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Înlocuind aceste valori în formulele (5.151) și (5.152) s-au determinat rotirea și săgeata maximă pe capătul liber al grinzii, iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.15.

**Tabelul 5.15.** Rezultate teoretice pentru grinda solicitată de forța (F)

Modul de rezemare și de încărcare a grinzii	Rezultate teoretice	
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = 5 \text{ kN}$ ; $M_1 = -5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = 5 \cdot x - 5$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = 5 - 5 \cdot x$
	<b>Rotirea maximă</b> (expresia 5.68)	$\varphi_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3 + (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 85,75 \cdot 10^4}$ $\varphi_{\max} = 0,0145 \text{ rad}$ $\varphi_{\max} = 0,83^\circ$
	<b>Săgeata maximă</b> (expresia 5.69)	$v_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3 + (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 85,75 \cdot 10^4}$ $v_{\max} = 9,71 \text{ mm}$

(b) Grindă simplu rezemată și solicitată de o sarcină uniform distribuită

Fie o grindă simplu rezemată (punctele 1 și 2), solicitată la încovoiere plană de o sarcină uniform distribuită ( $q$ ) care acționează pe toată lungimea grinzii ( $l$ ), Figura 5.46. Pentru această grindă se dorește determinarea rotirii la capetele grinzii ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) și a săgeții maxime ( $v_{\max}$ ) care se produce la jumătatea deschiderii grinzii (la distanța  $l/2$ ). Pentru rezolvarea aplicației, se cunosc: lungimea grinzii ( $l$ ), sarcina uniform distribuită ( $q$ ), momentul de inerție axial al secțiunii transversale ( $I_z$ ) și modulul de elasticitate longitudinală al materialului ( $E$ ).



**Fig. 5.46.** Grindă simplu rezemată

Se calculează reacțiunile din cele două reazeme simple:

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow q \cdot \frac{l^2}{2} - V_2 \cdot l = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{q \cdot l}{2} \quad (5.70)$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{q \cdot l}{2} \quad (5.71)$$

Se scrie expresia momentului încovoietor ( $M(x)$ ) în secțiunea ( $x$ ):

$$M(x) = V_1 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}; \quad (5.72)$$

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad (5.73)$$

Ecuția diferențială a f.m.d. în formă generală este:

$$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x) \quad (5.74)$$

Modulul de rigiditate la încovoiere ( $EI_z$ ) este constant.

Expresia momentului încovoietor (5.73) se înlocuiește în expresia (5.74) și se obține ecuația diferențială a f.m.d. pentru grinda studiată:

$$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = q \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot x \quad (5.75)$$

Se integrează succesiv expresia (5.75) și se obține ecuația rotirii și a săgeții pentru grinda studiată:

▪ *Expresia rotirii:*

$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \quad (5.76)$$

▪ *Expresia săgeții:*

$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + C \cdot x + D \quad (5.77)$$

Pentru calculul constantelor de integrare  $C$  și  $D$ , se scriu condițiile pe reazeme:

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{(ec. 5.77)} D = 0 \quad (5.78)$

▪ pentru  $x = l \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{(ec. 5.77)} \frac{q \cdot l^4}{24} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l^3}{6} + C \cdot l = 0 \quad (5.79)$

iar după efectuarea calculelor se obține expresia constantei de integrare  $C$ :

$$C = \frac{q \cdot l^3}{24} \quad (5.80)$$

Constantele de integrare ( $C, D$ ) se introduc în relațiile generale ale rotirii și săgeții (5.76, 5.77). Se obține:

▪ *Expresia rotirii:*

$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q \cdot l^3}{24} \quad (5.81)$$

▪ *Expresia săgeții:*

$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x \quad (5.82)$$

Valoarea maximă a săgeții este la mijlocul grinzii, pentru  $x = l/2$ , iar a rotirilor sunt în reazeme, pentru  $x = 0$ . Se înlocuiesc distanțele pentru care se dorește determinarea deformațiilor maxime în expresiile (5.81) și (5.82) și se obține:

pentru  $x = 0$ :

▪ *Rotirea*  
(din expresia 5.81):

$$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_z} \quad (5.83)$$

pentru  $x = l/2$ :

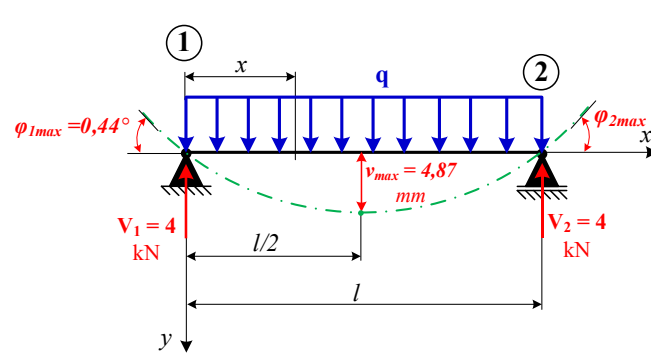


▪ *Săgeata*  
(din expresia 5.82):

$$v_{\max} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI_z} \quad (5.84)$$

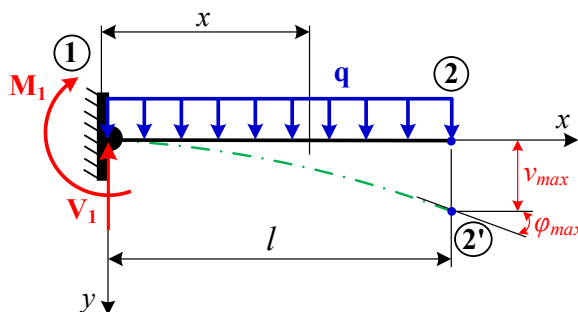
*Calcul teoretic:* Pentru grinda simplu rezemată se cunosc următoarele mărimi:  $q = 4 \text{ kN/m}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $I_z = 10,66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Înlocuind aceste valori în relațiile (5.166) și (5.167) s-au determinat rotirea maximă în punctele 1 și 2, respectiv săgeata maximă la mijlocul grinzii. Rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.16.

**Tabelul 5.16.** Rezultate teoretice pentru grinda simplu rezemată solicitată de sarcina ( $q$ )

Modul de rezemare și de încărcare a grinzii	Rezultate	
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = V_2 = 4 \text{ kN}$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (<math>x</math>)</b>	$M(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x$
	<b>Rotirea maximă</b> (expresia 5.83)	$\Phi_{1\max} = -\Phi_{2\max} = \frac{4 \cdot (1 \cdot 10^3)^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10,66 \cdot 10^4}$ $\Phi_{1\max} = -\Phi_{2\max} = 0,00781 \text{ rad}$ $\Phi_{1\max} = -\Phi_{2\max} = 0,44^\circ$
	<b>Săgeata maximă</b> (expresia 5.84)	$v_{\max} = \frac{5 \cdot 4 \cdot (1 \cdot 10^3)^4}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10,66 \cdot 10^4}$ $v_{\max} = 4,87 \text{ mm}$

(c) *Grindă încastrată la un capăt și solicitată de o sarcină uniform distribuită și de o forță concentrată aplicată pe capătul liber*

Fie grinda încastrată în capătul din stânga (punctul 1), solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată pe capătul liber (punctul 2), respectiv de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) care acționează pe toată lungimea ( $l$ ) a grinzii (Figura 5.47). Pentru rezolvarea aplicației, se cunosc: lungimea grinzii ( $l$ ), forța aplicată ( $F$ ), sarcina uniform distribuită ( $q$ ), momentul de inerție axial al secțiunii transversale ( $I_z$ ) și modulul de elasticitate longitudinală al materialului ( $E$ ). Se cere determinarea rotirii și a săgeții maxime ( $v_{\max}$ ;  $\varphi_{\max}$ ) pe capătul liber.



**Fig. 5.47.** Grindă încastrată

Se calculează reacțiunile din încastrare aplicând ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - q \cdot l - F = 0 \Rightarrow V_1 = q \cdot l + F \quad (5.85)$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 + \frac{q \cdot l^2}{2} + F \cdot l = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{q \cdot l^2}{2} - F \cdot l \quad (5.86)$$

Se scrie expresia momentului încovoietor ( $M(x)$ ) în secțiunea ( $x$ ):

$$M(x) = V_1 \cdot x + M_1 - \frac{q \cdot l^2}{2} \quad (5.87)$$

$$M(x) = q \cdot l \cdot x + F \cdot x - \frac{q \cdot l^2}{2} - F \cdot l - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (5.88)$$

Ecuția diferențială a f.m.d. în formă generală este:

$$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x) \quad (5.89)$$

unde modulul de rigiditate la încovoiere ( $EI_z$ ) este constant.

Expresia momentului încovoietor (5.88) se înlocuiește în ecuația diferențială a f.m.d. și se obține ecuația diferențială a f.m.d. pentru grinda studiată:

$$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q \cdot x^2}{2} - q \cdot l \cdot x - F \cdot x + \frac{q \cdot l^2}{2} + F \cdot l \quad (5.90)$$

Se integrează succesiv expresia (5.90) și se obțin:

▪ *Expresia rotirii:* 
$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{2} - \frac{F \cdot x^2}{2} + \frac{q \cdot l^2 \cdot x}{2} + F \cdot l \cdot x + C \quad (5.91)$$

▪ *Expresia săgeții:* 
$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{6} - \frac{F \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot l^2 \cdot x^2}{4} + \frac{F \cdot l \cdot x^2}{2} + C \cdot x + D \quad (5.92)$$

Pentru calculul constantelor de integrare  $C$  și  $D$ , se scriu condițiile la limită (în încastrare):

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \xrightarrow{(ec. 5.91)} C = 0 \quad (5.93)$

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{(ec. 5.92)} D = 0 \quad (5.94)$

Expresiile constantelor de integrare se introduc în relațiile generale ale rotirii și săgeții. Se obține:

▪ *Expresia rotirii:* 
$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{2} - \frac{F \cdot x^2}{2} + \frac{q \cdot l^2 \cdot x}{2} + F \cdot l \cdot x \quad (5.95)$$

▪ *Expresia săgeții:* 
$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{6} - \frac{F \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot l^2 \cdot x^2}{4} + \frac{F \cdot l \cdot x^2}{2} \quad (5.96)$$

Valorile maxime ale rotirii și săgeții au loc la capătul liber al grinzii, pentru  $x = l$ . Se obțin:

▪ *Rotirea*  
(din expresia 5.95): 
$$\frac{dv}{dx} = \varphi_{\max} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{q \cdot l^3}{6} - \frac{q \cdot l^3}{2} - \frac{F \cdot l^2}{2} + \frac{q \cdot l^3}{2} + F \cdot l^2 \right) \quad (5.97)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{q \cdot l^3 + 3 \cdot F \cdot l^2}{6 \cdot EI_z} \quad (5.98)$$

▪ *Săgeata*  
(din expresia 5.96): 
$$v_{\max} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left( \frac{q \cdot l^4}{24} - \frac{q \cdot l^4}{6} - \frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{q \cdot l^4}{4} + \frac{F \cdot l^3}{2} \right) \quad (5.99)$$

$$v_{\max} = \frac{3 \cdot q \cdot l^4 + 8 \cdot F \cdot l^3}{24 \cdot EI_z} \quad (5.100)$$

*Calcul teoretic:* Pentru grinda încastrată se cunosc următoarele mărimi:  $q = 6 \text{ kN/m}$ ;  $F = 14 \text{ kN}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $I_z = 328 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Înlocuind aceste valori în formulele (5.181) și (5.183) s-au determinat rotirea și săgeata maximă la capătul liber al grinzii, iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.17.

Tabelul 5.17. Rezultate teoretice pentru grinda încastrată solicitată de forța (F) și sarcina (q)

Modul de rezemare și de încărcare a grinzii	Rezultate	
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = 20 \text{ kN}$ $M_1 = -16 \text{ kN} \cdot \text{m}$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = 20 \cdot x - 3 \cdot x^2 - 17$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 17$
	<b>Rotirea maximă (expresia 5.98)</b>	$\varphi_{\max} = \frac{6 \cdot (1 \cdot 10^3)^3 + 3 \cdot 14 \cdot 10^3 \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 328 \cdot 10^4}$ $\varphi_{\max} = 0,0121 \text{ rad}$ $\varphi_{1\max} = 0,69^\circ$
	<b>Săgeata maximă (expresia 5.100)</b>	$v_{\max} = \frac{3 \cdot 6 \cdot (1 \cdot 10^3)^4 + 8 \cdot 14 \cdot 10^3 \cdot (1 \cdot 10^3)^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 328 \cdot 10^4}$ $v_{\max} = 8,25 \text{ mm}$

În Tabelul 5.18 s-au centralizat câteva cazuri sugestive de grinzi supuse unor încărcări simple pentru care s-au evidențiat formulele de calcul a rotirii și săgeții (sau deplasarea) maxime.

Tabelul 5.18. Formule de calcul a deformațiilor pentru grinzi simplu solicitate la încovoiere plană (extras din [2])

Modul de rezemare și de încărcare a grinzii	Ecuții necesare	
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = F; \quad M_1 = -F \cdot l;$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = F \cdot x - F \cdot l$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = F \cdot l - F \cdot x$
	<b>Rotirea maximă (pentru x = l)</b>	$\varphi_{\max} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot EI_z}$
	<b>Săgeata maximă (pentru x = l)</b>	$v_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot EI_z}$
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{F \cdot l^3}{16} \left( \frac{x}{l} - \frac{4 \cdot x^3}{3 \cdot l^3} \right)$
	<b>Rotirea maximă (pentru x = 0)</b>	$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot EI_z}$
	<b>Săgeata maximă (pentru x = l/2)</b>	$v_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI_z}$
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = q \cdot l; \quad M_1 = -\frac{q \cdot l}{2};$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{l}{2}$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot l \cdot x + \frac{q \cdot l^2}{2}$

	<b>Rotirea maximă</b> (pentru $x = l$ )	$\varphi_{\max} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot EI_z}$
	<b>Săgeata maximă</b> (pentru $x = l$ )	$v_{\max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot EI_z}$
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = V_2 = \frac{q \cdot l}{2}$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = q \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot x$
	<b>Rotirea maximă</b> (pentru $x = l/2$ )	$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_z}$
	<b>Săgeata maximă</b> (pentru $x = 0$ )	$v_{\max} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI_z}$
	<b>Reacțiuni</b>	$V_1 = 0; \quad M_1 = -M_i$
	<b>Momentul încovoietor în secțiunea (x)</b>	$M(x) = M_i$
	<b>Ecuția f.m.d.</b>	$I_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M_i$
	<b>Rotirea maximă</b> (pentru $x = l$ )	$\varphi_{\max} = \frac{M \cdot l}{EI_z}$
	<b>Săgeata maximă</b> (pentru $x = l$ )	$v_{\max} = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot EI_z}$

#### 5.5.2.2. Metoda identificării constantelor arbitrare (sau metoda Clebsch)

Avantajul metodei constă în faptul că numărul constantelor de integrare se reduce la 2, indiferent de numărul intervalelor existente pe grindă. Aplicarea metodei necesită respectarea cu strictețe a următoarelor reguli:

- Abscisele secțiunilor se măsoară de la aceeași origine, de regulă capătul din stânga al grinzii
- Expresia momentului încovoietor dintr-un interval oarecare trebuie să conțină toți termenii din expresia momentului încovoietor din intervalul anterior
- Un moment concentrat ( $M_0$ ) se introduce în expresia momentului încovoietor sub forma  $M_0 \cdot (x - l_i)^0$
- La integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate, parantezele de forma  $(x - l_i)^n$  nu se desfac, ci se integrează ca și o nouă variabilă.

Aplicația 5-8. Pentru grinda simplu rezemată cu lungimea ( $l$ ) și solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată în punctul 3, respectiv de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) care acționează pe lungimea totală a grinzii (Figura 5.48). Utilizând metoda Clebsch, se propune să se calculeze deformațiile: rotirile maxime ( $\varphi_{1\max}$ ,  $\varphi_{2\max}$ ) care se produc pe capetele grinzii și, respectiv, săgeata maximă ( $v_{\max}$ ) care se produce la mijlocul deschiderii grinzii.

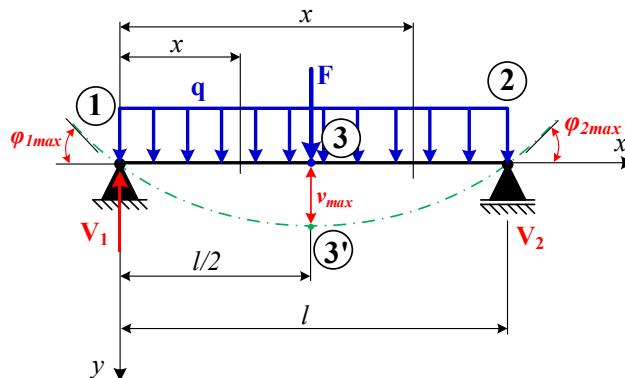


Fig. 5.48. Grindă solicitată la încovoiere plană

Rezolvare. Pentru aplicarea acestei metode, este necesar să se calculeze reacțiunile din reazeme utilizând ecuațiile de echilibru statice:

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0 &\Rightarrow \frac{F \cdot l}{2} + \frac{q \cdot l^2}{2} - V_2 \cdot l = 0 \\ V_2 &= \frac{F}{2} + \frac{q \cdot l}{2} \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow V_1 \cdot l - \frac{F \cdot l}{2} - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0 \\ V_1 = V_2 &= \frac{F}{2} + \frac{q \cdot l}{2} \end{aligned}$$

Conform regulilor metodei Clesch, pe fiecare interval se scriu expresiile momentelor de încovoiere  $M(x)$ , parcurgând grinda de la stânga la dreapta, păstrându-se astfel aceeași origine a secționării grinzii (punctul 1), Figura 5.48. Se obține:

$$M(x)_{1-3} = V_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (A5.8-1)$$

$$M(x)_{3-2} = V_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - F \left( x - \frac{l}{2} \right) \quad (A5.8-2)$$

Ecuția diferențială a f.m.d. în formă generală este:

$$EI_z \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x)$$

unde modulul de rigiditate la încovoiere ( $EI_z$ ) este constant.

Expresiile momentelor (A5.8-1) și (A5.8-2) se introduc în ecuația diferențială generală a f.m.d. și se obțin ecuațiile diferențiale a fibrei medii deformată pentru grinda dată:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q \cdot x^2}{2} - V_1 \cdot x \quad (\text{A5.8-3})$$

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q \cdot x^2}{2} - V_1 \cdot x + F \left( x - \frac{l}{2} \right) \quad (\text{A5.8-4})$$

Se integrează succesiv ecuațiile diferențiale (A5.8-3) și (A5.8-4) și se obțin expresiile rotirii și săgeții pentru intervalele 1 – 3 și 3 – 2, astfel:

Pentru intervalul 1 – 3:

▪ *Expresia rotirii:*

$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - V_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (\text{A5.8-5})$$

▪ *Expresia săgeții:*

$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - V_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + D_1 \quad (\text{A5.8-6})$$

Pentru intervalul 3 – 2:

▪ *Expresia rotirii:*

$$EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - V_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{F \cdot \left( x - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + C_2 \quad (\text{A5.8-7})$$

▪ *Expresia săgeții:*

$$EI_z \cdot v = \frac{q \cdot x^4}{24} - V_1 \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{F \cdot \left( x - \frac{l}{2} \right)^3}{6} + C_2 \cdot x + D_2 \quad (\text{A5.8-8})$$

Pentru determinarea constantelor de integrare  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  se impune *condiția de continuitate și netezime* a fibrei medii deformată, astfel:

(a) În punctul de hotar dintre două intervale succesive, rotirile sunt egale:

▪ pentru  $x = l/2$ :

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)_{1-3} = \left( \frac{dv}{dx} \right)_{3-2}$$

Se egalează expresiile (A5.8-5) și (A5.8-7). Se obține:

$$\frac{q \cdot x^3}{6} - V_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{q \cdot x^3}{6} - V_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{F \cdot \left( x - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + C_2 \quad (\text{A5.8-9})$$

Prin egalarea celor două expresii se obține:

$$C_1 = C_2 = C$$

(b) În punctul de hotar dintre două intervale succesive, săgețile sunt egale:

▪ pentru  $x = l/2$ :

$$(v)_{1-3} = (v)_{3-2}$$

Se egalează expresiile (A5.8-6) și (A5.8-8). Se obține:

$$\frac{q \cdot x^4}{24} - V_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + D_1 = \frac{q \cdot x^4}{24} - V_1 \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{F \cdot \left( x - \frac{l}{2} \right)^3}{6} + C_2 \cdot x + D_2$$

Prin egalarea celor două expresii se obține:

$$D_1 = D_2 = D$$

Astfel, prin aplicarea acestei metode, cele patru constante de integrare  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  se reduc la doar două constante de integrare,  $C$  și  $D$ . Pentru determinarea acestora se impun condițiile la limită, respectiv următoarele condiții pe rezeme:

(c) Pentru  $x = 0$  rezultă că deplasarea verticală din punctul 1 este nulă (este adevărat pentru că reazemul fix nu permite deplasarea pe direcție verticală, după axa  $y$ ):

▪ pentru  $x = 0 \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{\text{(exp. A5.8-6)}} D = 0$

(d) Pentru  $x = l$  rezultă că deplasarea verticală din punctul 2 este nulă (este adevărat pentru că reazemul mobil nu permite deplasarea pe direcție verticală, după axa  $y$ ):

▪ pentru  $x = l \Rightarrow v = 0 \xrightarrow{\text{(exp. A5.8-8)}} \text{se obține:}$

$$\frac{q \cdot l^4}{24} - V_1 \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{F \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + C \cdot l = 0$$

$$C = \frac{1}{l} \cdot \left( V_1 \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{q \cdot l^4}{24} - \frac{F \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} \right) \quad (\text{A5.8-10})$$

În expresia (A5.8-10) se înlocuiește expresia reacțiunii verticale ( $V_1$ ). După efectuarea calculelor se obține relația de calcul pentru constanta de integrare  $C$  sub forma:

$$C = \frac{F \cdot l^2}{16} + \frac{q \cdot l^3}{24}$$

Odată cunoscute constantele de integrare,  $C$  și  $D$ , se pot determina deformațiile maxime pentru grinda dată. Valoarea maximă a rotirilor este în cele două reazeme simple (punctele 1 și 2) pentru  $x = 0$ , iar valoarea maximă a săgeții este la mijlocul grinzii, pentru  $x = l/2$  (punctul 3). Se obține:

▪ pentru  $x = 0$ :

▪ *Rotirea*

(din ecuația A5.8-6):

$$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{V_1 \cdot x^2}{2} + C \right)$$

$$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{F \cdot l^2}{16} + \frac{q \cdot l^3}{24} \right) \quad (\text{A5.8-11})$$

▪ pentru  $x = l/2$ :

▪ *Săgeata*

(din ecuația A5.8-7):

$$v_{\max} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{V_1 \cdot x^3}{6} + C \cdot x \right)$$

$$v_{\max} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384} + \frac{F \cdot l^3}{48} \right) \quad (\text{A5.8-12})$$

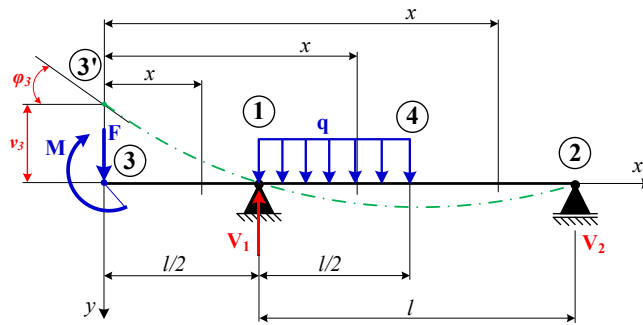
*Calcul teoretic:* Pentru grinda simplu rezemată din Figura 5.48 se cunosc următoarele mărimi:  $q = 6$  kN/m;  $F = 14$  kN;  $l = 1$  m;  $I_z = 15,63 \cdot 10^4$  mm<sup>4</sup>;  $E = 2 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>. Înlocuind aceste valori în relațiile deduse anterior, s-au determinat rotirea și săgeata maximă iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.19.

**Tabelul 5.19.** Rezultatele teoretice obținute pentru grinda reală

<b>Rotirea maximă</b>	$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 15,63 \cdot 10^4} \left( \frac{14 \cdot 10^3 \cdot (10^3)^2}{16} + \frac{6 \cdot (10^3)^3}{24} \right)$ $\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = 0,0359 \text{ rad}$ $\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = 2,06^\circ$
-----------------------	---

<b>Săgeata maximă</b>	$v_{\max} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 15,63 \cdot 10^4} \left( \frac{5 \cdot 6 \cdot (10^3)^4}{384} + \frac{14 \cdot 10^3 \cdot (10^3)^3}{48} \right)$ $v_{\max} = 11,81 \text{ mm}$
-----------------------	--

*Aplicația 5-9.* Pentru grinda simplu rezemată și solicitată la încovoiere plană ca în Figura 5.49 se cere să se calculeze rotația și săgeata în capătul liber (punctul 3) utilizând metoda Clebsch.



**Fig. 5.49.** Grindă solicitată la încovoiere plană

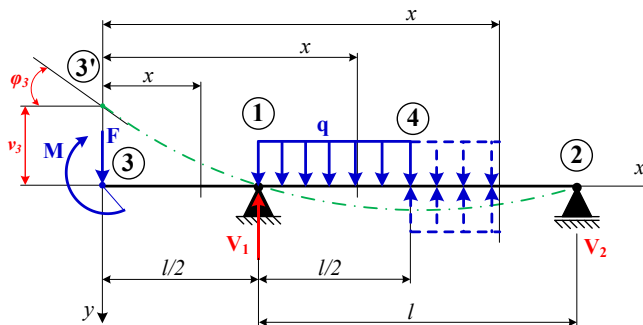
*Rezolvare.* Ca și în exemplul anterior, este necesar să se calculeze reacțiunile din reazeme utilizând ecuațiile de echilibru static:

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M - \frac{F \cdot l}{2} + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - V_2 \cdot l = 0$$

$$V_2 = \frac{1}{l} \left( M - \frac{F \cdot l}{2} + \frac{q \cdot l^2}{8} \right)$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M - F \left( \frac{l}{2} + l \right) + V_1 \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \left( l - \frac{l}{2} \right) = 0$$

$$V_1 = \frac{1}{l} \left[ F \left( \frac{l}{2} + l \right) - M + q \cdot \frac{l}{2} \left( l - \frac{l}{4} \right) \right]$$



**Fig. 5.50.** Grindă solicitată la încovoiere plană – Momentele de încovoiere în secțiuni

Se scriu expresiile momentelor de încovoiere  $M(x)$ , pentru fiecare interval, parcurgând grinda de la stânga la dreapta, păstrând-se astfel aceeași origine a secționării grinzii (punctul 3). Se ține cont de regulile impuse de metodă și se obține:

$$M(x)_{3-1} = -F \cdot x + M \cdot x^0 \tag{A5.9-1}$$

$$M(x)_{1-4} = -F \cdot x + M \cdot x^0 + V_1(x - l/2) - q \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} \tag{A5.9-2}$$

$$M(x)_{4-2} = -F \cdot x + M \cdot x^0 + V_1(x - l/2) - q \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} + q \cdot \frac{(x - l)^2}{2} \tag{A5.9-3}$$



**Observație:** (1) Una din regulile metodei menționează că, expresia momentului de încovoiere de pe intervalul curent trebuie să conțină expresia momentului de încovoiere de pe intervalul anterior. Astfel, ca expresia momentului pe intervalul 1-4 să se regăsească în expresia momentului pe intervalul 4-2, sarcina ( $q$ ) se prelungește până în secțiune, apoi se scade cantitatea adăugată, fiind reprezentată cu linii întrerupte în Figura 5.50, respectiv, este ultimul termen din expresia A5.9-3, ținându-se cont de convenția de semn pentru momentul încovoietor.

Ecuția diferențială a f.m.d. în formă generală este:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = -M(x)$$

unde, rigiditatea la încovoiere ( $EI_z$ ) este constantă.

Expresiile momentelor (A5.9-1÷A5.9-3) se introduc în ecuația diferențială a f.m.d. și se obțin ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate pentru grinda dată:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = F \cdot x - M \cdot x^0 \quad (\text{A5.9-4})$$

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = F \cdot x - M \cdot x^0 - V_1 \cdot (x - l/2) + q \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} \quad (\text{A5.9-5})$$

$$EI_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = F \cdot x - M \cdot x^0 - V_1(x - l/2) + q \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} - q \cdot \frac{(x - l)^2}{2} \quad (\text{A5.9-6})$$

Se integrează succesiv ecuațiile diferențiale (A5.9-4÷A5.9-6) și se obțin expresiile rotirii și săgeții corespunzătoare celor trei intervale, astfel:

Pentru intervalul 3 – 1:

▪ *Expresia rotirii:*  $EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{F \cdot x^2}{2} - M \cdot x + C \quad (\text{A5.9-7})$

▪ *Expresia săgeții:*  $EI_z \cdot v = \frac{F \cdot x^3}{6} - M \cdot \frac{x^2}{2} + C \cdot x + D \quad (\text{A5.9-8})$

Pentru intervalul 1 – 4:

▪ *Expresia rotirii:*  $EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{F \cdot x^2}{2} - M \cdot x - V_1 \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} + q \cdot \frac{(x - l/2)^3}{6} + C \quad (\text{A5.9-9})$

▪ *Expresia săgeții:*  $EI_z \cdot v = \frac{F \cdot x^3}{6} - M \cdot \frac{x^2}{2} - V_1 \cdot \frac{(x - l/2)^3}{6} + q \cdot \frac{(x - l/2)^4}{24} + C \cdot x + D \quad (\text{A5.9-10})$

Pentru intervalul 4 – 2:

▪ *Expresia rotirii:*  $EI_z \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{F \cdot x^2}{2} - M \cdot x - V_1 \cdot \frac{(x - l/2)^2}{2} + q \cdot \frac{(x - l/2)^3}{6} - q \cdot \frac{(x - l)^3}{6} + C \quad (\text{A5.9-11})$

▪ *Expresia săgeții:*  $EI_z \cdot v = \frac{F \cdot x^3}{6} - M \cdot \frac{x^2}{2} - V_1 \cdot \frac{(x - l/2)^3}{6} + q \cdot \frac{(x - l/2)^4}{24} - q \cdot \frac{(x - l)^3}{6} + C \cdot x + D \quad (\text{A5.9-12})$

**Observație:** (1) Știind că vor rămâne doar două constante de integrare indiferent de numărul intervalelor, în expresiile (5.223÷5.228) constantele de integrare s-au înlocuit direct cu notațiile  $C$  și  $D$ .

Pentru determinarea constantelor de integrare ( $C$ ,  $D$ ) se impun condiții la limită, adică condiții pentru rezeme:

(a) Pentru  $x = 0,5 \cdot l$  rezultă că deplasarea verticală din punctul 1 este nulă:

▪ pentru  $x = 0,5 \cdot l \Rightarrow v = 0 \quad \xrightarrow{\text{(exp. A5.9-8)}}$

$$\frac{F \cdot (0,5 \cdot l)^3}{6} - \frac{M \cdot (0,5 \cdot l)^2}{2} + 0,5l \cdot C + D = 0$$

$$0,5l \cdot C + D = \frac{M \cdot (0,5 \cdot l)^2}{2} - \frac{F \cdot (0,5 \cdot l)^3}{6} \quad (\text{A5.9-13})$$

(b) Pentru  $x = 1,5 \cdot l$  rezultă că deplasarea verticală din punctul 2 este nulă:

▪ pentru  $x = 1,5 \cdot l \Rightarrow v = 0$  (exp. A5.9-12)

$$\frac{F \cdot (1,5 \cdot l)^3}{6} - \frac{M \cdot (1,5 \cdot l)^2}{2} - \frac{V_1 \cdot (1,5 \cdot l - 0,5 \cdot l)^3}{6} + \frac{q \cdot (1,5 \cdot l - 0,5 \cdot l)^4}{24} - \frac{q \cdot (1,5 \cdot l - l)^4}{24} + 1,5l \cdot C + D = 0$$

$$1,5l \cdot C + D = \frac{M \cdot (1,5 \cdot l)^2}{2} + \frac{F \cdot (1,5 \cdot l)^3}{6} + \frac{V_1 \cdot (1,5 \cdot l - 0,5 \cdot l)^3}{6} - \frac{q \cdot (1,5 \cdot l - 0,5 \cdot l)^4}{24} + \frac{q \cdot (1,5 \cdot l - l)^4}{24} \quad (\text{A5.9-14})$$

Cu expresiile (A5.9-13) și (A5.9-14) rezultă un sistem cu două ecuații de gradul I cu necunoscutele C și D, și cu ajutorul cărora se pot calcula cele două constante de integrare.

Odată cunoscute constantele C și D, se determină rotirea și săgeata corespunzătoare punctului 3:

▪ pentru  $x = 0$ :

▪ *Rotirea*  
(din ecuația A5.9-7):  $\varphi_3 = \frac{C}{EI_z}$  (A5.9-15)

▪ pentru  $x = 0$ :

▪ *Săgeata*  
(din ecuația A5.9-8):  $v_3 = \frac{D}{EI_z}$  (A5.9-16)

*Calcul teoretic:* Pentru grinda simplu rezemată din Figura 5.50 se cunosc următoarele mărimi:  $q = 15$  kN/m;  $F = 3$  kN;  $M = 7$  kN·m;  $l = 1$  m;  $I_z = 207 \cdot 10^4$  mm<sup>4</sup>;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>. Înlocuind aceste valori în formulele (A5.9-13) și (A5.9-14) se calculează constantele de integrare C și D, apoi cu expresiile (A5.9-15) și (A5.9-16) deformațiile din punctul 3. Rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.20.

**Tabelul 5.20.** Rezultatele teoretice obținute pentru grinda reală

<b>Constantele de integrare</b> (din ecuațiile A5.9-13 și A5.9-14)	$C = 5,31 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ $D = -1,8425 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$
<b>Rotirea maximă</b>	$\varphi_3 = \frac{5,31 \cdot 10^3 \cdot (10^3)^2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 207 \cdot 10^4}$ $\varphi_3 = 0,01221 \text{ rad}$ $\varphi_3 = 0,699^\circ$
<b>Săgeata maximă</b>	$v_3 = -\frac{1,8425 \cdot 10^3 \cdot (10^3)^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 207 \cdot 10^4}$ $v_3 = -4,23 \text{ mm}$

### 5.5.2.3. Metoda suprapunerii efectelor

Comparativ cu metodele prezentate anterior, *principiul suprapunerii efectelor* este o tehnică practică care permite determinarea săgețiilor și rotirilor într-o manieră mai rapidă și cu erori de calcul minime. Conceptul ce stă la baza principiului suprapunerii efectelor este unul simplu și anume: *deformațiile într-un anumit punct al unei grinzi produsă de acțiunea simultană a diferitor sarcini exterioare se obține însumând algebric deformațiile din același punct produse de fiecare sarcină exterioară determinate separat* (expresiile generale 5.101, Figura 5.51) [2]:

$$\delta_{\text{total}} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n$$

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n \quad (\text{5.101})$$

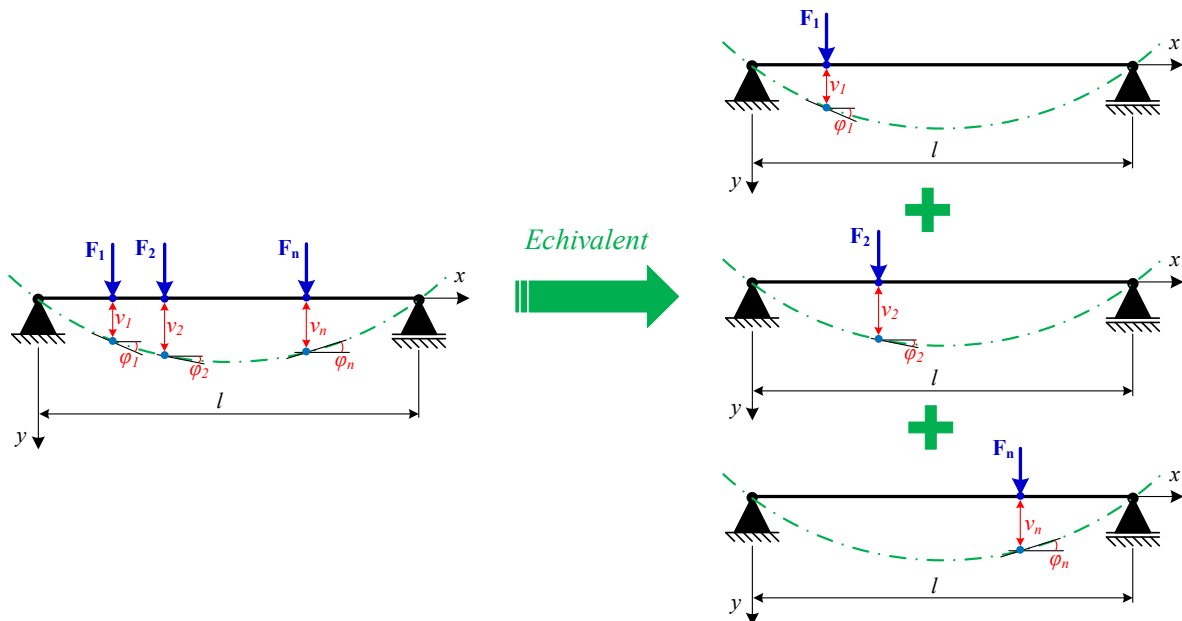


Fig. 5.51. Principiul suprapunerii efectelor pentru calculul deformațiilor la încovoiere plană

Pentru aplicarea acestei metode trebuie să fie îndeplinite următoarele condiții:

- Să existe o relație liniară între sarcinile aplicate și deformațiile grinzii (deplasările/săgețile și rotirile), adică solicitarea grinzii să fie în domeniul elastic pentru care este valabilă legea lui Hooke ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ )
- Condițiile la limită (condițiile în reazeme) pentru cazurile simple trebuie să fie identice cu cele ale problemei reale, complexe.

### Aplicații rezolvate

Aplicația 5-10. Pentru grinda simplu rezemată cu lungimea ( $l$ ) și solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată în punctul 3, respectiv de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) ce acționează pe lungimea totală a grinzii (Figura 5.52), se cere să se calculeze deformațiile maxime ( $\varphi_{1max}$ ,  $\varphi_{2max}$ ,  $v_{max}$ ).

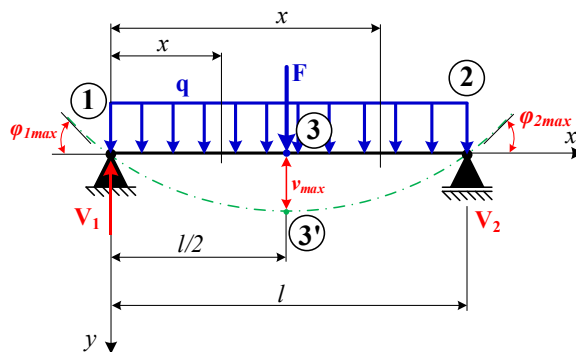


Fig. 5.52. Grinda reală

*Rezolvare.* Conform principiului suprapunerii efectelor, grinda cu încărcare complexă (grinda reală) se descompune în două cazuri simple: *Solicitarea simplă I* în care pe grinda simplu rezemată acționează doar sarcina uniform distribuită ( $q$ ); *Solicitarea simplă II* în care pe aceeași grindă acționează doar forța concentrată ( $F$ ), (Figura 5.52).

Având în vedere Figura 5.53, se observă că pentru fiecare solicitare simplă deformațiile maxime se obțin astfel: rotirile maxime ( $\varphi_{1max}$ ,  $\varphi_{2max}$ ) pe capetele grinzii, iar săgeata maximă ( $v_{max}$ ) este la mijlocul grinzii.

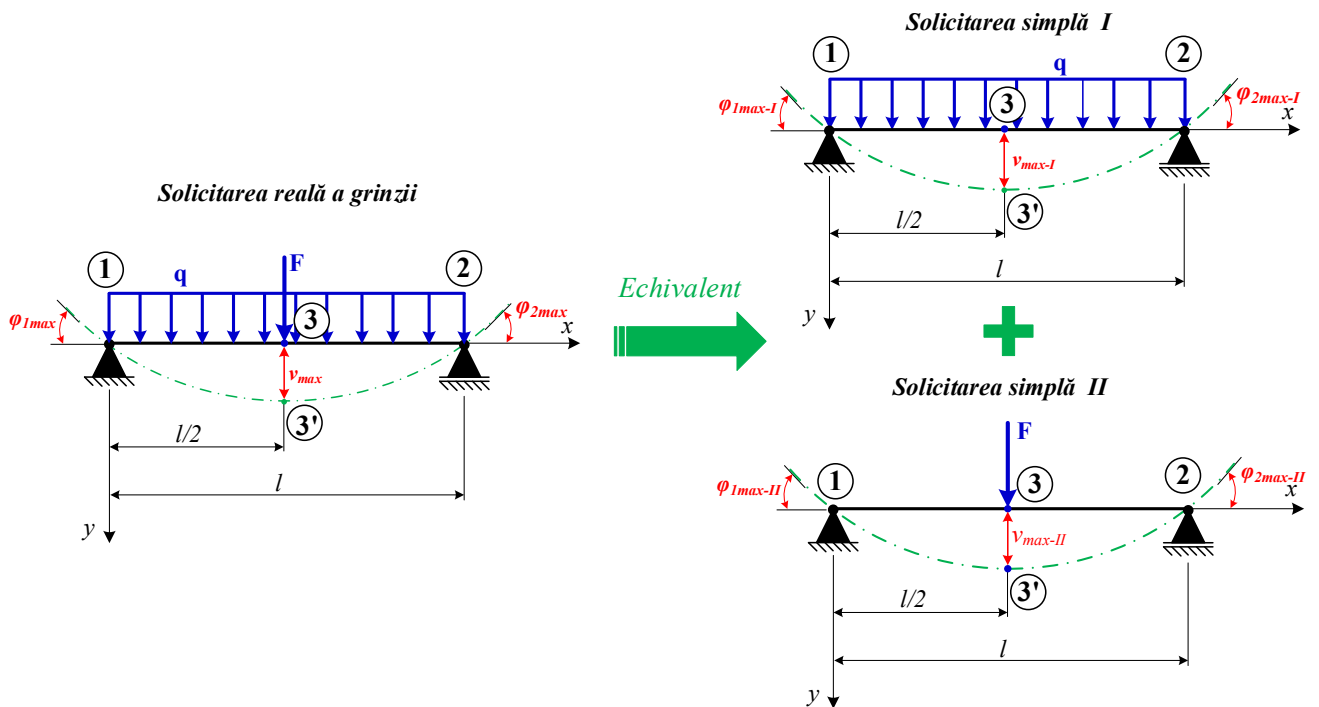


Fig. 5.53. Descompunerea solicitării reale în două solicitări (cazuri) simple

Pentru deducerea relațiilor de calcul a deformațiilor maxime totale corespunzătoare grinzii reale, se consideră expresiile deformațiilor date în Tabelul 5.18, respectiv se scriu relațiile de calcul pentru grinda și solicitarea dată:

Tabelul 5.21. Formule de calcul a deformațiilor maxime pentru solicitările simple

	Rotirea maximă	Săgeata/deplasarea maximă
Solicitarea simplă I	$\varphi_{1\max-I} = -\varphi_{2\max-I} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_z}$	$v_{\max-I} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI_z}$
Solicitarea simplă II	$\varphi_{1\max-II} = -\varphi_{2\max-II} = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot EI_z}$	$v_{\max-II} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI_z}$

Având în vedere (5.101), deformațiile totale în cazul grinzii reale se calculează cu relațiile generale:

$$\varphi_{1\max} = \varphi_{1\max-I} + \varphi_{1\max-II}; \quad \varphi_{2\max} = \varphi_{2\max-I} + \varphi_{2\max-II} \quad (A5.10-1)$$

$$v_{\max} = v_{\max-I} + v_{\max-II} \quad (A5.10-2)$$

Înlocuind în expresiile (A5.10-1) și (A5.10-2) relațiile din Tabelul 5.21 se obțin deformațiile maxime pentru grinda cu încărcarea reală din Figura 5.51:

$$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_z} + \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot EI_z}$$

$$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{l^2}{8 \cdot EI_z} \left( \frac{q \cdot l}{3} + \frac{F}{2} \right) \quad (A5.10-3)$$

$$v_{\max} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI_z} + \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI_z}$$

$$v_{\max} = \frac{l^3}{48 \cdot EI_z} \left( \frac{5 \cdot q \cdot l}{8} + F \right) \quad (A5.10-4)$$

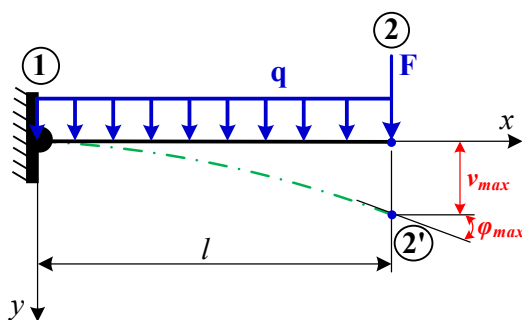
Calcul teoretic: Pentru grinda reală din Figura 5.52 se cunosc următoarele mărimi:  $q = 6 \text{ kN/m}$ ;  $F = 14 \text{ kN}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $I_z = 15,63 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Înlocuind aceste valori în formulele (A5.10-3) și (A5.10-4) s-au determinat rotirea și săgeata maximă ale grinzii, iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.22.

**Tabelul 5.22.** Rezultatele teoretice obținute pentru grinda reală

<b>Rotirea maximă</b>	$\varphi_{1\max} = -\varphi_{2\max} = \frac{1 \cdot (10^3)^2}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 15,63 \cdot 10^4} \left( \frac{6 \cdot 1 \cdot 10^3}{3} + \frac{14 \cdot 10^3}{2} \right)$ $\varphi_{1\max} = 0,0359 \text{ rad}$ $\varphi_{1\max} = 2,06^\circ$
<b>Săgeata maximă</b>	$v_{\max} = \frac{1 \cdot (10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 15,63 \cdot 10^4} \left( \frac{5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8} + 14 \cdot 10^3 \right)$ $v_{\max} = 11,82 \text{ mm}$

**Observație:** (1) Relațiile de calcul ale deformațiilor pentru acest caz de încărcare și rezemare au fost deduse și prin Metoda Clebsch. Prin ambele metode analitice se obțin relații teoretice identice al deformațiilor maxime. De asemenea, valorile teoretice ale deformațiilor sunt identice.

*Aplicația 5-11.* Pentru grinda încadrată cu lungimea ( $l$ ) și solicitată la încovoiere plană de forța concentrată ( $F$ ) aplicată pe capătul liber (punctul 2), respectiv de sarcina uniform distribuită ( $q$ ) care acționează pe lungimea totală a grinzii (Figura 5.54), se cere să se calculeze deformațiile maxime ( $\varphi_{\max}$ ,  $v_{\max}$ ).



**Fig. 5.54.** Grinda reală

*Rezolvare.* Ca și în cazul precedent, grinda cu încărcare complexă (grinda reală) se descompune în două cazuri simple: *Solicitarea simplă I* în care pe grindă acționează doar sarcina uniform distribuită ( $q$ ); *Solicitarea simplă II* în care pe aceeași grindă acționează doar forța concentrată ( $F$ ), (Figura 5.55). Se observă că, pentru fiecare solicitare simplă deformațiile maxime ( $\varphi_{\max}$ ,  $v_{\max}$ ) se obțin pe capătul liber al grinzii.

Pentru deducerea relațiilor de calcul al deformațiilor maxime totale corespunzătoare grinzii reale și având în vedere Tabelul 5.18, se scriu relațiile de calcul:

**Tabelul 5.23.** Formule de calcul a deformațiilor maxime pentru solicitările simple

	<i>Rotirea maximă</i>	<i>Săgeata/deplasarea maximă</i>
<i>Solicitarea simplă I</i>	$\varphi_{\max-I} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot EI_z}$	$v_{\max-I} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot EI_z}$
<i>Solicitarea simplă II</i>	$\varphi_{\max-II} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot EI_z}$	$v_{\max-II} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot EI_z}$

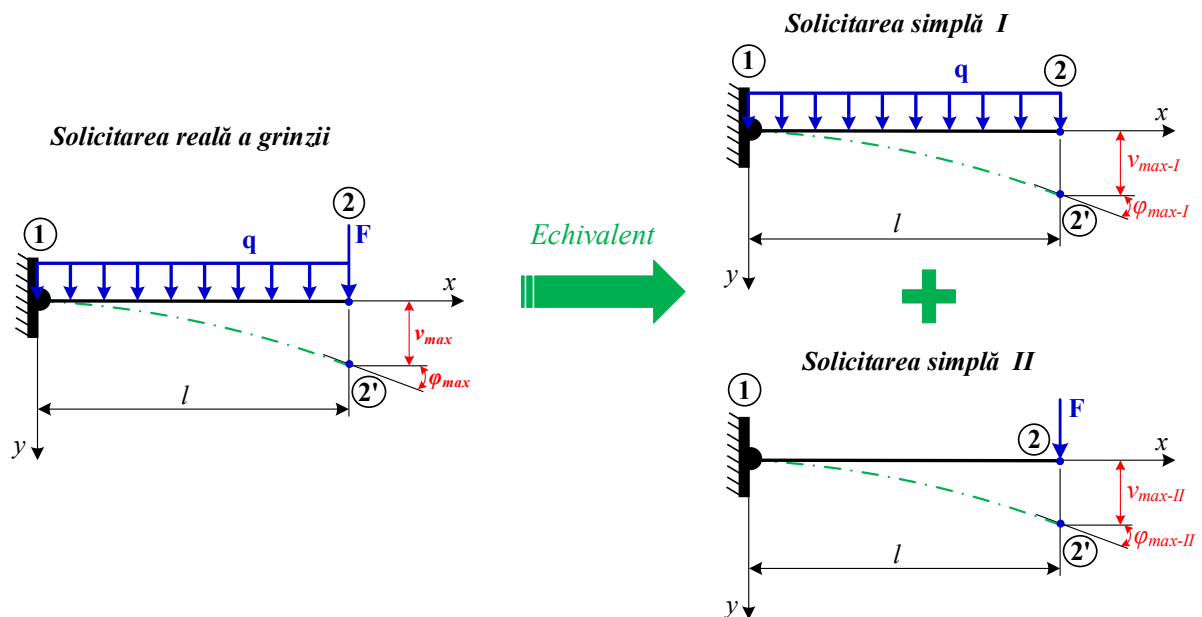


Fig. 5.55. Descompunerea solicitării reale în două solicitări (cazuri) simple

Având în vedere (5.101), deformațiile totale în cazul grinzii reale se calculează cu relațiile generale:

$$\varphi_{\max} = \varphi_{\max-I} + \varphi_{\max-II} \quad (\text{A5.11-1})$$

$$v_{\max} = v_{\max-I} + v_{\max-II} \quad (\text{A5.11-2})$$

Înlocuind în expresiile (A5.11-1) și (A5.11-2) formulele din Tabelul 5.23, se obțin deformațiile maxime pentru grinda cu încărcarea reală din Figura 5.53:

$$\varphi_{\max} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot EI_z} + \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot EI_z}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{l^2}{2 \cdot EI_z} \left( \frac{q \cdot l}{3} + F \right) \quad (\text{A5.11-3})$$

$$v_{\max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot EI_z} + \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot EI_z}$$

$$v_{\max} = \frac{l^3}{EI_z} \left( \frac{q \cdot l}{8} + \frac{F}{3} \right) \quad (\text{A5.11-4})$$

*Calcul teoretic:* Pentru grinda reală din Figura 5.54 se cunosc următoarele mărimi:  $q = 6 \text{ kN/m}$ ;  $F = 14 \text{ kN}$ ;  $l = 1 \text{ m}$ ;  $I_z = 328 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Înlocuind aceste valori în relațiile (A5.11-3) și (A5.11-4) s-au determinat rotirea și săgeata maximă la capătul liber al grinzii, iar rezultatele sunt prezentate în Tabelul 5.24.

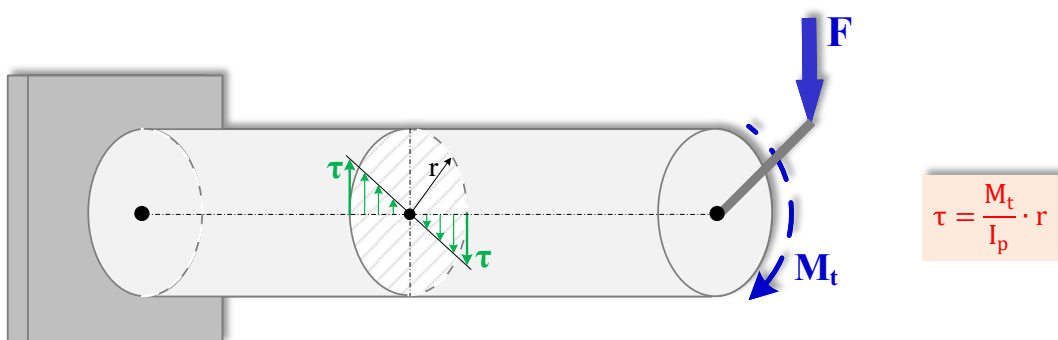
Tabelul 5.24. Rezultatele teoretice obținute pentru grinda reală

<b>Rotirea maximă</b>	$\varphi_{\max} = \frac{1 \cdot (10^3)^2}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 328 \cdot 10^4} \left( \frac{6 \cdot 1 \cdot 10^3}{3} + \frac{14 \cdot 10^3}{2} \right)$ $\varphi_{1\max} = 0,0129 \text{ rad}$ $\varphi_{1\max} = 0,74^\circ$
<b>Săgeata maximă</b>	$v_{\max} = \frac{1 \cdot (10^3)^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 328 \cdot 10^4} \left( \frac{6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8} + \frac{14 \cdot 10^3}{3} \right)$ $v_{\max} = 8,28 \text{ mm}$

**Observație:** (1) Relațiile de calcul ale deformațiilor pentru acest caz de încărcare și rezemare au fost deduse și prin Metoda de integrare directă. Rezultă că, relațiile teoretice sunt identice, respectiv rezultatele teoretice s-au obținut aproximativ egale, erorile fiind sub 10 % (erorile sunt datorită efectuării calculelor).

## 6. TORSIUNEA (RĂSUCIREA) BARELOR CU SECȚIUNEA CIRCULARĂ ȘI INELARĂ

6.1. Noțiuni generale	163
6.2. Calculul momentelor de torsiune și construcția diagramelor de variație	164
6.3. Tensiuni și deformații la torsiunea barelor drepte cu secțiune circulară	165
6.4. Calculul arborilor de transmisie solicițați la torsiune	168
6.4.1. Dimensionarea arborilor în funcție de condiția de rezistență	169
6.4.2. Dimensionarea arborilor în funcție de condiția de deformație	169
6.5. Energia de deformare la solicitarea de torsiune	170



## 6. TORSIUNEA (RĂSUCIREA) BARELOR CU SECȚIUNEA CIRCULARĂ ȘI INELARĂ

### 6.1. Noțiuni generale

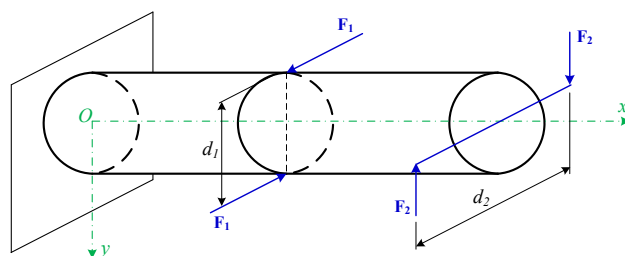
Torsiunea barelor cu secțiunea circulară apare atunci când se aplică un moment de torsiune sau un cuplu determinând răsucirea barei în jurul axei sale longitudinale. Secțiunea transversală rămâne simetrică față de axa sa longitudinală, respectiv nu se deformează în timpul torsiunii, păstrându-și forma circulară. În secțiunea transversală a unei bare circulare supuse la torsiune pură, *momentul de torsiune* ( $M_t$ ) reprezintă singurul efort care se produce. Acesta generează *tensiuni tangențiale* ( $\tau$ ), care sunt maxime la suprafața barei și minime la centru și *deformări unghiulare*, adică bara se rotește în jurul axei sale longitudinale, în funcție de momentul aplicat și caracteristicile materialului.

În cazul secțiunilor circulare, vectorul tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) este orientat pe direcția tangențială a unui cerc imaginar dispus pe secțiunea exterioară a barei. Distribuția tensiunilor tangențiale variază de la valoarea maximă aflată la suprafața exterioară a secțiunii transversale (este tangentă la conturul secțiunii) până la valoarea zero în axa longitudinală (care coincide cu centrul de greutate al secțiunii).

În Figura 6.1a) se prezintă o bară dreaptă cu secțiunea circulară, încastrată la un capăt și încărcată de două sisteme de forțe. Fiecare pereche de două forțe care acționează tangent pe secțiunea transversală a barei, formează un cuplu care tinde să răsucească bara în jurul axei sale longitudinale (axa  $x$ ). Momentele de torsiune ( $M_{t1}$ ) și ( $M_{t2}$ ) se pot calcula ca produsul dintre forță și brațul forței, adică distanța de la forță la centrul de greutate al secțiunii transversale:

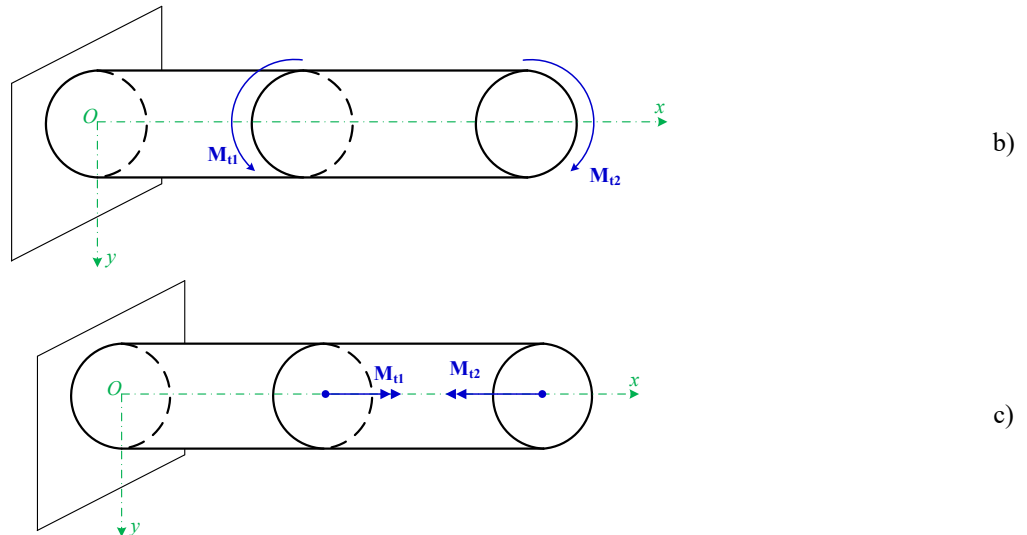
$$\begin{aligned} M_{t1} &= F_1 \cdot \frac{d_1}{2} \\ M_{t2} &= F_2 \cdot \frac{d_2}{2} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Pentru simplificare se vor simboliza momentele de torsiune (răsucire) cu săgeți curbilinii (Figura 6.1b) sau cu vectori (Figura 6.1c).



a)





**Fig. 6.1.** Reprezentarea momentelor de răsucire (torsiune): a) prin forțe concentrate aplicate; b) prin momente de torsiune concentrate aplicate; c) prin vectorul moment de răsucire (torsiune)

În figură s-au notat:  $d_1, d_2$  – brațul forței  $F_1$ , brațul forței  $F_2$ , [mm]  
 $M_{t1}, M_{t2}$  – momente de răsucire sau torsiune, [N·mm].

*Exemple de bare solicate și la torsiune:* arborii și axele de transmisie ale mașinilor, arborii de antrenare ale elicelor vapoarelor, sculele așchietoare (freza, burghiul, șurubelnița), axul volantului etc.

## 6.2. Calculul momentelor de torsiune și construcția diagramelor de variație

În general, momentul de torsiune ( $M_t$ ) nu rămâne constant în lungul unei bare solicate la torsiune. Pentru stabilirea secțiunii transversale cea mai sollicitată a barei, este necesar să se cunoască diagrama de variație a momentelor de torsiune ( $M_t$ ) de-a lungul barei. Momentele de torsiune se calculează ca suma algebrică a tuturor momentelor de torsiune din stânga sau din dreapta secțiunii transversale luate cu semn schimbat. Semnul momentului de torsiune se stabilește alegând un anumit sens de rotație a secțiunii ca fiind pozitiv, iar în sens opus se va considera negativ.

*Exemplu:* Pentru bara circulară sollicitată la torsiune, se cere să se calculeze momentele de torsiune din fiecare secțiune transversală și să se traseze diagrama de variație a acestora (Figura 6.2).

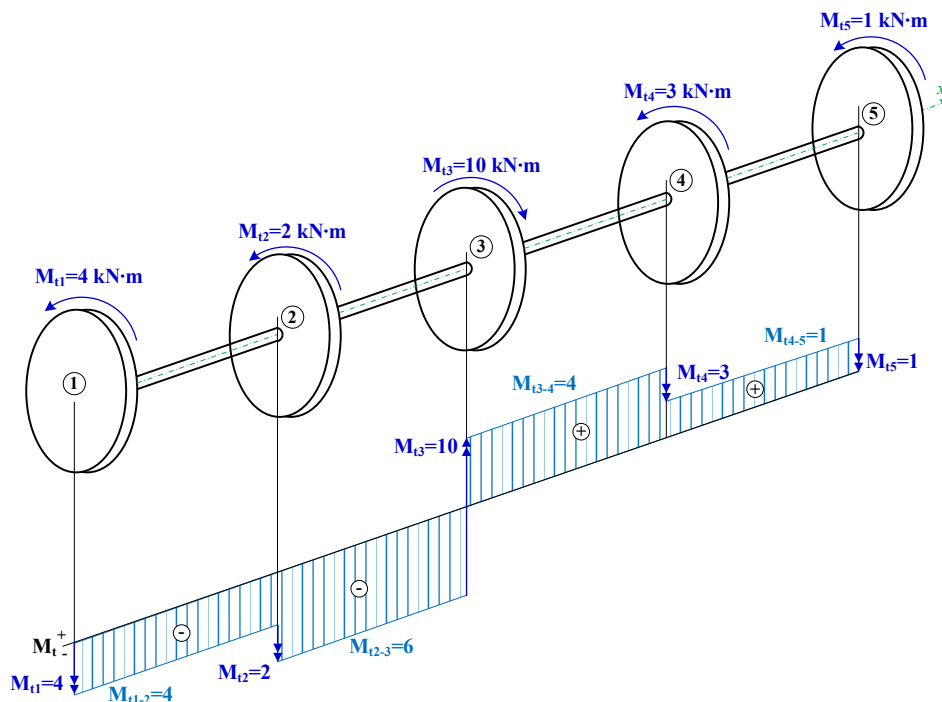


Fig. 6.2. Exemplu de calcul al momentelor de torsiune din secțiune

- Calculul momentelor de torsiune din secțiunile transversale:

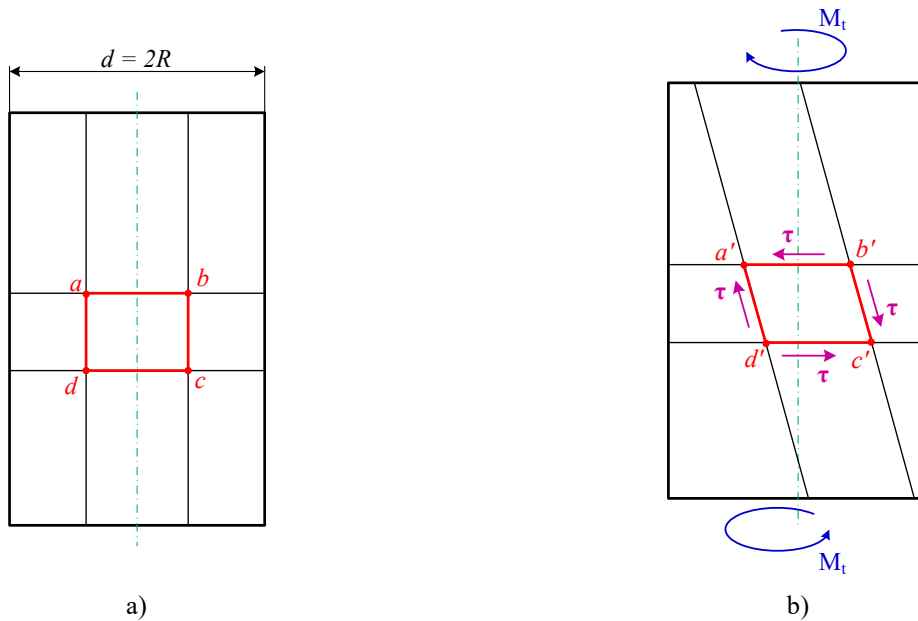
Intervalul 1-2	$M_{t_{1-2}} = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$
Intervalul 2-3	$M_{t_{2-3}} = -4 - 2 = -6 \text{ kN} \cdot \text{m}$
Intervalul 3-4	$M_{t_{3-4}} = -4 - 2 + 10 = +4 \text{ kN} \cdot \text{m}$
Intervalul 4-5	$M_{t_{4-5}} = -4 - 2 + 10 - 3 = +1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Pe baza diagramei de variație din Figura 6.2. se observă că momentul de torsiune ( $M_t$ ) este constant între două puncte succesive. De asemenea, se menționează că în punctele în care acționează momentele de torsiune ( $M_{t1} \div M_{t2}$ ), valorile lor se regăsesc sub formă de salt pe diagrama de variație. Semnele ( $\pm$ ) obținute pentru momentele ( $M_t$ ) se referă la sensul de rotire al arborelui și al deformației unghiulare pe care îl produc aceste momente de torsiune.

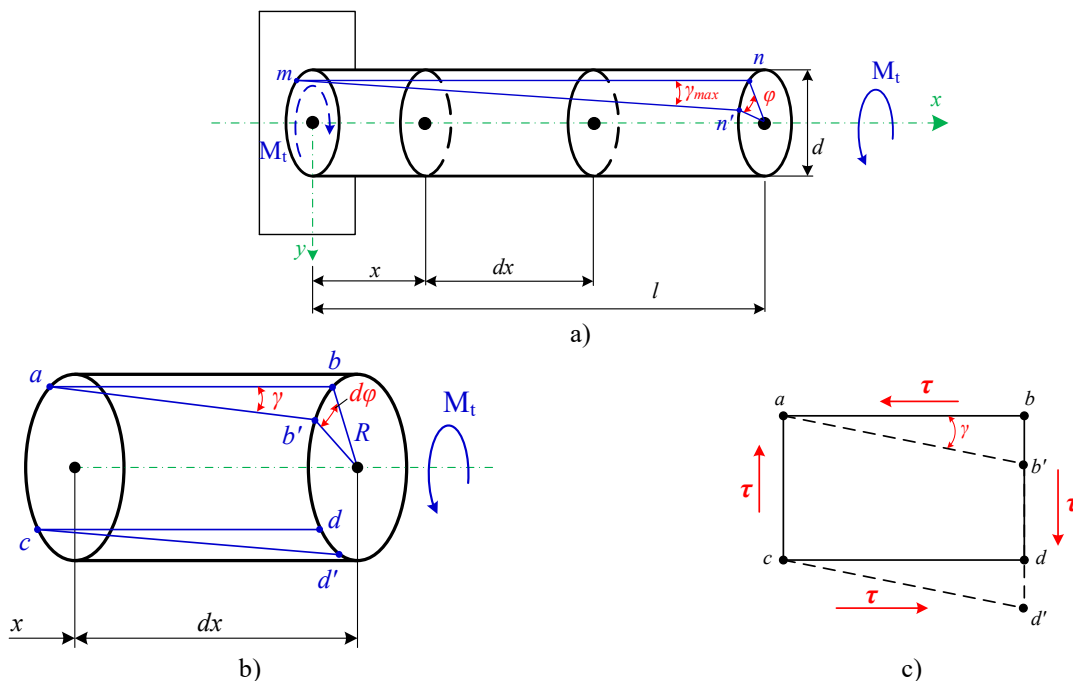
### 6.3. Tensiuni și deformații la torsiunea barelor drepte cu secțiune circulară

Se consideră bara circulară dreaptă din Figura 6.3 reprezentată înainte și după solicitarea la torsiune de două momente de torsiune ( $M_t$ ), egale și de sens contrar și aplicate la capetele libere ale barei. După solicitarea la răsucire a barei de către momentul de torsiune ( $M_t$ ) figura  $abcd$  se deformează, transformându-se în  $a'b'c'd'$ . Pe baza acestei afirmații, respectiv a Figurii 6.3, se poate concluziona:

- Deoarece bara nu își modifică dimensiunile (lungimea și secțiunea), rezultă că în secțiunile transversale nu apar tensiuni normale ( $\sigma$ )
- În cazul răsucirii barelor cu secțiune circulară sau inelară, este valabilă ipoteza lui Bernoulli: *secțiunile transversale plane și normale pe axa barei înainte de solicitare, rămân normale și plane și după solicitare*
- Deoarece după torsiune figura  $abcd$  s-a transformat în  $a'b'c'd'$ , rezultă că în bară se produc numai alunecări specifice ( $\gamma$ ). Aceste alunecări sunt produse de tensiunile tangențiale ( $\tau$ ), care acționează în planul celor două secțiuni transversale și sunt perpendiculare pe raza secțiunilor transversale.



**Fig. 6.3.** Deformația unei bare drepte de secțiune circulară supusă la solicitarea de torsiune: a) înainte de solicitare; b) după solicitare



**Fig. 6.4.** Studiul tensiunilor tangențiale și a deformațiilor la torsiune: a) bară supusă torsiunii; b) element de bară; c) deformațiile specifice la torsiune

Datorită răsucirii, capetele barei se vor roti, unul în raport cu celălalt, cu un unghi notat cu ( $\varphi$ ), numit *unghi de răsucire* sau *de rotire* (Figura 6.4a). Datorită acestei rotiri, o fibră (linia generatoare  $mn$  în Figura 6.4.a) va ajunge în poziția finală  $mn'$ , definită de *unghiul de înclinare* ( $\gamma$ ).

Din bara de lungime ( $l$ ) se extrage un element aflat între două secțiuni transversale, aflate la distanța ( $dx$ ) între ele. Elementul este solicitat la *forfecare pură*, iar *deformația unghiulară* este:

$$\gamma \cong \text{tg}\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (6.2)$$

unde:

$$\begin{aligned} bb' &= R \cdot \text{tg}\varphi \\ ab &= dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

Relația (6.2) devine:

$$\gamma = R \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.4)$$

unde:  $\left| \frac{d\varphi}{dx} \right.$  reprezintă unghiul cu care se rotesc, una față de cealaltă, două secțiuni transversale ale barei, situate la o distanță egală cu unitatea și se numește *răsucire specifică* ( $\theta$ ).

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta \quad (6.5)$$

Deformația unghiulară ( $\gamma$ ) devine:

$$\gamma = R \cdot \theta \Rightarrow \gamma = \frac{R \cdot \varphi}{l} \quad (6.6)$$

Pentru un material elastic, valoarea tensiunii tangențiale se obține din Legea lui Hooke la forfecare:

$$\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow \tau = G \cdot R \cdot \theta \quad (6.7)$$

unde,  $G$  este modulul de elasticitate transversală,  $[N/mm^2]$ .

Răsucirea specifică se mai poate calcula cu relația [2]:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (6.8)$$

unde:  $\left| \begin{array}{l} M_t \text{ este momentul de torsiune, } [N \cdot mm] \\ G \cdot I_p \text{ este modulul de rigiditate la torsiune a barei.} \end{array} \right.$

Pentru bara de lungime totală ( $l$ ) unghiul total de răsucire devine:

$$\varphi = \theta \cdot l \quad (6.9)$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (6.10)$$

unde, momentul de inerție polar pentru secțiunea circulară plină se calculează:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (6.11)$$

Relația de calcul a tensiunii tangențiale se obține înlocuind expresia (6.8) în relația (6.7):

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot R \quad (6.12)$$

Pentru obținerea variației tensiunilor tangențiale, se consideră o fibră oarecare aflată la distanța ( $r$ ) pentru care se scrie relația de calcul a tensiunii tangențiale (Figura 6.5). Tensiunea tangențială sub forma (6.12) se calculează:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad (6.13)$$

■ pentru  $r = 0 \Rightarrow \tau = 0$  (6.14)

■ pentru  $r = R_{max} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R_{max}$  (6.15)

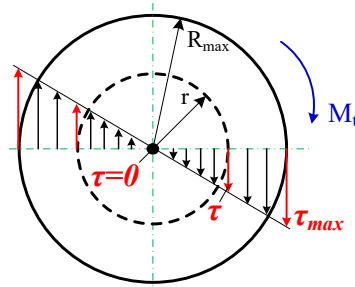


Fig. 6.5. Variația tensiunii tangențiale

Pe baza Figurii 6.5, respectiv a expresiilor (6.14) și (6.15), se observă că tensiunea tangențială ( $\tau$ ) variază liniar, valorile maxime obținându-se pe conturul secțiunii (adică la distanța  $R_{max}$ ), tensiunea tangențială fiind nulă în centrul de greutate al secțiunii transversale.

În relația (6.15) raportul  $\frac{I_p}{R_{max}} = W_p$  și reprezintă modulul de rezistență polar. Astfel, relația (6.14) se mai poate scrie sub forma:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} \quad (6.16)$$

Relația (6.16) permite efectuarea calculului de dimensionare, verificare și de capacitate de încărcare a barelor circulare solicitate la torsiune (Tabelul 6.1).

Tabelul 6.1. Relații de calcul la torsiunea barelor circulare

Dimensionare	Verificare	Momentul de torsiune capabil
$W_{p\_nec} = \frac{M_t}{\tau_a}$	$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a$	$M_{t\_cap} = W_{p\_ef} \cdot \tau_a$

unde:  $M_t, M_{t\_cap}$  este momentul de torsiune din secțiunea transversală, respectiv momentul capabil pentru o bară circulară fără să se producă ruperea (sau fără producerea deformațiilor permanente), [N·mm]  
 $W_{p\_nec}, W_{p\_ef}$  reprezintă modulul de rezistență polar necesar (sau minim), respectiv efectiv (calculat) a secțiunii transversale a barei, [mm<sup>3</sup>]  
 $\tau_{ef}, \tau_a$  este tensiunea tangențială efectivă (sau calculată) în secțiunea transversală, respectiv admisibilă a materialului, [N/mm<sup>2</sup>].

#### 6.4. Calculul arborilor de transmisie solicitați la torsiune

Arborii de transmisie sunt componente critice într-o varietate de mecanisme și sisteme industriale, cum ar fi: motoare, vehicule, echipamente de producție etc. Calculul arborilor de transmisie solicitați la torsiune este util pentru asigurarea rezistenței acestora la momentele de torsiune, prevenirea deformațiilor excesive și a distrugerilor, precum și pentru optimizarea dimensiunii secțiunilor transversale ale arborilor.

Studiul tensiunilor tangențiale ( $\tau$ ) și al deformațiilor unghiulare este condiționat de cunoașterea momentului de torsiune (de răsucire). Cunoscând expresia puterii transmise (P), se poate determina momentul de torsiune ( $M_t$ ) astfel:

$$P = M_t \cdot \omega \Rightarrow M_t \cdot 2\pi \frac{n}{60} \quad (6.17)$$

$$P = M_t \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \quad (6.18)$$

unde  $\left| \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \text{ este viteza unghiulară măsurată în [rad/s], iar (n) reprezintă turația arborelui} \\ \text{măsurată în [rot/min].} \end{array} \right.$

Având în vedere relația (6.18), momentul de torsiune ( $M_t$ ) se poate calcula cu relația:

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (6.19)$$

Dacă se exprimă puterea în cai putere ( $1\text{CP} = 75 \frac{\text{Kgf}\cdot\text{m}}{\text{s}} = 735,45 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ ) relația (6.19) devine:

$$M_t = 7027 \frac{30 P_{\text{CP}}}{\pi n} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (6.20)$$

Dacă în relația (6.20) se introduce puterea ( $P$ ) în [kW] ( $1\text{kW} = 1,36 \text{CP} = 10^3 \text{N}\cdot\text{m/s}$ ), respectiv turația ( $n$ ) în [rot/min], atunci ( $M_t$ ) devine:

$$M_t = 9550 \frac{P [\text{kW}]}{n [\text{rot/min}]} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (6.21)$$

În proiectarea și dimensionarea arborilor de transmisie, pentru asigurarea funcționării corecte, sigure și durabile a ansamblului este necesară respectarea unor criterii fundamentale. Astfel, dimensionarea arborilor de transmisie poate fi realizată fie pe baza *condiției de rezistență*, fie pe baza *condiției de deformație*.

#### 6.4.1. Dimensionarea arborilor în funcție de condiția de rezistență

Această condiție are în vedere capacitatea arborelui de a rezista solicitărilor mecanice (în special momentului de torsiune, dar și momentelor de încovoiere și altor solicitări compuse) fără a ceda structural. Este important ca în orice secțiune a arborelui, tensiunile generate de solicitări să nu depășească limitele admise ale materialului ( $\tau_a$ ) la torsiune. Din această condiție impusă arborelui rezultă diametrul necesar al acestuia ( $d_{nec}$ ):

$$\tau = \frac{M_t}{W_{p_{nec}}} \leq \tau_a \quad (6.22)$$

$$W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16} \quad (6.23)$$

$$\Rightarrow d_{nec(\tau_a)} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}} \quad \text{sau} \quad d_{nec(\tau_a)} = k_{\tau_a} \sqrt[3]{\frac{P}{n}} \quad (6.24)$$

În relația (6.24) ( $k_{\tau_a}$ ) este o constantă a cărei valoare este în funcție de momentul de torsiune ( $M_t$ ) și de rezistența admisibilă a materialului ( $\tau_a$ ). Spre exemplu, pentru un material cu  $\tau_a = 20 \text{ N/mm}^2$  atunci  $k_{\tau_a} \cong 122$  dacă ( $M_t$ ) s-a determinat cu relația (6.20), respectiv  $k_{\tau_a} \cong 135$  dacă ( $M_t$ ) s-a determinat cu relația (6.21).

#### 6.4.2. Dimensionarea arborilor în funcție de condiția de deformație

Această condiție urmărește ca arborii să nu se deformeze excesiv sub acțiunea sarcinilor aplicate, în special în ceea ce privește torsiunea (deformarea unghiulară) și încovoierea. Chiar dacă arborele nu se rupe, o deformație unghiulară peste limita admisibilă poate afecta negativ funcționarea sa în cadrul unui

ansamblu. Astfel, se impune să fie respectată condiția de deformare:  $\theta \leq \theta_a$ , unde  $(\theta)$  reprezintă unghiul de răsucire specifică și valorile admise sunt [2]:

$$\theta_a = (0,25 \div 2,5) \text{ } ^\circ/\text{m} \quad (6.25)$$

Pornind de la relația  $\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}$ , respectiv cu ajutorul relațiilor (6.20) și (6.21) se deduce relația de dimensionare a arborelor ținând cont de deformații, astfel:

$$I_{p_{nec}} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^4}{32} \quad (6.26)$$

$$\Rightarrow d_{nec(\theta_a)} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} \quad \text{sau} \quad d_{nec(\theta_a)} = k_{\theta_a} \sqrt[4]{\frac{P}{n}} \quad (6.27)$$

În relația (6.27) ( $k_{\theta_a}$ ) este o constantă a cărei valoare este în funcție de momentul de torsiune ( $M_t$ ), de modulul de elasticitate transversală ( $G$ ) și de răsucirea specifică admisibilă ( $\theta_a$ ). Spre exemplu, pentru arbore din oțel cu  $G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  și ( $\theta_a$ ) conform cu (6.25), atunci  $k_{\theta_a} = 120 \sim 68$  dacă ( $M_t$ ) s-a determinat cu relația (6.20), respectiv  $k_{\theta_a} = 129 \sim 73$  dacă ( $M_t$ ) s-a determinat cu relația (6.21).

Valorile diametrelor obținute pe baza criteriului de rigiditate (determinată prin limita de deformare unghiulară) sunt mai mari comparativ cu cele determinate pe baza criteriului de rezistență, deoarece condiția de rigiditate impune restricții mai stricte (respectiv constrângerea este situată în interiorul domeniului de deformare elastică). Alegerea diametrelor efective trebuie realizată în funcție de condiția specifică care este determinantă în proiectare.

## 6.5. Energia de deformare la solicitarea de torsiune

Energia potențială specifică de deformare (lucrul mecanic specific interior,  $L_s$ ) poate fi scrisă sub forma:

$$L_s = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (6.28)$$

Energia potențială totală de deformare înmagazinată în bara sollicitată la torsiune, care este egală cu lucrul mecanic interior ( $L_i$ ), se poate calcula:

$$U_d = L_i = \int_V L_s \cdot dV = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV \quad (6.29)$$

Știind că tensiunea tangențială se poate calcula cu relația generală  $\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$ , iar  $dV = dA \cdot dx$ , atunci relația (6.29) devine:

$$U_d = L_i = \int_V \frac{M_t^2 \cdot r^2}{2G \cdot I_p^2} \cdot dA \cdot dx = \frac{M_t^2}{2G \cdot I_p^2} \int_A r^2 \cdot dA \cdot \int_l dx \quad (6.30)$$

După efectuarea calculului, pentru o bară cu secțiune circulară energia de deformare ( $U_d$ ) în cazul solicitării de torsiune se poate calcula cu relația generală, în care produsul ( $G \cdot I_p$ ) poartă denumirea de modul de rigiditate la torsiune:

$$U_d = \frac{M_t^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_p} \quad (6.31)$$

**Aplicația 6-1.** O bară din oțel de secțiune circulară, formată din două tronsoane cu diametre diferite, este încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt, este supusă acțiunii unor momente de torsiune cu valorile date în Figura 6.6. Se cere:

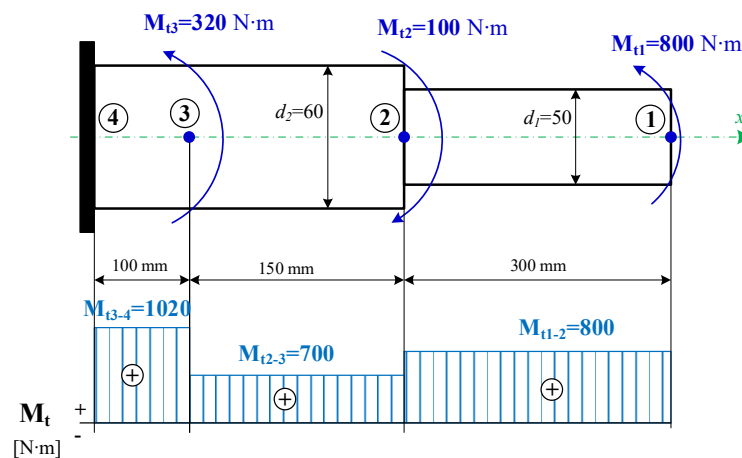
- (a) Calculul momentelor de torsiune pe fiecare interval
- (b) Calculul de verificare al barei, având rezistența admisibilă a materialului  $\tau_a = 55 \text{ N/mm}^2$
- (c) Deformația la răsucire pe intervalele barei, respectiv deformația totală a barei.

*Rezolvare.* (a) *Calculul momentelor de torsiune pe fiecare interval*

Pentru efectuarea calculelor de verificare al barei, respectiv pentru calculul deformațiilor este necesar să se calculeze momentele de torsiune ( $M_t$ ) din secțiunea transversală a secțiunii, respectiv pe fiecare interval, astfel:

Intervalul 1-2	$M_{t_{1-2}} = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$
Intervalul 2-3	$M_{t_{2-3}} = 800 - 100 = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$
Intervalul 3-4	$M_{t_{3-4}} = 800 - 100 + 320 = 1020 \text{ N} \cdot \text{m}$

Pe baza rezultatelor teoretice, s-a trasat diagrama de variație a momentelor de torsiune ( $M_t$ ) (Figura 6.6) și se observă că, secțiunea transversală aferentă intervalului 4 – 3 este maxim sollicitată la torsiune.



**Fig. 6.6.** Diagrama de variație a momentelor de torsiune

(b) *Calculul de verificare* – se utilizează relația generală:

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad \text{unde, pentru secțiunea circulară plină:}$$

$$W_{p_{ef}} = \frac{\pi \cdot d_{ef}^3}{16}, \quad \text{mm}^3$$

Având în vedere că bara studiată este formată din două tronsoane cu diametre diferite ( $d_1, d_2$ ), modulul de rezistență polar ( $W_p$ ) se calculează pentru fiecare interval:

$$W_{p.1} = \frac{\pi \cdot 50^3}{16} = 24543,7 \text{ mm}^3$$



$$W_{p,2} = \frac{\pi \cdot 60^3}{16} = 42411,5 \text{ mm}^3$$

Cunoscând modulele de rezistență polare, se face calculul de verificare pentru fiecare tronson solicitat la torsiune:

$$\begin{array}{l|l} \text{Intervalul 1-2} & \tau_{\text{ef}_{1-2}} = \frac{M_{t1-2}}{W_{p1}} = \frac{800 \cdot 10^3}{24543,7} = 32,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \tau_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă} \\ \text{Intervalul 2-3} & \tau_{\text{ef}_{2-3}} = \frac{M_{t2-3}}{W_{p2}} = \frac{700 \cdot 10^3}{42411,5} = 16,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \tau_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă} \\ \text{Intervalul 3-4} & \tau_{\text{ef}_{3-4}} = \frac{M_{t3-4}}{W_{p2}} = \frac{1020 \cdot 10^3}{42411,5} = 24,05 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \tau_a \Rightarrow \text{tronsonul rezistă.} \end{array}$$

(c) Calculul deformației la răsucire – se utilizează relația:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

pentru care se dă:  $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

Se calculează momentele de inerție polare pentru fiecare diametru al barei circulare:

$$I_{p,1} = \frac{\pi \cdot 50^4}{32} = 613592,31 \text{ mm}^4$$

$$I_{p,2} = \frac{\pi \cdot 60^4}{32} = 1272345,025 \text{ mm}^4$$

Deformația totală a barei ( $\varphi_{\text{total}}$ ) se calculează ca suma algebrică a deformațiilor obținute pe fiecare interval:

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} + \varphi_{3-4}$$

$$\varphi_{\text{total}} = \frac{M_{t1-2} \cdot l_{1-2}}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{t2-3} \cdot l_{2-3}}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_{t3-4} \cdot l_{3-4}}{G \cdot I_{p2}}$$

$$\varphi_{\text{total}} = \frac{800 \cdot 10^3 \cdot 300}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 613592,31} + \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 150}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 1272345,025} + \frac{1020 \cdot 10^3 \cdot 150}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 1272345,025}$$

$$\varphi_{\text{total}} = 0,0073322 \text{ [rad]}$$

$$\varphi_{\text{total}} = \frac{0,0073322 \text{ [rad]} \cdot 180^\circ}{\pi} \Rightarrow \varphi_{\text{total}} = 0,42 \text{ [}^\circ\text{]}$$

*Aplicația 6-2.* Care este diametrul minim al unui arbore de secțiune circulară plină necesar pentru transmiterea unei puteri  $P = 40 \text{ kW}$  la turația de  $n = 700 \text{ rot/min}$  fără a depăși tensiunea tangențială admisibilă,  $\tau_a = 30 \text{ N/mm}^2$ .

*Rezolvare:* Se calculează momentul de torsiune transmis, în funcție de puterea ( $P$ ) și turația ( $n$ ), astfel:

$$M_t = 9550 \cdot \frac{P[\text{kW}]}{n \left[ \frac{\text{rot}}{\text{min}} \right]} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$M_t = 9550 \cdot \frac{40}{700} \Rightarrow M_t = 545,72 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pentru dimensionarea arborelui se utilizează expresiile:

$$W_{p\_nec} = \frac{M_t}{\tau_a}$$

$$W_{p\_nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16}$$

Se egalează expresiile ( $W_{p\_nec}$ ) și se obține relația de calcul a diametrului necesar ( $d_{nec}$ ):

$$\frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}}$$

După înlocuirea valorilor teoretice în relația de mai sus, se obține valoarea diametrului minim necesar:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 545,72 \cdot 10^3}{\pi \cdot 30}} \Rightarrow d_{nec} = 45,24 \text{ mm}$$

Valoarea efectivă a diametrului secțiunii transversale se obține alegând valoarea imediat superioară ( $d_{ef} > d_{nec}$ ) și rezultă o bară circulară cu diametrul efectiv:

$$d_{ef} = 46 \text{ mm}$$

După dimensionarea barei, se face calculul de verificare:

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad \text{unde, pentru secțiunea circulară plină:}$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_{ef}^3}{16}, \quad [mm^3]$$

Modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{\pi \cdot 46^3}{16} \Rightarrow W_p = 19,11 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Se efectuează calculul de verificare:

$$\tau_{ef} = \frac{545,72 \cdot 10^3}{19,11 \cdot 10^3} = 28,66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq \tau_a$$

Din calculul de verificare rezultă că bara cu diametrul efectiv  $d_{ef} = 46 \text{ mm}$  rezistă la momentul de torsiune aplicat.

*Aplicația 6-3.* Pentru o bară circulară încastrată la un capăt, cu lungimea de 2 m și având secțiunea constantă cu  $d_{ef} = 50 \text{ mm}$ , se cere să se calculeze:

(a) Momentul de torsiune capabil care poate fi aplicat pe capătul liber al barei. Se cunoaște rezistența admisibilă a materialului,  $\tau_a = 96 \text{ N/mm}^2$

(b) Energia potențială de deformare cumulată de bară. Se cunoaște modulul de elasticitate transversală al materialului,  $G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ .

*Rezolvare: (a) Calculul momentului de torsiune capabil*

Momentul de torsiune capabil se calculează utilizând formula dată în Tabelul 6.1,  $M_{t\_cap} = W_{p\_ef} \cdot \tau_a$ . Este necesar să se calculeze modulul rezistență polar:

$$W_{p\_ef} = \frac{\pi \cdot 50^3}{16} \Rightarrow W_{p\_ef} = 24,54 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Se calculează momentul de torsiune capabil:

$$M_{t\_cap} = 24,54 \cdot 10^3 \cdot 96 \Rightarrow M_{t\_cap} = 2,35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

*(b) Calculul energiei potențiale de deformare*

Energia potențială de deformare se calculează utilizând relația (6.24) în care, pentru această aplicație, momentul de torsiune ( $M_t$ ) se înlocuiește cu cel capabil calculat la punctul anterior. Se obține expresia generală:

$$U_d = \frac{M_{t\_cap}^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_p}$$

Se calculează momentul de inerție polar al secțiunii transversale:

$$I_p = \frac{\pi \cdot 50^4}{32} \Rightarrow I_p = 61,35 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Energia potențială de deformare din bară se calculează:

$$U_d = \frac{(2,35 \cdot 10^3 \cdot 10^3)^2 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \cdot 61,35 \cdot 10^4} = 112,52 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} = 112,52 \text{ N} \cdot \text{m (sau J)}$$

*Aplicația 6-4 [22].* Se consideră un arbore cu secțiune circulară plină prin intermediul căruia se transmite puterea  $P = 50 \text{ kW}$  a unui motor electric de acționare la o roată dințată. Rezistența admisibilă a materialului la torsiune este  $\tau_a = 45 \text{ N/mm}^2$ . Se cere să se determine diametrul efectiv al arborelui dacă acesta se rotește cu turația  $n_1 = 600 \text{ rot/min}$  (*Cazul 1*), respectiv cu  $n_2 = 3500 \text{ rot/min}$  (*Cazul 2*).

*Rezolvare. Cazul 1.* Se calculează momentul de torsiune transmis, în funcție de puterea ( $P$ ) și turația  $n_1 = 600 \text{ rot/min}$ , astfel:

$$M_t = 9550 \cdot \frac{P[\text{kW}]}{n[\frac{\text{rot}}{\text{min}}]}$$

$$M_{t1} = 9550 \cdot \frac{50}{600} \Rightarrow M_{t1} = 795,83 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pentru calculul diametrului necesar ( $d_{nec}$ ) al arborelui se utilizează expresiile:

$$W_{p\_nec} = \frac{M_t}{\tau_a}; \quad W_{p\_nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16}$$

Se egalează expresiile ( $W_{p\_nec}$ ) și se obține relația de calcul a diametrului necesar ( $d_{nec}$ ):

$$\frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}}$$

După înlocuirea datelor teoretice în relația de mai sus, se obține valoarea diametrului minim necesar:

$$d_{1nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 795,83 \cdot 10^3}{\pi \cdot 45}} \Rightarrow d_{1nec} = 44,82 \text{ mm}$$

Valoarea efectivă a diametrului secțiunii transversale se obține alegând valoarea imediat superioară ( $d_{ef} > d_{nec}$ ) și rezultă diametrul efectiv:

$$d_{1ef} = 45 \text{ mm}$$

*Cazul 2.* În mod similar, se calculează momentul de torsiune ( $M_{t2}$ ) în funcție de puterea motorului (P), însă arborele se rotește cu turația  $n_2 = 3500 \text{ rot/min}$ .

$$M_{t2} = 9550 \cdot \frac{50}{3500} \Rightarrow M_{t2} = 136,42 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se calculează diametrul necesar minim al arborelui:

$$d_{2nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 136,42 \cdot 10^3}{\pi \cdot 45}} \Rightarrow d_{2nec} = 24,90 \text{ mm}$$

Valoarea efectivă a diametrului secțiunii transversale se obține alegând valoarea imediat superioară ( $d_{ef} > d_{nec}$ ) și rezultă diametrul efectiv:

$$d_{2ef} = 25 \text{ mm}$$

În urma efectuării calculelor, rezultă că  $d_{1ef} > d_{2ef}$ , respectiv cu cât viteza de turație (n) este mai mare cu atât dimensiunea arborelui (secțiunea transversală) este mai mică. Acest fapt se datorează următoarelor aspecte:

- Puterea transmisă (P) este constantă, respectiv nu se modifică caracteristicile mecanice ale materialului ( $\tau_a$ )
- Momentul de torsiune ( $M_t$ ) scade la turații mari, conform relației (6.20)
- Diametrul necesar (sau minim) al arborelui depinde de momentul de torsiune ( $M_t$ ) și de caracteristica geometrică ( $W_p$ ), nu direct de puterea motorului (P)
- Când momentul de torsiune scade, solicitarea mecanică (torsiunea) asupra arborelui este mai redusă. În aceste condiții, pentru ca arborele să reziste la torsiune fără a depăși limita admisibilă ( $\tau_a$ ), nu mai este necesar un diametru mare. Astfel, un arbore cu diametru mai mic poate asigura în continuare rezistența cerută, conform relației dintre momentul de torsiune ( $M_t$ ) și diametrul arborelui ( $d$ ):  $\tau = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$ .

## **7. REFERINȚE BIBLIOGRAFICE**

<b>7.1. Bibliografie națională</b>	179
<b>7.2. Bibliografie internațională</b>	180
<b>7.3. Link-uri</b>	180

## 7. REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

### 7.1. Bibliografie națională

- [1] **Bal N.**, *Rezistența Materialelor și Elemente de teoria elasticității*, Editura U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2003.
- [2] **Bejan M.**, *Rezistența Materialelor, Vol. 1, Vol. 2*, Ediția a V-a, Editura AGIR, București, 2009, Editura MEGA, ISBN973-8466-12-1, Cluj-Napoca, 2009.
- [3] **Bodea M.**, *Sudura – Procedee conexe*, Editura UTPRESS, Cluj Napoca, ISBN 978-606-737-143-7, 2016.
- [4] **Buzdugan Gh.**, *Rezistența Materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
- [5] **Chira, N., Bâlc R., Cătărig A.**, ș.a., *Statica construcțiilor. Structuri static determinate – Îndrumător de laborator*, U.T. PRESS, Cluj-Napoca, 2014.
- [6] **Crețu, A.**, *Rezistența Materialelor. Vol. 1*, Lito Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1980.
- [7] **Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez F.**, *Probleme de Rezistența Materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [8] **Dudescu M.C.**, *Rezistența Materialelor – Noțiuni Fundamentale. Solicitări simple*, U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2013.
- [9] **Hangan S., Iordanescu M., Ghermănescu-Kunst M.**, *Mecanica construcțiilor – Curs pentru subingineri*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [10] **Iliescu N., Atanasiu C.**, *Metode tensometrice în inginerie*, Editura AGIR, ISBN 973-720-078-0, București, 2006.
- [11] **Mareș M.**, *Rezistența Materialelor 1 – Sinteze de cursuri, Sinteze de seminar*,  
(\*\*\*) <https://mec.tuiasi.ro/?s=Mares>  
(\*\*\*) [https://mec.tuiasi.ro/wp-content/uploads/2022/09/Rezistenta-materialelor-Conf.-dr.ing\\_.-Marian-Mares-sinteze-de-cursuri\\_RM\\_1\\_M\\_Mares.pdf](https://mec.tuiasi.ro/wp-content/uploads/2022/09/Rezistenta-materialelor-Conf.-dr.ing_.-Marian-Mares-sinteze-de-cursuri_RM_1_M_Mares.pdf)  
(\*\*\*) [https://mec.tuiasi.ro/wp-content/uploads/2023/09/Rezistenta-materialelor-Conf.-dr.ing\\_.-Marian-Mares-sinteze-de-seminar\\_RM1.pdf](https://mec.tuiasi.ro/wp-content/uploads/2023/09/Rezistenta-materialelor-Conf.-dr.ing_.-Marian-Mares-sinteze-de-seminar_RM1.pdf)
- [12] **Radeș M.**, *Rezistența Materialelor I*, Editura Printech, 2010.
- [13] **Sofonea G., Pascu A.M.**, *Rezistența Materialelor I*, Editura Universității “Lucian Blaga” din Sibiu, ISBN (13) 978-973-739-362-3, Sibiu, 2007.
- [14] **Suciu M., Tripa M.S.**, *Rezistența Materialelor*, ediția a V-a revizuită și adăugită, Editura U.T.PRESS, Cluj-Napoca, ISBN 978-606-737-744-6, 2024.  
(\*\*\*) <http://biblioteca.utcluj.ro/editura>
- [15] **Stere N.**, *Rezistența Materialelor și Organe de Mașini*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [16] **Șomotecan M., Hărdău M.**, Bodea S., *Rezistența Materialelor*, Editura U.T.PRESS, Cluj-Napoca, ISBN 973-662-200-2, 2005.
- [17] **Posea N., Talle V., Florian V., Tocaci, E.**, *Mecanica aplicată pentru ingineri*, Editura Tehnică, București, 1984.
- [18] **Tripa P., Hlușcu M.**, *Rezistența Materialelor – Noțiuni fundamentale și Aplicații*, Editura Mirton, Timișoara, 2006.
- [19] **Tripa, M.**, *Rezistența Materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.

## 7.2. Bibliografie internațională

- [20] **Beer F. P., Russel Johnstone E. Jr., DeWolf J.T, Mazurek D. F.**, *Mechanics of Materials*, Seventh Edition, published by McGraw-Hill Education, New York, ISBN 978-0-07-339823-5, 2015.
- [21] **Cervera M., Blanco E.**, *Mechanics of Structures*, © International Centre for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) 2023, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain.
- [22] **Gere J.M., Goodno B.J.**, *Mechanics of Materials*, Seventh Edition, ISBN-13: 978-0-534-55397-5, Cengage Learning, Canada, 2009.
- [23] **Gere J.M., Goodno B.J.**, *Mechanics of Materials*, Eight Edition, ISBN-13:978-1-111-57774-2, Cengage Learning, Canada, 2012.
- [24] **Hibbler, R.C.**, *Mechanics of Materials*, Ninth Edition, Prentice Hall, ISBN 10: 0-13-325442-9, 2014.

## 7.3. Link-uri

- [25] \*\*\*rezistenta - definiție și paradigmă | dexonline
- [26] \*\*\*<https://www.montanstahl.com/downloads/pdf/IPN-Datasheet.pdf>
- [27] \*\*\*<https://www.h-metal.ro/ro/profil-ipe/103>
- [28] \*\*\*<https://pavajeavantaj.ro/product/placa-din-beton-armat-120x120x15cm-acoperire-camin/>
- [29] \*\*\* <https://cormak.ro/strunguri-cnc-cu-batiu-orizantal/7726-strung-cnc-cu-batiu-orizantal-320x1000-cormak.html>
- [30] \*\*\*<https://www.theengineeringcommunity.org/types-of-structural-supports-boundary-conditions/>
- [31] \*\*\*<https://www.theengineeringcommunity.org/types-of-structural-supports-boundary-conditions/>
- [32] \*\*\*<https://ctscivil.com/wp-content/uploads/2020/03/CE-278VideoNotess.pdf>
- [33] \*\*\*[https://www.researchgate.net/publication/372236493\\_Mechanics\\_of\\_Structures](https://www.researchgate.net/publication/372236493_Mechanics_of_Structures)
- [34] \*\*\*<https://www.instron.com/en/products/testing-systems/universal-testing-systems>
- [35] \*\*\*<https://hzo.com/blog/tensile-strength-at-yield-testing-standards-specs-material>
- [36] \*\*\*<https://musculoskeletalkey.com/chapter-26-biomechanics/>
- [37] \*\*\*<https://www.sculeaz.ro/blog/ce-tipuri-de-sudura-exista-si-in-ce-situatii-se-folosesc.html>
- [38] \*\*\* <https://magazin.asro.ro/ro/standard/273721>

