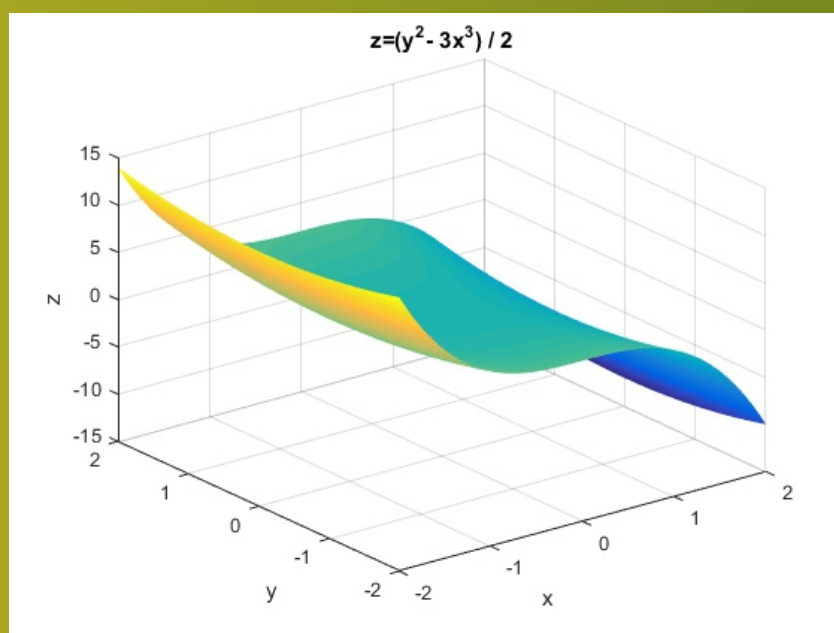


Rozica MOGA

Vicuța NEAGOȘ

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Noțiuni teoretice și aplicații



U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2025
ISBN 978-606-787-812-2

Rozica MOGA

Vicuța NEAGOȘ

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Noțiuni teoretice și aplicații



U.T.PRESS

Cluj - Napoca, 2025

ISBN 978-606-737-812-2



Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Prof.dr.ing. Mircea Ivan
Lector dr. Octavian Mircea Gurzău

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2025 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-812-2

Cuprins

1	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi	4
1.1	Noțiuni introductive	4
1.2	Definiții. Exemple.	5
1.3	Ecuatii rezolvabile prin cuadraturi	7
1.4	Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale	26
1.5	Exerciții rezolvate	38
1.6	Exerciții propuse	70
2	Ecuatii diferențiale de ordin superior	74
2.1	Noțiuni generale. Exemple.	74
2.2	Ecuatii diferențiale liniare de ordinul n	78
2.3	Ecuatii liniare cu coeficienți constanți	80
2.3.1	Ecuatii diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți	80
2.3.2	Ecuatii diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți	83
2.4	Ecuatii diferențiale de ordinul n de tip Euler	88
2.5	Exerciții rezolvate	90
2.6	Exerciții propuse	109
3	Sisteme de ecuații diferențiale	112
3.1	Sisteme de ecuații în forma normală	112
3.2	Sisteme simetrice	118
3.3	Metode numerice	121
3.3.1	Integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale	121
3.3.2	Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordin superior	124
3.3.3	Funcții Matlab de tip <i>ode</i>	128
3.4	Exerciții rezolvate	132
3.5	Exerciții propuse	153

4	Ecuatii cu derivate parțiale	156
4.1	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi	156
4.1.1	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul I liniare	156
4.1.2	Ecuatii cu derivate parțiale cvasiliniare	160
4.1.3	Linii de câmp, suprafețe de câmp	163
4.2	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul doi	165
4.2.1	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniare .	165
4.2.2	Reducerea la forma canonică	166
4.2.3	Ecuatii ale fizicii matematice	172
4.3	Exerciții rezolvate	176
4.4	Exerciții propuse	193
5	Transformata Laplace	196
5.1	Definiții, proprietăți	196
5.2	Transformata Laplace inversă	200
5.3	Aplicații ale transformatei Laplace	203
5.4	Exerciții rezolvate	205
5.5	Exerciții propuse	215
	BIBLIOGRAFIE	218

Capitolul 1

Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

1.1 Noțiuni introductive

Teoria ecuațiilor diferențiale reprezintă un domeniu fundamental al matematicii, având numeroase aplicații în diferite domenii ale științei și tehnicii, precum: fizică, chimie, biologie, astronomie, economie, sociologie.

Numeroase fenomene și procese din natură și societate pot fi modelate matematic prin ecuații diferențiale sau prin ecuații cu derivate parțiale.

Primele contribuții importante în teoria ecuațiilor diferențiale sunt atribuite lui G. Leibniz și I. Newton care, în secolul al XVII-lea, au pus bazele calculului diferențial și integral. În timp ce Leibniz a pornit de la considerente geometrice, fiind preocupat de problema determinării unei curbe atunci când se cunosc proprietăți ale tangentei la curbă, Newton a pornit de la considerente fizice, fiind preocupat de dinamica punctului material, descoperind astfel a doua lege a mecanicii.

Dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale a continuat prin implicarea a tot mai multor matematicieni care au studiat probleme în care intervin mărimi legate între ele prin relații care exprimă variația unei mărimi în raport cu celelalte. Astfel de relații conțin derivate, prin urmare au condus la obținerea ecuațiilor diferențiale.

Definiția 1.1.1. *Se numește ecuație diferențială o ecuație care conține derivate ale unei funcții necunoscute. Dacă funcția necunoscută depinde de o singură variabilă, ecuația se numește ecuație diferențială ordinară iar dacă depinde de mai multe variabile, se numește ecuație cu derivate parțiale.*

Ordinul ecuației diferențiale este ordinul cel mai mare al derivatelor funcției necunoscute, care apar în ecuație.

1.2 Definiții. Exemple.

Definiția 1.2.1. Se numește ecuație diferențială ordinară de ordinul întâi o ecuație de forma

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1.2.1)$$

unde y este funcția necunoscută (de variabilă x) iar f este o funcție de două variabile definită pe un domeniu plan D .

În afară de forma normală (1.2.1), o ecuație diferențială de ordinul întâi poate fi dată sub forma implicită

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

sau sub forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Observația 1.2.2. Dacă se ține cont de interpretarea geometrică a derivatei, rezolvarea ecuației (1.2.1) se poate interpreta astfel: să se determine funcțiile $y = y(x)$ ale căror grafice în punctul $(x, y(x))$ au panta tangentei $f(x, y(x))$.

Definiția 1.2.3. Se numește soluție a ecuației (1.2.1) o funcție $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă care verifică ecuația, adică:

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in I, \quad (x, \phi(x)) \in D.$$

Definiții 1.2.4. Soluția generală a ecuației (1.2.1) este mulțimea soluțiilor ecuației și depinde de o constantă arbitrară. Se numește soluție particulară a ecuației (1.2.1) o soluție care se obține din soluția generală pentru o anumită valoare a constantei. O soluție singulară a ecuației (1.2.1) este o soluție care nu se poate obține din soluția generală dând valori constantei.

Definiții 1.2.5. A integra o ecuație diferențială înseamnă a găsi soluția generală și eventualele soluții singulare. A integra o ecuație diferențială prin cuadraturi înseamnă a afla soluțiile ei folosind calculul integral. Graficul unei soluții a unei ecuații diferențiale se numește curbă integrală.

Exemplul 1.2.6. Soluția generală a ecuației diferențiale $y'(x) = 2x$ este:

$$y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C$$

iar o soluție particulară este $y(x) = x^2 + 5$.

Exemplul 1.2.7. Ecuația diferențială $y = xy' + (y')^2$ are soluția generală $y(x) = Cx + C^2$. Într-adevăr,

$$y - xy' - (y')^2 = Cx + C^2 - xC - C^2 = 0.$$

Dând valori lui C se obțin soluții particulare.

Ecuația are și soluția singulară $y(x) = -\frac{x^2}{4}$, după cum se poate verifica:

$$y - xy' - (y')^2 = -\frac{x^2}{4} - x\left(-\frac{x}{2}\right) - \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 0.$$

Deoarece soluția singulară este o funcție de gradul doi, ea nu se poate obține din soluția generală. Curba integrală corespunzătoare soluției singulare este înfășurătoarea familiei dreptelor obținute la soluția generală.

Problema determinării soluției particulare a ecuației (1.2.1), care verifică o condiție inițială dată, de forma

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D,$$

se numește **problemă Cauchy**.

Teorema următoare asigură existența și unicitatea soluției problemei lui Cauchy asociate ecuației (1.2.1), unde D este o mulțime deschisă și conexă.

Teorema 1.2.8. Dacă funcția f are derivată parțială continuă $\frac{\partial f}{\partial y}$ pe D , atunci pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$ există un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ și o unică funcție $\phi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică:

1. $\phi(x_0) = y_0$,
2. pentru orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $(x, \phi(x)) \in D$,
3. ϕ este soluție pentru ecuația diferențială (1.2.1), adică:

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Problema Cauchy este echivalentă cu aflarea soluției ecuației integrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Exemplul 1.2.9. Să se rezolve problema Cauchy: $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y(1) = 0$.

Soluția generală a ecuației este $y = \arctg x + C$. Din condiția dată rezultă $\arctg 1 + C = 0$, adică, $C = -\frac{\pi}{4}$.

Soluția problemei este: $y = \arctg x - \frac{\pi}{4}$.

1.3 Ecuații diferențiale de ordinul întâi rezolvabile prin cuadraturi

Cele mai simple exemple de ecuații diferențiale de ordinul întâi au forma:

$$y'(x) = f(x),$$

unde f este o funcție continuă. Soluția generală este:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C,$$

unde x_0 este un punct fixat iar C este o constantă arbitrară.

Vom prezenta în continuare câteva tipuri de ecuații de forma (1.2.1) care se pot rezolva prin cuadraturi.

Ecuații cu variabile separabile

O ecuație diferențială cu variabile separate are forma:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \quad (1.3.1)$$

Soluția generală a ecuației (1.3.1) se poate scrie sub forma

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,$$

unde prin semnul de integrare se înțelege o primitivă a fiecărei funcții.

O ecuație diferențială cu variabile separabile (EVS) are forma:

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad (1.3.2)$$

unde f și g sunt funcții continue.

Dacă $g(y) \neq 0$, atunci ecuația (1.3.2) se scrie sub forma:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Prin integrare se obține soluția generală a ecuației.

Dacă y_0 este soluție pentru $g(y) = 0$, atunci ecuația (1.3.2) admite soluția singulară $y = y_0$.

Exemplul 1.3.1. Să se integreze ecuația $xy' + y^2 = 0$.

Soluție: Ecuația se scrie echivalent:

$$x dy + y^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy + \frac{1}{x} dx = 0,$$

de unde, prin integrare, se obține soluția generală:

$$-\frac{1}{y} + \ln x = C, \text{ adică, } y = \frac{1}{\ln x - C}.$$

Ecuația dată admite soluția singulară $y = 0$.

Soluție Matlab:

```
>> syms y(x)
y=dsolve(x*diff(y)+y^2==0)
y =
      0
-1/(C1-log(x))
```

O variantă pentru sintaxa Matlab este:

```
y=dsolve('x*Dy+y^2=0','x')
```

Exemplul 1.3.2. Să se rezolve problema Cauchy: $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Să se reprezinte grafic soluția.

Soluție: Ecuația se scrie $\frac{dy}{dx} = y^2$. Se separă variabilele și se integrează.

$$\frac{1}{y^2} dy = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C} \quad (\text{soluția generală})$$

Din condiția $y(0) = 1$ rezultă $C = -1$. Soluția problemei este:

$$y = -\frac{1}{x - 1}.$$

Folosind comenzile **Matlab**:

```
>> syms y(x)
eqn=diff(y)==y^2;
cond=y(0)==1;
y=dsolve(eqn,cond)
fplot(y)
```

se obține soluția și reprezentarea grafică a acesteia.

```
y =
-1/(x-1)
```

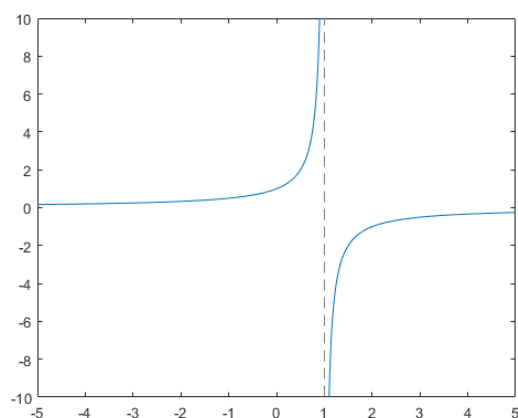


Figura 1.1: Exemplul 1.3.2

Ecuatii diferențiale de forma $y' = f(ax + by + c)$

Folosind schimbarea de funcție:

$$u(x) = ax + by + c,$$

o ecuație diferențială de acest tip se reduce la o ecuație cu variabile separabile.

Exemplul 1.3.3. *Să se rezolve ecuația $y' = (4x + y + 3)^2$.*

Soluție: Se face schimbarea de funcție $4x + y + 3 = u \Rightarrow 4 + y' = u'$.
Rezultă ecuația: $u' = u^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{u^2 + 4} du = dx$. Soluția ecuației date este:

$$\arctg \frac{4x + y + 3}{2} = 2x + C, \text{ adică : } y = 2 \operatorname{tg}(2x + C) - 4x - 3.$$

Instrucțiunile **Matlab**:

```
>> syms y(x)
eq=diff(y)==(4*x+y+3)^2;
y=dsolve(eq)
```

returnează soluția:

```
y=2*tan(C1+2*x)-4*x-3
```

Ecuatii diferențiale omogene (în sens Euler)

Se numește ecuație diferențială de ordinul I omogenă (în sens Euler) o ecuație de forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.3.3)$$

Prin schimbarea de funcție $u = \frac{y}{x}$, ecuația se transformă într-o ecuație cu variabile separabile.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$$

$$xu' + u = f(u), \quad u'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Soluția generală a ecuației (1.3.3) este:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + \ln C, \text{ unde } u = \frac{y}{x}.$$

Observația 1.3.4. Ecuația (1.3.3) admite și soluții singulare atunci când ecuația $f(u) - u = 0$ are soluții.

Observația 1.3.5. Ecuația diferențială (1.3.3) poate fi dată și sub forma:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

unde P și Q sunt funcții omogene de același grad în x și y ¹.

Exemplul 1.3.6. Să se integreze ecuația omogenă:

$$(x^2 + xy - y^2) dx - x^2 dy = 0.$$

Soluție: Ecuația este omogenă de grad 2. Prin schimbarea de funcție:

$$y = xu, \quad dy = u dx + x du,$$

ecuația devine:

$$\begin{aligned} (x^2 + x^2u - x^2u^2) dx - x^2(u dx + x du) &= 0 \mid : x^2 \\ (1 - u^2) dx &= x du. \end{aligned}$$

Separând variabilele și integrând, rezultă:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1 - u^2} \Rightarrow \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{u - 1}{u + 1} = \ln C.$$

¹ P omogenă de grad $r \Leftrightarrow P(tx, ty) = t^r P(x, y)$

Revenind la funcția necunoscută inițială, se obține soluția:

$$x^2 \cdot \frac{y-x}{y+x} = C \Leftrightarrow y = x \frac{x^2 + C}{x^2 - C}.$$

Pentru rezolvarea ecuației cu variabile separabile, s-a efectat împărțirea prin $u^2 - 1$, ceea ce este posibil dacă $u^2 \neq 1$, adică $y \neq \pm x$. Prin înlocuire, se observă că $y = x$ verifică ecuația omogenă, deci este soluție singulară.

Soluție Matlab:

```
>> syms y(x)
y=simplify(dsolve(x^2*diff(y)==x^2+x*y-y^2))
y=
      x
(x*(2*C1*x^2+1))/(2*C1*x^2-1)
```

Ecuații reducibile la ecuații diferențiale omogene

O ecuație de forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

se poate reduce la o ecuație omogenă dacă sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

are soluție unică (x_0, y_0) sau la o ecuație cu variabile separabile dacă sistemul nu are soluții.

În primul caz, se efectuează schimbarea de variabilă și de funcție:

$$\begin{cases} x - x_0 = u \\ y - y_0 = v \end{cases}, \quad v = v(u) \Rightarrow y'(x) = v'(u),$$

iar în al doilea caz, se face o schimbare de funcție (de exemplu, $v = a_1x + b_1y$).

Exemple 1.3.7. a) $y' = \frac{2x-y}{x+2y-5}$ b) $y' = \frac{4x+6y+4}{18x+27y-6}$

Soluții: a) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Notăm $x-1=u$, $y-2=v$, unde $v = v(u) \Rightarrow v' = y'$.

Se obține ecuația omogenă:

$$v' = \frac{2u-v}{u+2v} \Leftrightarrow v' = \frac{2-\frac{v}{u}}{1+2\frac{v}{u}} \xrightarrow{\frac{v}{u}=z} z + uz' = \frac{2-z}{1+2z}.$$

Separând variabilele în ecuația obținută, vom avea: $\frac{1+2z}{1-z-z^2}dz = \frac{2}{u}du$.
Prin integrare rezultă:

$$\ln(z^2 + z - 1) + 2 \ln u = \ln C \Leftrightarrow u^2(z^2 + z - 1) = C.$$

Folosind egalitățile $z = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x-1}$, se obține soluția generală a ecuației date:

$$y^2 - x^2 + xy - 5y = C.$$

Soluție Matlab:

```
>> syms y(x)
eq=diff(y)==(2*x-y)/(x+2*y-5);
y=dsolve(eq)
y=
(5*x^2-10*x+C1+25)^(1/2)/2-x/2+5/2
5/2-(5*x^2-10*x+C1+25)^(1/2)/2-x/2
```

$$\text{b) Sistemul } \begin{cases} 4x + 6y + 4 = 0 \\ 18x + 27y - 6 = 0 \end{cases} \text{ nu are soluție } \left(\frac{4}{18} = \frac{6}{27} \right).$$

Se face schimbarea de funcție $u = 2x + 3y$, de unde rezultă $y' = \frac{u' - 2}{3}$.

Se obține EVS: $\frac{u' - 2}{3} = \frac{2u + 4}{9u - 6} \Rightarrow u' = 2 + \frac{2u + 4}{3u - 2} \Rightarrow u' = \frac{8u}{3u - 2}$.

Separând variabilele și integrând, vom avea:

$$\int \frac{3u - 2}{8u} du = \int dx \Leftrightarrow \frac{3}{8}u - \frac{1}{4} \ln u = x + C.$$

Revenind la funcția necunoscută inițială, va rezulta soluția:

$$9y - 2x - 2 \ln(2x + 3y) = C.$$

Ecuatii diferențiale liniare de ordinul I

Se numește ecuație diferențială liniară de ordinul întâi o ecuație de forma:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad (1.3.4)$$

unde p și q sunt funcții continue pe un interval dat.

Ecuatia (1.3.4) este omogenă dacă $q(x) = 0$ și este neomogenă în caz contrar. În unele cazuri, este posibil să se rezolve ecuația (1.3.4) prin integrarea fiecărui membru, la fel ca în exemplul următor.

Exemplul 1.3.8. Ecuația diferențială liniară:

$$(x^2 + 4)y' + 2xy = 4x$$

se poate scrie sub forma:

$$[(x^2 + 4)y]' = (2x^2)',$$

de unde, prin integrare, rezultă:

$$(x^2 + 4)y = 2x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{2x^2 + C}{x^2 + 4} \quad (\text{soluția generală a ecuației}).$$

Pentru a rezolva ecuația (1.3.4) atunci când integrarea directă nu este posibilă, se folosește teorema următoare.

Teorema 1.3.9. Ecuația (1.3.4) admite factor integrant funcția: $e^{\int p(x)dx}$.

Demonstrație. Folosind notația $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, ecuația (1.3.4) se scrie:

$$(p(x)y(x) - q(x))dx + dy = 0.$$

$$\begin{cases} P(x, y) = p(x)y(x) - q(x) \\ Q(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = p(x)$$

Se obține factorul integrant: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. □

Teorema 1.3.10. Soluția generală a ecuației diferențiale (1.3.4) este:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int \left(e^{\int p(x)dx} \right) q(x) dx + C \right).$$

Demonstrație. Ecuația $y' + p(x)y = q(x)$ se înmulțește cu factorul integrant $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Deoarece $\mu'(x) = p(x)\mu(x)$, rezultă:

$$y'(x)\mu(x) + \underbrace{p(x)\mu(x)}_{\mu'(x)}y(x) = \mu(x)q(x),$$

adică:

$$(y(x)\mu(x))' = \mu(x)q(x).$$

Prin integrare se obține:

$$y(x)\mu(x) = \int \mu(x)q(x)dx.$$

Soluția ecuației (1.3.4) este:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right).$$

□

Exemplul 1.3.11. Să se integreze, folosind factorul integrant, ecuația:

$$y' - \frac{a}{x+1}y = e^x (1+x)^a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Soluție: Factorul integrant este:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{a}{x+1}dx} = e^{\ln(x+1)^{-a}} = (x+1)^{-a}.$$

Înmulțind ecuația dată cu μ , se obține:

$$((x+1)^{-a}y)' = e^x \Big| \int \Rightarrow (x+1)^{-a}y = e^x + C.$$

Soluția generală sub forma explicită este:

$$y(x) = (x+1)^a e^x + C(x+1)^a.$$

Exemplul 1.3.12. Să se rezolve ecuația $y' + 3x^2y = x^2$.

Soluție: $\int p(x)dx = \int 3x^2dx = x^3$, $\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx = \int e^{x^3}x^2dx = \frac{1}{3}e^{x^3}$

Se obține soluția: $y = e^{-x^3} \left(C + \frac{1}{3}e^{x^3} \right)$, adică, $y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3}$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+3*x^2*y=x^2','x')
y=
(C1*exp(-x^3))/3+1/3
```

Exemplul 1.3.13. Să se rezolve problema Cauchy $y' = x^2 + y$, $y(0) = 3$ și să se reprezinte grafic soluția.

Soluție: Folosind teorema 1.3.10, se obține soluția generală:

$$y = Ce^x - x^2 - 2x - 2.$$

Din condiția $y(0) = 3$ rezultă $C = 5$, deci soluția problemei Cauchy este:

$$y = 5e^x - x^2 - 2x - 2.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(diff(y)==x^2+y,y(0)==3)
fplot(y,[0 5])
y =
5*exp(x)-2*x-x^2-2
```

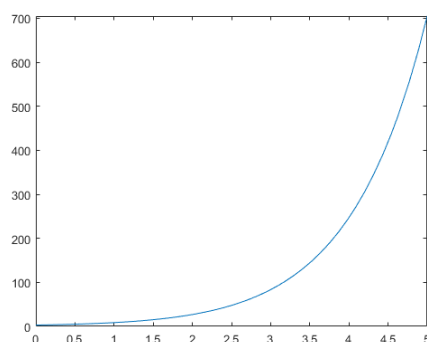



Figura 1.2: Exemplul 1.3.13

Observația 1.3.14. *Soluția generală a ecuației (1.3.4) este de forma:*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

unde $y_0(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ este soluția generală a ecuației liniare omogene, iar $y_p(x)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Soluția y_p se poate afla din y_0 prin metoda variației constantei. Se obține:

$$y_p(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx.$$

Ecuații diferențiale reducibile la ecuații liniare

Ecuația diferențială *de tip Bernoulli* este o ecuație de forma:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (1.3.5)$$

unde p, q sunt funcții continue iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Prin schimbarea de funcție $z = y^{1-\alpha}$, ecuația (1.3.5) devine ecuație diferențială liniară.

Exemplul 1.3.15. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

Soluție: Se împarte ecuația cu y^3 și se obține:

$$y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3.$$

Se notează $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$. Se obține ecuația liniară:

$$\frac{z'}{-2} + 2xz = 2x^3 \Leftrightarrow z' - 4xz = -4x^3,$$

care are soluția $z = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$. Soluția ecuației date este:

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Soluție singulară: $y = 0$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+2*x*y=2*x^3*y^3','x')
y=
0
1/(C1*exp(2*x^2)+x^2+1/2)^(1/2)
-1/(C1*exp(2*x^2)+x^2+1/2)^(1/2)
```

Ecuația diferențială de tip *Riccati* este o ecuație de forma:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (1.3.6)$$

unde p, q, r sunt funcții continue.

Ecuația (1.3.6) se poate rezolva doar dacă se cunoaște o soluție particulară.

Astfel, dacă y_1 este o soluție dată, prin schimbarea de funcție $y = y_1 + \frac{1}{z}$, ecuația se reduce la o ecuație diferențială liniară.

Exemplul 1.3.16. $x^2y' + x^2y^2 + xy - 4 = 0$, $y_1 = -\frac{2}{x}$

Soluție: Notăm $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = \frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$. Ecuația devine:

$$x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2} \right) + x^2 \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \right)^2 + x \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \right) - 4 = 0.$$

Efectuând calculele, se obține ecuația liniară:

$$x^2 z' + 3xz - x^2 = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{3}{x}z = 1, \text{ cu soluția : } z = \frac{1}{x^3} \left(C + \frac{x^4}{4} \right).$$

Din $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ se obține $z = \frac{1}{y + \frac{2}{x}}$. Rezultă că:

$$\frac{1}{y + \frac{2}{x}} = \frac{C}{x^3} + \frac{x}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x} + \frac{4x^3}{4C + x^4}.$$

Se observă că $y_1 = -\frac{2}{x}$ este soluție singulară a ecuației date.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x^2*diff(y)+x^2*y^2+x*y-4==0;
y=dsolve(eqn)
y=
      -2/x
x^3/(x^4/4+C1)-2/x
```

Ecuatii cu diferențială totală exactă

Fie $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, două funcții continue, cu derivate parțiale continue pe domeniul D . Ecuația:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.3.7)$$

este cu diferențială totală exactă (EDTE) dacă este verificată condiția:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Soluția generală a ecuației (1.3.7) este:

$$U(x, y) = C, \text{ unde } U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y)dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t)dt.$$

Observația 1.3.17. Rezolvarea unei ecuații cu diferențială totală exactă se reduce la determinarea unei funcții de două variabile căreia i se cunoaște diferențiala.

Exemplul 1.3.18. Să se integreze ecuația:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Soluție: Notând $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$, obținem $P'_y = Q'_x = 12xy$, deci ecuația este cu diferențială totală exactă.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (3t^2 + 6ty^2)dt + \int_{y_0}^y (6x_0^2t + 4t^3)dt \\ &= (t^3 + 3t^2y^2)|_{x_0}^x + (3x_0^2t^2 + t^4)|_{y_0}^y \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - x_0^3 - 3x_0^2y_0^2 - y_0^4 \end{aligned}$$

Soluția generală sub forma implicită este:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Soluție Matlab:

```
syms x y(x)
eq=3*x^2+6*x*y^2+(6*x^2*y+4*y^3)*diff(y)==0
y=dsolve(eq)
y=
((9*x^4-4*x^3+C1)^(1/2)/2-(3*x^2)/2)^(1/2)
(-(9*x^4-4*x^3+C1)^(1/2)/2-(3*x^2)/2)^(1/2)
-((9*x^4-4*x^3+C1)^(1/2)/2-(3*x^2)/2)^(1/2)
-(-(9*x^4-4*x^3+C1)^(1/2)/2-(3*x^2)/2)^(1/2)
```

Dacă ecuația (1.3.7) nu este cu diferențială totală exactă (EDTE), se poate determina o funcție $\mu(x, y)$ astfel încât ecuația:

$$\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$$

să fie EDTE. Funcția μ se numește **factor integrant**.

În cazuri particulare, factorul integrant depinde doar de x (sau y).

1. $\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$ pentru $f(x) = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$
2. $\mu(y) = e^{\int g(y) dy}$ pentru $g(y) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$.

Exemplul 1.3.19. Să se integreze ecuația $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Soluție: $P(x, y) = x + y^2$, $Q(x, y) = -2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$

Deoarece $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{-2xy} \cdot 4y = \frac{-2}{x} = f(x)$, rezultă că:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Înmulțind ecuația inițială cu factorul integrant $\frac{1}{x^2}$, se obține ecuația cu diferențială totală exactă:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Prin integrare rezultă: $U(x, y) = \ln x - \frac{y^2}{x} + C$, deci soluția ecuației este:

$$\ln x - \frac{y^2}{x} + C = 0.$$

Soluție Matlab:

```
syms x y(x)
eq=x+y^2-2*x*y*diff(y)==0
y=dsolve(eq)
y=
(x*(C1+log(x)))^(1/2)
-(x*(C1+log(x)))^(1/2)
```

Ecuatii diferențiale neexplicitate în raport cu y'

O ecuație diferențială de tip Clairaut are forma:

$$y = xy' + \phi(y'). \quad (1.3.8)$$

Pentru a rezolva ecuația, se notează $y' = p(x)$, apoi se derivează cei doi membri ai ecuației $y = xp + \phi(p)$. Se obține ecuația:

$$p'(x + \phi'(p)) = 0.$$

Din primul caz, $p' = 0$, rezultă $p = C$, de unde obținem soluția generală:

$$y = Cx + \phi(C). \quad (1.3.9)$$

Din al doilea caz, $x + \phi'(p) = 0$, rezultă $x = -\phi'(p)$, de unde obținem soluția singulară (dată parametric):

$$\begin{cases} x = -\phi'(p) \\ y = -p\phi'(p) + \phi(p) \end{cases}. \quad (1.3.10)$$

Exemplul 1.3.20. $y = xy' - y'^2$

Soluție: Se notează: $y' = p \Rightarrow y = xp - p^2$. Prin derivare, se obține:

$$\underbrace{y'}_p = p + xp' - 2pp' \Rightarrow p'(x - 2p) = 0.$$

Din $p' = 0$ rezultă $p = C$, de unde se obține soluția generală:

$$y = Cx - C^2.$$

Din $x - 2p = 0$ rezultă $x = 2p$, $y = 2p^2 - p^2 = p^2$. Soluția singulară este:

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(y==x*diff(y)-diff(y)^2)
y=
      x^2/4
    -C1^2+x*C1

%Pentru reprezentarea grafica a unor solutii
    particulare si a solutiei singulare, vom da
    cateva valori constantei.

t=-2:0.1:2;
x=t; y=t.^2/4;
C1=0.01; y1=C1*x-C1^2;
C2=0.04; y2=C2*x-C2^2;
C3=0.09; y3=C3*x-C3^2;
plot(x,y,'b',x,y1,x,y2,x,y3,'LineWidth',2)
```

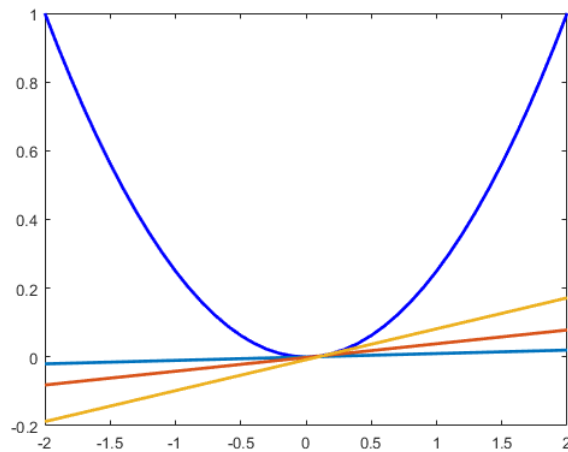


Figura 1.3: Exemplul 1.3.20

O ecuație diferențială *de tip Lagrange* este o ecuație de forma:

$$y = x\phi(y') + \psi(y'). \quad (1.3.11)$$

Pentru a rezolva ecuația, se notează $y' = p(x)$.

Derivând ecuația $y = x\phi(p) + \psi(p)$ rezultă ecuația

$$p = \phi(p) + x\phi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Înmulțind ecuația obținută cu $\frac{dx}{dp}$ se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi cu funcția necunoscută x de variabilă p .

Soluția generală a ecuației (1.3.11) este:

$$\begin{cases} x = f(p, C) \\ y = f(p, C) \cdot \phi(p) + \psi(p) \end{cases}.$$

Dacă p_1 este soluție pentru ecuația $\phi(p) - p = 0$ atunci ecuația (1.3.11) are soluția singulară $y = p_1x + \psi(p_1)$.

Observația 1.3.21. O ecuație diferențială de tip Lagrange mai poate fi dată sub forma $A(y')y + B(y')x + C(y') = 0$.

Exemplul 1.3.22. $y = xy'^2 + y'^2$

Soluție: Notând $y' = p$, ecuația dată se scrie:

$$y = xp^2 + p^2. \quad (1.3.12)$$

Prin derivare, rezultă $p = p^2 + 2xpp' + 2pp'$, adică, $p(p + 2xp' + 2p' - 1) = 0$. Pentru $p = 0$, înlocuind în ecuația (1.3.12), se obține soluția $y = 0$.

Ecuația $p + 2xp' + 2p' - 1 = 0$ se scrie sub forma:

$$2(x + 1)dp + (p - 1)dx = 0. \quad (1.3.13)$$

Pentru $p = 1$, înlocuind în ecuația (1.3.12), se obține soluția $y = x + 1$.

Ecuația cu variabile separabile (1.3.13) se scrie sub forma:

$$\frac{2}{p-1}dp + \frac{1}{x+1}dx = 0,$$

de unde rezultă:

$$2\ln(p-1) + \ln(x+1) = \ln C, \text{ adică, } x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Înlocuind în ecuația $y = xp^2 + p^2 \Leftrightarrow y = p^2(x+1)$, se obține soluția generală a ecuației date (forma parametrică):

$$\begin{cases} x &= \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \\ y &= \frac{p^2 C}{(p-1)^2} \end{cases}.$$

Soluțiile $y = 0$ și $y = x + 1$ sunt soluții singulare.

Pentru a obține soluția generală explicită a ecuației date, se exprimă parametrul p din expresia lui x și se înlocuiește în expresia lui y .

$$(p-1)^2 = \frac{C}{x+1} \Rightarrow p = 1 \pm \left(\frac{C}{x+1}\right)^{1/2} \Rightarrow p^2 = 1 \pm 2\left(\frac{C}{x+1}\right)^{1/2} + \frac{C}{x+1},$$

$$\text{deci, } y = (x+1) \left(1 \pm 2\left(\frac{C}{x+1}\right)^{1/2} + \frac{C}{x+1}\right), \text{ adică:}$$

$$y = x + 1 \pm 2(C(x+1))^{1/2} + C.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=y==x*diff(y)^2+diff(y)^2;
y=dsolve(eqn)
y=
    0
    x+1
    C1+x+2*(C1*(x+1))^(1/2)+1
    C1+x-2*(C1*(x+1))^(1/2)+1
```

În continuare, vom prezenta două aplicații în geometrie a ecuațiilor diferențiale de tip Clairaut, respectiv Lagrange.

Exemplul 1.3.23. *Să se determine o curbă pentru care lungimea segmentului de pe tangentă cuprins între axele de coordonate este constantă.*

Soluție: Fie a mărimea constantei, $M(x, y)$ punctul de pe curbă și T_x, T_y punctele în care tangenta intersectează axa Ox , respectiv axa Oy . Ecuația tangentei în punctul $M(x, y)$ la curbă este:

$$Y - y = y'(X - x).$$

Intersectând această curbă cu Ox se obțin coordonatele lui T_x :

$$T_x \left(x - \frac{y}{y'}, 0 \right).$$

Intersectând curba cu Oy se obțin coordonatele lui T_y :

$$T_y (0, y - xy') .$$

Lungimea segmentului $T_x T_y$ este:

$$\sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2} = a .$$

Notând $y - xy' = u$, ecuația de mai sus se scrie:

$$\frac{u^2}{y'^2} + u^2 = a^2 ,$$

de unde obținem $u^2 = a^2 \frac{y'^2}{1 + y'^2}$. De aici rezultă:

$$y - xy' = \pm a \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

adică:

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

care este ecuație de tip Clairaut. Soluția generală este:

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Soluția singulară:

$$\begin{cases} x = \mp a \frac{1}{(\sqrt{1+p^2})^3} \\ y = p \left(\mp a \frac{1}{(\sqrt{1+p^2})^3} \right) \pm a \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases} .$$

Dacă notăm $p = \operatorname{tg} t$, vom obține:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} , \quad t \in [0, 2\pi] \quad (\text{astroidă}).$$

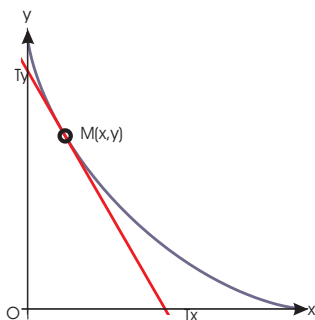


Figura 1.4: Exemplul 1.3.24

Exemplul 1.3.24. *Să se determine o curbă pentru care lungimea segmentului de pe tangentă cuprins între punctul de pe curbă și axa Ox este constantă.*

Soluție: Fie a mărimea constantei, $M(x, y)$ punctul de pe curbă și T_x punctul în care tangenta intersectează axa Ox .

Ecuția tangentei în punctul $M(x, y)$ la curbă este:

$$Y - y = y'(X - x).$$

Intersectând curba cu axa Ox se obțin coordonatele lui T_x :

$$T_x \left(x - \frac{y}{y'}, 0 \right).$$

Lungimea segmentului MT_x este:

$$\sqrt{\left(x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right)^2 + y^2}.$$

Va rezulta ecuația diferențială:

$$\left(\frac{y}{y'} \right)^2 + y^2 = a^2$$

sau, explicitând pe y :

$$y = \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (1.3.14)$$

Ecuția (1.3.14) este de tip Lagrange și se integrează notând $y' = p(x)$ și

derivând ecuația:

$$\begin{aligned} y &= \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}. \quad \text{Rezultă succesiv :} \\ p &= \pm \left(\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \right)'_p \frac{dp}{dx} \\ p &= \pm \frac{a\sqrt{1+p^2} - ap \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}}{(1+p^2)} \frac{dp}{dx} \\ p &= \pm \frac{a}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Din ultima egalitate rezultă ecuația cu funcția necunoscută x de variabilă p :

$$\begin{aligned} dx &= \pm \frac{a}{p(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} dp \Big| \int \\ x &= \pm \int \frac{ap}{p^2(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} dp. \end{aligned}$$

Prin schimbarea de variabilă $\sqrt{1+p^2} = t$, se va obține:

$$x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \ln(p) - \ln(1 + \sqrt{1+p^2}) \right) + C.$$

Soluția generală va fi:

$$\begin{cases} x = \pm a \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \ln(p) - \ln(1 + \sqrt{1+p^2}) \right) + C \\ y = \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

Dacă notăm $p = \operatorname{tg} t$, atunci:

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \cos t, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \sin t, \quad \frac{p}{1 + \sqrt{1+p^2}} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases} x = \pm a (\cos t + \ln |\operatorname{tg} \frac{t}{2}|) + C \\ y = \pm a \sin t \end{cases}.$$

Pentru $C = 0$ și alegerea semnelui $+$ pentru y și $-$ pentru x , se obține curba care trece prin $(0, a)$, curbă numită tractrice:

$$\begin{cases} x = -a (\cos t + \ln |\operatorname{tg} \frac{t}{2}|) \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad t \in (0, \pi/2).$$

1.4 Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul I

Integrarea numerică a unei ecuații diferențiale de ordinul întâi constă în a determina numeric soluția problemei Cauchy:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1.4.1)$$

în punctele:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$$

și a estima diferența dintre valoarea y_i calculată în x_i și valoarea exactă $y(x_i)$, pentru $i = \overline{0, n}$.

Metodele numerice folosite pentru calculul valorilor y_i se împart în:

- metode de tip *unipas*, când pentru calculul lui y_{i+1} se folosește y_i ;
- metode de tip *multipas*, în care pentru calculul lui y_{i+1} se folosesc valorile: $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$ (k fixat).

Metode numerice de tip unipas:

- metoda lui Euler
- metode de tip Runge-Kutta

1. Metoda lui Euler

Metoda lui Euler este cea mai simplă metodă numerică unipas. Formula prin care se obține aproximarea soluției problemei (1.4.1) este:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1},$$

unde $x_i = x_0 + ih$ iar $y_i = y(x_i)$.

2. Metode Runge-Kutta

Metodele de tip Runge-Kutta sunt metode unipas des folosite pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi.

Metoda Runge-Kutta de ordinul II este dată prin formula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Pentru metoda Runge-Kutta de ordinul III se folosește formula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4k_2 + k_3), \text{ unde}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2). \end{aligned}$$

Metoda Runge-Kutta de ordinul IV este cea mai folosită și este dată prin formula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ unde}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned}$$

Exemplul 1.4.1. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [0, 1].$$

Alegem $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$ ($h = 0.2$).

Metoda lui Euler

Utilizând formula lui Euler cu diferențe finite înainte:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_i = y(x_i),$$

obținem succesiv:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y(x_0)) = 2.2 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y(x_1)) = 2.408 \\ y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y(x_2)) = 2.64 \\ y_4 &= y_3 + h \cdot f(x_3, y(x_3)) = 2.912 \\ y_5 &= y_4 + h \cdot f(x_4, y(x_4)) = 3.24. \end{aligned}$$

Metoda Runge-Kutta de ordinul 2

Se folosește formula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))] , \quad i = \overline{0, 4}.$$

Rezultă valorile:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))] = 2.204 \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1 + h \cdot f(x_1, y_1))] = 2.424 \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2} [f(x_2, y_2) + f(x_3, y_2 + h \cdot f(x_2, y_2))] = 2.66728 \\ y_4 &= y_3 + \frac{h}{2} [f(x_3, y_3) + f(x_4, y_3 + h \cdot f(x_3, y_3))] = 2.96728 \\ y_5 &= y_4 + \frac{h}{2} [f(x_4, y_4) + f(x_5, y_4 + h \cdot f(x_4, y_4))] = 3.34728. \end{aligned}$$

În următorul tabel sunt prezentate valorile obținute prin cele două metode numerice.

x_i	y_i Euler	y_i R-K
0	2	2
0.2	2.2	2.204
0.4	2.408	2.424
0.6	2.64	2.66728
0.8	2.912	2.96728
1	3.24	3.34728

Soluția exactă a ecuației

$$y' = 1 + x^2 \Rightarrow dy = (1 + x^2) dx \Rightarrow y = x + \frac{x^3}{3} + C$$

Din condiția $y(0) = 2$ rezultă $C = 2$, deci problema Cauchy are soluția:

$$y = x + \frac{x^3}{3} + 2.$$

Folosind următoarele comenzi **Matlab**, se va obține reprezentarea grafică a soluțiilor numerice și a soluției analitice pentru problema Cauchy dată.

```

h=0.2;  x=0:h:1;  n=length(x);
y_euler=zeros(1,n); % solutia cu metoda Euler
y_rk2=zeros(1,n); % solutia cu metoda Runge-Kutta
y_euler(1)=2;  y_rk2(1)=2;
% Metoda Euler
for i=1:n-1
y_euler(i+1)=y_euler(i)+h*(1+x(i)^2);
end
% Metoda Runge-Kutta (de ordinul doi)
for i=1:n-1
k1=1+x(i)^2;  k2=1+(x(i)+h)^2;
y_rk2(i+1)=y_rk2(i)+(h/2)*(k1+k2);
end
% Solutia analitica
y_analitic=x+(x.^3)/3+2;
figure;
plot(x,y_euler,'r-o');
hold on;
plot(x,y_rk2,'b-d');  plot(x, y_analitic,'k--');
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Solutii numerice si solutia analitica pentru
      y'(x)=1+x^2, y(0)=2');
legend('Metoda Euler','Metoda Runge-Kutta (ordinul
      2)','Solutia analitica: y=x+x^3/ 3+2')
grid on;  hold off

```

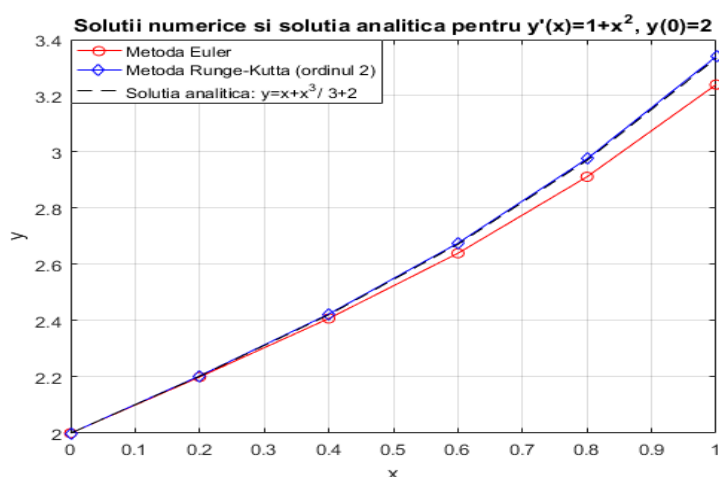


Figura 1.5: Exemplul 1.4.1

Exemplul 1.4.2. Să se determine soluția numerică a problemei:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + x \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [1, 2].$$

Alegem $h = 0.25 \Rightarrow x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2$ iar $y_0 = y(x_0) = 2$.

Metoda lui Euler (cu diferențe finite înainte)

Conform algoritmului, se obțin valorile:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2.50, x_1 = 1.25 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 3.046875, x_2 = 1.5 \\ y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 3.62109375, x_3 = 1.75 \\ y_4 &= y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 4.1982421875, x_4 = 2. \end{aligned}$$

Metoda Runge-Kutta de ordinul doi

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))] = 2.5234375 \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1 + hf(x_1, y_1))] = 3.090576171875 \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2} [f(x_2, y_2) + f(x_3, y_2 + hf(x_2, y_2))] = 3.67855072021484 \\ y_4 &= y_3 + \frac{h}{2} [f(x_3, y_3) + f(x_4, y_3 + hf(x_3, y_3))] = 4.25806498527527 \end{aligned}$$

Tabelul următor conține valorile obținute prin cele două metode numerice.

x_i	y_i Euler	y_i R-K
1	2	2
1.25	2.5	2.5234375
1.5	3.046875	3.09057617
1.75	3.62109375	3.6785507202148
2	4.1982421875	4.2580649852752

Soluția exactă a ecuației

Ecuția dată este o ecuație liniară neomogenă:

$$y' = y - x^2 + x \Leftrightarrow y' - y = -x^2 + x$$

care are soluția generală: $y = y_0 + y_p$. Se obține:

$$y_0 = Ce^x, y_p = x^2 + x + 1 \Rightarrow y = Ce^x + x^2 + x + 1.$$

Din condiția inițială $y(1) = 2$, rezultă $C = -e^{-1}$, deci soluția problemei este:

$$y = -e^{x-1} + x^2 + x + 1.$$

Codul Matlab pentru reprezentarea grafică a soluțiilor numerice și a soluției analitice:

```
f=@(x,y)y-x^2+x;
sol_analitica=@(x)-exp(x-1)+x.^2+x+1;
x0=1; y0=2; x_end=2;
h=0.25;
x_values=x0:h:x_end;
n=length(x_values);
y_euler=zeros(1,n);
y_rk2=zeros(1,n);
y_euler(1)=y0;
y_rk2(1)=y0;
% Metoda Euler
for i=1:n-1
y_euler(i+1)=y_euler(i)+h*f(x_values(i),y_euler(i));
end
% Metoda Runge-Kutta (ordinul 2)
for i = 1:n-1
k1=f(x_values(i),y_rk2(i));
k2=f(x_values(i)+h,y_rk2(i)+h*k1);
y_rk2(i+1)=y_rk2(i)+(h/2)*(k1+k2);
end
y_analitic=sol_analitica(x_values);
figure;
plot(x_values,y_euler,'r-o');
hold on;
plot(x_values, y_rk2, 'b-d');
plot(x_values, y_analitic, 'm--');
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Solutii numerice si solutia analitica pentru
      y`(x)=y-x^2+x, y(1)=2');
legend('Metoda Euler','Metoda Runge-Kutta (ordinul
      2)','Solutia analitica: y= - e^{x-1}+x^2+x+1');
grid on; hold off
```

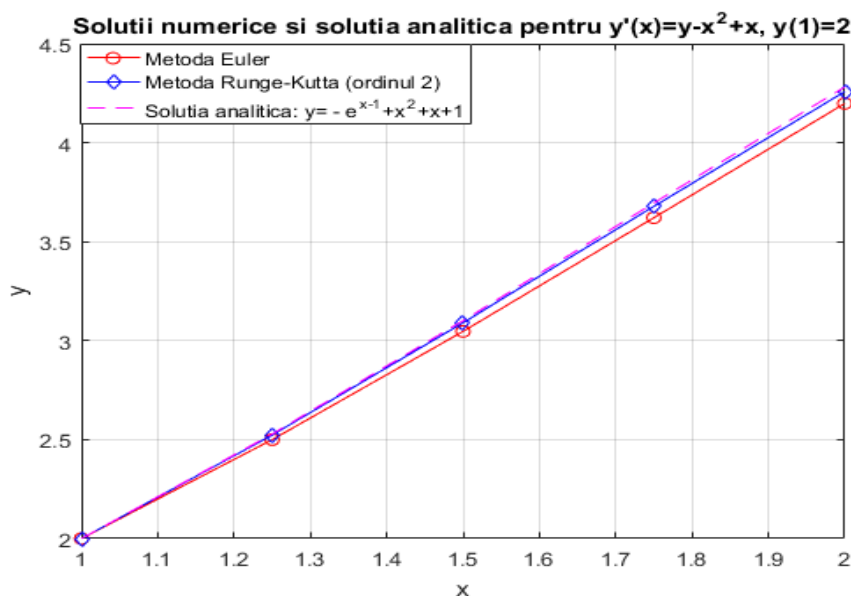


Figura 1.6: Exemplul 1.4.2

Funcții Matlab pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul I

Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi se realizează folosind funcțiile `ode23` și `ode45` care se bazează pe metodele numerice de tip Runge-Kutta.

Funcția **ode23** rezolvă ecuații diferențiale prin metoda Runge-Kutta de ordin 2 sau 3 iar funcția **ode45** prin metoda Runge-Kutta de ordin 4 sau 5.

Sintaxa acestor funcții este:

- `[x,y]=ode23('fisier',x0,xf,y0)`
- `[x,y]=ode45('fisier',x0,xf,y0)` sau `[x,y]=ode45('fisier',tspan,y0)`

`fisier`: variabilă șir cu numele unui fișier.m care definește derivata funcției

`x0`: valoarea inițială a variabilei `x`

`xf`: valoarea finală a variabilei `x`

`y0`: vector coloană care conține condițiile inițiale

Exemplul 1.4.3. *Să se rezolve analitic problema Cauchy:*

$$y' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Să se rezolve problema folosind funcția `ode45`. Să se compare reprezentările grafice ale soluției analitice, respectiv numerice.

Ecuția este liniară de ordinul întâi. Factorul integrant este: $e^{\int 4dx} = e^{4x}$.
Se înmulțește ecuația cu factorul integrant și se obține:

$$(y \cdot e^{4x})' = \cos x \cdot e^{4x} \Big| \int \Rightarrow y \cdot e^{4x} = \int \cos x \cdot e^{4x} dx$$

Folosind metoda de integrare prin părți, vom avea:

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot e^{4x} dx &= \sin x \cdot e^{4x} - 4 \cdot \int \sin x \cdot e^{4x} dx \\ &= \sin x \cdot e^{4x} + 4 \cdot \left(\cos x \cdot e^{4x} - 4 \int \cos x \cdot e^{4x} dx \right) dx \\ &= \sin x \cdot e^{4x} + 4 \cdot \cos x \cdot e^{4x} - 16 \int \cos x \cdot e^{4x} dx \\ \Rightarrow \int \cos x \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{17} e^{4x} (\sin x + 4 \cos x) + C. \end{aligned}$$

Se obține soluția exactă a ecuației:

$$y = \frac{1}{17} (\sin x + 4 \cos x) + C e^{-4x}.$$

Din condiția inițială $y(0) = 1$, rezultă $C = \frac{13}{17}$, deci soluția problemei este:

$$y = \frac{1}{17} (\sin x + 4 \cos x) + \frac{13}{17} e^{-4x}.$$

Soluție Matlab:

```
odefun=@(x,y) cos(x)-4*y;
xspan=[0 2*pi]; y0=1;
[x_num,y_num]=ode45(odefun,xspan,y0);
y_analitice=@(x)(4*cos(x)+sin(x))/17+13/17*exp(-4*x);
y_exact=y_analitice(x_num);
figure;
plot(x_num,y_num,'bo-','LineWidth',1.2);
hold on;
plot(x_num,y_exact,'r-','LineWidth',1.5);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Solutia problemei y`+4y=cosx, y(0)=1')
legend('Solutie numerica (ode45)','Solutia analitica
      y=1/17(sinx+4cosx)+13/17e^{-4x}');
```

Rezultatele numerice și valorile obținute pentru y_{exact} sunt:

```
x_num =
0 0.0167 0.0335 0.0502 0.0670 0.1211 0.1751 0.2292 0.2833 0.3359 0.3885
0.4411 0.4937 0.5504 0.6072 0.6640 0.7208 0.7841 0.8473 0.9105 0.9737 1.0479
1.1221 1.1963 1.2705 1.3695 1.4685 1.5676 1.6666 1.7690 1.8715 1.9740 2.0765
2.1856 2.2947 2.4039 2.5130 2.6071 2.7012 2.7953 2.8895 2.9763 3.0631 3.1498
3.2366 3.3212 3.4058 3.4904 3.5749 3.6579 3.7409 3.8240 3.9070 3.9903 4.0736
4.1569 4.2402 4.3236 4.4070 4.4904 4.5738 4.6573 4.7409 4.8245 4.9080 4.9920
5.0760 5.1600 5.2440 5.3369 5.4297 5.5226 5.6154 5.7083 5.8012 5.8940 5.9869
6.0610 6.1350 6.2091 6.2832

y_num =
1.0000 0.9514 0.9060 0.8634 0.8237 0.7117 0.6212 0.5481 0.4887 0.4411
0.4017 0.3689 0.3413 0.3159 0.2942 0.2753 0.2584 0.2414 0.2257 0.2108 0.1965
0.1800 0.1637 0.1472 0.1306 0.1079 0.0847 0.0610 0.0370 0.0120 -0.0131 -
0.0379 -0.0623 -0.0876 -0.1118 -0.1345 -0.1556 -0.1725 -0.1878 -0.2014 -0.2131
-0.2224 -0.2300 -0.2358 -0.2397 -0.2420 -0.2425 -0.2412 -0.2382 -0.2337 -0.2275
-0.2197 -0.2104 -0.1997 -0.1876 -0.1741 -0.1594 -0.1436 -0.1269 -0.1092 -0.0907
-0.0717 -0.0521 -0.0321 -0.0119 0.0084 0.0287 0.0488 0.0686 0.0899 0.1104
0.1299 0.1483 0.1655 0.1813 0.1954 0.2078 0.2165 0.2240 0.2303 0.2353

y_exact =
1.0000 0.9514 0.9060 0.8634 0.8237 0.7118 0.6215 0.5482 0.4886 0.4410
0.4017 0.3689 0.3412 0.3159 0.2942 0.2752 0.2584 0.2414 0.2257 0.2108 0.1965
0.1800 0.1637 0.1472 0.1305 0.1079 0.0847 0.0610 0.0370 0.0120 -0.0131 -
0.0379 -0.0623 -0.0875 -0.1117 -0.1345 -0.1557 -0.1725 -0.1878 -0.2014 -0.2132
-0.2224 -0.2299 -0.2358 -0.2398 -0.2420 -0.2425 -0.2412 -0.2382 -0.2337 -0.2275
-0.2197 -0.2104 -0.1997 -0.1875 -0.1741 -0.1594 -0.1436 -0.1269 -0.1092 -0.0908
-0.0717 -0.0521 -0.0321 -0.0120 0.0084 0.0287 0.0488 0.0686 0.0898 0.1103
0.1299 0.1483 0.1655 0.1812 0.1954 0.2079 0.2165 0.2240 0.2303 0.2353
```

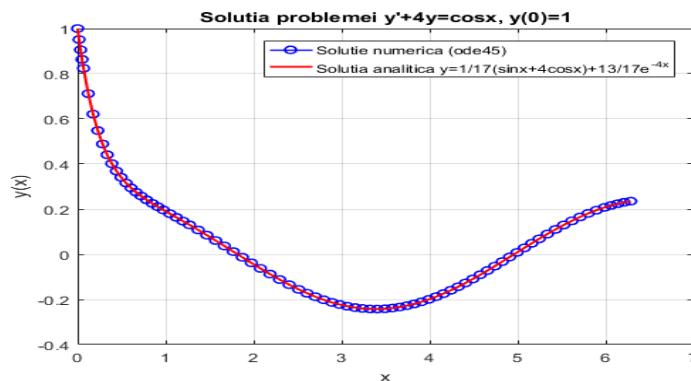


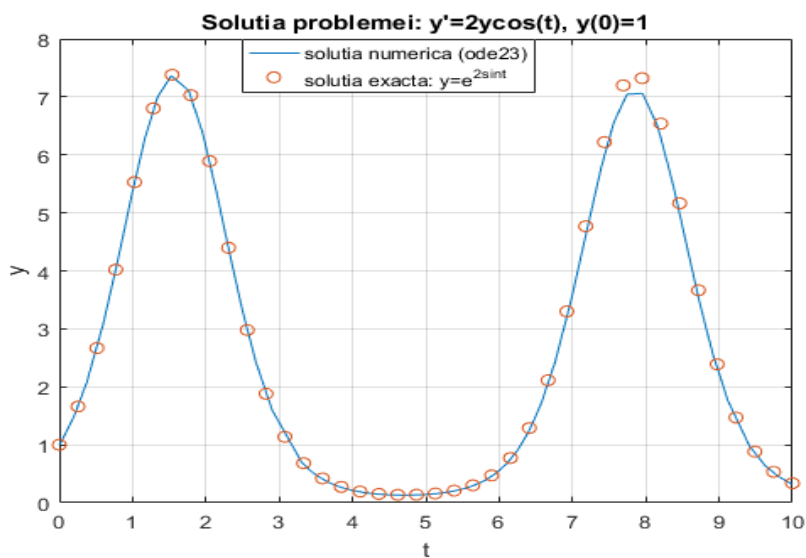
Figura 1.7: Exemplul 1.4.3

Exemplul 1.4.4. Folosind funcția `ode23`, să se rezolve problema:

$$y' = 2y \cos t, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 10].$$

Cod Matlab:

```
tspan=[0 10];
y0=1;
[t,y]=ode23(@(t,y)2*y*cos(t),tspan,y0);
plot(t,y,'-')
hold on
xlabel('t'); ylabel('y');
title('Solutia problemei: y`=2ycos(t), y(0)=1');
tmin=0; tmax=10; nt=40;
t=linspace(tmin,tmax,nt);
y=exp(2*sin(t));
plot(t,y,'o')
legend('solutia numerica (ode23)', 'solutia exacta: y=e^{2sint}');
grid on; hold off
```



În cazul în care soluția analitică a unei ecuații diferențiale nu se poate determina, singura posibilitate de a rezolva ecuația și de a reprezenta grafic soluția obținută este integrarea numerică.

Exemplul 1.4.5. Să se rezolve prin metode numerice problema Cauchy:

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad y(1) = 1,$$

pe intervalul $[1, 2]$ cu pasul $h = 0.2$.

Rezolvăm problema utilizând metoda lui **Euler** (de ordin doi), respectiv metoda **Runge-Kutta** (de ordin doi), pe intervalul $[1, 2]$, apoi vom folosi funcția **ode45**. Vom compara reprezentările grafice ale soluțiilor numerice obținute prin aceste metode.

Codul Matlab:

```
h=0.2; % pasul metodei
x0=1; % valoarea initiala pentru x
y0=1; % valoarea initiala pentru y
x_end=2; % valoarea finala pentru x
% numarul de pasi
n=(x_end-x0)/h;
x=zeros(1,n+1);
y_euler=zeros(1,n+1);
y_rk=zeros(1,n+1);
x(1)=x0;
y_euler(1)=y0;
y_rk(1)=y0;
% Metoda lui Euler de ordinul doi
for i = 1:n
    f1=(1/x(i))+(1/y_euler(i));
    y_predict=y_euler(i)+h*f1;
    f2=(1/(x(i)+h))+(1/y_predict);
    y_euler(i+1)=y_euler(i)+(h/2)*(f1+f2);
    x(i+1)=x(i)+h;
end
% Metoda Runge-Kutta de ordinul doi
x_rk=x0; % x initial pentru metoda Runge-Kutta
y_rk(1)=y0; % y initial pentru metoda Runge-Kutta
for i = 1:n
    k1=(1/x_rk)+(1/y_rk(i));
    k2=(1/(x_rk+h))+(1/(y_rk(i)+h*k1));
    y_rk(i+1)=y_rk(i)+h*k2;
    x_rk=x_rk+h;
end
```

```

% Metoda ode45
odefun=@(x,y)1/x+1/y; % declararea functiei
[x_ode45,y_ode45]=ode45(odefun,[x0 x_end],y0);
    % rezolvare utilizand functia ode45
% Afisarea valorilor calculate
disp('Calculul valorilor pentru y (Euler):');
    disp(y_euler);
disp('Calculul valorilor pentru y (Runge-Kutta):');
    disp(y_rk);
disp('Calculul valorilor pentru y (ode45):');
    disp(y_ode45);
% Reprezentarea grafica a rezultatelor
plot(x, y_euler, '-o', 'DisplayName', 'Metoda Euler
    de ordinul doi');
hold on;
plot(x, y_rk, '-x', 'DisplayName', 'Metoda Runge-
    Kutta de ordinul doi');
plot(x_ode45, y_ode45, '-s', 'DisplayName', 'Metoda
    ODE45 ');
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Solutia ecuatiei:  $y' = 1/x + 1/y$ , cu conditia
     $y(1)=1$ );
legend show; grid on

```

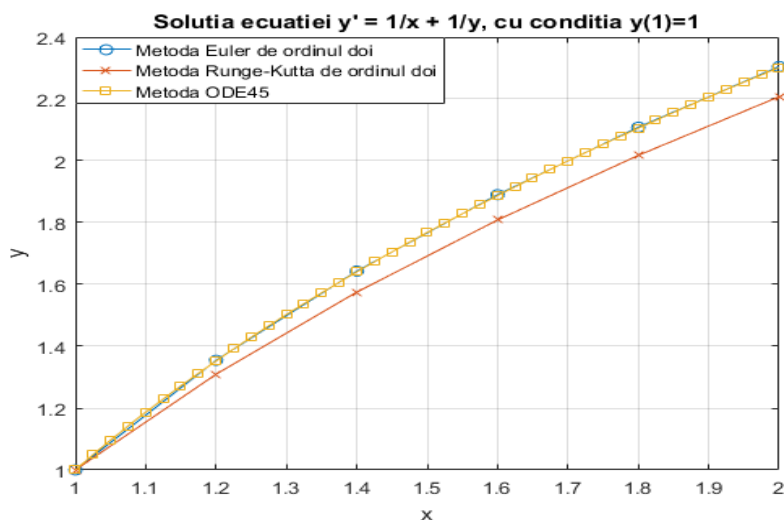


Figura 1.8: Exemplul 1.4.5

Calculul valorilor pentru y (Euler):

1.0000 1.3548 1.6433 1.8905 2.1085 2.3047

Calculul valorilor pentru y (Runge—Kutta):

1.0000 1.3095 1.5752 1.8086 2.0175 2.2073

Calculul valorilor pentru y (ode45):

1.0000 1.0491 1.0965 1.1424 1.1868 1.2300 1.2719 1.3128 1.3526 1.3914 1.4294
 1.4664 1.5027 1.5382 1.5730 1.6070 1.6404 1.6732 1.7054 1.7370 1.7681 1.7987
 1.8287 1.8583 1.8874 1.9160 1.9442 1.9720 1.9994 2.0265 2.0531 2.0794 2.1053
 2.1309 2.1562 2.1811 2.2058 2.2301 2.2542 2.2780 2.3015

1.5 Exerciții rezolvate

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale cu variabile separabile:

a) $xy + (x^2 + 1)y' = 0$

b) $\sqrt{1 + x^2}y' - \sin y = 0$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $yy' + e^x yy' - e^x = 0, y(0) = 1$

b) $xy' - y^2 + y = 0, y(1) = \frac{1}{2}$

c) $yy' = 1, y(0) = -2$

d) $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0, y(1) = 1$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene (în sens Euler):

a) $x^2y' + y^2 = 2xy, x \neq 0$

b) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, x \neq 0$

c) $xy' + x + y = 0, x \neq 0$

4. Să se rezolve problema Cauchy:

$$2x^2y' = 4xy - y^2, y(1) = 1.$$

5. Să se integreze următoarele ecuații reducibile la ecuații omogene:

a) $(2x + y - 1)dx + (x - 2y + 3)dy = 0$

b) $y' = \frac{x - 2y + 5}{-2x + y - 4}$

6. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y' = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}, \quad y(1) = 1.$$

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare:

a) $y' + 2y = e^{-x}$

b) $xy' - 3y = x^4 e^x$

c) $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x$

8. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y' - y = 3x + 2, \quad y(0) = -3$

b) $x^2 y' + 3xy + 2 = 0, \quad y(1) = 3$

9. Să se afle soluția generală a ecuației: $y' = \frac{1}{x + y^2}$.

10. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Bernoulli:

a) $2xyy' - y^2 + x = 0$

b) $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$

11. Să se rezolve problemele Cauchy următoare:

a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$

b) $xy' - y + 2x^2 y^2 = 0, \quad y(1) = 1$

12. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Riccati:

a) $y' + \frac{1}{x}y^2 - \frac{2x+1}{x}y = -x, \quad y_1(x) = x$

b) $y' + y^2 + \frac{4}{x}y + \frac{2}{x^2} = 0, \quad y_1(x) = -\frac{2}{x}$

13. Să se rezolve problemele Cauchy următoare:

a) $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad y_1(x) = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 2$

b) $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1, \quad y_1(x) = x, \quad y(1) = 0$

14. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală exactă:

a) $2xyy' + x^2 + 2x + y^2 = 0$

b) $(xy^2 + x^3) dx + (x^2y + y^3) dy = 0$

c) $(e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + x \cos y) dy = 0$

15. Să se integreze următoarele ecuații, folosind factorul integrant:

a) $(x^2 - y) dx + x dy = 0$

b) $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$

16. Să se rezolve problema Cauchy:

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0, \quad y(1) = \sqrt{2}.$$

17. Să se integreze următoarele ecuații de tip Clairaut:

a) $y = xy' - e^{y'}$ b) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

18. Să se integreze următoarele ecuații de tip Lagrange:

a) $y = 2xy' - e^{y'}$

b) $y = (1 + y') x + y'^2$

c) $y = x \left(\frac{y'}{2} + \frac{2}{y'} \right)$

19. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $(2xy - 2y^3) dx + (x^2 - 6xy^2) dy = 0$

b) $x^3(1 + y) dx + (1 - x)y^2 dy = 0$

c) $y = xy' + \cos(y')$

20. Să se rezolve problemele Cauchy următoare:

a) $(y + \ln x) dx - x dy = 0, \quad y(1) = 0$

b) $y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 1$

c) $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0, \quad y(1) = 1$

21. Să se integreze, folosind funcția ode45, următoarea problemă Cauchy:

$$x' = 2x + t + 1, \quad x(0) = 1. \quad (1.5.1)$$

Soluții:

1. a) Ecuația se scrie sub forma:

$$xy \, dx + (x^2 + 1)dy = 0. \quad (\text{EVS})$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)^{-1} + \ln C, \quad C > 0$$

$$2 \ln y = \ln \left(\frac{C}{x^2 + 1} \right) \Rightarrow y^2 = \frac{C}{x^2 + 1} \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x*y+(x^2+1)*Dy=0','x')
y =
C1/(x^2+1)^(1/2)
```

b) Se rescrie ecuația:

$$\sqrt{1+x^2} \, dy - \sin y \, dx = 0.$$

Se separă variabilele și se integrează.

$$\frac{dy}{\sin y} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\ln \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \right) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + \ln C, \quad C > 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = C \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

$$y = 2 \operatorname{arctg} \left(C \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right)$$

Soluția poate fi scrisă sub altă formă dacă se folosește funcția hiperbolică:

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Vom avea:

$$\ln \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \right) = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = e^{\operatorname{arcsinh}(x)+C}$$

$$y = 2 \operatorname{arctg}(e^{\operatorname{arcsinh}(x)+C}).$$

Soluție singulară: $y = 0$.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=sqrt(1+x^2)*diff(y)==sin(y);
y=dsolve(eqn)
y =
0
2*atan(exp(C1 + asinh(x)))
```

2. a) Se determină mai întâi soluția generală a ecuației date. Separând variabilele și integrând, vom avea:

$$y'(y + e^x y) = e^x \Rightarrow y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(e^x + 1) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Din condiția inițială, rezultă:

$$\frac{1}{2} = \ln(e^0 + 1) + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Înlocuind în soluția generală, se obține:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Soluția problemei Cauchy, în forma explicită, este:

$$y = \sqrt{2} \left(\ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} - \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('y*Dy+exp(x)*y*Dy-exp(x)=0','y(0)=1','x')
y =
2^(1/2)*(log(exp(x)+1)-log(2)+1/2)^(1/2)
```

b) Se separă variabilele și se integrează.

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \frac{y-1}{y} = \ln(Cx),$$

de unde rezultă:

$$\frac{y-1}{y} = Cx \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-Cx}.$$

Din condiția inițială se obține $C = -1$, deci soluția problemei Cauchy este:

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x*Dy-y^2+y=0','y(1)=1/2','x')
y =
1/(x+1)
```

c) Soluția generală a ecuației:

$$yy' = 1 \Leftrightarrow y \, dy = dx,$$

este:

$$y^2 = 2(x + C).$$

Din $y(0) = -2$ rezultă $C = 2$. Se obține soluția:

$$y^2 = 2(x + 2) \Rightarrow y = -\sqrt{2}(x + 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x y(x)
eqn=y*diff(y)==1;
cond=y(0)==-2;
y=dsolve(eqn,cond)
y =
-2^(1/2)*(x+2)^(1/2)
```

d) Se separă variabilele și se integrează.

$$\begin{aligned} \frac{y}{1+y^2} dy &= -\frac{x}{1+x^2} dx \Big| \int \\ \ln(1+y^2) &= -\ln(1+x^2) + \ln C \end{aligned}$$

Se obține soluția generală:

$$(1+y^2)(1+x^2) = C, \quad C > 0.$$

Din condiția $y(1) = 1$, se obține $C = 4$.

Înlocuind în soluția generală, rezultă:

$$(1+y^2)(1+x^2) = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3-x^2}{1+x^2}.$$

Soluția explicită este:

$$y = \sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(y*(1+x^2)*diff(y)+x*(1+y^2)==0,y(1)==1);
y=simplify(y)
y =
(-(x^2-3)/(x^2+1))^(1/2)
```

3. a) Ecuația se scrie sub forma: $y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} = 0, x \neq 0$.

Se notează $\frac{y}{x} = u$, deci $y' = u + xu'$. Înlocuim în ecuația dată și obținem:

$$xu' + u^2 - u = 0 \Leftrightarrow xdu + (u^2 - u)dx = 0.$$

Se separă variabilele și se integrează.

$$\frac{du}{u(u-1)} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln \frac{u-1}{u} + \ln x = \ln C \Rightarrow x(u-1) = Cu.$$

Revenind la funcția necunoscută inițială, vom avea:

$$x\left(\frac{y}{x} - 1\right) = C\frac{y}{x} \Rightarrow x(y-x) = Cy,$$

sau, echivalent: $y = \frac{x^2}{x-C}$.

În rezolvarea ecuației, s-a considerat că $u(u-1) \neq 0$.

Pentru $u = 0$, rezultă $y = 0$, care este soluție singulară a ecuației date.

Pentru $u - 1 = 0$, se obține $y = x$ care este o soluție particulară a ecuației (se obține din soluția generală pentru $C = 0$).

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x^2*Dy+y^2=2*x*y','x')
y =
0
x^2/(C1 + x)
```

b) Ecuația se rescrie: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Notăm $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y' = u + xu'$.

Rezultă ecuația cu variabile separabile:

$$xu' = e^u \Leftrightarrow xdu = e^u dx \Leftrightarrow e^{-u} du = \frac{1}{x} dx.$$

Integrând, vom obține:

$$e^{-u} = -\ln x + C \Rightarrow -u = \ln(C - \ln x).$$

Pentru ecuația dată, soluția este: $y = -x \ln(C - \ln x)$.

Soluție Matlab:

```
syms x y(x)
eqn=x*diff(y)==x*exp(y/x)+y;
y=dsolve(eqn)
y =
-x*log(C1 - log(x))
```

c) Ecuația se scrie echivalent: $xy' = -(x + y) \Leftrightarrow y' = -1 - \frac{y}{x}$.

Cu schimbarea de funcție $\frac{y}{x} = u$, vom obține:

$$xu' = -1 - 2u \Rightarrow \frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2u+1) + \ln x = \ln C \Rightarrow 2u+1 = \frac{C}{x^2}.$$

Soluția generală a ecuației inițiale: $y = \frac{C}{2x} - \frac{x}{2}$.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(x*diff(y)+x+y==0)
y =
-(x^2/2+C1)/x
```

4. Aflăm soluția generală a ecuației omogene date.

$$2x^2y' = 4xy - y^2 \mid : 2x^2 \Rightarrow y' = 2\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Notăm $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y'(x) = u + xu'$. Ecuația devine: $u'x = u - \frac{u^2}{2}$.

S-a obținut o ecuație cu variabile separabile:

$$\frac{du}{u - \frac{u^2}{2}} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{2du}{2u - u^2} = \frac{dx}{x} \mid \int$$

$$\int \frac{2 - u + u}{u(2 - u)} du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \frac{u}{u-2} = \ln(Cx) \Rightarrow \frac{u}{u-2} = Cx$$

Revenind la funcția necunoscută y , vom obține:

$$\frac{y}{y-2x} = Cx \Rightarrow y = \frac{2Cx^2}{Cx-1}.$$

Din $y(1) = 1$, rezultă $C = -1$. Soluția problemei este: $y = \frac{2x^2}{x+1}$.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(2*x^2*diff(y)+y^2-4*x*y==0, y(1)==1)
y =
x^2/(x/2 + 1/2)
```

Pentru vizualizarea reprezentării grafice a soluției, se adaugă comenzile:

```
fplot(y)
legend('y(x)=2x^2/(x+1)')
xlabel('x'), ylabel('y(x)')
```

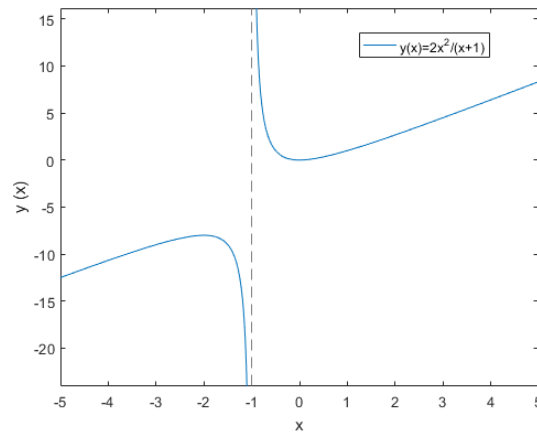


Figura 1.9: Soluția problemei $2x^2y' = 4xy - y^2$, $y(1) = 1$

5. a) Scriem ecuația sub forma: $y' = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}$.

Dreptele $-2x - y + 1 = 0$ și $x - 2y + 3 = 0$ se intersectează în $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Se efectuează o schimbare de variabilă și o schimbare de funcție:

$$x + \frac{1}{5} = u, \quad y - \frac{7}{5} = v, \quad v = v(u).$$

Rezultă ecuația omogenă: $v' = \frac{-2u - v}{u - 2v}$.

Cu substituția $v = uz$, se obține ecuația cu variabile separabile:

$$z + uz' = \frac{-2 - z}{1 - 2z} \Leftrightarrow uz' = \frac{2z^2 - 2z - 2}{1 - 2z} \Leftrightarrow \frac{2z - 1}{z^2 - z - 1} dz = -\frac{2}{u} du.$$

Integrând, se obține:

$$\ln(z^2 - z - 1) + 2 \ln u = \ln C \Rightarrow u^2(z^2 - z - 1) = C, C > 0.$$

Revenind la notațiile inițiale, obținem succesiv:

$$u^2 \left(\frac{v^2}{u^2} - \frac{v}{u} - 1 \right) = C \Rightarrow v^2 - uv - u^2 = C$$

$$\left(y - \frac{7}{5} \right)^2 - \left(y - \frac{7}{5} \right) \left(x + \frac{1}{5} \right) - \left(x + \frac{1}{5} \right)^2 = C.$$

Se obține soluția generală sub formă implicită:

$$y^2 - (x + 3)y - x^2 + x = C,$$

sau, explicitând:

$$y = \frac{1}{2} \left(x + 3 \pm \sqrt{5x^2 + 2x + C} \right).$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve((x-2*y+3)*diff(y)+2*x+y-1==0)
y =
x/2 + (5*x^2 + 2*x + C1 + 9)^(1/2)/2 + 3/2
x/2 - (5*x^2 + 2*x + C1 + 9)^(1/2)/2 + 3/2
```

b) Se calculează determinatul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$. Cum $\Delta = -3 \neq 0$, sistemul format din ecuațiile $x - 2y + 5 = 0$ și $-2x + y - 4 = 0$ are soluție unică. Se obține $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.

Facem schimbarea de variabilă $x + 1 = u$ și schimbarea de funcție $y - 2 = v$. Se obține ecuația omogenă:

$$v' = \frac{u - 2v}{-2u + v} \Leftrightarrow v' = \frac{1 - 2\frac{v}{u}}{-2 + \frac{v}{u}}.$$

Prin schimbarea de funcție $\frac{v}{u} = z$, $z = z(u)$, $v' = z + u \cdot z'$, se obține ecuația cu variabile separabile:

$$z + u \cdot z' = \frac{1 - 2z}{-2 + z} \Leftrightarrow \frac{z - 2}{z^2 - 1} dz = -\frac{du}{u}.$$

Prin integrare, rezultă:

$$\frac{z-1}{(z+1)^3} = u^2 C \xrightarrow{z=uv} \frac{v-u}{(v+u)^3} = C.$$

Revenind la notațiile inițiale, se obține soluția generală a ecuației date:

$$y - x - 3 = C(x + y - 1)^3.$$

Ecuția are soluțiile singulare: $y = x + 3$, $y = -x + 1$.

6. Sistemul $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{cases}$ are soluția $(-1, 3)$.

Notăm $x + 1 = u$, $y - 3 = v$, $v = v(u)$. Se obține ecuația omogenă:

$$v' = \frac{u+v}{-u+v} \xrightarrow{v=uz} uz' = \frac{1+z}{-1+z} - z \Rightarrow \frac{z-1}{z^2-2z-1} dz = -\frac{1}{u} du.$$

Prin integrare, rezultă:

$$\ln(z^2 - 2z - 1) + 2 \ln u = \ln C \Leftrightarrow u^2(z^2 - 2z - 1) = C.$$

Revenim la v , apoi la x și y . Vom avea:

$$v^2 - 2uv - u^2 = C \Rightarrow y^2 - 2(x+4)y - x^2 + 4x = C.$$

Pentru problema Cauchy, se obține $C = -6$, deci soluția se scrie:

$$y^2 - 2(x+4)y - x^2 + 4x + 6 = 0.$$

Prin explicitare, rezultă soluția:

$$y = x + 4 - \sqrt{2x^2 + 4x + 10},$$

pentru care condiția $y(1) = 1$ este verificată.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=diff(y)==(x+y-2)/(-x+y-4);
cond=y(1)==1;
y=dsolve(eqn,cond)
fplot(y)
y =
x - 2^(1/2)*(x^2 + 2*x + 5)^(1/2) + 4
```

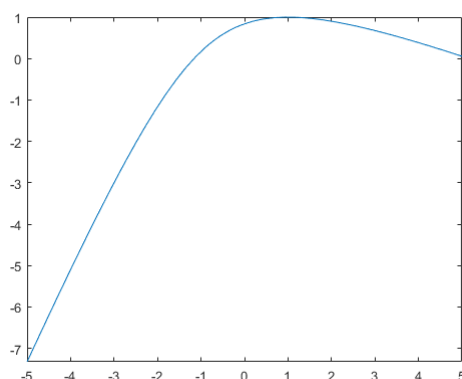


Figura 1.10: Soluția problemei: $y' = \frac{x+y-2}{-x+y-4}$, $y(1) = 1$

7. a) Rezolvăm exercițiul prin două metode: metoda factorului integrant, respectiv metoda variației constantei.

I Se determină factorul integrant, apoi se înmulțește ecuația cu acesta.

$$e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$y' \cdot e^{2x} + 2y \cdot e^{2x} = e^x \Leftrightarrow (y \cdot e^{2x})' = e^x$$

Prin integrare, se obține:

$$y \cdot e^{2x} = e^x + C \Rightarrow y = e^{-x} + C \cdot e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II Se determină soluția ecuației omogene asociate:

$$y' + 2y = 0,$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Se obține:

$$y_0 = C e^{-2x}.$$

Pentru ecuația neomogenă dată, se caută soluții de forma:

$$y = C(x) e^{-2x}.$$

Înlocuind în ecuație, vom obține:

$$C'(x) e^{-2x} - 2C(x) e^{-2x} + 2C(x) e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow C'(x) e^{-2x} = e^{-x},$$

de unde rezultă că:

$$C'(x) = e^x \Rightarrow C(x) = e^x + C \Rightarrow y = (e^x + C) e^{-2x}.$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$y = C e^{-2x} + e^{-x}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+2*y=exp(-x)', 'x')
y =
exp(-x) + C1*exp(-2*x)
```

b) Ecuația se rescrie: $y' - \frac{3}{x}y = x^3e^x$. Se determină factorul integrant:

$$e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3}.$$

Se obține ecuația:

$$y' \cdot x^{-3} - 3 \cdot x^{-4}y = e^x \Leftrightarrow (y \cdot x^{-3})' = e^x,$$

de unde, prin integrare, rezultă soluția:

$$y \cdot x^{-3} = e^x + C \Leftrightarrow y = x^3(e^x + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x*Dy-3*y=x^4*exp(x)', 'x')
y =
x^3*exp(x) + C1*x^3
```

c) Factorul integrant este: $e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$.

$$\begin{aligned} y' + y \cos x &= \sin x \cdot \cos x \mid \cdot e^{\sin x} \\ y' e^{\sin x} + y \cos x e^{\sin x} &= \sin x \cdot \cos x e^{\sin x} \\ (y e^{\sin x})' &= \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \\ y \cdot e^{\sin x} &= \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} dx \end{aligned}$$

Integrala din membrul drept este:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot (e^{\sin x})' dx &= \sin x \cdot e^{\sin x} - \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx \\ &= \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C. \end{aligned}$$

Se obține soluția generală:

$$y e^{\sin x} = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C,$$

adică:

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+y*cos(x)=sin(x)*cos(x)','x')
y =
sin(x) + C1*exp(-sin(x)) - 1
```

8. a) Se determină soluția generală, folosind formula:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx \right).$$

Pentru $p(x) = -1$, $q(x) = 3x + 2$, vom avea:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \left(C + \int e^{-x}(3x + 2)dx \right), \\ y(x) &= e^x (C - (3x + 5)e^{-x}), \\ y(x) &= Ce^x - 3x - 5. \end{aligned}$$

Din condiția $y(0) = -3$, rezultă $C = 2$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y(x) = 2e^x - 3x - 5.$$

Soluție Matlab:

```
syms x y(x)
y=dsolve(diff(y)-y==3*x+2, y(0)==-3)
y =
2*exp(x) - 3*x - 5
```

b) Ecuația se scrie sub forma: $y' + \frac{3}{x}y = -\frac{2}{x^2}$.

Soluția ecuației omogene $y' + \frac{3}{x}y = 0$ este $y_0 = \frac{C}{x^3}$, deci soluția particulară a ecuației date are forma:

$$y_p = \frac{C(x)}{x^3}.$$

Înlocuind în ecuație, se obține:

$$\frac{C'(x)x^3 - 3x^2C(x)}{x^6} + \frac{3C(x)}{x^4} = -\frac{2}{x^2},$$

de unde rezultă: $C'(x) = -2x \Rightarrow C(x) = -x^2$, deci $y_p = -\frac{x^2}{x^3} = -\frac{1}{x}$.

Soluția generală este:

$$y = \frac{C}{x^3} - \frac{1}{x}.$$

Din condiția $y(1) = 3$, se obține $C = 4$, deci soluția problemei este:

$$y = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(x^2*diff(y)+3*x*y+2==0, y(1)==3)
y =
4/x^3 - 1/x
```

9. Ecuația diferențială dată nu este liniară în y . Se scrie ecuația sub forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = x + y^2 \Leftrightarrow x'(y) - x = y^2,$$

care este ecuație liniară cu funcția necunoscută $x(y)$.

Înmulțind ecuația obținută cu factorul integrant:

$$e^{\int (-1)dy} = e^{-y},$$

ecuația devine:

$$x'e^{-y} - xe^{-y} = y^2e^{-y} \Leftrightarrow (xe^{-y})' = y^2e^{-y}.$$

Integrând prin părți, se obține soluția generală sub forma explicită a ecuației diferențiale cu funcția necunoscută x :

$$x = -y^2 - 2y - 2 + Ce^y.$$

Expresia obținută reprezintă soluția sub formă implicită a ecuației date.

10. a) Ecuația se scrie sub forma:

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -1.$$

Se notează $y^2 = z$, deci $2yy' = z'$. Se obține ecuația liniară:

$$z' - \frac{1}{x}z = -1.$$

Se calculează integralele:

$$\begin{aligned} \int p(x)dx &= - \int \frac{1}{x}dx = -\ln x \\ \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx &= - \int e^{-\ln x} dx = -\ln x. \end{aligned}$$

Soluția ecuației în z este:

$$z = e^{\ln x}(C - \ln x) \Leftrightarrow z = x(C - \ln x).$$

Pentru ecuația dată, rezultă soluția:

$$y^2 = x(C - \ln x).$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=2*x*y*diff(y)-y^2+x==0;
y=dsolve(eqn)
y =
    (x*(C1 - log(x)))^(1/2)
    -(x*(C1 - log(x)))^(1/2)
```

b) $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$ |: $\sqrt{y} \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' + 2y^{\frac{1}{2}} = 2x$

Cu substituția $y^{\frac{1}{2}} = z$, ecuația devine: $z' + z = x$.

Înmulțind ecuația obținută cu factorul integrant e^x , se obține:

$$z'e^x + ze^x = xe^x \Leftrightarrow (ze^x)' = xe^x,$$

de unde rezultă, prin integrare:

$$ze^x = e^x(x - 1) + C.$$

Pentru ecuația de tip Bernoulli, soluția generală este:

$$\sqrt{y} = x - 1 + Ce^{-x}, \text{ adică, } y = (x - 1 + Ce^{-x})^2.$$

Soluție singulară: $y = 0$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+2*y=2*x*sqrt(y)','x')
y =
    0
    exp(-2*x)*(C1 - exp(x) + x*exp(x))^2
```

11. a) Ecuația este de tip Bernoulli cu $\alpha = 2$. Împărțim ecuația cu y^2 .

$$\begin{aligned} \frac{xy'}{y^2} + \frac{y}{y^2} &= \ln x \\ \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

Prin schimbarea de funcție $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$, vom obține ecuația liniară:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x},$$

pentru care factorul integrant este $\mu = e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$.

Prin înmulțire cu μ , vom avea:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{x}\right)' &= -\frac{\ln x}{x^2} \\ \frac{z}{x} &= -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln x + 1}{x} + C \\ z &= Cx + \ln x + 1 \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1.$$

Pentru $y(1) = 1$, se obține $C = 0$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y = \frac{1}{\ln x + 1}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x*diff(y)+y==y^2*log(x);
cond=y(1)==1;
y=dsolve(eqn,cond)
y =
1/(log(x) + 1)
```

$$\text{b) } xy' - y = -2x^2y^2 \xrightarrow{\cdot y^2} xy^{-2}y' - y^{-1} = -2x^2 \xrightarrow{\cdot x} y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -2x$$

Se notează $y^{-1} = z$. Se obține ecuația liniară în z :

$$z' + \frac{1}{x}z = 2x.$$

Prin înmulțire cu factorul integrant x , vom avea:

$$xz' + z = 2x^2 \Leftrightarrow (xz)' = 2x^2,$$

de unde rezultă:

$$xz = \frac{2}{3}x^3 + C \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x} \Leftrightarrow z = \frac{2x^3 + 3C}{3x}.$$

Revenind la funcția necunoscută y , se obține soluția generală:

$$y = \frac{3x}{2x^3 + 3C}.$$

Din condiția $y(1) = 1$ rezultă $C = \frac{1}{3}$, deci soluția problemei Cauchy este:

$$y = \frac{3x}{2x^3 + 1}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x*diff(y)-y+2*x^2*y^2==0;
cond=y(1)==1;
y=dsolve(eqn,cond)
fplot(y,[-2 2])
y =
x/((2*x^3)/3 + 1/3)
```

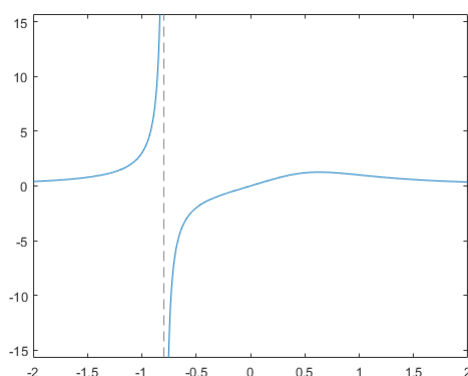


Figura 1.11: Soluția problemei $xy' - y + 2x^2y^2 = 0$, $y(1) = 1$

12. a) Se efectuează schimbarea de funcție:

$$y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}.$$

După înlocuire și efectuarea calculelor, va rezulta ecuația liniară în z :

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x},$$

care are soluția: $z = 1 + \frac{C}{x}$. Soluția ecuației Riccati este:

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x*Dy=y^2-(2*x+1)*y+x^2+2*x','x')
y =
```

$$\frac{x}{x + 1/(C1*x + 1)}$$

b) Prin schimbarea de funcție:

$$y = \frac{1}{z} - \frac{2}{x}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x^2},$$

ecuația devine:

$$\left(-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{x}\right)^2 + \frac{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Efectuând calculele, se obține ecuația liniară $z' - 1 = 0$, cu soluția $z = x + C$.

Soluția ecuației Riccati este: $y = \frac{1}{x + C} - \frac{2}{x}$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('Dy+y^2+(4/x)*y+2/(x^2)=0','x')
y =
```

$$\frac{-2/x}{1/(C1 + x) - 2/x}$$

13. a) Se notează: $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$. Ecuația devine:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

După efectuarea calculelor se obține ecuația liniară:

$$z' - \frac{2}{3x} z = \frac{1}{3},$$

cu soluția generală $z = x + C\sqrt[3]{x^2}$.

Pentru ecuația Riccati, soluția generală este:

$$y = \frac{2x + C\sqrt[3]{x^2}}{x(x + C\sqrt[3]{x^2})} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + C\sqrt[3]{x^2}}.$$

Din condiția $y(1) = 2$, rezultă $C = 0$. Soluția problemei este: $y = \frac{2}{x}$.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=diff(y)==(-1/3)*y^2-(2/(3*x^2));
cond=y(1)==2;
y=dsolve(eqn, cond)
y =
    2/x
```

b) Se efectuează schimbarea de funcție $y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$.

Înlocuind în ecuație, vom avea succesiv:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z'}{z^2} &= \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - 2x \left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 1 \\ -\frac{z'}{z^2} &= x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - 2x^2 - \frac{2x}{z} + x^2 \\ -\frac{z'}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \Rightarrow z' = -1 \Rightarrow z = -x + C \end{aligned}$$

Din substituția $y = x + \frac{1}{z}$, deducem că $z = \frac{1}{y - x}$.

Soluția generală a ecuației de tip Riccati este:

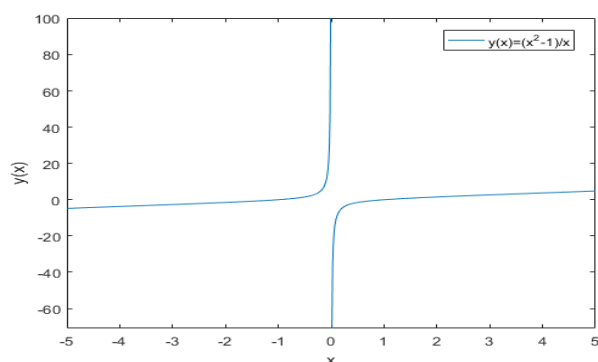
$$\frac{1}{y - x} = -x + C \Rightarrow y = x + \frac{1}{C - x}.$$

Din condiția $y(1) = 0$ rezultă $C = 0$. Înlocuind în soluția generală, se obține:

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(diff(y)==1+x^2-2*x*y+y^2, y(1)==0)
fplot(x,y)
legend('y(x)=(x^2-1)/x')
xlabel('x'), ylabel('y(x)')
y =
    x - 1/x
```

Figura 1.12: Soluția problemei $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$, $y(1) = 0$

14. a) Ecuația se scrie sub forma echivalentă:

$$(x^2 + 2x + y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Notăm $P(x, y) = x^2 + 2x + y^2$, $Q(x, y) = 2xy$. Are loc:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

deci, ecuația este cu diferențială totală exactă, adică, există funcția $U(x, y)$ astfel încât $dU = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \\ U(x, y) &= \int (x^2 + 2x + y^2) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 + C(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Q(x, y) \Rightarrow 2xy + C'(y) = 2xy \Rightarrow C'(y) = 0, C(y) = C \end{aligned}$$

Soluția generală sub forma implicită este:

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 = C.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=2*x*y*diff(y)+x^2+2*x+y^2==0;
y=dsolve(eqn);
simplify(y)
ans =
(3^(1/2)*(-x*(x^3 + 3*x^2 + C1))^(1/2))/(3*x)
-(3^(1/2)*(-x*(x^3 + 3*x^2 + C1))^(1/2))/(3*x)
```

b) Are loc egalitatea:

$$\frac{\partial}{\partial y} (xy^2 + x^3) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2y + y^3) = 2xy.$$

Rezultă că există $U(x, y)$ pentru care au loc relațiile:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy^2 + x^3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + y^3.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int (xy^2 + x^3) dx = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= x^2y + C'(y) = x^2y + y^3 \\ C'(y) &= y^3 \Rightarrow C(y) = \frac{y^4}{4}. \end{aligned}$$

Soluția generală:

$$U(x, y) = C \Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = C \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4C.$$

Soluția se mai poate scrie:

$$x^2 + y^2 = C, \quad C > 0.$$

Altă metodă: Ecuația poate fi rezolvată și ca ecuație omogenă. Se face schimbarea de funcție:

$$y(x) = xu(x), \quad dy = xdu + udx.$$

$$\begin{aligned} (x^3u^2 + x^3) dx + (x^3u + x^3u^3) (xdu + udx) &= 0 \mid : x^3 \\ (u^2 + 1) dx + (u + u^3) (xdu + udx) &= 0 \\ (u^2 + 1 + u^2 + u^4) dx + x(u + u^3) du &= 0 \\ (1 + u^2)^2 dx + xu(1 + u^2) du &= 0 \mid : (1 + u^2) \\ (1 + u^2) dx + xu du &= 0 \end{aligned}$$

Ecuația obținută este cu variabile separabile.

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{1 + u^2} = 0 \Rightarrow 2 \ln x + \ln(1 + u^2) = \ln C \Rightarrow x^2(1 + u^2) = C$$

Revenind la variabilele inițiale, va rezulta:

$$x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = C \Rightarrow x^2 + y^2 = C.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=(x^2*y+y^3)*diff(y)+x*y^2+x^3==0;
y=simplify(dsolve(eqn))
y =
(- x^2 + 2*C1)^(1/2)
-(- x^2 + 2*C1)^(1/2)
```

c) Fie $P(x, y) = e^x + y + \sin y$, $Q(x, y) = e^y + x + x \cos y$. Are loc:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Există $U(x, y)$ astfel încât: $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$ și $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y$$

$$U(x, y) = \int (e^x + y + \sin y) dx = e^x + xy + x \sin y + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x \cos y$$

$$x + x \cos y + C'(y) = e^y + x + x \cos y \Rightarrow C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = e^y$$

Soluția generală este: $e^x + xy + x \sin y + e^y = C$.

$$\mathbf{15. a)} \underbrace{(x^2 - y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{ecuația nu este cu diferențială totală}$$

Căutăm un factor integrant.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

Înmulțind ecuația dată cu μ , se obține ecuația cu diferențială totală exactă:

$$\left(1 - \frac{y}{x^2} \right) dx + \frac{1}{x} dy = 0.$$

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{y}{t^2}\right) dt + \int_{y_0}^y \frac{1}{x_0} dt = \left(t + \frac{y}{t}\right) \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{x_0} t \Big|_{y_0}^y \\
 &= x + \frac{y}{x} - x_0 - \frac{x_0}{x_0}
 \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației este: $x + \frac{y}{x} = C \Leftrightarrow y = Cx - x^2$.

Soluție Matlab:

```

syms y(x)
y=dsolve(x^2-y+x*diff(y)==0)
y =
- x^2 + C1*x

```

b) Notăm $P(x, y) = \frac{y}{x}$ și $Q(x, y) = y^3 - \ln x$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Se determină un factor integrant.

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{x}{y} \left(-\frac{2}{x} \right) = -\frac{2}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}$$

Înmulțind ecuația dată cu μ , se obține ecuația cu diferențială totală exactă:

$$\frac{1}{xy} dx + \left(y - \frac{\ln x}{y^2} \right) dy = 0$$

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{ty} dt + \int_{y_0}^y \left(t - \frac{\ln x_0}{t^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{y} \ln t \Big|_{x_0}^x + \frac{t^2}{2} \Big|_{y_0}^y + \ln x_0 \cdot \frac{1}{t} \Big|_{y_0}^y \\
 &= \frac{1}{y} (\ln x - \ln x_0) + \frac{y^2 - y_0^2}{2} + \ln x_0 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right)
 \end{aligned}$$

Soluția generală în forma implicită este:

$$\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C.$$

16. Verificăm dacă ecuația este cu diferențială totală.

$$\begin{aligned} P(x, y) = x^2 - 3y^2 \\ Q(x, y) = 2xy \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -6y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2y \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Căutăm un factor integrant.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{-8y}{2xy} = -\frac{4}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4}$$

Înmulțind ecuația cu μ , se obține ecuația cu diferențială totală:

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} \right) dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

Rezultă că există $U(x, y)$ pentru care au loc relațiile:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^3}.$$

Atunci:

$$U(x, y) = \int \frac{2y}{x^3} dy = \frac{y^2}{x^3} + C(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^4} + C'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{x}.$$

Soluția generală:

$$U(x, y) = C \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^3} - \frac{1}{x} = C \Leftrightarrow y^2 = Cx^3 + x^2.$$

Pentru a afla soluția problemei Cauchy, folosim condiția inițială.

$$y(1) = \sqrt{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y^2 = x^3 + x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{x+1}.$$

Pentru soluția obținută, condiția inițială este verificată.

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(x^2-3*y^2+2*x*y*diff(y)==0, y(1)==sqrt(2))
y =
x*(x + 1)^(1/2)
```


17. a) Se notează $y' = p(x)$. Ecuația devine $y = xp - e^p$. Prin derivare, rezultă:

$$y' = p + xp' - e^p p' \Rightarrow p'(x - e^p) = 0.$$

Cazul 1. $p' = 0 \Rightarrow p = C$

Soluția generală este: $y = xC - e^C$ (o familie de drepte).

Cazul 2. $x - e^p = 0 \Rightarrow x = e^p$

Se obține soluția singulară definită parametric:

$$\begin{cases} x = e^p \\ y = p e^p - e^p \end{cases}.$$

b) Se face substituția $y' = p$, apoi se derivează ecuația obținută:

$$y = xp + \sqrt{1+p^2} \Rightarrow y' = p + xp' + \frac{pp'}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow p' \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) = 0$$

Cazul 1. $p' = 0 \Rightarrow p = C$, de unde rezultă soluția generală:

$$y = xC + \sqrt{1+C^2}.$$

Cazul 2. $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, de unde se obține soluția singulară în forma parametrică:

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}.$$

Soluția singulară se poate scrie sub forma: $x^2 + y^2 = 1, y > 0$.

18. a) Notând $y' = p$, ecuația devine: $y = 2xp - e^p$.

Prin derivare rezultă:

$$y' = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - e^p \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow 0 = p + 2x \frac{dp}{dx} - e^p \frac{dp}{dx}.$$

Înmulțind ecuația obținută cu $\frac{dx}{dp}$, va rezulta o ecuație liniară cu funcția necunoscută $x(p)$:

$$p \frac{dx}{dp} + 2x = e^p \Leftrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{e^p}{p}.$$

Se calculează factorul integrant:

$$\mu = e^{\int \frac{2}{p} dp} = e^{2 \ln p} = p^2.$$

Se înmulțește ecuația cu μ și se obține:

$$p^2 x' + 2px = pe^p \xrightarrow{\int} p^2 x = e^p (p - 1) + C.$$

Rezultă soluția generală (forma parametrică):

$$\begin{cases} x = \frac{e^p (p - 1)}{p^2} + \frac{C}{p^2} \\ y = 2 \left(\frac{e^p (p - 1)}{p^2} + \frac{C}{p^2} \right) p - e^p \end{cases}.$$

Soluție singulară: $p = 0 \Rightarrow y = -1$.

b) Se notează $y' = p$ și se derivează ecuația obținută.

$$\begin{aligned} y &= (1 + p)x + p^2 \\ y' &= x \frac{dp}{dx} + (1 + p) + 2p \frac{dp}{dx} \\ 0 &= x \frac{dp}{dx} + 1 + 2p \frac{dp}{dx} \Big| \cdot \frac{dx}{dp} \\ 0 &= x + \frac{dx}{dp} + 2p \end{aligned}$$

S-a obținut o ecuație liniară cu funcția necunoscută x și variabila p :

$$x' + x = -2p.$$

Factorul integrant este $\mu = e^{\int 1 dp} = e^p$. Înmulțind ecuația cu μ , se obține:

$$\begin{aligned} (xe^p)' &= -2pe^p \\ xe^p &= \int -2pe^p dp \\ xe^p &= -2pe^p + 2e^p + C \\ x &= -2p + 2 + Ce^{-p} \end{aligned}$$

Soluția generală sub forma parametrică este:

$$\begin{cases} x = -2p + 2 + Ce^{-p} \\ y = (1 + p)(-2p + 2 + Ce^{-p}) + p^2 \end{cases}.$$

c) Prin schimbarea de funcție $y' = p$, se obține ecuația: $y = x \left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p} \right)$.

Prin derivare, rezultă:

$$\begin{aligned} p &= \frac{p}{2} + \frac{2}{p} + x \left(\frac{p'}{2} - \frac{2p'}{p^2} \right) \\ \frac{p}{2} - \frac{2}{p} &= x \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} \right) p' \\ p \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} \right) &= x \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} \right) p' \end{aligned}$$

Cazul I Dacă $\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} \neq 0$, atunci se obține ecuația $p = xp'$ cu soluția $p = Cx$.

Soluția generală, în forma parametrică, a ecuației Lagrange este:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{C} \\ y = \frac{p}{C} \left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p} \right) \end{cases}.$$

Eliminând p , se obține soluția generală sub forma explicită:

$$y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{2}{C}.$$

Cazul II Dacă $\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} = 0$, atunci $p^2 = 4$. Se obțin soluțiile singulare:

$$y = 2x, y = -2x.$$

19. a) Se notează $P(x, y) = 2xy - 2y^3$ și $Q(x, y) = x^2 - 6xy^2$. Avem:

$$\frac{\partial}{\partial y} (2xy - 2y^3) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 6xy^2) = 2x - 6y^2,$$

deci, ecuația este cu diferențială totală exactă.

Determinăm funcția $U(x, y)$ pentru care are loc egalitatea:

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (2ty - 2y^3) dt + \int_{y_0}^y (x_0^2 - 6x_0t^2) dt \\ &= (yt^2 - 2y^3t) \Big|_{x_0}^x + (x_0^2t - 2x_0t^3) \Big|_{y_0}^y \\ &= y(x^2 - x_0^2) - 2y^3(x - x_0) + x_0^2(y - y_0) - 2x_0(y^3 - y_0^3) \\ &= x^2y - 2y^3x - x_0^2y_0 + 2x_0y_0^3 \end{aligned}$$

Soluția generală în forma implicită este:

$$x^2y - 2xy^3 = C.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(2*x*y-2*y^3+(x^2-6*x*y^2)*diff(y)==0)
y =
root(2*x*z^3 - x^2*z - C1, z)
```

b) Ecuația este cu variabile separabile. Împărțind cu $(1+y)(1-x)$, ecuația devine:

$$\frac{x^3}{1-x}dx + \frac{y^2}{1+y}dy = 0.$$

Prin integrare, se obține soluția generală sub forma implicită:

$$\ln(y+1) - y + \frac{1}{2}y^2 - x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = C.$$

c) Ecuația este de tip Clairaut. Se notează $y' = p$. Ecuația devine:

$$y = xp + \cos p.$$

Prin derivare, se obține:

$$y' = p + xp' - \sin p \cdot p' \Rightarrow p'(x - \sin p) = 0.$$

Cazul I $p' = 0 \Rightarrow p = C$, de unde rezultă soluția generală:

$$y = xC + \cos(C), C \in \mathbb{R}.$$

Cazul II $x - \sin p = 0$, de unde rezultă soluția singulară dată parametric:

$$\begin{cases} x = \sin p \\ y = p \sin p + \cos p \end{cases}.$$

20. a) Ecuația dată se poate rezolva prin două metode.

I Notăm $P(x, y) = y + \ln x$, $Q(x, y) = -x$. Rezultă că:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Determinăm un factor integrant.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Înmulțind ecuația cu μ , se obține ecuația cu diferențială totală exactă:

$$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Se determină funcția $U(x, y)$ pentru care are loc relația:

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x \left(\frac{y}{t^2} + \frac{\ln t}{t^2}\right) dt - \int_{y_0}^y \frac{1}{x_0} dt \\ &= \left(-\frac{y}{t} - \frac{\ln t + 1}{t}\right) \Big|_{x_0}^x - \frac{t}{x_0} \Big|_{y_0}^y \\ &= -\frac{y}{x} + \frac{y}{x_0} - \frac{\ln x + 1}{x} + \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - \frac{y}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} \end{aligned}$$

Se obține soluția generală:

$$-\frac{y}{x} - \frac{\ln x + 1}{x} - C = 0 \Rightarrow y + \ln x + 1 = Cx \Rightarrow y = Cx - \ln x - 1.$$

Din $y(1) = 0$ se obține $C = 1$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y = x - \ln x - 1.$$

II Ecuația dată este o ecuație liniară de ordinul întâi:

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0 \Leftrightarrow xy' - y = \ln x \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Înmulțind ecuația cu factorul integrant $e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$, se obține:

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{\ln x}{x^2},$$

de unde rezultă:

$$\frac{y}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + C \Rightarrow y = Cx - \ln x - 1.$$

b) Ecuația poate fi rezolvată prin două metode: ca ecuație omogenă sau ca ecuație cu diferențială totală exactă.

I Se face schimbarea de funcție: $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, $y' = u + xu'$.

$$\begin{aligned} u + xu' &= -\frac{2u}{1+u^2} \Big| - u \\ xu' &= -\frac{u^3+3u}{u^2+1} \\ \frac{(u^2+1)du}{u^3+3u} &= -\frac{dx}{x} \Big| \int \\ \ln(u^3+3u) + 3\ln x &= \ln C \\ x^3(u^3+3u) &= C \end{aligned}$$

Revenind la funcția necunoscută inițială, se obține:

$$y^3 + 3x^2y = C.$$

Din $y(1) = 1$ rezultă $C = 4$ deci soluția problemei este: $y^3 + 3x^2y = 4$.

II Ecuația se scrie echivalent: $2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$.

Fiind o ecuație cu diferențială totală, există $U(x, y)$ astfel încât:

$$dU(x, y) = 2xy dx + (x^2 + y^2) dy.$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x 2ty dt + \int_{y_0}^y (x_0^2 + t^2) dt = t^2y \Big|_{x_0}^x + \left(x_0^2t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{y_0}^y \\ &= x^2y - x_0^2y + x_0^2y_0 - x_0^2y_0 + \frac{y^3}{3} - \frac{y_0^3}{3}, \end{aligned}$$

de unde rezultă soluția generală: $x^2y + \frac{y^3}{3} = C$.

c) Ecuația este cu variabile separabile.

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \Rightarrow \ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = \ln C, C > 0,$$

de unde rezultă: $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

Din condiția $y(1) = 1$, se obține $C = 4$. Soluția problemei Cauchy este:

$$(1+x^2)(1+y^2) = 4 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}},$$

pentru care condiția inițială este verificată.

21. Ecuația $x' - 2x = t + 1$ este o ecuație diferențială de ordinul I, liniară și neomogenă, având soluția generală: $x = x_0 + x_p$, unde $x_0 = Ce^{2t}$ iar soluția particulară este $x_p = -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}$.

Ținând cont de condiția inițială $x(0) = 1$, va rezulta $C = \frac{7}{4}$.

Soluția problemei Cauchy este: $x = \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$.

Cod Matlab:

```
f=inline('2*x+t+1','t','x');
[t,x]=ode45(f,[0,exp(1)],1);
plot(t,x,'o'); hold on
syms x(t)
x=dsolve(diff(x)==2*x+t+1,x(0)==1);
tmin=0; tmax=exp(1); nt=30;
t=linspace(tmin,tmax,nt);
x_analitic=7*exp(2*t)/4-t/2-3/4;
plot(t,x_analitic,'--r')
xlabel('t'); ylabel('x');
title('Solutia numerica si analitica a problemei:
      x`=2x+t+1, x(0)=1');
legend('Solutia numerica (ode45)', 'Solutia exacta:
      x=7/4e^{2t}-t/2-3/4')
grid on; hold off
```

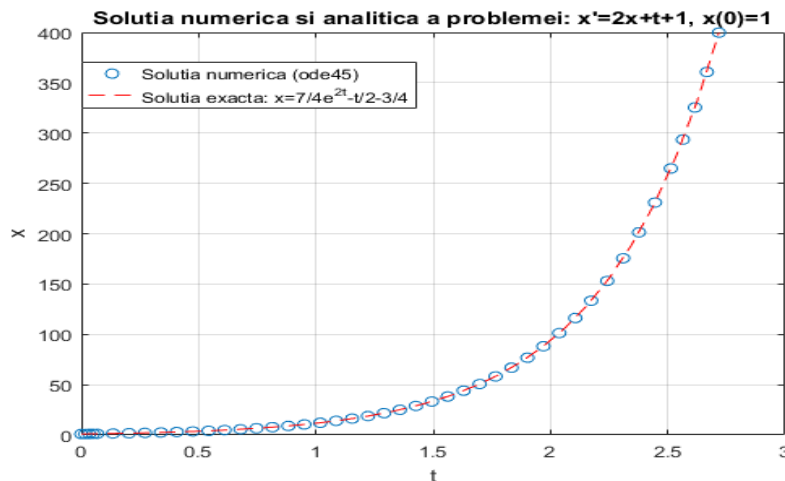


Figura 1.13: Soluția problemei (1.5.1)

1.6 Exerciții propuse

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale cu variabile separabile:

a) $(x^2 - 1)y' - xy = 0$

b) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$

c) $xy' \cos y + \sin y = 0$

d) $(x^6 + 4)y' = x^2(1 + e^{-y})$

e) $\sqrt{y^2 + 1}dx - xydy = 0$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $1 + y^2 + xyy' = 0, y(1) = 0$

b) $(y^2 + 1)dx + (2x + 1)y^2dy = 0, y(1) = 0$

c) $y\sqrt{1 + x^2}y' + x\sqrt{1 + y^2} = 0, y(1) = 1$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene (în sens Euler):

a) $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$

b) $2x + y = (4x - y)y'$

c) $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$

d) $xyy' = y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x \neq 0$

4. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $xyy' = x^2 + y^2, y(1) = 0$

b) $x^2 + 2y^2 = xyy', y(1) = 2$

5. Să se integreze următoarele ecuații reducibile la ecuații omogene:

a) $(4x - 5y + 13)y' = 2x - 3y + 7$

b) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$

c) $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$

d) $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$

6. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y' = \frac{2x + y + 1}{-x - 2y + 1}, y(1) = 1$

b) $(3x + 3y - 1) dx + (2x + 2y) dy = 0, y(0) = 2$

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare:

a) $xy' - 2y = 2x^4$

b) $y' = 2xy + 2xe^{x^2}$

c) $y' \cos x + y \sin x = 1$

d) $y' + y \sin x = 2x \cdot e^{\cos x}$

e) $xy' - y = x^2 \operatorname{arctg} x$

8. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $xy' - y = x^2 e^x, y(1) = 1$

b) $y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = 2x + 2, y(0) = -3$

c) $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}, y(0) = 1$

d) $xy' - y + \ln x = 0, y(1) = 2$

9. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Bernoulli:

a) $y' + 2xy = \frac{x}{y^3}$

b) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

c) $xy' + 2y = -x^5 y^3 e^x$

d) $y' + y \operatorname{tg} x = y^2$

10. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Riccati:

a) $y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}, y_1 = \frac{1}{x}$

b) $y' - y^2 - y \operatorname{ctg} x + \sin^2 x = 0, y_1 = \sin x$

c) $y' = \frac{x}{2}y^2 - \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x^3}, y_1 = \frac{1}{x^2}$

11. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $xy' + y = x^3 y^4, y(1) = 1$

b) $(x - 1)y' - y = y^2, y(2) = 1$

c) $y' - y^2 + 2e^x y = e^x + e^{2x}, y_1 = e^x, y(0) = 2$

12. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală exactă:

a) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

b) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

c) $(y^3 + \ln x)y' + \frac{y}{x} = 0$

d) $(e^x \sin y + e^{-y})dx + (e^x \cos y - xe^{-y})dy = 0$

e) $(x^2 - y - xe^y)y' + 2xy - x - e^y$

13. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0, y(1) = 1$

b) $(3x + 2y)y' + 2x + 3y = 0, y(0) = 1$

c) $y' = \frac{\cos y}{x \sin y - y^2}, y(1) = 0$

14. Să se integreze următoarele ecuații, folosind factorul integrant:

a) $xy' + x^2 \cos x - y = 0$

b) $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$

c) $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$

15. Să se rezolve problema Cauchy:

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0, y(0) = 1.$$

16. Să se integreze următoarele ecuații de tip Clairaut:

a) $y = xy' + y'^3$

b) $y = xy' - \sin y'$

c) $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$

d) $y = xy' - 2 - y'$

17. Să se integreze următoarele ecuații de tip Lagrange:

a) $y = 2xy' + \ln y'$

b) $yy' = 2xy'^2 + 1$

c) $y = -xy' - y'^2$

d) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$

18. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

- a) $\left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right) y' = y, \quad x > 0$
- b) $x^2(y + 1) dx + (x^3 - 1)(y - 1) dy = 0$
- c) $(ye^{xy} - 4xy)dx + (xe^{xy} - 2x^2)dy = 0$
- d) $xy' + 2y = -x^5y^3e^x$

19. Să se rezolve problemele Cauchy următoare:

- a) $y' = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$
- b) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$
- c) $y' + y^2 \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad y_1 = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 2$

20. Folosind metoda lui Euler, să se afle soluția numerică a problemei:

$$2y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1], \quad h = 0, 1.$$

Să se reprezinte grafic soluția numerică și cea analitică.

21. Folosind metoda lui Runge-Kutta de ordinul 4, să se determine soluția numerică a problemei:

$$y' = \frac{y}{x} - y^2, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 2], \quad h = 0, 2.$$

Să se reprezinte grafic soluția numerică și soluția exactă a problemei.

22. Folosind funcția ode23, să se rezolve problema:

$$y' = 2y + e^x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2].$$

23. Folosind funcția ode45, să se rezolve problema:

$$y' = x + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2].$$

Capitolul 2

Ecuatii diferențiale de ordin superior

2.1 Noțiuni generale. Exemple.

O ecuație diferențială ordinară de ordinul n are forma generală (implicită):

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

unde F este o funcție dată iar $y = y(x)$, $x \in I$, este funcția necunoscută.

În forma normală, o ecuație diferențială de ordinul n se scrie astfel:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (2.1.1)$$

unde f este o funcție continuă cu $n + 1$ variabile.

Definiția 2.1.1. *O funcție de clasă C^n care verifică ecuația diferențială (2.1.1), se numește soluție a ecuației. Soluția generală a ecuației este o funcție care depinde de n constante reale independente și care verifică ecuația.*

Determinarea soluției ecuației (2.1.1) care verifică n condiții inițiale date:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se numește **problemă Cauchy**.

Exemplul 2.1.2. *Legea fundamentală a dinamicii este exprimată prin ecuația:*

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

unde f este forța care acționează asupra unui corp de masă m .

În particular, în căderea liberă a unui corp, asupra acestuia acționează forța de greutate. Din ecuația:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

prin două integrări succesive, rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1 \quad \Big| \int \quad (2.1.2)$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (2.1.3)$$

Considerând $t = 0$, din relația (2.1.2) se obține

$$C_1 = x'(0) = v_0 \quad (\text{viteza inițială})$$

iar din relația (2.1.3) se obține

$$C_2 = x(0) = x_0 \quad (\text{poziția inițială}).$$

Astfel, poziția corpului aflat în cădere liberă, la un moment t este dată prin:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0.$$

Exemplul 2.1.3. Se consideră un circuit electric format dintr-un rezistor cu rezistența R , legat în serie cu un condensator cu capacitatea C , o bobină de inductanță L și o sursă electromotoare care generează o tensiune $E(t)$. Se notează cu $Q(t)$ sarcina electrică a condensatorului și cu $I(t)$ intensitatea curentului.

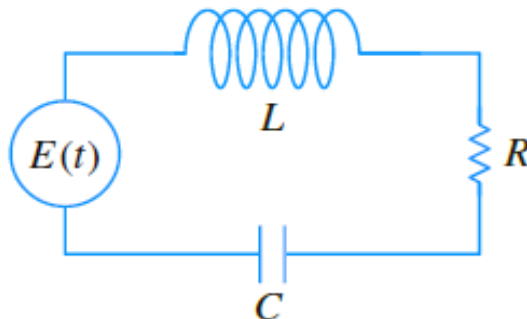


Figura 2.1: Circuit electric

Conform legii lui Kirchhoff, are loc relația:

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t). \quad (2.1.4)$$

Deoarece $I(t) = Q'(t)$, relația (2.1.4) devine:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t).$$

O altă ecuație diferențială de ordinul doi se obține derivând ecuația (2.1.4):

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{I(t)}{C} = E'(t).$$

Aflarea soluției generale a ecuației (2.1.1) este o problemă dificilă care poate fi rezolvată teoretic doar pentru anumite tipuri de ecuații diferențiale. Printre acestea se află ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior dar și unele ecuații diferențiale pentru care se poate reduce ordinul.

Exemple de ecuații diferențiale pentru care se poate reduce ordinul

- ecuații de tipul: $y^{(n)}(x) = f(x)$ (se integrează ecuația de n ori)
- ecuații din care lipsesc funcția necunoscută și primele sale derivate:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{se notează } y^{(k)}(x) = u(x))$$

- ecuații din care lipsește variabila independentă x :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{se notează } y'(x) = z(y))$$

- ecuații diferențiale omogene în raport cu $y, y', \dots, y^{(n)}$ (schimbare de funcție: $u = \frac{y'}{y}$)

Exemple 2.1.4. a) $y'' = xe^x$ b) $xy^{(4)} - 3y''' - 4x^2 = 0, x \neq 0$
 c) $y'' = 2yy'$ d) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

Soluții: a) Integrând succesiv de două ori, se obține soluția:

$$y = (x - 2)e^x + C_1x + C_2.$$

b) Prin schimbarea de funcție $y''' = u(x)$, se obține ecuația:

$$xu' - 3u = 4x^2 \Leftrightarrow u' - \frac{3}{x}u = 4x,$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi și are soluția

$$u(x) = C_1 x^3 - 4x^2, \text{ adică, } y''' = C_1 x^3 - 4x^2.$$

Se integrează ecuația obținută de trei ori și se obține soluția generală.

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{C_1 x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + C_2 \\ y' &= \frac{C_1 x^5}{20} - \frac{x^4}{3} + C_2 x + C_3 \\ y &= \frac{C_1 x^6}{120} - \frac{x^5}{15} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned}$$

c) Facem schimbarea de funcție $y'(x) = z(y)$, care implică:

$$y''(x) = z'(y)y'(x), \text{ adică, } y''(x) = z'(y)z(y).$$

Se obține ecuația $zz' = 2yz$, de unde rezultă $z = 0$ sau $z' = 2y$.

Dacă $z = 0$, atunci $y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$.

Dacă $z' = 2y$, atunci $z = y^2 + C_1$, adică, $y' = y^2 + C_1$, care este o ecuație diferențială de ordinul întâi cu variabile separabile. Avem cazurile:

$$\begin{aligned} (1) \quad C_1 > 0 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2 \\ (2) \quad C_1 < 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}} \right| = x + C_2 \\ (3) \quad C_1 = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2 \Rightarrow y = \frac{-1}{x + C_2} \end{aligned}$$

d) Ecuația este omogenă în y, y', y'' . Se face schimbarea de funcție:

$$u = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = uy, \quad y'' = y(u' + u^2).$$

Se obține ecuația de tip Bernoulli: $u' - \frac{1}{x}u = -2u^2$, pentru care se determină

soluția: $u = \frac{x}{x^2 + C_1}$.

Revenind la y , vom obține ecuația cu variabile separate:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1},$$

de unde rezultă soluția generală a ecuației inițiale:

$$y^2 = C_2(x^2 + C_1), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x*y*diff(y,2)+x*diff(y)^2-y*diff(y)==0;
y=dsolve(eqn)
y =
      C1
  (C2*x^2 + C1)^(1/2)
-(C2*x^2 + C1)^(1/2)
```

2.2 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n

O ecuație diferențială liniară neomogenă de ordinul n este o ecuație de forma:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (2.2.1)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue iar f este funcție nenulă. Ecuația diferențială liniară omogenă asociată ecuației (2.2.1) este:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (2.2.2)$$

Proprietatea 2.2.1. Mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale (2.2.2) formează un spațiu vectorial de funcții reale definite pe I .

Definiția 2.2.2. Funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numesc liniar independente dacă din egalitatea

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n = 0, \text{ unde } C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

rezultă $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$. În caz contrar, funcțiile se numesc liniar dependente pe I .

Definiția 2.2.3. Se numește **wronskianul** asociat funcțiilor $y_1, y_2, \dots, y_n$ derivabile de ordinul $n-1$, determinantul (lui Wronski):

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.2.4. Dacă funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile de ordinul $n-1$ pe I sunt liniar dependente pe I , atunci $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, (\forall)x \in I$.

Teorema 2.2.5. Dacă funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (2.2.2), atunci $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0, (\forall)x \in I$.

Teorema 2.2.6. Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt soluții ale ecuației diferențiale (2.2.2) liniar independente (adică, formează un sistem fundamental de soluții), atunci orice soluție a ecuației are forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}. \quad (2.2.3)$$

Relația (2.2.3) reprezintă soluția generală a ecuației omogene (2.2.2).

Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt funcții liniar independente, atunci există o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul n , care admite sistemul fundamental de soluții $y_1, y_2, \dots, y_n$. Această ecuație are forma:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \dots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplul 2.2.7. Să se determine ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul doi care are soluțiile $y_1 = e^{2x}$ și $y_2 = e^{-x}$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^x \neq 0,$$

deci y_1, y_2 formează un sistem fundamental de soluții al unei ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul 2. Această ecuație se poate determina în două moduri.

1. Ecuația diferențială determinată este:

$$W(y, y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{-x} \\ y' & 2e^{2x} & -e^{-x} \\ y'' & 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă ecuația: $y'' - y' - 2y = 0$.

2. Soluția generală a ecuației diferențiale este: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Ecuația diferențială se obține derivând de două ori expresia soluției și eliminând constantele.

Soluția generală a ecuației (2.2.1) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene (2.2.2) și o soluție particulară a ecuației neomogene.

Dacă nu se poate determina o soluție particulară a ecuației neomogene, atunci se poate afla soluția generală a acesteia, prin *metoda variației constantelor* (a lui Lagrange), folosind soluția generală a ecuației omogene asociate.

2.3 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți constanți

O ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți este o ecuație de forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (2.3.1)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ iar f este o funcție continuă pe I .

Ecuația (2.3.1) este omogenă dacă $f(x) = 0$ și este neomogenă în caz contrar.

2.3.1 Ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți

Pentru a rezolva ecuația diferențială liniară omogenă

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (2.3.2)$$

se rezolvă ecuația caracteristică asociată:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0. \quad (2.3.3)$$

În funcție de natura rădăcinilor ecuației (2.3.3), avem următoarele cazuri:

Cazul 1. Ecuația caracteristică are rădăcinile reale distincte: $r_1, r_2, \dots, r_n$. În acest caz, un sistem fundamental de soluții al ecuației (2.3.2), este:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Exemplul 2.3.1. $y'' + 3y' - 4y = 0$

Ecuația caracteristică asociată $r^2 + 3r - 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -4$. Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Cazul 2. Ecuația caracteristică are rădăcini reale multiple.

Dacă r_1 este rădăcină multiplă de ordinul p atunci ecuația diferențială admite soluțiile:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_1 x}, \dots, y_p = x^{p-1} e^{r_1 x}.$$

Exemplul 2.3.2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Ecuția caracteristică asociată: $r^2 - 6r + 9 = 0$ are rădăcinile reale egale $r_1 = r_2 = 3$. Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Cazul 3. Ecuția caracteristică are rădăcini complexe.

Dacă ecuația caracteristică are rădăcina complexă simplă $r_1 = \alpha + \beta i$, atunci ecuația diferențială admite soluțiile:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Exemplul 2.3.3. $y'' + 4y' + 5y = 0$

Ecuția caracteristică asociată: $r^2 + 4r + 5 = 0$ are rădăcinile complexe $r_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x,$$

adică, $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Exemplul 2.3.4. *Ecuția oscilatorului armonic:*

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

are soluția generală:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t),$$

care se mai scrie:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{unde } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \varphi = \frac{C_2}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{C_1}{A}.$$

Dacă se cunoaște soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare și omogene de ordin n , cu coeficienți constanți, atunci se poate deduce ecuația caracteristică asociată ecuației, apoi se scrie ecuația diferențială.

Exemplul 2.3.5. *Să se determine ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți, care are soluția generală $y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x$.*

Soluție: Sistemul fundamental de soluții este format din:

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x.$$

Aceste soluții corespund rădăcinilor $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \pm i$. Ecuația caracteristică având aceste rădăcini este:

$$(r+1)(r^2+1)=0 \Leftrightarrow r^3+r^2+r+1=0.$$

Se obține ecuația diferențială: $y''' + y'' + y' + y = 0$.

Pentru a rezolva o problemă Cauchy, se rezolvă mai întâi ecuația diferențială și se scrie soluția generală a acesteia. Folosind condițiile inițiale date, se obține un sistem de ecuații din care se determină valorile constantelor corespunzătoare soluției problemei Cauchy date.

Exemplul 2.3.6. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

Soluție: Ecuația caracteristică asociată: $r^3 - 3r^2 - 9r - 5 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 5$.

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{5x}.$$

Pentru a afla soluția problemei Cauchy, calculăm derivatele:

$$\begin{aligned} y' &= -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + 5C_3 e^{5x} \\ y'' &= C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 25C_3 e^{5x} \end{aligned}$$

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 1 \\ -C_1 + C_2 + 5C_3 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + 25C_3 = -1 \end{cases}$ și se obțin valorile $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y = e^{-x} + x e^{-x}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=diff(y,3)-3*diff(y,2)-9*diff(y)-5*y==0;
D1=diff(y); D2=diff(y,2);
conds=[y(0)==1,D1(0)==0,D2(0)==-1];
y=dsolve(eqn,conds)
fplot(y,[-1,1])
y =
exp(-x)+x*exp(-x)
```


Soluție: Ecuația caracteristică a ecuației omogene asociate este $r^2 + 1 = 0$ și are soluțiile $r_1 = i$ și $r_2 = -i$. Rezultă că soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Conform metodei variației constantelor, soluția ecuației neomogene are forma:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Funcțiile C_1' și C_2' sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}.$$

Folosind metoda lui Cramer, obținem:

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x, \quad C_2'(x) = 1,$$

de unde, prin integrare, rezultă

$$C_1(x) = \ln |\cos x| + C_1, \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = (\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x,$$

adică,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+y=1/cos(x)','x')
y =
C1*cos(x)+log(cos(x))*cos(x)+C2*sin(x)+x*sin(x)
```

Exemplul 2.3.8. Să se integreze prin metoda variației constantelor, următoarea ecuație:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x.$$

Soluție: Soluția generală a ecuației omogene:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

este:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Se aplică metoda variației constantelor pentru determinarea soluției ecuației neomogene date. Aceasta are forma:

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}.$$

Se determină $C_1'(x)$ și $C_2'(x)$, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = e^{-x} \ln x \end{cases}.$$

Se obțin funcțiile:

$$C_1'(x) = -x \ln x, \text{ respectiv } C_2'(x) = \ln x.$$

Prin integrare, rezultă:

$$C_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2} + C_1, \text{ respectiv } C_2(x) = x \ln x - x + C_2.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2} + C_1 \right) e^{-x} + (x \ln x - x + C_2) x e^{-x},$$

adică:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{3}{4} x^2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 \ln x e^{-x}.$$

Soluție Matlab:

```
dsolve('D2y+2*Dy+y=exp(-x)*log(x)','x');
y=simplify(ans)
y =
(exp(-x)*(4*C1+4*C2*x+2*x^2*log(x)-3*x^2))/4
```

Determinarea soluției particulare a ecuației neomogene (2.3.1) se poate face fără cuadraturi în unele cazuri particulare, și anume când $f(x)$ are o *formă specială*:

$$f(x) = e^{ax} (Q(x) \cos bx + R(x) \sin bx),$$

unde Q, R sunt funcții polinomiale de grad cel mult m și $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă $r = a + bi$ este rădăcină de ordinul $k \geq 0$ a ecuației caracteristice (2.3.3), atunci ecuația neomogenă are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^k e^{ax} [P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx],$$

unde P_1 și P_2 sunt funcții polinomiale de grad cel mult m , ale căror coeficienți se determină prin identificare.

Exemplul 2.3.9. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' - 6y = x^2 + 2x + 5.$$

Soluție: Ecuația omogenă $y'' + y' - 6y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + r - 6 = 0$ cu soluțiile $r_1 = 2$ și $r_2 = -3$. Rezultă soluția:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Soluția particulară a ecuației neomogene date are forma $y_p = ax^2 + bx + c$, deci $y'_p = 2ax + b$ și $y''_p = 2a$. Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$2a + 2ax + b - 6ax^2 - 6bx - 6c = x^2 + x + 1,$$

de unde rezultă sistemul
$$\begin{cases} -6a &= 1 \\ 2a - 6b &= 1 \\ 2a + b - 6c &= 1 \end{cases}.$$

Se obțin valorile $a = -\frac{1}{6}$, $b = -\frac{2}{9}$, $c = -\frac{7}{27}$, deci $y_p = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}$. Soluția generală a ecuației date este $y = y_0 + y_p$, adică:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(diff(y,2)+diff(y)-6*y==x^2+x+1)
y =
C1*exp(2*x)-x^2/6-(2*x)/9+C2*exp(-3*x)-7/27
```

Exemplul 2.3.10. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' = 3e^{-x} + \sin 2x.$$

Soluție: Ecuația caracteristică asociată ecuației omogene $y'' + y' = 0$ este:

$$r^2 + r = 0, \text{ cu soluțiile } r_1 = 0, r_2 = -1.$$

Se obține soluția: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Soluția particulară a ecuației date este:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2},$$

unde y_{p_1} este soluția particulară a ecuației $y'' + y' = 3e^{-x}$ iar y_{p_2} este soluția particulară a ecuației $y'' + y' = \sin 2x$.

Deoarece $r = -1$ este rădăcină simplă a ecuației caracteristice, vom avea:

$$y_{p_1} = axe^{-x},$$

deci $y'_{p_1} = ae^{-x}(-x + 1)$, respectiv $y''_{p_1} = ae^{-x}(x - 2)$.

Înlocuind în ecuația $y'' + y' = 3e^{-x}$, se obține $a = -\frac{3}{2}$, deci $y_{p_1} = -\frac{3}{2}xe^{-x}$.

Ținând cont că $r = 2i$ nu este soluție a ecuației caracteristice, vom avea:

$$y_{p_2} = a \cos 2x + b \sin 2x.$$

Prin derivare, obținem:

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \\ y''_{p_2} &= -4a \cos 2x - 4b \sin 2x. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația $y'' + y' = \sin 2x$, se obține:

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x - 2a \sin 2x + 2b \cos 2x = \sin 2x.$$

Prin identificare rezultă:

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -2a - 4b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{10}, b = -\frac{1}{5},$$

adică $y_{p_2} = -\frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 2x$. Soluția generală a ecuației date este:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2} x e^{-x} - \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 2x.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(diff(y,2)+diff(y)==3*exp(-x)+sin(2*x))
y =
C2*exp(-x)-exp(-x)*(3*x+exp(x)/2+(cos(2*x)*exp(x))
/10+C1*exp(x)+(sin(2*x)*exp(x))/5)
```

Observația 2.3.11. O altă metodă de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordin superior va fi prezentată în capitolul (5).

2.4 Ecuații diferențiale de ordinul n de tip Euler

O ecuație diferențială de ordinul n de tip Euler are forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x). \quad (2.4.1)$$

Notând $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, se obține o ecuație diferențială de ordin n cu coeficienți constanți, cu funcția necunoscută $z(t) = y(e^t)$.

Exemplul 2.4.1. *Să se afle soluția ecuației:*

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x.$$

Soluție: Notăm $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ și $z(t) = y(e^t)$. Prin derivare, rezultă:

$$z'(t) = e^t y'(e^t), \text{ respectiv } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) = z'(t) + e^{2t} y''(e^t),$$

prin urmare, au loc relațiile:

$$y'(e^t) = e^{-t} z'(t), \text{ respectiv } y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)).$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține ecuația liniară cu coeficienți constanți:

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^t.$$

Soluția ecuației omogene asociate este: $z_0 = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Soluția particulară a ecuației neomogene are forma: $z_p = a t e^t$.

Prin identificare se obține $a = -1$, deci $z_p = -t e^t$.

Soluția generală a ecuației în z este:

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - t e^t.$$

Revenind la ecuația inițială, soluția generală este:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 - x \ln x.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(x^2*diff(y,2)-2*x*diff(y)+2*y==x)
y =
C1*x-x+C2*x^2-x*log(x)
```

Exemplul 2.4.2. Să se rezolve problema Cauchy:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

Soluție: Se notează $x = e^t$ și $z(t) = y(e^t)$. Ecuația dată devine:

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0,$$

cu soluția generală:

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Pentru ecuația dată, soluția generală este:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x, \quad x > 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Din condițiile inițiale, se obțin valorile $C_1 = 1$, respectiv $C_2 = -2$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y(x) = x - 2x \ln x.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x^2*diff(y,2)-x*diff(y)+y==0;
Dy=diff(y);
y=dsolve(eqn,y(1)==1,Dy(1)==-1)
y =
x - 2*x*log(x)
```

Observația 2.4.3. Ecuația (2.4.1) se mai poate rezolva notând $y = x^r$, de unde rezultă $y' = r x^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ etc. Se înlocuiesc funcțiile $y, y', y'' \dots$ în ecuația diferențială dată și se rezolvă ecuația în r obținută după împărțirea prin x^r .

Cazuri particulare:

$$1) \quad n = 2 \Rightarrow x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Notând $y = x^r$ se obține ecuația caracteristică:

$$r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0, \quad \text{cu soluțiile } r_1, r_2.$$

Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$, atunci soluția ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$

Dacă $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$, atunci ecuația diferențială are soluția:

$$y = x^{r_1} (C_1 + C_2 \ln x).$$

Dacă $r_{1,2} = a \pm bi$ atunci se obține soluția:

$$y = C_1 x^a \cos(b \ln x) + C_2 x^a \sin(b \ln x).$$

$$2) \ n = 3 \Rightarrow x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Ecuția caracteristică este:

$$r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0.$$

Exemplul 2.4.4. $x^3 y''' + 2xy' - 2y = 0$

Soluție: Notăm $y = x^r$. Se obține ecuația:

$$r(r-1)(r-2) + 2r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0,$$

cu soluțiile $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i$. Soluția ecuației date este:

$$y = C_1 x + x(C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)).$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x^3*diff(y,3)+2*x*diff(y)-2*y==0;
y=dsolve(eqn)
y =
C1*x+C3*x*cos(log(x))+C2*x*sin(log(x))
```

2.5 Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' = x \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

b) $y''' = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$

2. Să se integreze ecuația: $xy^{(4)} - y^{(3)} = 8x^3$.

3. Să se integreze ecuația: $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.

4. Să se determine ecuația diferențială liniară și omogenă care are sistemul fundamental de soluții:

a) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = 2x + 3$

b) $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x \sin x$, $y_3 = e^x \cos x$

c) $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$

5. Să se determine ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți, care are soluția generală:

a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y = C_1 + C_2 e^{2x} \sin x + C_3 e^{2x} \cos x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

c) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

6. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

c) $y^{IV} - 3y'' + 2y = 0$

7. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

b) $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$

c) $y'' - y' = 0$, $y(1) = e + 1$, $y'(1) = e$

d) $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{2}$

8. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $9y'' - 12y' + 4y = 0$

b) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

c) $y^{IV} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$

9. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3.$$

10. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' - 6y' + 10y = 0$

b) $y''' - 2y'' + 5y' = 0$

c) $y^V - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$

11. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y'' + 4y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

12. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

- a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$
- b) $y'' + 2y' + 5y = 3 \sin 2x$
- c) $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 2x$
- d) $y''' - 4y' = 2x^2 + xe^{2x} + x^2e^x$
- e) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \sin x$

13. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

- a) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- b) $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

14. Să se integreze prin metoda variației constantelor următoarele ecuații diferențiale:

- a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$
- b) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

15. Să se rezolve ecuațiile diferențiale de ordin superior de tip Euler:

- a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
- b) $x^2y'' + xy' + y = x$

16. Să se rezolve problema Cauchy:

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1.$$

Soluții:

1. a) Integrăm ecuația de două ori succesiv.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C_1 \\ y &= \int \frac{x \sin 2x}{2} dx + \frac{\sin 2x}{8} + C_1x + C_2 \\ y &= -\frac{x \cos 2x}{4} + \int \frac{\cos 2x}{4} dx + \frac{\sin 2x}{8} + C_1x + C_2 \\ y &= -\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1x + C_2 \text{ (soluția generală)} \end{aligned}$$

Determinăm valorile constantelor, folosind condițiile inițiale.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{4} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Soluția problemei:

$$y = -\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{4}x.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=diff(y,2)==x*cos(2*x);
Dy=diff(y);
conds=[y(0)==0,Dy(0)==1];
y=simplify(dsolve(eqn,conds))
y =
(3*x)/4+sin(2*x)/4-(x*cos(2*x))/4
```

b) Se integrează ecuația de 3 ori succesiv.

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{1}{x+1} + C_1 \\ y' &= -\ln(x+1) + C_1x + C_2 \\ y &= -(x+1)\ln(x+1) + x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \end{aligned}$$

Din condițiile $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$, rezultă $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, $C_3 = 1$.

Soluția problemei este:

$$y = -(x+1)\ln(x+1) + \frac{x^2}{2} + 3x + 1.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=diff(y,3)==1/(x+1)^2;
Dy=diff(y); D2=diff(y,2);
conds=[y(0)==1,Dy(0)==2,D2(0)==0];
y=dsolve(eqn,conds)
y =
x^2/2-x*(log(x+1)-3)-log(x+1)+1
```

2. Se notează $y^{(3)} = u$ și se obține ecuația diferențială liniară de ordinul întâi: $xu' - u = 8x^3$, cu soluția generală:

$$u = x(C_1 + 4x^2) \Leftrightarrow u = C_1x + 4x^3.$$

Rezultă ecuația: $y^{(3)} = C_1x + 4x^3$. Prin integrare, vom obține:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{C_1x^2}{2} + x^4 + C_2 \\ y' &= \frac{C_1x^3}{6} + \frac{x^5}{5} + C_2x + C_3 \\ y &= \frac{C_1x^4}{24} + \frac{x^6}{30} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \text{ (soluția generală)} \end{aligned}$$

3. Ecuația se scrie echivalent: $3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 4\frac{y''}{y} - 1 = 0$.

Se notează: $u = \frac{y'}{y}$ și se obține: $y' = uy$, $y'' = y(u' + u^2)$. Rezultă ecuația:

$$3u^2 - 4(u' + u^2) = 1 \Leftrightarrow 4u' = -u^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 + 1} = -\frac{1}{4}dx.$$

Prin integrare, vom obține: $\arctg u = -\frac{1}{4}x + C_1 \Rightarrow u = \tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$.

Revenind la y , rezultă:

$$\frac{y'}{y} = \tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) \Big| \int \Rightarrow \ln y = 4 \ln \cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) + \ln C_2.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_2 \cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

4. a) Ecuația diferențială care are sistemul fundamental de soluții format din y_1 și y_2 , este:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & e^{2x} & 2x+3 \\ y' & 2e^{2x} & 2 \\ y'' & 4e^{2x} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & 1 & 2x+3 \\ y' & 2 & 2 \\ y'' & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după prima coloană, se obține:

$$y \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} 1 & 2x+3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} 1 & 2x+3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Efectuând calculele, rezultă ecuația diferențială:

$$(x+1)y'' - (2x+3)y' + 2y = 0.$$

b) Se observă că soluțiile date corespund unei ecuații diferențiale liniare și omogene, cu coeficienți constanți. Soluțiile sunt asociate rădăcinilor $r_1 = -1$, $r_{2,3} = 1 \pm i$ ale ecuației caracteristice:

$$(r+1)(r^2-2r+2)=0 \Leftrightarrow r^3-r^2+2=0.$$

Ecuția diferențială care are această ecuație caracteristică este:

$$y''' - y'' + 2y = 0.$$

c) Ecuția diferențială care are sistemul fundamental de soluții format din $y_1 = x$ și $y_2 = \frac{1}{x}$, este:

$$\begin{vmatrix} y & x & \frac{1}{x} \\ y' & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ y'' & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad (\text{ecuație de tip Euler}).$$

5. Din forma soluției generale deducem că ecuația diferențială are sistemul fundamental de soluții: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$, de unde rezultă că ecuația caracteristică are rădăcinile $r_1 = 3$, $r_2 = -2$. Se obține ecuația:

$$(r-3)(r+2)=0 \Leftrightarrow r^2-r-6=0,$$

care corespunde ecuației diferențiale: $y'' - y' - 6y = 0$.

b) Sistemul fundamental de soluții este format din:

$$y_1 = 1, y_2 = e^{2x} \sin x, y_3 = e^{2x} \cos x.$$

Aceste soluții corespund lui $r_1 = 0$, $r_{2,3} = 2 \pm i$, care sunt rădăcini ale ecuației caracteristice:

$$r(r-2-i)(r-2+i)=0 \Leftrightarrow r(r^2-4r+5)=0 \Leftrightarrow r^3-4r^2+5r=0.$$

Ecuția diferențială este:

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

c) Se observă că ecuația caracteristică are rădăcina triplă $r = 1$. Se obține ecuația $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, care este asociată ecuației diferențiale:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

6. a) Ecuția caracteristică asociată este: $r^2 + r - 6 = 0$ și are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -3$. Astfel, soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

b) Ecuația caracteristică atașată ecuației date este:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)(r - 1)(r + 1) = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

c) Ecuația caracteristică:

$$r^4 - 3r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 1)(r^2 - 2) = 0$$

are rădăcinile: $r_{1,2} = \pm 1$, $r_{3,4} = \pm\sqrt{2}$, deci ecuația diferențială are soluția:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x}, \quad C_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
y=dsolve(diff(y,4)-3*diff(y,2)+2*y==0)
y =
C1*exp(2^(1/2)*x)+C2*exp(-2^(1/2)*x)+C3*exp(x)+C4*
exp(-x)
```

7. a) Rădăcinile ecuației caracteristice $r^2 + 3r + 2 = 0$ sunt $r_1 = -1$ și $r_2 = -2$, deci soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Pentru a afla soluția problemei Cauchy, folosim condițiile inițiale date. Prin derivarea soluției generale se obține: $y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$.

Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -3.$$

Soluția problemei Cauchy: $y = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+3*Dy+2*y=0','y(0)=1','Dy(0)=2','x')
y =
4*exp(-x)-3*exp(-2*x)
```

b) Ecuația caracteristică este $r^2 - 1 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Din condițiile inițiale se determină constantele C_1 și C_2 .

$$\begin{cases} y(0) = 1 & \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -3 & \Rightarrow C_1 - C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Soluția problemei Cauchy este: $y = -e^x + 2e^{-x}$.

c) Se rezolvă ecuația caracteristică: $r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinăm valorile lui C_1 și C_2 .

$$\begin{cases} y(1) = e + 1 \\ y'(1) = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 e = e + 1 \\ C_2 e = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Soluția problemei Cauchy este: $y = 1 + e^x$.

d) Ecuația caracteristică $4r^2 - 8r + 3 = 0$ are rădăcinile $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{3}{2}$. Soluția ecuației diferențiale este $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{3}{2}x}$.

Din condițiile inițiale se determină $C_1 = \frac{3}{2}$ și $C_2 = -\frac{1}{2}$, de unde rezultă soluția problemei:

$$y = \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}x}.$$

8. a) Ecuația caracteristică este:

$$9r^2 - 12r + 4 = 0 \Leftrightarrow (3r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2}{3}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 x e^{\frac{2}{3}x} \Leftrightarrow y = e^{\frac{2}{3}x} (C_1 + C_2 x).$$

b) Ecuația caracteristică $r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$, este echivalentă cu $(r+2)^3 = 0$, de unde rezultă că $r_1 = r_2 = r_3 = -2$. Se obține soluția generală:

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

c) Ecuația caracteristică asociată ecuației date este:

$$r^4 - 6r^3 + 13r^2 - 12r + 4 = 0.$$

Se observă că $r_1 = 1$. Ecuația caracteristică se rescrie:

$$(r-1)(r^3 - 5r^2 + 8r - 4) = 0.$$

Ecuația $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ admite rădăcina $r_2 = 1$, deci putem scrie:

$$(r-1)^2(r^2 - 4r + 4) = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2(r-2)^2 = 0,$$

de unde rezultă că $r_3 = r_4 = 2$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{2x}(C_3 + C_4x).$$

9. Ecuația caracteristică asociată:

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^3 = 0$$

are rădăcina triplă $r_{1,2,3} = 1$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluției problemei Cauchy, vom determina funcțiile:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x + 2xC_3e^x + C_3x^2e^x, \\ y''(x) &= C_1e^x + 2C_2e^x + C_2xe^x + 2C_3e^x + 4xC_3e^x + C_3x^2e^x. \end{aligned}$$

Din condițiile $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$, vom obține:

$$\begin{cases} C_1 &= 1 & C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 &= 2 & \Rightarrow C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= 3 & C_3 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că soluția problemei este: $y = e^x(1+x)$.

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D3y-3*D2y+3*Dy-y=0','y(0)=1','Dy(0)=2',
'D2y(0)=3','x')
y =
exp(x)+x*exp(x)
```

10. a) Rezolvând ecuația caracteristică $r^2 - 6r + 10 = 0$, se obțin rădăcinile: $r_{1,2} = 3 \pm i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1e^{3x} \cos x + C_2e^{3x} \sin 2x.$$

b) Ecuația caracteristică este:

$$r^3 - 2r^2 + 5r = 0 \Leftrightarrow r(r^2 - 2r + 5) = 0.$$

Se obțin rădăcinile:

$$r_1 = 0, \quad r_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 + e^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

c) Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0.$$

Se observă că $r = 1$ este soluție a ecuației caracteristice. Aplicând schema lui Horner, se obține:

$$(r - 1)(r^4 + 2r^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (r - 1)(r^2 + 1)^2 = 0.$$

Rezultă că: $r_1 = 1, \quad r_{2,3} = i, \quad r_{4,5} = -i.$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 5}.$$

11. Ecuația caracteristică atașată: $r^2 + 4 = 0$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 2i$.
Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinăm soluția problemei Cauchy.

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 = 1 \\ -2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = -1 \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow y = -\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+4*y=0','y(pi/2)=1','Dy(pi/2)=1','x')
fplot(y, [-3 3])
legend('y(x)=-cos(2x)-sin(2x)/2')
y =
-cos(2*x)-sin(2*x)/2
```

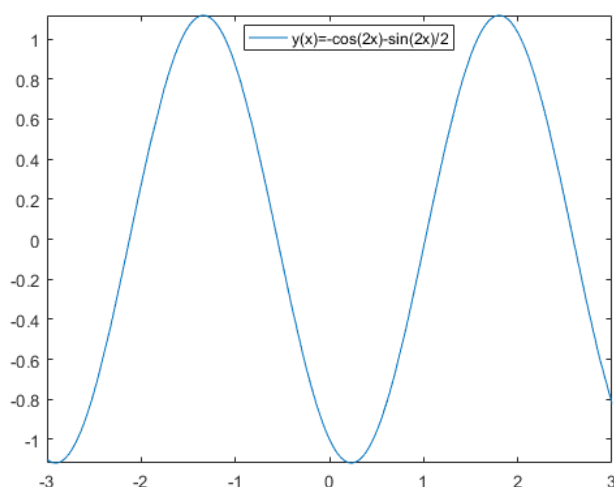


Figura 2.3: Soluția problemei: $y'' + 4y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

12. a) Mai întâi, se rezolvă ecuația omogenă $y'' - 2y' - 3y = 0$. Deoarece rădăcinile sunt reale și distincte, $r_1 = 3$ și $r_2 = -1$, soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina soluția ecuației neomogene, se alege:

$$y_p = ae^{2x} \Rightarrow y'_p = 2ae^{2x} \Rightarrow y''_p = 4ae^{2x}.$$

Din condiția ca y_p să verifice ecuația dată, vom obține:

$$4ae^{2x} - 4ae^{2x} - 3ae^{2x} = 3e^{2x} \mid : e^{2x} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y_p = -e^{2x}.$$

Soluția ecuației diferențiale este:

$$y_p = y_0 + y_p \Leftrightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - e^{2x}.$$

b) Ecuația caracteristică atașată ecuației omogene $y'' + 2y' + 5y = 0$, are rădăcinile $r_{1,2} = -1 \pm 2i$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Soluția particulară are forma $y_p = a \cos 2x + b \sin 2x$. Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x + 2(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) + 5(a \cos 2x + b \sin 2x) = 3 \sin 2x,$$

adică:

$$(a + 4b) \cos 2x + (-4a + b) \sin 2x = 3 \sin 2x.$$

Prin identificarea coeficienților, rezultă:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{12}{17}, b = \frac{3}{17} \Rightarrow y_p = -\frac{12}{17} \cos 2x + \frac{3}{17} \sin 2x.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x - \frac{12}{17} \cos 2x + \frac{3}{17} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Ecuația caracteristică asociată ecuației omogene $y'' - y' - 2y = 0$, este $r^2 - r - 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Se alege soluția particulară de forma:

$$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_p = 2ax + b, y''_p = 2a.$$

Înlocuind în ecuația dată și identificând coeficienții, se obține:

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ -2a - 2b = -2 \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -\frac{7}{2} \end{matrix}.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x^2 + 3x - \frac{7}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Soluția generală a ecuației date este: $y = y_0 + y_p$, unde $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$. Determinăm, mai întâi, soluția y_0 . Ecuația caracteristică asociată este:

$$r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -2.$$

Se obține: $y_0 = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Pentru determinarea soluției particulare y_p , se rezolvă ecuațiile neomogene:

$$y''' - 4y' = 2x^2, \quad y''' - 4y' = xe^{2x}, \quad \text{respectiv} \quad y''' - 4y' = x^2 e^x.$$

Se determină y_{p1} , rezolvând ecuația $y''' - 4y' = 2x^2$.

Se alege soluția particulară $y_{p1} = x(ax^2 + bx + c)$, ținând cont de faptul că $r = 0$ este soluție a ecuației caracteristice.

$$y_{p1} = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y'_{p1} = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y''_{p1} = 6ax + 2b, \quad y'''_{p1} = 6a$$

Înlocuim în ecuația dată și obținem:

$$6a - 4(3ax^2 + 2bx + c) = 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} -12a = 2 \\ -8b = 0 \\ 6a - 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Rezultă că: $y_{p_1} = x \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4} \right)$.

Aflăm soluția y_{p_2} a ecuației $y''' - 4y' = xe^{2x}$. Având în vedere că $r = 2$ este rădăcină a ecuației caracteristice, se alege $y_{p_2} = x(ax + b)e^{2x}$.

Calculăm derivatele:

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= e^{2x} (2ax^2 + 2x(a + b) + b) \\ y''_{p_2} &= e^{2x} (4ax^2 + x(8a + 4b) + 3b) \\ y'''_{p_2} &= e^{2x} (8ax^2 + x(24a + 8b) + 10b) \end{aligned}$$

și înlocuim în ecuația $y''' - 4y' = xe^{2x}$. Vom obține:

$$8ax^2 + x(24a + 8b) + 10b - 4(2ax^2 + 2(a + b)x + b) = x \Rightarrow 16ax + 6b = x,$$

de unde rezultă: $a = \frac{1}{16}$, $b = 0$, deci $y_{p_2} = \frac{1}{16}x^2e^{2x}$.

Soluția ecuației $y''' - 4y' = x^2e^x$ se alege de forma $y_{p_3} = (ax^2 + bx + c)e^x$.

Calculăm derivatele:

$$\begin{aligned} y'_{p_3} &= (ax^2 + 2ax + bx + b + c)e^x, \\ y''_{p_3} &= e^x (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b + c), \\ y'''_{p_3} &= e^x (ax^2 + 6ax + bx + 6a + 3b + c). \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația $y''' - 4y' = x^2e^x$, se obțin coeficienții $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{9}$,

$c = -\frac{20}{27}$. Rezultă că: $y_{p_3} = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{20}{27} \right) e^x$.

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x^2e^{2x} + \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{20}{27} \right) e^x.$$

e) Soluția generală a ecuației diferențiale $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$, are forma: $y = y_0 + y_{p_1} + y_{p_2}$, unde:

$$\begin{aligned} y_0 &\text{ este soluția ecuației omogene } 2y'' + 3y' + y = 0, \\ y_{p_1} &\text{ este soluția particulară a ecuației } 2y'' + 3y' + y = x^2, \\ y_{p_2} &\text{ este soluția particulară a ecuației } 2y'' + 3y' + y = 3\sin x. \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică atașată ecuației $2y'' + 3y' + y = 0$ este: $2r^2 + 3r + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = -1$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru ecuația $2y'' + 3y' + y = x^2$ avem:

$$y_{p1} = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_{p1} = 2ax + b, y''_{p1} = 2a.$$

Identificând coeficienții din egalitatea:

$$4a + 3(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2,$$

se obțin valorile $a = 1$, $b = -6$, $c = 14$. Rezultă că:

$$y_{p1} = x^2 - 6x + 14.$$

Pentru ecuația $2y'' + 3y' + y = 3 \sin x$ avem:

$$y_{p2} = a \cos x + b \sin x.$$

Din egalitatea:

$$-2a \cos x - 2b \sin x - 3a \sin x + 3b \cos x + a \cos x + b \sin x = 3 \sin x,$$

rezultă:

$$\begin{cases} -3a - b = 3 \\ -a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{9}{10} \\ b = -\frac{3}{10} \end{matrix} \Rightarrow y_{p2} = -\frac{9}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + x^2 - 6x + 14 - \frac{9}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

13. a) Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_{1,2} = -1 \pm 2i$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluției particulare se alege:

$$y_p = e^{-x} x (a \cos 2x + b \sin 2x),$$

deoarece $r = -1 \pm 2i$ este rădăcină de ordinul întâi a ecuației caracteristice. Derivând de două ori y_p și înlocuind în ecuația dată, după identificarea

coeficienților, vom obține $a = 0$ și $b = 1$, de unde rezultă: $y_p = xe^{-x} \sin 2x$.
Soluția generală a ecuației este:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + xe^{-x} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinăm soluția problemei Cauchy.

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluția problemei este:

$$y = e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + xe^{-x} \sin 2x.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+2*Dy+5*y=4*exp(-x)*cos(2*x)','y(0)=1',  
          'Dy(0)=0','x')  
simplify(y)  
ans =  
(exp(-x)*(2*cos(2*x)+sin(2*x)+2*x*sin(2*x)))/2
```

b) Soluțiile ecuației caracteristice $r^2 + 4 = 0$, atașate ecuației diferențiale omogene $y'' + 4y = 0$, sunt $r_{1,2} = \pm 2i$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ținând cont de forma funcției din membrul drept al ecuației date și de faptul că $r = \pm 2i$ sunt soluții ale ecuației caracteristice, vom alege soluția particulară de forma: $y_p = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$. Calculăm derivatele lui y_p .

$$\begin{aligned} y_p' &= (a + 2bx) \cos 2x + (-2ax + b) \sin 2x \\ y_p'' &= (-4ax + 4b) \cos 2x + (-4a - 4bx) \sin 2x \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$4b \cos 2x - 4a \sin 2x = 3 \sin 2x \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, \quad b = 0 \Rightarrow y_p = -\frac{3}{4} x \cos 2x.$$

Soluția generală a ecuației este:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Din condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = -1$, se determină $C_1 = 2$ și $C_2 = -\frac{1}{8}$.
Soluția problemei Cauchy este:

$$y = 2 \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x.$$

Soluție Matlab:

```
y=simplify(dsolve('D2y+4*y=3*sin(2*x)','y(0)=2',
'Dy(0)=-1','x'))
y =
2*cos(2*x)-sin(2*x)/8-(3*x*cos(2*x))/4
```

14. a) Soluția generală a ecuației omogene este: $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$,
deci soluția ecuației date are forma:

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}.$$

$$\text{Din sistemul: } \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases}, \text{ rezultă:}$$

$$\begin{aligned} -C_2'(x)e^{-2x} &= \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}, \\ C_1'(x)e^{-x} &= \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \end{aligned}$$

de unde, prin integrare vom obține:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C_1, \\ C_2(x) &= -\int \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x + 1} dx = -e^x + \ln(e^x + 1) + C_2. \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = (\ln(e^x + 1) + C_1) e^{-x} + (-e^x + \ln(e^x + 1) + C_2) e^{-2x}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+3*Dy+2*y=1/(exp(x)+1)','x')
y =
exp(-x)*log(exp(x)+1)+C1*exp(-x)+C2*exp(-2*x)+
exp(-2*x)*(log(exp(x)+1)-exp(x))
```

b) Ecuația caracteristică a ecuației omogene

$$y'' + y = 0$$

este $r^2 + 1 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Soluția ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Folosim metoda variației constantelor. Soluția ecuației date are forma:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Funcțiile C'_1 și C'_2 sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} C'_1(x) \cos x + C'_2(x) \sin x = 0 \\ -C'_1(x) \sin x + C'_2(x) \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}.$$

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos^2 x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{\cos x} + C_1$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C_2$$

Se obține soluția generală:

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} + C_1 \right) \cos x + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C_2 \right) \sin x,$$

adică:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 + \frac{\sin x}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('D2y+y=1/cos(x)^2','x')
y =
C1*cos(x)-sin(x)*(log(cos(x))-log(sin(x)+1))+C2*
sin(x)-1
```

15. a) Notând $y = x^r$, ecuația devine:

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cu soluțiile $r_1 = r_2 = -1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-1} \ln x \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} (C_1 + C_2 \ln x).$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x^2*D2y+3*x*Dy+y=0','x')
y =
C1/x-(C2*log(x))/x
```

b) Prin substituția $x = e^t$ se obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți. Notăm $z(t) = y(e^t)$. Prin derivare, rezultă:

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^t y'(e^t) \Rightarrow y'(e^t) = e^{-t} z'(t), \\ z''(t) &= \underbrace{e^t y'(e^t)}_{z'(t)} + e^{2t} y''(e^t) \Rightarrow y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)). \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$z''(t) - z'(t) + z'(t) + z(t) = e^t \Leftrightarrow z''(t) + z(t) = e^t.$$

Soluția ecuației omogene asociate este: $z_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Soluția particulară a ecuației neomogene are forma: $z_p = a e^t$. Prin înlocuire

și identificare, se obține $a = \frac{1}{2}$, deci $z_p = \frac{1}{2} e^t$.

Soluția generală a ecuației în z este:

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{e^t}{2}.$$

Folosind relația $t = \ln x$, rezultă soluția generală a ecuației date:

$$y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \frac{x}{2}.$$

Soluție Matlab:

```
y=dsolve('x^2*D2y+x*Dy+y=x','x')
y =
x/2+C1*cos(log(x))+C2*sin(log(x))
```

16. Prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, $z(t) = y(e^t)$, ecuația devine:

$$e^{2t}e^{-2t}(z''(t) - z'(t)) - e^te^{-t}z'(t) + z(t) = t,$$

adică:

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t.$$

Pentru ecuația omogenă:

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0,$$

ecuația caracteristică este $r^2 - 2r + 1 = 0$, cu $r_1 = r_2 = 1$, deci:

$$z_0 = C_1e^t + C_2te^t.$$

O soluție particulară a ecuației neomogene are forma:

$$z_p(t) = at + b.$$

Prin înlocuire, se obține $a = 1$, $b = 2$, de unde rezultă $z_p = t + 2$.
Soluția generală a ecuației în z este:

$$z(t) = C_1e^t + C_2te^t + t + 2.$$

Înlocuind $t = \ln x$, se obține soluția generală a ecuației inițiale:

$$y = C_1x + C_2x \ln x + \ln x + 2.$$

Din condițiile inițiale $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$, rezultă $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Soluția problemei Cauchy este:

$$y = x - x \ln x + \ln x + 2.$$

Soluție Matlab:

```
syms y(x)
eqn=x^2*diff(y,2)-x*diff(y)+y==log(x);
Dy=diff(y);
conds=[y(1)==3, Dy(1)==1];
y=simplify(dsolve(eqn,conds))
y =
x+log(x)-x*log(x)+2
```

2.6 Exerciții propuse

1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' = (2x + 3)e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

b) $y''' = 6x - \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

c) $y^{(4)} = \frac{8}{(2x + 1)^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$

2. Să se integreze ecuațiile:

a) $xy'' + y' + x = 0$

b) $y^{(4)} - \frac{1}{x}y''' = 0$

c) $y'^2 + yy'' = yy'$

d) $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0$

3. Să se determine ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți, care are soluția generală:

a) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}\sin x + C_3e^{3x}\cos x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

4. Să se determine ecuația diferențială liniară și omogenă care are sistemul fundamental de soluții:

a) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$

b) $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$

5. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' + 6y' - 7y = 0$

b) $6y'' - y' - y = 0$

c) $4y''' - 9y' = 0$

d) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$

6. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

b) $2y''' - y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$

c) $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

7. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' + 10y' + 25y = 0$

b) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0$

c) $4y^{(4)} - 4y''' + y'' = 0$

d) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

8. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

b) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$

c) $y''' + y'' - y' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 3$

9. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' - 2y' + 10y = 0$

b) $y''' - 8y = 0$

c) $y''' - 3y'' + 2y' - 6y = 0$

d) $y^{(4)} + y'' - 12y = 0$

10. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

b) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$

c) $y''' + y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 1$

11. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' - 2y' - 15y = x^2 - 3x + 2$

b) $y'' - 6y' + 5y = xe^{-x}$

c) $y'' + 4y = 2e^{3x}$

d) $y'' + y = 2 \sin x$

12. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' - 2y' = e^x(x + 3)$

b) $y'' - 2y' + 17y = \cos 2x$

c) $y'' + 4y' + 5y = x^2 - x$

d) $y''' - y' = 2x$

13. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$

b) $y'' + 2y' + y = 1 + x^2 + 4xe^x$

c) $y'' - 9y' + 20y = x^2 + xe^{4x}$

d) $y'' - 6y' + 10y = 1 + e^{-x} + \sin 3x$

14. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

b) $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

c) $y'' + 4y' + 5y = \sin x - \cos$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

15. Să se integreze prin metoda variației constantelor următoarele ecuații:

a) $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{e^{2x} + 1}$

b) $y'' + y = \operatorname{tg} x$

c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

16. Să se rezolve ecuațiile diferențiale de ordin superior de tip Euler:

a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

b) $x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3$

c) $x^3y''' + 2xy' - 2y = x \ln x$

d) $x^3y''' + x^2y'' = x^2 + x^3$

17. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

b) $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

c) $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

Sisteme de ecuații diferențiale

112

Soluție: Pentru a reduce sistemul la o ecuație diferențială de ordinul 2, se derivează a doua ecuație și se elimină y_1 și y'_1 folosind ecuațiile sistemului.

$$y''_2 = -4y'_1 + 3y'_2 = 8y_1 - 4y_2 + 3y'_2 = 2(-y'_2 + 3y_2) - 4y_2 + 3y'_2 = y'_2 + 2y_2.$$

Se obține ecuația diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți, liniară și omogenă:

$$y''_2 - y'_2 - 2y_2 = 0.$$

Ecuația caracteristică asociată $r^2 - r - 2 = 0$ are soluțiile $r_1 = -1$ și $r_2 = 2$. Rezultă că $y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Din substituția $4y_1 = -y'_2 + 3y_2$, vom obține:

$$4y_1 = -2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 3C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{-x} = C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-x}.$$

Soluția generală a sistemului este:
$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \end{cases}.$$

Metoda folosită pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații diferențiale se numește **metoda eliminării** sau **metoda ecuației rezolvante**.

Soluție Matlab:

```
syms y1(x) y2(x)
eq1=diff(y1)==-2*y1+y2;
eq2=diff(y2)==-4*y1+3*y2;
[y1 y2]=dsolve(eq1,eq2)
y1 =
(C1*exp(2*x))/4+C2*exp(-x)
y2 =
C1*exp(2*x)+C2*exp(-x)
```

Observația 3.1.2. O ecuație diferențială de ordin superior este echivalentă cu un sistem sub formă normală, obținut prin introducerea unor noi funcții necunoscute. Astfel, notând $y = y_1$, are loc echivalența:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Se numește **problemă Cauchy** pentru sistemul (3.1.1) aflarea funcțiilor $y_1, \dots, y_n$ (definite pe un interval care conține punctul x_0) care verifică ecuațiile sistemului și condițiile inițiale:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Geometric, soluția unei probleme Cauchy este o curbă situată în spațiul $\mathbb{R}^n$, care conține punctul $M(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$, numită *curbă integrală* sau *traietorie* a sistemului (3.1.1).

Exemplul 3.1.3. Să se rezolve problema $\begin{cases} x' = x + y & x(0) = 0 \\ y' = -2x + 4y & y(0) = -1 \end{cases}$.

Soluție: Derivăm prima ecuație și obținem succesiv:

$$x'' = x' + y' \Rightarrow x'' = x' - 2x + 4y \Rightarrow x'' = x' - 2x + 4x' - 4x,$$

adică, $x'' - 5x' + 6x = 0$, de unde rezultă că $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.
Folosind substituția $y = x' - x$, vom obține:

$$y = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} - C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}.$$

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} \end{cases}$.

Pentru a afla soluția problemei Cauchy, folosim condițiile inițiale date.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Soluția problemei este: $\begin{cases} x = e^{2t} - e^{3t} \\ y = e^{2t} - 2e^{3t} \end{cases}$.

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eqns=[diff(x)==x+y,diff(y)==-2*x+4*y];
conds=[x(0)==0,y(0)==-1];
[x y]=dsolve(eqns,conds)
x=
exp(2*t)-exp(3*t)
y =
exp(2*t)-2*exp(3*t)
```

Pentru reprezentarea grafică a soluției sistemului, se scriu comenzile:

```
tmin=-1; tmax=1; nt=30;
t=linspace(tmin,tmax,nt);
x=exp(2*t)-exp(3*t); y=exp(2*t)-2*exp(3*t);
figure
plot(t,x,'-b',t,y,'--r')
legend('x(t)','y(t)')
```

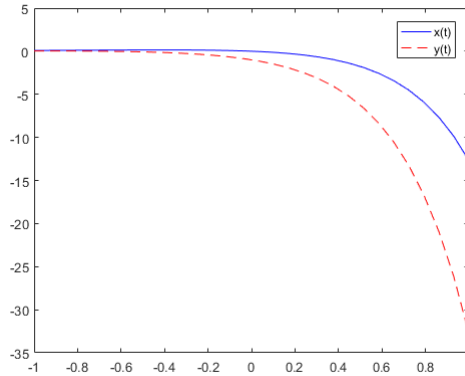


Figura 3.1: Exemplul 3.1.3

Exemplul 3.1.4. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases}.$$

Soluție: Vom aplica metoda eliminării. Pentru aceasta, vom deriva una dintre ecuațiile sistemului, de exemplu prima, de două ori succesiv, apoi vom elimina funcțiile necunoscute y și z și derivatele acestora. Vom obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 3 cu coeficienți constanți cu funcția necunoscută x .

Derivăm prima ecuație și obținem:

$$x'' = 4x' - y' - 2z',$$

apoi înlocuim x' , y' și z' , folosind ecuațiile sistemului. Vom avea:

$$x'' = 12x - 3y - 8z. \quad (3.1.3)$$

Derivăm ecuația (3.1.3) și obținem:

$$x''' = 12x' - 3y' - 8z',$$

apoi eliminăm din nou funcțiile x' , y' și z' . Rezultă:

$$x''' = 34x - 7y - 26z. \quad (3.1.4)$$

Din sistemul format din prima ecuație a sistemului dat și ecuația (3.1.3) se exprimă y și z în funcție de x , x' și x'' .

$$\begin{cases} y + 2z = 4x - x' \\ 3y + 8z = 12x - x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 4x' + x'' \\ z = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x'' \end{cases}.$$

Înlocuind în (3.1.4), se obține ecuația:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

Ecuația caracteristică asociată este $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ și are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Rezultă că:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$$

Revenind la expresiile obținute pentru y și z , vom avea:

$$y = 4C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 4C_3 e^{3t} - 4C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 12C_3 e^{3t} + C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{3t},$$

$$z = \frac{3}{2} (C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}) - \frac{1}{2} (C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{3t}),$$

adică:

$$y = C_1 e^t + C_3 e^{3t}, \quad z = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea unui sistem de 3 ecuații diferențiale, metoda eliminării poate fi uneori anevoioasă.

O altă metodă de rezolvare este **metoda valorilor și vectorilor proprii**. Rezolvăm sistemul de mai sus prin această metodă.

Se determină valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru aceasta, se rezolvă ecuația:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația este echivalentă cu: $(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$ și are soluțiile:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

În continuare, pentru fiecare valoare proprie obținută, se determină vectorul propriu corespunzător, rezolvând ecuația: $(A - \lambda I_3)V = 0_{3,1}$.

I Pentru $\lambda_1 = 1$, se obține: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, adică:

$$\begin{cases} 3v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ 2v_1 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_2 \\ v_1 = v_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectorul propriu corespunzător lui λ_1 este: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{II } \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă: $\begin{matrix} v_1 = v_3 \\ v_2 = 0 \end{matrix}$, adică: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{III } \lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă: $\begin{matrix} v_1 = v_2 \\ v_3 = 0 \end{matrix}$, adică: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluția sistemului este:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} V_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{cases}.$$

Soluție Matlab

```
[x y z]=dsolve('Dx=4*x-y-2*z','Dy=2*x+y-2*z',
'Dz=x-y+z')
```

```
x =
C1*exp(t) + C2*exp(2*t) + C3*exp(3*t)
```

```
y =
C1*exp(t) + C3*exp(3*t)
```

```
z =
C1*exp(t) + C2*exp(2*t)
```

Observația 3.1.5. O altă metodă de rezolvare a unui sistem de ecuații diferențiale va fi prezentată în capitolul (5).

Definiția 3.2.1. *Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi de forma:*

unde cel puțin una dintre funcțiile $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, nu se anulează pe D , se numește sistem simetric.

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$
$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{array} \right. . \quad (3.2.2)$$
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$$
$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

de unde, prin integrare, rezultă $\frac{3y^2}{2} = z^2 + C_2$.

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = C_1 \\ \frac{3y^2}{2} - z^2 = C_2 \end{cases}.$$

b) Oricum am alege două rapoarte, ele nu vor conține doar două variabile. Vom folosi metoda combinațiilor integrabile.

Se observă ușor că suma numitorilor este 0, astfel încât vom putea scrie:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{dx+dy+dz}{y-z+z-x+x-y} = \frac{dx+dy+dz}{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow dx+dy+dz=0$, de unde, prin integrare, obținem $x+y+z=C_1$.

Pentru a obține a doua integrală primă, vom scrie:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{xdx+ydy+zdz}{xy-xz+yz-yx+zx-zy} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

de unde rezultă $xdx+ydy+zdz=0$. Integrând, avem $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C_2$.

Soluția generală a sistemului simetric este:

$$\begin{cases} x+y+z = C_1 \\ x^2+y^2+z^2 = C_2 \end{cases}.$$

Soluția obținută este o familie de cercuri din spațiu care depinde de doi parametri.

Traectorii ortogonale ale unei familii de suprafețe

Se consideră o familie de suprafețe

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3.2.4)$$

unde F este o funcție continuă care admite derivate parțiale continue pe $D \subset \mathbb{R}^3$. Fie C o curbă netedă care intersectează într-un punct M o suprafață S din familia definită prin (3.2.4).

Curba C este ortogonală la suprafața S dacă tangenta la curbă în punctul M este paralelă cu normala la suprafață în M . Condiția ca vectorii $\vec{v} = \vec{r}'$ și $\vec{n}$ să fie coliniari se scrie sub forma:

$$\frac{dx}{F'_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F'_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F'_z(x, y, z)}. \quad (3.2.5)$$

Sistemul (3.2.5) definește mulțimea curbelor ortogonale familiei de suprafețe (3.2.4).

Exemplul 3.2.7. Pentru a determina curbele ortogonale familiei de sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = C,$$

se scrie sistemul simetric:

$$\frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

pentru care se obțin integralele prime:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{x}{z} = C_2.$$

Curbele ortogonale sunt definite prin ecuațiile:

$$x = C_1 y, \quad x = C_2 z \quad (\text{drepte care trec prin origine}).$$

3.3 Metode numerice

3.3.1 Integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale

Metodele numerice de tip **Euler** sau **Runge-Kutta** pot fi folosite și pentru determinarea unor soluții aproximante pentru sistemele de ecuații diferențiale de ordinul I.

Exemplul 3.3.1. Să se rezolve analitic și numeric sistemul:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 5y_1 - 4y_2 \end{cases}, \text{ cu condițiile inițiale } \begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 6 \end{cases}.$$

Pentru determinarea soluției analitice vom folosi metoda valorilor și vectorilor proprii.

Sistemul se scrie sub forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii sunt soluțiile ecuației:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 5 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Vectorii proprii se obțin din egalitatea: $(A - \lambda I_2) V = 0$.

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

adică:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} \\ y_2(t) = C_1 e^t + 5C_2 e^{-2t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Din condițiile $\begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 6 \end{cases}$ rezultă $C_1 = C_2 = 1$, deci soluția problemei

Cauchy este:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t + 2e^{-2t} \\ y_2(t) = e^t + 5e^{-2t} \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
[y1 y2]=dsolve('Dy1=3*y1-2*y2','Dy2=5*y1-4*y2',  
'y1(0)=3','y2(0)=6')
```

```
y1 =  
2*exp(-2*t) + exp(t)  
y2 =  
5*exp(-2*t) + exp(t)
```

Metoda Euler

```
dt=0.05; y0=[3 6];  
t_euler=0:dt:1;  
y_euler=zeros(length(t_euler),2);  
y_euler(1,:)=y0;  
for i = 1:length(t_euler)-1  
y_euler(i+1,1)=y_euler(i,1)+dt*(3*y_euler(i,1)-2*  
y_euler(i,2));  
y_euler(i+1,2)=y_euler(i,2)+dt*(5*y_euler(i,1)-4*  
y_euler(i,2));  
end  
plot(t_euler,y_euler(:,1),'b-');  
hold on
```

```

plot(t_euler,y_euler(:,2),'r--');
xlabel('t');
ylabel('y');
legend('y_1 (metoda Euler)', 'y_2 (metoda Euler)');
title('Solutia numerica (Euler) a sistemului');
grid on;
disp('calculul valorilor pentru y1 (Euler)')
disp(y_euler(:,1))
disp('calculul valorilor pentru y2 (Euler)')
disp(y_euler(:,2))
hold off

```

Valorile afișate sunt:

calculul valorilor pentru y1 (Euler)

```

3.0000 2.8500 2.7225 2.6156 2.5277 2.4573 2.4030 2.3637 2.3384 2.3262 2.3263
2.3380 2.3607 2.3940 2.4375 2.4907 2.5535 2.6256 2.7068 2.7971 2.8965

```

calculul valorilor pentru y2 (Euler)

```

6.0000 5.5500 5.1525 4.8026 4.4960 4.2287 3.9973 3.7986 3.6298 3.4884 3.3723
3.2794 3.2080 3.1566 3.1238 3.1084 3.1094 3.1259 3.1571 3.2024 3.2612

```

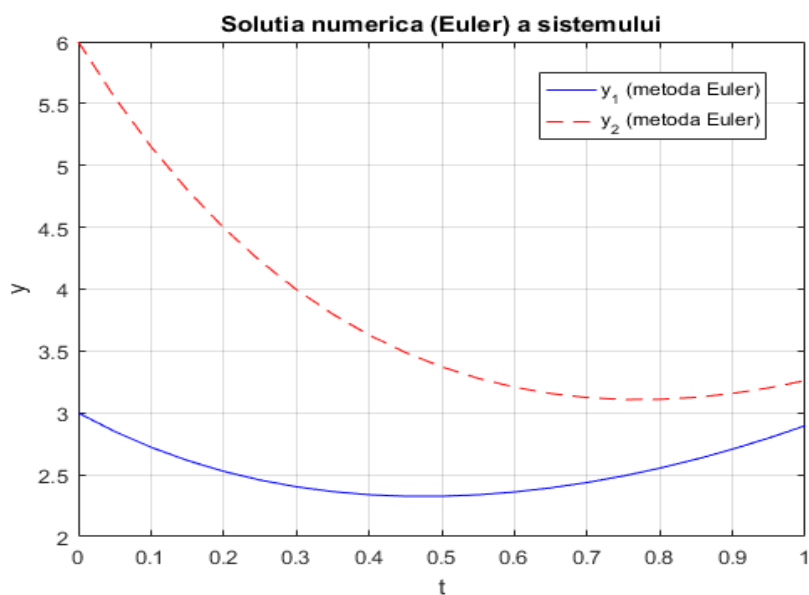


Figura 3.2: Exemplul (3.3.1)

3.3.2 Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordin superior

Prin metode de tip Euler sau Runge-Kutta, se pot determina soluții numerice pentru ecuații diferențiale de ordin superior, dacă acestea se rescriu sub forma unor sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I.

Exemplul 3.3.2. *Să se determine soluția exactă a problemei Cauchy:*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3.3.1)$$

și să se compare cu rezultatul obținut folosind una dintre metodele numerice.

Metoda întâi

Soluția analitică:

Ecuația caracteristică asociată ecuației $y'' + y = 0$ este $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Folosind condițiile inițiale date, se obține soluția: $y = \sin t$.

Soluție Matlab:

```
syms y(t)
eqn=diff(y,2)+y==0;
Dy=diff(y,1);
conds=[y(0)==0,Dy(0)==1];
y=dsolve(eqn,conds)
y =
sin(t)
```

Metoda Runge-Kutta

```
h=0.05; tspan=0:h:10; N=length(tspan);
y=zeros(1,N); v=zeros(1,N);
y(1)=0; v(1)=1;
for n=1:N-1
    k1y=h*v(n);
    k1v=-h*y(n);
    k2y=h*(v(n)+0.5*k1v);
    k2v=-h*(y(n)+0.5*k1y);
    y(n+1)=y(n)+k2y;
    v(n+1)=v(n)+k2v;
end
```

```

% Solutia exacta
sol_exacta=sin(tspan);
% Reprezentarea grafica a solutiei
figure
plot(tspan,y,'b-')
hold on
plot(tspan,sol_exacta,'r--')
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
title('Solutia problemei y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1');
legend('Solutia numerica (RK2)', 'Solutia exacta: y=sint');
grid on; hold off

```

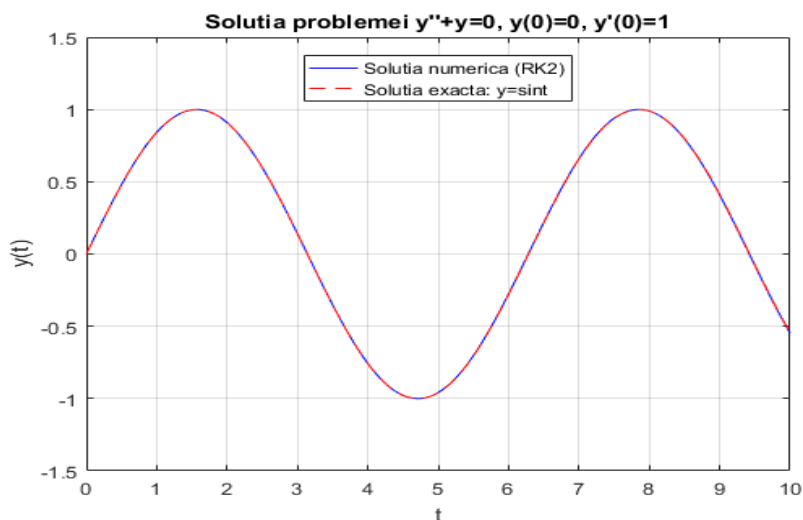


Figura 3.3: Soluția problemei (3.3.1)

Metoda a doua

Problema $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, se scrie sub forma unui sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întâi, cu condiții inițiale, care se va integra numeric folosind metoda Runge-Kutta de ordinul doi.

Notând: $y = y_1$ și $y' = y_2$, problema dată devine:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}, \text{ cu condițiile } y_1(0) = 0, y_2(0) = 1,$$

pentru care se obține soluția analitică:

$$y_1(t) = \sin t, \quad y_2(t) = \cos t.$$

Soluție Matlab:

```
syms y1(t) y2(t)
eqns=[diff(y1)==y2,diff(y2)==-y1];
conds=[y1(0)==0,y2(0)==1];
[y1 y2]=dsolve(eqns,conds)
y1 =
sin(t)
y2 =
cos(t)
```

Redăm mai jos **codul Matlab** atât pentru soluția numerică obținută prin metoda Runge-Kutta de ordin doi, cât și pentru soluția exactă a sistemului.

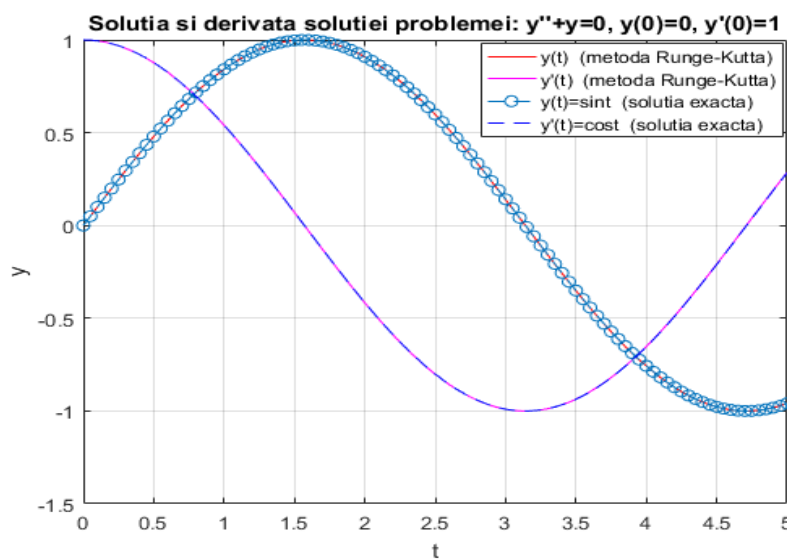
```
f=@(t,y)[y(2); -y(1)]; % y(1) = y1(t), y(2) = y2(t)
y0=[0; 1]; % [y1(0), y2(0)]
h=0.05; tspan=0:h:5; n=length(tspan);
y=zeros(2,n);
y(:,1)=y0;
% Metoda Runge-Kutta de ordin 2
for i=1:n-1
t=tspan(i);
k1=f(t,y(:,i));
k2=f(t+h,y(:,i)+h*k1);
y(:,i+1)=y(:,i)+(h/2)*(k1+k2);
end
y1=y(1,:); y2=y(2,:);
% Solutia exacta
t_exact=tspan;
y1_exact=sin(t_exact);
y2_exact=cos(t_exact);
% Reprezentarea grafica a rezultatelor
figure
plot(tspan,y1,'r','DisplayName','y(t) (metoda Runge
-Kutta)')
hold on
plot(tspan,y2,'m','DisplayName','y`(t) (metoda Runge
-Kutta)')
plot(t_exact,y1_exact,'o-','DisplayName','y(t)=sin t
(solutia exacta)')
plot(t_exact,y2_exact,'b--','DisplayName','y`(t)=
cos t (solutia exacta)')
xlabel('t'); ylabel('y')
```



```

title('Solutia si derivata solutiei problemei:
      y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1')
legend show
grid on;
hold off

```



Pentru afișarea valorilor calculate, se folosesc comenzile:

```

disp('calculul valorilor pentru y1')
disp(y1)
disp('calculul valorilor pentru y2')
disp(y2)

```

De exemplu, pentru $y_1(t) = y(t)$, valorile aproximante calculate sunt:

```

0 0.0500 0.0999 0.1495 0.1988 0.2475 0.2956 0.3430 0.3896 0.4351 0.4796
0.5229 0.5649 0.6054 0.6444 0.6819 0.7176 0.7515 0.7836 0.8137 0.8417 0.8677
0.8914 0.9130 0.9322 0.9492 0.9637 0.9759 0.9856 0.9928 0.9976 0.9998 0.9996
0.9968 0.9916 0.9839 0.9737 0.9611 0.9461 0.9287 0.9090 0.8870 0.8628 0.8364
0.8080 0.7775 0.7451 0.7108 0.6748 0.6370 0.5977 0.5568 0.5146 0.4711 0.4264
0.3806 0.3339 0.2864 0.2381 0.1892 0.1399 0.0902 0.0403 -0.0097 -0.0597 -
0.1095 -0.1591 -0.2083 -0.2569 -0.3049 -0.3522 -0.3985 -0.4439 -0.4881 -0.5312
-0.5729 -0.6131 -0.6519 -0.6890 -0.7244 -0.7579 -0.7896 -0.8193 -0.8470 -0.8725
-0.8958 -0.9169 -0.9358 -0.9522 -0.9663 -0.9780 -0.9872 -0.9940 -0.9982 -1.0000
-0.9993 -0.9961 -0.9903 -0.9821 -0.9715 -0.9584

```

3.3.3 Funcții Matlab de tip *ode*

Integrarea numerică a unui sistem de ecuații diferențiale sau a unei ecuații diferențiale de ordin superior se poate efectua cu ajutorul funcțiilor Matlab de tip **ode**.

Exemplul 3.3.3. *Să se integreze, folosind funcția ode45, problema Cauchy de la exemplul (3.3.1). Să se reprezinte grafic soluția numerică și soluția analitică a problemei.*

Cod Matlab (ode45)

```
dYdt=@(t,Y)[3*Y(1)-2*Y(2);5*Y(1)-4*Y(2)];
tspan=[0 1]; Y0=[3;6];
[t,Y]=ode45(dYdt,tspan,Y0);
plot(t,Y(:,1),'o'); hold on
plot(t,Y(:,2),'s'); hold on
tmin=0; tmax=1; nt=30; t=linspace(tmin,tmax,nt);
y1=exp(t)+2*exp(-2*t); y2=exp(t)+5*exp(-2*t);
plot(t,y1,'m'); hold on; plot(t,y2,'b')
xlabel('t'); ylabel('y');
title('Solutia numerica si solutia exacta a
      sistemului');
legend('y1(ode45)', 'y2(ode45)', 'y1=e^t+2e^{-2t}', 'y2
      =e^t+5e^{-2t}')
grid on; hold off
```

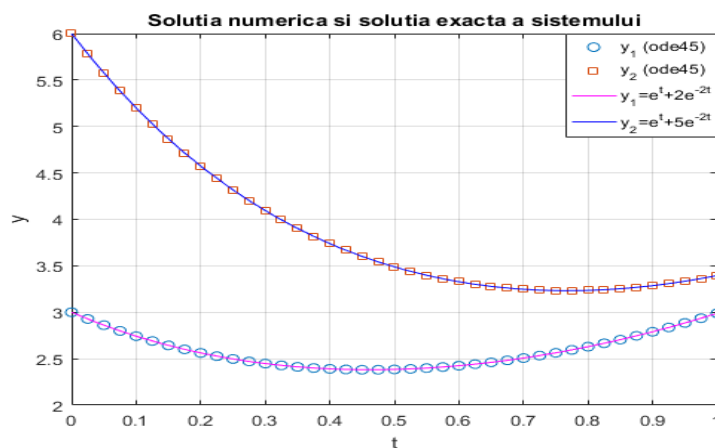


Figura 3.4: Soluția problemei: $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2 \end{cases}, y_1(0) = 3, y_2(0) = 6$

Exemplul 3.3.4. Să se integreze, folosind funcția `ode45`, următoarea problemă Cauchy:

$$y'' + 2y' + 2y = 4 \cos x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2. \quad (3.3.2)$$

Soluție Matlab:

Soluția analitică se obține cu ajutorul comenzii `dsolve`.

```
syms y(x)
eqn=diff(y,2)+2*diff(y)+2*y==4*cos(x);
Dy=diff(y);
conds=[y(0)==-1,Dy(0)==2];
y=dsolve(eqn,conds);
simplify(y)
ans =
(4*cos(x))/5 + (8*sin(x))/5 - (9*exp(-x)*cos(x))/5 -
(7*exp(-x)*sin(x))/5
```

Pentru a rezolva problema prin metoda **ode45**, ecuația diferențială de ordinul doi se scrie sub forma unui sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 + 4 \cos x \end{cases}$$

```
F=inline(' [y(2);-2*y(1)-2*y(2)+4*cos(x)] ','x','y');
[x,y]=ode45(F,[0,10],[-1,2]);
plot(x,y(:,1));
hold on
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Solutia problemei: y'+2y'+2y=4cosx, y(0)=-1,
      y'(0)=2')
xmin=0;
xmax=10;
nx=50;
x=linspace(xmin,xmax,nx);
y=4.*cos(x)/5+8.*sin(x)/5-9.*exp(-x).*cos(x)/5-7.*
exp(-x).*sin(x)/5;
plot(x,y,'o')
legend('solutia numerica ode45','solutia analitica')
grid on;
hold off
```

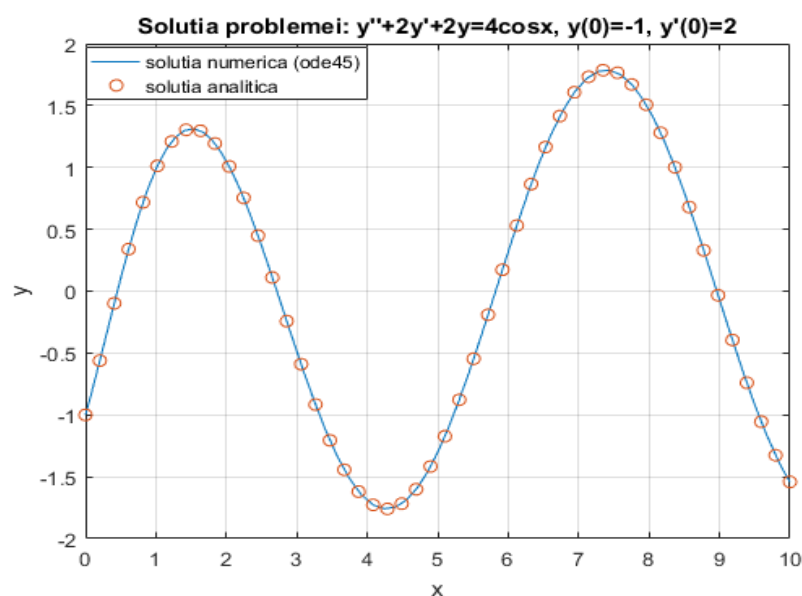


Figura 3.5: Soluția problemei (3.3.2)

Exemplul 3.3.5. Să se determine soluția numerică și soluția analitică a problemei Cauchy:

$$y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad t \in [0, 10].$$

Ecuția caracteristică asociată ecuației date este:

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

cu rădăcinile: $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \pm i$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

Din condițiile inițiale date, se obțin valorile:

$$C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{5}{2},$$

de unde rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$y = \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{5}{2} \sin t.$$

Soluție Matlab:

```
f=inline(' [y(2);y(3);-y(1)-y(2)-y(3)] ','t','y');
[t,y]=ode45(f,[0,10],[1;1;2]);
plot(t,y(:,1));
hold on
syms y(t)
eqn=diff(y,3)+diff(y,2)+diff(y)+y==0;
Dy=diff(y); D2y=diff(y,2);
conds=[y(0)==1,Dy(0)==1,D2y(0)==2];
y=dsolve(eqn,conds)
tmin=0; tmax=10; nt=40;
t=linspace(tmin,tmax,nt);
y_analitic=3*exp(-t)/2-cos(t)/2+5*sin(t)/2;
plot(t,y_analitic,'o')
xlabel('t');
ylabel('y');
title('Solutia problemei: y'''+y''+y'+y=0, y(0)=1,
      y'(0)=1, y''(0)=2');
legend('Solutia numerica (ode45)', 'y=3/2e^{-t}-1/2
      cos t+5/2sin t')
grid on;
hold off
```

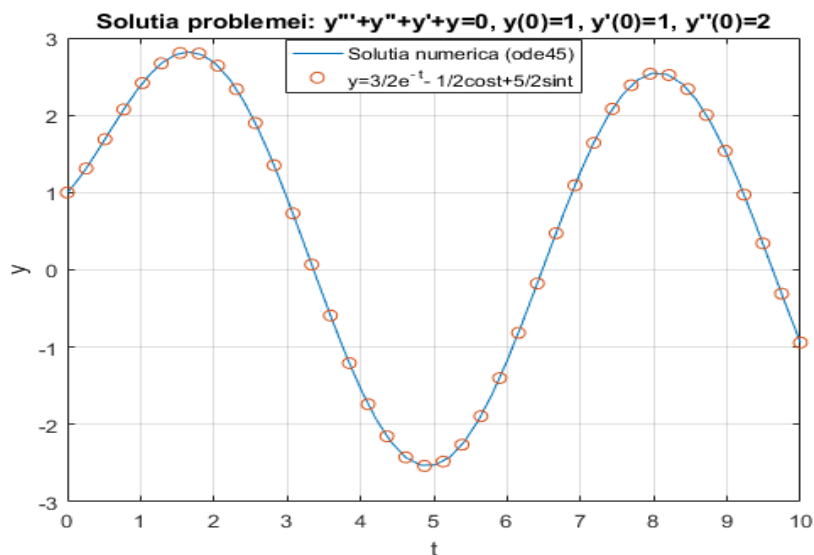


Figura 3.6: Exemplul (3.3.5)

3.4 Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 + 3y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x' = y + t \\ y' = 4x + \sin t \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x' = -3x - 4y + t \\ y' = x + y + 2t + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1 \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x' = 4x - 3y + 1 \\ y' = 3x + 4y - 1 \end{cases}, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1 \end{aligned}$$

6. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y \end{cases}, \quad \text{cu condițiile } x(0) = 2, \quad y(0) = -1$$

și să se reprezinte grafic soluția problemei.

7. Să se rezolve prin două metode sistemul:

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}.$$

8. Să se rezolve problema Cauchy (două metode):

$$\begin{cases} x' = -y + z \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1.$$

9. Să se integreze sistemele simetrice:

a) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$

b) $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2 + y^2}$

10. Să se integreze sistemele simetrice:

a) $\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\sin y} = \frac{dz}{\sin z}$

b) $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{xz}$

c) $\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{-x^2 y^2} = \frac{dz}{3x^2}$

11. Să se integreze sistemele simetrice:

a) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x + y}$

b) $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$

c) $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$

12. Să se integreze sistemele simetrice:

a) $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}$

b) $\frac{dx}{2y + z} = \frac{dy}{z - 2x} = \frac{dz}{x + y}$

13. Să se integreze sistemele simetrice:

$$\text{a) } \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2}$$

$$\text{b) } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

14. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$. Să se scrie sistemul sub forma simetrică și să se integreze.

15. Să se scrie sub forma simetrică sistemul $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ și să se integreze.

Soluții:

1. a) Se alege una dintre ecuații și se derivează, apoi se elimină una dintre funcțiile necunoscute și se obține o ecuație diferențială de ordinul doi în funcția necunoscută rămasă, care se integrează. Prin substituție, se determină și funcția necunoscută eliminată inițial.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \Rightarrow y_1'' = 2y_1' + y_2' \Rightarrow y_1'' = 2y_1' + 3y_1 + 4y_2 \\ y_1'' &= 2y_1' + 3y_1 + 4(y_1' - 2y_1) \Rightarrow y_1'' = 6y_1' - 5y_1 \end{aligned}$$

Ecuația $y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 - 6r + 5 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. Rezultă că: $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Se determină y_2 folosind substituția $y_2 = y_1' - 2y_1$. Se obține:

$$y_2 = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - 2C_1 e^x - 2C_2 e^{5x} \Rightarrow y_2 = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}.$$

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{5x} \\ y_2 = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x} \end{cases}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Soluție Matlab:

```
syms y1(x) y2(x)
eq1=[diff(y1)==2*y1+y2]
eq2=[diff(y2)==3*y1+4*y2]
[y1 y2]=dsolve(eq1,eq2)
y1 =
(C1*exp(5*x))/3 - C2*exp(x)
y2 =
C2*exp(x) + C1*exp(5*x)
```


b) Derivăm prima ecuație a sistemului. Eliminând pe y_2 și y_2' , vom obține o ecuație diferențială de ordinul doi cu funcția necunoscută y_1 .

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 \Rightarrow y_1'' = 3y_1' - (-9y_1 + 3y_2') \\ y_1'' &= 3y_1' + 9y_1 - 3(3y_1 - y_1') \Rightarrow y_1'' = 6y_1' \end{aligned}$$

Ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale obținute este: $r^2 - 6r = 0$, cu $r_1 = 0$, $r_2 = 6$, deci: $y_1 = C_1 + C_2 e^{6x}$. Folosind substituția $y_2 = 3y_1 - y_1'$, se obține: $y_2 = 3C_1 - 3C_2 e^{6x}$.

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{6x} \\ y_2 = 3C_1 - 3C_2 e^{6x} \end{cases}$.

Soluție Matlab:

```
syms y1(x) y2(x)
eqns=[diff(y1)==3*y1-y2,diff(y2)==-9*y1+3*y2]
[y1 y2]=dsolve(eqns)
y1 =
C1/3 - (C2*exp(6*x))/3
y2 =
C1 + C2*exp(6*x)
```

2. a) Se derivează prima ecuație a sistemului, apoi se elimină y_2 și y_2' . Se obține o ecuație diferențială de ordinul doi având funcția necunoscută y_1 .

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2y_1' + y_2' \Rightarrow y_1'' = 2y_1' - y_1 + 4y_2 \\ y_1'' &= 2y_1' - y_1 + 4(y_1' - 2y_1) \Rightarrow y_1'' = 6y_1' - 9y_1 \end{aligned}$$

Ecuația diferențială $y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0$ are ecuația caracteristică atașată $r^2 - 6r + 9 = 0$, cu $r_{1,2} = 3$, deci $y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. Funcția y_2 este:

$$y_2 = y_1' - 2y_1 = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} - 2C_1 e^{3x} - 2C_2 x e^{3x},$$

adică: $y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \\ y_2 = (C_1 + C_2) e^{3x} + C_2 x e^{3x} \end{cases}$.

b) Vom deriva a doua ecuație, apoi vom elimina pe y_1 și y_1' pentru a obține o ecuație diferențială de ordinul doi cu funcția necunoscută y_2 .

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1 + 3y_2 \Rightarrow y_2'' = y_1' + 3y_2' \Rightarrow y_2'' = 3y_1 - y_2 + 3y_2' \\ y_2'' &= 3(y_2' - 3y_2) - y_2 + 3y_2' \Rightarrow y_2'' = 6y_2' - 10y_2 \end{aligned}$$

Ecuația caracteristică atașată ecuației $y_2'' - 6y_2' + 10y_2 = 0$ este $r^2 - 6r + 10 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = 3 \pm i$. Vom obține:

$$\begin{aligned} y_2 &= C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x \mid ()' \\ y_2' &= C_1 e^{3x} (3 \cos x - \sin x) + C_2 e^{3x} (3 \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

Folosind substituția $y_1 = y_2' - 3y_2$, se obține:

$$y_1 = -c_1 e^{3x} \sin x + C_2 e^{3x} \cos x.$$

Rezultă că soluția sistemului este:

$$\begin{cases} y_1 = -C_1 e^{3x} \sin x + C_2 e^{3x} \cos x \\ y_2 = C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
[y1 y2]=dsolve('Dy1=3*y1-y2','Dy2=y1+3*y2','x')
y1 =
- C1*exp(3*x)*cos(x) - C2*exp(3*x)*sin(x)
y2 =
C2*exp(3*x)*cos(x) - C1*exp(3*x)*sin(x)
```

3. a) Se derivează prima ecuație și se elimină y' , apoi y . Se obține o ecuație diferențială de ordinul doi în x , cu coeficienți constanți, liniară și neomogenă.

$$x'' = y' + 1 \Rightarrow x'' = 4x + \sin t + 1 \Rightarrow x'' - 4x = \sin t + 1$$

Soluția generală a ecuației obținute va avea forma:

$$x = x_0 + x_{p_1} + x_{p_2}.$$

Pentru ecuația omogenă $x'' - 4x = 0$ se obține soluția:

$$x_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Din ecuația $x'' - 4x = \sin t$ deducem că $x_{p_1} = a \cos t + b \sin t$. Se determină $a = 0$ și $b = -\frac{1}{5}$, deci $x_{p_1} = -\frac{1}{5} \sin t$.

Pentru ecuația $x'' - 4x = 1$, soluția particulară are forma $x_{p_2} = c$. Prin înlocuire, se obține $c = -\frac{1}{4}$, deci $x_{p_2} = -\frac{1}{4}$. Rezultă că:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5} \sin t - \frac{1}{4}.$$

Pentru determinarea lui y se folosește substituția $y = x' - t$. Vom obține:

$$y = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t - t.$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5} \sin t - \frac{1}{4} \\ y = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t - t \end{cases}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eq1=diff(x)==y+t;
eq2=diff(y)==4*x+sin(t);
sol=dsolve(eq1,eq2);
x=simplify(sol.x)
y=simplify(sol.y)
x =
(C2*exp(2*t))/2 - (C1*exp(-2*t))/2 - sin(t)/5 - 1/4
y =
C1*exp(-2*t) - cos(t)/5 - t + C2*exp(2*t)
```

b) Se derivează a doua ecuație a sistemului și se elimină x' și x .

$$\begin{aligned} y'' &= x' + y' - 5e^{-t} \Rightarrow y'' = 5x - 3y + 2e^{3t} + y' - 5e^{-t} \\ y'' &= 5(y' - y - 5e^{-t}) - 3y + 2e^{3t} + y' - 5e^{-t} \end{aligned}$$

Se obține ecuația diferențială de ordinul doi în y , cu coeficienți constanți, liniară și neomogenă:

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}.$$

Soluția generală are forma:

$$y = y_0 + y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Ecuația $y'' - 6y' + 8y =$ are soluția: $y_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$.

Pentru ecuația neomogenă: $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t}$, soluția particulară are forma: $y_{p_1} = a e^{3t}$. Prin înlocuire, se obține $a = -2$.

Pentru ecuația neomogenă: $y'' - 6y' + 8y = -30e^{-t}$, soluția particulară are forma: $y_{p_2} = b e^{-t}$. Prin înlocuire, se obține $b = -2$. Rezultă că:

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Se determină x , folosind substituția: $x = y' - y - 5e^{-t}$. Va rezulta:

$$x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}.$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eq1=diff(x)==5*x-3*y+2*exp(3*t);
eq2=diff(y)==x+y+5*exp(-t);
sol=dsolve(eq1, eq2)
x=simplify(sol.x)
y=simplify(sol.y)
x =
C1*exp(2*t) - 4*exp(3*t) - exp(-t) + 3*C2*exp(4*t)
y =
C1*exp(2*t) - 2*exp(3*t) - 2*exp(-t) + C2*exp(4*t)
```

4. a) Se derivează a doua ecuație a sistemului și se elimină x' și x .

$$\begin{aligned} y'' &= x' + y' + 2 \Rightarrow y'' = -3x - 4y + t + y' + 2 \\ y'' &= -3(y' - y - 2t - 1) - 4y + t + y' + 2 \end{aligned}$$

Se obține ecuația:

$$y'' + 2y' + y = 7t + 5,$$

care are soluția generală de forma: $y = y_0 + y_p$.

Ecuația omogenă $y'' + 2y' + y = 0$ are ecuația caracteristică asociată:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1.$$

Rezultă că:

$$y_0 = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}.$$

O soluție particulară a ecuației neomogene are forma: $y_p = at + b$. Înlocuind, obținem: $a = 7$, $b = -9$, deci $y_p = 7t - 9$. Rezultă că:

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 7t - 9.$$

Se determină x din substituția: $x = y' - y - 2t - 1$, unde

$$y' = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}(1 - t) + 7.$$

Va rezulta:

$$x = -2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}(1 - 2t) - 9t + 15.$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{cases} x = -2C_1e^{-t} + C_2e^{-t}(1 - 2t) - 9t + 15 \\ y = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + 7t - 9 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eq1=diff(x)==-3*x-4*y+t;
eq2=diff(y)==x+y+2*t+1;
sol=dsolve(eq1, eq2)
x=simplify(sol.x)
y=simplify(sol.y)
x =
C1*exp(-t)-9*t-2*C2*exp(-t)-2*C8*t*exp(-t)+15
y =
7*t+C2*exp(-t)+C1*t*exp(-t)-9
```

b) Prin metoda eliminării, se obține o ecuație diferențială de ordinul doi, cu coeficienți constanți, liniară și neomogenă, care se rezolvă prin metoda variației constantelor.

$$x'' = y' \Rightarrow x'' + x = \frac{1}{\cos t}$$

Soluția generală a ecuației omogene $x'' + x = 0$ este:

$$x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Determinăm $C'_1(t)$ și $C'_2(t)$ din sistemul:

$$\begin{cases} C'_1(t) \cos t + C'_2(t) \sin t = 0 \\ -C'_1(t) \sin t + C'_2(t) \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}.$$

Vom obține:

$$\begin{aligned} C'_1(t) &= -\operatorname{tg} t \Rightarrow C_1(t) = \ln(\cos t) + C_1 \\ C'_2(t) &= 1 \Rightarrow C_2(t) = t + C_2 \end{aligned},$$

de unde rezultă:

$$x = (\ln(\cos t) + C_1) \cos t + (t + C_2) \sin t.$$

Din prima ecuație a sistemului, se obține:

$$y = x' \Rightarrow y = -\sin t - \sin t \ln(\cos t) - C_1 \sin t + \sin t + t \cos t + C_2 \cos t.$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln(\cos t) + t \sin t \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \sin t \ln(\cos t) + t \cos t \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluție Matlab:

```
[x y]=dsolve('Dx=y','Dy=-x+1/cos(t)','t')
x =
cos(t)*(C2 + log(cos(t))) + sin(t)*(C1 + t)
y =
cos(t)*(C1 + t) - sin(t)*(C2 + log(cos(t)))
```

5. a) Se determină, mai întâi, soluția generală a sistemului. Derivând prima ecuație și eliminând y și y' , obținem succesiv:

$$x'' = 2x' + y' \Rightarrow x'' = 2x' + x + 2(x' - 2x) \Rightarrow x'' = 4x' - 3x.$$

Ecuația $x'' - 4x' + 3x = 0$ are soluția generală: $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$.

Din substituția $y = x' - 2x$, se obține $y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$.

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Din condițiile inițiale, se obține sistemul:

$$\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Soluția problemei Cauchy este:

$$\begin{cases} x = e^t + 2e^{3t} \\ y = -e^t + 2e^{3t} \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
[x y]=dsolve('Dx=2*x+y','Dy=x+2*y','x(0)=3',
'y(0)=1','t')
x =
2*exp(3*t) + exp(t)
y =
2*exp(3*t) - exp(t)
```

Pentru vizualizarea reprezentării grafice a soluției, folosim comenzile:

```

tmin=-1; tmax=1; nt=30; t=linspace(tmin, tmax, nt);
x=2*exp(3*t)+exp(t);
y=2*exp(3*t)-exp(t);
figure
plot(t, x, '-b', t, y, '-r')
legend('x(t)=2e^{3t}+e^t', 'y(t)=2e^{3t}-e^t')

```

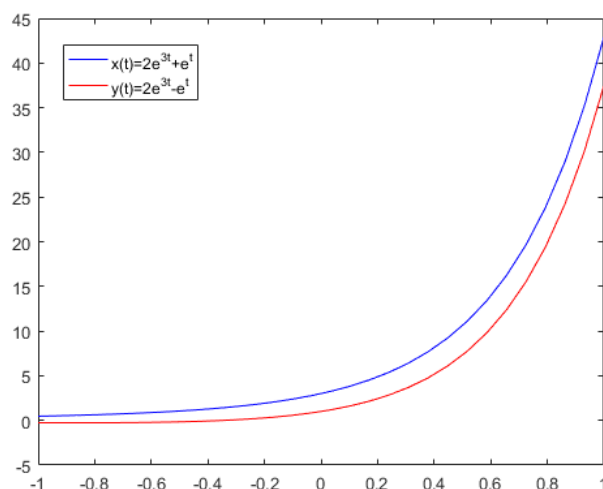


Figura 3.7: Soluția problemei $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$, $x(0) = 3$, $y(0) = 1$

b) Se determină soluția generală a sistemului.

$$x'' = 4x' - 3y' \Rightarrow x'' = 4x' - 3(3x + 4y - 1) \Rightarrow x'' = 4x' - 9x - 12y + 3$$

$$x'' = 4x' - 9x - 4(4x + 1 - x') + 3 \Rightarrow x'' = 8x' - 25x - 1$$

Ecuția $x'' - 8x' + 25x = -1$ are soluția: $x = x_0 + x_p$.

Ecuția caracteristică atașată ecuației omogene $x'' - 8x' + 25x = 0$ este: $r^2 - 8r + 25 = 0$, cu rădăcinile: $r_{1,2} = 4 \pm 3i$. Se obține:

$$x_0 = C_1 e^{4t} \cos 3t + C_2 e^{4t} \sin 3t.$$

Soluția particulară a ecuației neomogene este $x_p = a$. Înlocuim în ecuație și obținem $a = -\frac{1}{25}$, de unde rezultă $x_p = -\frac{1}{25}$. Astfel, deducem că:

$$x = C_1 e^{4t} \cos 3t + C_2 e^{4t} \sin 3t - \frac{1}{25},$$

de unde, prin derivare, rezultă:

$$x' = C_1 e^{4t} (4 \cos 3t - 3 \sin 3t) + C_2 e^{4t} (4 \sin 3t + 3 \cos 3t).$$

Folosind relația $3y = 4x - x' + 1$, se obține:

$$3y = 3C_1 e^{4t} \sin 3t - 3C_2 e^{4t} \cos 3t + \frac{21}{25},$$

adică:

$$y = C_1 e^{4t} \sin 3t - C_2 e^{4t} \cos 3t + \frac{7}{25}.$$

Din condițiile $x(0) = -2$, $y(0) = 1$, se obține sistemul:

$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{25} = -2 \\ -C_2 + \frac{7}{25} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{49}{25}, C_2 = -\frac{18}{25}.$$

Soluția problemei Cauchy este:

$$\begin{cases} x = -\frac{49}{25} e^{4t} \cos 3t - \frac{18}{25} e^{4t} \sin 3t - \frac{1}{25} \\ y = \frac{18}{25} e^{4t} \cos 3t - \frac{49}{25} e^{4t} \sin 3t + \frac{7}{25} \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eqns=[diff(x)==4*x-3*y+1, diff(y)==3*x+4*y-1];
conds=[x(0)==-2,y(0)==1];
[x y]=dsolve(eqns,conds)
x =
-(49*cos(3*t)*exp(4*t))/25-(18*sin(3*t)*exp(4*t))/25-1/25
y =
(18*cos(3*t)*exp(4*t))/25-(49*sin(3*t)*exp(4*t))/25+7/25
```

6. Eliminând funcția x , se obține ecuația: $y'' - y = 0$, cu soluția:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Din substituția $x = y' + 2y$, va rezulta:

$$x = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Folosind condițiile: $x(0) = 2$, $y(0) = -1$, se obțin valorile: $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = -\frac{5}{2}$.

Soluția problemei este:

$$\begin{cases} x = \frac{9}{2}e^t - \frac{5}{2}e^{-t} \\ y = \frac{3}{2}e^t - \frac{5}{2}e^{-t} \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
syms x(t) y(t)
eqns=[diff(x)==2*x-3*y, diff(y)==x-2*y];
conds=[x(0)==2, y(0)==-1];
[x y]=dsolve(eqns, conds)
fplot(t,x,[0 3], '-')
hold on
fplot(t,y,[0 3], '--')
hold off
legend('x(t)=9/2e^t - 5/2e^{-t}', 'y(t)=3/2e^t - 5/2e^{-t}')
x =
(9*exp(t))/2 - (5*exp(-t))/2
y =
(3*exp(t))/2 - (5*exp(-t))/2
```

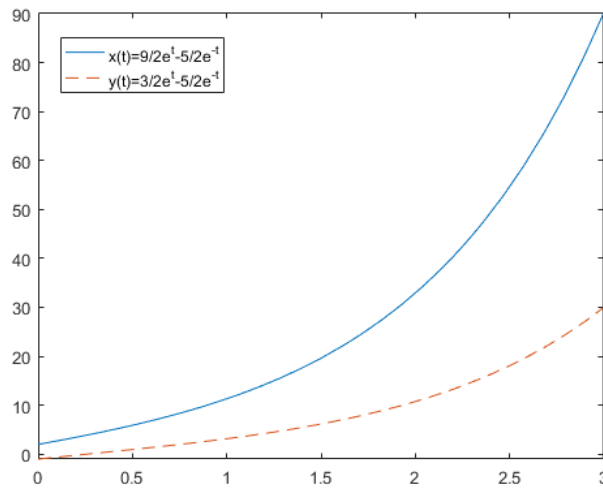


Figura 3.8: Soluția problemei: $x' = 2x - 3y$, $y' = x - 2y$, $x(0) = 2$, $y(0) = -1$

7. I Aplicăm metoda eliminării. Se derivează prima ecuație a sistemului.

$$x'' = y' + z' \Rightarrow x'' = 2x + y + z \Rightarrow x'' = 2x + x'$$

Ecuția $x'' - x' - 2x = 0$ are soluția generală:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Din primele două ecuații ale sistemului, se determină y .

$$y' = x + x' - y \Rightarrow y' + y = x + x' \Rightarrow y' + y = 3C_1 e^{2t},$$

cu soluția generală: $y = y_0 + y_p$, unde $y_0 = C_3 e^{-t}$ și $y_p = C_1 e^{2t}$. Rezultă că:

$$y = C_3 e^{-t} + C_1 e^{2t}.$$

Din prima ecuație a sistemului, se determină z :

$$z = x' - y \Rightarrow z = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} - C_1 e^{2t} \Rightarrow z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}.$$

Soluția generală a sistemului este:
$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t} \end{cases}.$$

II Se determină valorile și vectorii proprii ai matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$. Vectorii proprii V_i se determină din:

$$(A - \lambda_i I_3) \cdot V_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_i \cdot v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - \lambda_i \cdot v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - \lambda_i \cdot v_3 = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

$$\text{Pentru } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pentru } \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}. \text{ Matricea acestui sistem are rangul}$$

unu iar ordinul de multiplicitate al lui λ este doi. Vor rezulta doi vectori liniar independenți: V_2 și V_3 .

Alegem $v_1 = 1$. Din ecuația $1 + v_2 + v_3 = 0$, rezultă $v_3 = -v_2 - 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ -v_2 - 1 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 V_1 e^{2t} + (C_2 V_2 + C_3 V_3) e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

adică:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t} \end{cases}.$$

Soluție Matlab:

```
[x y z]=dsolve('Dx=y+z','Dy=x+z','Dz=x+y','t')
x =
C1*exp(2*t) - C2*exp(-t) - C3*exp(-t)
y =
C1*exp(2*t) + C2*exp(-t)
z =
C1*exp(2*t) + C3*exp(-t)
```

8. Vom rezolva sistemul prin două metode.

I Aplicăm metoda eliminării. Derivăm prima ecuație și obținem:

$$x'' = -y' + z' \Rightarrow x'' = -z - x + z \Rightarrow x'' + x = 0.$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale obținute este $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Rezultă că:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Din primele două ecuații ale sistemului, se obține:

$$y' - y = x' \Rightarrow y' - y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Ecuația diferențială liniară neomogenă obținută are soluția $y = y_0 + y_p$.

Din ecuația omogenă asociată $y' - y = 0$ deducem că $y_0 = C_3 e^t$.

Determinăm soluția particulară y_p , folosind forma membrului drept al ecuației neomogene.

$$f(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \Rightarrow y_p = a \cos t + b \sin t \Rightarrow y'_p = -a \sin t + b \cos t$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, prin identificare rezultă:

$$a = \frac{C_1 - C_2}{2}, \quad b = \frac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow y_p = \frac{C_1 - C_2}{2} \cos t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin t.$$

Am obținut astfel:

$$y = C_3 e^t + \frac{C_1 - C_2}{2} \cos t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin t.$$

Pentru a determina funcția z , folosim a doua ecuație a sistemului dat.

$$z = y' \Rightarrow z = C_3 e^t + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t + \frac{-C_1 + C_2}{2} \sin t.$$

Soluția generală a sistemului dat este:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = \frac{C_1 - C_2}{2} \cos t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin t + C_3 e^t \\ z = \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t + \frac{-C_1 + C_2}{2} \sin t + C_3 e^t \end{cases}.$$

Din condițiile $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$, se obține soluția:

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + e^t \\ z = -\sin t + e^t \end{cases}.$$

II Rezolvăm sistemul prin metoda valorilor și vectorilor proprii.

Determinăm valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

Pentru $\lambda_1 = 1$, relația $(A - \lambda I_3) \cdot V = 0_{3,1}$ devine:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{matrix}.$$

Se obține $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_2 = i$, are loc egalitatea:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1 - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iv_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -iv_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + (1 - i)v_3 = 0 \end{cases}.$$

Alegând $v_3 = 1$, va rezulta $v_1 = 1 - i$ și $v_2 = -i$. Notăm $V = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinăm $\operatorname{Re}(V \cdot e^{it})$ și $\operatorname{Im}(V \cdot e^{it})$, ținând cont că:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

$$\begin{aligned} V \cdot e^{it} &= \begin{pmatrix} 1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t - i(\cos t + i \sin t) \\ -i(\cos t + i \sin t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\operatorname{Re}(V \cdot e^{it})} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\operatorname{Im}(V \cdot e^{it})} \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

adică:

$$\begin{cases} x = (C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t \\ y = C_1 e^t - C_3 \cos t + C_2 \sin t \\ z = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t \end{cases}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Printr-o redefinire a constantelor, se poate observa că soluția generală obținută prin ambele metode este aceeași.

Soluție Matlab

```
syms x(t) y(t) z(t)
eqns=[diff(x)==-y+z, diff(y)==z, diff(z)==-x+z];
conds=[x(0)==1,y(0)==2,z(0)==1];
[x y z]=dsolve(eqns, conds)
x =
2^(1/2)*cos(t + pi/4)
y =
cos(t) + exp(t)
z =
exp(t) - sin(t)
```

Pentru a vizualiza graficul soluției problemei, se scriu comenzile:

```
tmin=-2; tmax=2; nt=30;
t=linspace(tmin,tmax,nt);
x=cos(t)-sin(t);
y=cos(t)+exp(t);
z=-sin(t)+exp(t);
plot(t,x,'-r',t,y,'-b',t,z,'-g')
legend('x(t)=cos(t)-sin(t)', 'y(t)=cos(t)+exp(t)',
       'z(t)=-sin(t)+exp(t)')
```

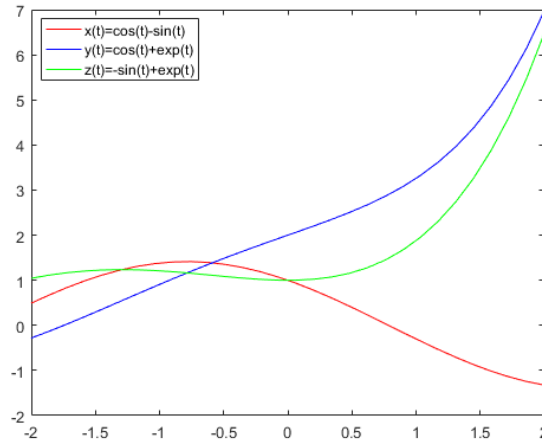


Figura 3.9: Soluția problemei $x' = -y + z$, $y' = z$, $z' = -x + z$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$

9. a) Soluția generală a sistemului simetric este: $F(x, y) = C$, unde F este o integrală primă a sistemului.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{F(x,y)} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (\text{ecuație omogenă})$$

Se face schimbarea de funcție: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$.

$$u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow xdu = \frac{1}{u}dx \Rightarrow udu = \frac{1}{x}dx \Rightarrow u^2 = 2 \ln x + C$$

Soluția generală: $\frac{y^2}{x^2} - 2 \ln x = C$.

10. a) Se determină două integrale prime.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dy}{\sin y} \Rightarrow \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \right) + \ln C_1 \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dz}{\sin z} \Rightarrow \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{z}{2} \right) + \ln C_2\end{aligned}$$

Soluția generală:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{x}{2} &= C_1 \operatorname{tg} \frac{y}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= C_2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}\end{aligned}$$

b) Se egalează primele două rapoarte, apoi ultimele două.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{y^2} &= \frac{dy}{xy} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{dy}{xy} &= \frac{dz}{xz} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln y = \ln z + \ln C_2\end{aligned}$$

Soluția sistemului simetric este: $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ y = C_2 z \end{cases}$.

c) Egalăm primul și al treilea raport, apoi ultimele două rapoarte.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{2z} &= \frac{dz}{3x^2} \Rightarrow 3x^2 dx = 2z dz \Rightarrow x^3 - z^2 = C_1 \\ \frac{dy}{-x^2 y^2} &= \frac{dz}{3x^2} \Rightarrow -\frac{3}{y^2} dy = dz \Rightarrow \frac{3}{y} - z = C_2\end{aligned}$$

Soluția sistemului simetric este: $\begin{cases} x^3 - z^2 = C_1 \\ \frac{3}{y} - z = C_2 \end{cases}$.

11. a) O integrală primă se obține din egalitatea primelor două rapoarte.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1$$

Determinăm a doua integrală primă printr-o combinație integrabilă.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dx+dy-dz}{x+y-(x+y)} \Rightarrow dx+dy-dz=0 \Rightarrow x+y-z=C_2$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = C_1 \\ x+y-z = C_2 \end{cases}.$$

b) Se determină o integrală primă egalând primele două rapoarte.

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1$$

Pentru a doua integrală primă, vom scrie sistemul sub forma:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z dz}{x^2 - y^2} = \frac{x dx - y dy - 2z dz}{0},$$

de unde rezultă:

$$x dx - y dy - 2z dz = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2z^2 = C_2.$$

Soluția sistemului este: $\begin{cases} x = C_1 y \\ x^2 - y^2 - 2z^2 = C_2 \end{cases}$.

c) O integrală primă va rezulta din primele două rapoarte.

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} \Rightarrow 2x dx = 2y dy \mid \int \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$$

A doua integrală primă se obține printr-o combinație integrabilă.

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}}{0} \Rightarrow \ln \frac{xy}{z} = \ln C_2 \Rightarrow \frac{xy}{z} = C_2$$

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{xy}{z} = C_2 \end{cases}$.

12. a) Aplicăm metoda combinațiilor integrabile.

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} = \frac{dx + dy + dz}{0} \Rightarrow x + y + z = C_1$$

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{0} \Rightarrow \ln x + \ln y + \ln z = \ln C_2$$

Soluția generală a sistemului este: $\begin{cases} x + y + z = C_1 \\ xyz = C_2 \end{cases}$.

b) Se determină două integrale prime.

$$\frac{dx}{2y+z} = \frac{dy}{z-2x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dx - dy - 2dz}{2y+z-z+2x-2x-2y} = \frac{dx - dy - 2dz}{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx - dy - 2dz &= 0 \Rightarrow x - y - 2z = C_1 \\ \frac{dx}{2y+z} &= \frac{dy}{z-2x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{xdx + ydy - zdz}{0} \\ \Rightarrow xdx + ydy - zdz &= 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = C_2 \end{aligned}$$

Soluția sistemului simetric este: $\begin{cases} x - y - 2z = C_1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$.

13. a) O integrală primă se obține din egalitatea primelor două rapoarte.

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow xy = C_1$$

Pentru a obține a doua integrală primă, egalăm ultimele două rapoarte, folosind relația $x = \frac{C_1}{y}$.

$$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{-C_1/y} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y^2 dy = -C_1 dz$$

Prin integrare, se obține: $\frac{y^3}{3} = -C_1 z + C_2$, de unde rezultă: $\frac{y^3}{3} + xyz = C_2$, sau, echivalent: $y^3 + 3xyz = C_2$.

Soluția sistemului simetric este: $\begin{cases} xy = C_1 \\ y^3 + 3xyz = C_2 \end{cases}$.

b) Prima integrală primă rezultă din primele două rapoarte.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1$$

Din relația $x = C_1 y$ și ultimele două rapoarte, se obține:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{C_1 y^2} \Rightarrow C_1 y dy = dz \Rightarrow C_1 y^2 = 2z + C_2 \Rightarrow xy = 2z + C_2$$

Soluția sistemului simetric este: $\begin{cases} \frac{x}{y} = C_1 \\ xy - 2z = C_2 \end{cases}$.

14. Rezolvând sistemul dat în forma normală, obținem succesiv:

$$x' = y \Rightarrow x'' = y' \Rightarrow x'' = x \Rightarrow x = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

$$y = x' \Rightarrow y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Soluția generală a sistemului dat este:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Sistemul dat este echivalent cu sistemul simetric:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = dt.$$

Se determină două integrale prime.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x dx = y dy \Rightarrow x^2 - y^2 = K_1$$

$$\frac{dx + dy}{x + y} = dt \Rightarrow \ln(x + y) = t + K_2 \Rightarrow x + y = K_2 e^t$$

Soluția generală a sistemului simetric este:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = K_1 \\ x + y = K_2 e^t \end{cases}.$$

Din acest sistem, se pot determina funcțiile $x(t)$ și $y(t)$.

Vom obține:

$$x(t) = \frac{K_1}{2C_2} e^{-t} + \frac{K_2}{2} e^t,$$

$$y(t) = -\frac{K_1}{2C_2} e^{-t} + \frac{K_2}{2} e^t.$$

Notând $\frac{K_2}{2} = C_1$, $\frac{K_1}{2C_2} = C_2$, se obține soluția (3.4.1).

15. Sistemul dat este echivalent cu sistemul simetric:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} = dt.$$

Se determină 3 integrale prime, folosind metoda combinațiilor integrabile.

$$\frac{dx - dy}{y - x} = dt \Rightarrow \ln(x - y) = -t + \ln C_1 \Rightarrow x - y = C_1 e^{-t}$$

$$\frac{dx - dz}{z - x} = dt \Rightarrow \ln(x - z) = -t + \ln C_2 \Rightarrow x - z = C_2 e^{-t}$$

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)} = dt \Rightarrow \ln(x + y + z) = 2t + \ln C_3 \Rightarrow x + y + z = C_3 e^{2t}$$

Soluția generală a sistemului simetric este:

$$\begin{cases} x - y = C_1 e^{-t} \\ x - z = C_2 e^{-t} \\ x + y + z = C_3 e^{2t} \end{cases}.$$

Determinăm expresiile funcțiilor x , y , z .

Adunând relațiile (1), (2), (3), se obține:

$$x = \frac{C_1 + C_2}{3} e^{-t} + \frac{C_3}{3} e^{2t}.$$

Din relația (1) se determină:

$$y = x - C_1 e^{-t} \Rightarrow y = \frac{-2C_1 + C_2}{3} e^{-t} + \frac{C_3}{3} e^{2t}.$$

iar din relația (2) va rezulta:

$$z = x - C_2 e^{-t} \Rightarrow z = \frac{C_1 - 2C_2}{3} e^{-t} + \frac{C_3}{3} e^{2t}.$$

3.5 Exerciții propuse

1. Să se rezolve sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} y'_1 &= -y_1 + 2y_2 \\ y'_2 &= 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y'_1 &= -y_1 + 8y_2 \\ y'_2 &= y_1 + y_2 \end{cases}$$

2. Să se rezolve sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} y'_1 &= -3y_1 + 2y_2 \\ y'_2 &= -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' &= 4x + y \\ y' &= -x + 6y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' &= 7x + y \\ y' &= -x + 5y \end{cases}$$

3. Să se rezolve sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} x' &= -x + 2y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -5x + y \end{cases}$$

4. Să se rezolve sistemele:

$$\text{a)} \begin{cases} x' &= x - y + t^2 \\ y' &= -4x - 2y + 3t + 2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' &= y + e^{-t} \\ y' &= x + e^t \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x'(t) &= -2x + y + \cos t \\ y'(t) &= 4x + y \end{cases}$$

5. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\text{a)} \begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' &= -3x - y \\ y' &= x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

6. Să se rezolve sistemele:

$$\text{a)} \begin{cases} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' &= 3y - 4z \\ y' &= -z \\ z' &= -2x + y \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= x + 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{cases}$$

7. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\text{a)} \begin{cases} x' &= x + y - 3z \\ y' &= 4x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 6z \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) &= 2 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1 \end{matrix}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' &= -x + y + z + e^t \\ y' &= x - y + z + e^{3t} \\ z' &= x + y + z + 4 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

8. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

a) $\frac{dx}{3y^2} = \frac{dy}{-2x}$

b) $\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{xy}$

9. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

a) $\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z}$

b) $\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{dz}{\sin^2 z}$

c) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{\sqrt{z}}$

10. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

a) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{2x + 3y}$

b) $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y}$

c) $\frac{dx}{2z - 3y} = \frac{dy}{3x - 4z} = \frac{dz}{4y - 2x}$

11. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

a) $\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{z}$

b) $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$

c) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$

12. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. Să se scrie sistemul sub forma simetrică și să se integreze.

13. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = y - z \\ z' = 2z \end{cases}$. Să se scrie sistemul sub forma simetrică și să se integreze.

Capitolul 4

Ecuatii cu derivate parțiale

4.1 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi

4.1.1 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul I liniare

Definiția 4.1.1. *Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordin I liniară și omogenă o ecuație de forma:*

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (4.1.1)$$

unde $X_i, i = 1, \dots, n$ sunt funcții reale de n variabile iar $u = u(x_1, \dots, x_n)$ este funcția necunoscută.

Sistemul caracteristic asociat ecuației (4.1.1) este sistemul simetric:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \quad (4.1.2)$$

Dacă soluția sistemului (4.1.2) este dată prin relațiile:

$$F_1 = C_1, F_2 = C_2, \dots, F_{n-1} = C_{n-1},$$

atunci soluția generală a ecuației (4.1.1) este:

$$u = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1}),$$

unde Φ este o funcție arbitrară de $n - 1$ variabile.

Curbele integrale ale sistemului (4.1.2) se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației (4.1.1).

Exemplul 4.1.2. Să se rezolve ecuația: $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Soluție: Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-z}.$$

Determinăm două integrale prime.

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = 2 \ln x + \ln C_1 \Rightarrow \ln y - \ln x^2 = \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = C_1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z} \Rightarrow \ln x = -\ln z + \ln C_2 \Rightarrow \ln x + \ln z = \ln C_2 \Rightarrow xz = C_2$$

Soluția ecuației diferențiale cu derivate parțiale este:

$$u = \Phi \left(\frac{y}{x^2}, xz \right).$$

Calculul simbolic al soluției unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul I se poate face folosind comanda *pdsolve* din **Maple**.

Pentru exemplul de mai sus, vom scrie:

`pde:=x*diff(u(x,y,z),x)+2*y*diff(u(x,y,z),y)-z*diff(u(x,y,z),z)=0;`

$$x \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z) \right) + 2y \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, z) \right) - z \left(\frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) \right) = 0$$

`pdsolve(pde);`

$$u(x, y, z) = F_1 \left(\frac{y}{x^2}, zx \right)$$

Problema Cauchy pentru ecuația (4.1.1) este problema determinării soluției ecuației, care pentru o valoare fixată a unei variabile, se reduce la o funcție dată ϕ :

$$u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i_0}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Observația 4.1.3. A rezolva problema Cauchy pentru ecuația (4.1.1), înseamnă a determina suprafața integrală care conține curba:

$$\begin{cases} x_i &= x_{i_0} \\ u &= \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Exemplul 4.1.4. *Să se rezolve problema Cauchy:*

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - 3y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = x.$$

Soluție: Sistemul caracteristic asociat ecuației este:

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} \Rightarrow 3dx + 2dy = 0.$$

Se obține integrala primă:

$$3x + 2y = C,$$

deci soluția ecuației cu derivate parțiale este:

$$u(x, y) = \Phi(3x + 2y).$$

Din sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 2y = C \\ y = 0 \\ u = x \end{cases},$$

rezultă $3x = C$, deci $u = \frac{C}{3}$.

Soluția problemei Cauchy:

$$u(x, y) = x + \frac{2y}{3}.$$

Soluție Maple:

```
pde:=2*(diff(u(x, y),x))-3*(diff(u(x,y),y))=0
```

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)\right) = 0$$

```
ice:=u(x,0)=x
```

$$u(x, 0) = x$$

```
sols:= pdsolve({pde,ice}, u(x, y))
```

$$u(x, y) = x + \frac{2}{3}y$$

Exemplul 4.1.5. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ u(x, y, 0) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Soluție: Sistemul caracteristic asociat ecuației este:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}.$$

Din primele două rapoarte se obține: $\underbrace{\frac{x}{y}}_{F_1} = C_1.$

Pentru a obține a doua integrală primă, vom scrie:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy} = \frac{ydx + xdy - 2dz}{0}.$$

Integrând ecuația $ydx + xdy - 2dz = 0$ rezultă $\underbrace{xy - 2z}_{F_2} = C_2.$

Soluția generală a ecuației date este:

$$u(x, y, z) = \Phi \left(\frac{x}{y}, xy - 2z \right).$$

Pentru a obține soluția problemei Cauchy, se scrie sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = C_1 \\ xy - 2z = C_2 \\ z = 0 \\ u = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Din primele trei ecuații rezultă $x^2 = C_1 C_2$ și $y^2 = \frac{C_2}{C_1}$, de unde, folosind ultima ecuație, se obține:

$$u = C_1 C_2 + \frac{C_2}{C_1}.$$

Înlocuind C_1 și C_2 cu integralele prime F_1 și F_2 , se obține soluția problemei:

$$u(x, y, z) = (xy - 2z) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

4.1.2 Ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare

Definiția 4.1.6. O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este o ecuație de forma:

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}, \quad (4.1.3)$$

unde $u = u(x_1, \dots, x_n)$ este funcția necunoscută iar $X_i = (x_1, \dots, x_n, u)$ sunt funcții definite pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, care admit derivate parțiale continue pe D și care nu se anulează simultan pe D .

Sistemul caracteristic asociat ecuației (4.1.3) este sistemul simetric:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}}. \quad (4.1.4)$$

Soluția generală a ecuației (4.1.3) este dată implicit de ecuația:

$$\Phi(F_1, \dots, F_n) = 0,$$

unde Φ este o funcție arbitrară de n variabile, care admite derivate parțiale de ordinul întâi continue iar $F_1, \dots, F_n$ sunt integrale prime independente ale sistemului (4.1.4).

Observația 4.1.7. Pentru o ecuație cu derivate parțiale cvasiliniară de forma:

$$f_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = f_3(x, y, z), \quad (4.1.5)$$

sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{f_1(x, y, z)} = \frac{dy}{f_2(x, y, z)} = \frac{dz}{f_3(x, y, z)}$$

are soluția generală:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = C_1 \\ F_2(x, y, z) = C_2 \end{cases},$$

care reprezintă o familie de curbe care depind de 2 parametri.

Soluția generală a ecuației (4.1.5) este:

$$\Phi(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)) = 0,$$

unde Φ este o funcție arbitrară de două variabile.

Exemplul 4.1.8. Să se integreze ecuația: $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x$.

Soluție: Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}.$$

Determinăm două integrale prime.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x - \ln y = \ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1,$$

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{x} \Rightarrow dx = z dz \Rightarrow x = \frac{z^2}{2} + C_2 \Rightarrow x - \frac{z^2}{2} = C_2.$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, x - \frac{z^2}{2}\right) = 0,$$

de unde rezultă:

$$x - \frac{z^2}{2} = \phi\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow z^2 = 2x - 2\phi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soluție Maple:

```
pde:= x*z*(diff(z(x,y),x))+y*z*(diff(z(x,y),y))=x;
```

$$xz \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \right) + yz \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right) = x$$

```
pdsolve(pde);
```

$$z(x, y) = \sqrt{2x + F_1\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Soluția unei **probleme Cauchy** pentru ecuația (4.1.5) se reduce la a afla suprafața care conține o curbă dată.

Exemplul 4.1.9. Să se afle suprafața integrală a ecuației:

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

care trece prin curba $\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$.

Soluție: Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}.$$

Din primele două rapoarte avem:

$$x dx = y dy \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1,$$

iar din ultimele două rapoarte rezultă:

$$-2y dy = z dz \Rightarrow y^2 + \frac{z^2}{2} = C_2.$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$\Phi\left(x^2 - y^2, y^2 + \frac{z^2}{2}\right) = 0.$$

Pentru aflarea soluției problemei Cauchy, se determină o relație între constantele C_1 și C_2 din sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ y^2 + \frac{z^2}{2} = C_2 \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}.$$

Din primele trei ecuații se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} y^2 &= C_2 - \frac{9}{2}, \\ x^2 &= C_1 + C_2 - \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ultima ecuație, rezultă condiția:

$$C_1 + 2C_2 = 25.$$

Ținând cont de egalitățile $C_1 = x^2 - y^2$ și $C_2 = y^2 + \frac{z^2}{2}$, rezultă ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

4.1.3 Linii de câmp, suprafețe de câmp

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ și $\bar{V} : U \rightarrow \mathcal{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 , fără puncte singulare.

Definiția 4.1.10. Se numește linie de câmp pentru câmpul vectorial

$$\bar{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k},$$

o curbă din spațiu cu proprietatea că în orice punct $M(x, y, z)$ vectorul $\bar{V}(x, y, z)$ este tangent la curbă.

Teorema 4.1.11. Liniile de câmp ale câmpului vectorial $\bar{V}$ sunt graficele soluțiilor sistemului simetric:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Exemplul 4.1.12. Să se afle linia de câmp a câmpului vectorial

$$\bar{V}(x, y, z) = 2xz\bar{i} + 2yz\bar{j} + (x^2 - y^2)\bar{k},$$

care trece prin punctul $M(1, 1, 1)$.

Soluție: Sistemul simetric care determină liniile de câmp este:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}.$$

O integrală primă rezultă din primele două rapoarte:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1.$$

A doua integrală se obține scriind sistemul sub forma:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z dz}{x^2 - y^2} = \frac{x dx - y dy}{x^2 - y^2} \Rightarrow 2z dz = x dx - y dy \Rightarrow 2z^2 = x^2 - y^2 + C_2.$$

Se obține soluția:

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ 2z^2 - x^2 + y^2 = C_2 \end{cases}.$$

Linia de câmp care trece prin punctul $M(1, 1, 1)$ este definită prin ecuațiile:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2z^2 - x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Definiția 4.1.13. Se numește suprafață de câmp a unui câmp vectorial, orice suprafață generată de o linie de câmp a câmpului vectorial respectiv.

Teorema 4.1.14. O suprafață S este suprafață de câmp pentru un câmp vectorial $\bar{V}$ dacă și numai dacă $\bar{V}(M)$ este conținut în planul tangent la suprafața S în punctul $M \in (S)$.

Se consideră un câmp vectorial $\bar{V} = (P, Q, R)$ și o suprafață S definită prin ecuația $F(x, y, z) = 0$, unde $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 . S este suprafață de câmp pentru $\bar{V}$ dacă și numai dacă $F(x, y, z) = 0$ este soluție a ecuației cu derivate parțiale:

$$P(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

numită ecuația suprafețelor de câmp ale câmpului $\bar{V}$.

Exemplul 4.1.15. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\bar{V} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z(x^2 + y^2)\bar{k},$$

care trece prin curba $\begin{cases} x=2y \\ z=1 \end{cases}$.

Soluție: Sistemul simetric $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$ are integralele prime:

$$x^2 - y^2 = C_1, \quad \frac{xy}{z} = C_2.$$

Generatoarele suprafeței de câmp au ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{xy}{z} = C_2 \end{cases}.$$

Din sistemul: $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{xy}{z} = C_2 \\ x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$, se obține condiția $2C_1 = 3C_2$, de unde rezultă

ecuația explicită a suprafeței de câmp: $z = \frac{3xy}{2(x^2 - y^2)}$.

4.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi

4.2.1 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniare

Prin formularea matematică a unor probleme fizice se pot obține ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale de ordinul al doilea.

Definiția 4.2.1. Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniară o ecuație diferențială de forma:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (4.2.1)$$

unde $u = u(x, y) \in C^2(D)$ este funcția necunoscută, funcțiile a, b, c sunt continue pe $D \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ iar d este o funcție definită pe un domeniu din $D \times \mathbb{R}^3$.

Forma canonică a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi:

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ (de tip hiperbolic)
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ (de tip parabolic)
- c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ (de tip eliptic)

Teorema 4.2.2. Orice ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi cvasiliniară poate fi adusă la una dintre cele trei forme canonice.

Pentru a reduce la forma canonică o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, se folosește ecuația diferențială a curbelor caracteristice:

$$ay'^2 - 2by' + c = 0.$$

Ecuația diferențială (4.2.1) este:

- a) de tip hiperbolic dacă $b^2 - ac > 0$
- b) de tip parabolic dacă $b^2 - ac = 0$
- c) de tip eliptic dacă $b^2 - ac < 0$.

Vom prezenta și vom exemplifica, pentru fiecare tip de ecuație, aducerea la forma canonică.

De asemenea, vom exemplifica obținerea soluției unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi, scrisă în forma canonică.

4.2.2 Reducerea la forma canonică

Cazul I $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuație de tip hiperbolic

Soluțiile ecuației diferențiale a curbelor caracteristice sunt:

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Integrând aceste ecuații diferențiale, obținem:

$$F_1(x, y) = C_1, \quad F_2(x, y) = C_2. \quad \text{Notăm : } \begin{cases} \xi = F_1(x, y) \\ \eta = F_2(x, y) \end{cases}.$$

Se calculează derivatele parțiale de ordinul întâi și doi pentru funcția compusă

$$u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

și se înlocuiesc în ecuația inițială. Se vor folosi formulele:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Forma canonică hiperbolică obținută este:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + f_1\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (4.2.2)$$

Observația 4.2.3. Notând $\alpha = \xi + \eta$ și $\beta = \xi - \eta$, ecuația (4.2.2) se scrie echivalent:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + f_1^*\left(\alpha, \beta, v, \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Ultima ecuație poate fi obținută și direct, notând:

$$\alpha = F_1(x, y) + F_2(x, y), \quad \beta = F_1(x, y) - F_2(x, y).$$

Exemplul 4.2.4. Să se reducă la forma canonică ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Avem $a = 1$, $2b = -4$, $c = 3 \Rightarrow b^2 - ac = 1 > 0$. Rezultă că ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația diferențială a curbelor caracteristice:

$$y'^2 + 4y' + 3 = 0$$

are soluțiile $y' = -1$ și $y' = -3$. Prin integrare se obține:

$$y = -x + C_1 \text{ și } y = -3x + C_2 \Rightarrow x + y = C_1 \text{ și } 3x + y = C_2.$$

Notăm:
$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = 3x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi'_x = 1, & \xi'_y = 1 \\ \eta'_x = 3, & \eta'_y = 1 \end{cases}.$$

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_3 + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_3 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația inițială derivatele parțiale calculate, va rezulta ecuația:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 16 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 12 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \\ - 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} - 6 \frac{\partial U}{\partial \eta} + 6 \frac{\partial U}{\partial \xi} + 6 \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \text{ adică, } -4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Forma canonică hiperbolică a ecuației date este:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0.$$

Cazul II $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuație de tip parabolic

Ecuția diferențială a curbelor caracteristice are rădăcina dublă $y' = \frac{b}{a}$.

Prin integrare, se obține $F(x, y) = C$. Notăm:
$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = F(x, y) \end{cases}.$$

Se calculează derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ și se înlocuiesc în ecuația dată. Se obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + f_2 \left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.2.3)$$

Observația 4.2.5. Se poate folosi notația $\begin{cases} \xi = F(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$. În acest caz, se va obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f_2 \left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.2.4)$$

Exemplul 4.2.6. Să se reducă la forma canonică ecuația:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Soluție: $a = x^2$, $2b = -2xy$, $c = y^2 \Rightarrow b^2 - ac = 0$, deci ecuația dată este de tip parabolic. Ecuația diferențială a curbelor caracteristice:

$$x^2 y'^2 + 2xyy' + y^2 = 0$$

are rădăcină dublă $y' = -\frac{y}{x}$. Rezolvăm ecuația diferențială obținută:

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln C \Rightarrow xy = C.$$

Notăm: $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi'_x = y, & \xi'_y = x \\ \eta'_x = 0, & \eta'_y = 1 \end{cases}$.

Derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_y + y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_0 = y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_x + x \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_x + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 = x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2x \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_x + y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi} + xy \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Înlocuind derivatele parțiale calculate în ecuația inițială, obținem:

$$x^2 y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2xy \frac{\partial U}{\partial \xi} - 2x^2 y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2xy^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2xy^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2xy \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0.$$

Reducând termenii asemenea, rezultă ecuația:

$$y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \text{ adică, } \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (y \neq 0).$$

Cazul III $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuație de tip eliptic

În acest caz, ecuația diferențială a curbilor caracteristice are soluții complexe:

$$y' = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}. \quad \text{Prin integrare obținem :}$$

$$F_{1,2}(x, y) = \alpha(x, y) \pm i\beta(x, y). \quad \text{Notăm : } \begin{cases} \xi = \alpha(x, y) \\ \eta = \beta(x, y) \end{cases}.$$

Calculând derivatele parțiale pentru $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ și înlocuind în ecuația dată, rezultă forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f_3 \left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.2.5)$$

Dacă $f_3 \equiv 0$ atunci ecuația (4.2.5) devine ecuația lui Laplace.

Exemplul 4.2.7. *Să se reducă la forma canonică ecuația:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Soluție: Deoarece $a = 1$, $2b = -2$, $c = 2$, rezultă că $b^2 - ac = -1 < 0$, deci ecuația dată este de tip eliptic.

Ecuația diferențială a curbilor caracteristice este:

$$y'^2 + 2y' + 2 = 0$$

și are rădăcinile complexe conjugate $y' = -1 \pm i$.

Prin integrare se obțin soluțiile $y = (-1 + i)x + C_1$ și $y = (-1 - i)x + C_2$, care se scriu echivalent astfel:

$$x + y - ix = C_1, \quad x + y + ix = C_2.$$

$$\text{Notăm } \begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi'_x = 1, & \xi'_y = 1 \\ \eta'_x = 1, & \eta'_y = 0 \end{cases}.$$

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_0 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}.$$

După înlocuirea în ecuația inițială și reducerea termenilor asemenea, se obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{ecuația lui Laplace}).$$

În cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea, nu există metode pentru determinarea soluției generale. Unele ecuații scrise în forma canonică pot fi integrate, cum ar fi următoarele exemple:

- a) Ecuația $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$ este echivalentă cu $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial U}{\partial \xi} = \phi(\eta)$. Integrând din nou, se obține:

$$U(\xi, \eta) = \xi \phi(\eta) + \psi(\eta).$$

- b) Ecuația $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ se scrie $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0$. Prin integrare se obține $\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta)$. Integrând din nou, rezultă:

$$U(\xi, \eta) = \phi(\eta) + \psi(\xi).$$

O ecuație de forma (4.2.1) exprimă un fenomen fizic care este bine determinat dacă se cunosc anumite condiții suplimentare (condiții inițiale sau condiții la limită). Problema Cauchy asociată ecuației (4.2.1) constă în determinarea soluției ecuației respective, pentru care au loc condițiile:

$$\begin{aligned} u(x, y_0) &= f(x), \\ u'_y(x, y_0) &= g(x). \end{aligned}$$

Exemplul 4.2.8. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, y) = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y.$$

Soluție: Ecuația $y'^2 + 6y' + 8 = 0$ are soluțiile $y' = -2$ și $y' = -4$. Ecuațiile curbelor caracteristice sunt:

$$2x + y = C_1 \text{ și } 4x + y = C_2.$$

Folosind schimbarea de variabile: $\begin{cases} \xi = 2x + y \\ \eta = 4x + y \end{cases}$, ecuația dată se va reduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrând succesiv de două ori, se obține soluția generală a ecuației:

$$U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Revenind la variabilele inițiale, soluția generală este:

$$u(x, y) = f(2x + y) + g(4x + y).$$

Problema Cauchy:

$$\begin{aligned} u(0, y) = y^2 &\Leftrightarrow f(y) + g(y) = y^2 \\ u'_x(0, y) = y &\Leftrightarrow 2f'(y) + 4g'(y) = y \end{aligned}$$

Integrând a doua ecuație se obține: $2f(y) + 4g(y) = \frac{y^2}{2} + C$.

$$\text{Din sistemul } \begin{cases} f(y) + g(y) = y^2 \\ 2f(y) + 4g(y) = \frac{y^2}{2} + C \end{cases} \text{ rezultă } \begin{cases} f(y) = \frac{5}{2}y^2 - \frac{C}{2} \\ g(y) = -\frac{3}{2}y^2 + \frac{C}{2} \end{cases},$$

de unde obținem:

$$\begin{aligned} f(2x + y) &= \frac{5}{2}(2x + y)^2 - \frac{C}{2} \\ g(4x + y) &= -\frac{3}{2}(4x + y)^2 + \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Soluția problemei Cauchy este:

$$u(x, y) = \frac{5}{2}(2x + y)^2 - \frac{3}{2}(4x + y)^2.$$

4.2.3 Ecuații ale fizicii matematice

Ecuațiile cu derivate parțiale pot fi folosite la descrierea matematică a unor fenomene din fizică, tehnică etc.

Astfel, ecuațiile de tip hiperbolic pot descrie fenomene ondulatorii, cele de tip parabolic modelează, de exemplu, transferul de substanțe care are loc într-un proces de difuzie iar ecuațiile de tip eliptic sunt utile în descrierea unor fenomene statice.

Exemple de ecuații ale fizicii matematice: ecuația coardei vibrante (ecuație de tip hiperbolic), ecuația căldurii (de tip parabolic), ecuația lui Laplace, ecuația lui Poisson (ecuații de tip eliptic).

Ecuația coardei vibrante

Un exemplu de ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi de tip hiperbolic este ecuația coardei vibrante. Această ecuație descrie oscilațiile (vibrațiile) transversale ale unei coarde (fir flexibil tensionat). Oscilațiile pot fi libere sau forțate (coarda este supusă unei forțe exterioare), iar coarda poate fi finită sau infinită.

Ecuația coardei vibrante finite

Se consideră o coardă finită de lungime l , fixată la capete și care oscilează în planul xOu . Ecuația coardei vibrante finite este:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}, \quad (4.2.6)$$

unde $u = u(x, t)$ reprezintă abaterea de la poziția de echilibru a unui punct de pe coardă, de abscisă x , la momentul t .

Constanta a^2 depinde de proprietățile fizice ale coardei (tensiune, densitate). Condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = f(x) \text{ și } u'_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, l]$$

indică, pentru un punct de abscisă x , starea în care se află coarda și viteza la momentul inițial $t = 0$.

Condițiile la limită:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

exprimă faptul că extremitățile coardei sunt fixate.

Soluția problemei:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ unde} \quad (4.2.7)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.2.8)$$

Observația 4.2.9. Ecuația (4.2.6) se mai numește ecuația undelor, fiind întâlnită și în probleme de propagare a undelor (acustice, optice, electromagnetice). Constanta a^2 are semnificații fizice specifice fiecărui caz considerat.

Exemplul 4.2.10. Să se rezolve problema:

$$u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

Soluție: Avem: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}$, $g(x) = 0$ și $l = 2$.

Din formulele (4.2.8) rezultă:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2 - x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{2}{n\pi} (2 - x) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Din $g(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$.

Aplicând formula (4.2.7), se obține soluția:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Observația 4.2.11. Ecuația (4.2.6) descrie oscilațiile libere ale unei coarde finite. Când oscilațiile sunt întreținute printr-o forță exterioară $h(x, t)$ care acționează asupra unei coarde finite, avem ecuația:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2} + h(x, t).$$

Ecuația corzii vibrante infinite

În cazul unei coarde infinite, oscilațiile libere sunt descrise prin ecuația:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}$$

și condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = f(x) \text{ și } u'_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluția problemei (formula lui d'Alembert):

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds. \quad (4.2.9)$$

Exemplul 4.2.12. Să se rezolve problema:

$$u_t'' = a^2 u_{x^2}'', \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u_t'(x, 0) = 1.$$

Soluție: Avem: $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds &= \int_{x-at}^{x+at} ds = s \Big|_{x-at}^{x+at} = 2at \\ \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} &= \frac{\sin(x-at) + \sin(x+at)}{2} = \\ &= \frac{\sin x \cos at - \sin at \cos x + \sin x \cos at + \sin at \cos x}{2} = \sin x \cos at \end{aligned}$$

Din formula (4.2.9) rezultă soluția:

$$u(x, t) = \cos at \sin x + t.$$

Ecuția propagării căldurii printr-o bară finită

Ecuția propagării căldurii este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi de tip parabolic. Ecuția a fost obținută de J. Fourier în anul 1822.

Se consideră o bară omogenă situată pe axa Ox , de lungime l , izolată termic.

Se notează prin $u(x, t)$ temperatura în punctul x la momentul t .

Funcția u verifică ecuația:

$$u_t' = a^2 u_{x^2}'' . \quad (4.2.10)$$

Coeficientul a depinde de proprietățile fizice ale barei date:

$$a = \frac{k}{c\rho},$$

unde k reprezintă conductivitatea termică, c este căldura specifică a barei iar ρ este densitatea.

Condițiile la limită:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (4.2.11)$$

se referă la faptul că temperatura la capetele barei este 0° .

Condiția inițială

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l] \quad (4.2.12)$$

arată că se cunoaște distribuția temperaturii la momentul $t = 0$.

Soluția ecuației (4.2.10) când au loc condițiile (4.2.11) și (4.2.12) este:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{unde} \quad (4.2.13)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.2.14)$$

Exemplul 4.2.13. Să se rezolve problema $u'_t = u''_{x^2}$, dacă au loc condițiile

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x.$$

Soluție: Avem: $a = 1$, $l = 1$ și $f(x) = \sin \pi x$.

Formula (4.2.13) devine: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-n^2 \pi^2 t} \cdot \sin n \pi x$.

Folosind (4.2.14), se calculează coeficienții $b_n = 2 \int_0^1 \sin \pi x \sin n \pi x dx$, $n \geq 1$.

Știind că $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$, putem scrie:

$$b_n = \int_0^1 [\cos \pi x(1-n) - \cos \pi x(1+n)] dx = \frac{\sin \pi x(1-n)}{\pi(1-n)} \Big|_0^1 - \frac{\sin \pi x(1+n)}{\pi(1+n)} \Big|_0^1.$$

Deci, pentru $n \neq 1$, rezultă $b_n = 0$ iar pentru $n = 1$ vom avea:

$$b_1 = 2 \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \int_0^1 (1 - \cos 2\pi x) dx = x \Big|_0^1 = 1.$$

Soluția problemei este: $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$.

Observația 4.2.14. Propagarea căldurii printr-o bară infinită este exprimată de ecuația (4.2.10) și de condiția inițială

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alte ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi

1. Ecuația lui Laplace:

$$\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0.$$

Funcțiile $u(x, y)$ care verifică ecuația lui Laplace se numesc funcții armonice.

2. Ecuația lui Poisson: $\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = f(x, y)$.

a) Problema lui Dirichlet constă în rezolvarea ecuației lui Poisson când se cunosc valorile pe frontiera C a unui domeniu D :

$$\Delta u = f, \quad u|_C = g.$$

b) Problema lui Neumann constă în rezolvarea ecuației lui Poisson când se cunosc valorile derivatei în direcția derivatei normalei la frontieră:

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = g.$$

4.3 Exerciții rezolvate

1. Să se determine soluția generală a ecuațiilor:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} + y(y + z) \frac{\partial u}{\partial y} + z(y + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

2. Să se determine soluția generală a ecuațiilor:

a) $x(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y(z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x - y)$

b) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$

3. Să se determine soluția generală a ecuațiilor:

a) $xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

b) $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + yz = 0$

4. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x > 0, \quad u(x, 0) = x.$$

5. Să se rezolve problema Cauchy:

$$z \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(x, 0, z) = 2z(z - x).$$

6. Să se determine suprafața care verifică ecuația:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

și trece prin curba $x = y$, $z = x^2$.

7. Să se determine suprafața care verifică ecuația:

$$2y \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2 y = 0$$

și trece prin curba $x = 0$, $2z = y^2$.

8. Fie câmpul vectorial

$$\overline{V}(x, y, z) = (y - z)\overline{i} + (z - x)\overline{j} + (x - y)\overline{k}.$$

a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial $\overline{V}$.

b) Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial $\overline{V}$, care trece prin curba $\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$.

9. Să se reducă la forma canonică următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi:

a) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

10. Să se reducă la forma canonică ecuația:

$$\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

11. Să se aducă la forma canonică și să se integreze următoarea ecuație cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

12. Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care îndeplinește condițiile $u(x, 0) = 3x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$.

13. Să se determine soluția ecuației:

$$u''_{t^2} = 4u''_{x^2},$$

cu condițiile la limită:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

și condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = h(x - x^2), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

14. Să se rezolve problema:

$$u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

15. Să se rezolve problema $u'_t = u''_{x^2}$, dacă au loc condițiile:

$$u(0, t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad u(x, 0) = \sin 2x.$$

Soluții:

1. **a)** Ecuația este cu derivate parțiale de ordinul 1 liniară. Se atașează sistemul caracteristic:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}.$$

Acest sistem are integralele prime:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad x + y - z = C_2.$$

Soluția ecuației date este:

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{x}{y}, x + y - z\right),$$

unde Φ este o funcție arbitrară de două variabile.

b) Se determină două integrale prime ale sistemului caracteristic asociat:

$$dx = \frac{dy}{y(y+z)} = \frac{dz}{z(y+z)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(y+z)} &= \frac{dz}{z(y+z)} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln y = \ln z + \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{z} = C_1 \\ dx &= \frac{dy + dz}{(y+z)^2} \Rightarrow x = -\frac{1}{y+z} + C_2 \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$u = \Phi\left(\frac{y}{z}, x + \frac{1}{y+z}\right),$$

unde Φ este o funcție arbitrară de două variabile.

2. a) Ecuația este cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară. Se atașează sistemul caracteristic:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Integralele prime sunt:

$$F_1(x, y, z) = x + y + z, \quad F_2(x, y, z) = xyz.$$

Soluția ecuației date este $z(x, y)$ definită implicit de:

$$\Phi(x + y + z, xyz) = 0.$$

b) Sistemul caracteristic este:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{-y^2}.$$

Din primele două rapoarte, se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{-y} \mid \int \\ \ln x + \ln y &= \ln C_1 \\ xy &= C_1. \end{aligned}$$

Din ultimele două rapoarte, ținând cont de egalitatea $xy = C_1$, va rezulta:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{-C_1} &= \frac{dz}{-y^2} \\ 3y^2 dy - 3C_1 dz &= 0 \mid \int \\ y^3 - 3C_1 z &= C_2 \\ y^3 - 3xyz &= C_2. \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$\Phi(xy, y^3 - 3xyz) = 0,$$

adică:

$$3xyz - y^3 = \phi(xy) \Leftrightarrow z = \frac{y^3 + \phi(xy)}{3xy}.$$

3. a) Sistemul caracteristic asociat este: $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{xy} &= \frac{dy}{-x^2} \Rightarrow xdx = -ydy \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1 \\ \frac{dx}{xy} &= \frac{dz}{yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{x}{z} = C_2\end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$u = \Phi\left(x^2 + y^2, \frac{x}{z}\right).$$

b) Folosind soluția obținută la exercițiul anterior, soluția generală a ecuației cu derivate parțiale cvasiliniară se scrie astfel:

$$\Phi\left(x^2 + y^2, \frac{x}{z}\right) = 0, \text{ adică, } \frac{x}{z} = \phi(x^2 + y^2) \Leftrightarrow z = \frac{x}{\phi(x^2 + y^2)}.$$

4. Se atașează sistemul caracteristic și se rezolvă.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Leftrightarrow x dx + y dy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$u = \Phi(x^2 + y^2), \text{ unde } \Phi \text{ este o funcție arbitrară.}$$

Determinăm soluția problemei Cauchy.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C \\ y = 0 \\ u = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{C} \Rightarrow u = \sqrt{C} \Rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

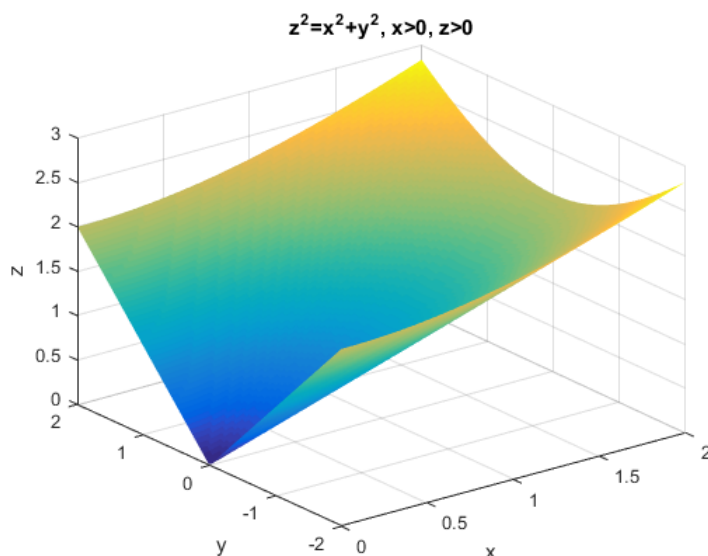
Soluția problemei este: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x > 0$.

Suprafața integrală obținută este o porțiune dintr-un con.

În continuare, vom prezenta instrucțiunile **Matlab** folosite pentru reprezentarea grafică a suprafeței conice:

$$z^2 = x^2 + y^2, \text{ pentru } z > 0 \text{ și } x > 0.$$

```
x=linspace(0,2); y=linspace(-2,2);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=sqrt(Y.^2+X.^2);
figure;
surf(X,Y,Z,'FaceAlpha',1,'EdgeColor','none');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
title('z^2=x^2+y^2, x>0, z>0');
grid on
```



5. Sistemul caracteristic asociat ecuației date este:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}.$$

O integrală primă rezultă din egalitatea dintre primul și al treilea raport.

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x} \Rightarrow x \, dx = z \, dz \Rightarrow \underbrace{x^2 - z^2}_{F_1} = C_1$$

Pentru a obține a doua integrală primă, se folosește metoda combinațiilor integrabile.

$$\frac{dx - dz}{x - z} = \frac{dy}{-(x - z)^2} \Rightarrow (x - z)(dx - dz) + dy = 0 \Rightarrow \underbrace{(x - z)^2 + 2y}_{F_2} = C_2$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$u(x, y, z) = \Phi(x^2 - z^2, (x - z)^2 + 2y).$$

Pentru a determina soluția problemei Cauchy, se scrie sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = C_1 \\ (x - z)^2 + 2y = C_2 \\ y = 0 \\ u = 2z(z - x) \end{cases},$$

Din primele trei ecuații se exprimă x și z în funcție de C_1 și C_2 , apoi se înlocuiesc în ultima ecuație a sistemului.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - z^2 = C_1 \\ (x - z)^2 = C_2 \end{cases} &\Rightarrow x = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_2}}, \quad z = \frac{C_1 - C_2}{2\sqrt{C_2}} \\ u = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{C_2}} \cdot \frac{-C_2}{\sqrt{C_2}} &\Rightarrow u = C_2 - C_1 \end{aligned}$$

Înlocuind C_1 și C_2 cu F_1 și F_2 , va rezulta soluția problemei Cauchy:

$$u(x, y, z) = (x - z)^2 + 2y - x^2 + z^2 \Leftrightarrow u(x, y, z) = 2y + 2z^2 - 2xz.$$

6. Sistemul caracteristic asociat ecuației este:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}.$$

Din primele două rapoarte rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} &= 0 \quad \Big| \int \\ \ln x + \ln y &= \ln C_1 \\ xy &= C_1, \end{aligned}$$

deci o integrală primă este:

$$F_1(x, y, z) = xy.$$

Analog, din ultimele două rapoarte rezultă:

$$yz = C_2,$$

deci a doua integrală primă este:

$$F_2(x, y, z) = yz.$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$\Phi(xy, yz) = 0, \text{ adică, } z = \frac{\phi(xy)}{y}.$$

Pentru a determina funcția ϕ , din sistemul:

$$\begin{cases} xy = C_1 \\ yz = C_2 \\ x = y \\ z = x^2 \end{cases}, \text{ se determină o relație între } C_1 \text{ și } C_2.$$

Din prima și a treia ecuație se obține $x^2 = C_1$, de unde, ținând cont de ultima ecuație, rezultă $z = C_1$.

Din primele două ecuații, rezultă:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{z^2}{x^2} \xrightarrow{x^2=z} \frac{C_2^2}{C_1^2} = z.$$

S-a obținut relația:

$$\frac{C_2^2}{C_1^2} = C_1 \Leftrightarrow C_1^3 = C_2^2.$$

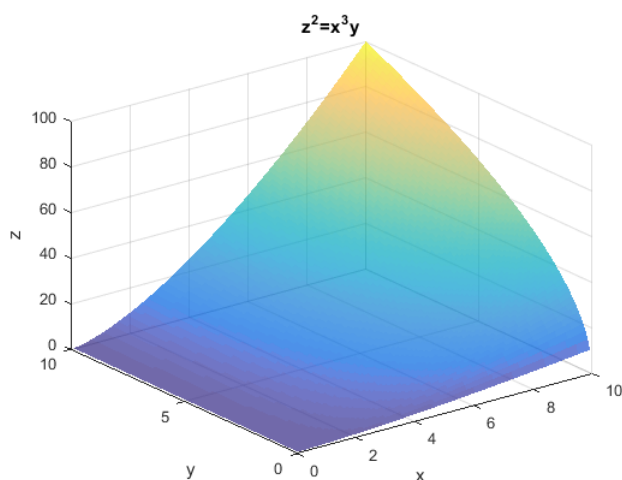
Înlocuind C_1 și C_2 cu F_1 și F_2 , va rezulta suprafața:

$$x^3 y^3 = y^2 z^2 \Rightarrow x^3 y = z^2 \text{ (ecuația implicită).}$$

Explicitând, soluția problemei date este: $z = \pm \sqrt{x^3 y}$.

Pentru reprezentarea grafică a soluției, se folosesc instrucțiunile **Matlab**:

```
x=linspace(0.1,10,100);
y=linspace(0.1,10,100);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(sqrt(X.*Y).^3)./Y;
figure;
surf(X,Y,Z, 'FaceAlpha', 0.7, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
title('z^2=x^3y');
grid on
```



7. Sistemul caracteristic este:

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dz}{-6x^2y}.$$

O integrală primă se obține din primele două rapoarte.

$$\begin{aligned} 3x^2 dx &= 2y dy \Big| \int \\ x^3 - y^2 &= C_1 \end{aligned}$$

A doua integrală primă va rezulta din ultimele două rapoarte.

$$\begin{aligned} -2y dy &= dz \Big| \int \\ y^2 + z &= C_2 \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$\Phi(x^3 - y^2, y^2 + z) = 0, \text{ adică, } z = -y^2 + \phi(x^3 - y^2),$$

unde Φ, ϕ sunt funcții arbitrare.

Soluția problemei Cauchy se obține din sistemul:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = C_1 \\ y^2 + z = C_2 \\ x = 0 \\ 2z = y^2 \end{cases}.$$

Din primele 3 ecuații rezultă: $y^2 = -C_1$ și $z = C_2 + C_1$. Înlocuind în ultima ecuație, se obține condiția:

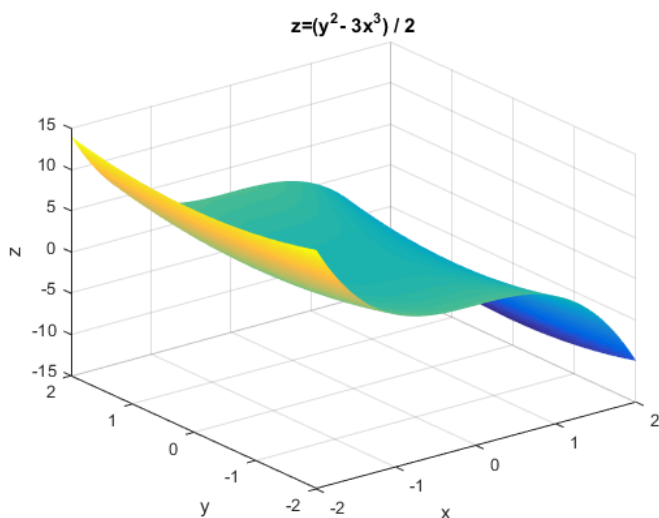
$$2(C_2 + C_1) = -C_1 \Leftrightarrow 3C_1 + 2C_2 = 0.$$

Soluția problemei este:

$$3(x^3 - y^2) + 2(y^2 + z) = 0 \Leftrightarrow 2z = y^2 - 3x^3.$$

Pentru reprezentarea grafică a suprafeței integrale obținute, se folosesc următoarele instrucțiuni **Matlab**:

```
x=linspace(-2,2); y=linspace(-2,2);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(Y.^2-3*X.^3)/2;
figure;
surf(X,Y,Z, 'FaceAlpha', 1, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
title('z=(y^2-3x^3)/2');
grid on
```



8. a) Sistemul caracteristic este:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Se obțin integralele prime:

$$\begin{cases} x + y + z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases} \quad (\text{ecuațiile liniilor de câmp}).$$

b) Din sistemul:
$$\begin{cases} x + y + z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \\ x = y \\ x = z \end{cases}, \text{ rezultă condiția } C_1^2 = 3C_2.$$

Înlocuind pe C_1 și C_2 cu $F_1 = x + y + z$ și $F_2 = x^2 + y^2 + z^2$, se obține suprafața de câmp:

$$(x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

9. a) Ecuația caracteristică atașată ecuației cu derivate parțiale este:

$$x^2 y'^2 - y^2 = 0.$$

Deoarece $\Delta = 4x^2 y^2 > 0$, rezultă că ecuația dată este de tip hiperbolic.

$$x^2 y'^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow y'(x) = \pm \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y - \ln x = \ln C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = C_1$$

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln C_2 \Leftrightarrow xy = C_2$$

Notăm:
$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi'_x = y, & \xi'_y = x \\ \eta'_x = -\frac{y}{x^2}, & \eta'_y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{2y^2}{x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$x^2 y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - x^2 y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

adică:

$$-4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x} \frac{\partial U}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2xy} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

Forma canonică a ecuației date este:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

b) Ecuația caracteristică atașată este $y^2 y'^2 + 2xyy' + x^2 = 0$.

Deoarece $\Delta = 4(x^2 y^2 - x^2 y^2) = 0$, ecuația dată este de tip parabolic.

Se obține:

$$y' = -\frac{2xy}{2y^2} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C.$$

Se notează: $\begin{cases} \xi = x^2 + y^2 \\ \eta = x \end{cases}$, $u(x, y) = U(\xi, \eta)$. Se calculează derivatele:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \frac{\partial U}{\partial \xi} \end{cases},$$

respectiv:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4x \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 4xy \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, după reducerea termenilor asemenea, se obține:

$$y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - x \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow (\xi - \eta^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

Forma canonică a ecuației date este:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{\eta^2 - \xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

c) Ecuația caracteristică este: $y'^2 - 4y' + 5 = 0$, cu $\Delta < 0$, deci ecuația cu derivate parțiale dată este de tip eliptic.

Soluțiile ecuației caracteristice sunt: $y' = 2 \pm i$. Prin integrare, rezultă:

$$y = 2x \pm ix - C \Leftrightarrow 2x - y \pm xi = C.$$

Se notează: $\begin{cases} \xi = 2x - y \\ \eta = x \end{cases} \Rightarrow \xi'_x = 2, \xi'_y = -1, \eta'_x = 1, \eta'_y = 0.$

Se calculează derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=-1} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=-1} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=0}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=-1} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=0},\end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

După înlocuire în ecuația dată și după reducerea termenilor asemenea, se obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{ecuația lui Laplace}).$$

10. Ecuația caracteristică este:

$$\sin^2 x \cdot y'^2 + 2y \sin x \cdot y' + y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sin x \cdot y' + y)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0,$$

de unde, prin integrare, rezultă:

$$\ln y + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \ln C \Rightarrow y \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C.$$

Se notează:

$$\begin{cases} \xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \eta = y \end{cases}.$$

După calculul derivatelor parțiale ale funcției:

$$u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

înlocuirea acestora în ecuația dată și reducerea termenilor asemenea, se va obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

11. Ecuația caracteristică este: $y'^2 + 4y' + 4 = 0$, cu $\Delta = 0$, deci ecuația dată este de tip parabolic.

Din $y' = -2$ rezultă $y = -2x + C$, adică: $2x + y = C$.

Se face schimbarea de variabile: $\begin{cases} \xi = 2x + y \\ \eta = x \end{cases}$ și se calculează derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcției:

$$u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

ținând cont că $\xi'_x = 2$, $\xi'_y = 1$, $\eta'_x = 1$, $\eta'_y = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

Prin înlocuire în ecuația dată, după reducerea termenilor asemenea, se va obține forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

Vom integra de două ori ecuația scrisă în forma canonică.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + U \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} + U = f(\xi)$$

Ecuația obținută se poate integra ca ecuație liniară de ordinul I, având funcția necunoscută U de variabilă η .

$$U' + U = f(\xi) \Rightarrow U = e^{-\eta} \left(g(\xi) + \int e^{\eta} f(\xi) d\eta \right),$$

adică:

$$U = e^{-\eta} g(\xi) + f(\xi)$$

Revenind la variabilele x și y , soluția ecuației date este:

$$u(x, y) = e^{-x} g(2x + y) + f(2x + y).$$

12. Ecuația caracteristică este: $y'^2 - 2y' - 3 = 0$, cu $\Delta > 0$, deci ecuația cu derivate parțiale dată este de tip hiperbolic.

Soluțiile ecuației caracteristice sunt: $y'_1 = 3$ și $y'_2 = -1$. Rezultă:

$$3x - y = C_1, \quad x + y = C_2.$$

Se efectuează schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases} \Rightarrow \xi'_x = 3, \xi'_y = -1, \eta'_x = 1, \eta'_y = 1.$$

Derivatele parțiale ale funcției $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3 \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține:

$$9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

de unde rezultă forma canonică a ecuației:

$$16 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Soluția generală a ecuației scrise în forma canonică se obține integrând succesiv de două ori.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f_1(\eta) \Rightarrow U(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi),$$

de unde, revenind la variabilele x și y , vom obține soluția generală a ecuației cu derivate parțiale date:

$$u(x, y) = f(x + y) + g(3x - y). \quad (4.3.1)$$

Pentru a afla soluția problemei Cauchy, derivăm în raport cu variabila y funcția $u(x, y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x + y) - g'(3x - y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f'(x) - g'(3x)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 3x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(3x) = 3x^2 \\ f'(x) - g'(3x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(3x) = 3x^2 \\ f(x) - \frac{1}{3}g(3x) = C \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținut, rezultă funcțiile:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}C, \quad g(3x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}C.$$

Din expresia lui $g(3x)$ se obține: $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}C$. Din relația (4.3.1) rezultă:

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(3x - y)^2.$$

După efectuarea calculelor, vom obține soluția problemei Cauchy:

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

13. Soluția problemei este:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2n\pi t + B_n \sin 2n\pi t) \sin n\pi x.$$

Calculăm coeficienții A_n și B_n .

Din $g(x) = 0$, rezultă că $B_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Pentru $f(x) = h(x - x^2)$, rezultă:

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_0^1 h(x - x^2) \sin n\pi x dx = -\frac{2h}{n\pi} \underbrace{(x - x^2) \cos n\pi x \Big|_0^1}_{=0} + \frac{2h}{n\pi} \int_0^1 (1 - 2x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{2h}{n^2\pi^2} \underbrace{(1 - 2x) \sin n\pi x \Big|_0^1}_{=0} + \frac{4h}{n^2\pi^2} \int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{4h}{n^3\pi^3} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{4h}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

Coeficienții A_n sunt:

$$A_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{respectiv} \quad A_{2k+1} = \frac{8h}{(2k+1)^3\pi^3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Soluția problemei este:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cdot \cos 2(2k+1)\pi t \cdot \sin(2k+1)\pi x.$$

14. Pentru ecuația dată, avem: $a = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 0$.

Formula lui d'Alembert devine:

$$u(x, t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2}.$$

Soluția problemei este:

$$u(x, t) = x^2 + t^2.$$

15. Pentru $a = 1$, $l = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin 2x$, soluția problemei se scrie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-4n^2 t} \cdot \sin 2nx,$$

unde:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2x(1-n) - \cos 2x(1+n)] dx. \end{aligned}$$

Pentru $n \neq 1$ vom obține:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin 2x(1-n)}{2(1-n)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 2x(1+n)}{2(1+n)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \pi(1-n)}{2(1-n)} - \frac{\sin \pi(1+n)}{2(1+n)} \right) = 0, \end{aligned}$$

iar pentru $n = 1$ avem:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx = 1.$$

Soluția problemei este:

$$u(x, t) = e^{-4t} \sin 2x.$$

4.4 Exerciții propuse

1. Să se rezolve ecuațiile cu derivate parțiale liniare și omogene:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

b) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

c) $(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2. Să se rezolve ecuațiile cu derivate parțiale liniare și omogene:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

b) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

c) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} - xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

3. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(x, 1) = 2x$

b) $2\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(1, y) = y^2$

c) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(0, y) = y$

4. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u(1, y, z) = yz$

b) $\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u(x, y, 1) = x - y$

5. Să se rezolve ecuațiile cu derivate parțiale cvasiliniare:

a) $2z \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$

b) $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$

$$c) \quad xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z$$

6. Să se afle soluția generală a ecuațiilor cu derivate parțiale:

$$a) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + (2x - y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$b) \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

$$c) \quad (x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

$$d) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

7. Să se determine suprafața care verifică ecuația:

$$z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

și care trece prin curba: $x + y = 2$, $yz = 1$.

8. Să se determine suprafețele integrale ale următoarelor ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare care trec prin curbele indicate:

$$a) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1$$

$$b) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \quad y = -2, \quad z = x - x^2$$

9. Să se determine liniile de câmp pentru câmpul vectorial:

$$\overline{V}(x, y, z) = (xz + y)\overline{i} + (x + yz)\overline{j} + (1 - z^2)\overline{k}.$$

10. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial:

$$\overline{V}(x, y, z) = 2xz\overline{i} + 2yz\overline{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\overline{k},$$

$$\text{care trece prin curba } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

11. Să se reducă la forma canonică următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi:

$$a) \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

12. Să se reducă la forma canonică ecuațiile:

$$\text{a)} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{b)} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

13. Să se reducă la forma canonică ecuațiile:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{b)} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

14. Să se determine soluția problemei:

$$u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(0, t) = u(5, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u'_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{5}.$$

15. Să se rezolve problema:

$$u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin^3 x, \quad u'_t(x, 0) = \sin 2x.$$

16. Să se rezolve problemele:

$$\text{a)} \quad u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(x, 0) = x, \quad u'_t(x, 0) = -x$$

$$\text{b)} \quad u''_{t^2} = u''_{x^2}, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u'_t(x, 0) = \cos x$$

17. Să se determine soluția ecuației:

$$u'_t = 9u''_{x^2},$$

dacă au loc condițiile:

$$u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x + 2 \sin 3\pi x.$$

Capitolul 5

Transformata Laplace

5.1 Definiții, proprietăți

Definiția 5.1.1. Funcția F de variabilă complexă definită prin

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (5.1.1)$$

se numește transformata Laplace a funcției f de variabilă reală.

f se numește funcție original iar F se numește funcție imagine.

Notăție: Transformata Laplace a funcției f se notează:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

De asemenea, se mai folosește notația $\mathcal{L}[f(t)]$.

Din formula (5.1.1), se observă că transformata Laplace este o integrală improprie cu parametru. Astfel, transformata Laplace a funcției f există dacă integrala improprie din relația (5.1.1) este convergentă, adică, există și este finită limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} f(t) dt.$$

Pentru ca o funcție f să fie **funcție original**, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- (i) $f(t) = 0, \forall t < 0$;
- (ii) pe orice interval mărginit f este continuă, cu excepția unui număr finit de puncte în care are discontinuități de speța întâi;
- (iii) există $M > 0$ și $\sigma \geq 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \forall t \geq 0.$$

Constanta σ se numește indice de creștere. Dacă există un cel mai mic indice de creștere, notat σ_0 , acesta se numește abscisă de convergență.

Mulțimea funcțiilor original se notează Ω .

Exemplul 5.1.2. Funcția $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ este funcție original și este cunoscută ca funcția lui Heaviside. Transformata Laplace este:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Exemplul 5.1.3. Transformata Laplace a funcției $f(t) = e^{at}$ este:

$$\mathcal{L}[e^t] = \int_0^\infty e^{-st} e^t dt = \int_0^\infty e^{t(1-s)} dt = \frac{1}{1-s} e^{t(1-s)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1}.$$

Teorema 5.1.4. Fie $f \in \Omega$ și mulțimea $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$, unde σ_0 este un indice de creștere al funcției f . Atunci integrala $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ este convergentă pentru orice $s \in D$.

Teorema 5.1.5. Dacă f este o funcție original, atunci transformata Laplace F verifică relația:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0, \text{ unde } \operatorname{Re}(s) > \sigma_0.$$

Proprietăți ale transformatei Laplace

Fie $f, g \in \Omega$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

1. $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
2. $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
3. a) $\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$ b) $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-sa} \cdot F(s)$
4. a) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$ $\left(f(0_+) = \lim_{t \searrow 0} f(t)\right)$
 b) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_+) - s^{n-2} f'(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+)$
5. a) $\mathcal{L}\{(-t) \cdot f(t)\} = F'(s)$ b) $\mathcal{L}\{(-t)^n \cdot f(t)\} = F^{(n)}(s)$
6. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

$$7. \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$$

$$\text{În particular, are loc: } \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds.$$

Transformatele Laplace ale funcțiilor elementare

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$2. f(t) = t^n \Rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$3. f(t) = e^{at} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s-a) > 0$$

$$4. f(t) = \sin at \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s-ai) > 0, \operatorname{Re}(s+ai) > 0$$

$$5. f(t) = \cos at \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s-ai) > 0, \operatorname{Re}(s+ai) > 0$$

$$6. f(t) = \operatorname{sh} at \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}(s-a) > 0, \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$7. f(t) = \operatorname{ch} at \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}(s-a) > 0, \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

Exemple 5.1.6. Să se afle transformatele Laplace ale funcțiilor:

$$a) f(t) = 2 - 3t + t^2 \quad b) f(t) = 2e^{-t} + 5e^{2t}$$

$$\text{Soluții: a) } \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3} = \frac{2s^2 - 3s + 2}{s^3}$$

$$b) \mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{e^{-t}\} + 5\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s-2} = \frac{7s+1}{s^2-s-2}$$

Folosind proprietățile transformatei Laplace, se deduc formulele:

$$1. f(t) = t^n e^{at} \Rightarrow F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$2. f(t) = t \sin at \Rightarrow F(s) = \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$3. f(t) = t \cos at \Rightarrow F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$4. f(t) = e^{at} \sin bt \Rightarrow F(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$5. f(t) = e^{at} \cos bt \Rightarrow F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

Proprietatea 5.1.7. Dacă $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ și $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$, atunci are loc formula:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) G(s),$$

unde

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

este produsul de convoluție al funcțiilor f și g .

Exemplul 5.1.8. Să se afle transformata Laplace a integralei

$$\int_0^t e^\tau \cos(t - \tau) d\tau.$$

Soluție: Aplicând proprietatea (5.1.7), rezultă:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \cos(t - \tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{e^t * \cos t\} = \mathcal{L}\{e^t\} \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

Exemplul 5.1.9. Să se determine originalul funcției $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.

Soluție: $F(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \mathcal{L}\{\sin t * \sin t\}$,
deci originalul funcției date este:

$$f(t) = \sin t * \sin t.$$

Calculăm produsul de convoluție:

$$\begin{aligned} \sin t * \sin t &= \int_0^t \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\tau - t)}{2} - \tau \cos t \right) \Big|_0^t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Rezultă că: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{\sin t - t \cos t}{2}.$

Proprietatea 5.1.10. Fie $f \in \Omega$ o funcție periodică cu perioada T . Are loc formula:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

5.2 Transformata Laplace inversă

Pentru a determina funcția original f când se cunoaște funcția imagine F , se folosește transformata inversă a lui Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Folosind faptul că operatorul lui Laplace $\mathcal{L}$ este liniar, rezultă că și $\mathcal{L}^{-1}$ are aceeași proprietate. Are loc egalitatea:

$$\mathcal{L}^{-1}\{a F(s) + b G(s)\} = a \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Exemplul 5.2.1. Funcția original corespunzătoare funcției $F(s) = \frac{s+3}{s^2+4}$ este:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{3}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t.$$

Transformata Laplace inversă se poate determina prin mai multe metode dintre care cea mai simplă este descompunerea funcției imagine în funcții raționale simple a căror transformate inverse Laplace se cunosc.

Exemplul 5.2.2. Să se determine funcția original care corespunde funcției

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)}.$$

Soluție: Funcția dată se descompune în fracții raționale simple astfel:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2}.$$

Prin identificare, obținem: $A = -\frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{4}$, deci

$$F(s) = -\frac{3}{4} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2}.$$

Rezultă că

$$f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}e^{2t}.$$

Teorema 5.2.3. Fie $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ o funcție rațională cu $\text{grad} P < \text{grad} Q$.

Dacă Q are rădăcinile $s_1, s_2, \dots, s_n$ cu ordinele de multiplicitate $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, atunci funcția original f este dată de:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} ((s - s_k)^{\alpha_k} F(s) e^{st})^{(\alpha_k - 1)} = \sum_{k=1}^n \text{Rez}(e^{st} F(s); s_k).$$

Exemplul 5.2.4. Să se aplice teorema (5.2.3) funcției de la exemplul (5.2.2).

Soluție: Pentru funcția $F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)}$, numitorul are rădăcinile

$$s_1 = 0 \ (\alpha_1 = 2) \text{ și } s_2 = 2 \ (\alpha_2 = 1).$$

Aplicând teorema (5.2.3), vom avea:

$$f(t) = \text{Rez}(F(s)e^{st}, s_1) + \text{Rez}(F(s)e^{st}, s_2).$$

$$\begin{aligned} \text{Rez}(F(s)e^{st}, 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 \frac{s+1}{s^2(s-2)} e^{st} \right]' = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{((s+1)e^{st})'(s-2) - (s+1)e^{st}}{(s-2)^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[e^{st} + (s+1)te^{st}](s-2) - (s+1)e^{st}}{(s-2)^2} = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2}, \\ \text{Rez}(F(s)e^{st}, 2) &= \lim_{s \rightarrow 2} \left[(s-2) \frac{s+1}{s^2(s-2)} e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow 2} \left[\frac{s+1}{s^2} e^{st} \right] = \frac{3}{4} e^{2t}. \end{aligned}$$

Se obține:

$$f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{3}{4} e^{2t}.$$

Transformata Laplace inversă a unei funcții imagine F se mai poate afla folosind dezvoltarea funcției F în serie convergentă de funcții a căror transformate Laplace inverse se cunosc.

Teorema 5.2.5. Dacă $F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}$ (pentru $|s| > R$) atunci

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

(seria fiind absolut și uniform convergentă pentru $t \in \mathbb{R}$).

O altă metodă prin care se poate determina transformata Laplace inversă a unei funcții complexe olomorfe se bazează pe teorema următoare.

Teorema 5.2.6. Dacă F este o funcție complexă de variabilă complexă care satisface condițiile:

1. este olomorfă în semiplanul $\text{Re}(s) > \sigma_0$,
2. $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, uniform în raport cu $\arg s$, pentru oricare s având $\text{Re}(s) \geq a > \sigma_0$,

3. integrala $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) ds$ este absolut convergentă ($a > 0$),

atunci funcția f definită prin formula (Mellin - Fourier):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

este funcție original și $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$.

Comenzi în Matlab pentru transformata Laplace

Transformata Laplace a unei funcții original se determină folosind comanda *laplace*. Pentru determinarea originalului unei funcții imagine date, se folosește comanda *ilaplace*.

Exemplul 5.2.7. Să se determine $\mathcal{L}\{\cos^3 t\}$.

Din formula $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ se obține $\cos^3 t = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t$.

Rezultă:

$$\mathcal{L}\{\cos^3 t\} = \frac{1}{4} \mathcal{L}\{\cos 3t\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{3}{4} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}.$$

Soluție Matlab:

```
syms t s
f=cos(t)^3;
F=laplace(f)
F =
(s^3 + 7*s)/((s^2 + 1)*(s^2 + 9))
```

Exemplul 5.2.8. Să se determine originalul funcției

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s+3)}.$$

Funcția F se scrie: $F(s) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{s+3}$. Aplicând transformata Laplace inversă, se obține:

$$f(t) = -\frac{1}{25} e^{2t} + \frac{1}{5} t e^{2t} + \frac{1}{25} e^{-3t}.$$

Soluție Matlab:

```
syms s
F=1/((s-2)^2*(s+3));
f=ilaplace(F)
f =
exp(-3*t)/25 - exp(2*t)/25 + (t*exp(2*t))/5
```

5.3 Aplicații ale transformatei Laplace

Rezolvarea unor ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

Se consideră ecuația diferențială liniară neomogenă, cu coeficienți constanți:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t),$$

unde $f \in \Omega$. Pentru a determina soluția $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația dată și condițiile inițiale

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},$$

se aplică transformata Laplace ecuației date. Pentru aceasta, se notează $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ și se exprimă transformatele Laplace ale derivatelor $x', \dots, x^{(n)}$ în funcție de $X(s)$ și de valorile $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Rezolvând ecuația operatorială obținută, se obține funcția $X(s)$. Folosind transformata Laplace inversă, se determină funcția $x(t)$.

Exemplul 5.3.1. $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$

Soluție: Se aplică transformata Laplace ecuației date, folosind proprietatea de liniaritate.

$$\mathcal{L}\{x''(t) - 5x'(t) + 4x(t)\} = \mathcal{L}\{2e^{3t}\},$$

adică,

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} - 5\mathcal{L}\{x'(t)\} + 4\mathcal{L}\{x(t)\} = 2\mathcal{L}\{e^{3t}\}.$$

Se notează $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ și se folosește formula transformatei Laplace a derivatei funcției original.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'(t)\} &= sX(s) - x(0) = sX(s) - 2, \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} &= s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s - 3.\end{aligned}$$

Ecuația devine: $s^2X(s) - 2s - 3 - 5(sX(s) - 2) + 4X(s) = \frac{2}{s-3}$,

de unde rezultă $X(s) = \frac{2s^2 - 13s + 23}{(s-3)(s^2 - 5s + 4)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-4}$.

Se aplică transformata Laplace inversă și se obține soluția:

$$x(t) = 2e^t - e^{3t} + e^{4t}.$$

Rezolvarea unor sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi cu coeficienți constanți

Folosind transformata Laplace, un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu coeficienți constanți, cu condiții inițiale date, poate fi redus la un sistem de ecuații algebrice având ca necunoscute transformatele Laplace ale funcțiilor necunoscute ale sistemului dat. După rezolvarea sistemului obținut, se aplică transformata Laplace inversă și rezultă soluția sistemului inițial.

Exemplul 5.3.2.
$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 4y(t) + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

Soluție: Se notează $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ și se aplică transformata Laplace fiecărei ecuații. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} sX(s) = 5X(s) - 4Y(s) \\ sY(s) = 5X(s) - 4Y(s) + \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-5)X(s) + 4Y(s) = 0 \\ -5X(s) + (s+4)Y(s) = \frac{1}{s} \end{cases},$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-4}{s^2(s-1)} = \frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s-1}, \\ Y(s) &= \frac{s-5}{s^2(s-1)} = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s-1}. \end{aligned}$$

Folosind transformata Laplace inversă, se obține soluția sistemului dat:

$$\begin{cases} x(t) = 4 + 4t - 4e^t \\ y(t) = 4 + 5t - 4e^t \end{cases}.$$

Calcul integral

Unele integrale improprii se pot calcula folosind proprietăți ale transformatei Laplace. De exemplu, pentru calculul unor integrale de forma

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt, \quad \int_0^\infty t^n f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

se aplică formulele:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt &= \int_0^\infty F(s) ds, \\ \int_0^\infty t^n f(t) dt &= (-1)^{n+1} F^{(n)}(s) \Big|_0^\infty. \end{aligned}$$

Exemplul 5.3.3. Să se calculeze integrala $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

Soluție:
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(s) ds = \int_0^\infty \frac{1}{s^2 + 1} ds = \frac{\pi}{2}$$

5.4 Exerciții rezolvate

1. Să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile:

a) $f(t) = t^2 e^{4t}$

b) $f(t) = e^{3t}(\sin 2t + \cos 2t)$

c) $f(t) = \sin t \cos 2t$

2. Să se calculeze transformata Laplace a funcției $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$.

3. Să se calculeze transformata Laplace a integralei $\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$.

4. Să se determine funcțiile original pentru următoarele funcții:

a) $F(s) = \frac{2s + 1}{s^4 - 1}$

b) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}$

5. Să se determine transformata Laplace inversă a funcției

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

6. Să se rezolve folosind transformata Laplace următoarele ecuații diferențiale cu condițiile inițiale date:

a) $x'(t) + 2x(t) = 4t, x(0) = 3$

b) $x'(t) - x(t) = \sin 2t, x(0) = 0$

7. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y''(t) + 4y(t) = \cos 2t, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

8. Să se rezolve problema Cauchy:

$$y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

9. Să se rezolve problema Cauchy:

$$x'''(t) + x''(t) - 2x(t) = t, x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = -1.$$

10. Să se determine soluția ecuației:

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{\cos t},$$

dacă $x(0) = 0$ și $x'(0) = 2$.

11. Să se rezolve problemele Cauchy următoare:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x'(t) &= 3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= 4x(t) - 3y(t) \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1 \\ \text{b) } & \begin{cases} x'(t) &= 6x(t) - 3y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) \end{cases}, \quad x(0) = 2, y(0) = 1 \end{aligned}$$

12. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) - 36t \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) - 2e^t \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

13. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

14. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0.$$

Soluții:

1. Se aplică proprietăți ale transformatei Laplace, folosind transformatele funcțiilor uzuale.

$$\text{a) } \mathcal{L}\{t^2 e^{4t}\} = \frac{2}{(s-4)^3}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{e^{3t}(\sin 2t + \cos 2t)\} = \frac{2}{(s-3)^2 + 4} + \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} = \frac{s-1}{s^2 - 6s + 13}$$

$$\text{c) } \text{Se folosește formula: } \sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

$$\mathcal{L}\{\sin t \cos 2t\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\sin 3t - \sin t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{s^2 + 9} - \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{s^2 - 3}{s^4 + 10s^2 + 9}$$

2. Se folosește proprietatea: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{e^{bt} - e^{at}\}(u) du \\ &= \int_s^\infty \left(\frac{1}{u-b} - \frac{1}{u-a}\right) du = \ln \frac{s-a}{s-b}.\end{aligned}$$

Am ținut cont că $\lim_{u \rightarrow \infty} \ln \frac{u-b}{u-a} = \ln 1 = 0$.

Soluție Matlab:

```
syms t s a b
f(t)=(exp(b*t)-exp(a*t))/t;
F(s)=laplace(f)
F(s) =
-log((b - s)/(a - s))
```

3. Se folosesc succesiv proprietățile referitoare la integrarea originalului, respectiv integrarea imaginii.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1}{s} \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(u) du = \frac{1}{s} \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{1}{s} \operatorname{arctg} u \Big|_s^\infty = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Soluție Matlab:

```
syms t s u
f(t)=int(sin(u)/u,0,t);
F=laplace(f)
F =
atan(1/s)/s
```

4. a) Funcția dată se descompune în funcții raționale simple astfel:

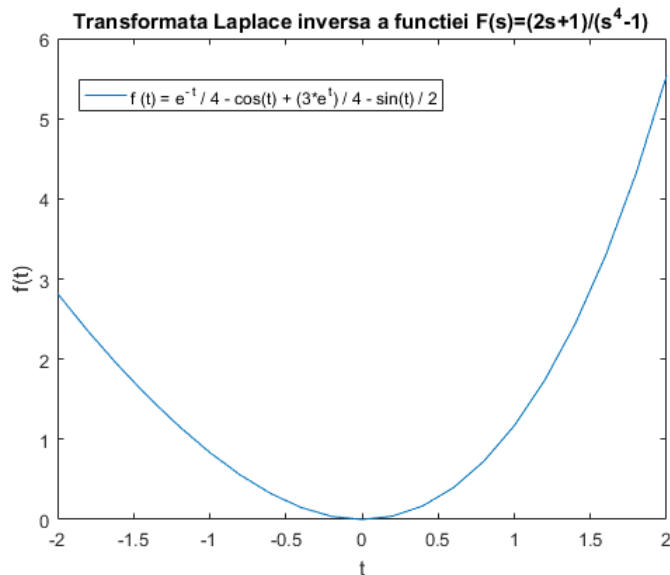
$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{2s+1}{s^4-1} = \frac{2s+1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\ &= \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+1)} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2(s^2+1)}.\end{aligned}$$

Rezultă funcția original:

$$f(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Soluție Matlab:

```
syms s t
F=(2*s+1)/(s^4-1);
f=ilaplace(F)
t=-2:0.2:2;
f1=subs(f);
plot(t,f1)
xlabel('t'); ylabel('f(t)');
title('Transformata Laplace inversa a functiei
      F(s)=(2s+1)/(s^4-1)')
legend('f(t) = e^{-t} / 4 - cos(t) + (3*e^t) / 4 -
      sin(t) / 2')
```



b) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4} \frac{(s^2+4) - s^2}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)}$, de unde rezultă funcția original:

$$f(t) = \frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{8}.$$

5. Funcția imagine $F(s)$ are polii simpli

$$s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = -4.$$

Pentru aflarea funcției original, se aplică teorema (5.2.3):

$$f(t) = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Rez} (e^{st} F(s); s_k).$$

Calculăm reziduurile:

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez} \left(e^{st} F(s); s_1 \right) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{se^{st}}{(s+2)(s+3)(s+4)} = -\frac{1}{6}e^{-t}, \\ \operatorname{Rez} \left(e^{st} F(s); s_2 \right) &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{se^{st}}{(s+1)(s+3)(s+4)} = e^{-2t}, \\ \operatorname{Rez} \left(e^{st} F(s); s_3 \right) &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{se^{st}}{(s+1)(s+2)(s+4)} = -\frac{3}{2}e^{-3t}, \\ \operatorname{Rez} \left(e^{st} F(s); s_4 \right) &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{se^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{3}e^{-4t}.\end{aligned}$$

Rezultă că:

$$f(t) = -\frac{1}{6}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-4t}.$$

Soluție Matlab:

```
syms s t
F(s)=s/((s+1)*(s+2)*(s+3)*(s+4));
f(t)=ilaplace(F)
f(t) =
exp(-2*t)-exp(-t)/6-(3*exp(-3*t))/2+(2*exp(-4*t))/3
```

6. a) Se notează $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ și se aplică transformata Laplace ecuației date:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} + 2\mathcal{L}\{x(t)\} = 4\mathcal{L}\{t\},$$

adică,

$$sX(s) - 3 + 2X(s) = \frac{4}{s^2} \Leftrightarrow X(s)(s+2) = 3 + \frac{4}{s^2}.$$

Se obține funcția:

$$X(s) = \frac{3s^2 + 4}{s^2(s+2)} = \frac{4}{s+2} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}.$$

Folosind transformata Laplace inversă, rezultă:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}.$$

Soluția problemei este:

$$x(t) = 4e^{-2t} - 1 + 2t.$$

b) $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$

Ecuația devine:

$$sX(s) - X(s) = \frac{2}{s^2 + 4},$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{(s-1)(s^2+4)} \\ X(s) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s^2+4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Aplicând transformata Laplace inversă, se obține soluția:

$$x(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{2}{5}\cos 2t.$$

7. Se aplică transformata Laplace ecuației date:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}.$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 1$$

Se obține ecuația:

$$s^2Y(s) - s - 1 + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+4} \Leftrightarrow Y(s)(s^2+4) = s + 1 + \frac{s}{s^2+4}.$$

Rezultă că:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{(s^2+4)^2}.$$

Folosind transformata Laplace inversă, se obține soluția:

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{t}{4}\sin 2t.$$

8. Notăm $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Rezultă că:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{y'''(t)\} &= s^3Y(s) - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) = s^3Y(s) - s. \end{aligned}$$

Se obține ecuația operatorială:

$$s^3Y(s) - s - 6(s^2Y(s) - 1) + 11sY(s) - 6Y(s) = 0,$$

de unde rezultă că

$$Y(s) = \frac{s-6}{s^3-6s^2+11s-6}.$$

Descompunând în fracții raționale simple, vom avea:

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{5}{2(s-1)} - \frac{3}{2(s-3)}.$$

Aplicând transformata Laplace inversă, se obține soluția problemei date:

$$y(t) = 4e^{2t} - \frac{5}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{3t}.$$

9. Notăm $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$. Transformata Laplace a ecuației date este:

$$\mathcal{L}\{x'''(t)\} + \mathcal{L}\{x''(t)\} - 2\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{t\},$$

adică,

$$s^3X(s) + 1 + s^2X(s) - 2X(s) = \frac{1}{s^2},$$

de unde rezultă:

$$X(s) = \frac{-s^2 + 1}{s^2(s^3 + s^2 - 2)} = \frac{-s - 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{2(s^2 + 2s + 2)} - \frac{1}{2s^2}.$$

Funcția original este:

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{e^{-t}\sin t - t}{2}.$$

10. Notăm $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$. Transformata Laplace a ecuației date este:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\right\} \Leftrightarrow s^2X(s) - 2 + X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\right\},$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{\sin t\} \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\right\}. \end{aligned}$$

Aplicând transformata Laplace inversă, se obține:

$$x(t) = 2\sin t + \sin t * \frac{1}{\cos t}.$$

$$\begin{aligned} \sin t * \frac{1}{\cos t} &= \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{\cos \tau} d\tau = \int_0^t \frac{\sin t \cos \tau - \sin \tau \cos t}{\cos \tau} d\tau \\ &= t \sin t + \cos t \ln(\cos t). \end{aligned}$$

Soluția problemei este:

$$x(t) = 2\sin t + t \sin t + \cos t \ln(\cos t).$$

11. a) Aplicând transformata Laplace ecuațiilor sistemului dat și ținând cont de condițiile inițiale date, se obține sistemul:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 3X(s) + 4Y(s) \\ sY(s) - 1 = 4X(s) - 3Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-3)X(s) - 4Y(s) = 1 \\ -4X(s) + (s+3)Y(s) = 1 \end{cases},$$

unde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ și $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Se obțin funcțiile:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & -4 \\ -4 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{s+7}{s^2-25} = \frac{6}{5(s-5)} - \frac{1}{5(s+5)},$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & -4 \\ -4 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{s+1}{s^2-25} = \frac{3}{5(s-5)} + \frac{2}{5(s+5)},$$

de unde rezultă că soluția problemei este:

$$x(t) = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t},$$

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}.$$

b) Notăm $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ și $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Aplicând transformata Laplace sistemului dat, se obține sistemul:

$$\begin{cases} sX(s) - 2 = 6X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - 1 = 2X(s) - Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-6)X(s) + 3Y(s) = 2 \\ -2X(s) + (s+1)Y(s) = 1 \end{cases},$$

de unde rezultă:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{2s-1}{s^2-5s} = \frac{1}{5s} + \frac{9}{5(s-5)},$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-6 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{s-2}{s^2-5s} = \frac{2}{5s} + \frac{3}{5(s-5)}.$$

Folosind transformata Laplace inversă, se obține soluția problemei Cauchy:

$$x(t) = \frac{1}{5} - \frac{9}{5}e^{5t},$$

$$y(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{5t}.$$

12. Se notează $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ și se aplică transformata Laplace sistemului dat.

$$\begin{cases} sX(s) - 0 = 4X(s) + Y(s) - \frac{36}{s^2} \\ sY(s) - 1 = -2X(s) + Y(s) - \frac{2}{s-1} \end{cases}.$$

Sistemul obținut este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} (s-4)X(s) - Y(s) = -\frac{36}{s^2} \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) = 1 - \frac{2}{s-1} \end{cases}.$$

Se obține:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{36}{s^2} & -1 \\ 1 - \frac{2}{s-1} & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-4 & -1 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{s^3 - 39s^2 + 72s - 36}{s^2(s-1)(s^2 - 5s + 6)},$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-4 & -\frac{36}{s^2} \\ 2 & 1 - \frac{2}{s-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-4 & -1 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{s^4 - 7s^3 + 12s^2 + 72s - 72}{s^2(s-1)(s^2 - 5s + 6)}.$$

Se descompun funcțiile raționale obținute în funcții raționale simple.

$$X(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{10}{s-2} - \frac{8}{s-3} - \frac{1}{s} + \frac{6}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{20}{s-2} + \frac{8}{s-3} + \frac{10}{s} + \frac{12}{s^2}$$

Se aplică transformata Laplace inversă și se obține soluția problemei date:

$$x(t) = 10e^{2t} - e^t - 8e^{3t} - 1 + 6t,$$

$$y(t) = 3e^t - 20e^{2t} + 8e^{3t} + 10 + 12t.$$

13. Aplicând transformata Laplace sistemului dat și ținând cont de condițiile inițiale, se obține sistemul:

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) - Y(s) \\ sY(s) - 1 = X(s) + 2Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) + Y(s) = 0 \\ -X(s) + (s-2)Y(s) = 1 \end{cases},$$

unde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ și $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Se obțin funcțiile:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{-1}{(s-2)^2 + 1},$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix}} = \frac{s-2}{s^2 - 4s + 5} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}.$$

Folosind transformata Laplace inversă, vom avea:

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 1}\right\} = -e^{2t} \sin t,$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}\right\} = e^{2t} \cos t.$$

14. Aplicând transformata Laplace, se obține sistemul:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 3X(s) - Y(s) + Z(s) \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 5Y(s) - Z(s) \\ sZ(s) = X(s) - Y(s) + 3Z(s) \end{cases},$$

unde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$.

Rezolvând sistemul obținut, rezultă:

$$X(s) = \frac{s^2 - 9s + 16}{s^3 - 11s^2 + 36s - 36} = \frac{1}{2(s-2)} + \frac{2}{3(s-3)} - \frac{1}{6(s-6)},$$

$$Y(s) = \frac{s-5}{s^2 - 9s + 18} = \frac{2}{3(s-3)} + \frac{1}{3(s-6)},$$

$$Z(s) = \frac{-2}{s^3 - 11s^2 + 36s - 36} = -\frac{1}{2(s-2)} + \frac{2}{3(s-3)} - \frac{1}{6(s-6)}.$$

Soluția problemei este:

$$x(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{2e^{3t}}{3} - \frac{e^{6t}}{6},$$

$$y(t) = \frac{2e^{3t}}{3} + \frac{e^{6t}}{3},$$

$$z(t) = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{2e^{3t}}{3} - \frac{e^{6t}}{6}.$$

5.5 Exerciții propuse

1. Să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile:

a) $f(t) = t^4 e^{-5t}$

b) $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$

c) $f(t) = \sinh t \cos 2t$

d) $f(t) = t^2 \sin t$

2. Folosind proprietăți ale transformatei Laplace, să se determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ pentru funcțiile:

a) $f(t) = \frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$

b) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

3. Să se determine transformatele Laplace pentru integralele:

a) $\int_0^t e^{-3u} \cos 2u \, du$

b) $\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du$

4. Să se determine funcțiile original pentru următoarele funcții:

a) $F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 - 5s}$

b) $F(s) = \frac{2s - 5}{(s - 1)^2(s^2 + 1)}$

c) $F(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s^2 + 4)^2}$

5. Să se calculeze integralele următoare folosind transformata Laplace:

a) $\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos 2t}{t} \, dt$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin 2t \cos 3t}{t} \, dt$

c) $\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} \, dt$

6. Să se rezolve folosind transformata Laplace următoarele ecuații diferențiale cu condițiile inițiale date:

a) $x''(t) + x(t) = \sin 2t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$

b) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

c) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

7. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$

b) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

8. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $x'''(t) - x''(t) = t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

b) $x'''(t) - x''(t) + 2x(t) = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$

9. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $x''(t) + x'(t) - 12x(t) = te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

b) $y''(t) - y(t) = e^t \cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

10. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$y'''(t) + 2y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = t,$$

pentru care sunt verificate condițiile:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

11. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = \sin t,$$

pentru care au loc condițiile:

$$x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = x'''(0) = 0.$$

12. Să se rezolve problemele Cauchy:

a)
$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - 4y(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 5y(t) \end{cases}, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 2$$

$$\text{b) } \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 10x(t) - 4y(t) \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 5$$

$$\text{c) } \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = 9x(t) + 3y(t) \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

13. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5$$

$$\text{b) } \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t) + e^{-t} \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1$$

$$\text{c) } \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + t \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4$$

14. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + \sin t \\ y'(t) = 5x(t) - 2y(t) + \cos t \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

$$\text{c) } \begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 3y(t) + 2 \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t) + t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

15. Să se rezolve problemele Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 3z(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 6z(t) \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + e^{3t} \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) + 4 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

Bibliografie

- [1] Boyce, William E. and DiPrima Richard C., *Elementary Differential Equations*, 10th Edition, Wiley Global Education, 2012
- [2] Chiriță, Stan, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1989
- [3] Crăciun, Ion, *Capitole de Matematici speciale*, Editura PIM, Iași, 2007
- [4] Crivei, Iuliu, *Matematici speciale*, Editura Fundației pentru Studii Europene, Cluj-Napoca, 2006
- [5] Danko, P.E. et coll., *Higher mathematics in problems and exercises*, vol. 2 (în limba rusă), Moscova, 1980
- [6] Duffy, Dean G., *Advanced Engineering Mathematics with Matlab*, Second Edition, Chapman & Hall, CRC Press Company, 2003
- [7] Edwards, C. H. and Penney, D. E., *Elementary Differential Equations*, 6th Edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2008
- [8] Filippov, A., *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*, Editura Mir, Moscova (trad. în franceză), 1976
- [9] Gurzău, Octavian Mircia, <https://users.utcluj.ro/~gurzau/>
- [10] Holhoș, Adrian, *Curs de Matematici speciale*, U.T.Press, Cluj-Napoca, 2018
- [11] Ile, Vasile-Horia, *Matematici speciale: ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, U.T.Press, 2012
- [12] Krasnov, M., Kisselev, A., Makarenko, G., *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*, Editura Mir, Moscova (trad. în franceză), 1981

- [13] Miheșan, Vasile, *Matematici speciale. Teorie și probleme*. Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2012
- [14] Mitu, Nicolae, Paleu, Viorel, *Introducere în MATLAB*, vol. 1, Îndrumar de laborator, Iași, 2008
- [15] Moroșanu, G., *Ecuatii diferențiale. Aplicații*. Editura Academiei, București, 1989
- [16] Păltineanu, Gavriil, Matei, Pavel, *Ecuatii diferențiale și ecuații cu derivate parțiale cu aplicații*, MatrixRom, București, 2007
- [17] Procopiuc, Gh., Ispas, M., *Probleme de analiză matematică*, Iași, 2002
- [18] Quinet, J., *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*, tome 4, sixième édition, Dunod, Paris, 1977
- [19] Roșculeț, Marcel N., *Manual de Analiză matematică*, vol. 2, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964
- [20] Zill, Dennis G., *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Eleventh Edition, Cengage Learning, Boston, MA, 2018