

Nicolae CHIRA

Roxana BÂLC

Alexandru CĂTĂRIG

Aliz MÁTHÉ

Cristian CIPLEA

Cristian MOJOLIC

Ioana MUREȘAN

Cristian CUCEU

Radu HULEA

Daniela PETRIC

**STATICA CONSTRUCȚIILOR**  
**STRUCTURI STATIC DETERMINATE**  
- Îndrumător pentru lucrări -



U.T. PRESS  
Cluj-Napoca, 2014  
ISBN 978-973-662-975-4



Editura U.T.PRESS  
Str.Observatorului nr. 34  
C.P.42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca  
Tel.:0264-401.999 / Fax: 0264 - 430.408  
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro  
www.utcluj.ro/editura

Director: Prof.dr.ing. Daniela Manea  
Consilier editorial: Ing. Călin D. Câmpean

Copyright © 2014 Editura U.T.PRESS

**ISBN 978-973-662-975-4**

Bun de tipar: 25.05.2014

## CUPRINS

<b>Capitolul 1: Grinzi drepte</b>	<b>4</b>
1.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	4
1.2. Probleme rezolvate	7
1.3. Probleme propuse	20
<b>Capitolul 2: Grinzi cu console și articulații (grinzi Gerber)</b>	<b>28</b>
2.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	28
2.2. Exemplu de calcul	30
2.3. Probleme propuse	33
<b>Capitolul 3: Cadre static determinate</b>	<b>43</b>
3.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	43
3.2. Exemple de calcul	45
3.3. Probleme propuse	54
<b>Capitolul 4: Arce static determinate</b>	<b>62</b>
4.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	62
4.2. Exemplu numeric	65
4.3. Probleme propuse	69
<b>Capitolul 5: Structuri articulate plane</b>	<b>74</b>
5.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	74
5.2. Exemple de calcul	76
5.3. Probleme propuse	80
<b>Capitolul 6: Calculul eforturilor cu ajutorul Principiului Lucrului Mecanic Virtual</b>	<b>84</b>
6.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	84
6.2. Exemplu de calcul	85
6.3. Probleme propuse	89
<b>Capitolul 7: Linii de influență</b>	<b>93</b>
7.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare	93
7.2. Exemple de calcul	94
7.3. Probleme propuse	111
<b>Capitolul 8: Deplasări punctuale</b>	<b>122</b>
8.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de calcul	122
8.2. Exemple de calcul	125
8.3. Probleme propuse	128
<b>Capitolul 9: Răspunsuri probleme propuse</b>	<b>133</b>

# Capitolul 1: Grinzi drepte

## 1.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Grinzile drepte static determinate sunt structuri solicitate predominant la încovoiere.

În funcție de modul de dispunere a celor trei legături simple (necesare asigurării invariabilității geometrice și fixării de teren), se disting:

- grinzi încastrate la un capăt (console),
- grinzi cu un reazem fix și unul mobil, dispuse la capete sau nu (grinzi simplu rezemate cu/fără console).

Reacțiunile care se dezvoltă în dispozitivele de fixare față de teren se determină scriind trei ecuații de echilibru astfel:

- 2 ecuații de echilibru (sumă de moment nul) față de rezemele cu terenul,
- o ecuație de sumă de proiecții de forțe după o direcție din plan (orizontală, axa barei, sau altă direcție convenabilă)

Verificarea valorilor calculate ale reacțiunilor se realizează scriind o ecuație de sumă de proiecții de forțe egală cu zero după orice altă direcție din plan.

*În cazul consolelor nu este obligatorie determinarea prealabilă a reacțiunilor, întrucât aceste grinzi au un capat liber pornind de la care se pot determina toate eforturile.*

Eforturile se evidențiază prin secționarea barei în punctul respectiv. La trasarea diagramelor de eforturi se ține seama de convențiile de semn.

Cele trei eforturi care apar în urma solicitării în orice secțiune a unei grinzi drepte sunt:

**Efortul axial (N)** - se dezvoltă pe direcția axei barei,  
- este pozitiv când este de întindere (iese din secțiune),

În diagrama de efort axial se înregistrează salt în dreptul forțelor concentrate care au componentă pe direcția axei barei.

Forțele uniform distribuite pe bară produc o variație liniară a efortului axial, dacă au proiecție după axa barei.

Marcarea semnului pe diagrama de efort axial este esențială în definirea variației acestui efort.

**Forța tăietoare (T)** - apare normal pe direcția axei barei;  
- este **pozitivă** când produce o rotire a fețelor secțiunii în **sens orar**;

În diagrama de forță tăietoare se înregistrează salt în dreptul forțelor concentrate care au componentă perpendiculară pe direcția axei barei și în sensul acestora.

Marcarea semnului pe diagrama de forță tăietoare este esențială în definirea variației acestui efort.

Pe barele (intervalele) neîncărcate cu forțe, forța tăietoare este constantă.

Forțele uniform distribuite pe bară dau, dacă au componentă pe direcția perpendiculară pe axa barei, o variație liniară pe distanța pe care sunt repartizate.

**Momentul încovoiator (M)**

- este pozitiv când întinde fibra dinspre un observator care parcurge bara de la stânga la dreapta (fibra de jos, în cazul grinzilor);

Diagrama de moment încovoietor se trasează pe fibra întinsă și nu necesită semn.

În dreptul forțelor concentrate se înregistrează vârfuri (schimbări de pantă), în sensul de acțiune al acestora.

În dreptul momentelor concentrate se înregistrează salturi în sensul acestora (în funcție de fibra întinsă).

Forțele uniform distribuite produc o variație parabolică a momentului încovoietor. Existența punctelor de extrem este marcată prin anularea forței tăietoare. În acest punct, tangenta la diagrama de moment încovoietor este paralelă cu axa barei.

Cunoașterea comportării grinzilor drepte este esențială, întrucât orice structură solicitată predominant la încovoiere (exceptând cele care au în componență bare curbe) se poate descompune în grinzi drepte.

Rezolvarea grinzilor înclinate (calculul reacțiunilor, trasarea diagramelor de eforturi) se poate face prin:

- a) Determinarea reacțiunilor în sistemul de referință  $xOy$  (orizontală, verticală). Eforturile de tip forțe (N și T), acționând pe direcția axei barei și perpendicular pe ea, se determină prin proiecții ale forțelor (inclusiv reacțiuni) pe aceste direcții.

Diagrama de moment încovoietor se trasează pe intervale, ținând cont de tipul încărcării și de fibra întinsă, după determinarea prealabilă a momentelor încovoietoare în secțiunile caracteristice.

- b) Determinarea reacțiunilor în sistemul de referință  $x'Oy'$  (pe direcția axei barei și perpendicular pe ea). Încărcările direct aplicate pe bară se proiectează pe aceleași direcții.

Starea de solicitare a barei este astfel foarte vizibilă:

- Încărcările normale pe axa barei definesc comportarea barei la încovoiere (trasarea diagramelor T și M)
- Încărcările de pe direcția axei barei definesc variația efortului axial (diagrama N).

*Articulația dezvoltă o reacțiune de direcție și mărime necunoscute care se poate proiecta după oricare două direcții din plan, în timp ce în cazul reazemului simplu direcția reacțiunii este bine definită de suprafața de rezemare (perpendicular pe aceasta).*

În funcție de orientarea reazemului simplu, se optează pentru un sistem de referință sau altul.

În cazul în care se dorește evidențierea stării de solicitare din bară prin proiectarea încărcărilor după direcția axei barei și perpendicular pe aceasta, principalele situații care pot să apară, în funcție de distribuția și orientarea încărcării sunt:

*Încărcarea verticală distribuită uniform pe orizontală simulează acțiunea zăpezii (Fig. 1.1):*

Se observă că forța verticală  $q$  distribuită uniform pe proiecția pe orizontală a lungimii barei înclinate este echivalentă cu o forță  $q \cos \alpha$ , tot verticală, distribuită uniform pe lungimea barei.

Această încărcare are proiecții pe direcția axei barei ( $q \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ ) și perpendicular pe aceasta ( $q \cdot \cos^2 \alpha$ ). Cele două încărcări definesc stările de solicitare ale barei: efort axial (N) și încovoiere (M și T).

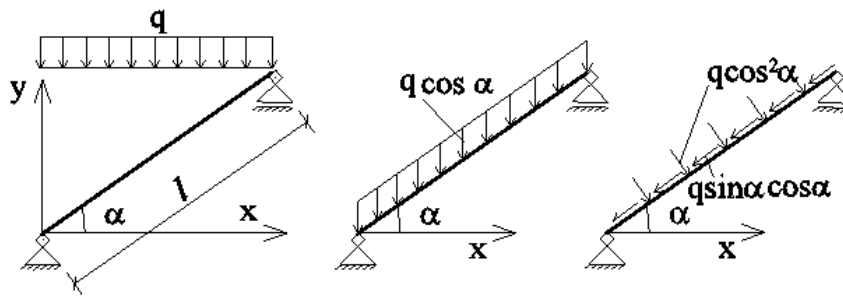


Fig. 1.1

Încărcarea verticală distribuită pe lungimea axei barei simulează încărcarea din greutatea proprie (Fig. 1.2):

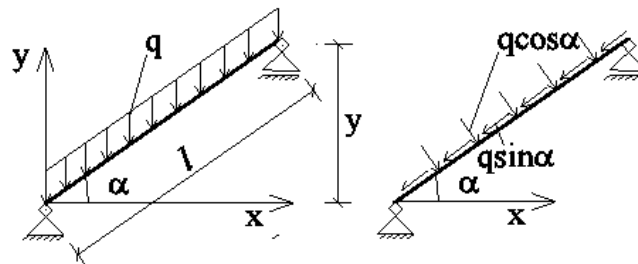


Fig. 1.2

În acest caz, forța verticală  $q$ , uniform distribuită pe lungimea barei înclinate, are componente:  $q \sin \alpha$  pe direcția axei barei care produce variația liniară a efortului axial, și  $q \cos \alpha$ , perpendiculară pe axa barei care definește comportarea barei la încovoiere.

Încărcarea orizontală distribuită pe vertical (specifică acțiunii vântului) este echivalentă cu o forță orizontală  $q \sin \alpha$  distribuită pe lungimea barei înclinate, care se proiectează în lungul axei barei cu valoarea  $q \sin \alpha \cos \alpha$  și normal la axa barei cu valoarea  $q \sin^2 \alpha$  (Fig. 1.3).

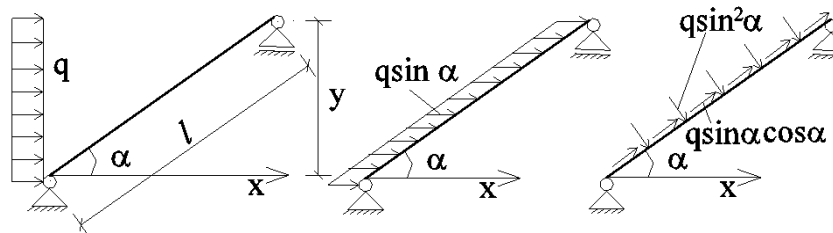


Fig. 1.3

## 1.2. Probleme rezolvate

În acest capitol sunt tratate în mod special grinzile înclinate acționate de cele mai frecvente încărcări (zăpadă, greutate proprie și vânt), considerând pentru fiecare tip de încărcare două orientări ale reazemului simplu al grinzii. Fiecare structură a fost rezolvată prin determinarea reacțiilor în cele două sisteme de referință.

**1.2.1.** Grinda dreaptă din figura 1.4 este legată de teren în capătul A printr-o articulație și în capătul B printr-un reazem simplu cu suprafața de rezemare orizontală. Bara este încărcată cu o forță verticală, uniform distribuită după proiecția pe orizontală a lungimii barei (distribuție care modelează încărcarea din acțiunea zăpezii).

Geometria structurii este definită prin:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{l}$$

**a. Reacțiuni conform sistemului de referință  $xOy$ :**

- grinda este încărcată numai cu forțe verticale:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot x - qx \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{qx}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot x - qx \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qx}{2}$$

Încărcarea este preluată în mod egal de cele două reazeme.

*Determinarea eforturilor*

- *de tip forțe* - se secționează bara în secțiunea dorită și se proiectează forțele care acționează până în acel punct, după direcția perpendiculară pe bară (T) și în lungul barei (N).

Pentru o secțiune oarecare  $i$ , plasată la  $x_i$  de capătul A, expresiile eforturilor sunt:

$$T_i = (V_A - qx_i) \cos \alpha - q \left( \frac{x}{2} - x_i \right) \cos \alpha$$

$$T_i = 0 \quad \text{pentru } x_i = \frac{x}{2}$$

$$N_i = (-V_A + qx_i) \sin \alpha = q \left( -\frac{x}{2} + x_i \right) \sin \alpha$$

- *de tip moment încovoietor*

$$M_i = V_A \frac{x}{2} - \frac{q}{2} x_i^2$$

$$M_{max} = V_A \frac{x}{2} - q \frac{x}{2} \frac{x}{4} = \frac{qx^2}{8}$$

Variațiile eforturilor în lungul axei barei sunt prezentate în figura 1.5

Întrucât reazemul simplu este vertical ( $V_B$  este verticală), lucrând în sistemul de referință  $xOy$ , se

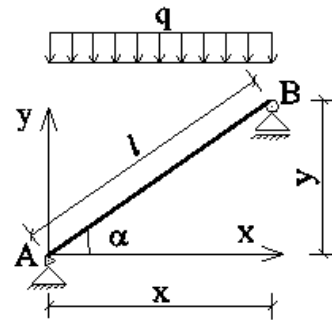


Fig. 1.4

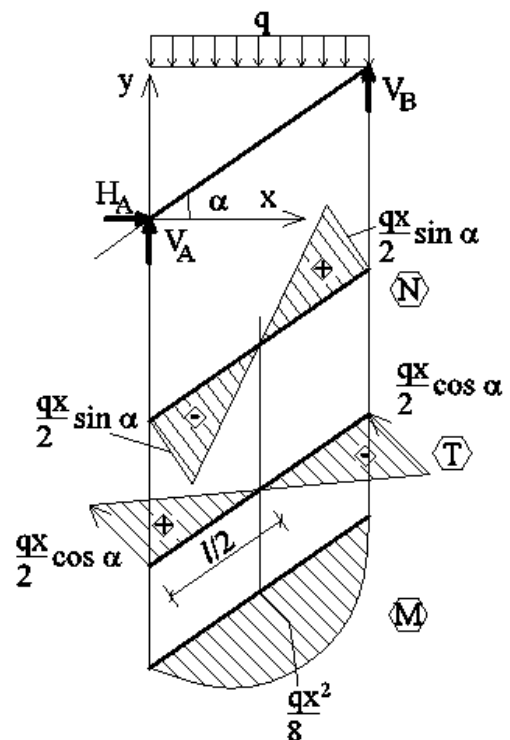


Fig. 1.5

observă că toate forțele sunt **verticale**. Ele se proiectează pe direcția axei barei ( $N$ , cu  $\sin\alpha$ ) și perpendicular pe ea ( $T$ , cu  $\cos\alpha$ ).

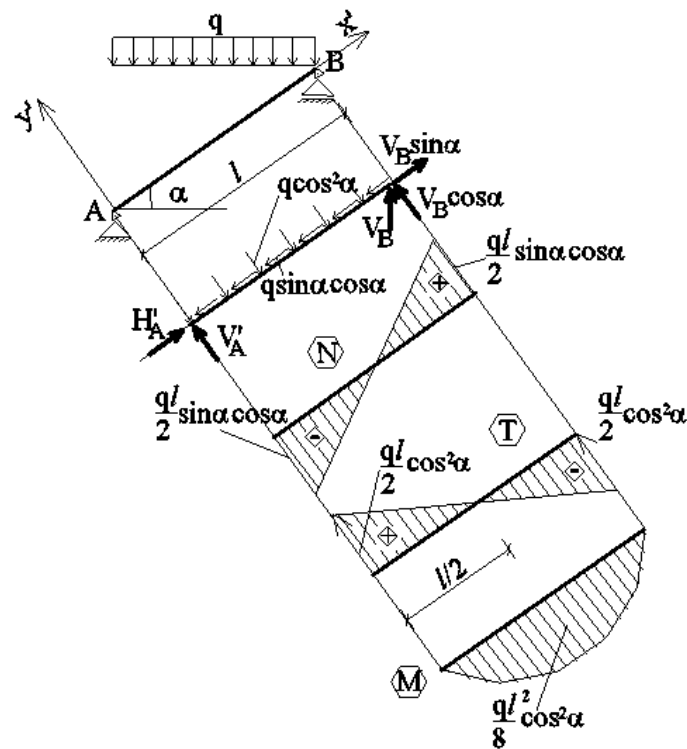
**b. Reacțiunile din articulație se calculează față de sistemul de referință  $x'Oy'$**  (fig. 1.6)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot \cos\alpha \cdot l - q \cdot \cos^2\alpha \cdot l \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2} \cos\alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V'_A \cdot l - q \cdot \cos^2\alpha \cdot l \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow V'_A = \frac{ql}{2} \cos^2\alpha$$

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H'_A - q \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot l + V_B \cdot \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow H'_A = \frac{ql}{2} \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Pentru determinarea eforturilor, în acest caz se pot descompune și încărcările direct aplicate, după direcția axei barei și perpendicular pe ea (conform explicațiilor date în paragraful 1.1, fig.1.1).



**Fig. 1.6**

Variația efortului axial este dată de componenta forței uniform distribuite dezvoltată pe direcția axei barei.

$$N_A = -H'_A = -\frac{ql}{2} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$N_i = -\frac{ql}{2} \sin\alpha \cos\alpha + qx'_i \sin\alpha \cos\alpha = q \left( -\frac{1}{2} + x'_i \right) \sin\alpha \cos\alpha$$

Variația forței tăietoare și a momentului încovoietor este dată de componentele forțelor dezvoltate perpendicular pe direcția barei.

$$T_A = V_A = \frac{ql}{2} \cos^2\alpha$$

$$V_A \text{ rotește capătul A în sens orar} \Rightarrow T_A > 0$$



$$T_i = V_A - qx'_i \cos^2 \alpha = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha - qx'_i \cos^2 \alpha = q \left( \frac{l}{2} - x'_i \right) \cos^2 \alpha$$

$$T_i = 0 \quad \text{pentru} \quad x'_i = \frac{l}{2}$$

Momentul încovoielor variază după o parabolă simetrică de gradul II

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_i = V_A \cdot x'_i - q \cdot x'_i{}^2 \cdot \cos^2 \alpha = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x'_i \cdot \cos^2 \alpha - \frac{q \cdot x'_i{}^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{q}{2} (x'_i \cdot l - x'_i{}^2) \cdot \cos^2 \alpha$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2 \cdot \cos^2 \alpha}{8} = \frac{q \cdot x^2}{8}$$

În cazul prezentat ambele metode sunt aplicabile, cu remarcă:

- Varianta "a" - este mai rapidă.
- Varianta "b" - distribuția forțelor vizualizează direct variația eforturilor de tip forțe.

**1.2.2.** Grinda înclinată, supusă acțiunii zăpezii, este rezemată simplu la capătul superior, paralel cu axa barei.

*a. Sistemul de referință xOy*

Reacțiunea din B,  $V'_B$ , este perpendiculară pe bară

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B l - qx \frac{x}{2} = 0$$

$$V'_B = \frac{qx}{2l} l \cos \alpha = \frac{qx \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - V'_B \sin \alpha = 0$$

$$H_A = \frac{qx}{2} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A x - qx \frac{x}{2} - H_A y = 0$$

$$V_A = \frac{qx}{2} (\sin^2 \alpha + 1)$$

$$y = x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Verificare:

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{qx}{2} (\sin^2 \alpha + 1) + \frac{qx}{2} \cos \alpha \cdot \cos \alpha - qx \\ &= qx \left( \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Diagrama N:

$$N_A = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} N_A &= -\frac{qx}{2} (\sin^2 \alpha + 1) \sin \alpha - \frac{qx}{2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= -qx \sin \alpha \end{aligned}$$

$$N_B = 0, \quad (V'_B \text{ este perpendicular pe bară})$$

$$N_{xi} = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + qx_i \sin \alpha$$

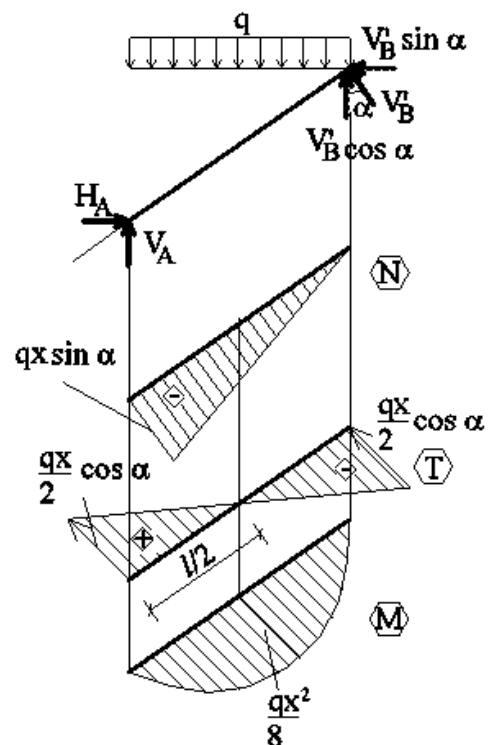
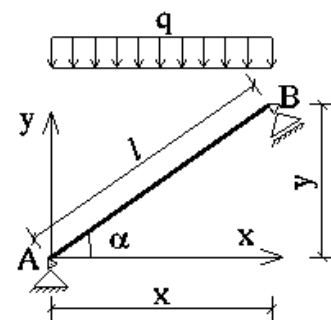


Fig. 1.7

Diagrama T:

$$T_A = V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha$$

$$T_A = \frac{qx}{2} (\sin^2 \alpha + 1) \cos \alpha - \frac{qx}{2} \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha = \frac{qx}{2} \cos \alpha (\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha) = \frac{qx}{2} \cos \alpha$$

$$T_B = -V_B = -\frac{qx \cos \alpha}{2}$$

**b. Sistemul de referință  $x'Oy'$**

În această situație pare avantajoasă determinarea reacțiilor în sistemul de referință axa barei-normala pe ea, atât pentru determinarea reacțiilor cât și pentru calculul eforturilor:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H'_A - ql \cos \alpha \sin \alpha = 0 \Rightarrow H'_A = q \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B l - q \cos^2 \alpha l \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V'_B = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V'_A l - q \cos^2 \alpha l \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V'_A = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha$$

Forța uniform distribuită perpendiculară pe axa barei este preluată simetric de cele două reacțiuni normale la bară, iar componenta forței uniform distribuite pe lungimea barei este preluată de reazemul A.

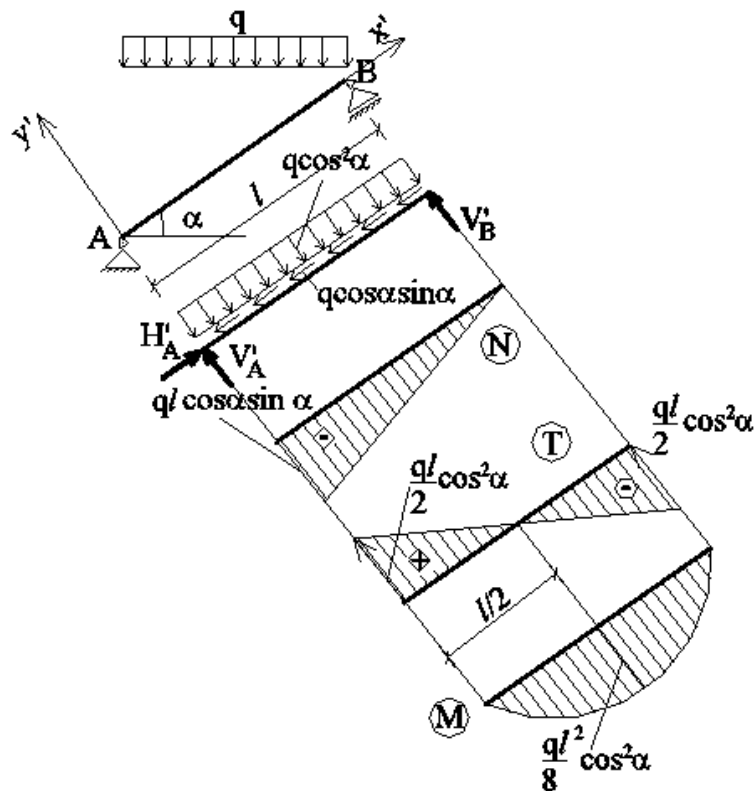


Fig. 1.8

Încărcarea perpendiculară pe bară este simetrică  $\Rightarrow$  cele 2 reacțiuni perpendiculare pe bară vor fi egale.

Eforturi:

Diagrama N:

$$N_A = -H'_A = -ql \cos \alpha \sin \alpha$$

$$N_B = 0$$

$$N_i = -H'_A + qx_i \cos \alpha \sin \alpha$$

Diagrama T:

$$T_A = V'_A = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha, \quad V'_A \text{ acționează perpendicular pe bară, rotește în sens orar}$$

$$T_{x_i} = V'_A - qx_i \cos \alpha = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha - qx_i \cos^2 \alpha = q \left( \frac{l}{2} - x_i \right) \cos^2 \alpha$$

Anularea forței tăietoare se produce la distanța  $x'_i$  față de capătul A:

$$\frac{ql \cos^2 \alpha}{2} - qx'_i \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow x'_i = \frac{l}{2}$$

Diagrama M:

$$M_{\max} = T_{x_i} = V'_A \frac{l}{2} - q \cos^2 \alpha \frac{l}{2} = \frac{ql^2 \cos^2 \alpha}{4} - \frac{ql^2 \cos^2 \alpha}{8} = \frac{ql^2 \cos^2 \alpha}{8} = \frac{qx^2}{8}$$

**Cele două structuri încărcate identic (1.2.1 și 1.2.2) au o comportare identică la încovoiere (diagramele T și M sunt identice); orientarea diferită a reazemului simplu afectează numai preluarea efortului axial (diagrama N).**

**1.2.3. Încărcarea din greutatea proprie este modelată în codurile de proiectare ca o forță verticală uniform distribuită pe toată lungimea barei (Fig.1.9).**

a. În S.R.  $xOy$  (Fig. 1.9)

Forțele direct aplicate sunt verticale.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B x - ql \frac{x}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{ql}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A x - ql \frac{x}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

Încărcarea verticală descarcă egal în cele două reazeme.

Efortul axial:

$$N_A = -V_A \sin \alpha = -\frac{ql}{2} \sin \alpha$$

$$N_B = V_B \sin \alpha = \frac{ql}{2} \sin \alpha$$

Forța tăietoare:

$$T_A = V_A \cos \alpha = \frac{ql}{2} \cos \alpha = \frac{qx}{2}$$

$$T_B = -V_B \cos \alpha = -\frac{ql}{2} \cos \alpha = -\frac{qx}{2}$$

$$T(x_i) = V_A \cos \alpha - qx'_i = \frac{qx}{2} - \frac{qx'_i}{2 \cos \alpha}$$

$$x'_i = \frac{x_i}{\cos \alpha}$$

Momentul încovoiător:

$$M(x_i) = V_A x_i - qx'_i \frac{x_i}{2} = \frac{q \cdot x}{2} x_i - \frac{q \cdot x_i}{2 \cos \alpha} \frac{x_i}{2}$$

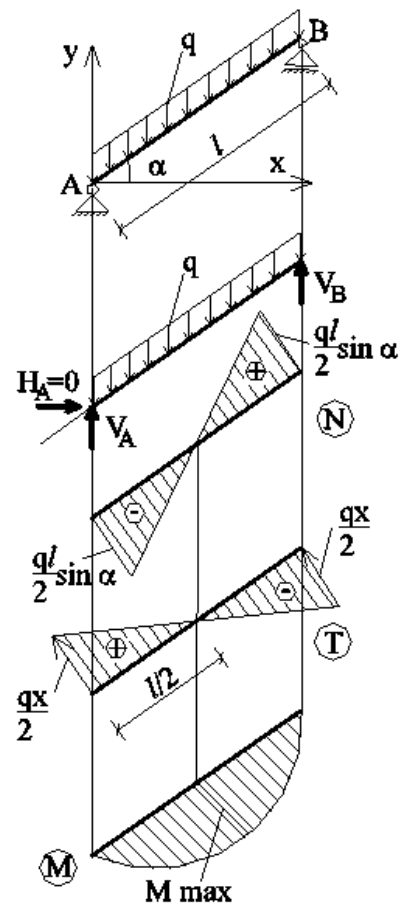


Fig. 1.9

$$x_i = \frac{l}{2}$$

$$M_{\max} = V_A \frac{x}{2} - q \frac{1}{2} \frac{x}{4} = \frac{qlx}{4} - \frac{qlx}{8} = \frac{ql^2}{8} \cos \alpha$$

b. În S.R.  $x'Oy'$  (Fig. 1.10) - încărcare numai din forțe verticale

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cos \alpha l - ql \cos \alpha \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2}$$

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H'_A - ql \sin \alpha + V_B \sin \alpha = 0 \Rightarrow H'_A = \frac{ql}{2} \sin \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V'_A l - ql \cos \alpha \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V'_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha$$

Forțele  $H'_A, V_B \sin \alpha, ql \sin \alpha$  au același suport - axa barei  $\Rightarrow$  nu dau momente față de punctele de rezemare ale grinzii.

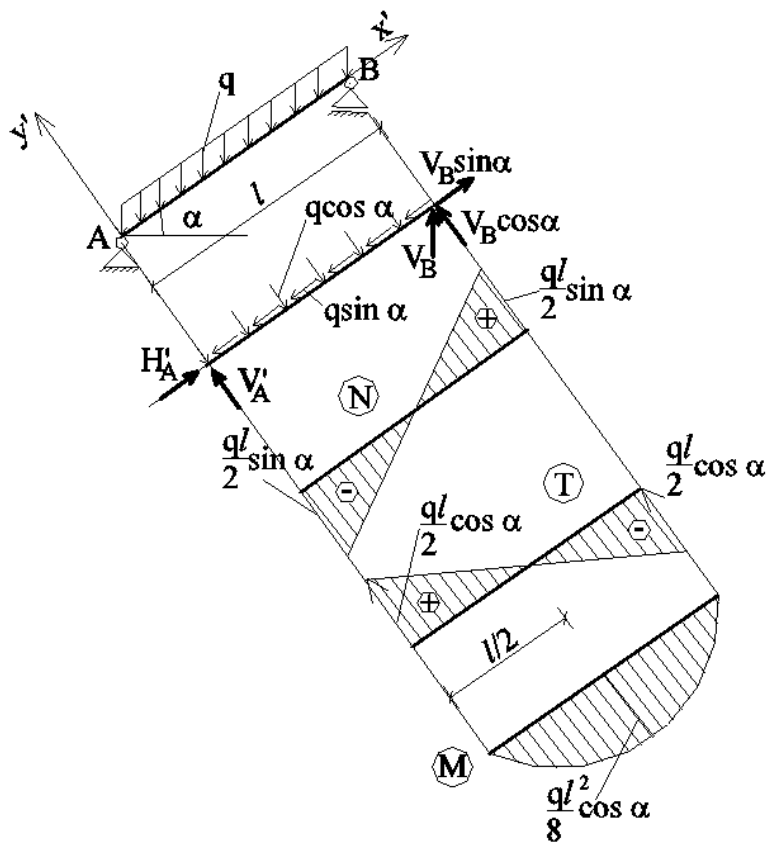


Fig. 1.10

### Calculul eforturilor

Efortul axial are o variație liniară produsă de componenta forței uniform distribuite proiectată pe axa barei.

$$N_A = -H'_A = -\frac{ql}{2} \sin \alpha$$

$$N_B = V_B \sin \alpha = \frac{ql}{2} \sin \alpha$$

Forța tăietoare are o variație liniară, antisimetrică, produsă de componenta perpendiculară pe axa barei a forței uniform distribuite.

$$T_A = V'_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha$$

$$T_B = -V_B \cos \alpha = -\frac{ql}{2} \cos \alpha$$

$$T(x'_i) = V'_A - q \cos \alpha x'_i = \frac{ql}{2} \cos \alpha - qx'_i \cos \alpha$$

$$T(x'_i) = q \left( \frac{l}{2} - x'_i \right) \cos \alpha - \text{variația forței tăietoare este liniară}$$

$$T=0 \text{ pentru } x'_i = \frac{l}{2}$$

$$T_B = -V_B \cos \alpha = -\frac{ql}{2} \cos \alpha \text{ (} V_B \cos \alpha \text{ rotește capătul B în sens antiorar)}$$

Momentul încovoietor variază după o parabolă de gradul II, simetrică.

$$M_A = M_B = 0$$

Momentul maxim se obține pentru:  $x'_i = \frac{l}{2}$

$$M_{\max} = \frac{ql^2 \cos \alpha}{8}$$

**1.2.4.** Pentru aceeași încărcare, se consideră cazul în care reazemul simplu este perpendicular pe direcția axei barei.

**a. Sistemul de referință  $xOy$**  (Fig. 1.11)

Sistemul de forțe:

Pe direcția Ox:  $H_A, V'_B \cdot \sin \alpha$

Pe direcția Oy:  $V_A, q, V'_B \cdot \cos \alpha$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - V'_B \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_A = \frac{qx}{2} \sin \alpha$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B \cdot l - ql \cdot \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow V'_B = \frac{qx}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot x - ql \cdot \frac{x}{2} - H_A \cdot y = 0$$

$$V_A \cdot x = \frac{qx^2}{2 \cos \alpha} + \frac{qx}{2} \sin \alpha \cdot x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$V_A = \frac{qx}{2 \cos \alpha} (1 + \sin^2 \alpha)$$

Verificare:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= \frac{qx}{2} \cos \alpha + \frac{qx}{2 \cos \alpha} (1 + \sin^2 \alpha) - q \frac{x}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{qx}{2} \left( \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{qx}{2 \cos \alpha} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1 - 2) = 0 \end{aligned}$$

Trasarea diagramelor de eforturi

Diagrama N:

$$N_A = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha$$

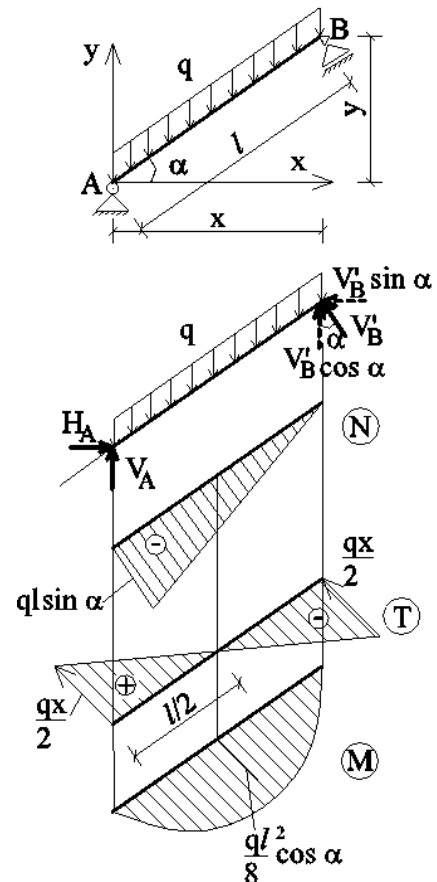


Fig. 1.11

$$N_A = -\frac{qx}{2 \cos \alpha} (1 + \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \frac{qx}{2} \sin \alpha \cos \alpha = -ql \sin \alpha$$

$N_B = 0$  Reazemul simplu din B permite translația pe direcția axei barei

Efortul axial are o variație liniară între A și B.

Diagrama T:

$$T_A = V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha$$

$$T_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha (\sin^2 \alpha + 1) - \frac{qx}{2} \sin^2 \alpha = \frac{qx}{2}$$

(Rotește în sens orar)

$$T_B = -V'_B = -\frac{qx}{2}$$

(Rotește în sens anti orar)

Diagrama de forță tăietoare este liniară și antisimetrică.

Diagrama de moment încovoietor este o parabolă simetrică de ordinul II cu ordonata maximă:

$$M_{\max} = V_A \frac{x}{2} - H_A \frac{y}{2} - \frac{qx}{2 \cos \alpha} \frac{x}{4} = \frac{qx^2}{2 \cos \alpha} (2 \sin^2 \alpha + 2 - 1 - 2 \sin^2 \alpha) = \frac{ql^2}{8} \cos \alpha$$

**b. Sistemul de referință  $x'Oy'$**  (Fig. 1.12)

Forțe perpendiculare pe bară:  $V'_A, V'_B, q \cos \alpha$

Forțe paralele cu bara:  $H'_A, q \sin \alpha$

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H'_A = ql \sin \alpha$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B \cdot l - ql \cos \alpha \frac{l}{2} = 0$$

$$V'_B = \frac{ql}{2} \cos \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V'_A \cdot l - ql \cos \alpha \frac{l}{2} = 0$$

$$V'_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha$$

Trasarea diagramelor de eforturi

Pentru determinarea diagramei de efort axial N se însumează algebric proiecțiile forțelor pe direcția axei barei, ținând cont de sensul acestora:

$$N_A = -H'_A = -ql \sin \alpha$$

$N_B = 0$ , variație liniară

Diagrama T:

$$T_A = V'_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha$$

$$T_B = -V'_B = -\frac{ql}{2} \cos \alpha$$

Diagrama M:

$$M_{\max} = V'_A \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cos \alpha \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{4} \cos \alpha - \frac{ql^2}{8} \cos \alpha = \frac{ql^2}{8} \cos \alpha$$

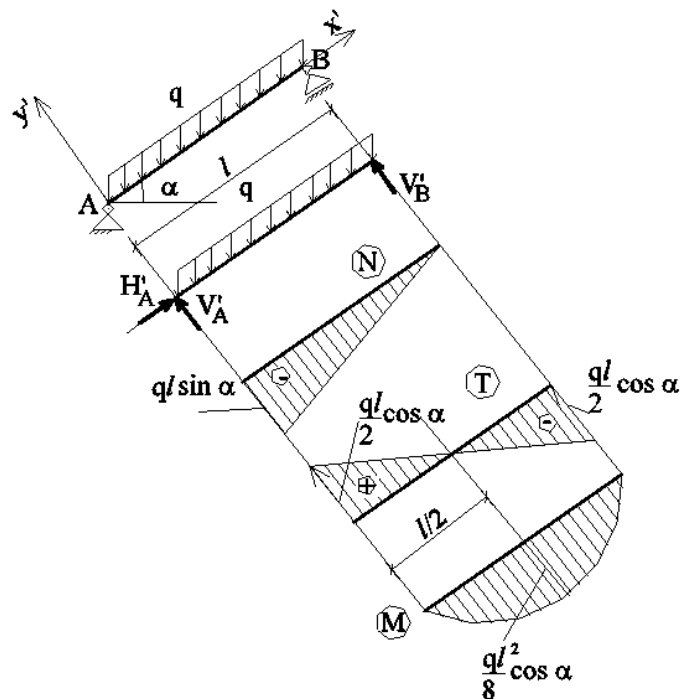


Fig. 1.12

Determinarea reacțiunilor în sistemul de referință  $xOy$  pentru acest caz de încărcare și de rezemare, necesită un volum mai mare de calcule, iar probabilitatea de a greși este mai mare.

Utilizarea sistemului de referință  $x'Oy'$  conduce, în acest caz, mai rapid la calculul reacțiunilor, iar determinarea eforturilor este vizibilă, fără a necesita proiecții ale încărcărilor (acestea fiind proiectate anterior în sistemul de referință ales).

**Orientarea reazemului simplu afectează doar variația efortului axial. Comportarea la încovoire depinde numai de încărcarea direct aplicată pe bară.**

**1.2.5.** Se consideră cazul încărcării unei grinzi înclinate cu presiunea din acțiunea vântului. Reazemul simplu este vertical.

a. Sistemul de referință  $xOy$  (Fig. 1.13)

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -H_A + ql \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_A = ql \sin \alpha \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -xV_B + ql \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2 \cos \alpha} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -xV_A + yH_A - ql \frac{l}{2} = 0 \\ \Rightarrow x \cdot V_A &= ql \frac{l}{2} - ql^2 \sin^2 \alpha = ql^2 \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

Verificare:

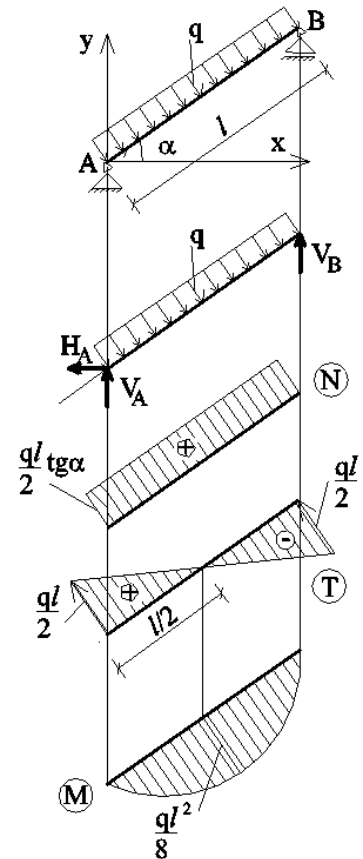
$$\begin{aligned} \sum F_x = V_A + V_B - ql \cos \alpha &= \frac{ql}{2 \cos \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ V_A = \frac{ql}{2 \cos \alpha} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - ql \cos \alpha &= \frac{2ql \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} - ql \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Eforturi:

$$\begin{aligned} N_A = -V_A \sin \alpha + H_A \cos \alpha &= -\frac{ql \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ + ql \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{ql \sin \alpha}{2 \cos \alpha} (-\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) = \frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$N_B = V_B \sin \alpha = \frac{ql \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

**Fig. 1.13**



*Observație:* bara nu este încărcată cu forțe distribuite pe direcția axei sale  $\Rightarrow$  efortul axial este constant.

*Diagrama T:*

Forța uniform distribuită acționează perpendicular pe bară, prin urmare produce variația liniară a forței tăietoare.

$$\begin{aligned} T_A = V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha &= \frac{ql}{2 \cos \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha + ql \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{ql}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) = \frac{ql}{2} \end{aligned}$$

$$T_B = -V_B \cos \alpha = -\frac{ql}{2}$$

$$T_x = T_A - q \cdot x_i = \frac{ql}{2} - q \frac{x_i}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \alpha} \left( \frac{x}{2} - x_i \right)$$

Diagrama M: parabolă de gradul II

$$M_{\max} = V_A \frac{x}{2} + H_A \frac{y}{2} - \frac{ql^2}{2} = \frac{ql}{2 \cos \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{l \cos \alpha}{2} + ql \sin \alpha \frac{l \sin \alpha}{2} - \frac{ql^2}{8}$$

b. Sistemul de referință  $x'Oy'$  (Fig. 1.14)

Forțe proiectate pe axa  $Ox'$ :  $H'_A, V_B \cdot \sin \alpha$

Forțe proiectate pe axa  $Oy'$ :  $V'_A, V_B \cdot \cos \alpha, q$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B x - ql \frac{1}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{ql}{2 \cos \alpha}$$

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow -H'_A + V_B \sin \alpha = 0$$

$$H'_A = V_B \sin \alpha = \frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V'_A l - ql \frac{1}{2} = 0$$

$$V'_A = \frac{ql}{2}$$

Trasarea diagramelor de eforturi:

Diagrama N:

$$N_A = H'_A = \frac{ql}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$N_B = V_B \cdot \sin \alpha = \frac{ql}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Diagrama T:

$$T_A = V'_A = \frac{ql}{2}$$

$$T_B = -V_B \cdot \cos \alpha = -\frac{ql}{2}$$

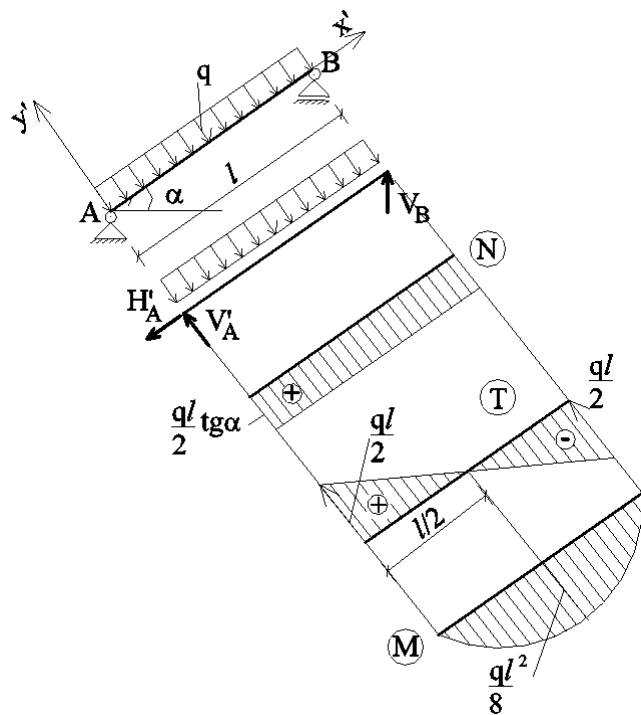


Fig. 1.14

**1.2.6** Pentru aceeași încărcare, se consideră reazemul simplu dispus normal pe bară.

Având în vedere dispunerea forțelor și direcția reacțiunii din capătul B, determinarea reacțiunilor din A în sistemul de referință  $xOy$  este practic inutilă. Structura este o grindă simplu rezemată de lungime  $l$ , încărcată cu o forță uniform distribuită pe toată lungimea ei.

a. În sistemul de referință  $xOy$  (Fig. 1.15)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V'_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + q \cdot l \cdot \sin \alpha - V'_B \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_A = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot \sin \alpha + q \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot x + H_A \cdot y - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} = 0$$



$$V_A = \left( \frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \sin \alpha \right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{q \cdot l^2}{2} (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{1}{l \cos \alpha}$$

Trasarea diagramelor de eforturi

$$N_A = -V_A \cdot \sin \alpha + H_A \cdot \cos \alpha = -\frac{q \cdot l}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{q \cdot l}{2} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

Reazemul simplu din B este orientat perpendicular pe bară, încărcarea este perpendiculară pe bară și rezultă că efortul axial în bară este nul.

$$T_A = V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha = \frac{ql}{2} \cos^2 \alpha + \frac{ql}{2} \sin^2 \alpha = \frac{ql}{2}$$

$$T_B = V'_B = -\frac{ql}{2}$$

Diagrama de forță tăietoare este antisimetrică.  
Diagrama de moment încovoietor este simetrică.

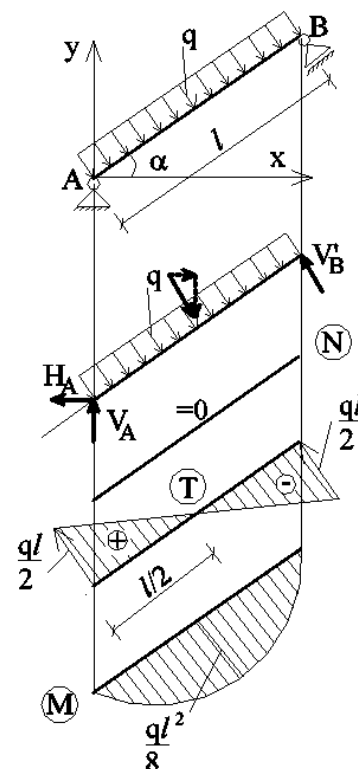


Fig. 1.15

b. În sistemul de referință  $x'O'y'$  (Fig. 1.16)

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H'_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_B l - q l \frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V'_B = \frac{ql}{2} = V'_A$$

Încărcarea fiind simetrică și perpendiculară pe bară, rezultă două reacțiuni egale și perpendiculare pe bară

$$N=0$$

$$T_A = V'_A = \frac{ql}{2}$$

$$T_B = -V'_B = -\frac{ql}{2}$$

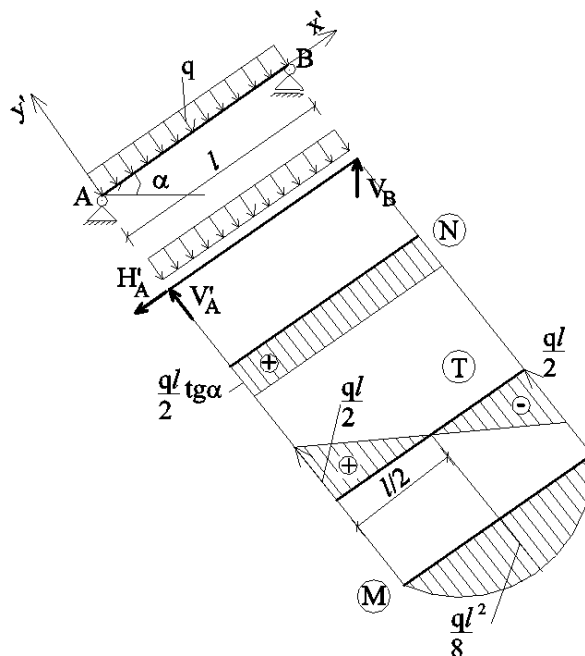


Fig. 1.16

1.2.7. Grinda din fig.1.17. este încărcată cu o forță concentrată verticală, aplicată la mijlocul grinzii, iar reazemul simplu este vertical.

Întrucât forța concentrată și reacțiunea din B sunt verticale, se optează pentru determinarea reacțiunilor în sistemul de referință  $xOy$ , respectiv proiectarea reacțiunii din A pe direcțiile verticală

și orizontală.

Se observă astfel că forța verticală va fi preluată simetric de cele două reazeme prin reacțiunile verticale  $V_A$  și  $V_B$ , iar în articulație reacțiunea nu are proiecție pe orizontală.

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow V_B x - \frac{Px}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_B = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow V_A x - \frac{Px}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_A = \frac{P}{2}$$

*Trasarea diagramelor de eforturi:*

Efortul axial este constant până în punctul de aplicație al forței concentrate, unde se produce un salt egal cu proiecția forței  $P$ , pe direcția axei barei ( $P \sin \alpha > 0$ ), după care efortul axial rămâne constant până în capătul B al barei unde diagrama se închide cu valoarea  $V_B \sin \alpha$ .

$$N_A = -V_A \sin \alpha = -\frac{P}{2} \sin \alpha$$

$$N_B = V_B \sin \alpha = \frac{P}{2} \sin \alpha$$

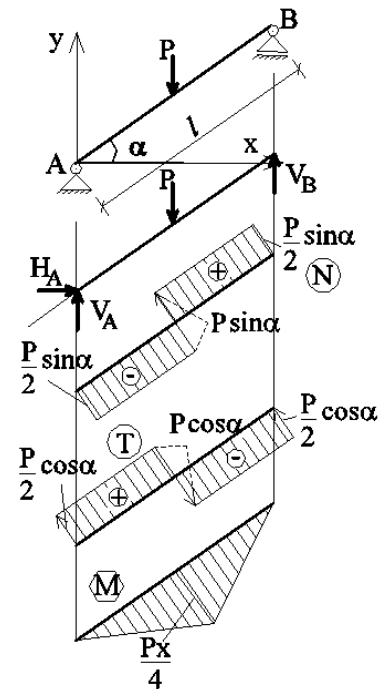


Fig. 1.17

Forța tăietoare este constantă până în punctul de aplicație al forței concentrate, unde se înregistrează un salt egal cu proiecția pe direcția perpendiculară pe axa barei a forței concentrate, în sensul acesteia ( $P \cos \alpha < 0$ ). Din acest punct, până în capătul B, pe bară nu mai acționează nici o forță, deci forța tăietoare este constantă, iar diagrama se închide în B cu valoarea  $V_B \cos \alpha$ .

$$T_A = V_A \cos \alpha = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

$$T_B = -V_B \cos \alpha = -\frac{P}{2} \cos \alpha$$

Diagrama de moment încovoietor este liniară pe cele două intervale generate de punctul de aplicație al forței concentrate, înregistrând un vârf în acest punct în sensul de acțiune al forței.

$$M_{A-I} = V_A x_i = \frac{P}{2} x_i \quad \text{întinde fibra de jos}$$

$$M_{I-B} = V_A x_i - P \left( x_i - \frac{x}{2} \right) = V_B (x - x_i) \quad \text{întinde fibra de jos}$$

(Am notat cu I punctul de aplicație al forței concentrate)

**1.2.8.** Aceeași încărcare este aplicată pe grinda din fig. 1.18 rezemată simplu în B perpendicular pe bară.

Întrucât reazemul simplu este orientat perpendicular pe bară, este avantajoasă alegerea sistemului de referință  $x'Oy'$ .

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$H'_A = P \sin \alpha$$

Componenta perpendiculară pe bară a forței concentrate  $P$ , descarcă simetric în cele două reazeme perpendiculare pe bară.

$$V'_A = V'_B = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

Forțele pe direcția axei barei:  $H'_A$ ,  $P \sin \alpha$ , dau variația efortului axial  $N$ :

$$N_A = H'_A = P \sin \alpha = N_1^{st}$$

$$N_1^{dr} = N_1^{st} - P \sin \alpha = 0$$

$$N_B = 0$$

$$T_A = V'_A = \frac{P}{2} \cos \alpha = T_1^{st}$$

$$T_1^{dr} = T_1^{st} - P \cos \alpha = -\frac{P}{2} \cos \alpha = T_{1-B} = T_B$$

$$M_1 = \frac{P}{2} \cos \alpha \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \cos \alpha$$

$$l \cos \alpha = x$$

$$M_1 = \frac{P}{2} \cos \alpha \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \cos \alpha \left. \vphantom{M_1} \right\} \Rightarrow M_1 = \frac{Px}{4}$$

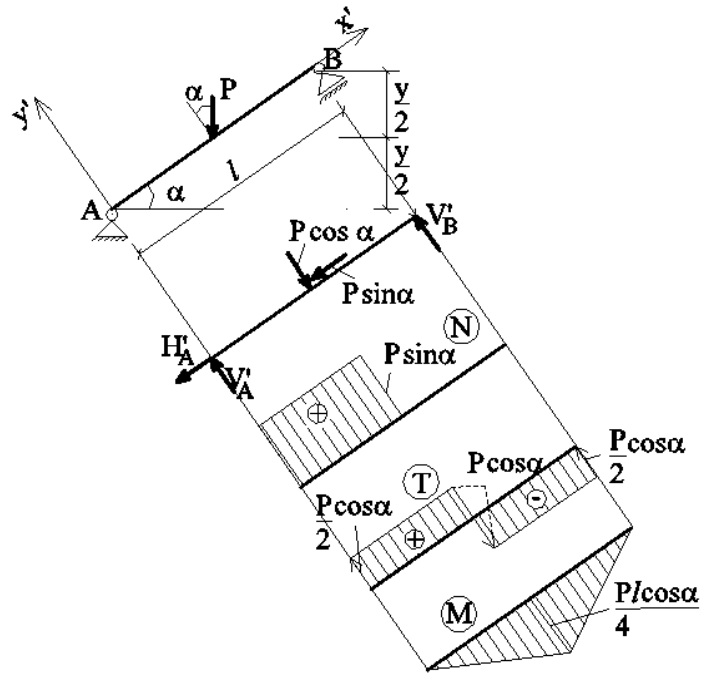
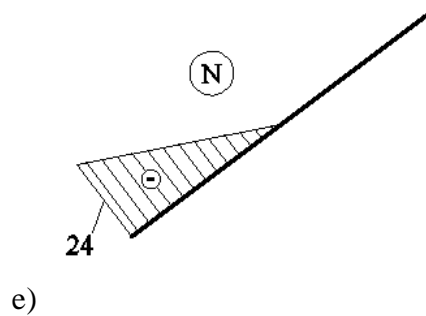
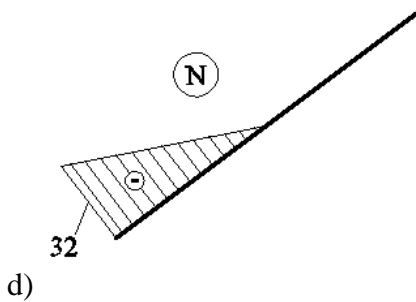
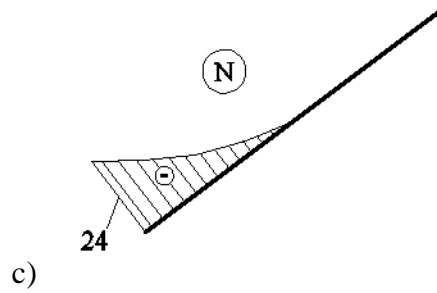
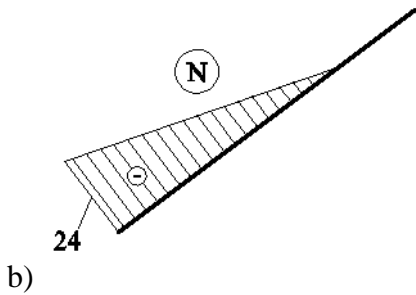
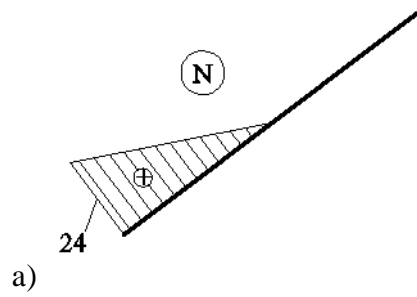
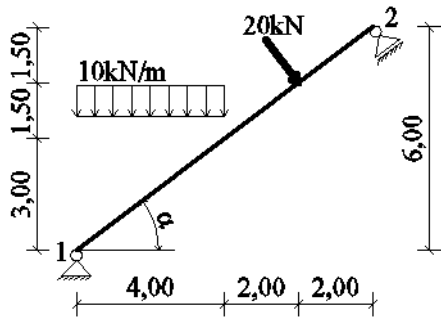


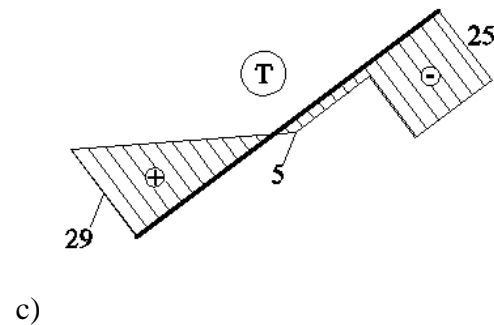
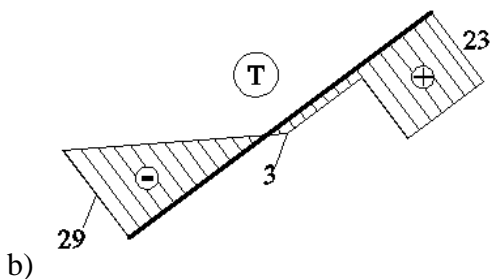
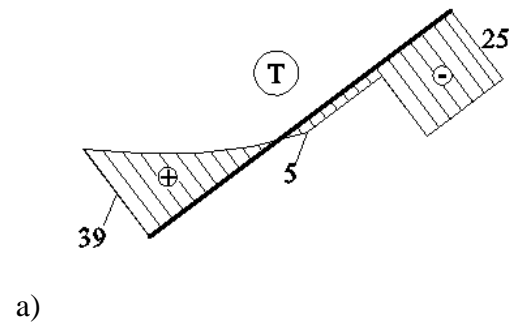
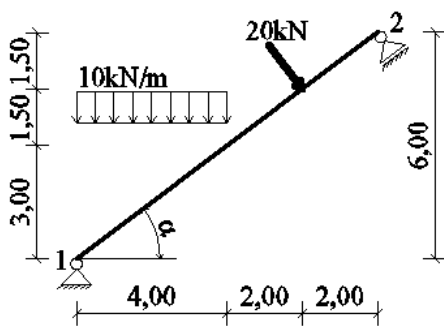
Fig. 1.18

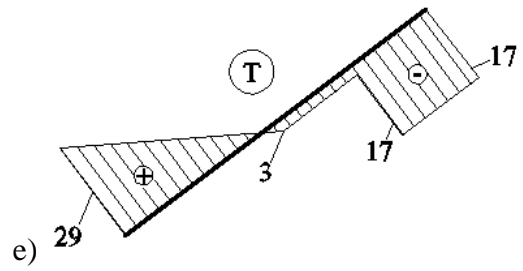
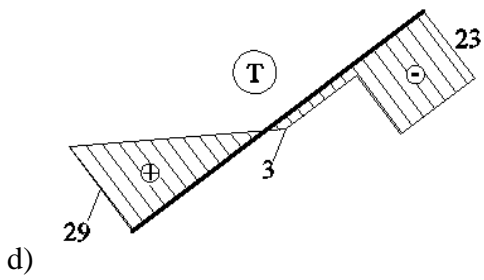
### 1.3. Probleme propuse

1.3.1. Pentru grinda din figură care dintre diagramele de efort axial este cea corectă?

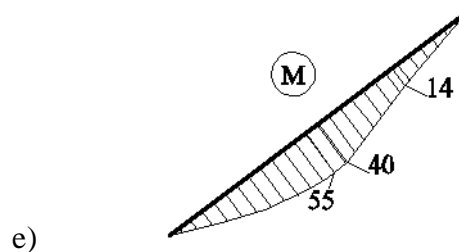
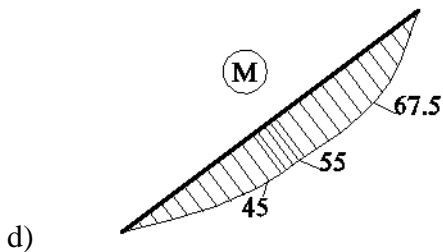
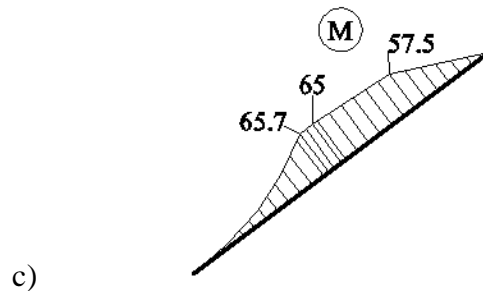
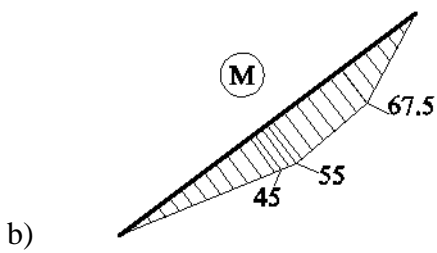
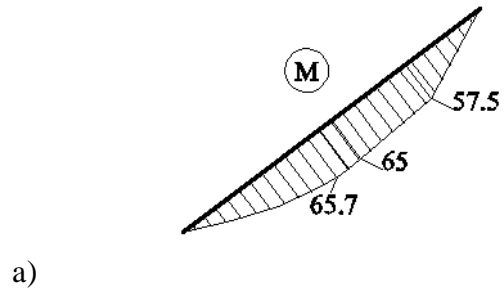
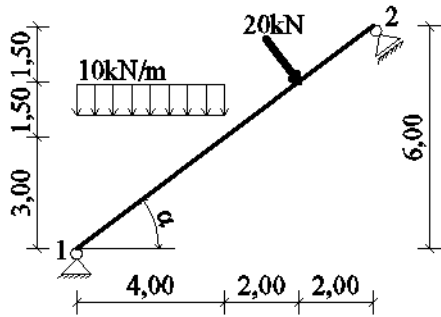


1.3.2. Pentru grinda din figură care dintre diagramele de forță tăietoare este cea corectă?

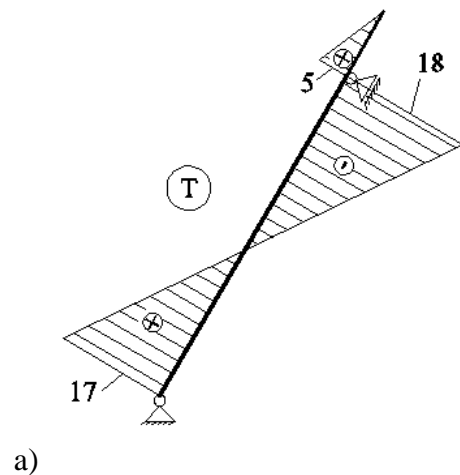
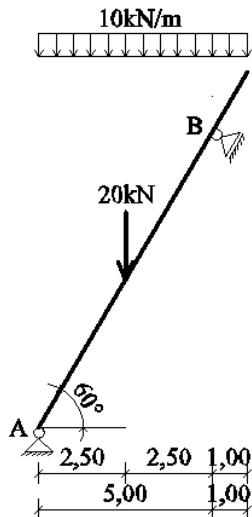


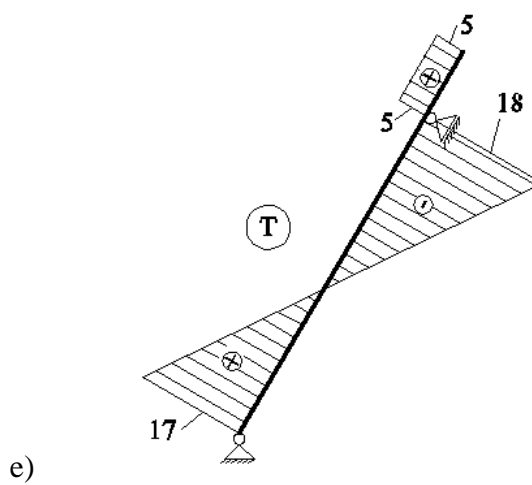
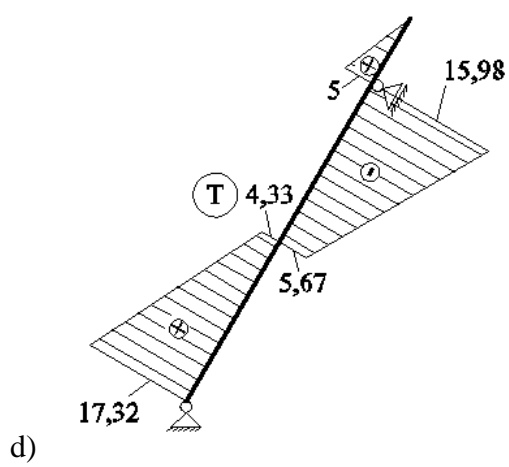
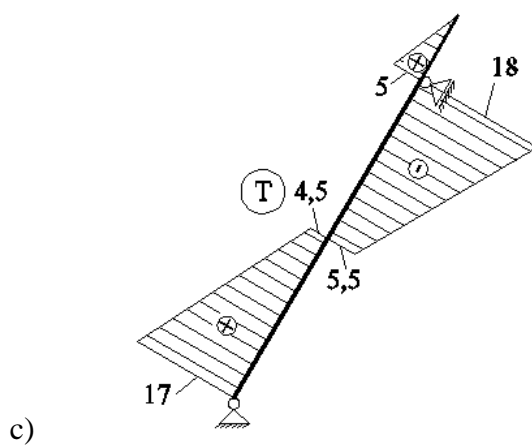
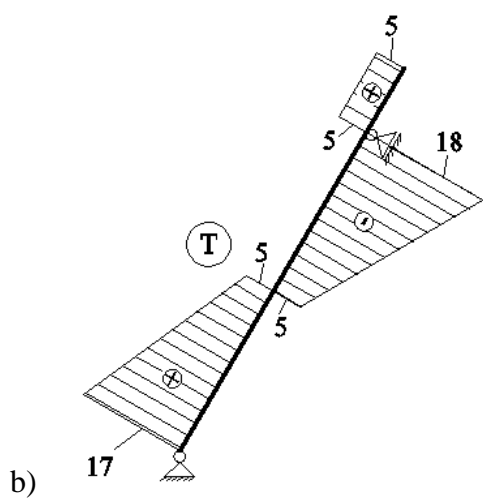


1.3.3. Pentru grinda din figură care dintre diagramele de moment încovoietor este cea corectă?

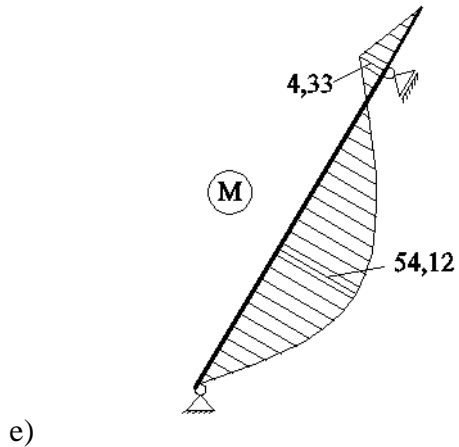
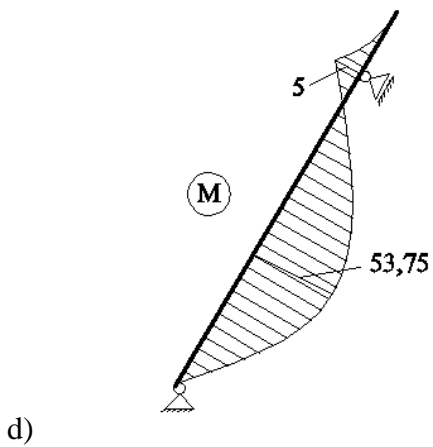
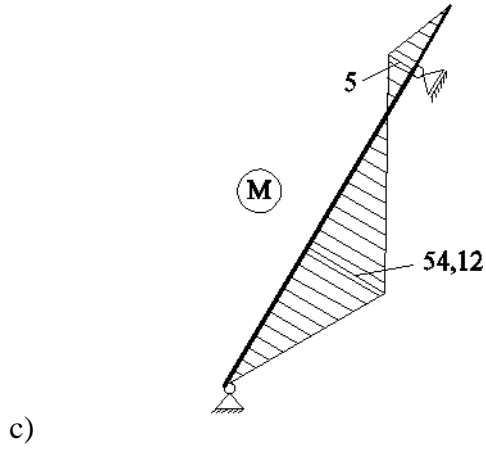
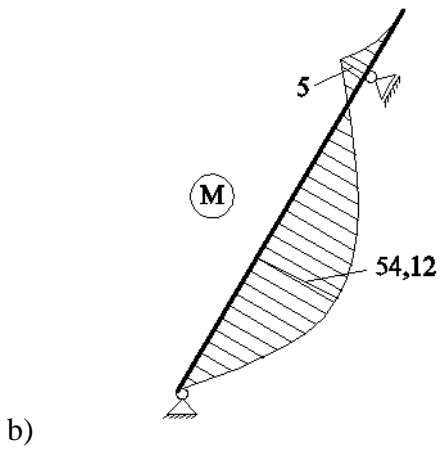
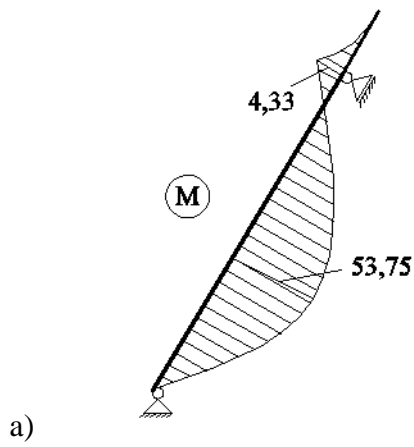
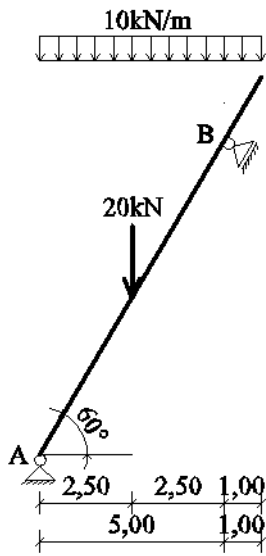


1.3.4. Să se identifice diagrama de forță tăietoare T corectă pentru structura din figura de mai jos.

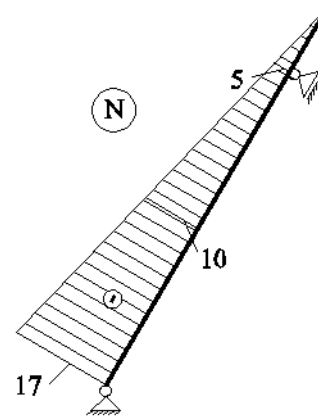
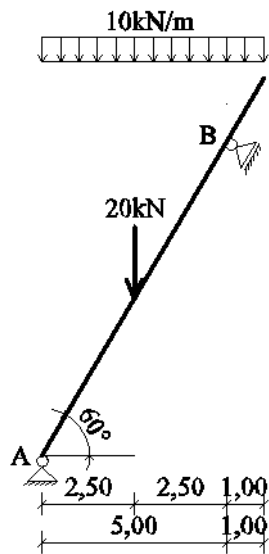




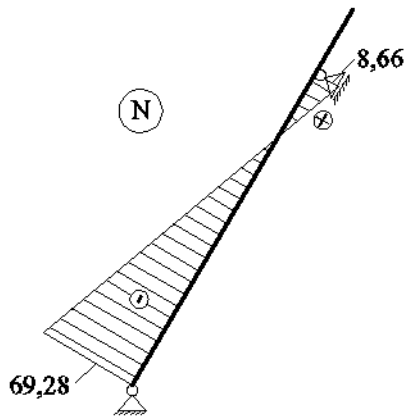
1.3.5. Să se identifice diagrama corectă de moment încovoietor  $M$  pentru structura din figura de mai jos.



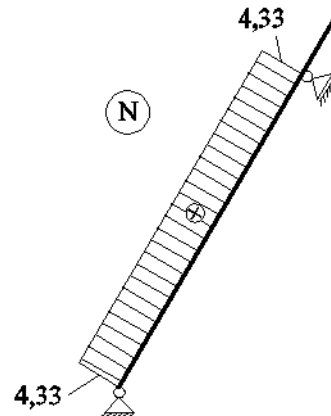
1.3.6. Să se identifice diagrama corectă de efort axial N pentru structura din figura de mai jos.



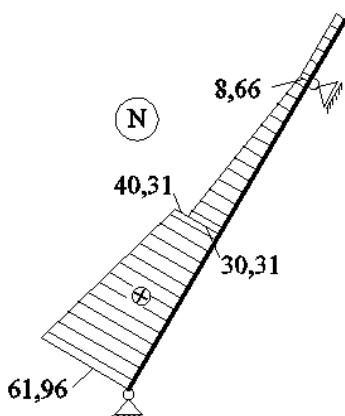
a)



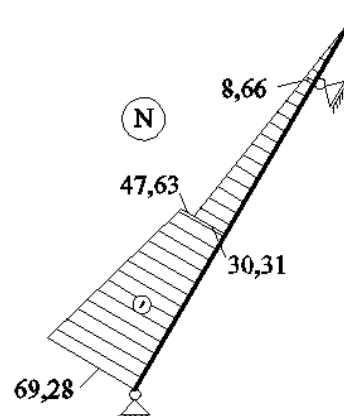
b)



c)



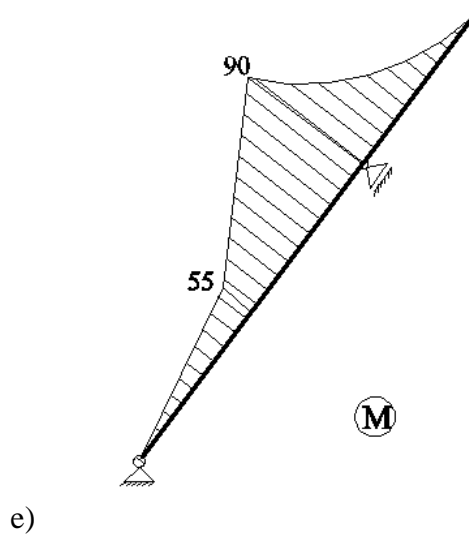
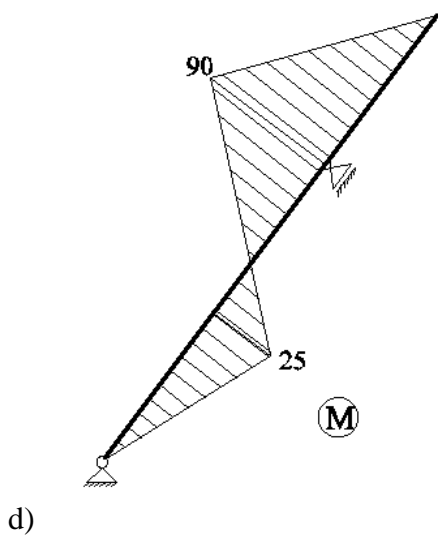
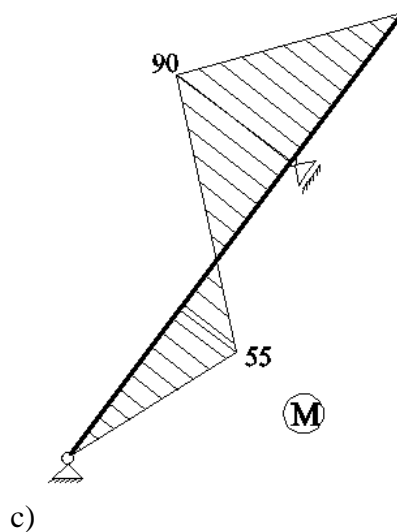
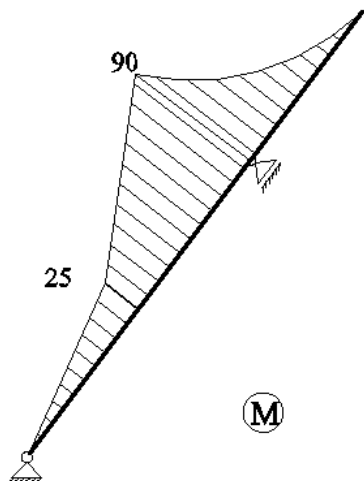
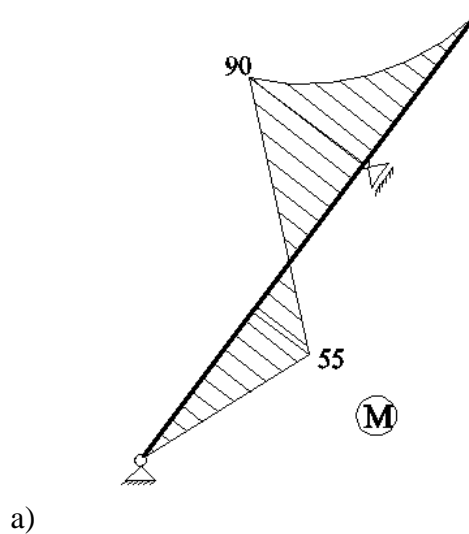
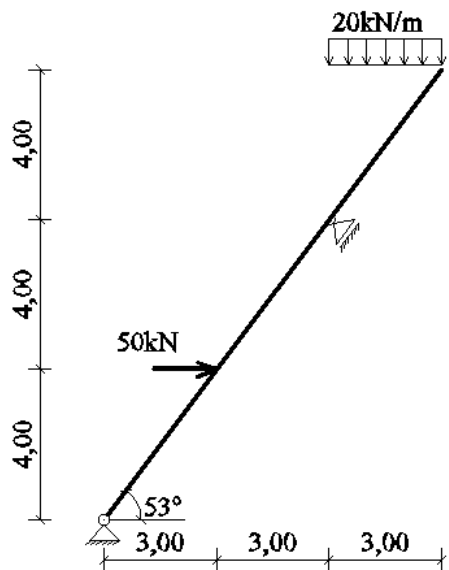
d)



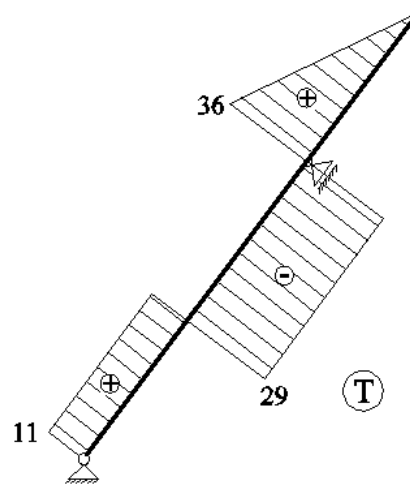
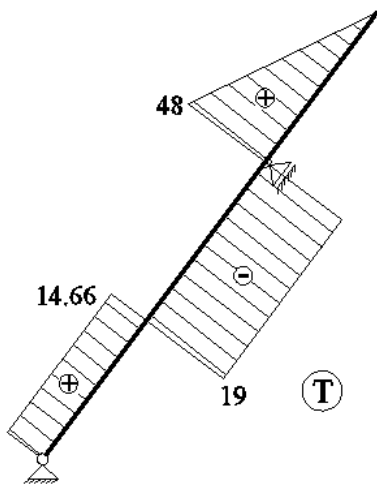
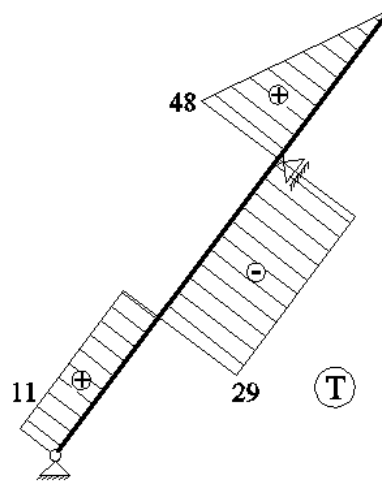
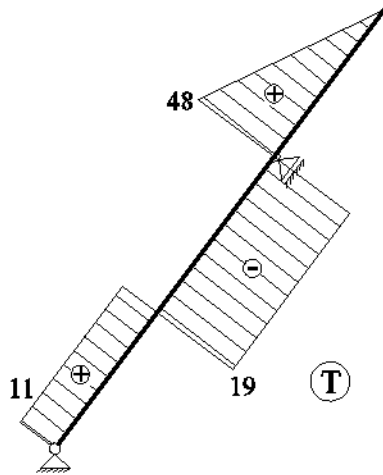
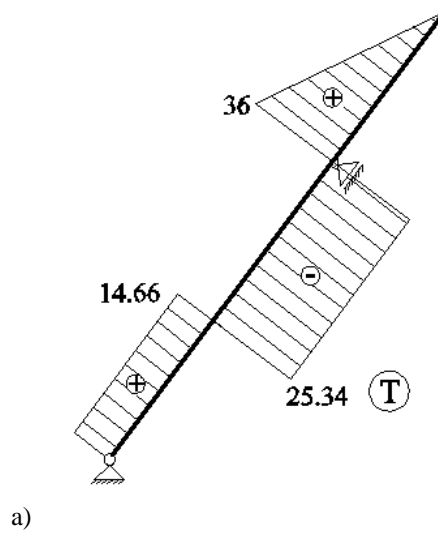
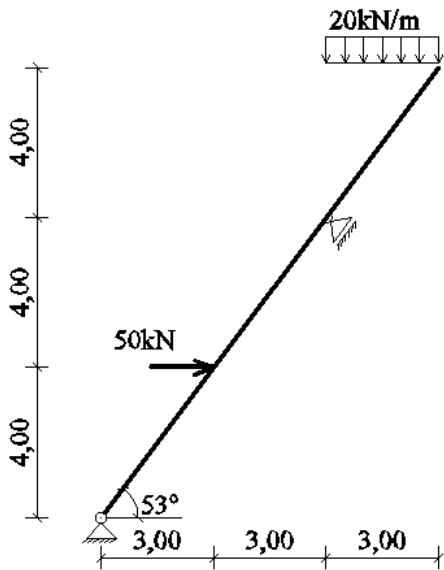
e)



1.3.7. Care este diagrama corectă de moment încovoiator  $M$  pentru următoarea grindă?

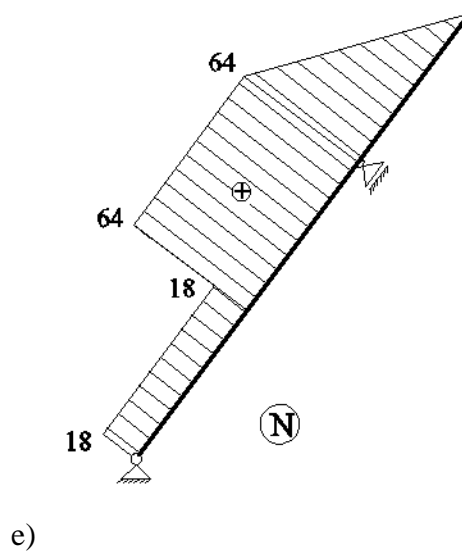
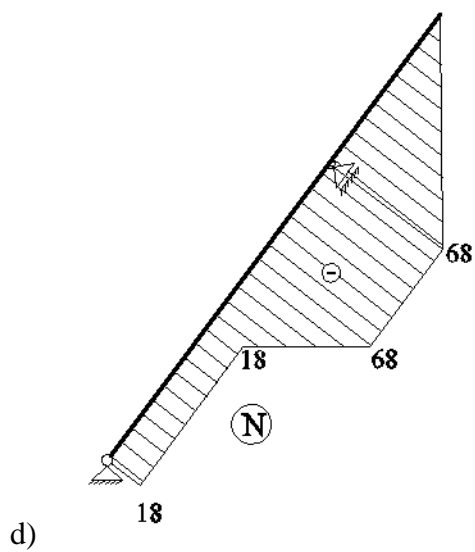
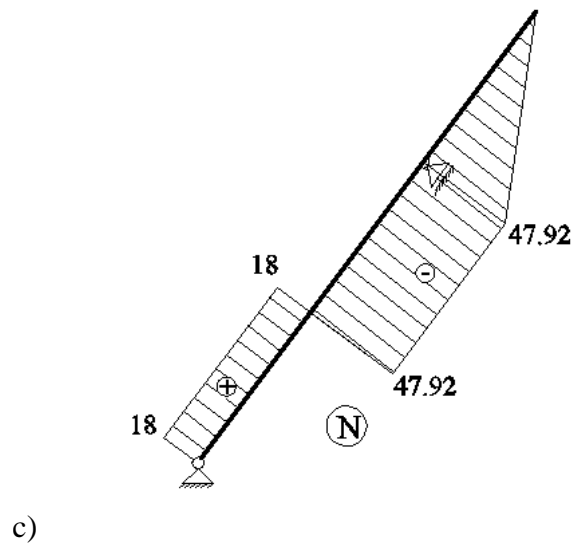
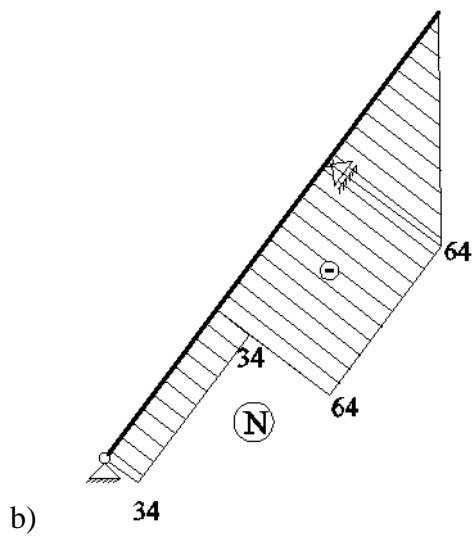
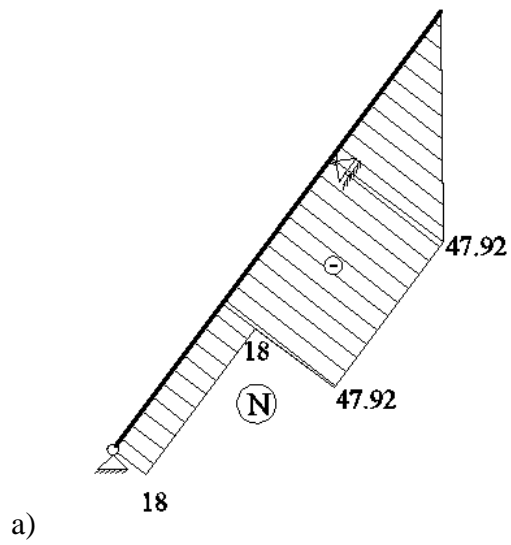
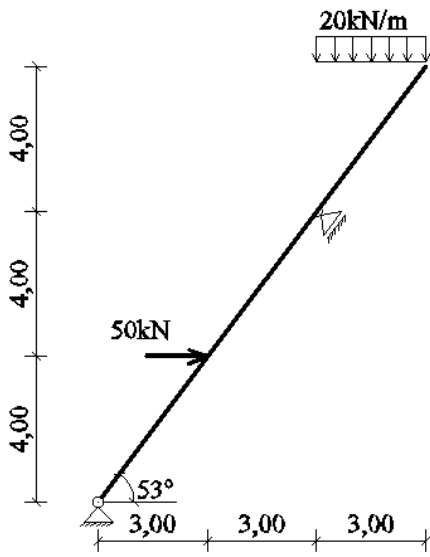


1.3.8. Care este diagrama corectă de forță tăietoare **T** pentru grinda din figura de mai jos?



1.3.9. Care este diagrama corectă de efort axial N, pentru grinda din figura de mai jos?

Ma ma



## Capitolul 2: Grinzi cu console și articulații (grinzi Gerber)

### 2.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Grinzile cu console și articulații sunt structuri static determinate alcătuite din bare drepte conectate între ele prin articulații. Legăturile simple cu terenul sunt dispuse astfel încât unul dintre reazeme să fie fix (articulație sau încastrare), iar celelalte mobile (reazeme simple).

Dacă forțele direct aplicate pe structură au proiecții pe direcția axei barei, acestea sunt preluate de reazemul fix.

În funcție de modul de dispunere a legăturilor simple cu terenul, în cadrul acestor ansambluri se disting două categorii de grinzi:

**Grinzile Principale (G.P.)** sunt cele care au asigurată invariabilitatea geometrică și fixarea față de teren, altfel spus, sunt grinzi static determinate (simplu rezemate, cu sau fără console sau grinzi încastrate la un capăt).

**Grinzile Secundare (G.S.)** sunt cele care nu au suficiente legături cu terenul (cel mult una) și descarcă pe grinzile principale în punctele de contact.

În funcție de dispunerea articulațiilor intermediare și a reazemelor cu terenul, se disting două configurații prezentate în figura 2.1, alături de schemele de descărcare specifice fiecăreia:

- a) Grinzile secundare alternează cu cele principale (fig. 2.1, a și b)
- b) Grinda principală se află la un capăt (fig. 2.1, c și d)

Rezolvarea grinzilor Gerber (determinarea reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi) se poate face fie pe structura în ansamblu, fie prin descompunerea acesteia în grinzi secundare și principale.

În general se optează pentru a doua variantă. În acest caz, principalele etape parcurse pentru determinarea diagramelor de eforturi pe o grindă Gerber sunt:

- Se detectează tipul grinzilor (GP, GS) după numărul legăturilor cu terenul existente pe fiecare.
- Se desprind din structură grinzile secundare (care au unul sau nici un reazem cu terenul) și se calculează reacțiunile, produse de încărcările direct aplicate.
- Se izolează grinzile principale și se încarcă cu forțele direct aplicate pe ele și cu reacțiunile din grinzile secundare în punctele de contact, luate ca acțiuni (egale și de sens contrar). Din această încărcare se determină reacțiunile grinzilor principale.
- Diagramele de eforturi se pot trasa fie pe structura în ansamblu, fie pe fiecare grindă în parte, urmând apoi asamblarea diagramelor parțiale.

*În cazul în care grinda principală se află la un capăt (Fig.2.1, c și d), reacțiunile se pot calcula ușor fără descompunerea ansamblului în grinzi componente, scriind succesiv ecuații de moment nul față de articulațiile intermediare, pornind de la cea mai îndepărtată grindă de cea principală. Astfel, în fiecare ecuație va interveni o singură necunoscută.*

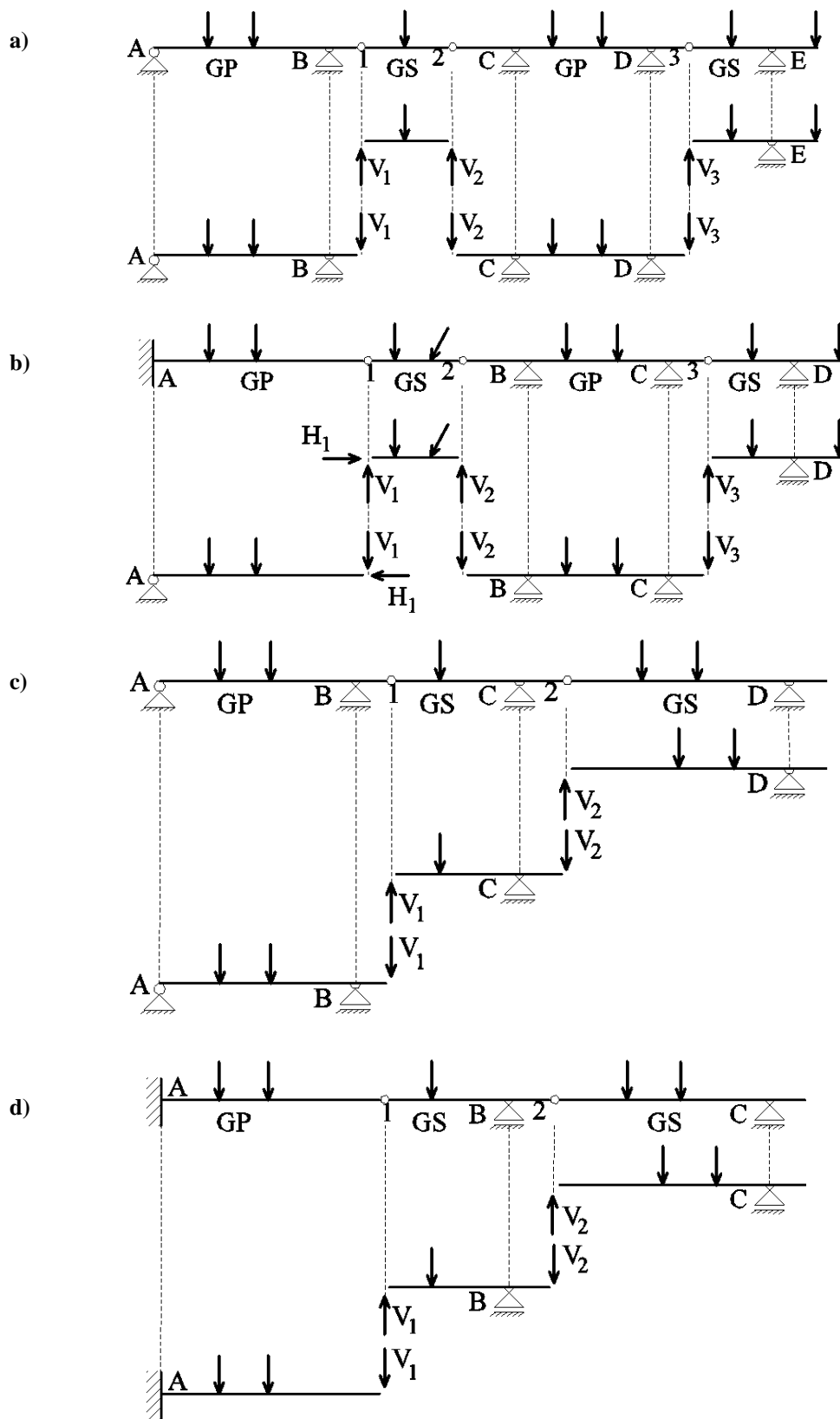


Fig. 2.1

În ceea ce privește trasarea diagramelor de eforturi sunt necesare următoarele precizări:

- Articulația intermediară transmite forța tăietoare și efortul axial și anulează momentul încovoietor, fără să modifice legile de variație ale eforturilor.
- Forțele concentrate verticale aplicate în articulațiile intermediare sunt preluate de grinda principală sau de grinda secundară cea mai apropiată de cea principală.  
Ele produc:
  - În diagrama de forță tăietoare - salturi în sensul de aplicare, egale cu valoarea acestora.
  - În diagrama de moment încovoietor - schimarea pantei, în sensul de aplicare al forței (în articulație momentul rămâne nul).
- Aplicarea unui moment concentrat de o parte a unei articulații intermediare produce în diagrama de moment încovoietor un salt egal cu valoarea momentului concentrat, pe fibra întinsă. De cealaltă parte a articulației momentul este egal cu zero.

## 2.2. Exemplu de calcul

Grinda Gerber din figura 2.2 va fi rezolvată prin descompunere în grinzile componente. Structura se încadrează în categoria „a)” prezentată mai sus, fiind alcătuită din grinda principală A-I, grinda secundară I-2 și grinda principală 2-C-D.

*Grinda secundară I-2:*

- încărcări verticale:  $P \cdot \sin \alpha = 34,64 \text{ kN}$ ,  $V_1$ ,  $V_2$

- încărcări orizontale:  $P \cdot \cos \alpha = 20 \text{ kN}$ ,  $H_1$

Componenta orizontală a forței înclinate se transmite prin articulația intermediară 1 ( $H_1$ ) și este preluată de reazemul fix A.

Încărcarea verticală este simetrică  $\Rightarrow$  descarcă simetric în cele două reazeme:

$$V_1 = V_2 = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2} = 17,32 \text{ kN}$$

$$H_1 = P \cdot \sin \alpha = 20 \text{ kN}$$

*Grinda principală A-I:*

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = H_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 17,32 \cdot 6 - 20 \cdot 6 + V_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_B = 44,78 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 17,32 \cdot 1 - 20 \cdot 1 - V_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_A = 7,46 \text{ kN}$$

*Verificare:*

$$\sum F_y = 17,32 - 44,78 + 20 + 7,46 = 0$$

*Grinda principală 2-C-D:*

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 17,32 \cdot 2 + V_D \cdot 4 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 30 \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_D = 40,84 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -17,32 \cdot 6 + V_C \cdot 4 - 8 \cdot 6 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_D = 54,48 \text{ kN}$$

*Verificare:*

$$\sum F_y = 40,84 + 54,48 - 8 \times 6 - 30 - 17,32 = 0$$

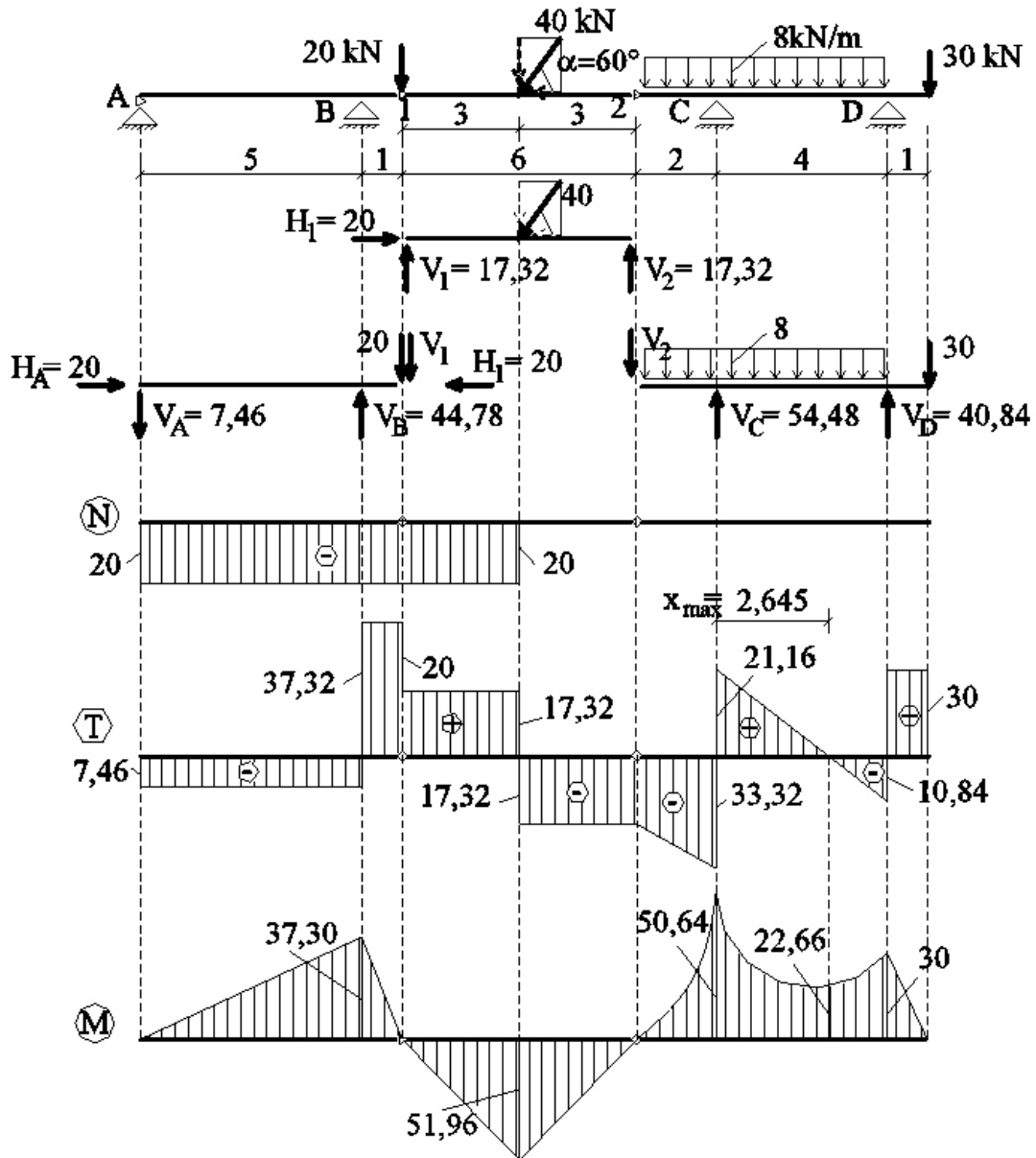


Fig. 2.2

*Trasarea diagramei de forță tăietoare*

Între A și B, bara nu este încărcată  $\Rightarrow$  forța tăietoare este constantă și egală cu valoarea reacțiunii verticale din A,  $T_A < 0$  ( $V_A = 7,46$  kN, rotește în sens antiorar).

În dreptul forțelor concentrate (direct aplicate și reacțiuni din reazemele cu terenul) se produc salturi în sensul și egale cu valoarea acestora.

Pe intervalele 2-C și C-D, forța tăietoare variază liniar, iar dreptele aferente celor două intervale sunt paralele, întrucât încărcarea are aceeași valoare pe ambele porțiuni.

În articulația intermediară 2 forța tăietoare are aceeași valoare la stânga și la dreapta ei, respectiv forțele tăietoare în capătul 2, pe cele două grinzi (secundară și principală), au aceeași valoare.

$$T_A = -V_A = 7,46 \text{ kN} = T_{A-1} = T_B^{\text{st}}$$

$$T_B^{\text{dr}} = T_B^{\text{st}} + V_B = 37,32 \cdot \text{kN} = T_{B-1} = T_1^{\text{st}}$$

$$T_1^{\text{dr}} = T_1^{\text{st}} - 20 = 17,32 \cdot \text{kN} = T_{1-3} = T_3^{\text{st}}$$

$$T_3^{\text{dr}} = T_3^{\text{st}} - 40 \sin \alpha = -17,32 \cdot \text{kN} = T_{3-2} = T_2$$

$$T_C^{st} = T_2 - 8 \cdot 2 = -17,32 - 8 \cdot 2 = -33,32 \text{ kN}$$

$$T_C^{dr} = T_C^{st} + V_C = -33,32 + 54,48 = 21,16 \text{ kN}$$

Pe intervalul  $C-D$ , forța tăietoare schimbă semnul; se anulează la distanța  $x_{max}$  față de reazemul  $C$ , egală cu raportul dintre forța tăietoare din capătul față de care se calculează distanța și valoarea forței uniform distribuite care acționează pe acel interval.

$$x_{max} = \frac{T_C^{dr}}{q} = \frac{21,16}{8} = 2,645 \text{ m}$$

$$T_D^{st} = T_C^{dr} - 8 \cdot 4 = 21,16 - 8 \cdot 4 = -10,84 \text{ kN}$$

$$T_D^{dr} = T_D^{st} + V_D = -10,84 + 40,84 = 30 \text{ kN}$$

*Trasarea diagramei de moment încovoietor*

$$M_B = 7,46 \cdot 5 = 37,30 \text{ kNm}$$

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = 0$$

$$M_I = 17,32 \times 3 = 51,96 \text{ kNm pe grinda secundară}$$

$$M_C = -17,32 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = -50,64 \text{ kNm pe grinda principală}$$

$$M_D = -30 \cdot 1 = -30 \text{ kNm pe grinda principală}$$

Pe intervalul  $C-D$  momentul încovoietor înregistrează un punct de extrem, iar valoarea acestuia se poate calcula în modul următor:

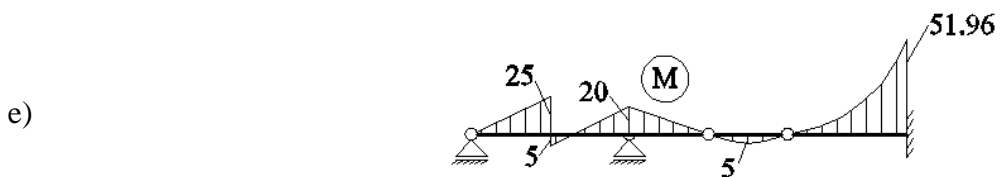
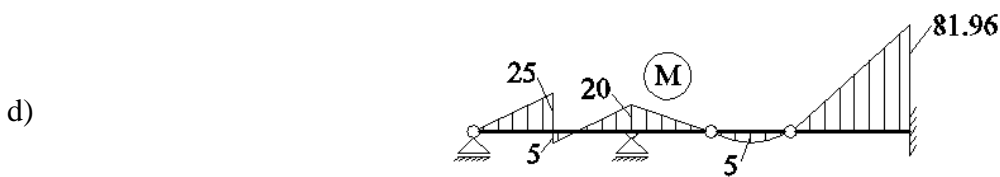
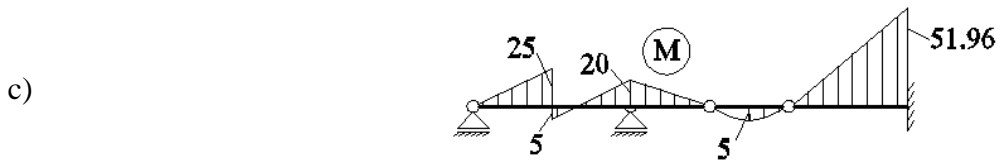
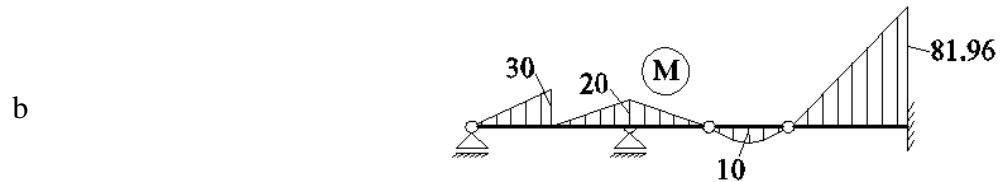
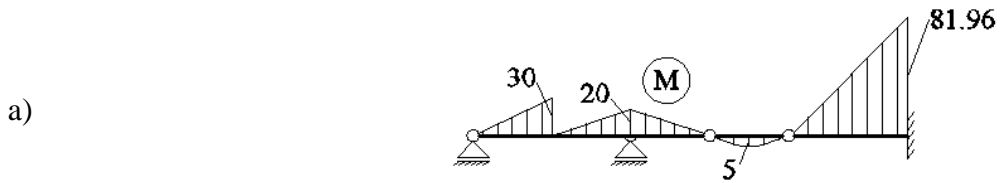
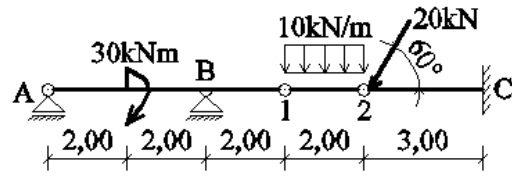
Pentru bara  $C-D$ , forța tăietoare pe capătul  $C$  este  $T_C^{dr} = 21,16 \text{ kN}$ , iar momentul încovoietor în  $C$  este  $M_C = -50,64 \text{ kNm}$ . Parcurgând bara de la  $C$  spre  $D$ , la distanța  $x_{max} = 2,645 \text{ m}$  de  $C$ , momentul încovoietor va avea valoarea:

$$M_{max}^{C-D} = T_C^{dr} x_{max} - q x_{max} \frac{x_{max}}{2} - M_C = 21,16 \cdot 2,645 - 8 \cdot 2,645 \frac{2,645}{2} - 50,64 = -22,66 \text{ kNm}$$

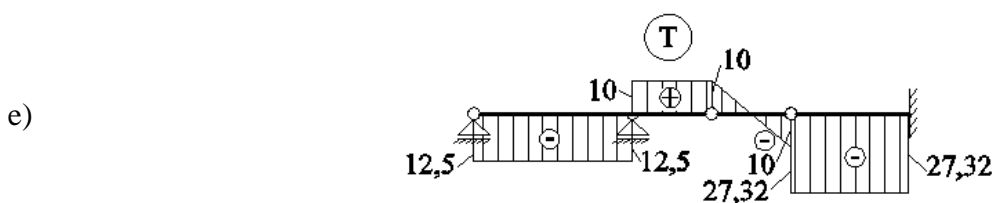
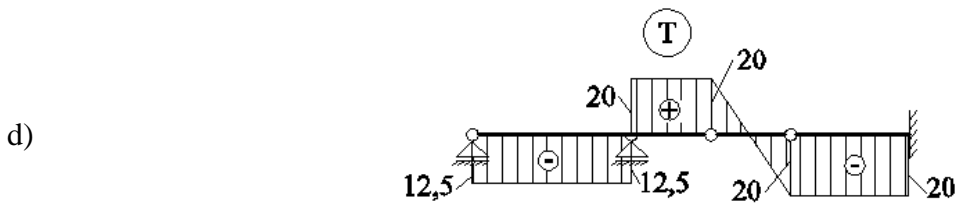
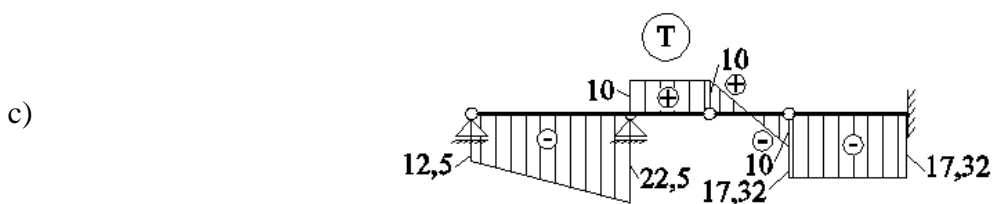
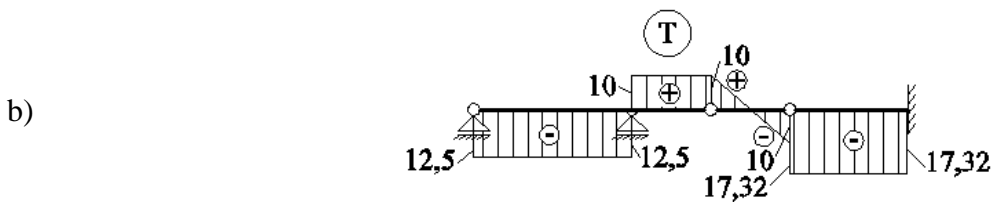
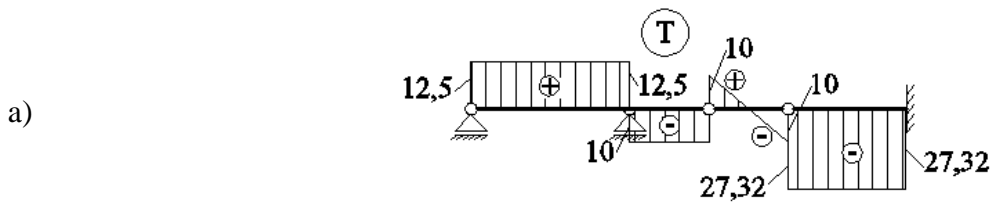
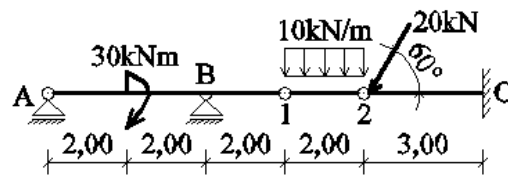


### 2.3. Probleme propuse

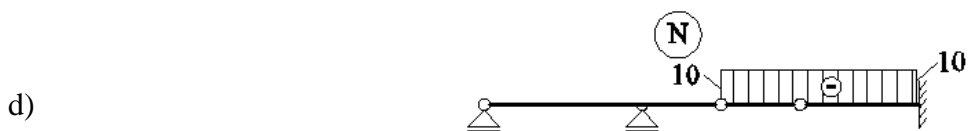
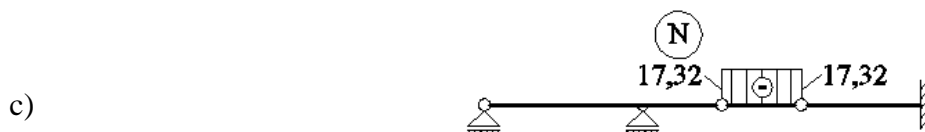
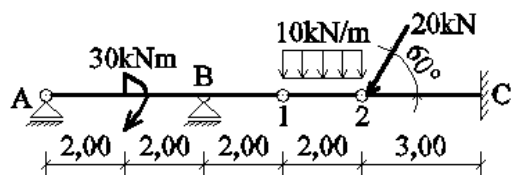
2.3.1. Să se identifice diagrama corectă de moment încovoietor  $M$  pentru structura din figură.



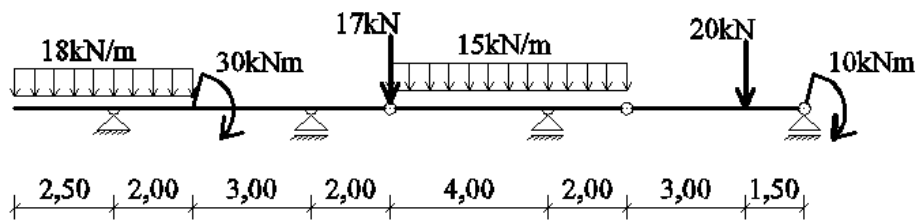
2.3.2. Să se identifice diagrama corectă de forță tăietoare T pentru structura din figură.



2.3.3. Să se identifice diagrama corectă de efort axial N pentru structura din figură.

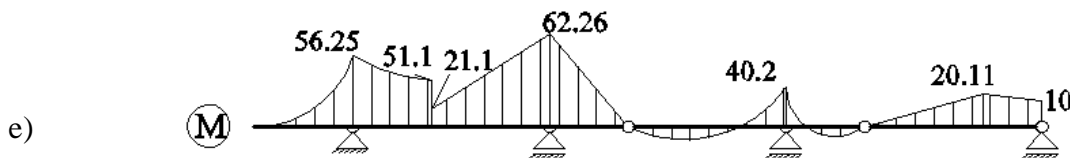
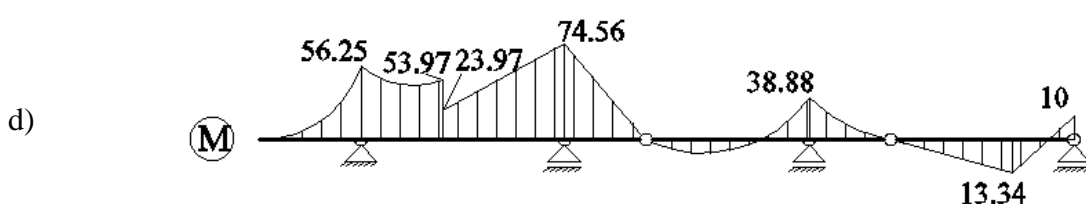
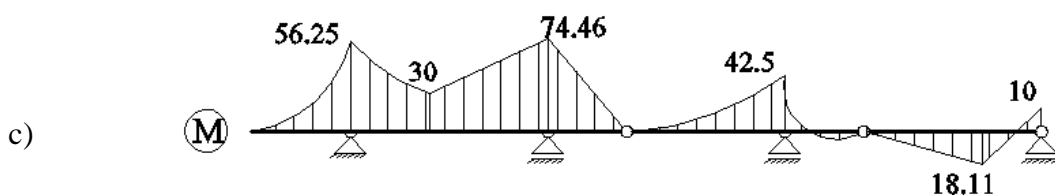
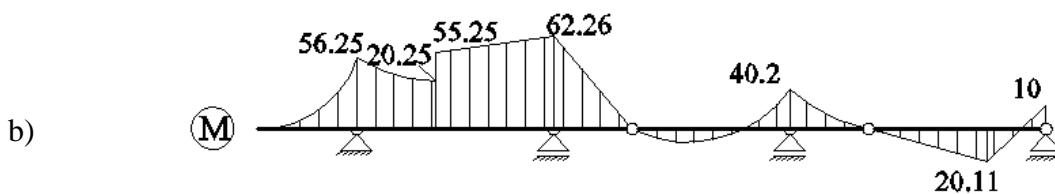
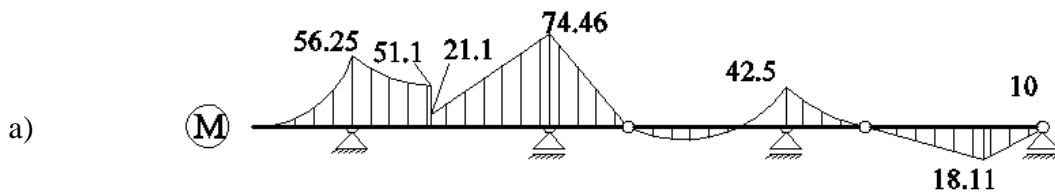
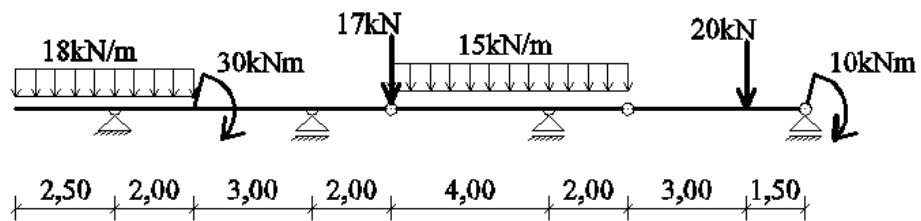


2.3.4. Care este diagrama corectă de forță tăietoare T pentru următoarea grindă Gerber?

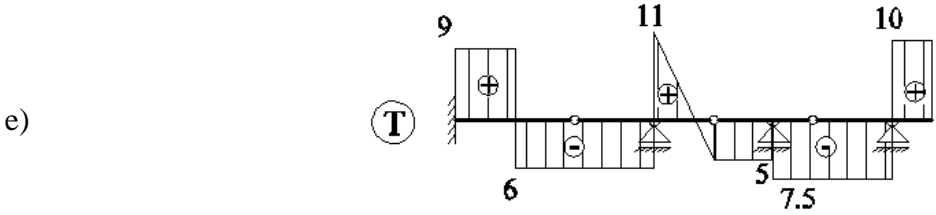
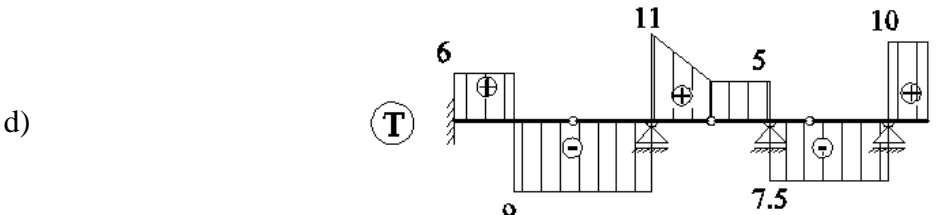
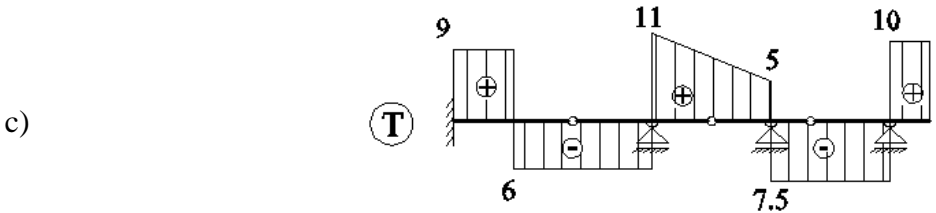
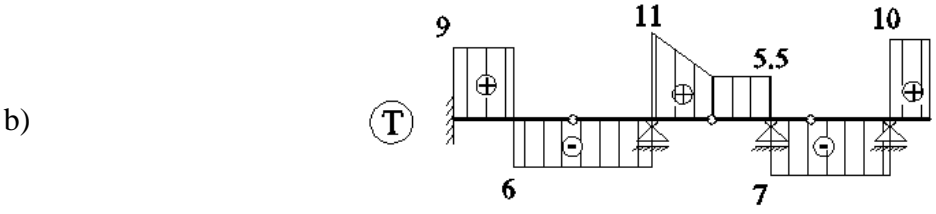
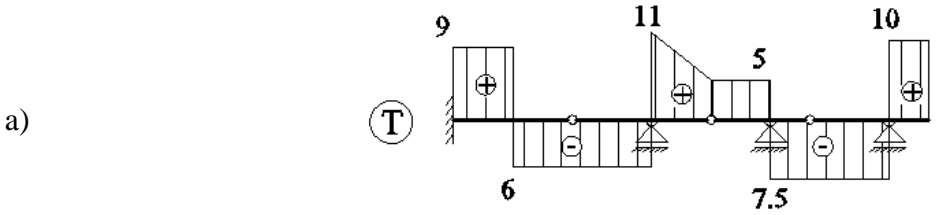
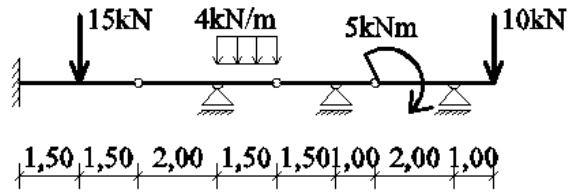


- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

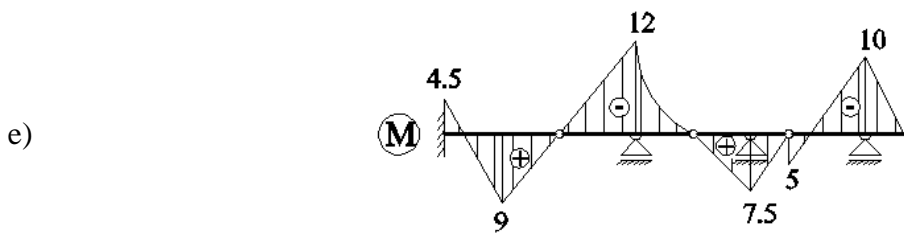
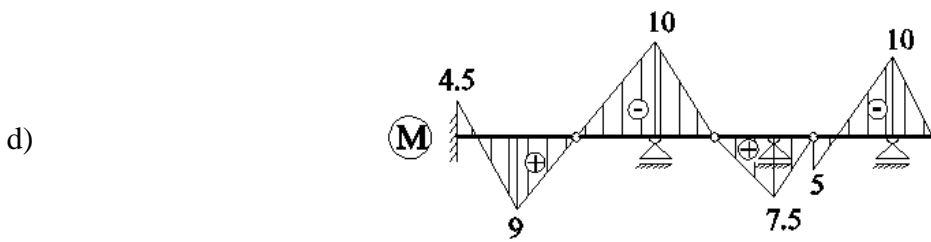
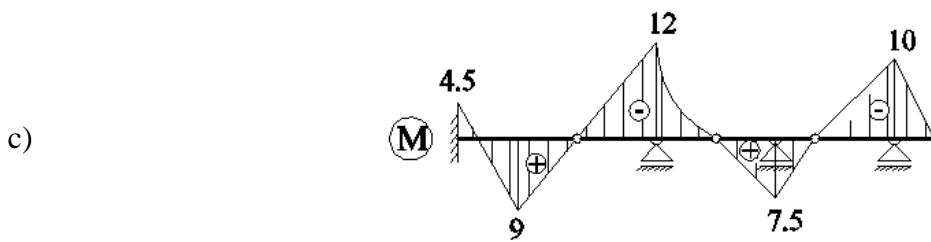
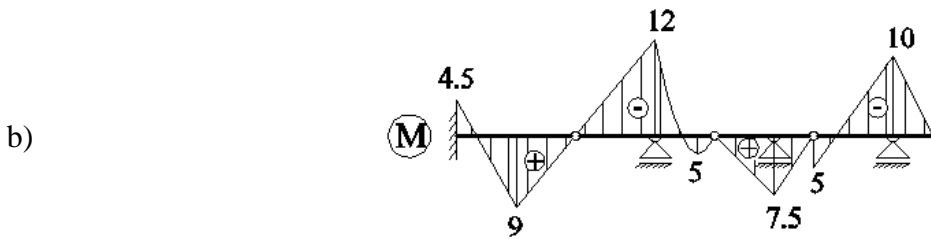
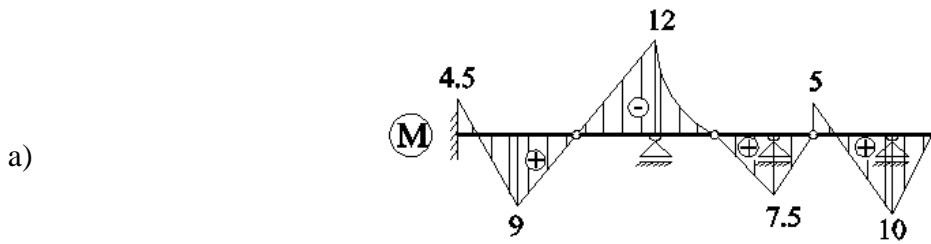
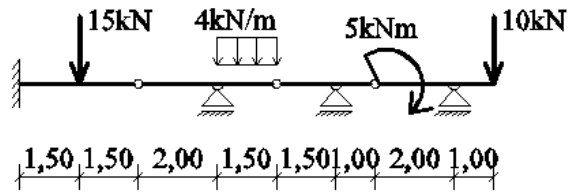
2.3.5. Care este diagrama corectă de moment încovoietor  $M$  pentru următoarea grindă Gerber?



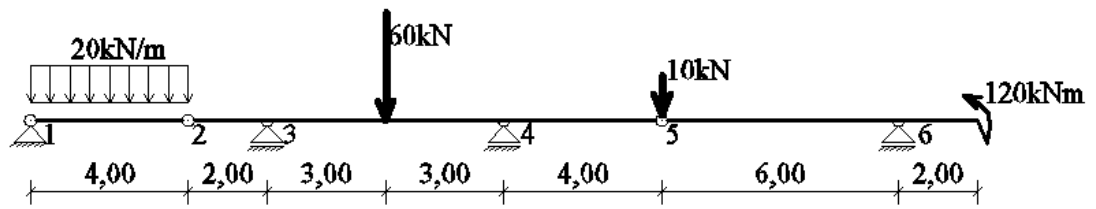
2.3.6. Să se identifice diagrama de forță tăietoare corectă pentru structura din figură.



2.3.7. Să se identifice diagrama de moment încovoietor corectă pentru structura din figură.



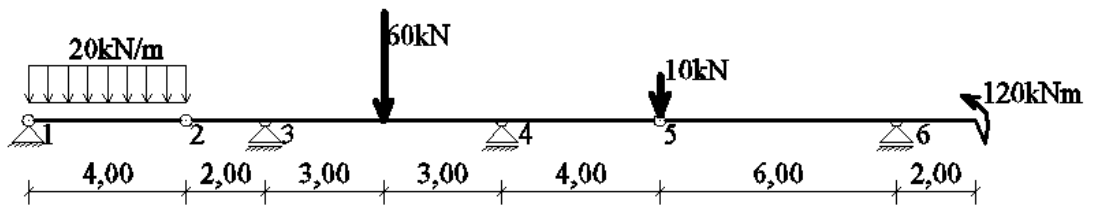
2.3.8. Pentru grinda din figură care dintre diagramele de forță tăietoare este cea corectă?



- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

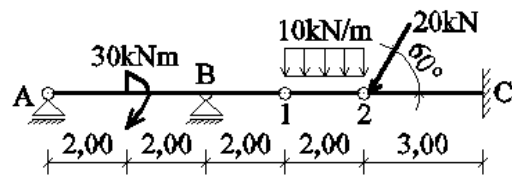


2.3.9. Pentru grinda din figură care dintre diagramele de moment încovoietor este cea corectă?



- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

2.3.10. Să se identifice momentul încovoiator maxim  $M_{\max}$  pentru structura din figură.



- a) 10,00 KNm
- b) 5,00 KNm
- c) -5,00 KNm
- d) 30,00 KNm
- e) 51,96 KNm

## Capitolul 3: Cadre static determinate

### 3.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Cadrelle sunt structuri alcătuite din bare drepte (sau din bare drepte și curbe) conectate în noduri rigide sau rigide și articulate. Aceste structuri sunt solicitate predominant la încovoiere.

**Nodul rigid** - are trei grade de libertate: 2 translații după 2 direcții din plan și o rotire;  
- deplasările tuturor capetelor de bare concurente într-un nod rigid sunt egale;  
- tangentele duse în nod la axele deformatate ale barelor formează între ele aceleași unghiuri cu cele pe care le fac barele în poziția inițială, nedeformată.

*Nodul rigid se deplasează ca un corp rigid, fără a permite rotații relative între capetele barelor concurente în el.*

**Nodul articulat** - are două grade de libertate: translații după cele 2 direcții din plan;  
- barele se pot roti liber în nod.

*Nodul articulat nu transmite moment încovoietor și permite rotația relativă a capetelor barelor conectate.*

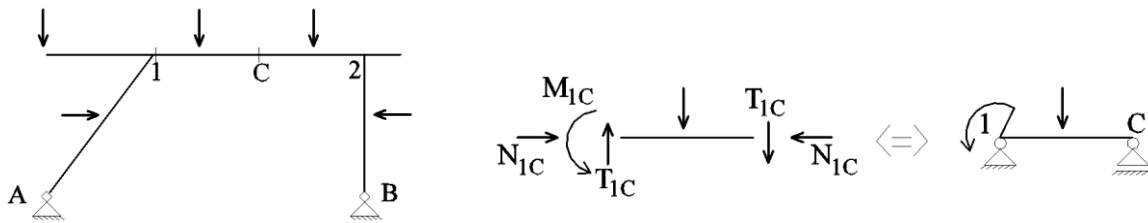
Reacțiunile dezvoltate în structurile de rezemare ale cadrelor plane se determină din ecuații de echilibru, în funcție de tipul structurii:

- Cadre simplu rezemate: două ecuații de sumă de moment nul față de cele două rezeme cu terenul și o ecuație de sumă de forțe egală cu zero după o direcție din plan.  
Verificarea corectitudinii calculului se face scriind sumă de forțe după altă direcție din plan. Dacă rezultatul sumei este zero, valorile reacțiunilor calculate, pentru încărcările considerate sunt corecte.
- Cadre cu trei articulații: două ecuații de echilibru global al structurii față de cele două rezeme cu terenul și două ecuații de sumă de moment nul față de articulația intermediară de o parte și de alta a acesteia.  
Verificarea corectitudinii calculului se face scriind sumă de forțe după două direcții distincte din plan. Dacă rezultatul sumelor este zero, valorile reacțiunilor calculate, pentru încărcările considerate sunt corecte.

Vom prezenta două metode de trasare a diagramelor de eforturi:

- A.** Diagramele de eforturi se trasează prin parcurgerea structurii într-un sens stabilit în prealabil, urmărind, pe fiecare interval, încărcarea exterioară și direcția barelor. Eforturile în secțiunile caracteristice (puncte care marchează modificarea încărcării, schimbarea direcției axei barelor, ș.a.) se calculează cu metoda secțiunilor.  
Diagrama de moment încovoietor se trasează în concordanță cu diagrama de forță tăietoare.
- B.** O altă metodă de trasare a diagramelor de eforturi pe cadre constă în descompunerea cadrului în părțile sale componente: BARE și NODURI. Se calculează valoarea momentului încovoietor la capetele barelor. Se izolează barele din structură (Fig.3.1.) și se încarcă cu efectul părților înlăturate: forțele tăietoare și momentele încovoietoare de la capete. Altfel spus, fiecare bară a cadrului se consideră simplu rezemată și se încarcă cu forțele direct aplicate pe ea și cu momentele încovoietoare de la capete (valori calculate anterior).  
Pentru fiecare bară se trasează diagrama de forță tăietoare și de moment încovoietor. Eforturile axiale în barele cadrului se determină izolând nodurile cadrului prin secționarea capetelor barelor concurente în nodul respectiv și încărcarea acestuia cu forțele exterioare direct aplicate și cu efectul barelor secționate: forțele tăietoare de la capetele barelor

(determinate în prealabil) și cu eforturile axiale - necunoscute. Pentru fiecare nod se scriu ecuații de echilibru exprimate prin sumă de forțe egale cu zero după două direcții din plan. Eforturile axiale din barele structurii se determină din condiția de echilibru a nodurilor după izolarea prealabilă a acestora.



**Fig. 3.1**

De la caz la caz, se abordează una dintre cele două variante, cealaltă putând fi folosită ca verificare.

## 3.2. Exemple de calcul

3.2.1. Structura din figura 3.2 este un cadru simplu rezemat.

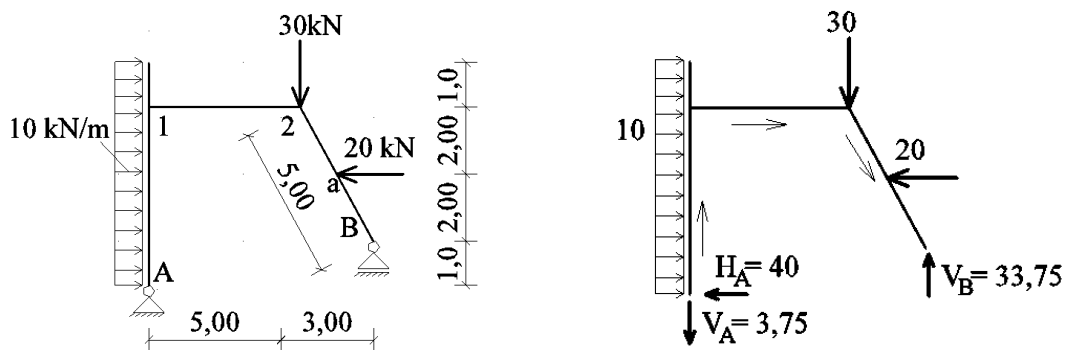


Fig. 3.2

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 10 \cdot 6 - H_A - 20 = 0 && \Rightarrow H_A = 40 \text{ kN} \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 8V_B + 20 \cdot 3 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 30 \cdot 3 = 0 && \Rightarrow V_B = 33,75 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -8V_A + H_A \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot 2 - 30 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = 0 && \Rightarrow V_A = 3,75 \text{ kN} \end{aligned}$$

Verificare:  $\sum F_y = 33,75 - 3,75 - 30 = 0$

În ecuațiile de echilibru contează doar sensul relativ al momentelor date de forțe. Semnul + sau - se utilizează doar pentru a exprima acest lucru, sensul de referință + se alege arbitrar.

Diagramele de eforturi (Fig.3.2.)

Moment:

- pe consolă – capăt liber:  $M_{1C} = -10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ kNm}$  (fibra întinsă este cea exterioară)

$$M_{1A} = 40 \cdot 5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 = 75 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 40 \cdot 5 - 10 \cdot 6 \cdot 2 = 80 \text{ kNm}$$

- se verifică echilibrul nodului 1 ținând cont de sensurile de rotire ale momentelor calculate pe capetele barelor.

$$M_{21} = M_{2a} = -3,75 \cdot 5 + 40 \cdot 5 - 10 \cdot 6 \cdot 2 = 61,25 \text{ kNm (considerând forțele din stânga)}, \text{ sau}$$

$$M_{21} = M_{2a} = 33,75 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = 61,25 \text{ kNm (considerând forțele din dreapta)}$$

Acțiunea forței concentrate în nodul 2 nu afectează valoarea momentului încovoietor la capetele barelor.

Pentru calculul momentului încovoietor într-o secțiune se ține cont numai de fibra întinsă de către fiecare forță, indiferent de corpul pe care se lucrează.

Punctul în care se determină momentul încovoietor se consideră fix.

$$M_{aB} = 33,75 \cdot 1,5 = 50,625 \text{ kNm}$$

Pe barele neîncărcate cu forțe se poate trasa diagrama de moment încovoietor unind cu segmente de dreaptă valorile calculate la capetele acestora.

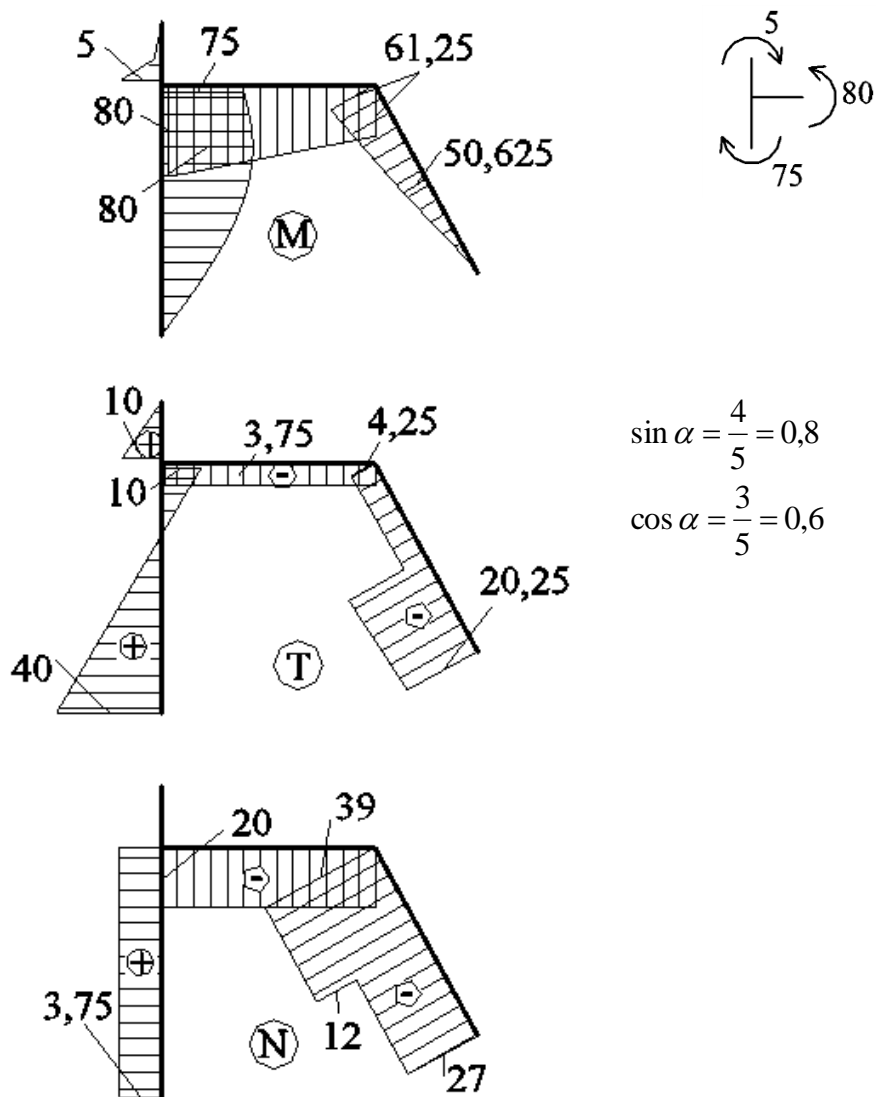
Diagrama M se trasează pe fibra întinsă.

Trasarea diagramelor M pe barele încărcate cu forță uniform distribuită necesită cunoașterea diagramei de forță tăietoare, nefiind suficiente două valori pentru trasarea unei parabole de gradul II.

Pe consola C-I-  $T_C=0 \Rightarrow$  diagrama de moment încovoietor va fi tangentă la axa barei în acest punct.

$$M_{A-1}^{\max} = 40 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 80 \text{ kNm (față de A)}$$

$$M_{A-1}^{\max} = 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 75 = 80 \text{ kNm (față de 1)}$$



**Fig. 3.3**

*T1-2*

$$T_{12} = T_{21} = T_{1-2} = -\frac{80 - 61,25}{5} = -3,75 \text{ kN}$$

Forța tăietoare acționează pe capetele barei ca un cuplu de forțe care anulează valoarea momentelor concentrate pe capetele barelor.

- Valoarea forței tăietoare = suma algebrică a momentelor de pe capete (în funcție de sensul acestora) împărțită la lungimea barei (Fig. 3.4).
- Semnul este desemnat de sensul de rotire din condiția de anulare a momentului (rezultant) de pe capetele barei.

Pentru bara încărcată cu o forță concentrată se procedează astfel:

- Fie se determină valoarea forței tăietoare pe cele două intervale liniare ale momentului delimitate de forța concentrată;
- Fie se izolează bara *I-B* și se încarcă cu componenta forței concentrate perpendiculară pe bară aplicată la mijlocul acesteia și cu momentul din capătul 2.

Verificare:  $T_B = -V_B \cdot \cos \alpha = -20,25 \text{ kN}$

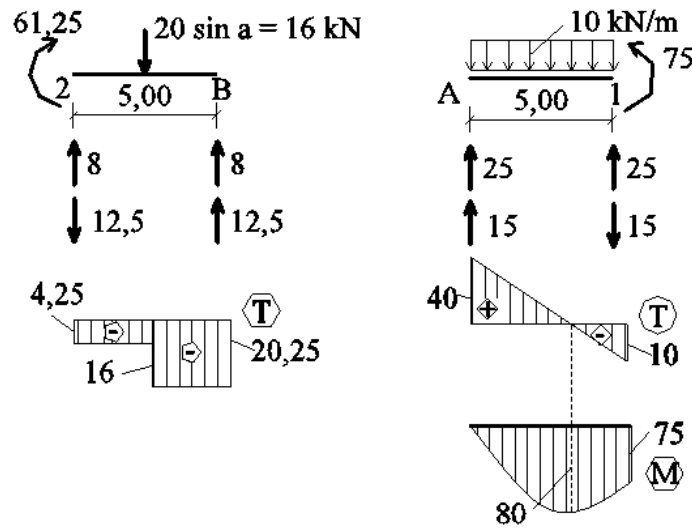


Fig. 3.4

Echilibrul nodurilor: Forțele tăietoare de la capetele barelor se trec în funcție de semnul lor:

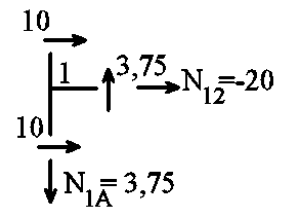
$+(T_{ik} > 0) \Rightarrow$  rotește nodul în sens orar

$-(T_{ik} < 0) \Rightarrow$  rotește nodul în sens antiorar

Nodul 1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N_{12} + 10 = 0 \Rightarrow N_{12} = -20 \text{ kN}$$

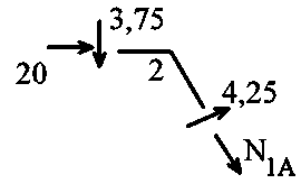
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1A} + 3,75 = 0 \Rightarrow N_{12} = 3,75 \text{ kN} = -V_A$$



Nodul 2

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N_{12} + 10 = 0 \Rightarrow N_{12} = -20 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1A} + 3,75 = 0 \Rightarrow N_{12} = 3,75 \text{ kN} = -V_A$$



3.2.2. Cadrul cu trei articulații din figura 3.5 are articulațiile cu terenul dispuse la același nivel.

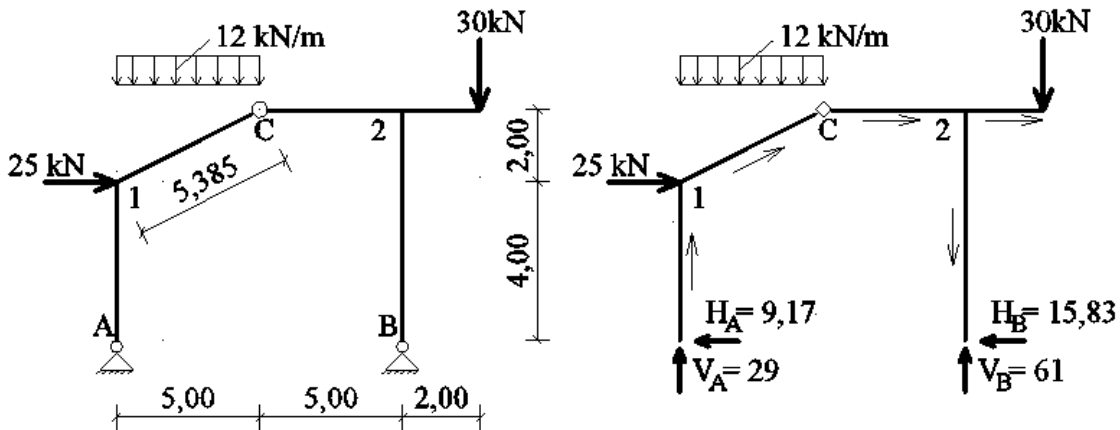


Fig. 3.5

*Determinarea reacțiilor*

*Ecuatiile de echilibru global față de reazemele cu terenul.*

Reazemele fiind la același nivel, suportul reacțiilor orizontale trece prin ele, rezultă că  $H_A$  și  $H_B$  nu dau momente în raport cu B și A

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 : 10 \cdot V_B - 30 \cdot 12 - 12 \cdot 5 \cdot 2,5 - 25 \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0 : 10 \cdot V_A + 25 \cdot 4 - 12 \cdot 5 \cdot 7,5 + 30 \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 61 \text{ kN} \\ V_A = 29 \text{ kN} \end{cases}$$

Verificare:  $\sum F_y = 61 + 29 - 12 \cdot 5 - 30 = 0$

Ecuatiile de moment nul față de articulația intermediară la stânga și la dreapta acesteia (echilibrul fiecărei părți)

$$\begin{cases} \sum M_C^{st} = 0 : 29 \cdot 5 + H_A \cdot 6 - 25 \cdot 2 - 12 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \\ \sum M_C^{dr} = 0 : 61 \cdot 5 - H_B - 30 \cdot 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 9,17 \text{ kN} \\ H_B = 15,83 \text{ kN} \end{cases}$$

Verificare:  $\sum F_x = 25 - 9,17 - 15,83 = 0$

*Calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor*

$M_{A1} = 0$  – articulație

$M_{1A} = H_A \cdot 4 = 36,68 \text{ kNm}$  – întinde fibra din interior

$M_{1A} = M_{1C}$  – secțiuni infinit vecine  $\begin{cases} \text{aceeași valoare} \\ \text{aceeași fibră întinsă} \\ \text{forța concentrată nu are braț} \end{cases}$  nodul 1 este rigid

$M_C = 0$

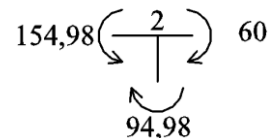
$M_{2C} = -15,38 \cdot 6 - 30 \cdot 2 = -154,98 \text{ kNm}$

$M_{2a} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$

$M_{2B} = -15,38 \cdot 6 = -94,98 \text{ kNm}$

Se verifică echilibrul nodului 2 la moment încovoietor ținând cont de sensul de rotire al momentelor încovoietoare de la capetele barelor.

$$\sum M_{2i} = 0$$



2-C – neîncărcată  $\Rightarrow$  M-liniar

2-a – neîncărcată  $\Rightarrow$  M-liniar

2-B – neîncărcată  $\Rightarrow$  M-liniar



Trasarea diagramelor  $T$  și  $M$  pe bara  $I-C$ (Fig.3.6.):

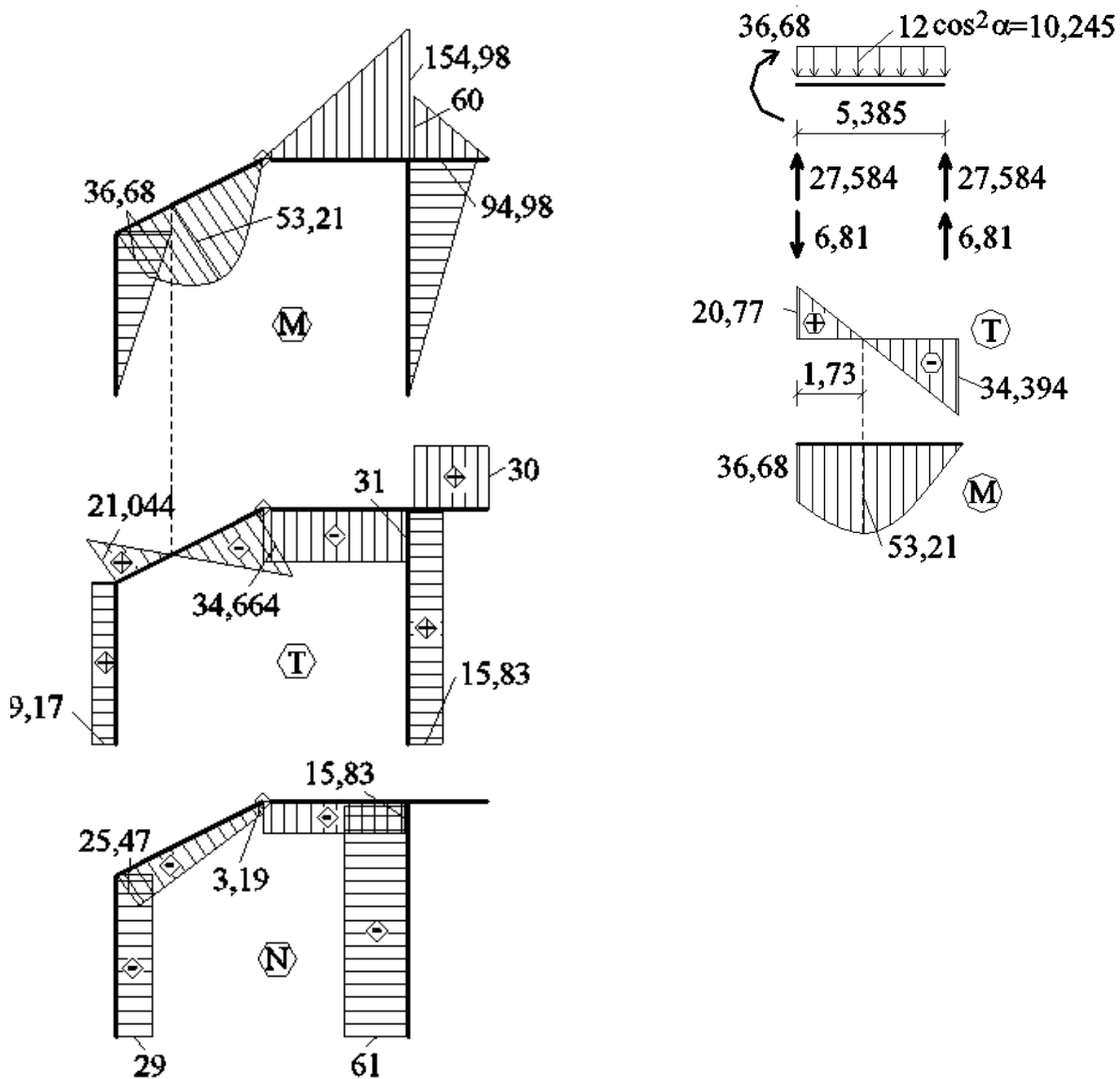


Fig. 3.6

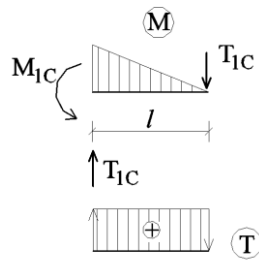
- Se izolează bara  $I-C$  prin secționarea ei după nodul  $I$  și înainte de nodul  $C$  (Fig. 3.6), se consideră simplu rezemată și încărcată cu forțele exterioare direct aplicate și cu momentul de la capătul  $I$ .
- Componenta forței uniform distribuite perpendiculară pe bară  $= 12 \cdot \cos^2 \alpha = 10,345 \text{ kN/m}$  (vezi 1.1. fig.1.1) descarcă simetric în cele două reazeme prin două reacțiuni egale cu  $\frac{10,345 \cdot 5,385}{2} = 27,85 \text{ kN}$

Momentul  $M_{1C}$  descarcă printr-un cuplu de forte de valoare:

$$\frac{36,68}{5,385} = 6,81 \text{ kN}$$

Pe barele încărcate doar cu moment concentrat pe capăt, forța tăietoare acționează sub forma unui cuplu de forțe care anulează momentul concentrat – deschide diagrama de moment (M), de valoare:

$$\text{val} = \frac{M}{l}$$



Trasarea diagramei de efort axial

Echilibrul nodului 1

$$\sin \alpha = 0,3714$$

$$\cos \alpha = 0,9285$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 21,044 \cdot \sin \alpha + N_{1C} \cdot \cos \alpha - 9,17 + 25 = 0$$

$$N_{1C} = -25,45 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1A} - 21,044 \cdot \cos \alpha + 25,47 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{1A} = -29 \text{ kN}$$

Pe bara I-C, distribuția forței uniforme produce o variație liniară a efortului axial

Din acest motiv se impune izolarea nodului C pentru

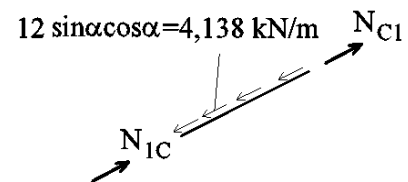
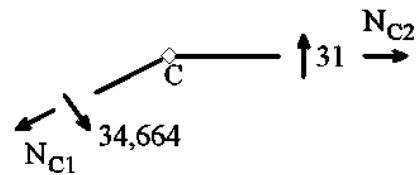
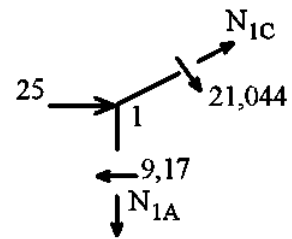
calculul valorii  $N_{C1}$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{C1} \cdot \sin \alpha - 34,664 \cdot \cos \alpha + 31 = 0$$

$$N_{C1} = -3,19 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 34,664 \cdot \sin \alpha + N_{C2} + 3,19 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_{C2} = -15,83 \text{ kN}$$



Verificare:

Se scrie echilibrul barei exprimat prin suma forțelor pe direcția axei barei:

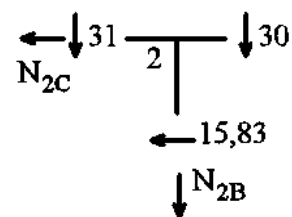
$$N_{C1} + N_{1C} - 4,138 \cdot 5,385 = 0$$

$$N_{C1} = 25,47 + 4,138 \cdot 5,385 = -3,19 \text{ kN}$$

Echilibrul nodului 2:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{2C} = -15,83 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2B} = -30 - 31 = -61 \text{ kN}$$



Verificare:

$$N_{2B} = -V_B = -61 \text{ kN}$$

$$N_{1A} = -V_A = -29 \text{ kN}$$

$$N_{2C} = N_{C2} = -H_B = -15,83 \text{ kN}$$

Pe consolă nu acționează nici o forță pe direcția axei barei  $\Rightarrow N=0$

**3.2.3.** Structura din figura 3.7. este un cadru cu trei articulații cu reazemele decalate. Se propune, pentru rezolvare prima metodă prezentată, cea clasică.

*Determinarea reacțiilor:*

Întrucât reazemele nu sunt la același nivel, în fiecare ecuație vor interveni câte două necunoscute. Se obțin două sisteme de două ecuații cu două necunoscute fiecare: reacțiunile din cele două reazeme.

Astfel, combinând ecuațiile de echilibru global cu cele de moment nul față de articulația intermediară, se obține:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 : 11 \cdot V_B - 1 \cdot H_B - 20 \cdot 9 - 15 \cdot 4 \cdot 9 - 30 \cdot 1 = 0 \\ \sum M_C^{dr} = 0 : 4 \cdot V_B - 5 \cdot H_B - 20 \cdot 2 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \cdot V_B - H_B = 750 \\ 4 \cdot V_B - 5 \cdot H_B = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 70,39 \text{ kN} \\ H_B = 24,31 \text{ kN} \end{cases}$$

și

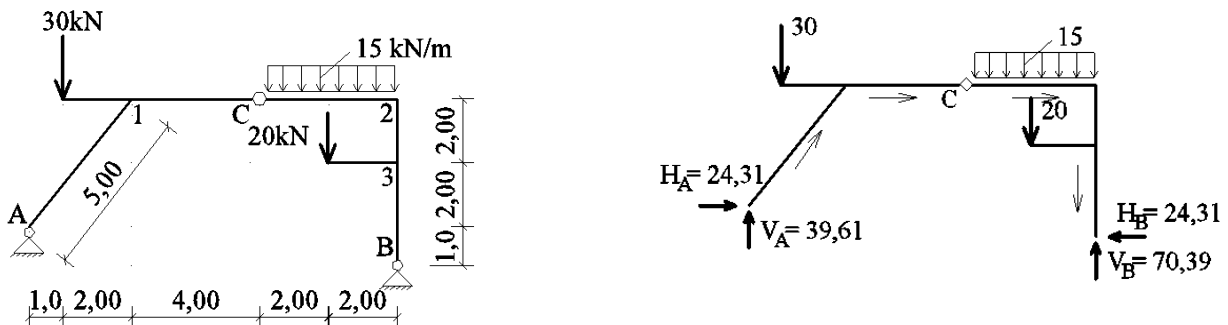
$$\begin{cases} \sum M_B = 0 : 11 \cdot V_A + 1 \cdot H_A - 30 \cdot 10 - 15 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0 \\ \sum M_C^{st} = 0 : 7 \cdot V_A - 4 \cdot H_A - 30 \cdot 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \cdot V_A + H_A = 460 \\ 7 \cdot V_A - 4 \cdot H_A = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 39,61 \text{ kN} \\ H_A = 24,31 \text{ kN} \end{cases}$$

Verificare:

$$\sum F_y = 70,39 + 39,61 - 30 - 15 \cdot 4 - 20 = 0$$

$$\sum F_x = 24,31 - 24,31 = 0$$



**Fig. 3.7**

*Trasarea diagramelor de eforturi (Fig.3.8):*

Eforturile tip forță se calculează prin proiecția forțelor pe direcția axei barei și perpendiculară pe ea.

*Efortul axial*

$$N_{A1} = -39,61 \cdot \sin \alpha - 24,31 \cdot \cos \alpha = -46,27 \text{ kN}$$

$$A - 1 \text{ neîncărcată} \Rightarrow N_{1A} = N_{A1} = -46,27 \text{ kN}$$

$$a - 1 \text{ nu sunt forțe pe direcția axei barei (orizontale)} \Rightarrow N_{a-1} = 0 \text{ kN}$$

Bara 1-C – orizontală și neîncărcată

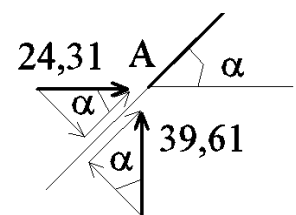
$$N_{1C} = -H_A = -24,31 \text{ kN} = N_{1-C} = N_{C1} = N_{C-2} = N_{2C}$$

*Forța tăietoare*

Conform schemei de proiecție a forțelor în punctul A,

$$T_A = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = 39,61 \cdot \cos \alpha - 24,31 \cdot \sin \alpha = 4,318 \text{ kN.}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{4}{5} = 0,8 \\ \cos \alpha &= \frac{3}{5} = 0,6 \end{aligned}$$



Pe consola orizontală din nodul 1:

$$T_a = -30 \text{ kN} = T_{a-1} \text{ (neîncărcată între a și 1)}$$

$$T_{1C} = 39,31 - 30 = 9,61 \text{ kN} = T_{C1}$$

$$T_{2C} = T_{C1} - 15 \cdot 4 = 9,61 - 60 = -50,39 \text{ kN}$$

Pe bara C-2, forța tăietoare schimbă semnul

$$T_x = T_C - 15 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{T_C}{15} = \frac{9,61}{15} = 0,64 \text{ m} - \text{față de articulația C}$$

$$T_b = -20 \text{ kN} = T_{b-3} = T_{3b}$$

Eliminând corpul din dreapta, singura forță perpendiculară pe bara 2-B este  $H_B$ , care rotește în sens orar.

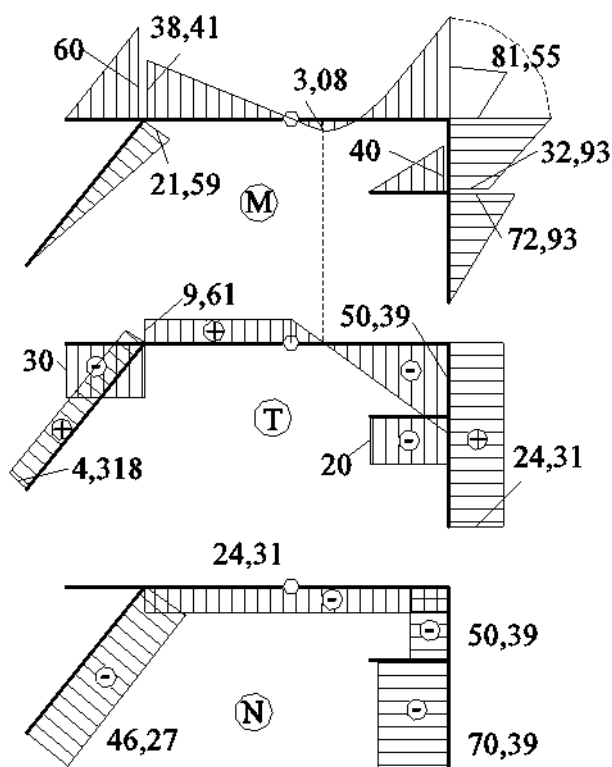


Fig. 3.8

$$T_{23} = T_{3B} = H_B = 34,31 \text{ kN}$$

Efectul consolei asupra stâlpului:

! Consola (forța concentrată P) nu afectează diagrama T pe stâlp !

Forța concentrată de pe consolă se reduce la fața stâlpului la o forță concentrată  $P=20 \text{ kN}$  și un moment încovoiator  $M=40 \text{ kNm}$  care întinde fibra din interior a secțiunii stâlpului.

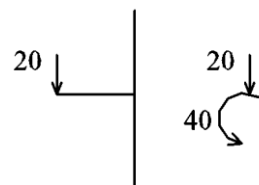
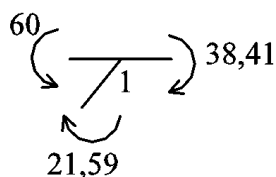


Diagrama de moment încovoiator

$$M_{1A} = V_A \cdot 3 - H_A \cdot 4 = 21,59 \text{ kNm}$$

$$M_{a1} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$$

$$M_{1C} = V_A \cdot 3 - H_A \cdot 4 - 30 \cdot 2 = -38,41 \text{ kNm}$$



Se verifică echilibrul nodului 1 la moment încovoiator.

$$M_C = 0; \quad M_{2C} = V_A \cdot 11 - H_A \cdot 4 - 30 \cdot 10 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = -81,55 \text{ kNm} = M_{23}$$

Pe intervalul C-2: Momentul încovoiitor are un punct de extrem, la distanța  $x = 0,64$  m față de articulația C

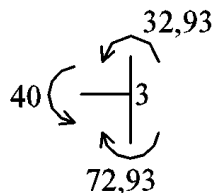
$$M_{\max} = T_C \cdot x - 15 \cdot \frac{x^2}{2} = 9,61 \cdot 0,64 - 15 \cdot \frac{0,64^2}{2} = 3,08 \text{ kNm}$$

În C, parabola este tangentă la variația liniară a momentului de pe intervalul I-C

$$M_{3B} = -H_B \cdot 3 = -72,43 \text{ kNm}$$

$$M_{3C} = 20 \cdot 2 = 40 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -H_B \cdot 3 + 20 \cdot 2 = -32,43 \text{ kNm}$$



Se verifică echilibrul nodului 3:

Valorile forței tăietoare se pot verifica urmărind diagrama de moment încovoiitor.

Astfel, bara A-1 este neîncărcată și valoarea momentului încovoiitor din capătul 1 este 21,59 kNm

$$T_{A-1} = \frac{21,59}{5} \left. \vphantom{T_{A-1}} \right\} \Rightarrow T_{1A} = 4,318 \text{ kN, egală cu valoarea determinată prin}$$

deschide diagrama M în sens orar)

proiecții ale forțelor pe normala la axa barei înclinată.

Bara 1-C

$$T_{1-C} = \frac{38,41}{4} = 9,61 \text{ kN (deschide diagrama } M_{1-C} \text{ în sens orar)}$$

Bara 2-3

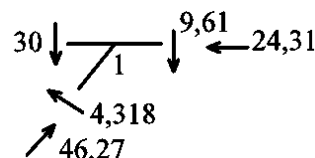
$$T_{2-3} = \frac{81,55 - 32,93}{2} = 24,31 \text{ kN (deschide diagrama } M_{2-3} \text{ în sens orar)}$$

Bara 3-B

$$T_{2-3} = \frac{72,93}{3} = 24,31 \text{ kN (deschide diagrama } M_{3-B} \text{ în sens orar)}$$

$M_{2-3}$  și  $M_{3-B}$  sunt paralele, forța tăietoare este constantă

Se verifică echilibrul nodului 1 după izolarea prealabilă a acestuia, prin scrierea ecuațiilor de sumă de forțe egale cu zero după cele două direcții perpendiculare din plan.



$$\sum F_x = 46,27 \cdot \cos \alpha - 4,318 \cdot \sin \alpha - 24,31 = 0$$

$$\sum F_y = -30 - 9,61 + 4,318 \cdot \cos \alpha + 46,27 \cdot \sin \alpha = 0$$

Echilibrul celorlalte noduri se poate verifica cu ușurință în figura 3.9.

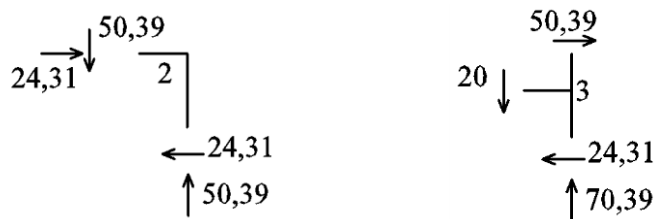
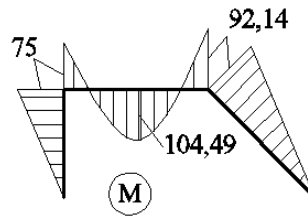
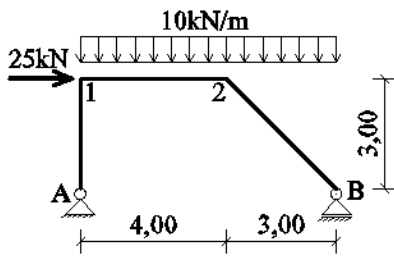


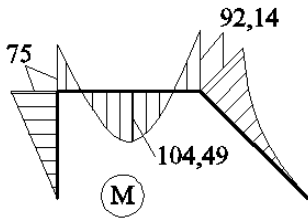
Fig. 3.9

### 3.3. Probleme propuse

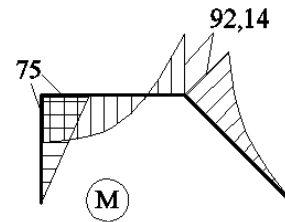
3.3.1. Să se identifice diagrama corectă de moment încovoietor **M** pentru structura din figură.



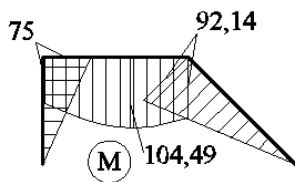
a)



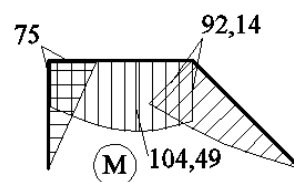
b)



c)

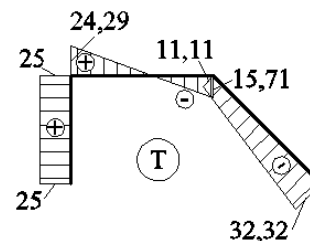
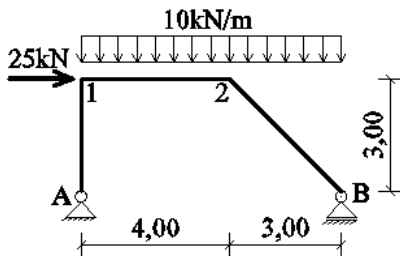


d)

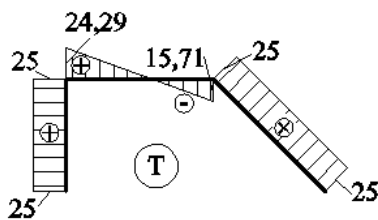


e)

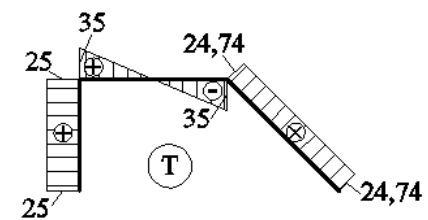
3.3.2. Să se identifice diagrama corectă de forță tăietoare **T** pentru structura din figură.



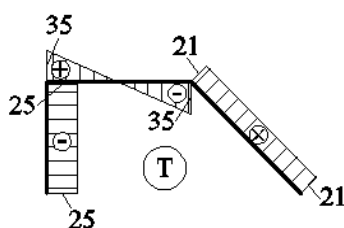
a)



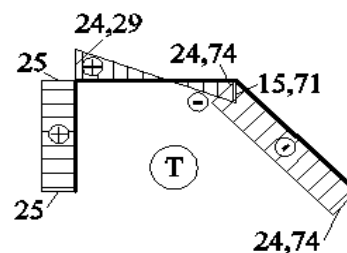
b)



c)

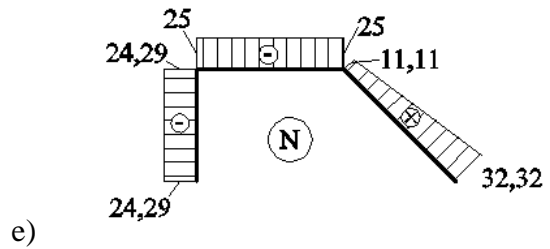
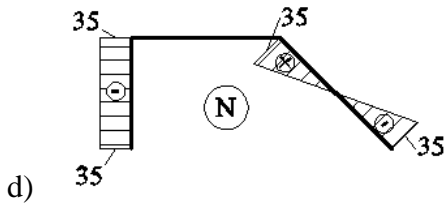
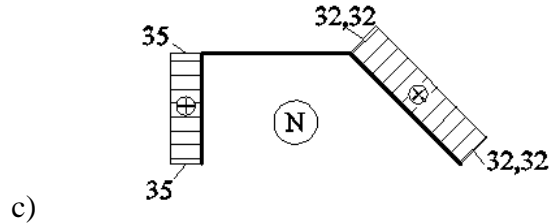
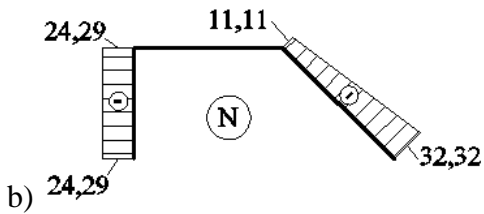
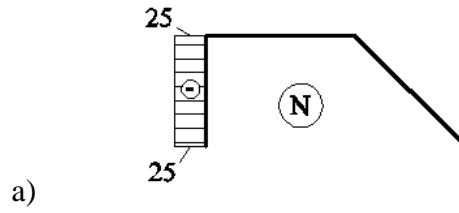
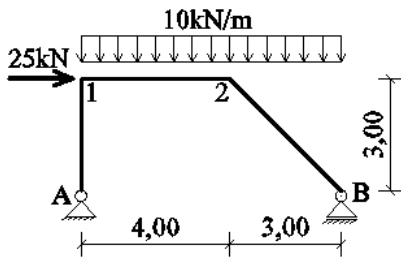


d)

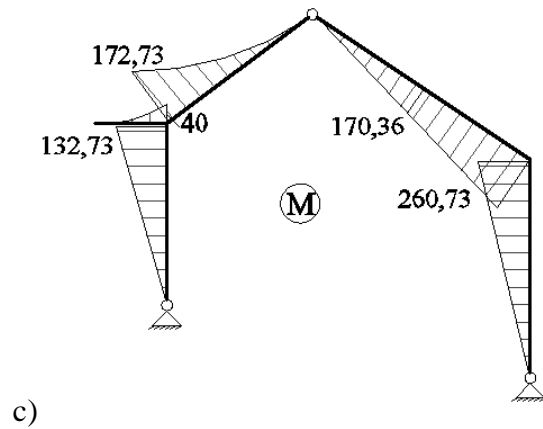
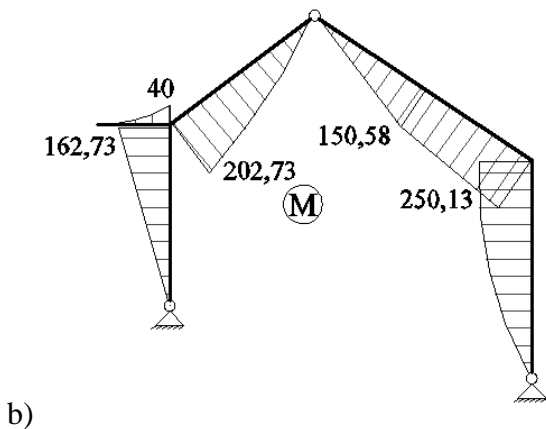
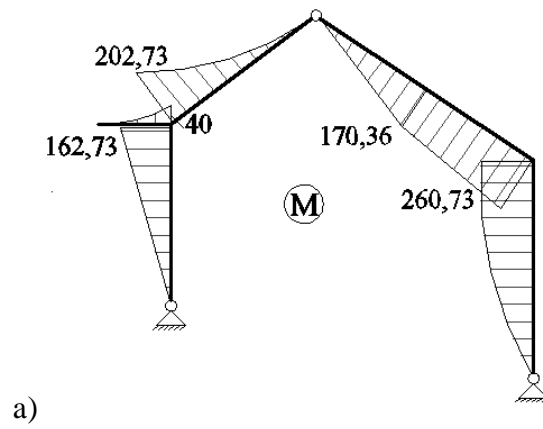
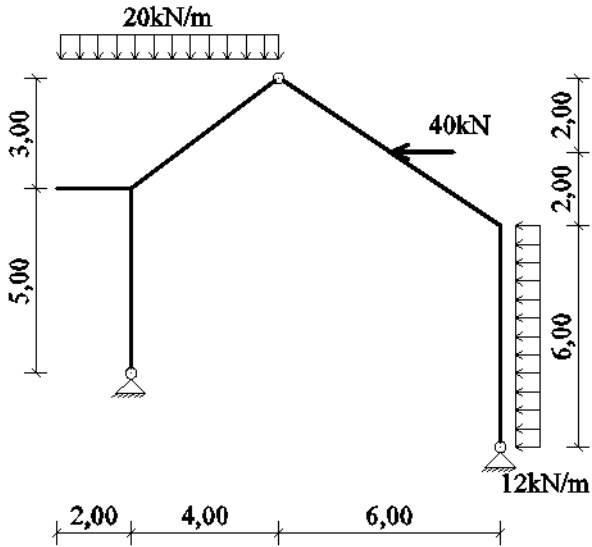


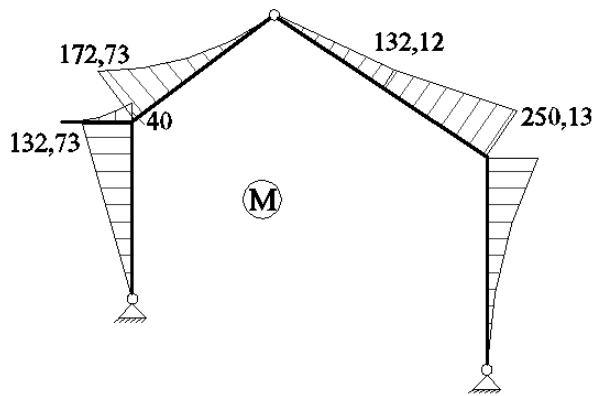
e)

3.3.3. Să se identifice diagrama corectă de efort axial  $N$  pentru structura din figură.

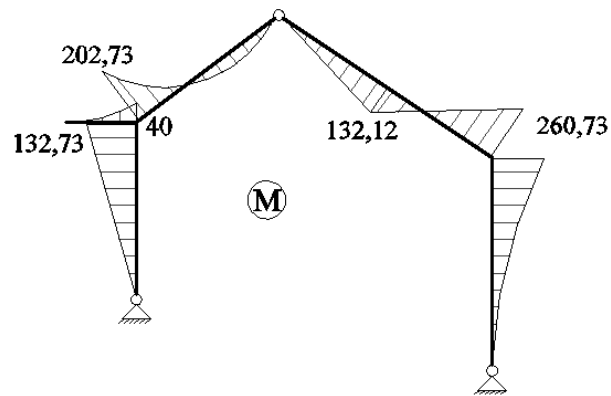


3.3.4. Care este diagrama corectă de moment încovoietor  $M$  pentru cadrul din figura următoare?



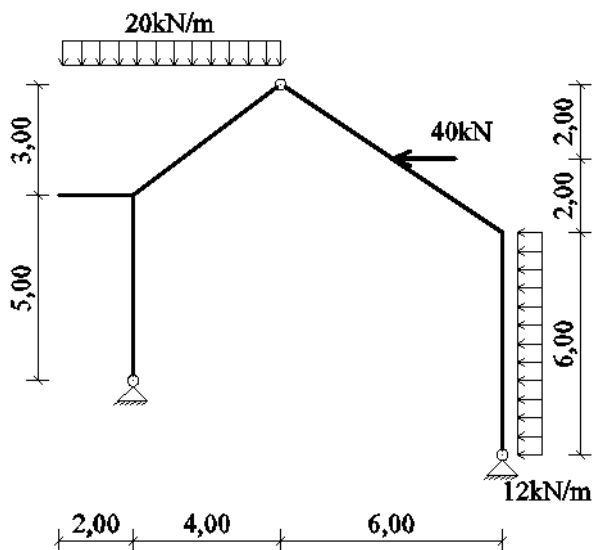


d)

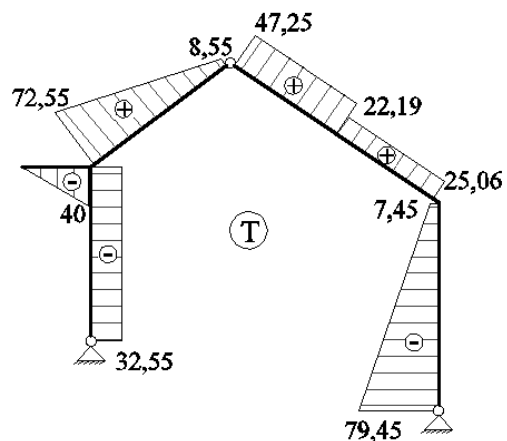


e)

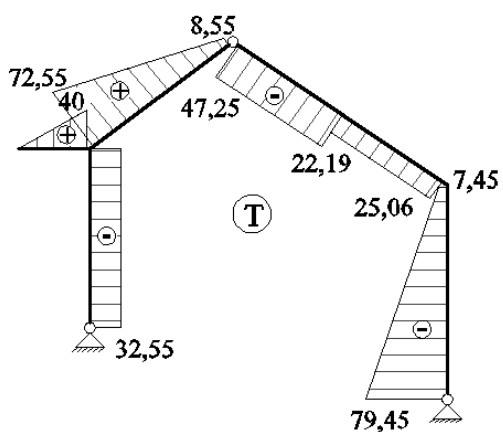
3.3.5. Care este diagrama corectă de forță tăietoare T pentru cadrul din figura de mai jos?



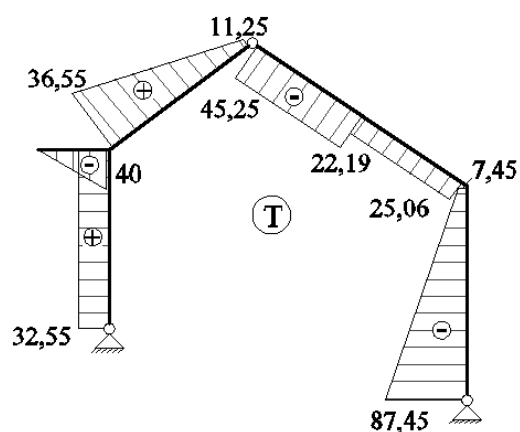
a)



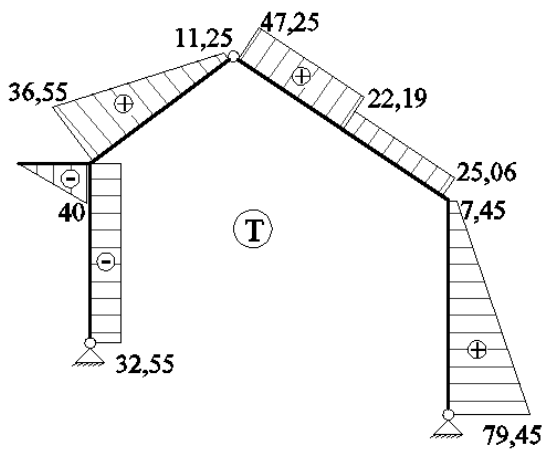
b)



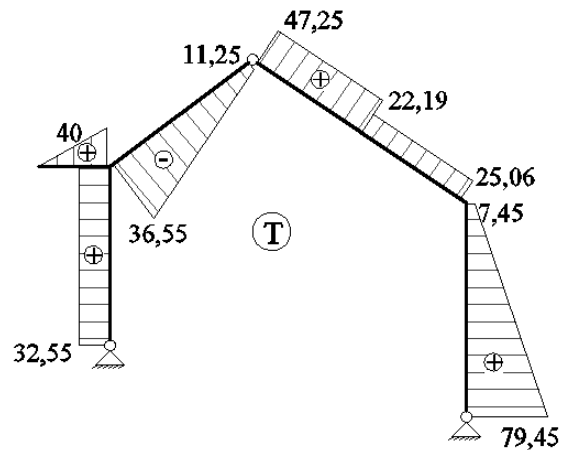
c)





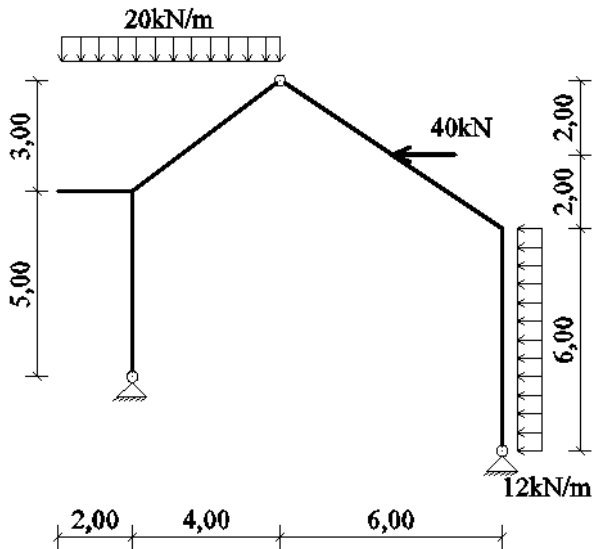


d)

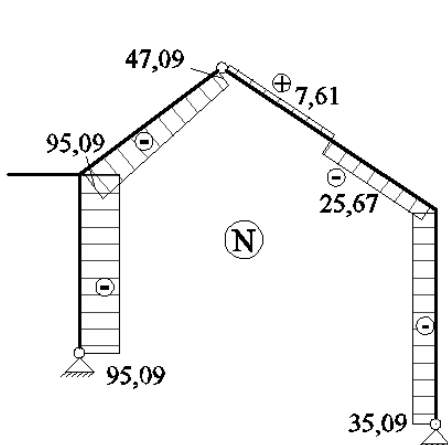
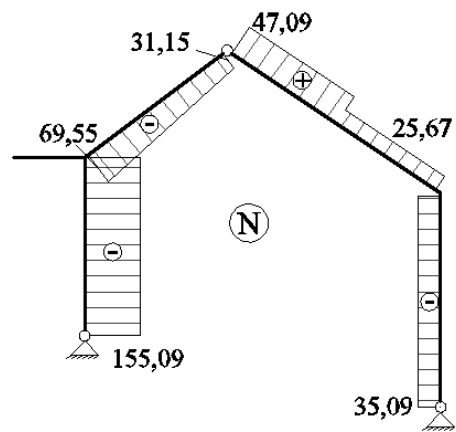


e)

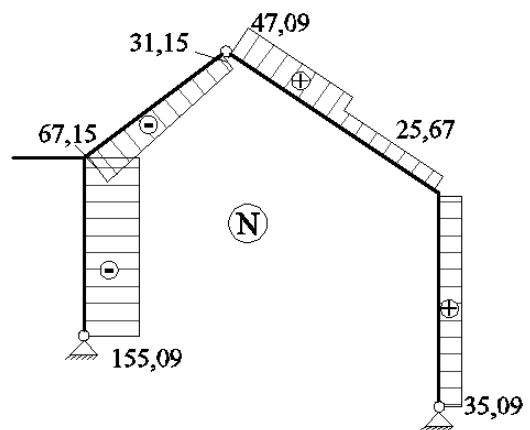
3.3.6. Care este diagrama corectă de efort axial N pentru cadrul din figura de mai jos?



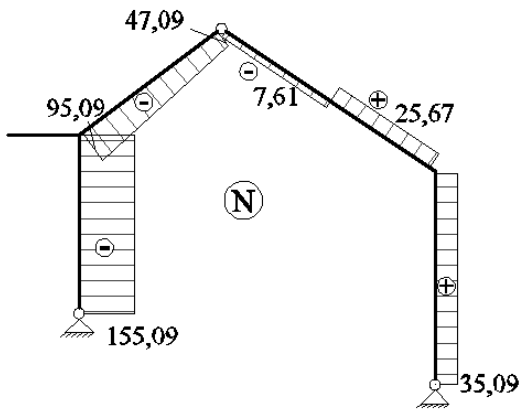
a)



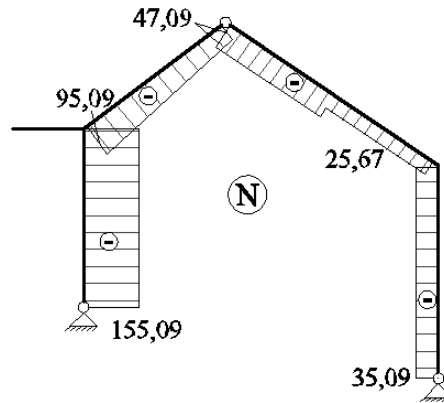
b)



c)

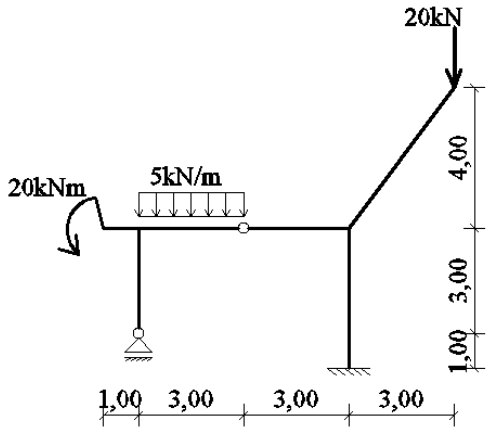


d)

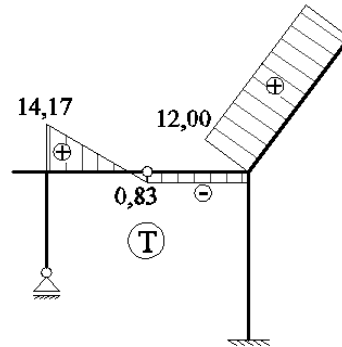


e)

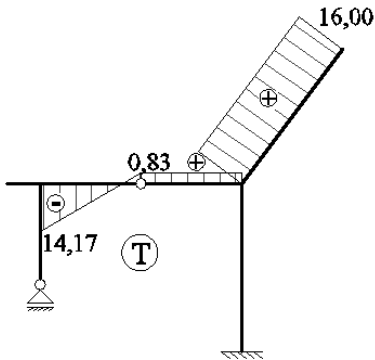
3.3.7. Să se identifice diagrama de forță tăietoare **T** corectă pentru structura din figură.



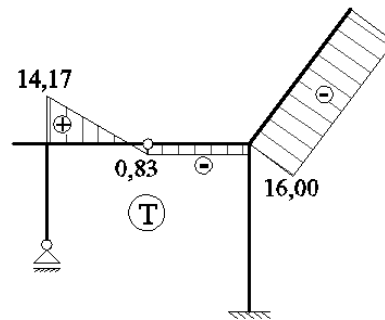
a)



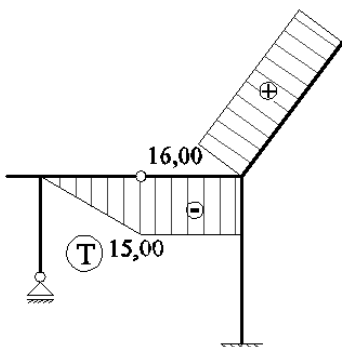
b)



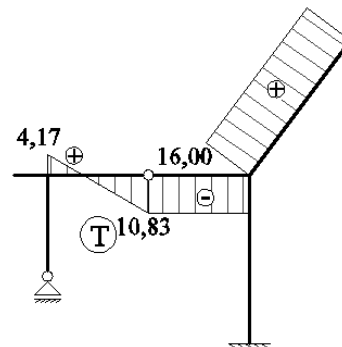
c)



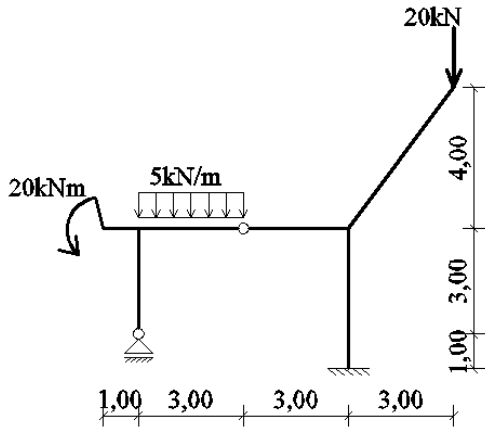
d)



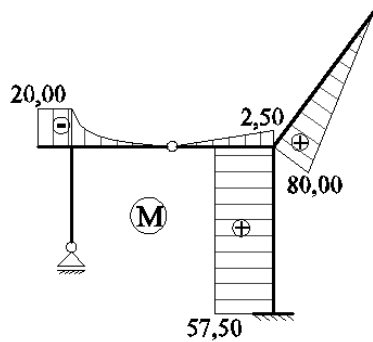
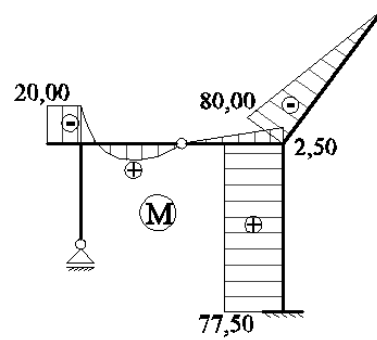
e)



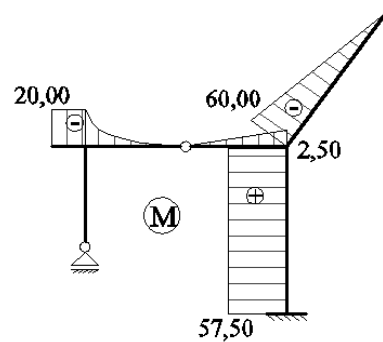
3.3.8. Să se identifice diagrama de moment încovoietor  $M$  corectă pentru structura din figură.



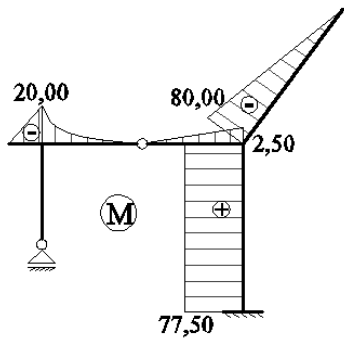
a)



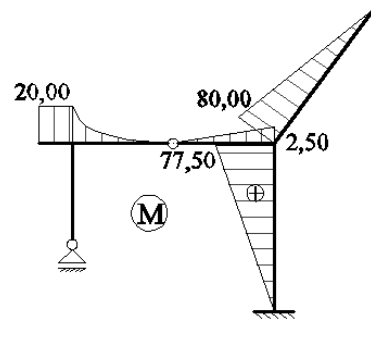
b)



c)

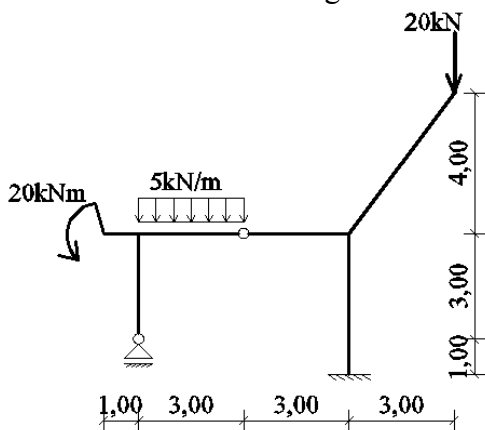


d)

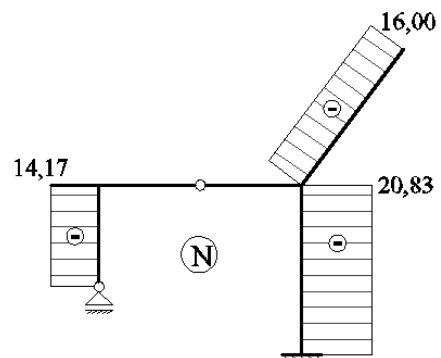


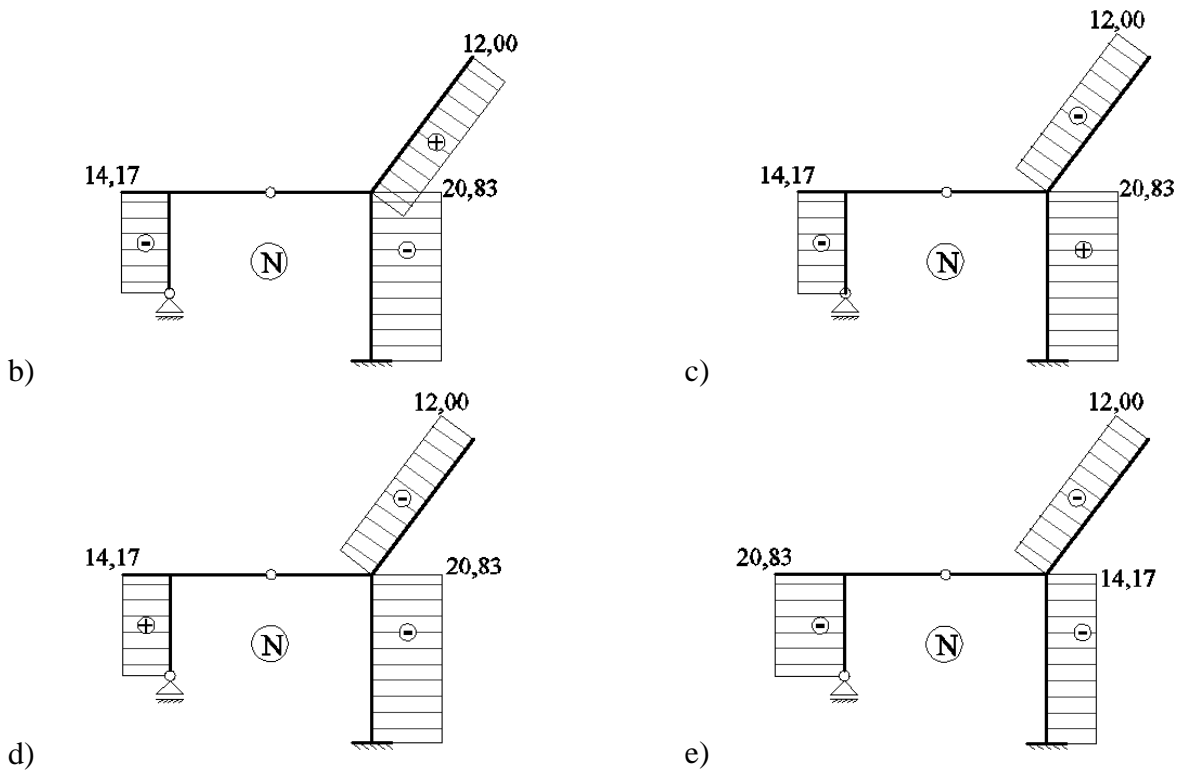
e)

3.3.9. Să se identifice diagrama de efort axial  $N$  corectă pentru structura din figură.

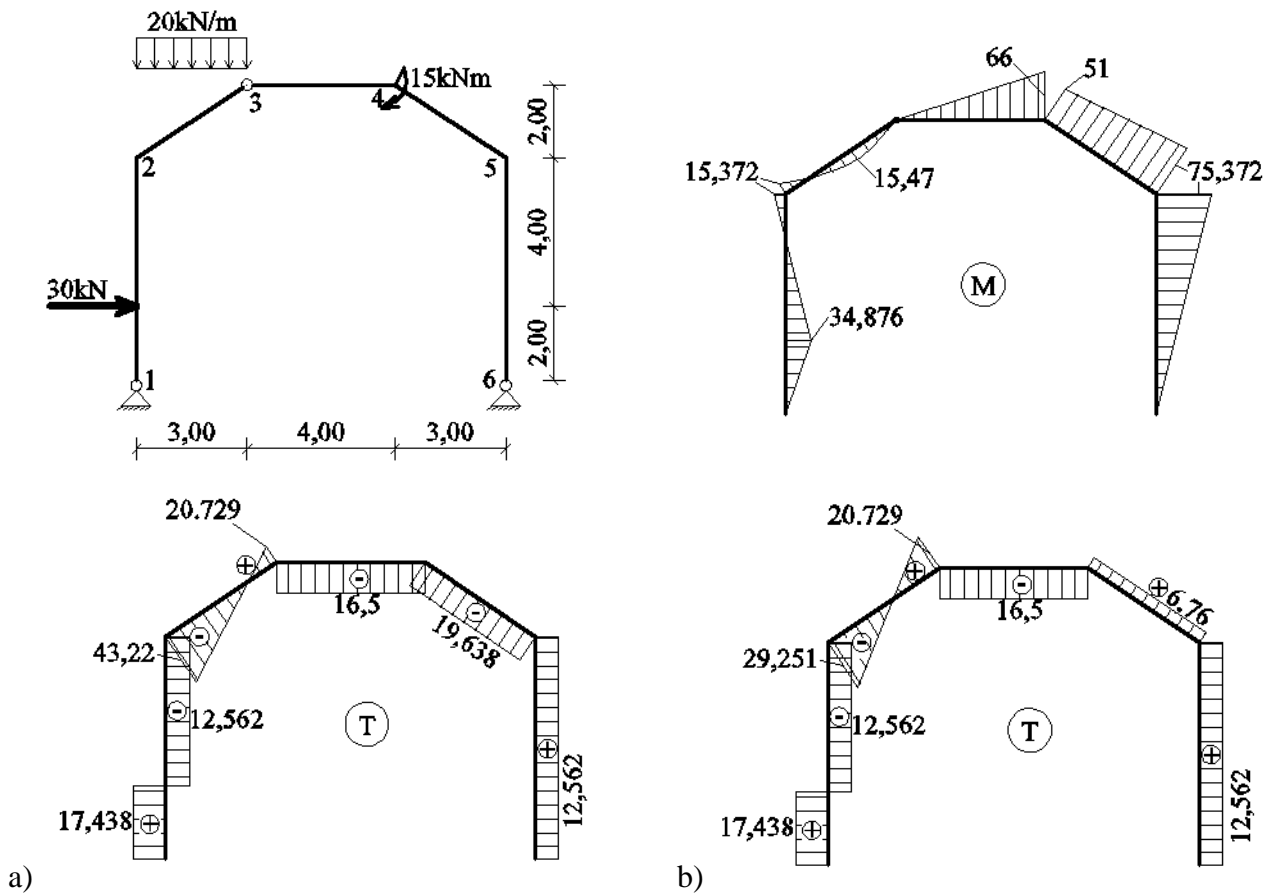


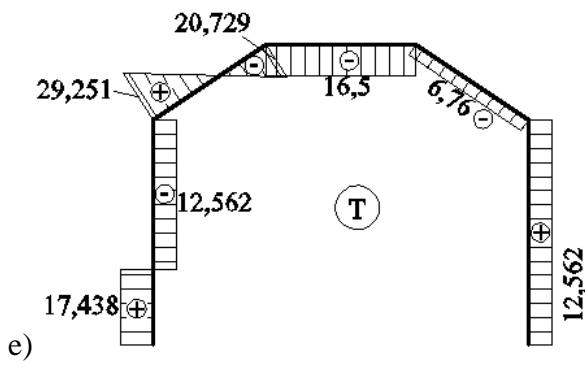
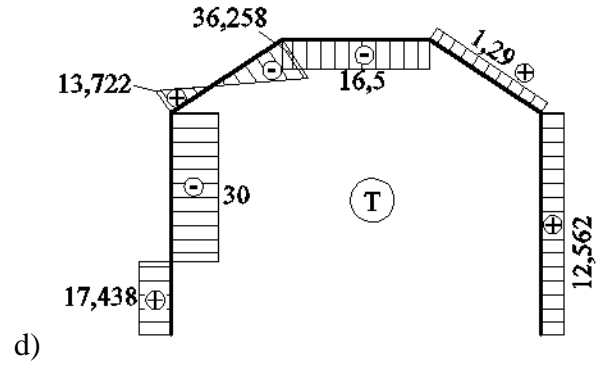
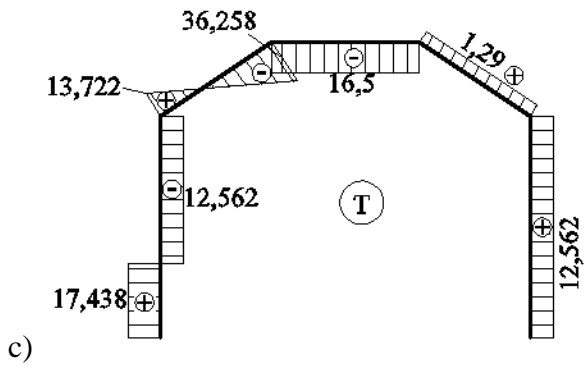
a)





3.3.10. Care este diagrama de forță tăietoare  $T$  pentru structura din figură, cunoscând diagrama de moment încovoiator  $M$ ?





## Capitolul 4: Arce static determinate

### 4.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Arcele sunt structuri cu axa curbă, solicitate predominant la încovoiere și efort axial. Arcele static determinate sunt rar întâlnite ca elemente de construcție, dar rezolvarea lor stă la baza calcului arcelor static nedeterminate.

În funcție de forma axei lor, arcele pot fi ciculare, parabolice sau o altă curbă.

După modul de rezemare, arcele static determinate pot fi simplu rezemate sau cu trei articulații.

Rezolvarea arcelor static determinate, respectiv determinarea reacțiilor și trasarea diagramelor de eforturi, se realizează după aceleași principii cu cele prezentate la structurile tip cadru.

Caracteristic comportării arcelor este dezvoltarea în reazemele cu terenul, a unor reacțiuni orizontale mari, numite împingeri, care reduc esențial valoarea momentului încovoiător din câmp, conferind astfel acestor structuri capacitatea de a acoperi deschideri mari comparativ cu grinzile drepte.

Elementele caracteristice ale unui arc cu trei articulații cu reazemele la același nivel sunt prezentate în figura 4.1.

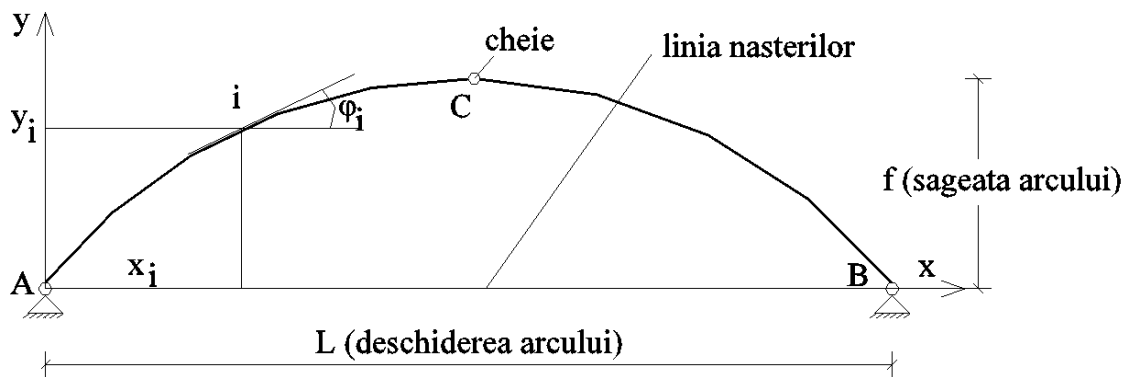


Fig. 4.1

Variația eforturilor, în acest caz, depinde de forma axei arcului, prin urmare va fi curbilinie.

Orice secțiune,  $i$ , a unui arc este definită prin: coordonatele sale  $x_i$ ,  $y_i$  și unghiul pe care-l face tangenta la axa arcului în punctul respectiv cu orizontala,  $\varphi_i$ .

Aceste mărimi se determină în mod diferit în funcție de forma axei arcului.

- *Arcul parabolic*

Ecuția parabolei de gradul al doilea este:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$$

Derivata de ordinul întâi a funcției definește panta acesteia, respectiv :

$$y' = tg\varphi_i = \frac{4f}{l^2} (l - 2x)$$

Astfel, dacă pentru o secțiune a unui arc parabolic se cunoaște  $x_i$ , prin înlocuirea valorii acestuia

- în ecuația arcului, se calculează valoarea ordonatei  $y_i$ , și
- în expresia derivatei de ordinul I a acesteia, se determină  $tg\varphi_i$ , după care prin aplicarea funcției inverse, se determină  $\varphi_i$  și implicit orice altă funcție trigonometrică a acestuia.

- *Arcul circular*

Caracteristicile geometrice ale secțiunilor unui arc circular se determină din considerente geometrice. Astfel, în funcție de elementele care se cunosc, se pot determina coordonatele secțiunii  $i$  și unghiul  $\varphi_i$ .

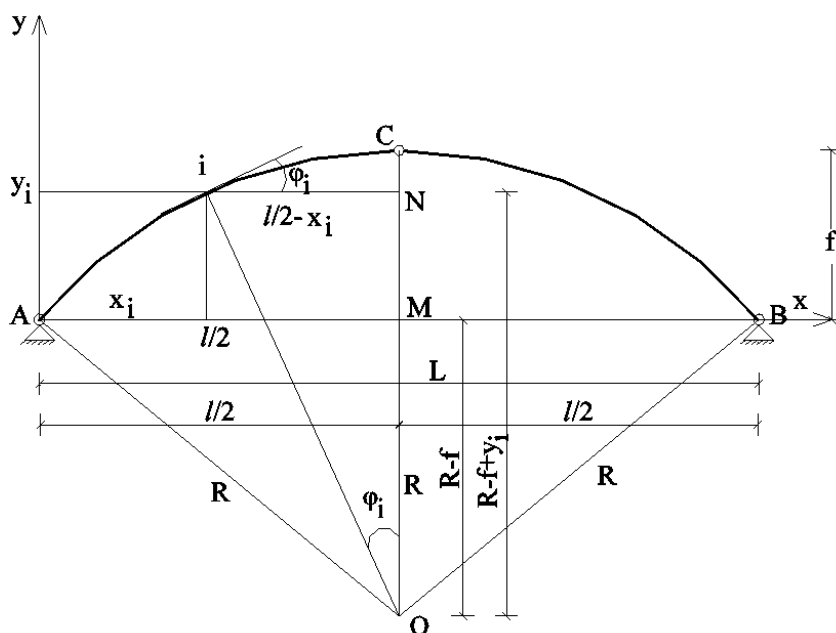


Fig. 4.2

Din figura 4.2 se vede că unghiul  $\varphi_i$  pe care îl face tangenta la axa arcului cu orizontala are aceeași măsură cu unghiul la centru format de razele aferente secțiunii  $i$  și secțiunii de cheie  $C$ . Din triunghiurile dreptunghice  $AMO$  și  $iNO$  se pot determina, în funcție de elementele cunoscute, celelalte mărimi geometrice care definesc secțiunea  $i$ .

Calculul eforturilor de tip forțe în orice secțiune a unui arc (parabolic sau circular) se face prin proiecția forțelor pe direcția tangentei la axa arcului în punctul respectiv ( $N_i$ ) și perpendicular pe aceasta ( $T_i$ ).

În cazul încărcării arcelor cu trei articulații doar cu forțe verticale, determinarea eforturilor se poate face prin analogie cu grinda simplu rezemată atașată arcului, încărcată identic cu acesta. Întrucât încărcările sunt verticale, reacțiunile verticale pe cele două structuri sunt identice (depind doar de poziția forțelor verticale). În orice secțiune a arcului, efectul forțelor verticale este reprezentat de forța tăietoare de pe grinda simplu rezemată atașată arcului, în secțiunea corespunzătoare celei de pe arc.

Utilizând această analogie, în cazul încărcării doar cu forțe verticale, eforturile în orice secțiune a unui arc cu trei articulații sunt:

$$N_i = -T_i^0 \sin \varphi_i - H \cos \varphi_i$$

$$T = T_i^0 \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i$$

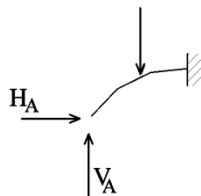
$$M_i = M_i^0 - H y_i$$

Eforturile notate la exponent cu "0" sunt cele din grinda simplu rezemată atașată arcului.

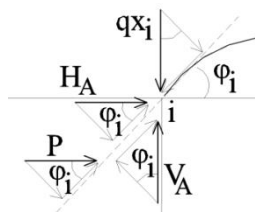
Dacă încărcarea pe arc este oarecare (forțe orizontale și verticale), pentru calculul eforturilor în

secțiunea  $i$ , se analizează efectul fiecărei încărcări asupra feței secțiunii  $i$ , prin proiecții pe direcția tangentei la axa arcului în  $i$  și perpendicular pe aceasta.

Momentul încovoiator într-o secțiune a unui arc se poate determina prin secționarea structurii în punctul respectiv și fixarea acesteia printr-o încastrare fictivă. Se determină efectul fiecărei forțe asupra secțiunii, identificând pentru fiecare acțiune fibra întinsă.



**Fig. 4.3**





## 4.2. Exemplu numeric

Pentru arcul parabolic din figura 4.4, se vor determina eforturile din secțiunile  $i$  și  $j$  ale acestuia. Întrucât arcul este încărcat numai cu forțe verticale, determinarea eforturilor în secțiunile marcate se va face atât prin metoda generală, valabilă pentru orice tip de încărcare, cât și cu ajutorul valorilor eforturilor determinate pe grinda simplu rezemată atașată, încărcată identic cu arcul. Săgeata arcului:  $f=4$  m.

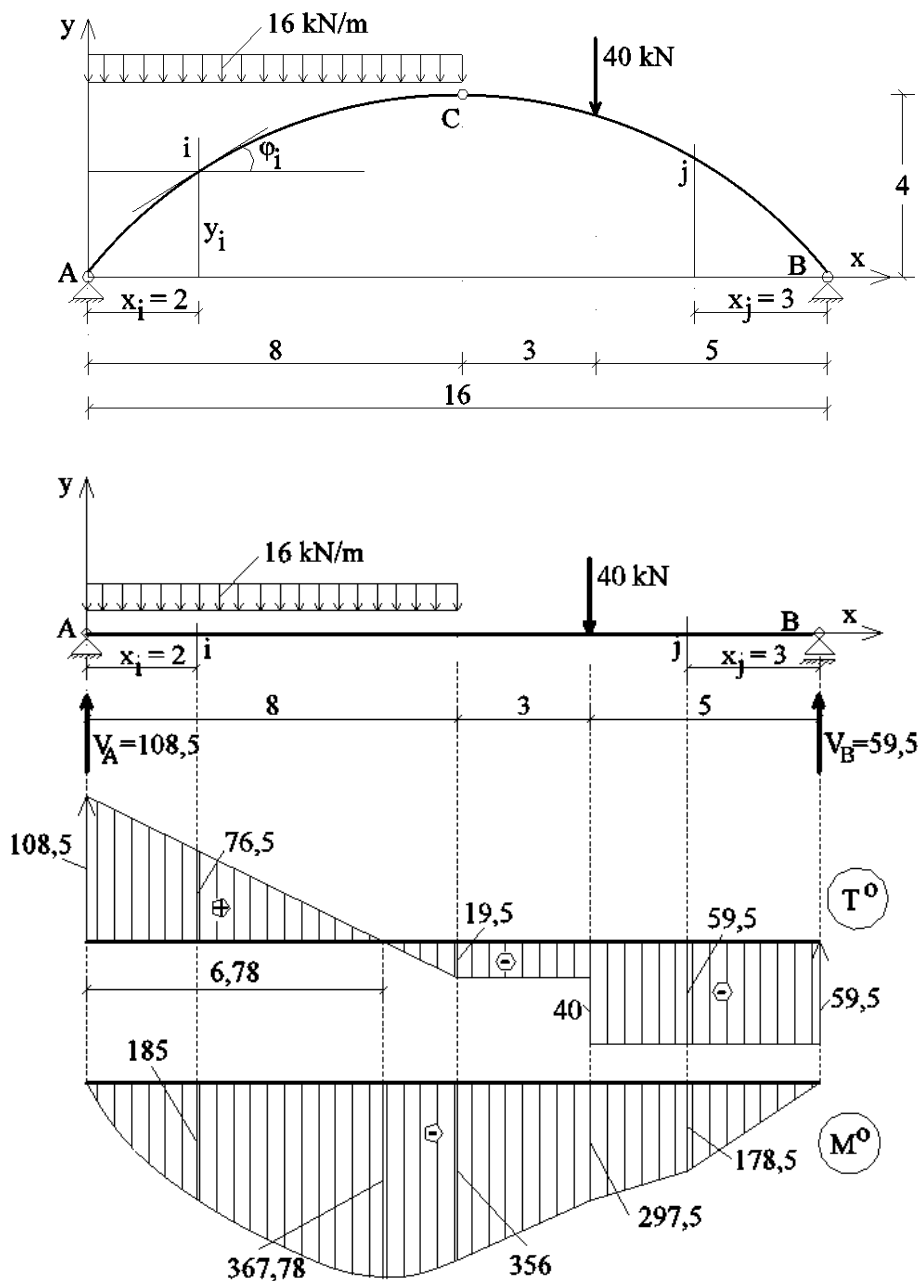


Fig. 4.4

Diagramele de eforturi pentru grinda simplu rezemată atașată arcului sunt trasate în fig. 4.4.

1. Se determină reacțiunile după principiile generale de calcul aplicate structurilor cu trei articulații:

Se scriu ecuațiile de echilibru global ale arcului față de cele două reazeme cu terenul:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 16V_B - 11 \cdot 40 - 16 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 59,50kN$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 16V_A - 5 \cdot 40 - 16 \cdot 8 \cdot 12 = 0 \Rightarrow V_A = 108,50kN$$

$$\text{Verificare: } \sum F_y = 59,50 + 108,50 - 16 \cdot 8 - 40 = 0$$

Se scriu ecuațiile de moment nul față de articulația intermediară, la stânga și la dreapta acesteia.

$$\sum M_C^{st} = 108,5 \cdot 8 - 4 \cdot H_A - 16 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_A = 89,00kN$$

$$\sum M_C^{dr} = 59,5 \cdot 8 - 4 \cdot H_B - 3 \cdot 40 = 0 \Rightarrow H_B = 89,00kN$$

$$\frac{M_C^0}{f} = 89,00kN$$

Se poate observa că valoarea reacțiilor orizontale (împingerea arcului) este mare, fapt caracteristic acestei categorii de structuri.

2. Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunilor pentru care se dorește determinarea eforturilor.

*Ecuația parabolei este:*

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

$$y' = tg\varphi_i = \frac{4f}{l^2} (l-2x)$$

*Secțiunea i:*

$$x_i = 2m$$

$$y_i = \frac{4 \cdot 4}{16^2} 2 \cdot 14 = 1,75m$$

$$y'_i = tg\varphi_i = \frac{4f}{l^2} (l-2x_i) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 12 = 0,75$$

$$\varphi_i = 36,87^\circ \Rightarrow \sin\varphi_i = 0,600 ; \cos\varphi_i = 0,800$$

*Secțiunea j:*

$$x_j = 13m$$

$$y_j = \frac{4 \cdot 4}{16^2} 13 \cdot 3 = 2,438m$$

$$y'_j = tg\varphi_j = \frac{4f}{l^2} (l-2x_j) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot (-10) = -0,625$$

$$\varphi_j = 148^\circ \Rightarrow \sin\varphi_j = -0,530 ; \quad \cos\varphi_j = 0,848$$

3. Se calculează eforturile în cele două secțiuni:

A. Secțiunea  $i$

a) Se face analogia cu grinda simplu rezemată atașată arcului și se utilizează expresiile de calcul ale eforturilor prezentate în paragraful 4.1.

În secțiunea  $i$ , pe grinda simplu rezemată atașată arcului eforturile sunt:

$$T_i^0 = 76,50kN$$

$$M_i^0 = 185,00kNm$$

Eforturile în secțiunea  $i$  a arcului sunt:

$$N_i = -T_i^0 \sin\varphi_i - H \cos\varphi_i = -76,50 \cdot 0,600 - 89,00 \cdot 0,800 = -177,10kN$$

$$T_i = T_i^0 \cos\varphi_i - H \sin\varphi = 76,50 \cdot 0,800 - 89,00 \cdot 0,600 = 7,80kN$$

$$M_i = M_i^0 - Hy_i = 185,00 - 89,00 \cdot 1,75 = 29,25kNm$$

b) Pentru calculul efortului axial și al forței tăietoare se proiectează forțele direct aplicate care acționează până în secțiunea  $i$  (se parcurge arcul de la stânga la dreapta) pe direcția tangentei trasate în  $i$  la axa arcului, respectiv perpendiculară pe ea:

$$N_i = -108,50 \cdot \sin\varphi_i + 16 \cdot 2 \cdot \sin\varphi_i - 89,00 \cdot \cos\varphi_i = -117,10kN$$

$$T_i = 108,50 \cdot \cos\varphi_i - 16 \cdot 2 \cdot \cos\varphi_i - 89,00 \cdot \sin\varphi_i = 7,80kN$$

Determinarea momentului încovoietor în secțiunea  $i$  se face considerând efectul fiecărei forțe și fibra întinsă de acestea în secțiunea  $i$ , considerată fixată:

$$M_i = 108,50 \cdot 2 - 16 \cdot 2 \cdot 1 - 89,00 \cdot 1,75 = 29,25kNm$$

B. Secțiunea  $j$

Secțiunea  $j$  se află la dreapta articulației arcului, astfel că unghiul pe care-l face tangenta la axa arcului cu orizontala este  $\varphi_j > 90^\circ$ .

a) Utilizând grinda simplu rezemată atașată arcului, eforturile pe aceasta în secțiunea corespunzătoare secțiunii  $j$  de pe arc sunt:

$$T_j^0 = -59,50kN$$

$$M_j^0 = 178,50kNm$$

Eforturile sunt:

$$N_j = -T_j^0 \sin\varphi_j - H \cos\varphi_j = -(-59,50)(-0,530) - 89,00 \cdot 0,848 = -107,007kN$$

$$T_j = T_j^0 \cos\varphi_j - H \sin\varphi_j = -59,50 \cdot 0,848 - 89,00 \cdot (-0,530) = -3,286kN$$

$$M_j = M_j^0 - Hy_j = 178,50 - 89,00 \cdot 2,438 = -38,482kNm$$

b) Având în vedere poziția secțiunii  $j$ , la dreapta secțiunii de cheie și mai apropiată de reazemul B, eforturile în secțiunea  $j$  se pot determina mai ușor, prin această metodă dacă se consideră forțele din dreapta secțiunii (doar reacțiunile din B). În acest caz, pentru proiecția eforturilor se va considera unghiul  $\varphi'_i = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$  pentru care

$$\sin\varphi'_j = 0,530$$

$$\cos\varphi'_j = 0,848$$

Astfel, eforturile sunt:

$$N_j = -V_B \sin\varphi'_j - H \cos\varphi'_j = -107,007kN$$

$$T_j = -V_B \cos\varphi'_j + H \sin\varphi'_j = -59,50 \cdot 0,848 + 89,00 \cdot 0,530 = -3,286kN$$

$$M_j = V_B \cdot 3 - Hy_j = 59,50 \cdot 3 - 89,00 \cdot 2,438 = -38,482kNm$$

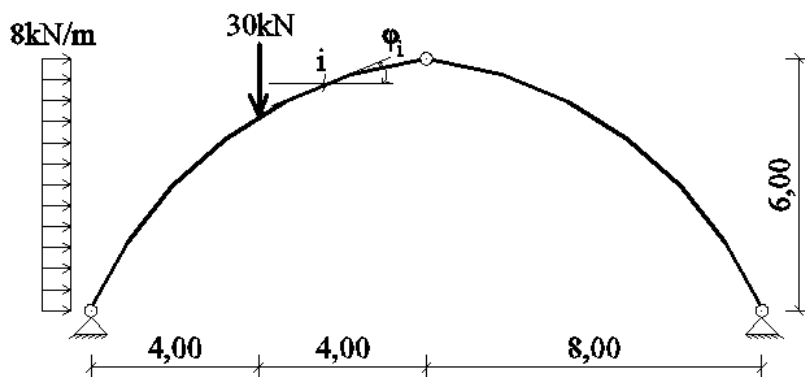
*În cazul încărcării cu forțe verticale, pentru determinarea eforturilor, se poate opta pentru oricare dintre cele două metode prezentate.*

*Dacă pe arc acționează și forțe de altă direcție decât verticală nu se poate face analogia cu grinda simplu rezemată atașată.*

Din analiza diagramelor de moment pe arc și pe grinda simplu rezemată încărcată identic se observă efectul împingerilor dezvoltate în secțiunile de reazem asupra reducerii momentului încovoietor din câmp.

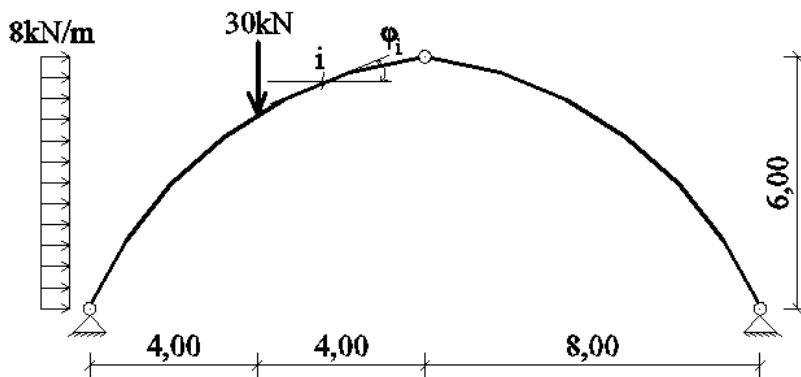
### 4.3. Probleme propuse

4.3.1. Pentru arcul din figura de mai jos se cere să se determine valoarea corectă a momentului încovoiator în secțiunea  $i$ , cunoscând ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5\text{m}$ .



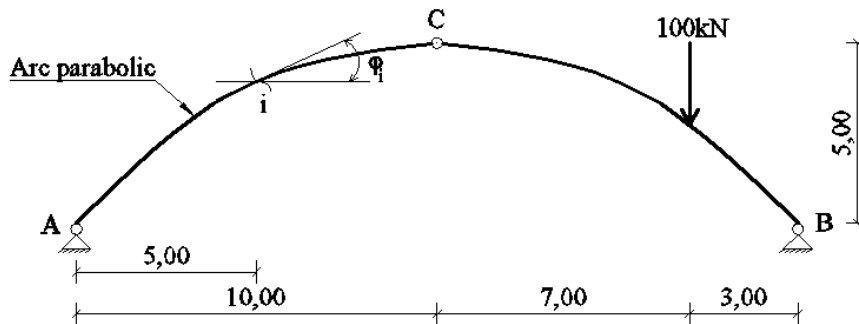
- a) 65,215 kNm
- b) 61,143 kNm
- c) 33,502 kNm
- d) 26,457 kNm
- e) 68,186 kNm

4.3.2. Pentru arcul din figura de mai jos se cere să se determine valoarea corectă a forței tăietoare în secțiunea  $i$ , cunoscând ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5\text{m}$ .



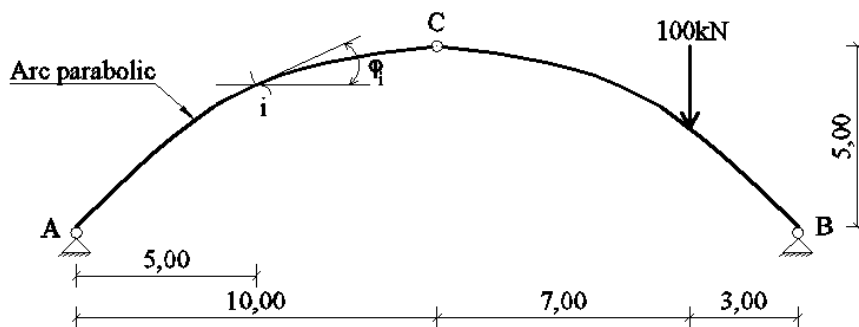
- a) -21,83 kN
- b) -23,46 kN
- c) 23,46 kN
- d) -17,12 kN
- e) 26,48 kN

4.3.3. Să se identifice valoarea corectă a momentului încovoietor în secțiunea  $i$  pentru arcul parabolic din figură. Ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$



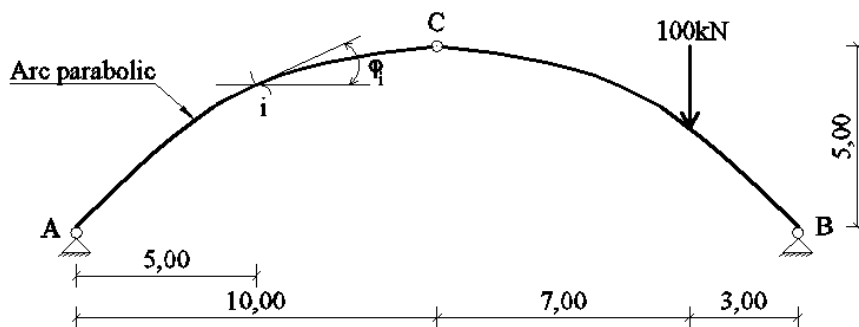
- a) 187,50 kNm
- b) -187,50 kNm
- c) -33,00 kNm
- d) -37,50 kNm
- e) 37,50 kNm

4.3.4. Să se identifice valoarea corectă a forței tăietoare în secțiunea  $i$  pentru arcul parabolic din figură. Ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$



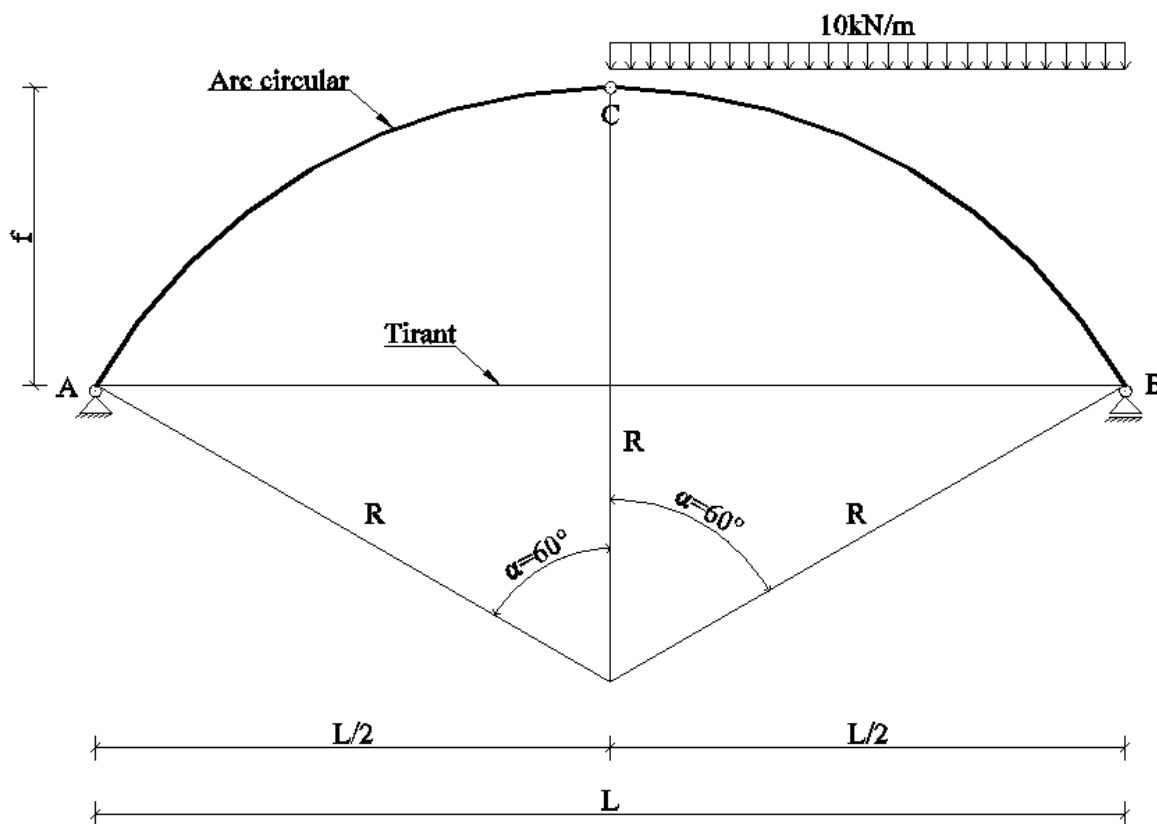
- a) 30,00 kN
- b) -15,00 kN
- c) 33,00 kN
- d) 37,50 kN
- e) 0,00 kN

4.3.5. Să se identifice valoarea corectă a efortului axial în secțiunea  $i$  pentru arcul parabolic din figură. Ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$



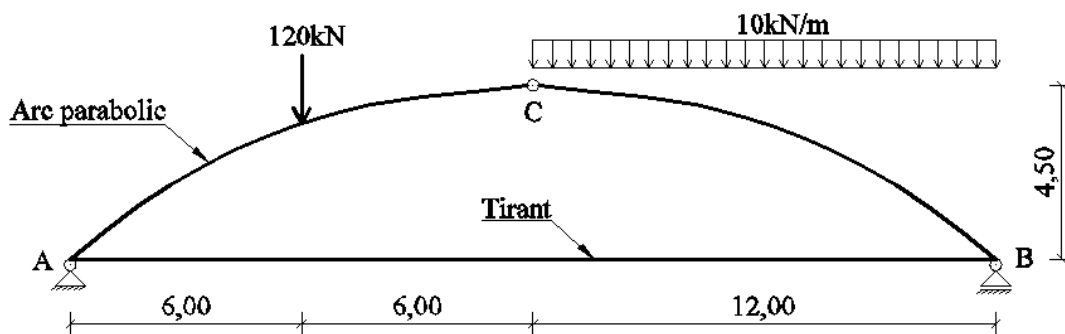
- a) -33,54 kN
- b) 33,00 kN
- c) -30,00 kN
- d) -6,00 kN
- e) 37,50 kN

4.3.6. Să se identifice valoarea corectă a efortului din tirant pentru arcul circular din figură, având raza  $R=15\text{m}$  și unghiul la centru  $2\alpha = 120^\circ$ .



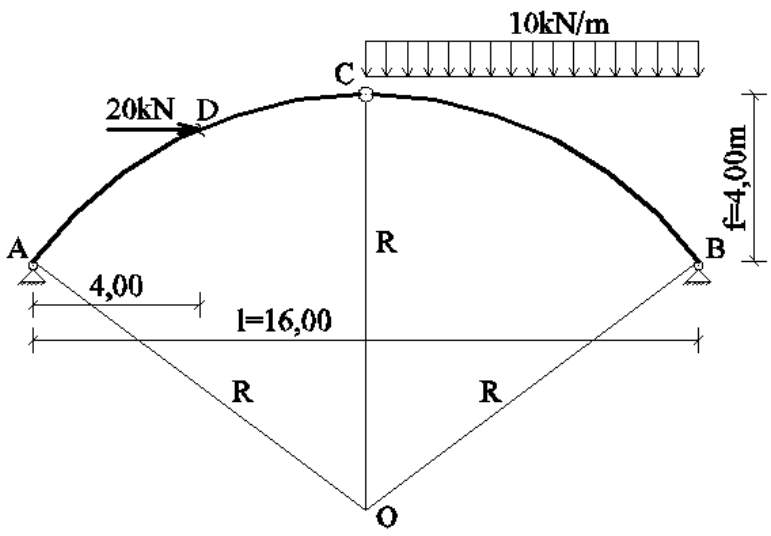
- a) -32,50 kN                      b) 56,25 kN                      c) 281,66 kN  
 d) 32,50 kN                      e) 90,00 kN

4.3.7. Să se identifice valoarea corectă a efortului din tirant pentru arcul parabolic din figură. Ecuația arcului parabolic:  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$



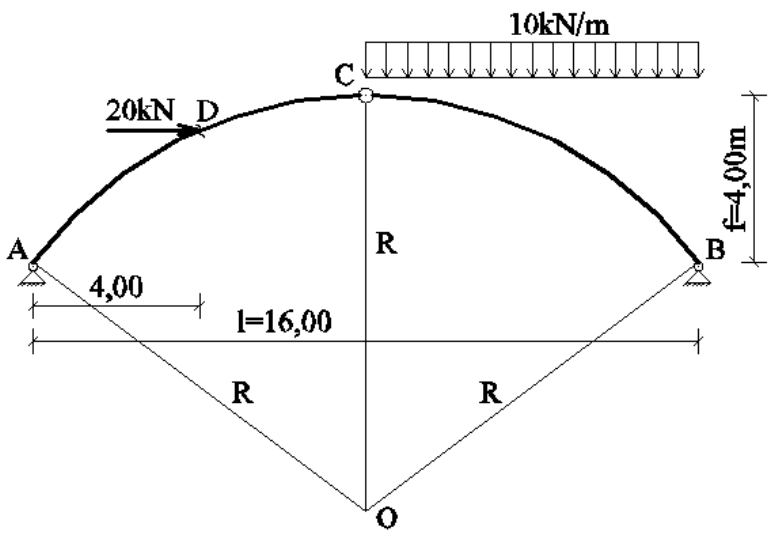
- a) 320,00 kN                      b) -320,00 kN                      c) 160,00 kN  
 d) 120,00 kN                      e) -145,00 kN

4.3.8. Pentru arcul circular din figură, având raza  $R=10\text{m}$ , se cere să se identifice valoarea corectă a efortului axial în punctul  $D^{\text{dr}}$ .



- a)  $50,354\text{kN}$
- b)  $-4,453\text{kN}$
- c)  $-33,878\text{kN}$
- d)  $33,878\text{kN}$
- e)  $-50,354\text{kN}$

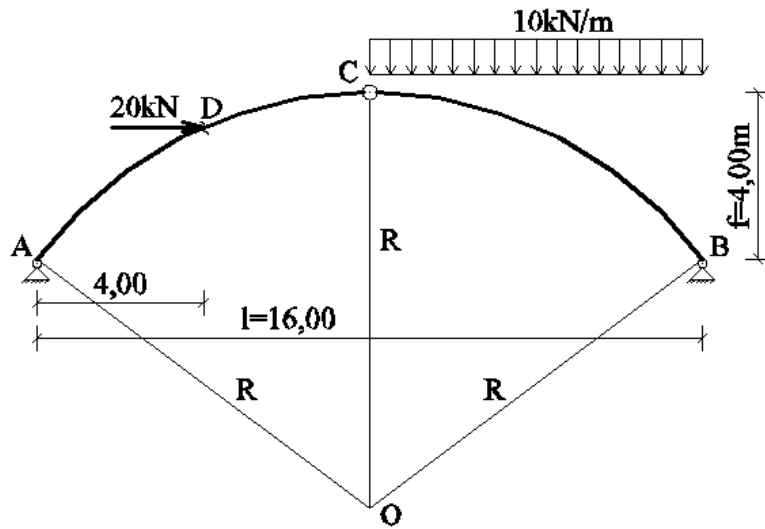
4.3.9. Pentru arcul circular din figură, având raza  $R=10\text{m}$ , se cere să se identifice valoarea corectă a forței tăietoare în punctul  $D^{\text{dr}}$ .



- a)  $50,354\text{kN}$
- b)  $-4,453\text{kN}$
- c)  $-33,878\text{kN}$
- d)  $4,453\text{kN}$
- e)  $-50,354\text{kN}$



4.3.10. Pentru arcul circular din figură, având raza  $R=10\text{m}$ , se cere să se identifice valoarea corectă a momentului încovoiator în punctul D.



- a)  $-24,169\text{kNm}$
- b)  $-4,453\text{kNm}$
- c)  $24,169\text{kNm}$
- d)  $4,453\text{kNm}$
- e)  $-50,354\text{kNm}$

# Capitolul 5: Structuri articulate plane

## 5.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Structurile articulate plane, numite și structuri cu zăbrele, sunt alcătuite din bare drepte articulate în noduri.

Ipozeze simplificatoare acceptate pentru calculul grinzilor cu zăbrele:

- Axele barelor sunt concurente în noduri.
- Încărcările se aplică numai în nodurile structurii.
- Nodurile sunt articulații perfecte  $\Rightarrow$  nu transmit moment încovoietor  $\Rightarrow$  în barele structurii iau naștere numai eforturi axiale.

### Metode de calcul

Vom prezenta doar două dintre metodele de determinare a eforturilor din barele unei structurii cu zăbrele:

- Metoda izolării nodurilor
- Metoda secțiunilor

*Metoda izolării nodurilor* are ca principiu izolarea succesivă a nodurilor structurii prin secționarea barelor concurente în acestea și scrierea de ecuații de echilibru după două direcții perpendiculare din plan. Prin această metodă, pentru a determina efortul dintr-o bară, trebuie izolate toate nodurile până se ajunge la un nod în care se leagă bara respectivă. Pentru a putea scrie echilibrul unui nod, în el trebuie să se întâlnească cel mult două bare cu efort necunoscut.

*Metoda secțiunilor* constă în secționarea barelor pentru care se dorește determinarea eforturilor și scrierea echilibrului unuia dintre corpurile obținute. Pentru orice corp rigid aflat în echilibru se pot scrie trei ecuații. Se recomandă scrierea a două ecuații de sumă de moment nul față de două noduri ale grinzii alese convenabil și a unei ecuații de sumă de proiecții de forțe după o direcție oarecare din plan. Metoda secțiunilor se poate aplica pentru structuri la care se pot realiza secțiuni care să nu taie mai mult de trei bare cu efort necunoscut.

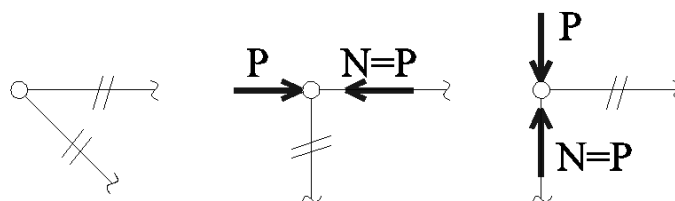
Metoda secțiunilor permite determinarea efortului din orice bară a structurii, cu condiția ca secționarea barei respective să fie posibilă (secțiunea să nu intersecteze mai mult de trei bare cu efort necunoscut), motiv pentru care se utilizează frecvent ca verificare a eforturilor în anumite bare ale structurii.

Reprezentarea grafică a eforturilor axiale determinate pe barele structurii se poate face:

- Prin trasarea pe bare a diagramelor de efort axial (valoare și semn).
- Prin scrierea valorii efortului pe fiecare bară și marcarea prin săgeți a efectului efortului la fața nodului (efort de întindere – iese din nod, efort de compresiune – intră în nod).

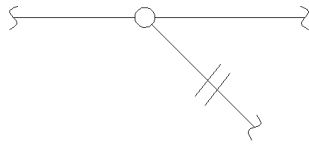
Înainte de a determina eforturile din barele unei structurii, se detectează barele cu efort nul prin identificarea situațiilor:

- a) Dacă într-un nod se întâlnesc două bare, iar nodul nu este încărcat, efortul în cele două bare este nul.



- b) Dacă într-un nod concură trei bare, dintre care una este în prelungirea alteia, iar nodul nu este

încărcat, efortul în cea de-a treia bară este nul.



## 5.2. Exemple de calcul

5.2.1. Structura articulată din figură este rezolvată cu metoda izolării nodurilor.

Se detectează barele cu efortul :

- În nodul 5 se întâlnesc trei bare, nodul 5 este neîncărcat și barele 5-7 și 3-5 sunt în prelungire  $\Rightarrow N_{5-6}=0$ , iar  $N_{5-7}=N_{3-5}$ .
- Întrucât  $N_{5-6}=0$ , în nodul 6 se întâlnește aceeași situație, prin urmare  $N_{3-6}=0$ .
- Se aplică aceeași regulă pentru nodurile 3, 4, 1, 2, rezultând efortul în barele: 3-4, 1-4, 1-2, A-2 și eforturi egale în toate barele aflate în prelungire.

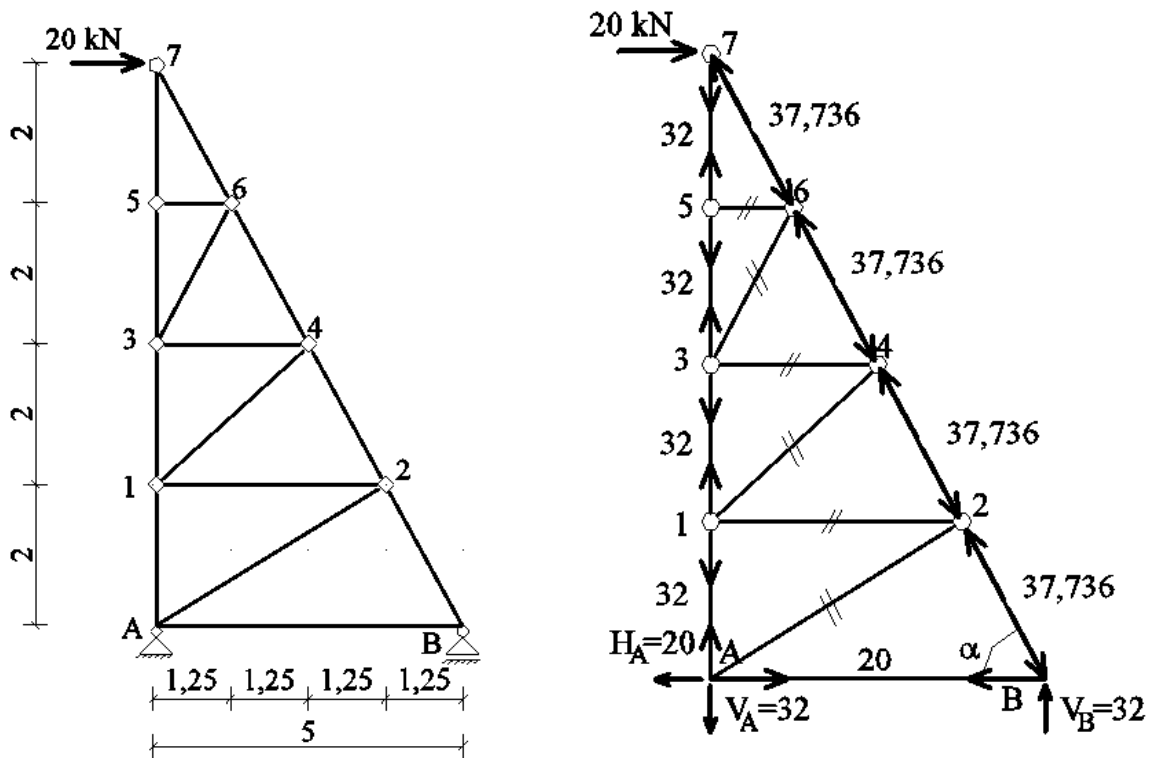


Fig. 5.2

Astfel, din echilibrul nodului 7 rezultă:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 20 + N_{6-7} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_{6-7} = -\frac{20}{0,530} = -37,736 \text{ kN}$$

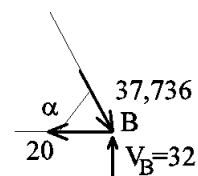
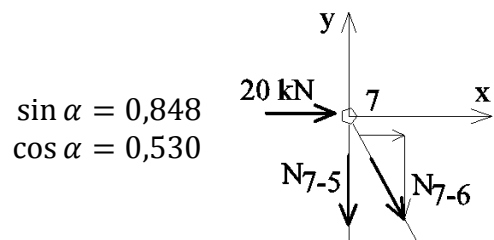
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-7} - N_{6-7} \cdot \sin \alpha = 0$$

Verificare

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 20 \cdot 8 = V_B \cdot 5 \Rightarrow V_B = 32,00 \text{ kN}$$

$V_A = -V_B = 32,00 \text{ kN}$  – cuplu de forțe care anulează valoarea momentului generat de forța orizontală.

Se verifică echilibrul nodului B:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 32,00 - 37,736 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -20 + 37,736 \cdot \cos \alpha = 0$$

5.2.2. Pentru structura cu zăbrele din figura 5.3 se determină eforturile axiale în toate barele acesteia prin metoda izolării nodurilor și se verifică, cu metoda secțiunilor, eforturile în barele 1-2, 2-3, 2-B.

A. Metoda izolării nodurilor

$$\sin \alpha = 0,866$$

$$\cos \alpha = 0,500$$

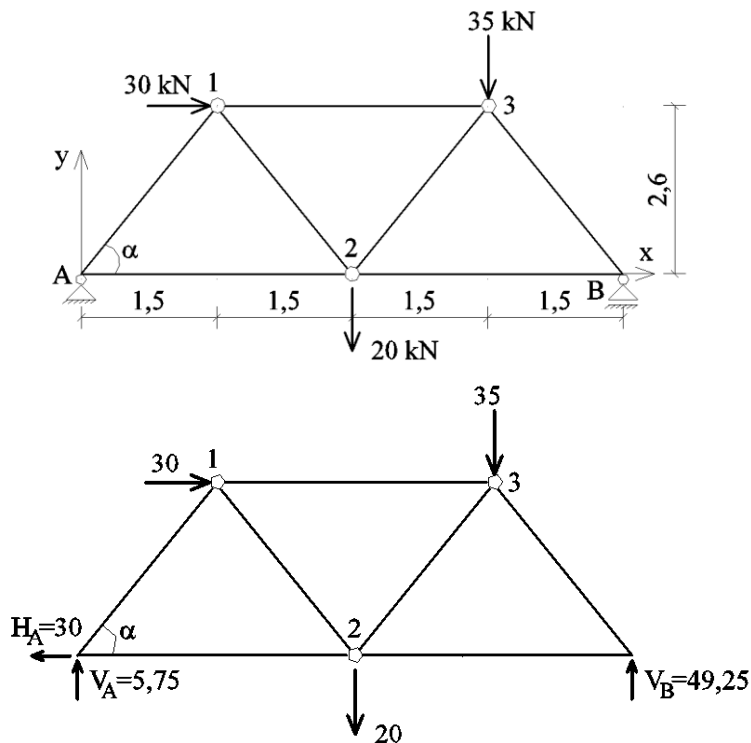


Fig. 5.3

1. Se calculează reacțiunile, scriind echilibrul global al structurii față de cele două reazeme cu terenul:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 \cdot V_B - 35 \cdot 4,5 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 2,6 = 0 \Rightarrow V_B = 49,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 30,00 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 6 \cdot V_A - 35 \cdot 1,5 - 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2,6 = 0 \Rightarrow V_A = 5,75 \text{ kN}$$

2. Se izolează pe rând nodurile structurii prin secționarea barelor concurente în acestea și se scriu ecuații de echilibru în jurul fiecărui nod.

În nodul A sunt conectate două bare cu efort necunoscut  $\Rightarrow$  se pot scrie ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{A-1} \cdot \sin \alpha + 5,75 = 0$$

$$\Rightarrow N_{A-1} = -6,640 \text{ kN}$$

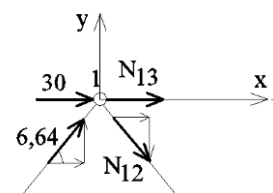
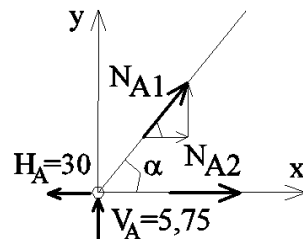
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{A-1} \cdot \cos \alpha + N_{A-2} - 30 = 0$$

$$\Rightarrow N_{A-2} = 33,320 \text{ kN}$$

Efortul în bara A-1 fiind calculat, se observă că în nodul 1 se întâlnesc doar două bare cu efort necunoscut  $\Rightarrow$  se scrie echilibrul nodului 1.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1-2} \cdot \sin \alpha + 6,640 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = 6,640 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{1-2} \cdot \cos \alpha + 6,640 \cdot \cos \alpha + 30 + N_{1-3} = 0 \Rightarrow N_{1-3} =$$

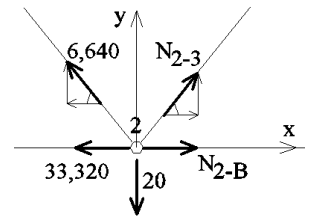


36,640kN

Eforturi egale și de semne contrare în diagonale

Echilibrul nodului 2:

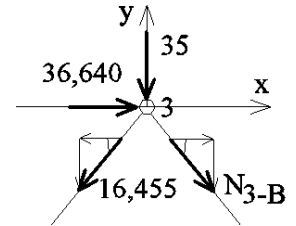
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot \sin \alpha + 6,640 \cdot \sin \alpha - 20 = 0 \\ &\Rightarrow N_{2-3} = 16,455 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot \cos \alpha - 6,640 \cdot \cos \alpha - 33,320 + N_{2-B} = 0 \\ &\Rightarrow N_{2-B} = 28,412 \text{ kN} \end{aligned}$$



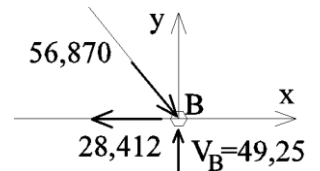
Echilibrul nodului 3:

Singura bară cu efort necunoscut este 3-B. Este suficientă o singură ecuație pentru determinarea acestuia, cea de-a doua ecuație de echilibru se folosește ca verificare.

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{3-B} \cdot \sin \alpha - 16,455 \cdot \sin \alpha - 35 = 0 \Rightarrow N_{3-B} = -56,870 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -56,870 \cdot \cos \alpha - 16,455 \cdot \cos \alpha + 36,64 = 0 \end{aligned}$$



Tot în scopul verificării corectitudinii valorilor eforturilor calculate se izolează nodul B și se scrie ecuația de echilibru a acestuia.



Rezultatele, valorile calculate ale eforturilor din barele structurii, au fost marcate pe structură. Săgețile de pe bare indică efectul eforturilor asupra nodului. Se poate observa astfel, că în talpa inferioară a grinzii se dezvoltă eforturi de întindere, în timp ce talpa superioară este comprimată.

Calculul trebuie efectuat cu precizie de cel puțin trei cifre zecimale.

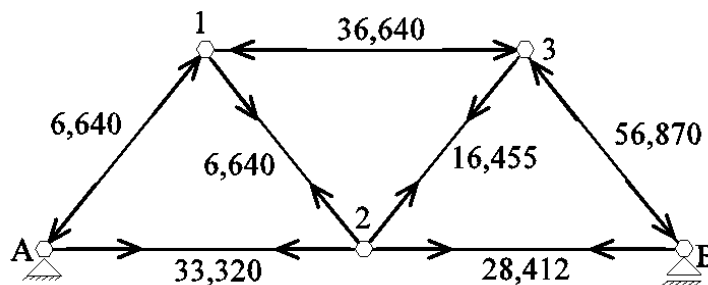


Fig. 5.4

### B Metoda secțiunilor

Se dorește determinarea eforturilor din barele 1-3, 2-3, 2-B. Pentru aceasta se secționează grinda prin tăierea barelor respective și se scrie echilibrul corpului A-1-2.

Se scriu două ecuații de moment față de două noduri, alese astfel încât în fiecare ecuație să intervină câte o singură necunoscută.

Prin nodul 2 trec suporturile eforturilor  $N_{2-3}$  și  $N_{2-B}$ , prin urmare, scriind sumă de moment egală cu zero față de nodul 2, în această ecuație intervine ca necunoscută doar  $N_{1-3}$ .

O situație similară se întâlnește pentru nodul 3 în care se intersectează eforturile din barele 1-3 și 2-3.

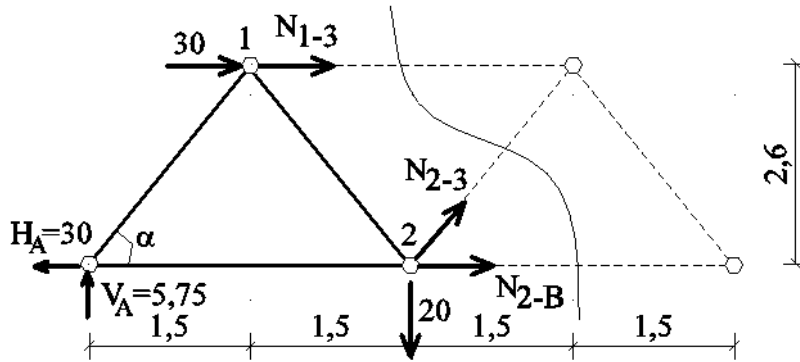


Fig. 5.5

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 5,75 + N_{1-3} \cdot 2,6 + 30 \cdot 2,6 = 0 \Rightarrow N_{1-3} = 36,640 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow 4,5 \cdot 5,75 + 30 \cdot 2,6 - N_{2-B} \cdot 2,6 - 20 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow N_{2-B} = 28,412 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot \sin \alpha + 5,75 - 20 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = 16,455 \text{ kN}$$

Doar în barele secționate se pune în evidență efortul axial. Barele întregi fac parte din ansamblul izolat.

S-au obținut aceleași valori prin ambele metode.

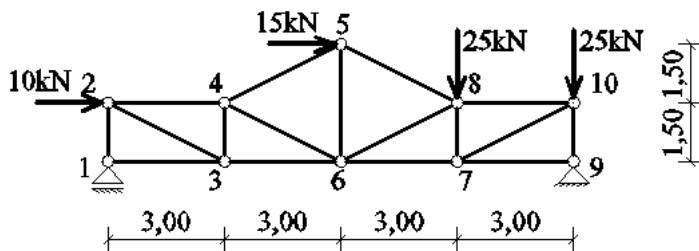
Caracteristici comune celor două metode de calcul a structurilor cu zăbrele:

- Ambele metode au aplicabilitate limitată de numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie în fiecare situație.
- Eforturile se determină scriind echilibrul părții izolate prin secționarea barelor cu efort necunoscut.

Dacă pentru o structură toate secțiunile posibile taie mai mult de trei bare și în noduri se intersectează mai mult de două bare cu efort necunoscut, pentru determinarea eforturilor în anumite bare se admit combinații ale celor două metode prezentate.

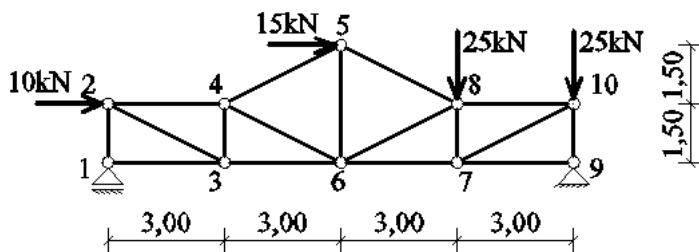
### 5.3. Probleme propuse

5.3.1. Să se identifice efortul axial  $N_{4-5}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



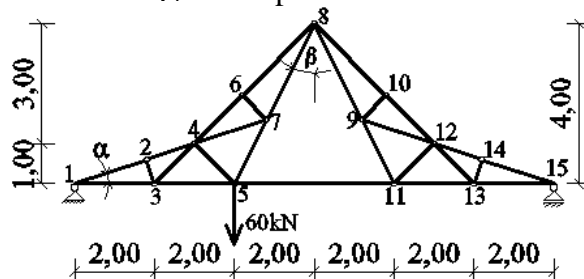
- a) -11,20 kN
- b) -8,39 kN
- c) 12,56 kN
- d) -17,98 kN
- e) 15,75 kN

5.3.2. Să se identifice efortul axial  $N_{7-8}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



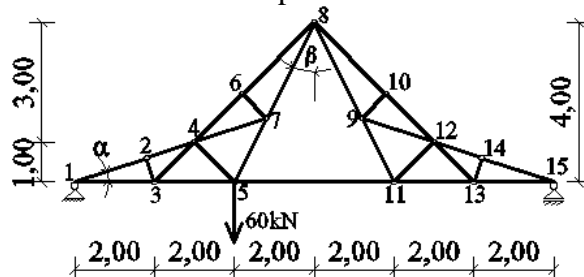
- a) 22,50 kN
- b) -23,75 kN
- c) 15,85 kN
- d) 16,98 kN
- e) -15,85 kN

5.3.3. Să se identifice efortul axial  $N_{4-7}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



- a) 120kN
- b) -50kN
- c) 0kN
- d) 50kN
- e)  $40\sqrt{10}$ kN

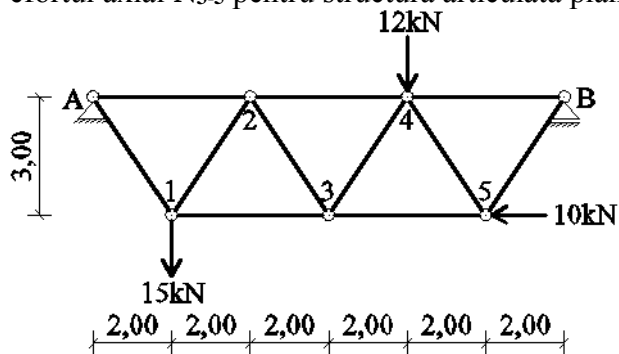
5.3.4. Să se identifice efortul axial  $N_{3-5}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



- a) -120kN
- b) 120kN
- c) 0kN
- d)  $126,49$ kN
- e)  $-40\sqrt{10}$ kN

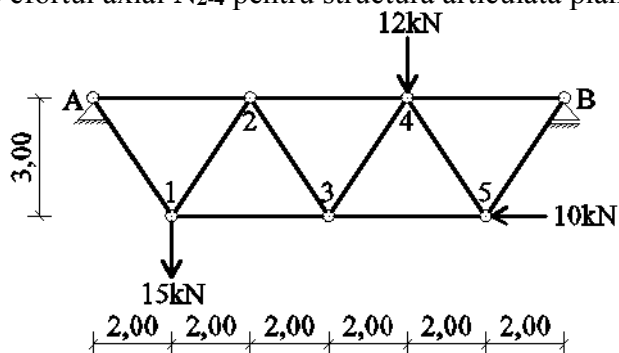


5.3.5. Să se identifice efortul axial  $N_{3-5}$  pentru structura articulată plană din figură.



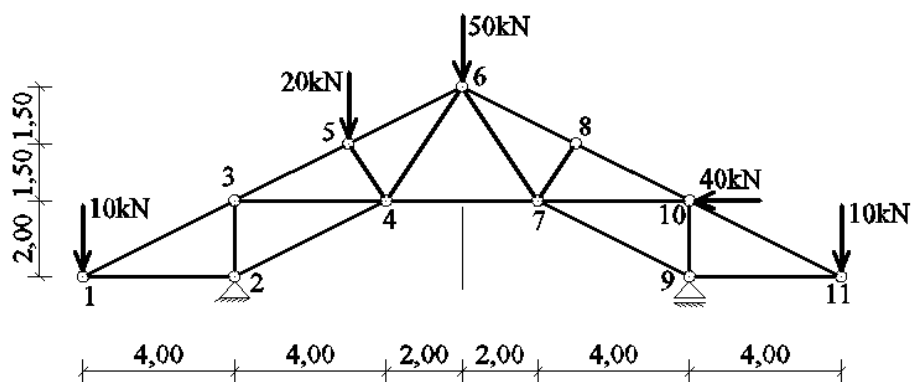
- a) -20,25 kN
- b) -8,65 kN
- c) 15,59 kN
- d) 17,98 kN
- e) 7,33 kN

5.3.6. Să se identifice efortul axial  $N_{2-4}$  pentru structura articulată plană din figură.



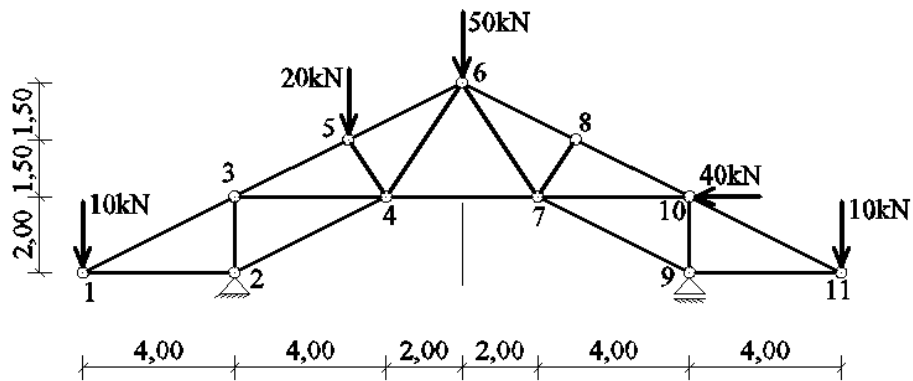
- a) -31,26 kN
- b) -24,20 kN
- c) 31,26 kN
- d) -18,00 kN
- e) 15,75 kN

5.3.7. Să se identifice efortul axial  $N_{3-4}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



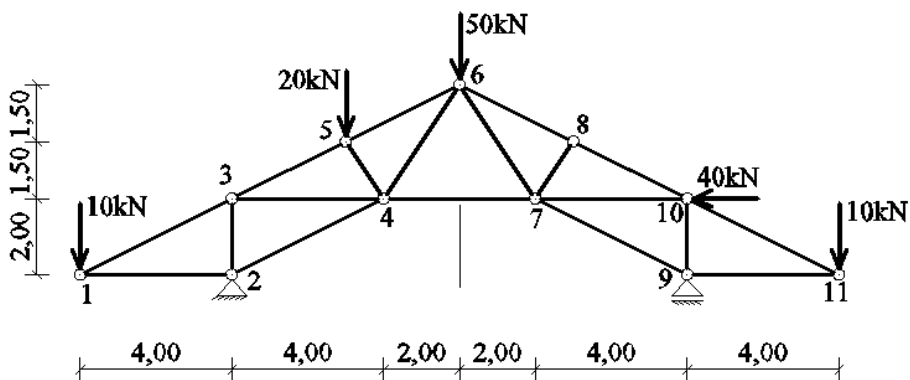
- a) 52,67 kN
- b) 18,03 kN
- c) 65,50 kN
- d) 29,81 kN
- e) -21,31 kN

5.3.8. Să se identifice efortul axial  $N_{3-5}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



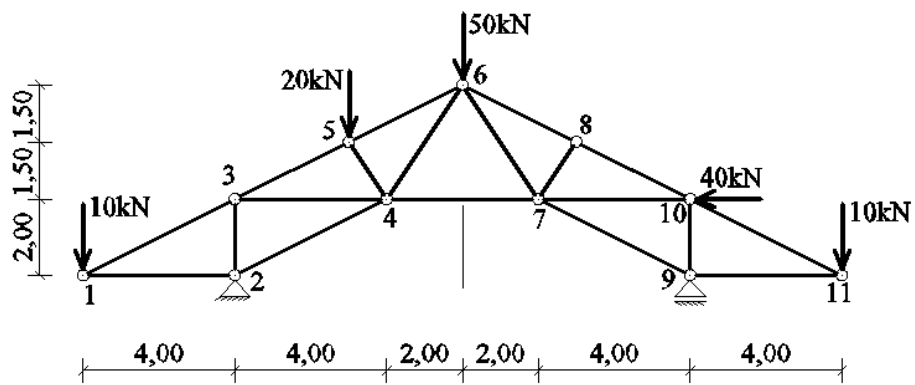
- a) -36,52kN
- b) -18,03 kN
- c) -12,02 kN
- d) -29,81 kN
- e) -21,31 kN

5.3.9. Să se identifice efortul axial  $N_{6-7}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



- a) -32,54 kN
- b) -16,21kN
- c) -18,53 kN
- d) -12,02kN
- e) -21,31 kN

5.3.10. Să se identifice efortul axial  $N_{7-10}$  corect pentru structura articulată plană din figură.



- a) 10,53 kN
- b) 16,21kN
- c) 7,33 kN
- d) 32,54 kN
- e) 21,31 kN

# Capitolul 6: Calculul eforturilor cu ajutorul Principiului Lucrului Mecanic Virtual

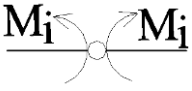
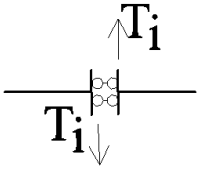
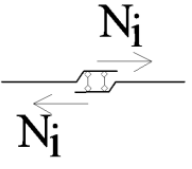
## 6.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Echilibrul unui corp rigid se poate exprima și utilizând Principiul Lucrului Mecanic Virtual (P.L.M.V.) nul.

Acest principiu se enunță astfel:

*Un sistem de forțe este în echilibru dacă și numai dacă pentru orice deplasare virtuală, infinit mică, compatibilă cu legăturile sistemului, lucru mecanic efectuat de forțe parcurgând deplasarea virtuală dată este egal cu zero.*

Pentru a determina valoarea unui efort într-o secțiune, utilizând P.L.M.V., trebuie parcurse următoarele etape:

- În punctul în care se dorește determinarea unui efort se suprimă legătura corespunzătoare acestuia, rezultând un mecanism cu un grad de libertate cinematică.
  - Astfel, când se calculează un moment încovoietor, se suprimă legătura aferentă acestuia, rezultând o legătură care nu preia moment încovoietor (permite rotirea relativă a capetelor barelor). Momentul, necunoscut, se exteriorizează de o parte și de alta a articulației.
 
  - Pentru determinarea forței tăietoare, se suprimă legătura aferentă acesteia, obținând o legătură care permite glisarea relativă a fețelor secțiunii pe direcția perpendiculară pe axa barei.
 
  - Pentru calculul efortului axial într-o secțiune se suprimă, în punctul respectiv, legătura corespunzătoare acestuia și se obține o legătură care permite glisarea relativă a fețelor secțiunii pe direcția axei barei.
 
- Pentru mecanismul obținut, se trasează diagramele de deplasări după două direcții perpendiculare din plan. Toate ordonatele diagramelor de deplasări se determină în funcție de un singur parametru care se alege arbitrar (rotirea unui corp sau deplasarea unei secțiuni).
- Se scrie ecuația de lucru mecanic virtual, din care se determină necunoscuta.

*Lucrul mecanic se consideră pozitiv dacă forța și deplasarea (respectiv momentul încovoietor și rotirea) au același sens.*

## 6.2. Exemplu de calcul.

Pentru structura din figura 6.1 se vor determina eforturile din secțiunea  $i$ , utilizând principiul lucrului mecanic virtual nul.

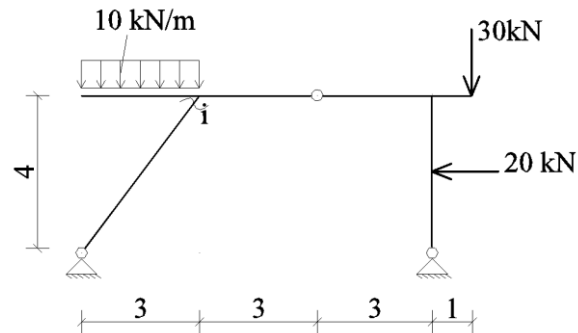


Fig. 6.1

### a. Calculul momentului încovoietor din secțiunea $i$ (Fig. 6.2)

- În  $i$  se suprimă legătura aferentă momentului încovoietor (se introduce o articulație care permite rotirea relativă a capetelor barelor conectate) și se exteriorizează perechea de momente  $M_i$  de o parte și de alta a articulației astfel formate.

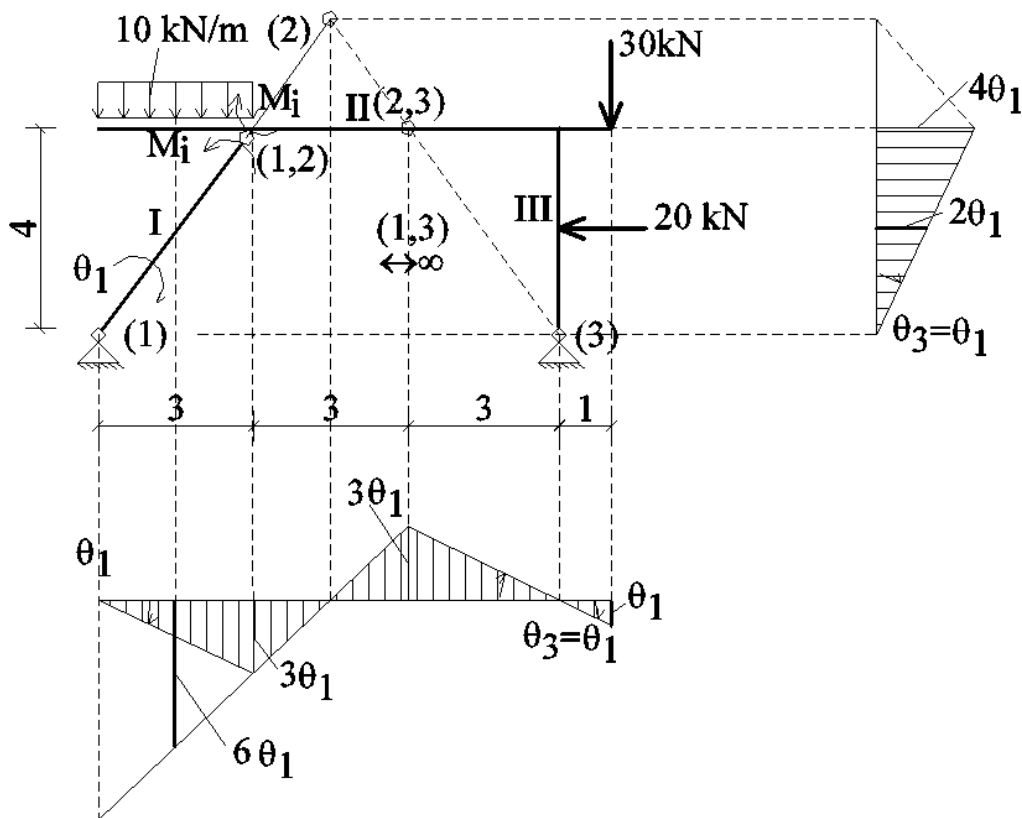


Fig. 6.2

- Pe mecanismul astfel obținut, se dă o deplasare virtuală unui corp și se trasează diagramele de deplasări pe verticală și pe orizontală. Se alege deplasarea unui corp (rotirea unui corp sau translația unei secțiuni) ca parametru, în funcție de care se determină toate celelalte ordonate ale diagramei (Fig. 6.2).
- Se calculează deplasările (translații și/sau rotiri) în dreptul tuturor forțelor direct aplicate (forțe sau momente):

Se alege  $\theta_1$  ca parametru

$\Rightarrow \delta_{12} = 3\theta_1; \delta_{12} = \delta_{23}$  datorită simetriei diagramei

$$\theta_3 = \frac{\delta_{23}}{3} = \theta_1$$

$\Rightarrow$  Corpurile *I* și *III* au deplasări paralele, centrul (1,3) fiind la infinit.

$$\theta_2 = 2\theta_1$$

Valorile deplasărilor în dreptul forțelor direct aplicate pe structură sunt marcate pe diagramele de deplasare (Fig. 6.2).

Se scrie ecuația de lucru mecanic virtual nul:

$$10 \cdot 3 \cdot 6\theta_1 - M_i \theta_1 - M_i 2\theta_1 + 30\theta_1 - 20 \cdot 2\theta_1 = 0$$

Lucrul mecanic este pozitiv dacă forța și deplasarea (respectiv momentul și rotirea) au același sens  $\Rightarrow M_i = 56,67 \text{ kNm}$ .

**b. Calculul forței tăietoare din secțiunea *i*** (Fig. 6.3)

- În *i* se suprimă legătura aferentă forței tăietoare (se obține o legătură care permite glisarea relativă a fețelor secțiunii pe direcția perpendiculară pe bară) și se exteriorizează perechea de forțe tăietoare  $T_i$
- Se dă o deplasare virtuală unui corp și se trasează diagramele de deplasări ale mecanismului format. Se calculează deplasările în dreptul punctelor de aplicație ale forțelor și pe direcția acestora, în funcție de parametrul ales.

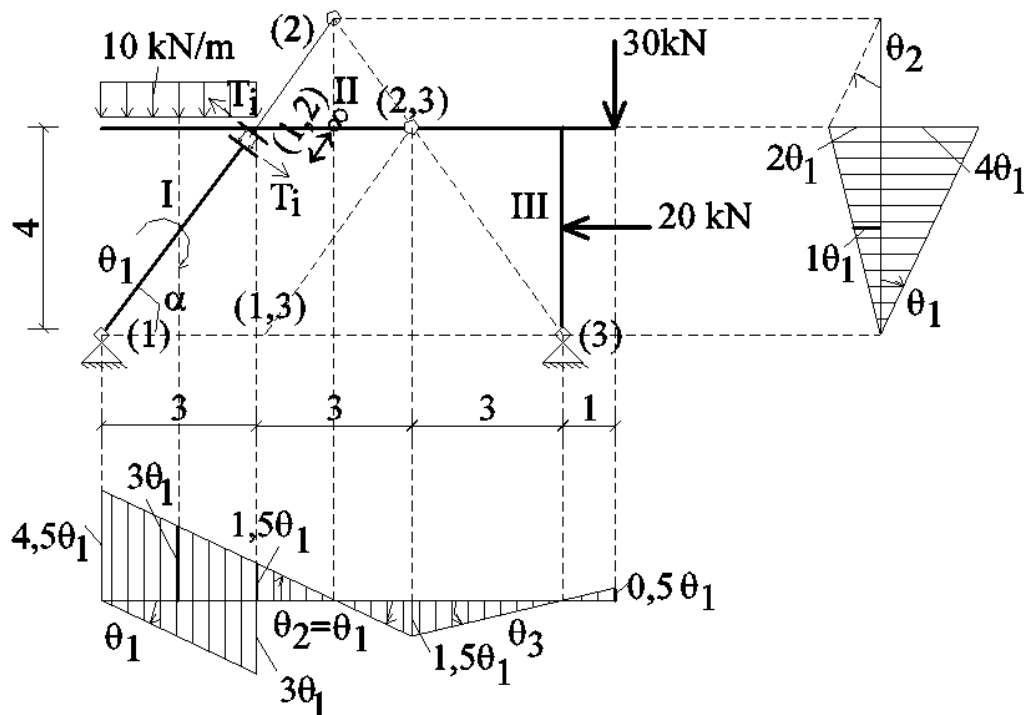


Fig. 6.3

$\theta_2 = \theta_1 \Rightarrow$  corpurile *I* și *II* se deplasează paralel, centrul lor relativ aflându-se la infinit pe direcția axei barei (direcția pendulilor)

$$\delta_{23} = 1,5\theta_1$$

$$\delta_1 = 3\theta_1$$

$$\delta_2 = 1,5\theta_1$$

$$\delta_{12} = 4,5\theta_1$$

$$\theta_3 = \frac{\delta_{23}}{3} = 0,5\theta_1$$

Ecuția de lucru mecanic:

Întrucât secțiunea  $i$  se află pe bara înclinată, forța tăietoare  $T_i$  are componente după direcția verticală,  $T_i \cos \alpha$ , și după direcția orizontală,  $T_i \sin \alpha$ , și implicit efectuează lucru mecanic după aceste direcții. Valorile deplasărilor în dreptul tuturor forțelor (și a efortului exteriorizat) sunt vizualizate în figura 6.3.

$$T_i \cos \alpha \cdot 3\theta_1 + T_i \cos \alpha \cdot 1,5\theta_1 - 10 \cdot 3 \cdot 3\theta_1 - 30 \cdot 0,5\theta_1 + 20 \cdot \theta_1 + T_i \sin \alpha 4\theta_1 + T_i \sin \alpha 2\theta_1 = 0$$

$$T_i = 11,33 \text{ kN}$$

c. *Calculul efortului axial din secțiunea  $i$*  (Fig. 6.4)

- În  $i$  se suprimă legătura aferentă efortului axial (se obține o legătură care permite glisarea relativă în lungul axei barei) și se exteriorizează perechea de forțe axiale  $N_i$ .
- Se dă o deplasare virtuală unui corp și se trasează diagramele de deplasări ale mecanismului format. Se calculează deplasările în dreptul punctelor de aplicație ale forțelor și pe direcția acestora în funcție de parametrul ales.

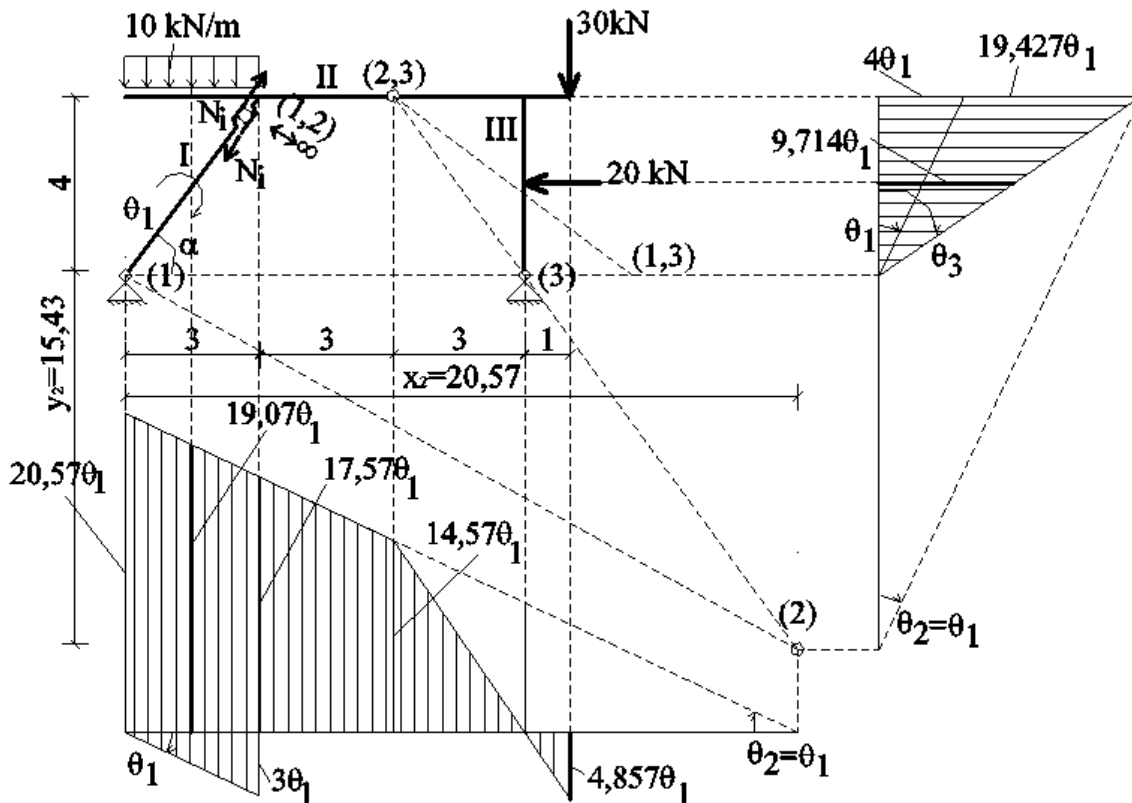


Fig. 6.4

Se determină poziția centrului (2), aflat la intersecția dreptelor: (1), (1,2) și (3), (2,3).

Se scriu ecuațiile celor două drepte exprimate prin pantele lor:

$$(1), (1,2): \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{y_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{3x_2}{4} \quad (3), (2,3): \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{x_2 - 9} = \frac{4}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{4(x_2 - 9)}{3}$$

se egalează expresiile ordonatei  $y_2$

$$\frac{4(x_2 - 9)}{3} = \frac{3x_2}{4} \Rightarrow x_2 = 20,57 \text{ m}$$

$\theta_2 = \theta_1 \Rightarrow$  corpurile *I* și *II* se deplasează paralel, centrul lor relativ aflându-se la infinit pe direcția perpendiculară pe axei barei (direcția pendulilor).

$$\delta_{23} = 14,57\theta_1$$

$$\delta_1 = 3\theta_1$$

$$\delta_2 = 17,57\theta_1$$

$$\delta_{12} = 20,57\theta_1$$

$$\theta_3 = \frac{\delta_{23}}{3} = 4,857\theta_1$$

*Ecuția de lucru mecanic:*

Similar forței tăietoare, efortul axial  $N_i$  are componente după direcția verticală,  $N_i \sin \alpha$ , și după direcția orizontală,  $N_i \cos \alpha$ , și efectuează lucru mecanic după aceste direcții. Valorile deplasărilor în dreptul tuturor forțelor (și a efortului exteriorizat) sunt vizualizate în figura 6.4.

$$\sin \alpha = 0,8; \quad \cos \alpha = 0,6$$

$$-N_i \cdot \sin \alpha \cdot 3\theta_1 - N_i \cdot \sin \alpha \cdot 17,57\theta_1 - 10 \cdot 3 \cdot 19,07\theta_1 + 30 \cdot 4,857\theta_1 - 20 \cdot 9,714\theta_1 - N_i \cdot \cos \alpha \cdot 19,427\theta_1 + N_i \cdot \cos \alpha \cdot 4\theta_1 = 0$$

$$N_i = -24,14 \text{ kN}$$

Rezultatele obținute se pot verifica prin metoda clasică. Astfel, în figura 6.5 sunt marcate valorile reacțiunilor din reazemul A, cu care se pot calcula cu ușurință eforturile în secțiunea *i* de pe bara înclinată.

$$M_i = 26,11 \cdot 3 - 5,415 \cdot 4 = 56,67 \text{ kNm}$$

$$T_i = 26,11 \cdot \cos \alpha - 5,415 \cdot \sin \alpha = 11,33 \text{ kN}$$

$$N_i = -26,11 \cdot \sin \alpha - 5,415 \cdot \cos \alpha = -24,14 \text{ kN}$$

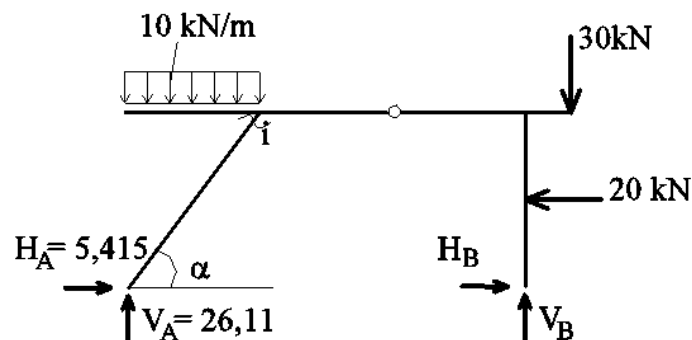
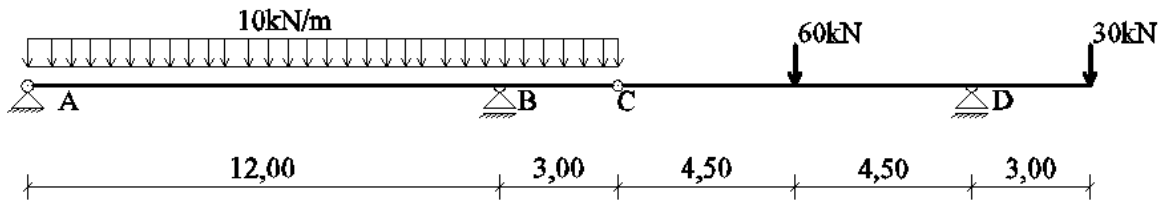


Fig. 6.5



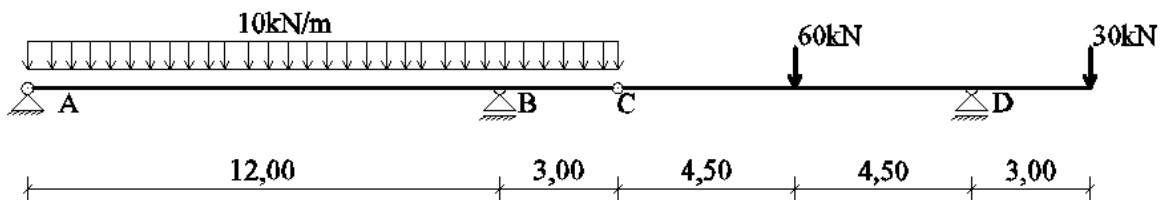
### 6.3. Probleme propuse

6.3.1. Utilizând P.L.M.V. să se determine reacțiunea  $V_B$  la structura de mai jos:



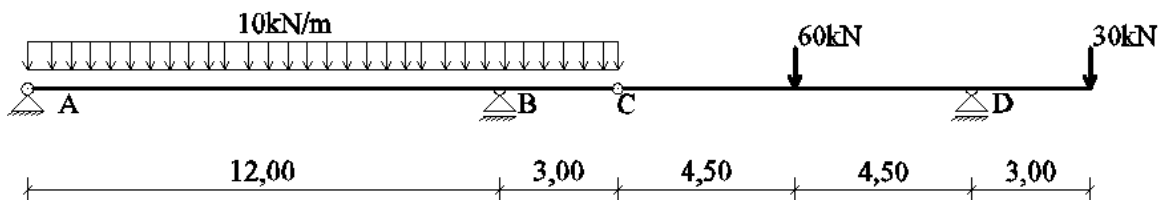
- a) 118,75 kN
- b) 98,25 kN
- c) 120,00 kN
- d) 58,50 kN
- e) 108,75 kN

6.3.2. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_B$  la structura de mai jos:



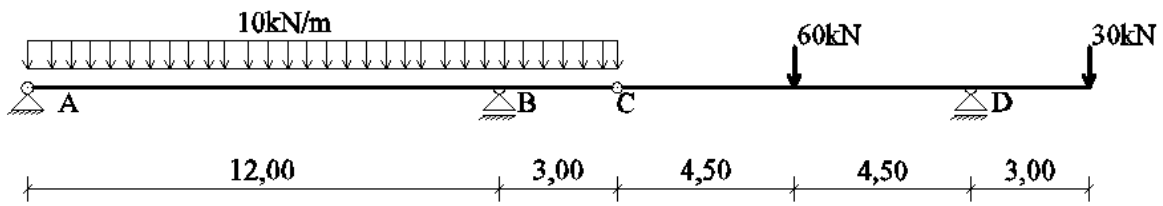
- a) 95,00 kNm
- b) -105,00 kNm
- c) 115,00 kNm
- d) -125,00 kNm
- e) 135,00 kNm

6.3.3. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_D$  la structura de mai jos:



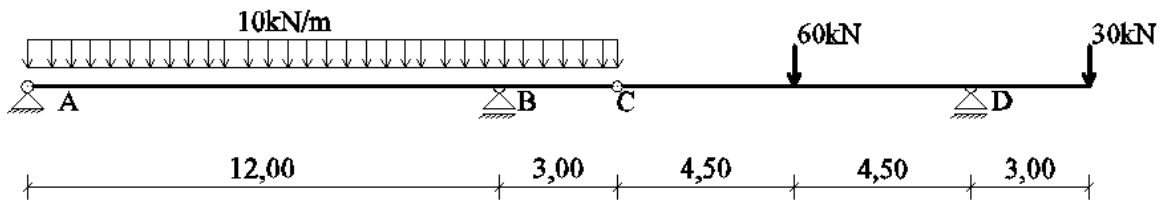
- a) -60,00 kNm
- b) 75,00 kNm
- c) -90,00 kNm
- d) 105,00 kNm
- e) 120,00 kNm

6.3.4. Utilizând P.L.M.V. să se determine forța tăietoare  $T_{B, \text{stânga}}$  la structura de mai jos:



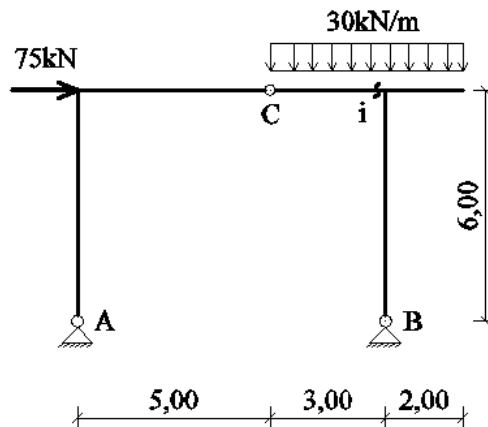
- a) 68,75 kN
- b) -86,25 kN
- c) 50,00 kN
- d) -68,75 kN
- e) 86,25 kN

6.3.5. Utilizând P.L.M.V. să se determine forța tăietoare  $T_{B, \text{dreapta}}$  la structura de mai jos:



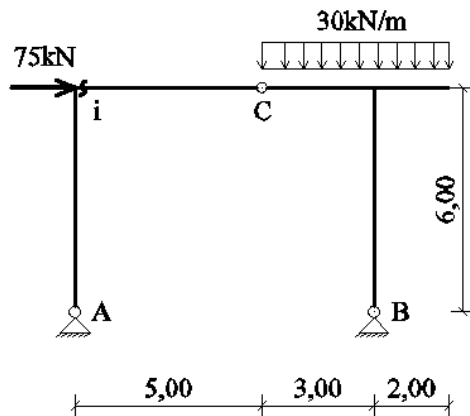
- a) -75,00 kN
- b) -50,00 kN
- c) 25,00 kN
- d) 75,00 kN
- e) 50,00 kN

6.3.6. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_i$ , în secțiunea i, la structura de mai jos:



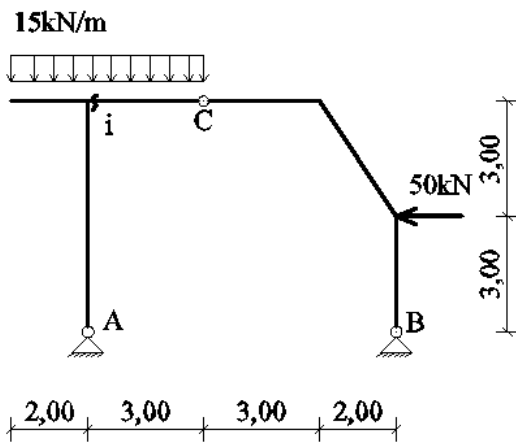
- a) -275,625 kNm
- b) -255,065 kNm
- c) 290,125 kNm
- d) -260,125 kNm
- e) 295,065 kNm

6.3.7. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_i$ , în secțiunea i, la structura de mai jos:



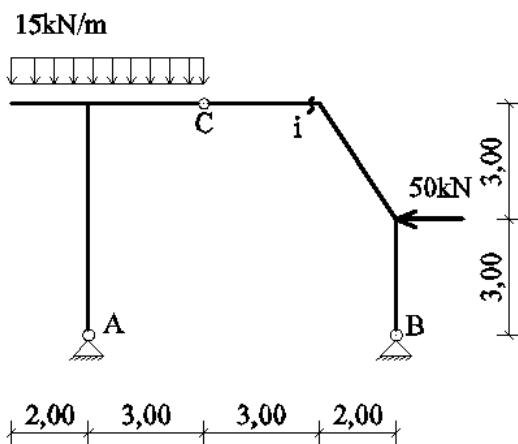
- a) 214,38 kNm
- b) 224,56 kNm
- c) 234,38 kNm
- d) 244,56 kNm
- e) 254,38 kNm

6.3.8. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_i$ , în secțiunea i, la structura de mai jos:



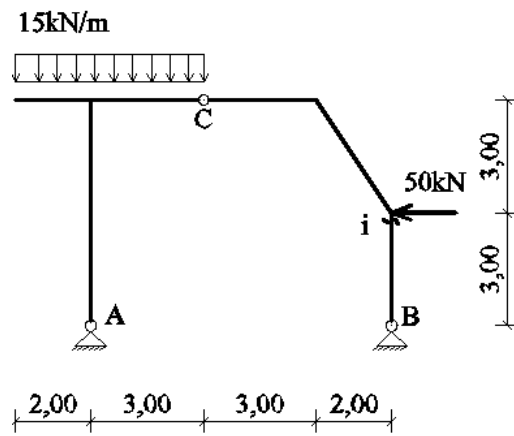
- a) 72,40 kNm
- b) -84,70 kNm
- c) -109,69 kNm
- d) 96,40 kNm
- e) -120,70 kNm

6.3.9. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_i$ , în secțiunea i, la structura de mai jos:



- a) 72,19 kNm
- b) 62,19 kNm
- c) 52,19 kNm
- d) 42,19 kNm
- e) 32,19 kNm

6.3.10. Utilizând P.L.M.V. să se determine momentul încovoietor  $M_i$ , în secțiunea i, la structura de mai jos:



- a) 95,16 kNm
- b) 115,32 kNm
- c) 100,16 kNm
- d) 125,32 kNm
- e) 110,16 kNm

# Capitolul 7: Linii de influență

## 7.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de rezolvare.

Definiție:

*Linia de influență a unui efort dintr-o secțiune reprezintă variația efortului respectiv când o forță mobilă egală cu unitatea se deplasează pe linia de încărcare a structurii.*

Modalități de determinare: - Analitic;  
- Cu deplasări virtuale.

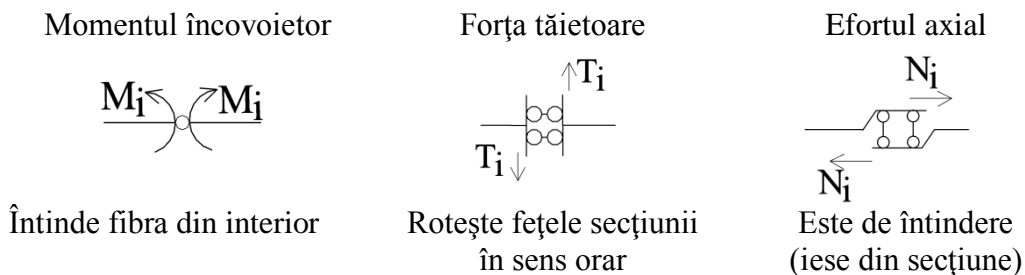
Cea de-a doua metodă este mai rapidă și mai ușor de aplicat. Conform acestei metode:

**Linia de influență a unui efort dintr-o secțiune este deplasarea liniei de încărcare după direcția forței mobile a sistemului transformat, când pe direcția efortului exteriorizat se dă o deplasare egală cu unitatea, astfel încât lucrul mecanic efectuat de efortul exteriorizat să fie negativ.**

Semnul liniei de influență este + **dacă deplasarea este în sensul forței mobile** (sub linia de referință).

Principalele etape care trebuie parcurse când se dorește trasarea liniei de influență a efortului dintr-o secțiune sunt:

- Se suprimă legătura corespunzătoare efortului, iar acesta se exteriorizează în convenția de semn pozitivă, astfel:



- Pentru mecanismul astfel obținut, denumit sistem transformat, se dă o deplasare virtuală egală cu unu pe direcția efortului exteriorizat, astfel încât lucrul mecanic efectuat de acesta să fie negativ și se trasează diagrama de deplasare după direcția forței mobile.
- Parametrul de referință (față de care se determină toate ordonatele), va fi, în funcție de efortul pentru care se trasează linia de influență, rotire relativă între corpurile generate prin suprimarea legăturii (în cazul momentului încovoietor), respectiv deplasare relativă pe direcția efortului, pentru forța tăietoare și efortul axial. Acești parametri au valoarea egală cu unitatea.
- Se identifică toate corpurile care fac parte din linia de încărcare și se conturează porțiunile aferente ale diagramei de deplasare.
- Se stabilește semnul liniei de influență „-” deasupra liniei de referință și „+” dedesubtul ei și se hașurează.

## 7.2. Exemple de calcul

7.2.1. Pentru cadrul din figura 7.1 se determină liniile de influență pentru eforturile din secțiunile  $i$  și  $j$ , marcate pe structură. Forța mobilă egală cu unitatea se deplasează pe grinda orizontală.

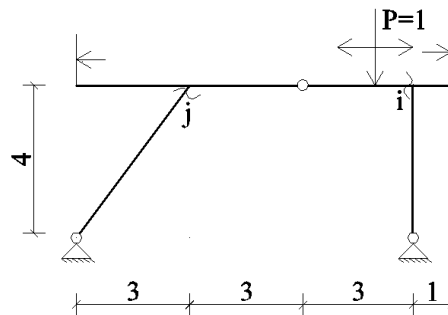


Fig. 7.1

a) *Trasarea liniei  $M_j$*

Secțiunea  $j$  se află pe bara înclinată, sub grinda orizontală, la distanță infinit mică de aceasta.

În  $j$  se introduce o articulație și se exteriorizează momentul  $M_i > 0$  de o parte și de alta a articulației.

Se obține un mecanism cu un grad de libertate cinematică, alcătuit din trei corpuri, pentru care se stabilesc centrele instantanee de rotație absolute și relative:

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2), (2,3) – în articulațiile intermediare

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)  $\Rightarrow x_{(2)} = 4,5\text{m}$ , datorită simetriei reazemelor față de articulația intermediară

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)  $\Rightarrow$  la infinit pe orizontală  $\Rightarrow$  corpurile I și III au deplasări paralele.

Parametrul de referință:  $\theta_{12} = 1$

Pe corpul I momentul  $M_j$  rotește în sens anti orar  $\Rightarrow$  se dă o rotire în sens orar corpului I.

$$\delta_2 = x_{12} \cdot \theta_{12} = 3$$

$$\theta_2 = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} = 0,667\text{rad}$$

$$\theta_1 = \theta_{12} - \theta_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0,333\text{rad}$$

Datorită simetriei

$$\delta_{12} = \delta_{23} = x_{12} \cdot \theta_1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{1}{3} = 0,333\text{rad}$$

Linia de influență a momentului din secțiunea  $j$  este trasată în figura 7.2. Fiecare ordonată a liniei de influență a momentului încovoietor din secțiunea  $j$  reprezintă o valoare a momentului încovoietor din această secțiune, variația ei fiind dată de poziția forței mobile egale cu unitatea.

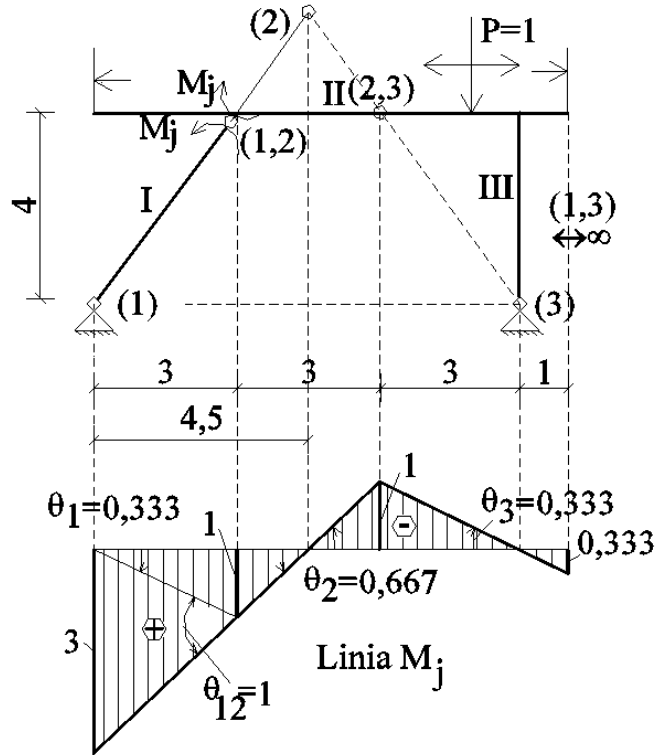


Fig. 7.2

b) *Linia de influență a forței tăietoare din secțiunea j* (fig. 7.3).

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – la infinit pe direcția pendulilor  $\Rightarrow$  deplasări paralele pentru cele două corpuri

(2,3) – în articulația intermediară

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)  $\Rightarrow x_{(2)}=4,5\text{m}$  datorită simetriei reazemelor față de articulația intermediară

Prin punctul fix (1) se duce direcția (1,2)

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)

Parametrul de referință este deplasarea relativă dintre corpurile I și II pe direcția forței tăietoare  $T_j$  (perpendiculară pe bara înclinată) și este egală cu unitatea. Proiecția pe verticală a acestei mărimi este  $\cos\alpha$  (fig. 7.3).

$$\delta_{12} = 0,6$$

$$\theta_2 = \frac{0,6}{4,5} = \frac{2}{15} = 0,133 = \theta_1$$

$$\delta_2 = 1,5\theta_2 = \frac{1}{5} = 0,200$$

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_2 = 0,6 - \frac{1}{5} = 0,400$$

$$\theta_3 = \frac{\delta_{23}}{3} = \frac{0,200}{3} = 0,667\text{rad}$$

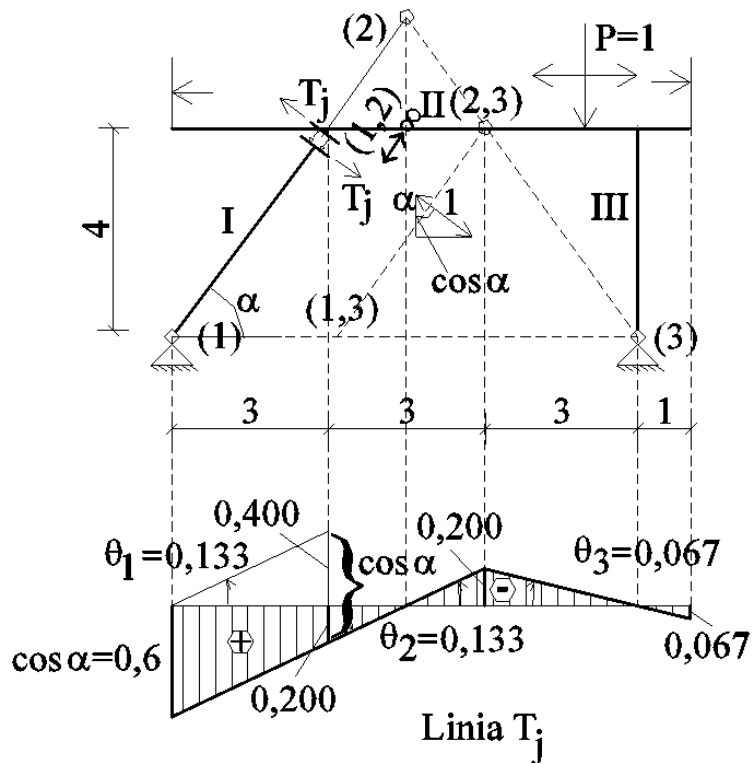


Fig. 7.3

Diagrama de deplasare pe verticală este acum definită, rămâne doar de identificat corpurile pe care se deplasează forța mobilă (care fac parte din linia de încărcare) pentru a putea contura linia de influență a forței tăietoare în secțiunea  $j$ . Corpul  $I$  este bara înclinată, care nu face parte din linia de încărcare, prin urmare diagrama de deplasare a acestuia nu va face parte din linia de influență.

Se conturează diagrama de deplasare pe verticală a corpului  $II$  și a părții orizontale a corpului  $III$ . Se stabilește semnul liniei de influență “+” sub linia de referință, “-” deasupra ei, și se hașurează.

c) *Linia de influență a efortului axial din secțiunea  $j$*  (Fig. 7.4)

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – la infinit pe direcția pendulilor (perpendicular pe bara înclinată)  $\Rightarrow$  deplasări paralele pentru cele două corpuri

(2,3) – în articulația intermediară

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)

Prin punctul fix (1) se duce direcția (1,2)

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)

*Determinarea poziției centrului (2):*

Se scriu ecuațiile celor două drepte exprimate prin pantele lor:

$$(1), (1,2): \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{y_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{3x_2}{4}$$

$$(3), (2,3): \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{x_2 - 9} = \frac{4}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{4(x_2 - 9)}{3}$$



se egalează expresiile ordonatei  $y_2$   
 $\frac{4(x_2 - 9)}{3} = \frac{3x_2}{4} \Rightarrow x_2 = 20,57m$

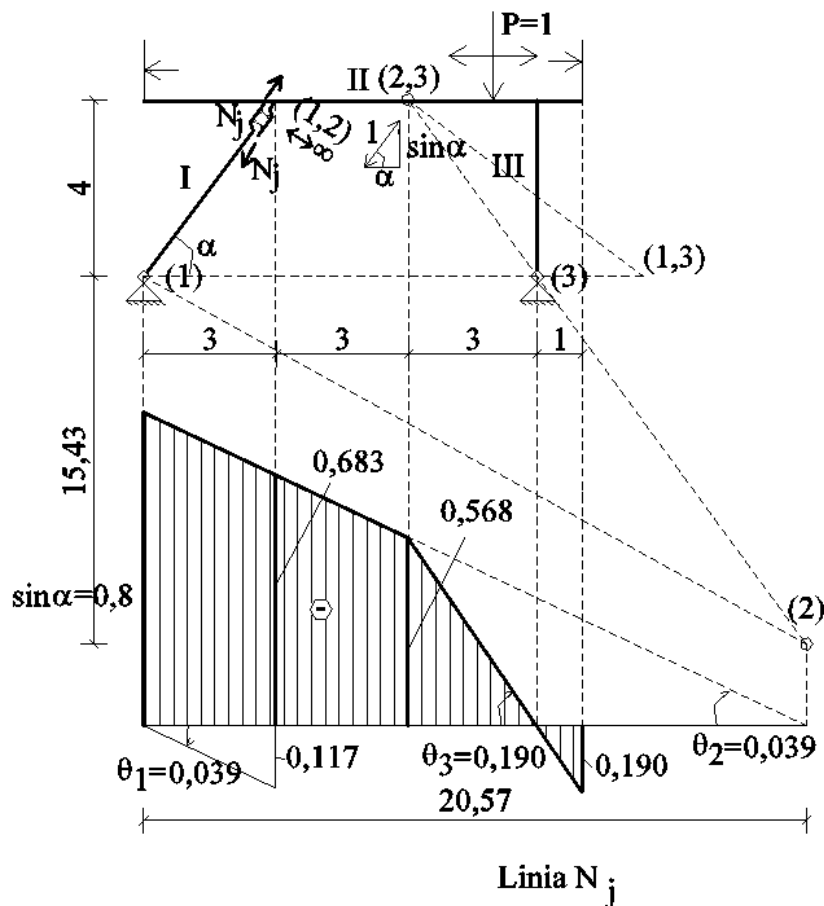


Fig. 7.4

Parametrul de referință este deplasarea relativă pe direcția efortului  $N_j$  (direcția barei înclinate) și este egală cu unitatea. Proiecția pe verticală a acestei mărimi este  $\sin \alpha$ .

$$\delta_{12} = 0,8$$

$$\theta_2 = \frac{0,8}{20,57} = 0,039 = \theta_1$$

$$\delta_1 = 3\theta_1 = 0,117$$

$$\delta_2 = \delta_{12} - \delta_1 = 0,8 - 0,117 = 0,683$$

$$\delta_{23} = 14,57\theta_2 = 0,568$$

$$\theta_3 = \frac{\delta_{23}}{3} = \frac{0,568}{3} = 0,189rad$$

Forța mobilă se deplasează pe corpul II în întregime și pe partea orizontală a corpului III. Se conturează diagramele de deplasare aferente acestor corpuri.

- d) *Linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea i* (Fig. 7.5)  
 Secțiunea *i* se află pe bara orizontală în imediata vecinătate a stâlpului.

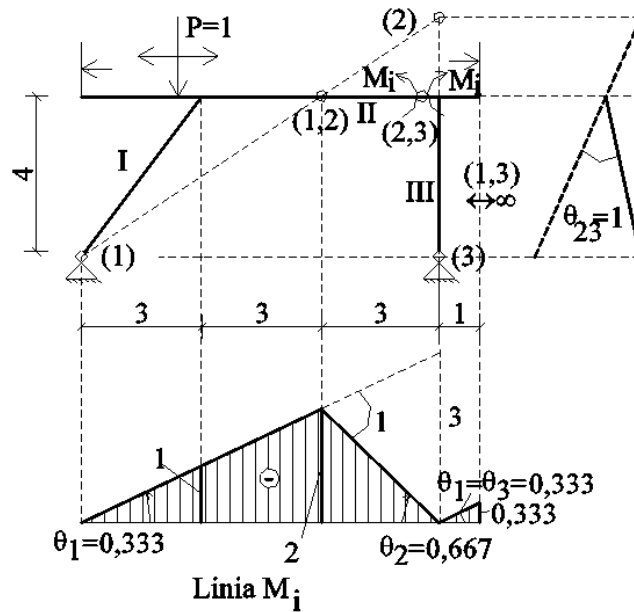


Fig. 7.5

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2), (2,3) – în articulațiile intermediare

(2) = (1),(1,2) ∩ (2),(2,3) (pe verticala dusă prin (3))

(1,3) = (1),(3) ∩ (1,2),(2,3) ⇒ la infinit pe orizontală ⇒ corpurile *I* și *III* au deplasări paralele

În acest caz, rotirea relativă dintre corpurile *II* și *III* nu se evidențiază clar în diagrama de deplasare pe verticală, dar dacă se ține cont de deplasarea paralelă a corpurilor *I* și *III*,  $\theta_{23} = \theta_{12} = 1$

Pe corpul *III* momentul  $M_i$  rotește în sens orar ⇒ se dă o rotire în sens anti orar corpului *III*.

$$\delta_1 = 3\theta_{12} = 3$$

$$\theta_1 = \frac{\delta_1}{9} = \frac{1}{3} = 0,333rad$$

$$\theta_2 = \theta_{12} - \theta_1 = \frac{2}{3} = 0,667rad$$

$$\theta_3 = \theta_1 = 0,333rad$$

$$\delta_{23} = 3\theta_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

e) Linia de influență a forței tăietoare din secțiunea  $i$  (Fig. 7.6)

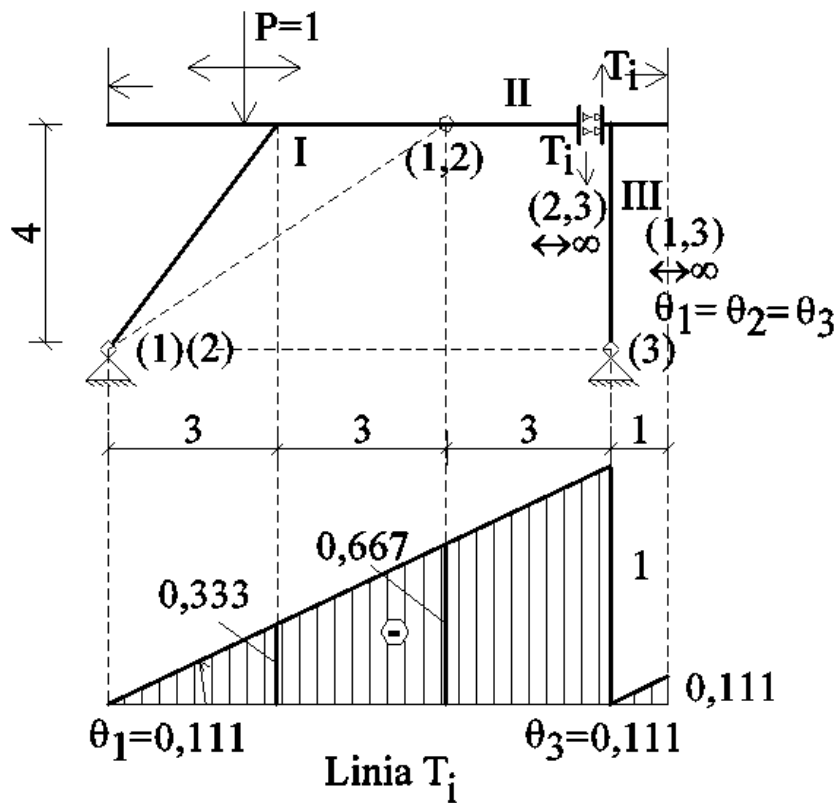


Fig. 7.6

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – în articulația intermediară

(2,3) – la infinit pe direcția pendulilor (orizontală)  $\Rightarrow$  deplasare paralelă pentru corpurile II și III

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3) (coincide cu centrul (1))

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)  $\Rightarrow$  la infinit pe orizontală  $\Rightarrow$  corpurile I și III au deplasări paralele

Pe corpul II,  $T_i$  acționează în jos  $\Rightarrow$  se dă o deplasare în sus, egală cu unitatea, corpului II.

Corpul III se deplasează paralel cu corpul II. Corpul I se deplasează paralel cu corpul III.

Parametrul de referință este deplasarea relativă dintre corpurile II și III, pe direcția forței tăietoare  $T_i$ .

$$\delta_{23} = 1$$

$$\theta_2 = \frac{1}{9} = 0,111 = \theta_1 = \theta_3$$

f) Linia de influență a efortului axial din secțiunea  $i$  (Fig. 7.7)

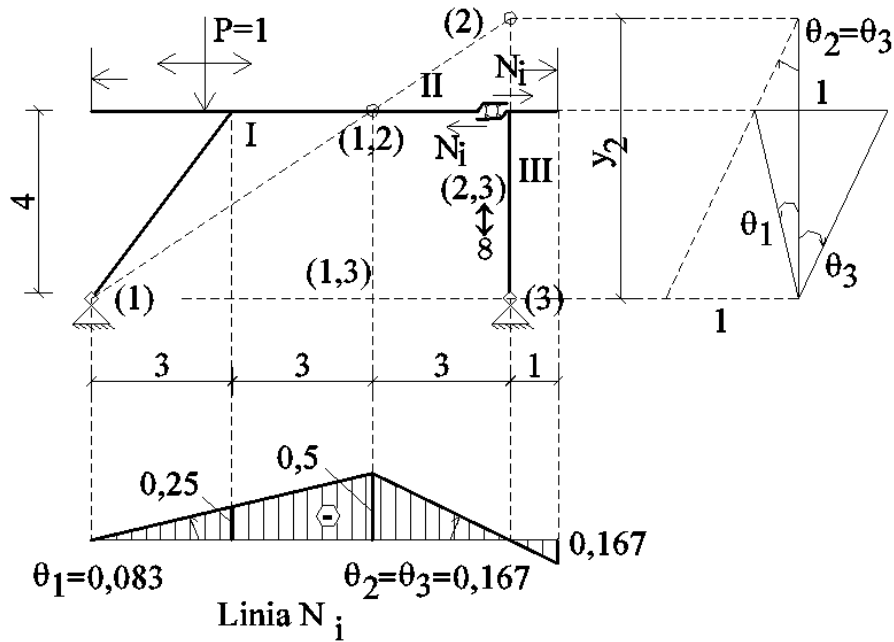


Fig. 7.7

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – în articulația intermediară

(2,3) – la infinit pe direcția pendulilor (verticală)  $\Rightarrow$  deplasare paralelă pentru corpurile  $II$  și  $III$

(2)=(1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)

(1,3)=(1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)

Întrucât deplasarea relativă pe direcția efortului (orizontală) nu se evidențiază în diagrama de deplasare pe verticală, se trasează suplimentar diagrama de deplasare pe orizontală (care nu se hașurează ca linia de influență). În această diagramă se determină rotirile corpurilor, care se transcriu în diagrama de deplasare pe verticală.

$$y_2 = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6$$

$$\theta_{12} = 1$$

$$\delta'_{23} = 1$$

$$\theta_2 = \frac{1}{6} = 0,167 = \theta_3$$

$$\delta'_{12} = 2\theta_2 = \frac{1}{3} = 0,333$$

$$\theta_1 = \frac{\delta'_{12}}{4} = \frac{1}{12} = 0,083$$

$$\theta_1 = \theta_{12} - \theta_2 = \frac{1}{3} = 0,333$$

Forța mobilă se deplasează pe partea orizontală a corpului  $I$ , pe corpul  $II$  și pe partea orizontală a corpului  $III$ .

7.2.2. Pentru arcul circular din figura 7.8, se determină liniile de influență pentru eforturile din secțiunea  $i$ . Forța mobilă egală cu unitatea se deplasează pe axa arcului.

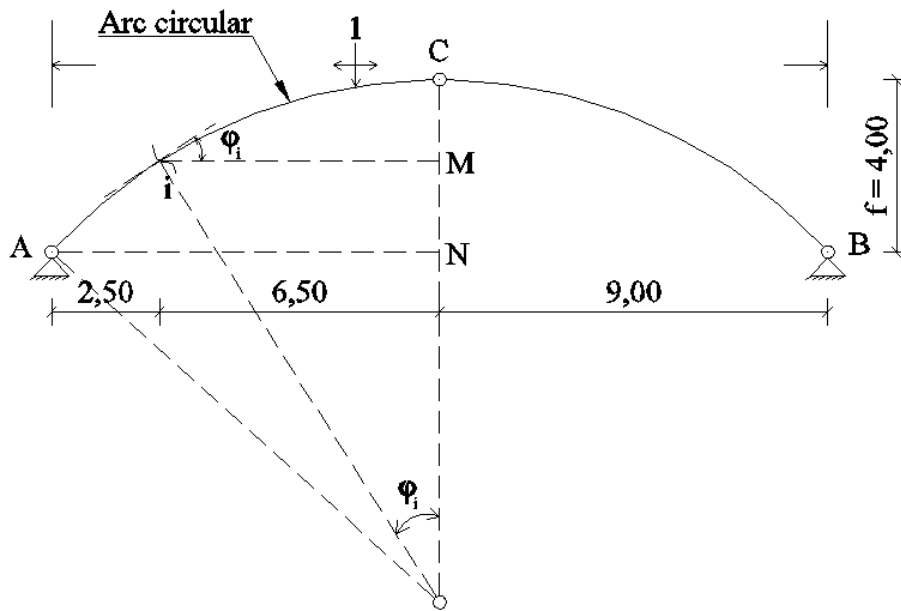


Fig. 7.8

Se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii  $i$ :

$$x_i = 2,5m$$

În  $\triangle AON \Rightarrow$  mărimea razei arcului de cerc:

$$R^2 = \frac{l^2}{4} + (R - f)^2 \Rightarrow R = 12,125m$$

$$\sin \varphi_i = \frac{6,5}{12,125} = 0,536 \Rightarrow \varphi_i = 32,417^\circ \Rightarrow \cos \varphi_i = 0,844$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i = 0,635; \quad y_i = 2,108m$$

a) Linia  $M_i$  (Fig. 7.9)

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2), (2,3) – în articulațiile intermediare

$$(2) = (1),(1,2) \cap (2),(2,3)$$

$$(1,3) = (1),(3) \cap (1,2),(2,3)$$

Poziția centrului (2) se determină scriind ecuațiile celor două drepte exprimate prin pantele lor:

$$(1),(1,2): \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_i}{x_i} \Rightarrow y_2 = \frac{2,108}{2,5} x_2$$

$$(3),(2,3): \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{18 - x_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow y_2 = \frac{4(18 - x_2)}{9}$$

se egalează expresiile ordonatei  $y_2$

$$\frac{4(18 - x_2)}{9} = \frac{2,108x_2}{2,5} \Rightarrow x_2 = 6,213m$$

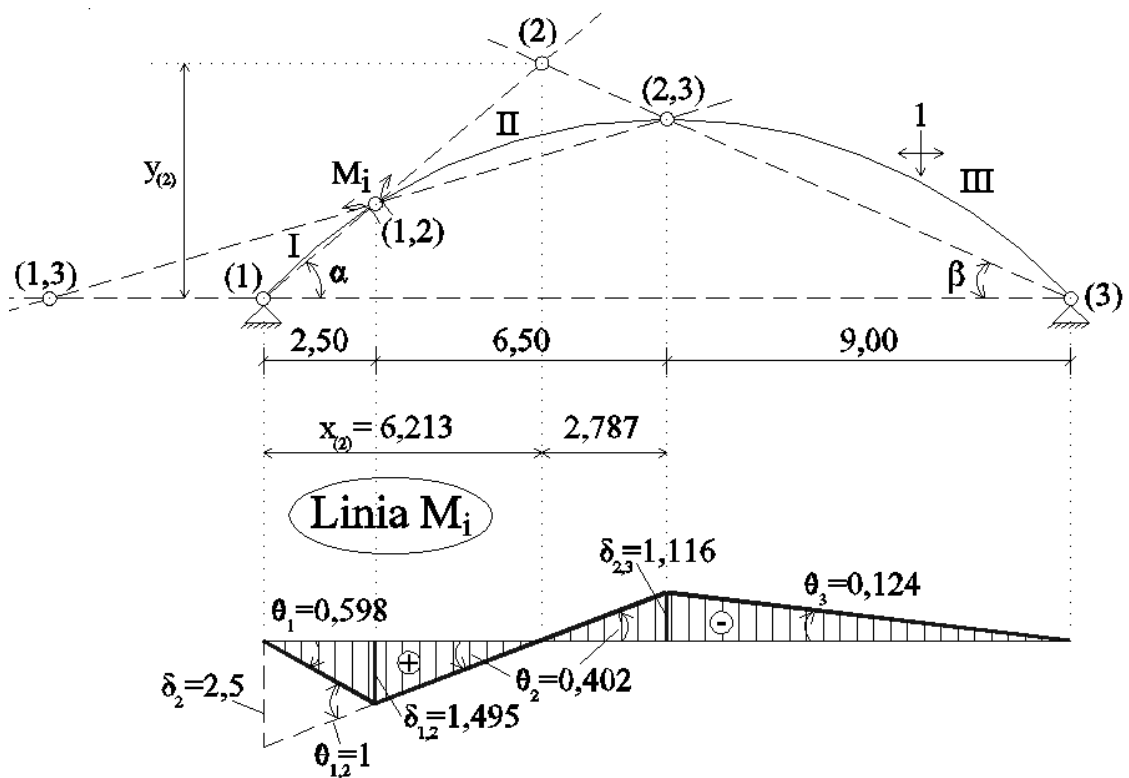


Fig. 7.9

Parametrul de referință este rotirea relativă dintre corpurile I și II,  $\theta_{12}$ .

Pe corpul I momentul  $M_i$  rotește în sens anti orar  $\Rightarrow$  se dă o rotire în sens orar corpului I.

$$\theta_{12} = 1$$

$$\delta_2 = x_i \cdot \theta_{12} = 2,5$$

$$\theta_2 = \frac{2,5}{6,213} = 0,402$$

$$\theta_1 = \theta_{12} - \theta_2 = 1 - 0,402 = 0,598 \text{ rad}$$

$$\delta_{23} = 2,787 \cdot \theta_2 = 1,116$$

$$\theta_3 = \frac{1,116}{9} = 0,124 \text{ rad}$$

b) Linia  $T_i$  (Fig. 7.10)

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – la infinit pe direcția pendulilor – direcția tangentei trasate în  $i$  la axa arcului

(2,3) – în articulația intermediară

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)

Poziția centrului (2) se determină scriind ecuațiile celor două drepte exprimate prin pantele lor:

$$(1), (1,2): \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow y_2 = 0,635 \cdot x_2$$

$$(3), (2,3): \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{18 - x_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow y_2 = \frac{4(18 - x_2)}{9}$$

se egalează expresiile ordonatei  $y_2$

$$4(18 - x_2) = 9 \cdot 0,635x_2 \Rightarrow x_2 = 7,411m$$

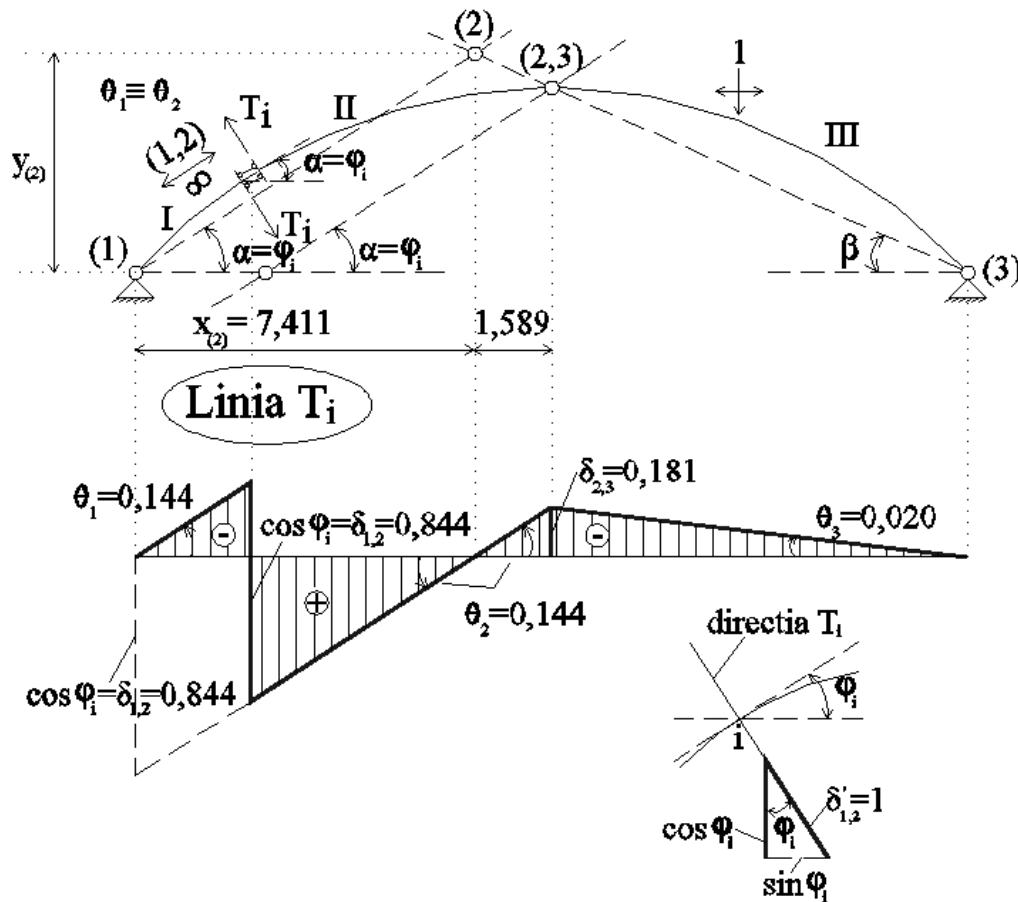


Fig. 7.10

Pe corpul  $I$ ,  $T_i$  are componentă pe verticală orientată în jos  $\Rightarrow$  se dă o deplasare în sus corpului  $I$ .

Corpul  $II$  se rotește în jurul centrului absolut (2), paralel cu corpul  $I$ .

Corpul  $III$  se rotește în jurul centrului absolut (3) și are deplasare egală cu cea a corpului  $II$ , în dreptul centrului relativ (2,3).

Parametrul de referință este deplasarea pe direcția forței tăietoare  $T_i$  și are valoarea 1. Proiecția pe verticală a acestei mărimi este  $\cos \varphi_i = 0,844$ .

$$\delta_{12} = 0,844$$

$$\theta_2 = \frac{\delta_{12}}{x_2} = \frac{0,844}{7,411} = 0,144$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,144rad$$

$$\delta_{23} = \theta_2 \cdot 1,589 = 0,181$$

$$\theta_3 = \frac{0,181}{9} = 0,020rad$$

c) *Linia Ni* (Fig. 7.11)

(1), (3) – în articulațiile cu terenul

(1,2) – la infinit pe direcția pendulilor – direcția perpendiculară pe tangenta dusă în  $i$  la axa arcului

(2,3) – în articulația intermediară

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  (2),(2,3)

(1,3) = (1),(3)  $\cap$  (1,2),(2,3)

Poziția centrului (2) se determină scriind ecuațiile celor două drepte exprimate prin pantele lor:

$$(1), (1,2): \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2}{0,635}; \quad \operatorname{tg}(90 - \varphi_i) = \frac{y_2}{x_2}$$

$$(3), (2,3): \operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{18 + x_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow y_2 = \frac{4(18 + x_2)}{9}$$

se egalează expresiile ordonatei  $y_2$

$$4 \cdot 0,635(18 - x_2) = 9x_2 \Rightarrow x_2 = 7,076m$$

Pe corpul  $II$ ,  $N_i$  are componentă pe verticală orientată în jos  $\Rightarrow$  se dă o deplasare în sus corpului  $II$ .

Corpul  $I$  se rotește în jurul centrului absolut (1), paralel cu corpul  $II$ .

Corpul  $III$  se rotește în jurul centrului absolut (3) și are deplasare egală cu cea a corpului  $II$ , în dreptul centrului relativ (2,3).

Parametrul de referință este deplasarea pe direcția efortului axial  $N_i$  (direcția tangentei dusă în  $i$  la axa arcului) și are valoarea 1. Proiecția pe verticală a acestei mărimi este  $\sin \varphi_i = 0,844$ .

$$\delta_{12} = 0,536$$

$$\theta_2 = \frac{\delta_{12}}{x_2} = \frac{0,536}{7,076} = 0,076$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,076rad$$

$$\delta_{23} = \theta_2 \cdot 16,076 = 1,218$$

$$\theta_3 = \frac{1,218}{9} = 0,136rad$$



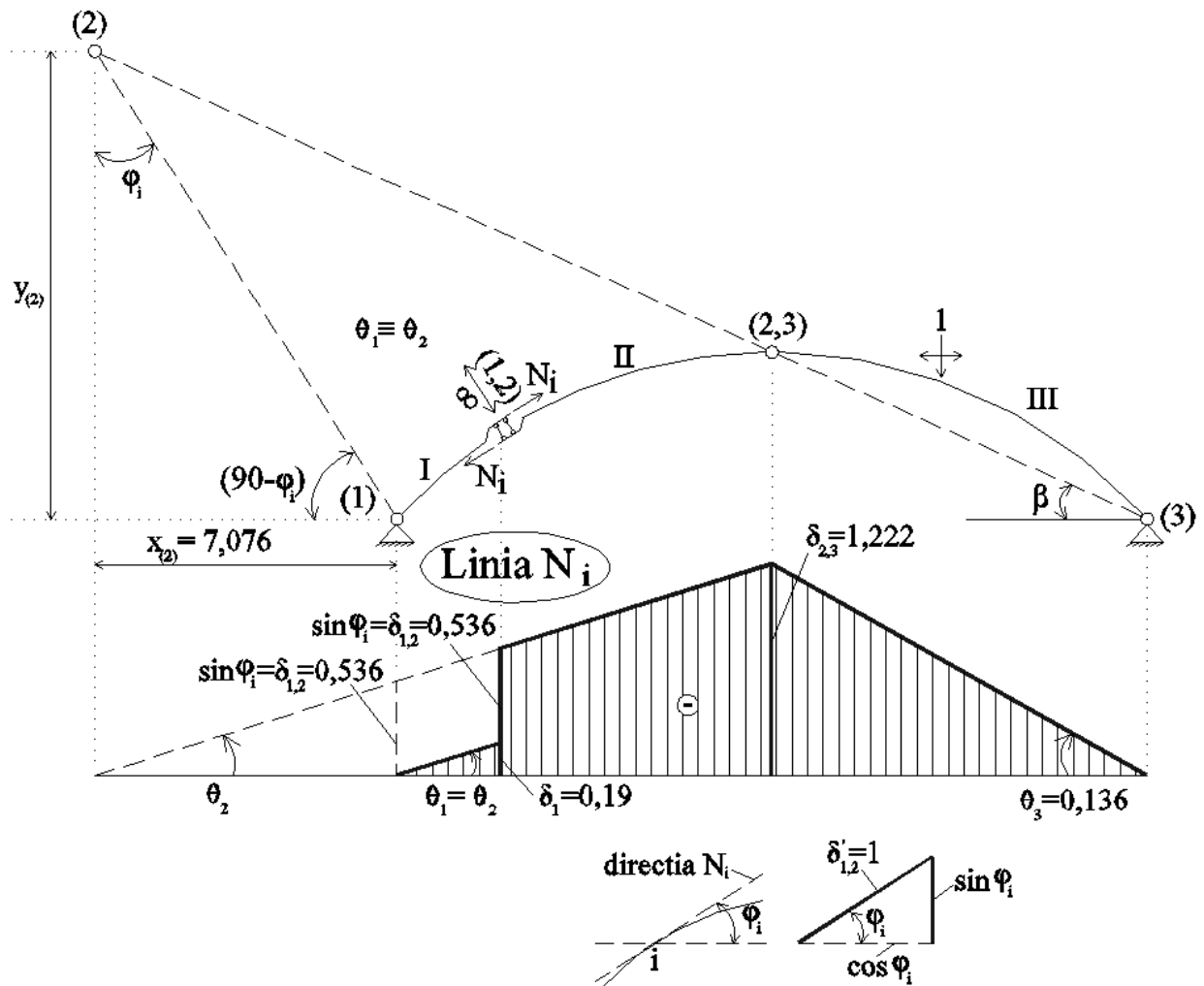


Fig. 7.11

Corpurile *I* și *II* au deplasări cu același semn (de aceeași parte a liniei de referință). Eforturile  $N_i$  au sensuri contrare pe cele două corpuri.

Pentru corpul *I* lucrul mecanic efectuat de  $N_i$  este pozitiv. Dar  $\delta_2 > \delta_1 \Rightarrow$  lucrul mecanic efectuat de efortul axial este negativ.

7.2.3. Pentru grinda cu zăbrele din figura 7.12, se trasează liniile de influență ale eforturilor axiale din barele 4-6, 5-6 și 5-7 în cele două situații distincte de încărcare definite de linia de încărcare: talpa inferioară (cazul *a*) sau talpa superioară (cazul *b*).

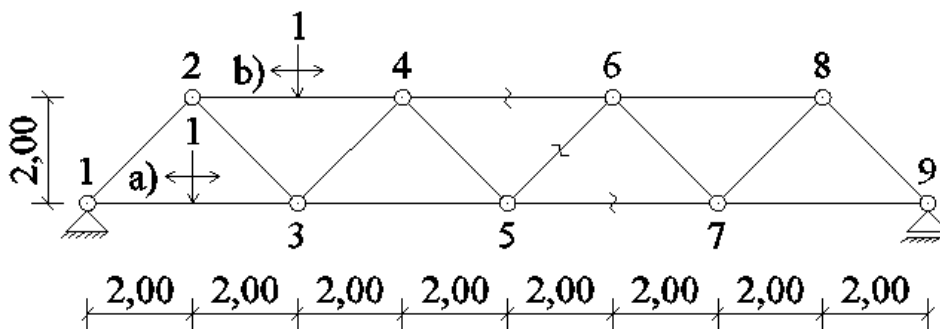
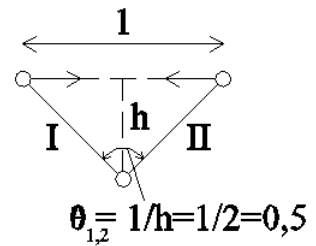


Fig. 7.12

Liniile de influență ale efortului axial din bara 4-6:

Se secționează bara 4-6, care face parte din talpa superioară a grinzii, și se pune în evidență efortul de întindere din aceasta.

Parametrul de referință este deplasarea relativă pe direcția efortului (direcția barei secționate) și este egală cu unitatea. Rotirea relativă dintre cele două corpuri, mai ușor de pus în evidență la aceste structuri, este egală cu raportul dintre deplasarea egală cu unitatea și distanța de la centrul relativ la direcția efortului.



$$\theta_{12} = \frac{1}{h} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ rad}$$

a) Forța mobilă se deplasează pe talpa inferioară

$$\theta_1 = \frac{\delta_1}{16} = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ rad}$$

Datorită simetriei

$$\theta_2 = \theta_1 = 0,25 \text{ rad}$$

Se conturează diagrama de deplasare pe verticală a tălpii inferioare a corpului I și cea a tălpii inferioare a corpului II

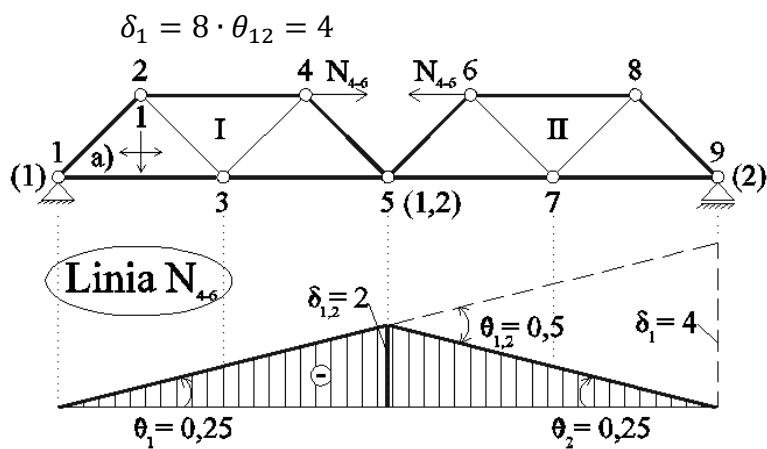


Fig. 7.13

b) Forța mobilă se deplasează pe talpa superioară

În acest caz, diagramele de deplasare pe verticală ale celor două corpuri sunt aceleași (aceleași mecanism, aceleași rotații ale corpurilor). Diferența este dată de linia de încărcare, care definește linia de influență. Astfel, în acest caz, linia de influență va fi diagrama de deplasare pe verticală a tălpii superioare a corpului I (între nodurile 1-5), și a tălpii superioare a corpului II (între nodurile 5-9).

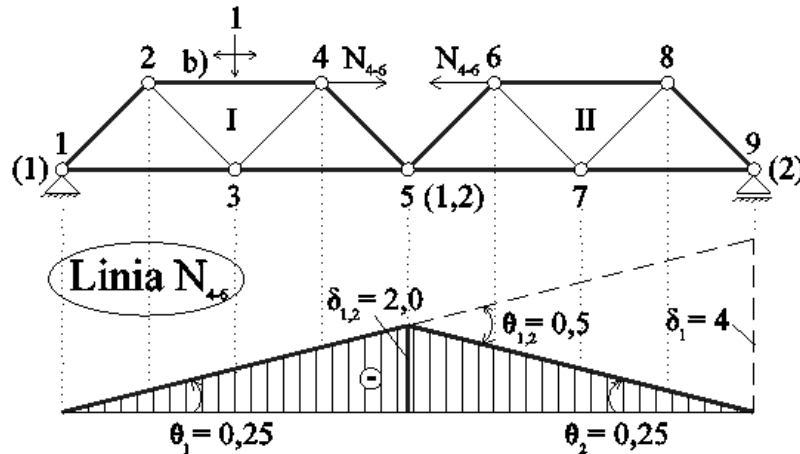


Fig. 7.14

Trasarea liniei de influență pentru efortul din diagonală 5-6:

Se secționează bara 5-6 și se exteriorizează efortul axial  $N_{5-6}$ .

Se obține un mecanism alcătuit din patru corpuri (fig. 7.15). Se stabilesc centrele instantanee absolute și relative ale corpurilor.

Se consideră succesiv câte trei corpuri și se aplică teorema de coliniaritate a centrelor relative:

I, II, IV : (1,4), (2,4), (1,2) coliniare

I, II, III : (1,3), (2,3), (1,2) coliniare  $\Rightarrow$  (1,2)  $\rightarrow \infty$  pe orizontală

I, III, IV : (1,3), (1,4), (3,4) coliniare

II, III, IV : (2,3), (2,4), (3,4) coliniare  $\Rightarrow$  (3,4)  $\rightarrow \infty$  pe direcția diagonalelor

(1),(1,2)  $\cap$  perpendiculara pe direcția deplasării posibile din reazemul simplu  $\Rightarrow$  (2) în reazemul simplu

(1), (1,3), (3) coliniare

(2), (2,3), (3) coliniare  $\Rightarrow$  (3) se află pe verticala dusă prin centrul (1,4), datorită simetriei structurii

Poziția pe verticală a centrului (3) este dată de  $y_3 = \frac{8}{3}$

(3), (3,4)  $\cap$  (2), (2,4) = (4)

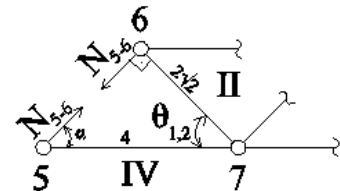
Direcția (3,4) este paralelă cu diagonală 6-7.

Întrucât  $\alpha = 45^\circ$ ,  $x_4 - 8 = y_3 = \frac{8}{3} = 2,667$  (fig. 7.15)

$x_4 = 10,67m$

Parametrul de referință este deplasarea relativă pe direcția efortului, sau rotația relativă dintre corpurile II și IV sau I și III.

$$\theta_{13} = \theta_{24} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,353$$



Pe corpul I,  $N_{5-6}$  rotește (față de (1)) în sens anti orar  $\Rightarrow$  se dă o rotație în sens orar corpului I.

Corpul II se rotește în jurul centrului (2), paralel cu corpul I.

Corpul III se rotește în jurul centrului (3) și are deplasare egală cu corpul I în dreptul centrului (1,3)

și cu corpul II în dreptul centrului (2,3).

Corpul IV se rotește în jurul centrului absolut (4), are deplasare egală cu corpul I în centrul (1,4) și cu corpul II în centrul (2,4).

Corpurile III și IV se deplasează paralel.

$$\delta_3 = \theta_{13} \cdot 6 = 2,121 \Rightarrow \theta_3 = \frac{\delta_3}{x_{(3)}} = \frac{2,121}{8} = 0,265$$

$$\delta_4 = \theta_{24} \cdot 4 = 1,412 \Rightarrow \theta_4 = \frac{\delta_4}{16 - x_{(4)}} = \frac{1,412}{5,333} = 0,265$$

$\theta_3 = \theta_4 \Rightarrow$  corpurile III și IV se deplasează paralel.

Prin diferență se calculează rotirile corpurilor I și II:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{13} - \theta_3 = 0,353 - 0,265 = 0,088 \\ \theta_2 &= \theta_{24} - \theta_4 = 0,353 - 0,265 = 0,088 \end{aligned} \right) \Rightarrow \theta_1 \equiv \theta_2$$

Rotirile corpurilor fiind calculate, diagrama de deplasare pe verticală a mecanismului este practic definită. În funcție de linia de încărcare se trasează linia de influență a efortului axial din diagonala 5-6.

a) linia de încărcare este talpa inferioară a grinzii cu zăbrele (Fig. 7.15)

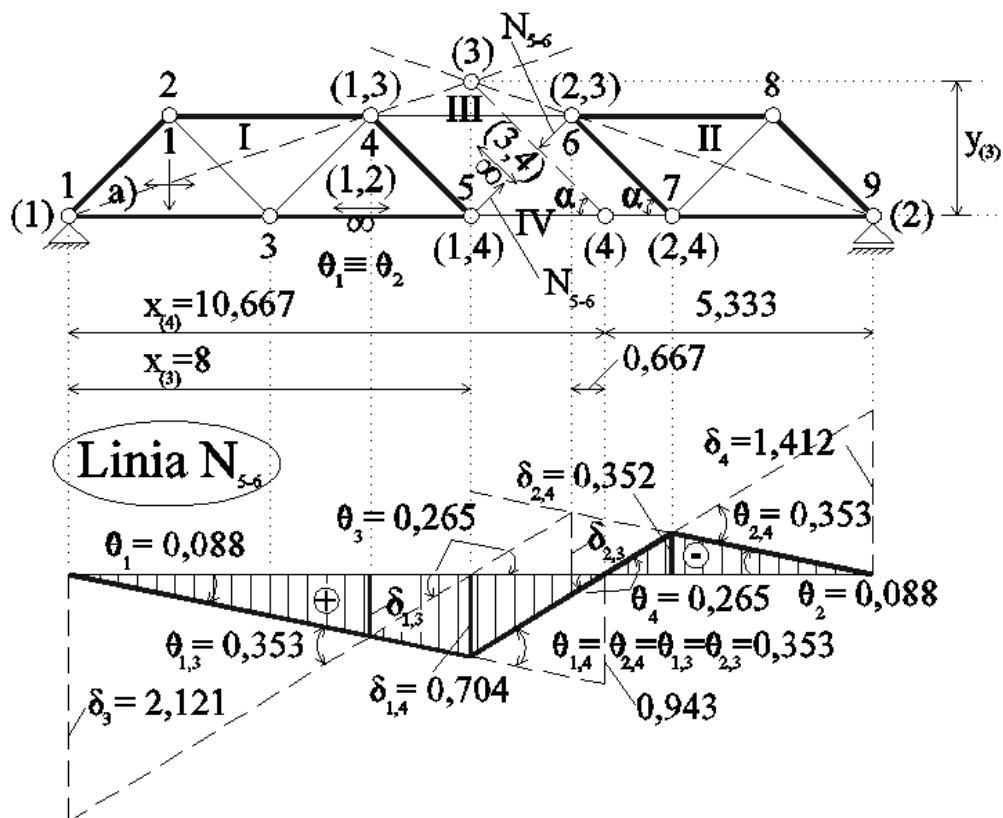


Fig. 7.15

Forța mobilă se deplasează:

- pe corpul I, între nodurile 1-5  $\Rightarrow$  se conturează diagrama de deplasare a corpului I între (1) și (1,4)
  - pe corpul IV în întregime  $\Rightarrow$  diagrama de deplasare a corpului IV
  - pe talpa inferioară a corpului II  $\Rightarrow$  diagrama de deplasare a corpului II între (2,4) și (2)
- Se calculează ordonatele liniei de influență în dreptul vârfurilor acesteia:

$$\delta_{14} = 8 \cdot \theta_1 = 0,704; \quad \delta_{24} = 4 \cdot \theta_2 = 0,352$$

Se stabilește semnul liniei de influență: „+” în sensul forței mobile (sub linia de referință).

b) *linia de încărcare este talpa superioară a grinzii cu zăbrele* (Fig. 7.16)

Forța mobilă se deplasează:

- pe talpa superioară a corpului I (între nodurile 1-4)
- pe corpul III în întregime  $\Rightarrow$  diagrama de deplasare a corpului III
- pe talpa superioară a corpului II (între nodurile 6-9)

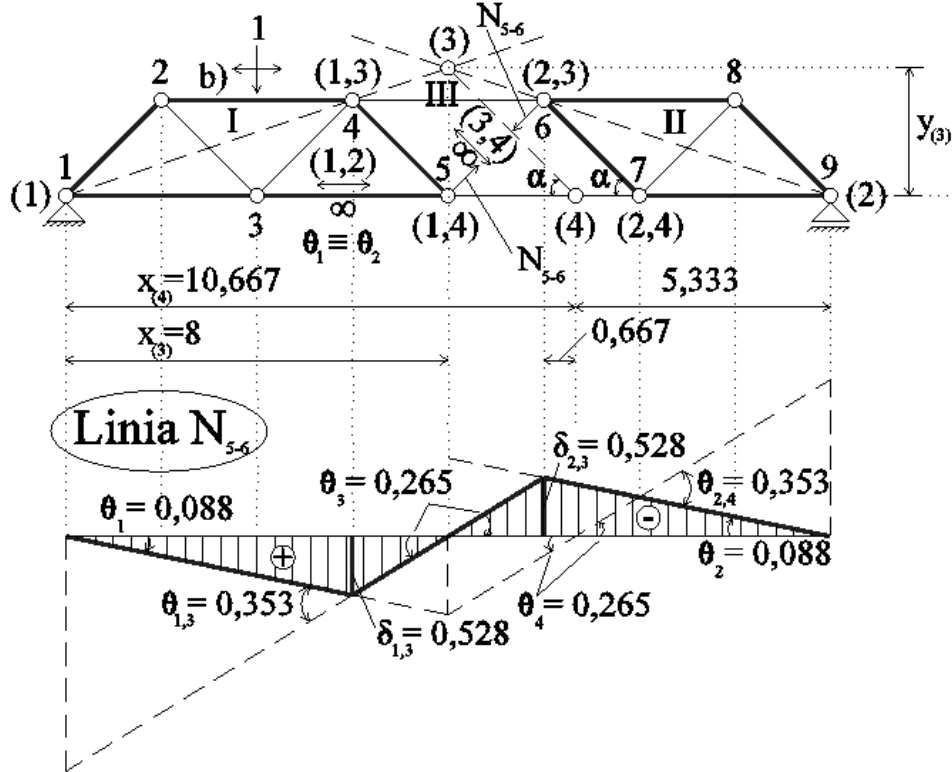


Fig. 7.16

Se calculează ordonatele pe capete și în dreptul vârfurilor liniei de influență:

$$\delta_1 = 2 \cdot \theta_1 = 0,176$$

$$\delta_2 = 2 \cdot \theta_{12} = 0,176$$

$$\delta_{13} = 6 \cdot \theta_1 = 0,528$$

$$\delta_{23} = 6 \cdot \theta_2 = 0,528$$

Diagrama este antisimetrică.

*Trasarea liniei de influență a efortului axial din bara 5-7* (Fig. 7.17 și 7.18)

Secționând bara 5-7, se formează un mecanism alcătuit din două corpuri conectate în nodul 6.

Se determină centrele instantanee de rotație :

(1) – în articulația cu terenul – punct fix

(1,2) – în articulația intermediară

(2) = (1),(1,2)  $\cap$  perpendiculara pe direcția deplasării posibile din reazemul simplu

Forța  $N_{5-7}$  produce pe corpul II o rotire în sens orar  $\Rightarrow$  se dă o rotire în sens antiorar corpului I.

Corpul I se rotește în jurul centrului (1) și are deplasare egală cu II în centrul (1,2).

Deplasarea pe direcția efortului axial este:

$$\theta_{12} = \frac{1}{h} = 0,5$$

Se calculează:

$$\delta_2 = \theta_{12} \cdot 6 = 3$$

$$\theta_1 = \frac{\delta_2}{16} = 0,1875$$

$$\theta_2 = \theta_{12} - \theta_1 = 0,5 - 0,1875 = 0,3125$$

În funcție de linia de încărcare se conturează linia de influență.

a) *Linia de încărcare este talpa inferioară a grinzii (Fig. 7.17)*

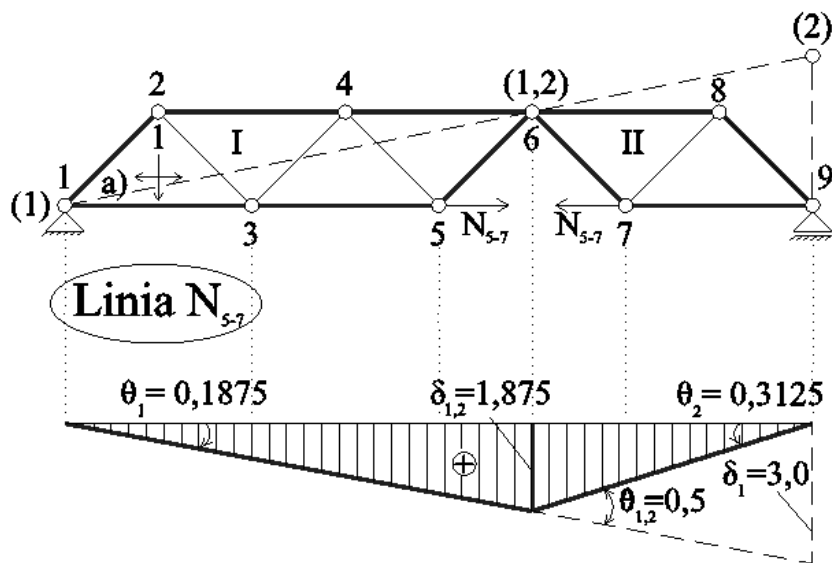


Fig. 7.17

b) *Linia de încărcare este talpa superioară a grinzii (Fig. 7.18).*

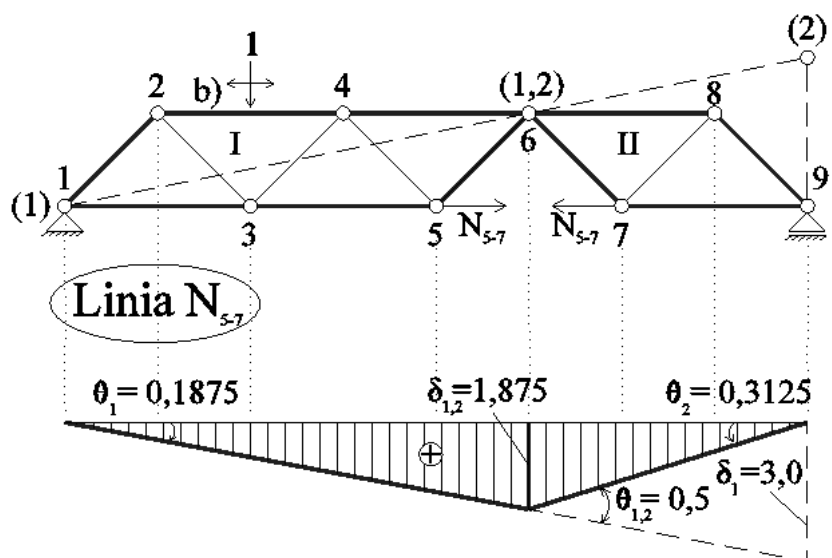
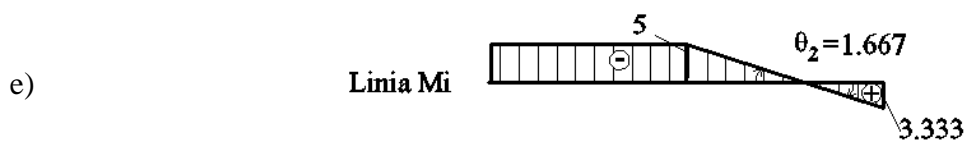
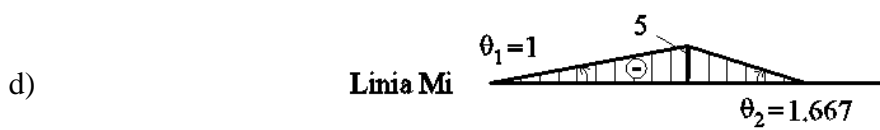
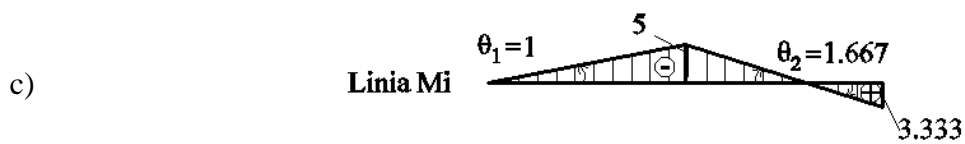
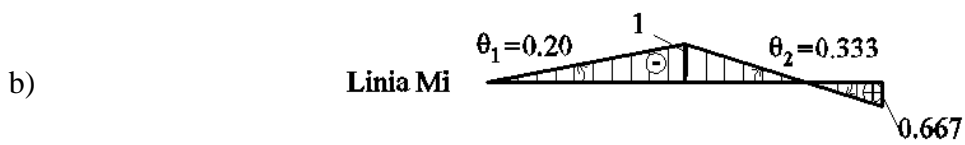
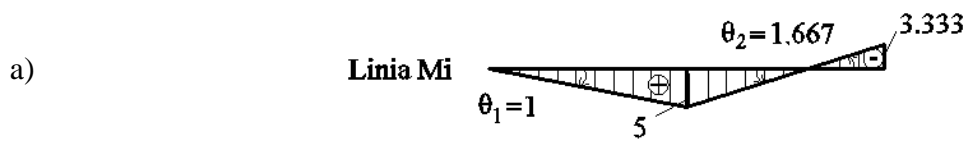
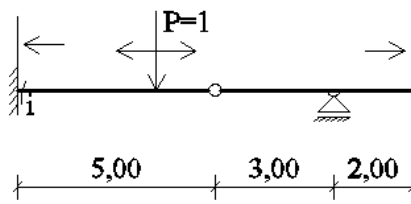


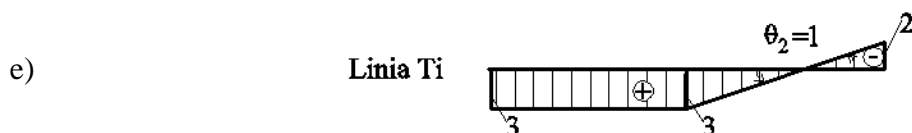
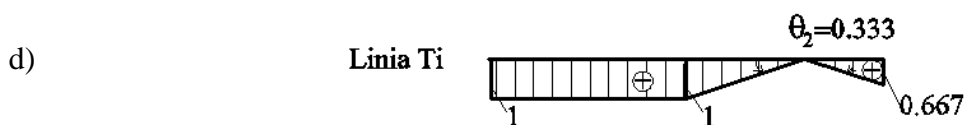
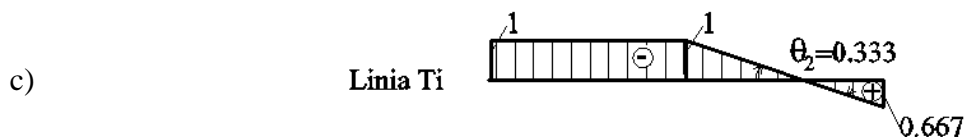
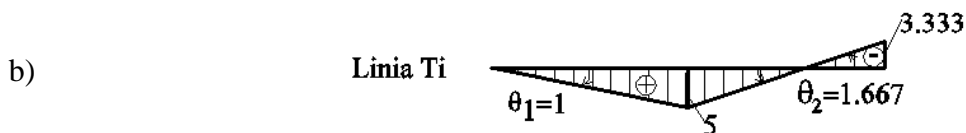
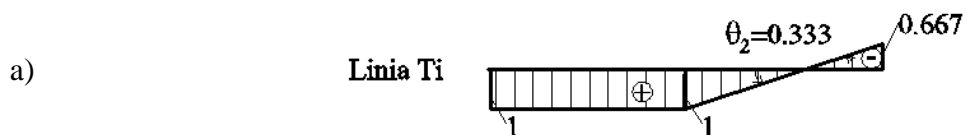
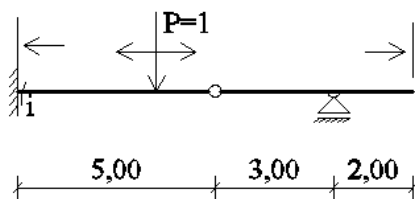
Fig. 7.18

### 7.3. Probleme propuse

7.3.1. Să se identifice Linia  $M_i$  pentru structura din figură.

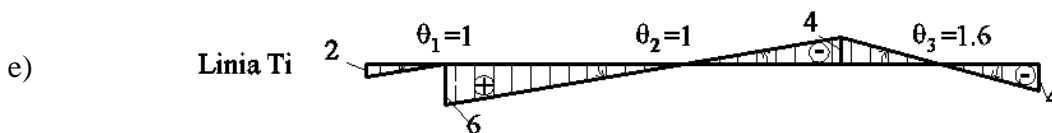
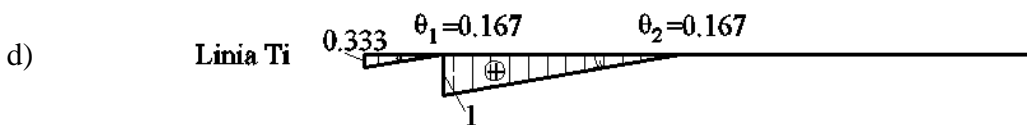
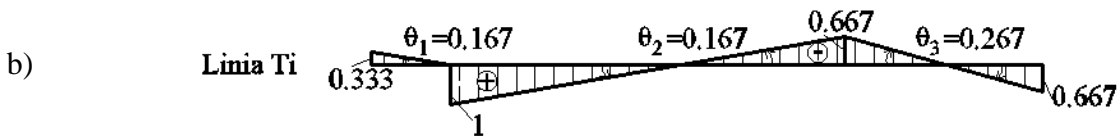
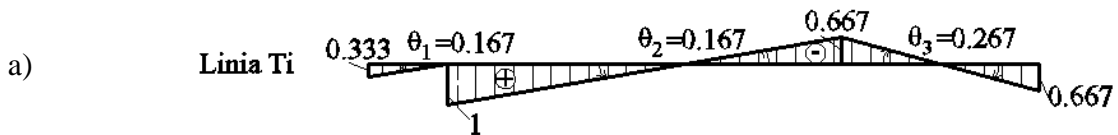
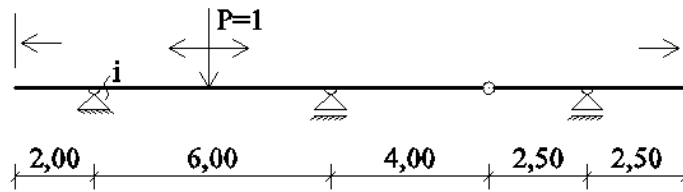


7.3.2. Să se identifice Linia  $T_i$  pentru structura din figură.

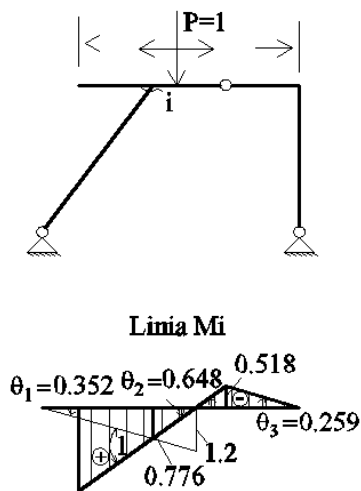
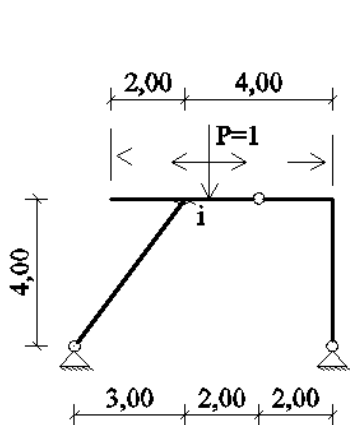




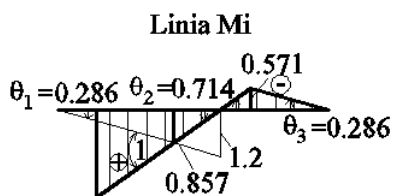
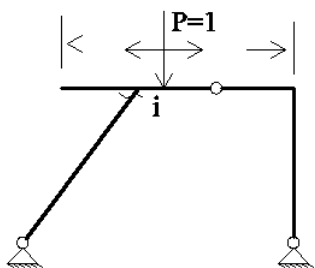
7.3.3. Să se identifice Linia  $T_i$  pentru structura din figură.



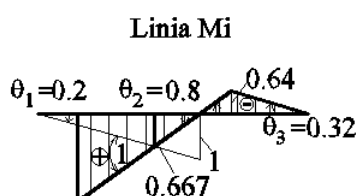
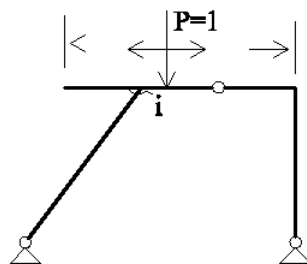
7.3.4. Să se identifice Linia  $M_i$  pentru structura din figură.



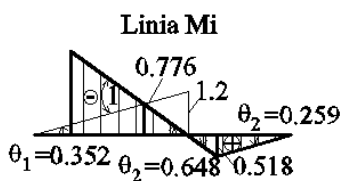
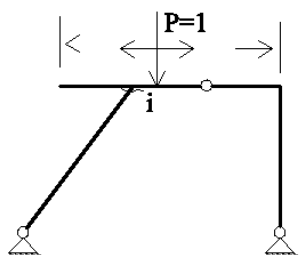
a)



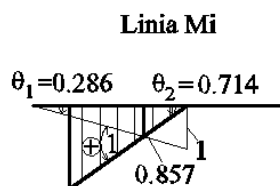
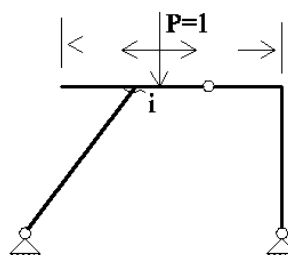
b)



c)

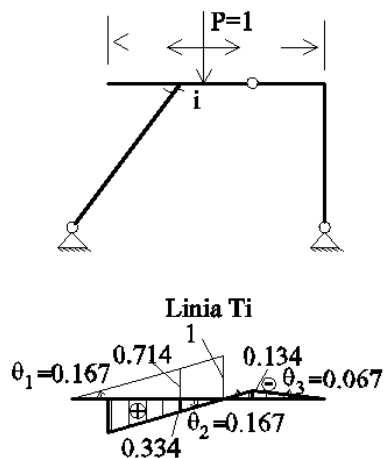
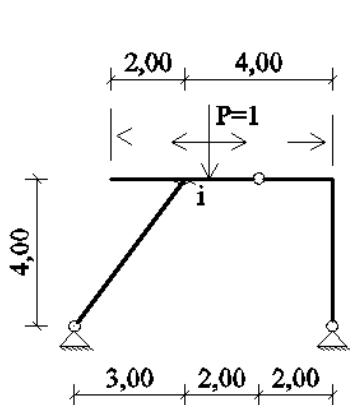


d)

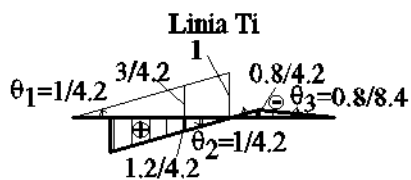
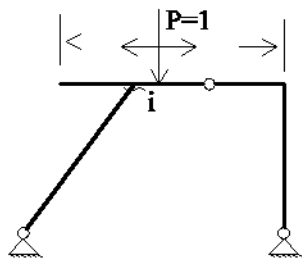


e)

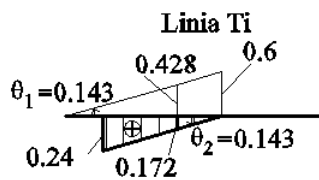
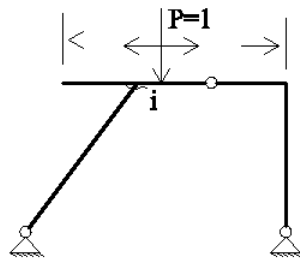
7.3.5. Să se identifice Linia  $T_i$  pentru structura din figură.



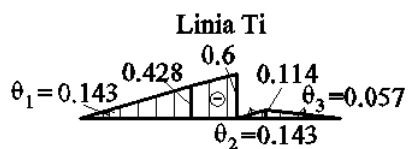
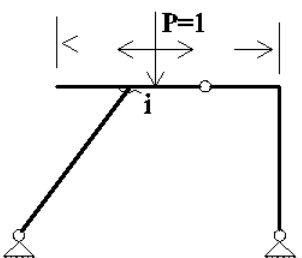
a)



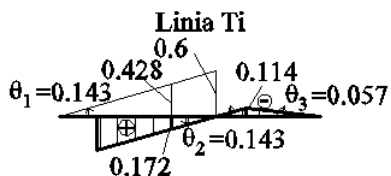
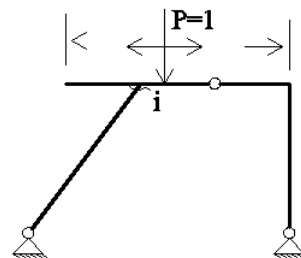
b)



c)

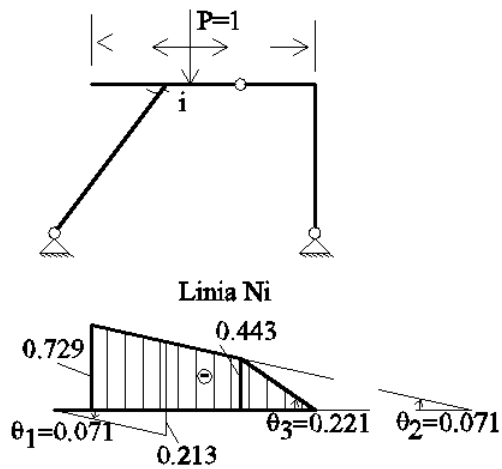
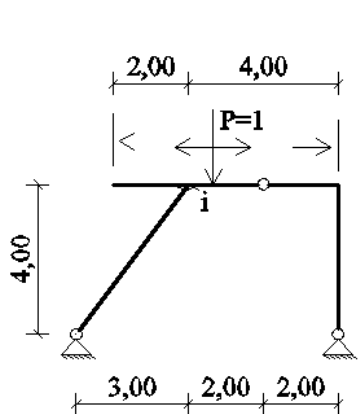


d)

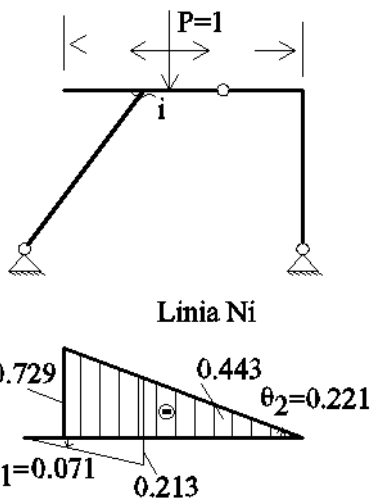


e)

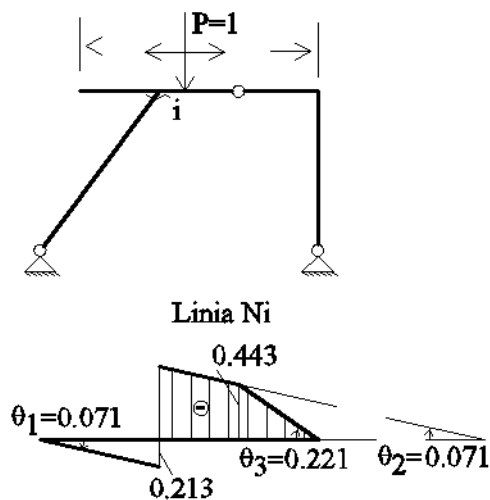
7.3.6. Să se identifice Linia  $N_i$  pentru structura din figură.



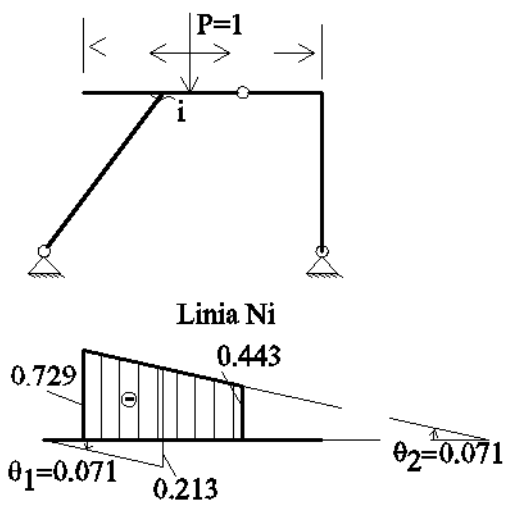
a)



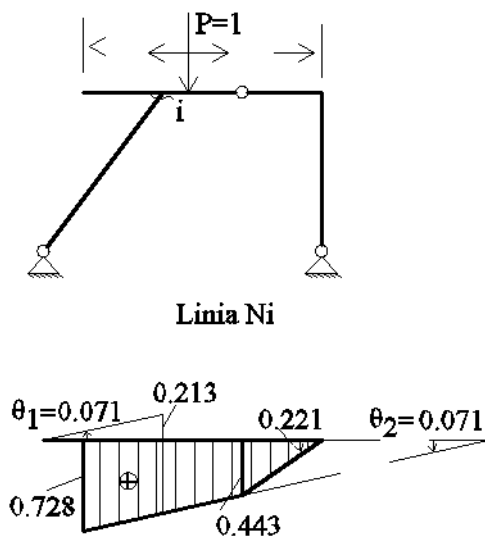
b)



c)

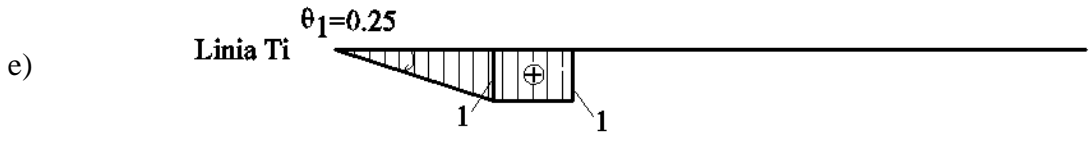
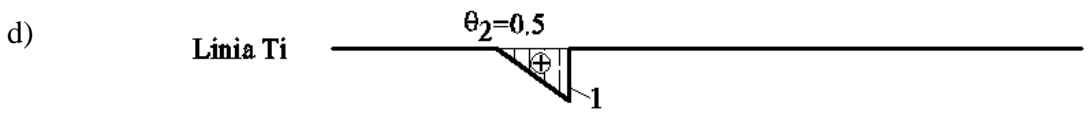
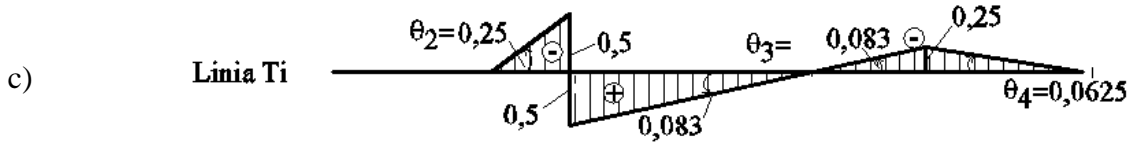
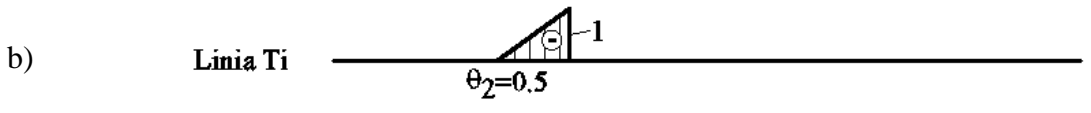
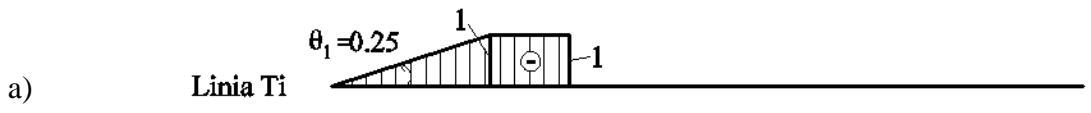
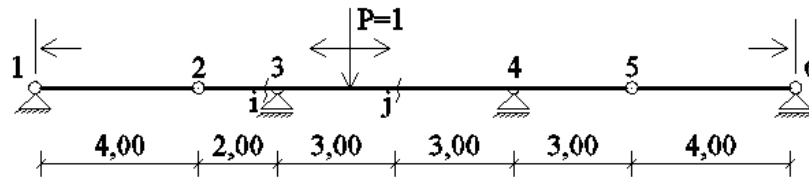


d)

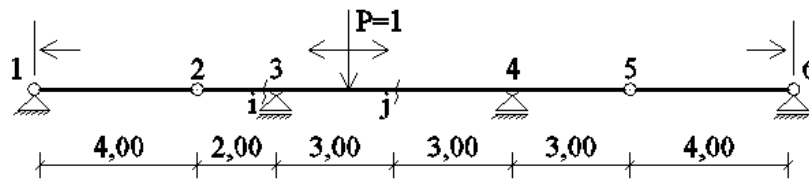


e)

7.3.7. Să se identifice linia  $T_i$  pentru structura din figură.

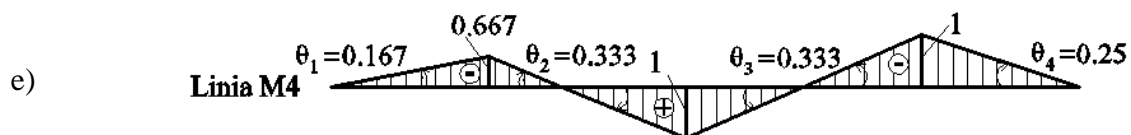
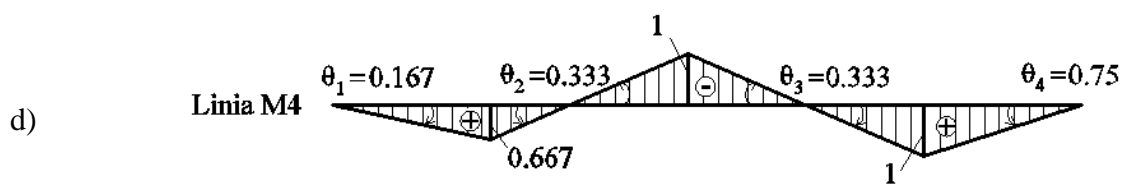
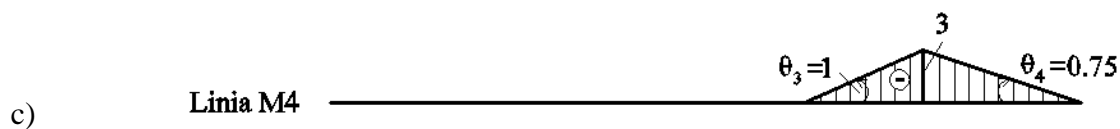
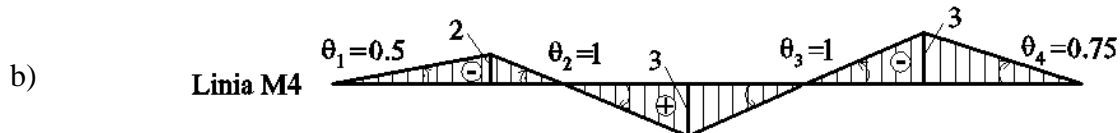
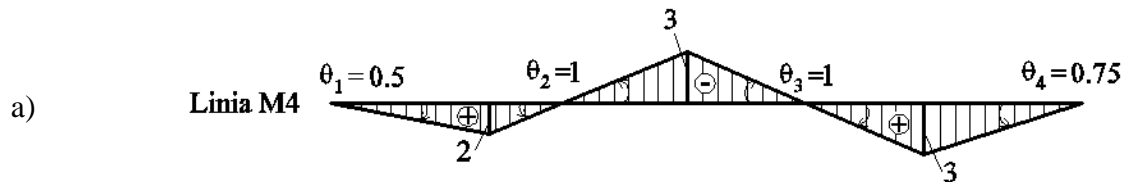
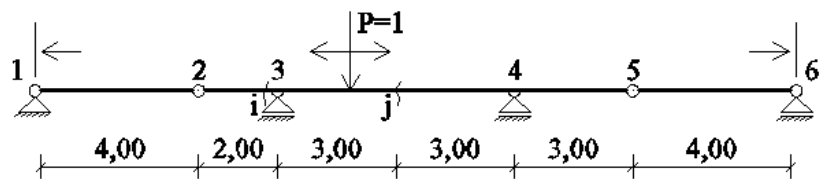


7.3.8. Să se identifice Linia  $M_j$  pentru structura din figură.

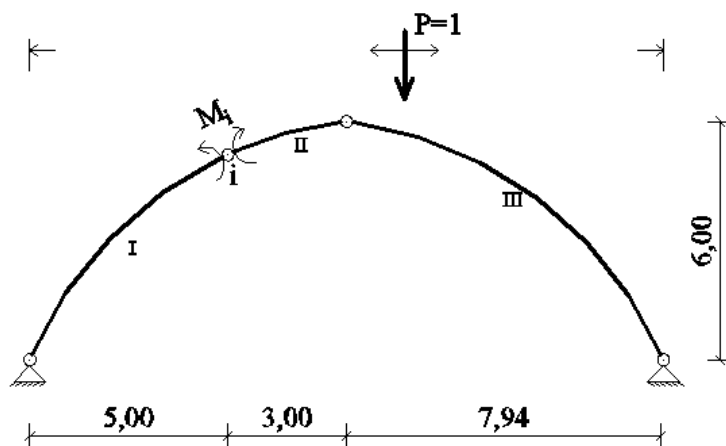


- a) Linia  $M_j$   $\theta_2=0.333$   $\theta_3=0.333$
- b) Linia  $M_j$   $\theta_1=0.25$   $\theta_2=0.5$   $\theta_3=0.5$   $\theta_4=0.375$
- c) Linia  $M_j$   $0.667$   $0.667$   $\theta_2=0.333$
- d) Linia  $M_j$   $\theta_1=0.167$   $\theta_2=0.333$   $\theta_3=0.333$   $\theta_4=0.25$
- e) Linia  $M_j$   $\theta_1=0.167$   $\theta_2=0.333$   $\theta_3=0.333$   $\theta_4=0.25$

7.3.9. Să se identifice linia  $M_4$  pentru structura din figură.

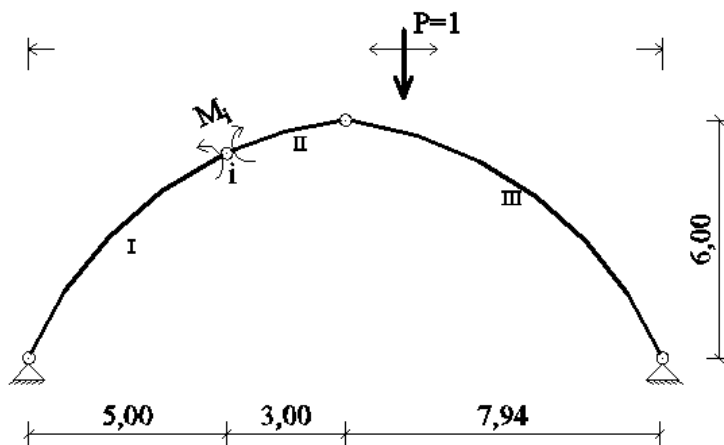


7.3.10. Să se determine rotirea  $\Theta_1$  corectă din linia de influență  $M_i$  corespunzătoare arcului din figura de mai jos, cunoscând ecuația arcului  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5\text{m}$ .



- a) 0.257
- b) 0.118
- c) 0.432
- d) 0.333
- e) 0.121

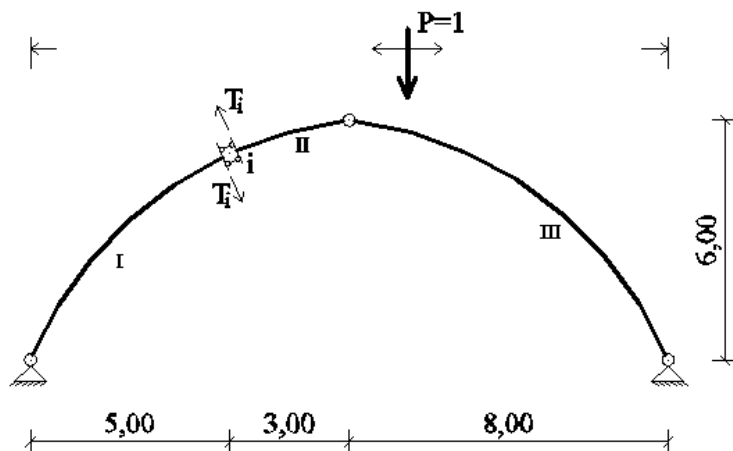
7.3.11. Să se determine deplasarea  $\Delta_{12}$  corectă din linia de influență  $M_i$  corespunzătoare arcului din figura de mai jos, cunoscând ecuația arcului  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5\text{m}$ .



- a) 0.432
- b) 0.118
- c) 1.285
- d) 0.333
- e) 0.743

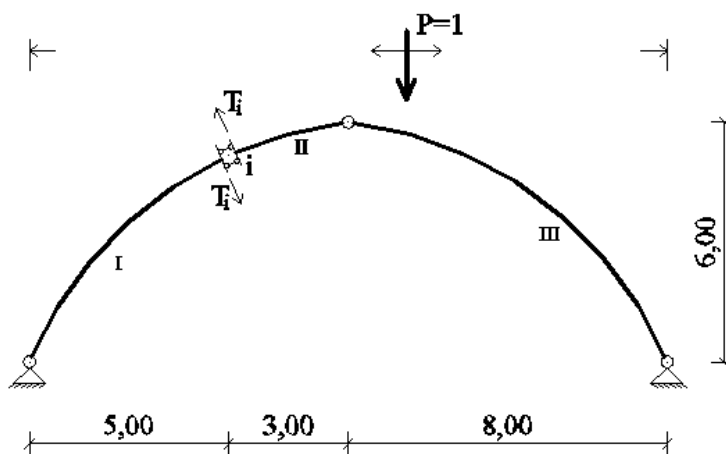


7.3.12. Să se determine rotirea  $\Theta_1$  corectă din linia de influență  $T_i$  corespunzătoare arcului din figura de mai jos, cunoscând ecuația arcului  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5m$ .



- a) 0.095
- b) 0.109
- c) 0.014
- d) 0.121
- e) 0.217

7.3.13. Să se determine rotirea  $\Theta_2$  corectă din linia de influență  $T_i$  corespunzătoare arcului din figura de mai jos, cunoscând ecuația arcului  $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$  și  $x_i=5m$ .



- a) 0.095
- b) 0.109
- c) 0.014
- d) 0.121
- e) 0.217

# Capitolul 8: Deplasări punctuale

## 8.1. Noțiuni teoretice de bază. Principii de calcul.

Numim deplasări punctuale deplasările (translații sau rotații) care se produc, datorită solicitării, în secțiunile structurilor. În scopul determinării acestor mărimi, se aplică o forță egală cu unitatea în punctul și pe direcția deplasării căutate.

### Observații

*!Termenul de deplasare definește o deplasare generalizată care poate fi rotație, rotație relativă sau translație*

*!Termenul de forță se referă la o forță generalizată care poate fi moment încovoietor, pereche de momente sau forță.*

Valoarea deplasărilor punctuale se calculează cu formula *Maxwell-Mohr*, în funcție de tipul încărcării:

#### A. Cazul încărcării cu forțe exterioare

$$\Delta_{if} = \int \frac{M_{xf} m_{xi}}{EI} dx + \int \frac{N_{xf} n_{xi}}{EA} dx + \int k \frac{T_{xf} t_{xi}}{GA} dx \quad (4)$$

unde

- $m_{xi}, n_{xi}, t_{xi}$  sunt eforturile din secțiunea curentă, din încărcarea structurii cu  $P_i=1$
- $M_{xf}, N_{xf}, T_{xf}$  sunt eforturile din secțiunea curentă, din încărcarea structurii cu forțele exterioare date.

Pentru structurile solicitate predominant la încovoiere, efectul momentului încovoietor este esențial în definirea deplasării unei secțiuni, motiv pentru care se pot neglija ceilalți factori.

#### B. Cazul încărcării cu variații de temperatură

$$\Delta_{it} = \int \alpha^t \frac{\Delta t \cdot m_{xi}}{h} dx + \int \alpha^t m_{xi} dx \quad (5)$$

unde

- $\alpha^t$  este coeficientul de dilatare termică a materialului
- $\Delta t$  este variația de temperatură pe înălțimea secțiunii transversale (dintre fețele secțiunii)
- $h$  este latura secțiunii pe direcția gradientului de temperatură
- $t$  este variația temperaturii în axa barei față de temperatura de montaj

#### C. Cazul încărcării cu cedări de rezeme

$$\Delta_{ir} = - \sum r_i \Delta_i^k \quad (6)$$

unde

- $r_i$  reacțiunea care se dezvoltă după direcția cedării de rezem „k”, din încărcarea cu  $P_i=1$
- $\Delta_i^k$  deplasările efectuate de rezeme

În cazul structurilor alcătuite din bare drepte, solicitare predominant la încovoiere (grinzi și cadre), deplasarea punctuală într-o secțiune este definită doar de momentul încovoiitor, iar integrala se poate calcula simplificat, aplicând *regula lui Veresceaghin*. Această aproximare se bazează pe constatarea că sub acțiunea unei singure forțe (forță, moment sau pereche de momente), diagrama de moment încovoiitor este cel mult liniară (pe intervale, momentul încovoiitor fie variază liniar, fie este constant).

*Regula de integrare Veresceaghin:*

Rezultatul integrării unei diagrame curbilini cu o diagramă liniară este egal cu produsul dintre aria diagramei din încărcarea cu forțe exterioare (M) și ordonata din dreptul centrului de greutate al diagramei (m) măsurată în diagrama (m).

Astfel, dacă notăm cu  $\omega_M$  aria diagramei de moment din forțele exterioare și cu  $y_G$  ordonata în dreptul centrului de greutate al diagramei (M), măsurată în diagrama (m), (din încărcarea cu P=1), expresia deplasării căutate din secțiunea *i* devine:

$$\Delta_{if} = \int \frac{M_{x_f} m_{x_i}}{EI} dx = \sum_{i=1}^n \omega_M y_G$$

unde *i* definește un interval pe care momentul încovoiitor are aceeași lege de variație, iar *n*, numărul de astfel de intervale (în general numărul barelor structurii).

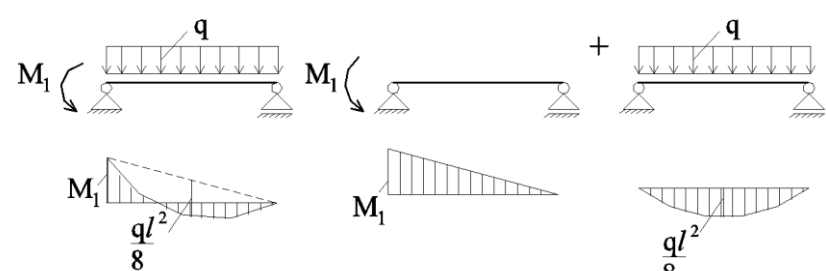
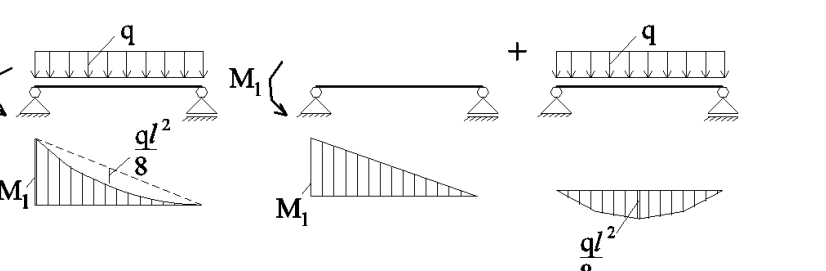
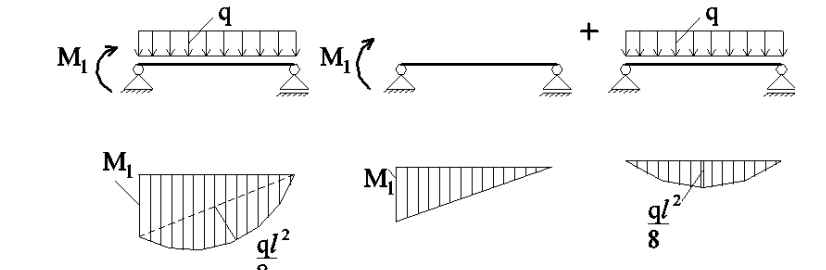
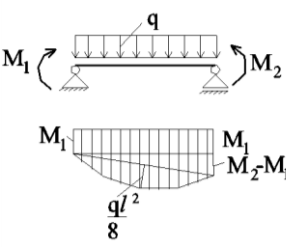
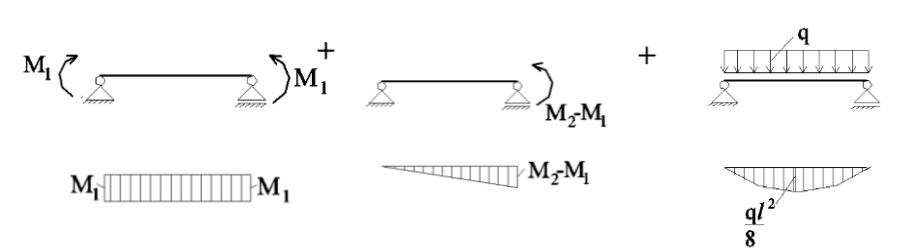
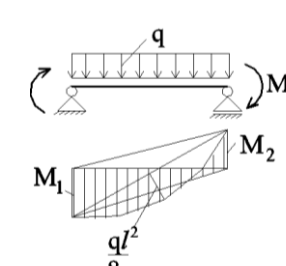
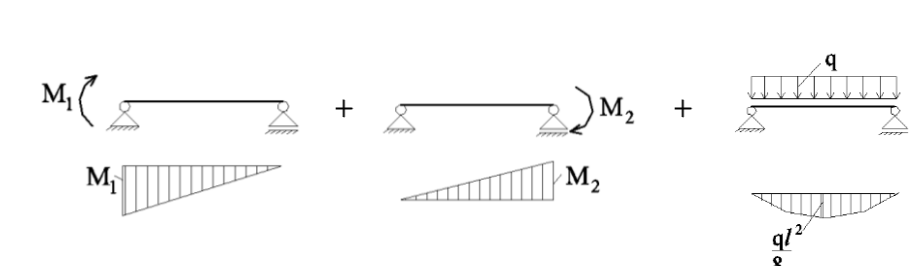
În cazul unei structuri alcătuite din bare drepte, încărcate cu forțe exterioare, pentru calculul unei deplasări se parcurg următoarele etape:

1. Se trasează diagrama de moment încovoiitor din acțiunea forțelor exterioare direct aplicate, (M).
2. În punctul și pe direcția deplasării căutate se aplică o forță egală cu unitatea și se trasează diagrama de moment încovoiitor aferentă acestei încărcări, ( $m_i$ ).
3. Se calculează deplasarea căutată utilizând formula lui Maxwell-Mohr și aplicând regula de integrare Veresceaghin.

În tabelul 8.1 sunt prezentate modurile de descompunere ale diagramelor de moment, pentru cele mai frecvente tipuri de solicitări (încărcări) ale barelor.

Tabel 8.1

Bara încărcată la ambele capete cu momente de același semn (care întind aceeași fibră)	
Descompunerea încărcării	
Descopunerea diagramei în suprafețe elementare	
Bara încărcată la ambele capete cu momente de semne contrare (care întind fibre diferite)	
Descompunerea încărcării	
Descopunerea diagramei în suprafețe elementare	
Bara încărcată cu forță uniform distribuită și moment încovoiitor negativ (întinde fibra de sus) la un capăt	

<p>Descompunerea încărcării</p> <p>Descopunerea diagramei în suprafețe elementare</p>	
<p>Descompunerea încărcării</p> <p>Descopunerea diagramei în suprafețe elementare</p>	
<p>Bara încărcată cu forță uniform distribuită și moment încovoietor pozitiv (întinde fibra de jos) la un capăt</p>	
<p>Descompunerea încărcării</p> <p>Descopunerea diagramei în suprafețe elementare</p>	
<p>Bara încărcată cu forță uniform distribuită și momente încovoietoare de același semn la capete</p>	
	
<p>Bara încărcată cu forță uniform distribuită și momente încovoietoare de semne diferite la capete</p>	
	

## 8.2. Exemple de calcul

8.2.1. Pentru grinda Gerber din figura 8.1 se vor determina: rotirea relativă a capetelor barelor din articulația intermediară 2 și deplasarea pe verticală a acesteia.

Se trasează diagrama de moment încovoietor din încărcarea cu forțe exterioare (fig. 8.1.a).

Pentru determinarea rotirii relative din articulația 2, se aplică de o parte și de alta a acesteia o pereche de momente egale cu unitatea și se trasează diagrama de moment din această încărcare (Fig. 8.1.b).

Se calculează rotirea relativă din articulația 2 aplicând formula Maxwell-Mohr și regula de integrare Veresceaghin.

$$\theta_2^r = \int \frac{M_x m_{2x}^\theta}{EI_x} dx = \frac{1}{EI_0} \left[ -\frac{1}{2} 20 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,25 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 \left( 1 + \frac{2}{3} 0,25 \right) + \frac{2}{3} 20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} 1 \right]$$

$$= -\frac{10,417}{EI_0}$$

Pentru determinarea deplasării pe verticală din articulația 2, se aplică în acest punct o forță verticală egală cu unitatea și se trasează diagrama de moment din această încărcare (Fig. 8.1.c).

Se calculează deplasarea din articulația 2, aplicând formula Maxwell-Mohr și regula de integrare Veresceaghin.

$$\delta_2^v = \int \frac{M_x m_{2x}^v}{EI_x} dx = \frac{1}{EI_0} \left[ \frac{1}{2} 20 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} 1 \right] = \frac{28,33}{EI_0}$$

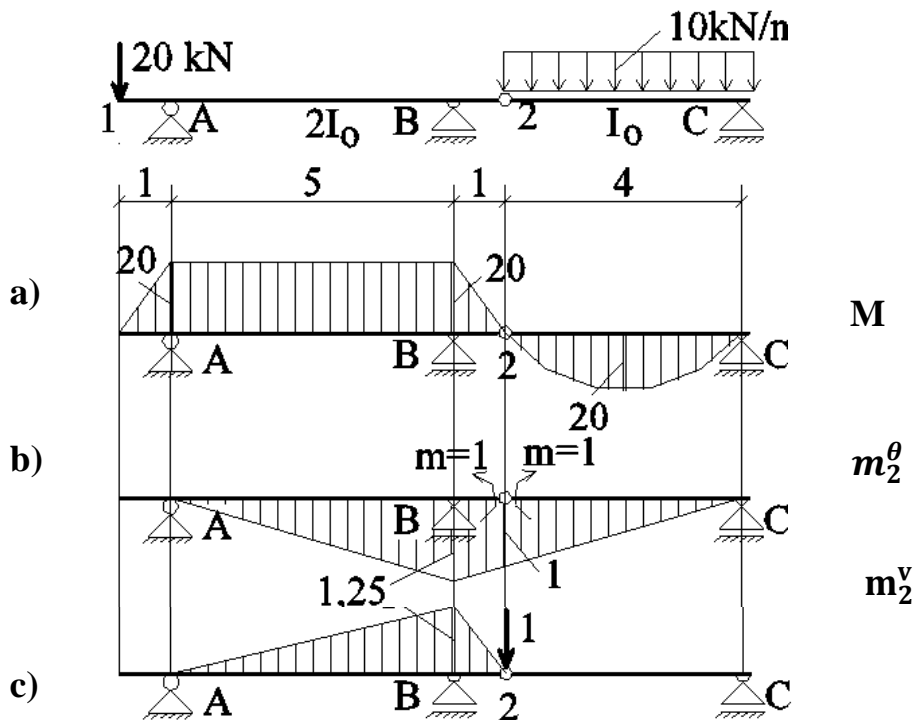


Fig. 8.1

### Observații

În unele situații suprafețele diagramelor trebuie descompuse în diagrame simple pentru a se putea integra, astfel (vezi tabelul 8.1):

- Integrarea unei diagrame de forma unui trapez cu o diagramă triunghiulară se face după schema: dreptunghi x triunghi + triunghi x triunghi.
- Integrarea diagramei parabolice care nu are tangenta paralelă cu axa barei la unul dintre

capete (forța tăietoare este diferită de zero la capetele grinzii) se face prin descompunere după schema: triunghi + parabolă cu tangenta orizontală.

8.2.2. Pentru cadrul din figura 8.2, se vor calcula: deplasarea pe orizontală a nodului 1, rotirea relativă a barelor în articulația intermediară și deplasarea pe verticală a acesteia.

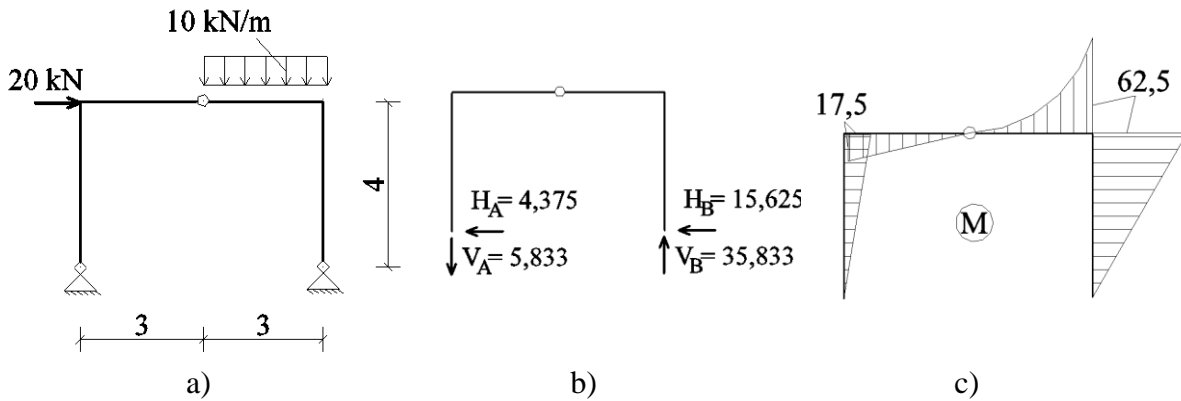


Fig. 8.2

Se trasează diagrama de moment din încărcarea cu forțele exterioare (Fig. 8.2.c).

În nodul 1 se aplică o forță orizontală egală cu unitatea și se trasează diagrama de moment aferentă (fig. 8.3.a).

Se calculează deplasarea pe orizontală a nodului 1:

$$\delta_1^h = \int \frac{M_x m_1^h}{EI_x} = \frac{1}{EI_0} \left[ \frac{1}{2} 17,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} 17,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} 62,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} 11,25 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} 62,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{175,417}{EI_0}$$

În articulația intermediară se aplică o pereche de momente egale cu unitatea și se trasează diagrama de moment aferentă (fig. 8.3.a).

Se calculează rotirea relativă a barelor din articulația intermediară:

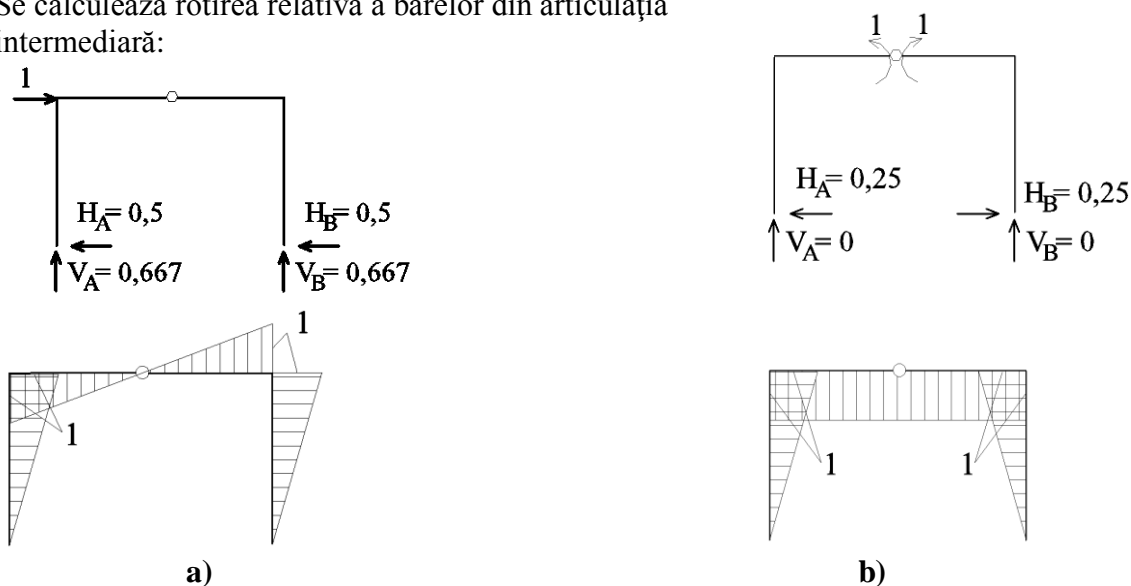


Fig. 8.3

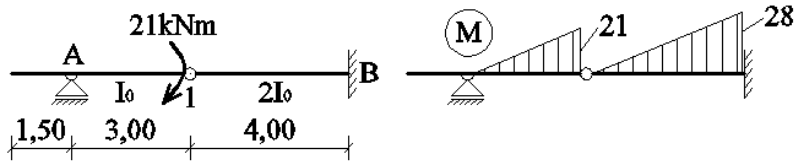
În articulația intermediară se aplică o forță verticală egală cu unitatea și se trasează diagrama de moment aferentă (fig. 8.3.a).

Se calculează deplasarea pe verticală din articulația intermediară:

$$\delta_2^v = \int \frac{M_x m_2^v}{EI_x} = \frac{1}{EI_0} \left[ \frac{1}{2} 17,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 1 + 17,5 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} 62,5 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{2}{3} 11,25 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} 62,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 1 \right] = -\frac{78}{EI_0}$$

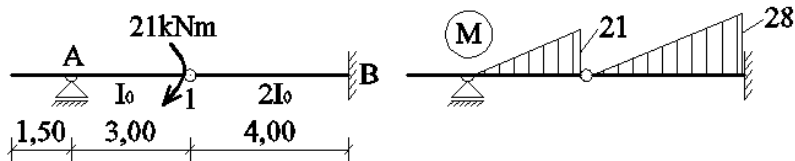
### 8.3. Probleme propuse

8.3.1. Având diagrama de moment încovoietor  $M$ , să se identifice deplasarea pe verticală a punctului 1,  $\Delta_1^v$ .



- a)  $149,33/EI_0$
- b)  $37,33/EI_0$
- c)  $74,67/EI_0$
- d)  $-82,35EI_0$
- e)  $54,25EI_0$

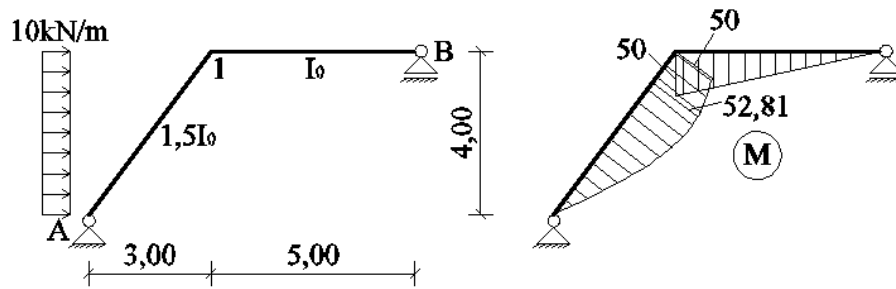
8.3.2. Având diagrama de moment încovoietor  $M$ , să se identifice rotirea relativă a secțiunilor din punctul 1,  $\theta_1^{rel}$ , știind  $EI_0 = 20,88 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$ .



- a) 0,000186 rad
- b) -0,00102 rad
- c) 0,001987 rad
- d) -0,000354 rad
- e) -0,000285 rad

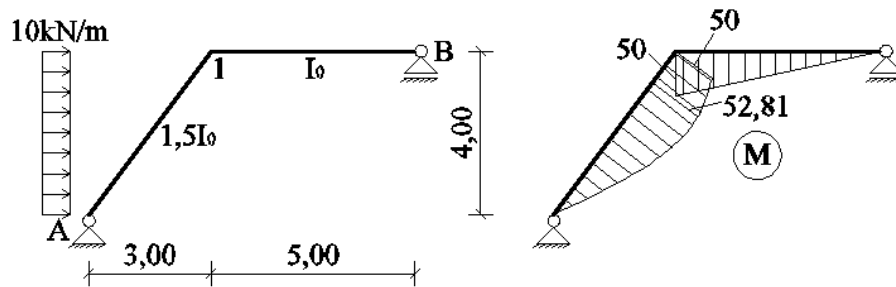


8.3.3. Având diagrama de moment încovoietor  $M$ , să se identifice deplasarea pe orizontală a punctului 1,  $\Delta_1^h$ .



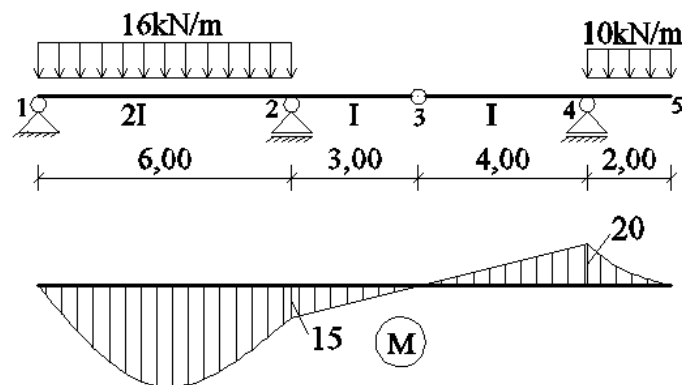
- a)  $468,78/EI_0$                       b)  $312,50/EI_0$                       c)  $364,58/EI_0$   
 d)  $277,78/EI_0$                       e)  $402,78/EI_0$

8.3.4. Având diagrama de moment încovoietor  $M$ , să se identifice rotirea secțiunii din punctul A,  $\theta_A$ .



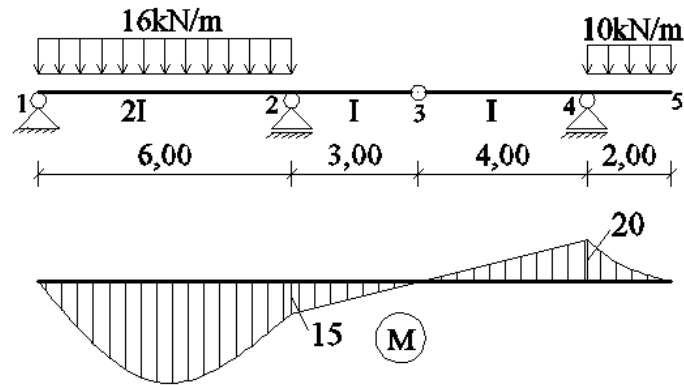
- a)  $150,69/EI_0$                       b)  $121,11/EI_0$                       c)  $152,91/EI_0$   
 d)  $168,75/EI_0$                       e)  $-145,36/EI_0$

8.3.5. Pentru grinda din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice deplasarea corectă pe verticală a punctului 3,  $\Delta_3^v$ ?



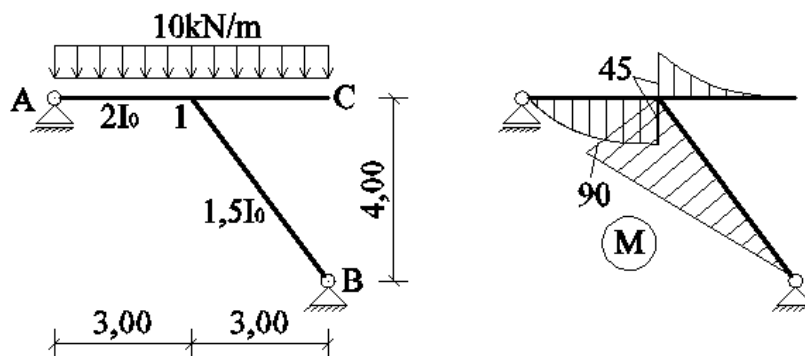
- a)  $306/EI$                               b)  $-153/EI$                               c)  $-306/EI$   
 d)  $400/2EI$                             e)  $-327/EI$

8.3.6. Pentru grinda din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice rotirea corectă a capătului liber 5,  $\theta_5$ .



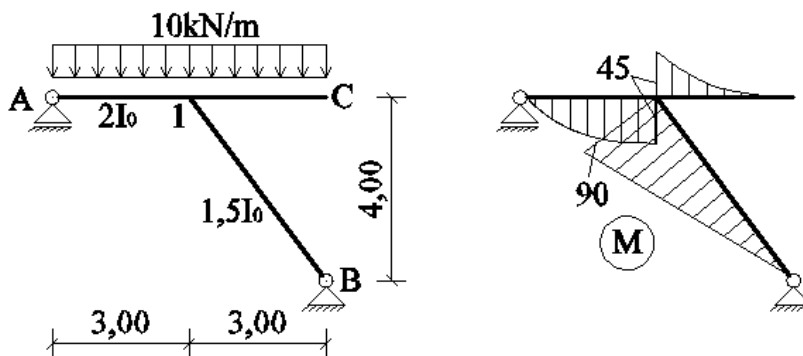
- a)  $195,75/EI$
- b)  $-116,50/EI$
- c)  $116,50/EI$
- d)  $-195,75/EI$
- e)  $145,25/EI$

8.3.7. Pentru structura din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice deplasarea corectă pe verticală a capătului liber C.



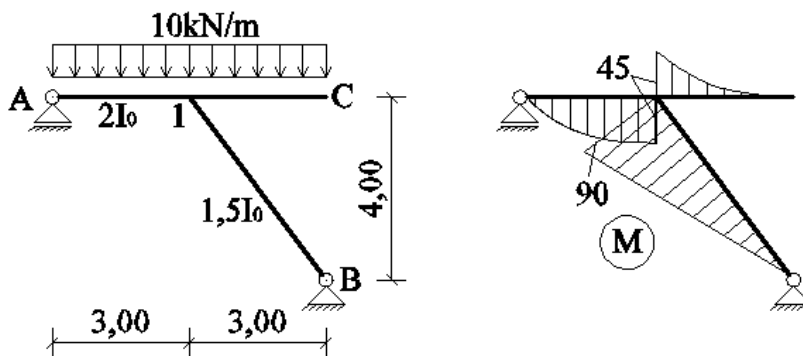
- a)  $551,25/EI_0$
- b)  $390,00/EI_0$
- c)  $401,25/EI_0$
- d)  $125,75/EI_0$
- e)  $260,65/EI_0$

8.3.8. Pentru structura din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice deplasarea corectă pe orizontală a capătului liber  $C$ .



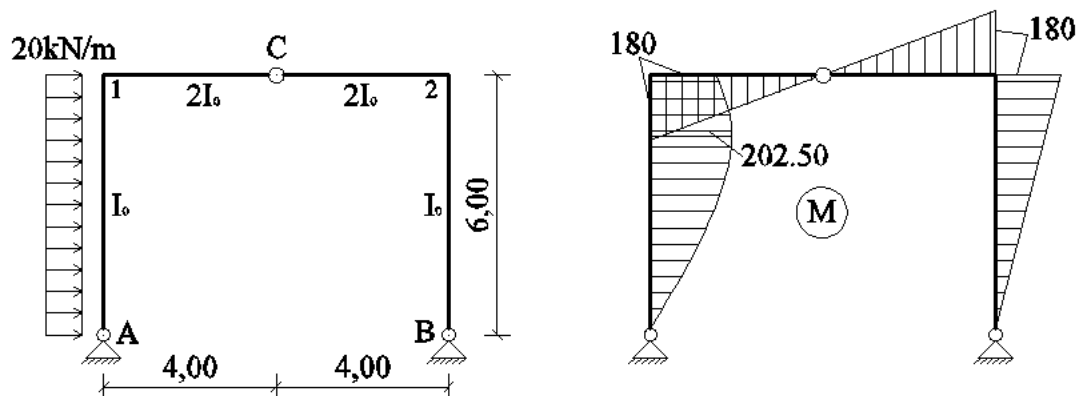
- a)  $256,25/EI_0$
- b)  $-412,50/EI_0$
- c)  $215,00/EI_0$
- d)  $175,18/EI_0$
- e)  $-154,15/EI_0$

8.3.9. Pentru structura din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice rotirea corectă a capătului liber  $C$ .



- a)  $109,06/EI_0$
- b)  $91,88/EI_0$
- c)  $89,42/EI_0$
- d)  $80,94/EI_0$
- e)  $123,37/EI_0$

8.3.10. Pentru cadrul din figură, având diagrama de moment încovoietor  $M$  dată, să se identifice deplasarea corectă pe verticală a articulației din punctul C.



- a)  $165,40/EI_0$
- b)  $-248,36/EI_0$
- c)  $57,46/EI_0$
- d)  $142,28/EI_0$
- e)  $-360,00/EI_0$

## Capitolul 9: Răspunsuri probleme propuse

<u>CAPITOLUL 1</u>	<u>CAPITOLUL 2</u>	<u>CAPITOLUL 3</u>	<u>CAPITOLUL 4</u>
1.3.1. e	2.3.1. d	4.3.1. e	4.3.1. a
1.3.2. d	2.3.2. e	4.3.2. a	4.3.2. a
1.3.3. a	2.3.3. a	4.3.3. b	4.3.3. d
1.3.4. c	2.3.4. b	4.3.4. a	4.3.4. e
1.3.5. d	2.3.5. d	4.3.5. a	4.3.5. a
1.3.6. e	2.3.6. a	4.3.6. d	4.3.6. b
1.3.7. a	2.3.7. e	4.3.7. a	4.3.7. c
1.3.8. e	2.3.8. a	4.3.8. c	4.3.8. e
1.3.9. a	2.3.9. c	4.3.9. a	4.3.9. b
	2.3.10. b	4.3.10. e	4.3.10. a

<u>CAPITOLUL 5</u>	<u>CAPITOLUL 6</u>	<u>CAPITOLUL 7</u>	<u>CAPITOLUL 8</u>
5.3.1. b	6.3.1. a	7.3.1. c	8.3.1. c
5.3.2. b	6.3.2. b	7.3.2. a	8.3.2. d
5.3.3. c	6.3.3. c	7.3.3. a	8.3.3. e
5.3.4. b	6.3.4. d	7.3.4. b	8.3.4. a
5.3.5. e	6.3.5. e	7.3.5. e	8.3.5. c
5.3.6. d	6.3.6. a	7.3.6. a	8.3.6. c
5.3.7. a	6.3.7. c	7.3.7. a	8.3.7. c
5.3.8. a	6.3.8. c	7.3.8. b	8.3.8. a
5.3.9. d	6.3.9. d	7.3.9. c	8.3.9. d
5.3.10. c	6.3.10. e	7.3.10. a	8.3.10. e
		7.3.11. c	
		7.3.12. a	
		7.3.13. a	

## **Bibliografie:**

- [1] BĂNUȚ, V., TEODORESCU, M., *Statica construcțiilor. Aplicații. Structuri static determinate*, Bucuresti, Editura Matrix Rom, 2003
- [2] CĂTĂRIG, AL., PETRINA, M., KOPENETZ, L., CHIRA, N., MATHE, A., BĂLAC, R., *Statica construcțiilor: structuri static determinate*, Cluj-Napoca, Editura U.T. Press, 2011
- [3] CĂTĂRIG, AL., PETRINA, M., KOPENETZ, L., CHIRA, N., BĂLAC, R., PLOAE, M., *Statica construcțiilor: structuri static determinate*, Cluj-Napoca, Editura U.T. Press, 2003
- [4] CĂTĂRIG, AL., KOPENETZ, L., TRIFA, F., CHIRA, N., *Statica construcțiilor. Structuri static determinate*, Vol 1, Bucuresti, Editura Matrix Rom, 2001